

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC



TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

8 2005
Số 338

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 42

DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ

Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội. ĐT-Fax: (04) 5144272

Email: toanhocvt@yahoo.com



Cố vấn Khoa học, Hội đồng Biên tập Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ



46th IMO MEXICO 2005

Đội tuyển Việt Nam tham dự

Kì thi Toán Quốc tế lần thứ 46 tại Mexico



BAN CỐ VẤN KHOA HỌC

GS. TSKH. NGUYỄN CẢNH TOÀN
GS. TSKH. TRẦN VĂN NHUNG
Thứ trưởng Bộ Giáo dục và Đào tạo
TS. NGUYỄN VĂN VỌNG
Thứ trưởng Bộ Giáo dục và Đào tạo
GS. ĐOÀN QUỲNH
Chủ tịch Hội đồng bộ môn Toán Bộ Giáo dục và Đào tạo
PGS. TS. TRẦN VĂN HẠO
Ủy viên Hội đồng bộ môn Toán Bộ Giáo dục và Đào tạo

CHỊU TRÁCH NHIỆM XUẤT BẢN

Chủ tịch Hội đồng Quản trị
Tổng Giám đốc NXB Giáo dục
NGÔ TRẦN ÁI
Phó Tổng Giám đốc
Tổng biên tập NXB Giáo dục
VŨ DƯƠNG THỤY

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

TS. TRẦN ĐÌNH CHÂU
ThS. NGUYỄN ANH DŨNG
TS. TRẦN NAM DŨNG
TS. NGUYỄN MINH ĐỨC
TS. NGUYỄN MINH HÀ
TS. NGUYỄN VIỆT HẢI
PGS. TS. LÊ QUỐC HÁN
ThS. PHẠM HÙNG
PGS. TS. VŨ THANH KHIẾT
GS. TSKH. NGUYỄN VĂN MẬU
Ông NGUYỄN KHẮC MINH

TS. TRẦN HỮU NAM
TS. PHẠM THỊ BẠCH NGỌC
PGS. TS. NGUYỄN ĐĂNG PHÁT
TS. TẠ DUY PHƯỢNG
ThS. NGUYỄN THẾ THẠCH
PGS. TSKH. ĐẶNG HÙNG THẮNG
PGS. TS. PHAN DOãn THOẠI
ThS. VŨ KIM THỦY
PGS. TS. VŨ DƯƠNG THỤY
GS. TSKH. NGÔ VIỆT TRUNG
ThS. HỒ QUANG VINH

CỘNG TÁC VIÊN THƯỜNG XUYÊN

Ô. Trần Chí Hiếu, Ô. Phan Thanh Quang, Ô. Nguyễn Đức Tấn (TP Hồ Chí Minh), TSKH. Vũ Đình Hòa, TS. Đàm Văn Nhí, ThS. Doãn Minh Cường (ĐHSP Hà Nội), PGS. TS. Bùi Quang Trường (ĐHXD Hà Nội), TS. Trần Văn Vương, PGS. TS. Tôn Thân (Viện CL&CTGD); TS. Trần Đình Viện, NGND. Vũ Hữu Bình, Ô. Nguyễn Văn Thiêm, Ô. Nguyễn Quang Hậu (Hà Nội), ThS. Nguyễn Xuân Bình, Ô. Trương Công Thành, TS. Trần Phương Dung (NXBGD), ThS. Đặng Thanh Hải (Hà Tây), ThS. Nguyễn Xuân Quang, Ô. Nguyễn Duy Liên (Vĩnh Phúc), Ô. Trịnh Khôi (Bắc Ninh) ThS. Trần Xuân Đáng (Nam Định), Ô. Trần Hồng Sơn (Thái Bình), ThS. Tô Xuân Hải (Hải Dương), Ô. Nguyễn Thanh Giang (Hưng Yên) ; ThS. Nguyễn Lễ, Ô. Nguyễn Khánh Nguyên (Hải Phòng), ThS. Lưu Xuân Tình, Ô. Phạm Ngọc Quang, Ô. Chu Văn Biên (Thanh Hóa), PGS. TS. Đào Tam (ĐH Vinh), Ô. Nguyễn Hữu Bằng, Ô. Nguyễn Văn Hạnh (Nghệ An), Ô. Hoàng Ngọc Cảnh, Ô. Phạm Quốc Phong (Hà Tĩnh), Ô. Nguyễn Trọng Tuấn (Gia Lai), Ô. Nguyễn Phước (Thừa Thiên - Huế), Ô. Nguyễn Văn Thông (Đà Nẵng), Ô. Nguyễn Ngọc Khoa (Quảng Ngãi), Ô. Huỳnh Duy Thủy (Bình Định), Ô. Thái Nhật Phượng (Khánh Hòa), Ô. Lê Quang Trung, Ô. Đỗ Thanh Hân (Bạc Liêu), TS. Tạ Hồng Quảng (Bà Rịa - Vũng Tàu) ...

Tổng biên tập: PHAN DOãn THOẠI Trưởng ban biên tập: NGUYỄN VIỆT HẢI. Thư kí Tòa soạn: VŨ KIM THỦY

Biên tập: HỒ QUANG VINH. Trị sự, Chế bản : VŨ ANH THƯ, NGUYỄN THỊ OANH.

Đại diện phía Nam : TRẦN CHÍ HIẾU, 231 Nguyễn Văn Cừ, Q. 5, Tp. Hồ Chí Minh. ĐT : 08.8309049

THƯ TỪ BAN BIÊN TẬP

Bạn đọc thân mến,

Hơn bốn mươi năm qua, Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ không ngừng phát triển và đã trở thành người bạn thân thiết của nhiều thế hệ học sinh yêu Toán, các giáo viên say sưa với nghề. Những thành tích của Tạp chí, đã được ghi nhận bởi những Huân chương cao quý do Nhà nước trao tặng, là nhờ có sự đóng góp công sức của nhiều nhà Toán học, nhà Sư phạm, các ủy viên Hội đồng biên tập, các cộng tác viên của Tạp chí. Thay mặt Ban biên tập, chúng tôi xin chân thành cảm ơn bạn đọc gần xa, các nhà khoa học và các cộng tác viên về sự đóng góp đó. Chúng tôi xin cảm ơn Ban lãnh đạo, cán bộ, nhân viên Nhà xuất bản Giáo dục với tình cảm đặc biệt đã tạo điều kiện thuận lợi cho hoạt động của Tạp chí.

Để Tạp chí THTT đổi mới và tiếp tục phát triển, đáp ứng những đòi hỏi của xã hội trong giai đoạn mới, Bộ trưởng Bộ Giáo dục và Đào tạo đã cho phép thành lập Ban cố vấn Khoa học và Hội đồng Biên tập mới. Tòa soạn Tạp chí xin trân trọng giới thiệu danh sách Ban cố vấn Khoa học và Hội đồng Biên tập cùng bạn đọc. Lễ ra mắt Ban cố vấn Khoa học và Hội đồng Biên tập đã được tổ chức trọng thể tại Hội trường Nhà xuất bản Giáo dục 72 Trần Hưng Đạo ngày 01.08.2005.

Nâng cao hơn nữa chất lượng Toán học của Tạp chí, là yêu cầu của nhiều bạn đọc yêu toán. Chúng tôi mong muốn các cộng tác viên, các thành viên của Hội Toán học Việt Nam cộng tác chặt chẽ hơn, tích cực viết bài với nội dung toán học hiện đại, thực tiễn, làm cho Tạp chí hấp dẫn hơn nữa, kích thích hơn nữa niềm say mê sáng tạo của học sinh. Mặt khác, cùng với xu hướng thay đổi phương pháp học tập, THTT cũng muốn đến với bạn đọc bằng con đường học mà vui, vui mà học với phong cách trẻ hơn, đúng như tên gọi của mình.

Tạp chí xin chân thành cảm ơn sự hợp tác quý báu của các bạn.

THTT



MỘT SỐ BÀI TOÁN VỀ TẬP HỢP ĐIỂM THỎA MÃN BẤT ĐẲNG THỨC

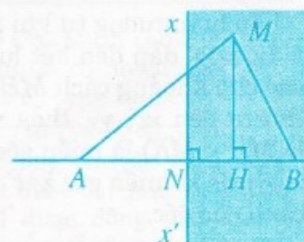
VŨ HỮU CHÍNH
(GV THCS Hồng Bàng, Hải Phòng)

Trong hình học phẳng ta đã biết nhiều bài toán tìm tập hợp điểm thỏa mãn một đẳng thức nào đó, tập hợp điểm như thế thường là một đường thẳng, đường cong (hoặc một phần của chúng). Trên cơ sở các bài toán đó ta có thể mở rộng ra xét các bài toán tìm tập hợp điểm thỏa mãn một bất đẳng thức (BĐT) tương ứng với đẳng thức nói trên, khi đó tập hợp điểm thường là một miền mặt phẳng bị giới hạn bởi các đường thẳng, đường cong (hoặc một phần của chúng) mà các đường này thỏa mãn các đẳng thức tương ứng.

Các bài toán cơ bản

Bài toán 1. Cho đoạn thẳng AB . Tìm tập hợp điểm M trên mặt phẳng thỏa mãn $MA > MB$.

Lời giải. Dựng đường trung trực xx' của AB , cắt AB tại N (h. 1). Gọi H là hình chiếu của M trên đường thẳng AB . Ta có $MA > MB \Leftrightarrow HA > HB \Leftrightarrow H$ thuộc tia NB (khác N) $\Leftrightarrow M$ thuộc nửa mặt phẳng chứa B bờ xx' (không kể xx').

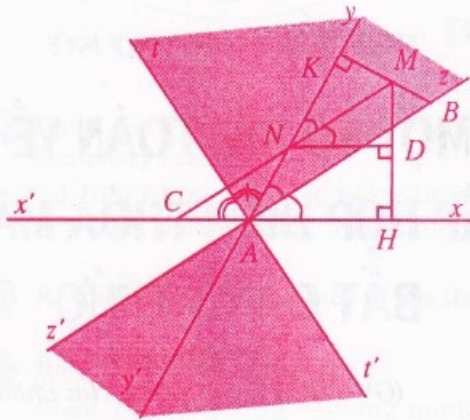


Hình 1

Vậy tập hợp điểm M thỏa mãn $MA > MB$ (hoặc là $MA < MB$) là nửa mặt phẳng chứa điểm B (hoặc là chứa điểm A) bờ xx' , không kể xx' .

Bài toán 2. Cho hai đường thẳng xx' và yy' cắt nhau tại điểm A . Tìm tập hợp điểm M sao cho khoảng cách MH , MK từ điểm M theo thứ tự đến xx' , yy' thỏa mãn $MH > MK$.

Lời giải. Gọi Az , Az' là hai tia phân giác của hai góc đối đỉnh xAy và $x'Ay'$. Gọi At , At' là hai tia phân giác của hai góc đối đỉnh $x'Ay$ và xAy' (h. 2).



Hình 2

Xét điểm M thuộc góc yAz . Kẻ $MH \perp xx'$ tại H . Kẻ $MK \perp yy'$ tại K . Nếu K trùng M thì có ngay $MH > MK$. Nếu K khác M thì tia KM cắt tia phân giác Az tại B . Từ M trên đoạn KB kẻ $MC \parallel zz'$ thì MC cắt đoạn AK của $\triangle ABK$ tại N và cắt tia Ax' tại C . Từ N trên đoạn MC kẻ $ND \parallel xx'$ thì ND cắt đoạn MH của $\triangle MCH$ tại D .

Ta có $MH > MD = MK$ (1).

Nếu M thuộc góc xAz , kẻ $MH \perp xx'$ thì tia HM cắt tia phân giác Az tại B , rồi lại làm tương tự như trên ta có $MH < MK$ (2).

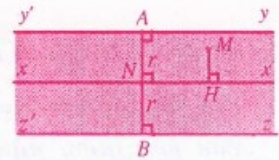
Từ (1) và (2) suy ra : Điểm M thuộc góc xAy thỏa mãn $MH > MK \Leftrightarrow M$ thuộc góc yAz , không kể Az .

Lập luận tương tự khi M thuộc các góc $x'Ay'$, $x'Ay$, xAy' dẫn đến kết luận : Tập hợp điểm M sao cho khoảng cách MH , MK từ điểm M theo thứ tự đến xx' , yy' thỏa mãn $MH > MK$ (hoặc là $MH < MK$) là miền góc zAt và $z'At'$ theo thứ tự (hoặc là miền góc zAt' và tAz), không kể các cạnh của góc.

Bài toán 3. Cho đường thẳng xx' và độ dài r không đổi. Tìm tập hợp điểm M sao cho khoảng cách MH từ M đến đường thẳng xx' thỏa mãn $MH < r$.

Lời giải. Dựng đoạn thẳng $AB \perp xx'$ tại N sao cho N là trung điểm của AB và $AN = NB = r$ (h. 3). Qua A dựng đường thẳng $yy' \parallel xx'$. Qua

B dựng đường thẳng $zz' \parallel xx'$. Dễ dàng thấy rằng $MH < AN = BN \Leftrightarrow M$ thuộc miền mặt phẳng nằm giữa yy' và zz' . Ta có: Tập hợp điểm

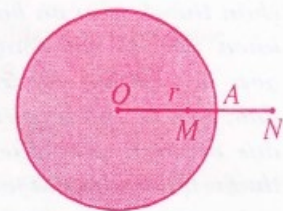


Hình 3

M sao cho khoảng cách MH từ M đến xx' thỏa mãn $MH < r$ (hoặc là $MH > r$), là miền mặt phẳng nằm giữa yy' và zz' (hoặc là hai nửa mặt phẳng bờ yy' và zz' mà không chứa điểm N), không kể yy' và zz' .

Bài toán 4. Cho điểm O và độ dài r không đổi. Tìm tập hợp điểm M sao cho khoảng cách $MO < r$.

Lời giải. Dễ thấy rằng: Tập hợp điểm M sao cho $MO < r$ (hoặc là $ON > r$) là miền mặt phẳng nằm bên trong (hoặc là nằm bên ngoài) đường tròn tâm O bán kính $OA = r$, không kể đường tròn đó (h.4).



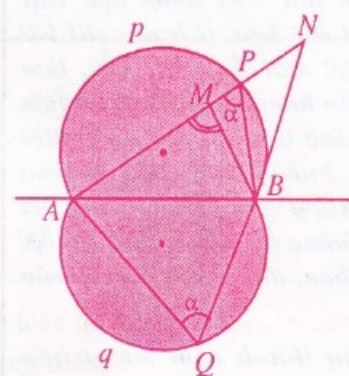
Hình 4

Bài toán 5. Cho đoạn thẳng AB và số đo góc α không đổi với $0^\circ < \alpha < 180^\circ$. Tìm tập hợp điểm M sao cho $\widehat{AMB} > \alpha$.

Lời giải. Giả sử $\widehat{APB} = \alpha$. Trên nửa mặt phẳng chứa P bờ AB dựng cung chứa góc $\widehat{APB}$ đi qua điểm P (h. 5). Trên tia AP lấy các điểm M , N nào đó $M \neq A$ thì ta có $AM < AP < AN \Leftrightarrow \widehat{AMB} > \widehat{APB} > \widehat{ANB}$.

Như thế, tập hợp điểm M thuộc nửa mặt phẳng chứa điểm P bờ AB thỏa mãn $\widehat{AMB} > \alpha$

(hoặc là $\widehat{AMB} < \alpha$) là miền mặt phẳng nằm bên trong (hoặc là nằm bên ngoài) cung tròn $\widehat{APB}$ và đường thẳng AB , không kể đường thẳng AB . Xét tương tự với nửa mặt phẳng bờ AB



Hình 5

chứa điểm Q (P, Q nằm về hai phía của đường thẳng AB) mà $\widehat{AQB} = \alpha$, ta dẫn đến kết luận:

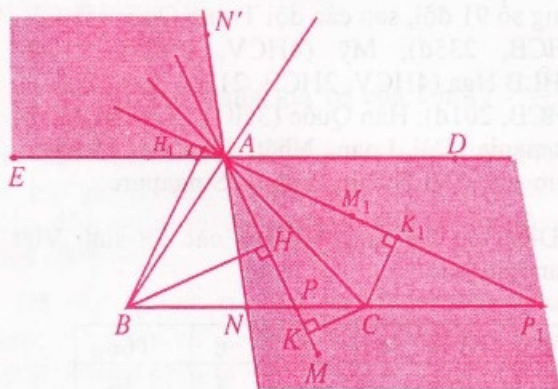
Tập hợp điểm M thỏa mãn $\widehat{AMB} > \alpha$ (hoặc là $\widehat{AMB} < \alpha$) là phần mặt phẳng nằm bên trong (hoặc là bên ngoài) hai cung tròn $\widehat{ApB}$ và $\widehat{AqB}$, không kể đường thẳng AB .

Từ các bài toán cơ bản này có thể phát triển thành các bài toán với các BĐT phức tạp hơn.

Một số bài toán khác

Bài toán 6. Cho tam giác ABC . Tìm tập hợp điểm M thỏa mãn bất đẳng thức diện tích $S(MAB) > S(MAC)$.

Lời giải. Giả sử đường thẳng AM cắt đường thẳng BC tại P . Dựng hình bình hành $ABCD$ và $ACBE$. Gọi N là trung điểm của BC , AN' là tia đối của tia AN . Kẻ $BH \perp AM$ tại H . Kẻ $CK \perp AM$ tại K (h. 6). Ta có : $S(MAB) > S(MAC) \Leftrightarrow MA \cdot BH > MA \cdot CK \Leftrightarrow BH > CK \Leftrightarrow BP > CP \Leftrightarrow P$ thuộc tia NC (P khác N) $\Leftrightarrow M$ thuộc miền góc NAD và $N'AE$, không kể các đường thẳng DE và NN' .



Hình 6

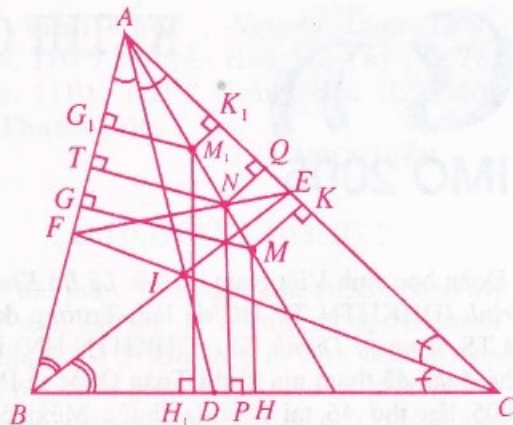
Bài toán 7. Cho tam giác ABC . Lấy điểm M nào đó nằm trong $\triangle ABC$. Gọi H, K, G là hình chiếu của điểm M trên các cạnh BC, CA, AB .

- Tìm tập hợp điểm M sao cho $MK < MH < MG$.
- Tìm tập hợp điểm M thỏa mãn điều kiện : $MH < MK + MG$.

Lời giải. Giả sử ba đường phân giác AD, BE, CF của $\triangle ABC$ cắt nhau tại điểm I (D, E, F lần lượt thuộc BC, CA, AB). Xem hình 7).

a) Theo bài toán 2 ta có

$MK < MH \Leftrightarrow M$ thuộc miền trong $\triangle ACF$ (không kể CF)



Hình 7

$MH < MG \Leftrightarrow M$ thuộc miền trong $\triangle CBE$ (không kể BE).

Vì vậy $MK < MH < MG \Leftrightarrow M$ thuộc miền trong tam giác CEI (không kể CI và IE).

b) Giả sử tia AM cắt EF ở N . Gọi P, Q, T lần lượt là hình chiếu của N trên BC, CA, AB . Ta có : $NQ + NT = NP$.

(Bạn đọc tự chứng minh, hoặc xem lời giải bài T4/261 trong THPT số 265 tháng 7.1999). Từ đó nếu M_1 trên tia AN trong miền tam giác AEF mà $AM_1 < AN$ thì

$$M_1K_1 + M_1G_1 < NQ + NT = NP < M_1H_1 \quad (3)$$

Nếu M trên tia AN trong miền tứ giác $BFEC$ mà $AM > AN$ thì $MK + MG > NQ + NT = NP > MH$ (4).

Từ (3) và (4) suy ra : Tập hợp điểm M trong $\triangle ABC$ thỏa mãn $MH < MK + MG$ là miền tứ giác $BFEC$, không kể EF .

Từ các bài toán về tìm tập hợp điểm thỏa mãn một đẳng thức, các bạn hãy sáng tạo ra các bài toán tìm tập hợp điểm thỏa mãn một bất đẳng thức tương ứng với đẳng thức trên.

Bài tập

Bài 1. Cho đường tròn tâm O bán kính R .

- Tìm tập hợp điểm M nằm trong đường tròn trên sao cho $MO > 2MP$, trong đó P là giao điểm của tia OM với đường tròn.
- Tìm tập hợp điểm M nằm trong đường tròn trên sao cho có thể kẻ dây AB đi qua M thỏa mãn $MA = 2MB$.

Bài 2. Cho tam giác ABC có $AB = AC$. Lấy điểm M nào đó nằm trong tam giác ABC . Gọi H, K, G lần lượt là hình chiếu của điểm M trên các cạnh BC, CA, AB . Tìm tập hợp điểm M sao cho $MH^2 < MK \cdot MG$.



KÌ THI OLYMPIC TOÁN QUỐC TẾ LẦN THỨ 46

LÊ BÁ KHÁNH TRÌNH,
NGUYỄN THÀNH VĂN, VŨ ĐÌNH HÒA

Đoàn học sinh Việt Nam do TS. Lê Bá Khánh Trình (ĐHKHTN TP HCM) làm Trưởng đoàn và TS. Nguyễn Thành Văn (ĐHKHTN HN) làm Phó đoàn đã tham gia kì thi Toán Quốc tế IMO 2005 lần thứ 46 tại Mérida thuộc Mêxicô từ 9.7.2005 tới ngày 19.7.2005. Tham gia đoàn còn có đại diện của Bộ GD và ĐT là TSKH. Vũ Đình Hòa (ĐHSP Hà Nội) với nhiệm vụ hỗ trợ mọi mặt cho đoàn và trao đổi về việc tổ chức kì thi Toán Quốc tế IMO 2007 tại Việt Nam. Hai quan sát viên đi cùng Đoàn là thầy giáo Lê Tự Cường, Trường THPT chuyên Trần Phú, Hải Phòng và thầy giáo Nguyễn Văn Thông, Trường THPT chuyên Lê Quý Đôn, Đà Nẵng.

Các giải cao nhất thuộc về 16 thí sinh với điểm tuyệt đối 42/42 điểm. Có 1 thí sinh được giải đặc biệt vì lời giải ngắn gọn cho bài 3.

Kết quả thi của Đoàn học sinh Việt Nam như sau:

1. Phạm Kim Hùng, HS lớp 12, Khối PT chuyên Toán- Tin, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội: 32 điểm (Huy chương Bạc).

2. Trần Chiêu Minh, HS lớp 12 trường THPT Năng khiếu, ĐHQG TP Hồ Chí Minh : 31 điểm (Huy chương Bạc).

3. Trần Trọng Đan, HS lớp 12, trường THPT Năng khiếu Trần Phú, TP Hải Phòng : 30 điểm (Huy chương Bạc).

4. Đỗ Quốc Khánh, HS lớp 12, Trường THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP Đà Nẵng : 19 điểm (Huy chương Đồng).

5. Nguyễn Trường Thọ, HS lớp 12, Khối PT chuyên Toán - Tin, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội : 16 điểm (Huy chương Đồng).

6. Nguyễn Nguyên Hùng, HS lớp 12 Khối PT chuyên Toán - Tin, ĐHSP Hà Nội : 15 điểm (Huy chương Đồng).

Theo kết quả xếp hạng không chính thức, đội Việt Nam có tổng số 143 điểm, xếp thứ 15 trên tổng số 91 đội, sau các đội Trung Quốc (5HCV, 1HCB, 235đ), Mỹ (4HCV, 2HCB, 213đ), CHLB Nga (4HCV, 2HCB, 212đ), Iran (2HCV, 4HCB, 201đ), Hàn Quốc (3HCV, 3HCB, 200đ), Romania, Đài Loan, Nhật, Ukraine, Hungari, Bungari, CHLB Đức, Anh và Singapore.

Điểm cụ thể từng bài của các thí sinh Việt Nam như sau :

Họ và tên	1	2	3	4	5	6	Tổng
Trần Trọng Đan	5	7	0	7	7	4	30
Đỗ Quốc Khánh	0	1	7	2	7	2	19
Nguyễn Nguyên Hùng	0	7	0	1	7	0	15
Nguyễn Trường Thọ	1	1	6	1	7	0	16
Trần Chiêu Minh	7	7	6	2	7	2	31
Phạm Kim Hùng	7	7	7	2	7	2	32
Tổng	20	30	26	15	42	10	143

Sau đây là 6 bài thi :

Bài 1. Trên các cạnh của tam giác đều ABC chọn sáu điểm: A_1, A_2 trên BC; B_1, B_2 trên CA; C_1, C_2 trên AB. Các điểm này là đỉnh của một lục giác lồi $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ có sáu cạnh bằng nhau. Chứng minh rằng các đường thẳng A_1B_2 , B_1C_2 và C_1A_2 đồng quy.

Bài 2. Cho $a_1, a_2, \dots$ là một dãy số nguyên với vô hạn số hạng dương và vô hạn số hạng âm. Biết rằng với mỗi số nguyên dương n , các số $a_1, a_2, \dots, a_n$ cho n số dư khác nhau trong phép chia cho n . Chứng minh rằng mỗi số nguyên xuất hiện đúng một lần trong dãy số này.

BẠN CÓ BIẾT ?

CHỨNG MINH MỚI CỦA BÀI TOÁN BỐN MÀU

Bốn màu là đủ để tô một bản đồ địa lí, sao cho hai nước cạnh nhau bao giờ cũng mang hai màu khác nhau. Kết luận này do *Kenneth Appel* và *Wolfgang Haken* nêu ra năm 1976 và đã chứng minh bài toán nổi tiếng có tên gọi là *Bài toán bốn màu* xuất hiện từ giữa thế kỉ XIX. Nay nó được chứng minh một lần nữa bằng máy vi tính. Tác giả của chứng minh mới này là *Georges Gonthier* ở Viện nghiên cứu Microsoft ở Cambridge, với sự giúp đỡ của *Benjamin Werner*.

Trước đây kết luận này đã được chứng minh với sự hỗ trợ của công cụ tin học, do *Appel* và *Haken* thực hiện. Phải chăng chứng minh mới thay cho chứng minh cũ ?

Trước hết phải hiểu thế nào là "chứng minh bằng máy vi tính". Năm 1976 *Appel* và *Haken* đã dùng máy vi tính như một siêu máy tính đặc biệt để tìm kết quả của hàng triệu phép tính mỗi giây và tổ hợp chúng mà phép tính thông thường bằng tay làm không xuể.

Phép chứng minh ngày nay của *Gonthier* đã sử dụng máy vi tính theo một cách khác : đó là dùng ngay máy vi tính để kiểm tra chính phép chứng minh, chứ không phải chỉ để làm phép tính. Như vậy, người ta có thể đảm bảo không có sai lầm về phép chứng minh.

Có phải lí do của sự chứng minh là do nghi ngờ tính chính xác của các công trình của *Appel* và *Haken* ?

Phải nói thẳng rằng sai lầm trong chương trình hóa là điều không phải là không thể xảy ra. Vấn đề đặt ra là cấp độ phương pháp luận : rất khó mà đảm bảo rằng những chương trình do *Appel* và *Haken* lập ra đáp ứng được những yêu cầu mà người thiết kế vạch ra. Trong khi đó chứng minh của *Gonthier* không rơi vào tình trạng tương tự, vì nó chứng tỏ rằng những chương trình lập ra là đúng, bằng cách dùng một hệ thống kiểm tra phép chứng minh gọi là *Coq* (Con gà). Một điều lợi cuối cùng là toàn bộ phép chứng minh đều được viết ra theo cùng một ngôn ngữ, tránh được chuyện "nửa cổ điển, nửa tin học".

Cuối cùng, "Định lí bốn màu" dùng để làm gì ?

Khi *Francis Guthrie* đặt vấn đề này năm 1853, không ai có thể nghĩ đến công dụng của nó. Nhưng sau đó định lí bốn màu đã đem lại nhiều lợi ích cho cuộc sống. Bài toán bốn màu còn giúp vào sự phát triển của tin học. Ngược lại tin học không những giúp việc tính toán, mà còn thúc đẩy Toán học phát triển. Ví dụ bài toán về hỗ trợ tần số trong điện thoại di động, mà mục tiêu là phân chia một số giới hạn tần số phát cho những vùng sử dụng, có tính đến những vấn đề mà sự phủ sóng có thể đặt ra. Đây là một ứng dụng của bài toán bốn màu vào lĩnh vực mới và hiện đại là truyền thông không dây.

PHAN THANH QUANG
(Theo Benoit Rittaud trong
C'a M'intéresse số 4/2005)

Bài 3. Cho x, y và z là các số thực dương sao cho $xyz \geq 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{y^5 - y^2}{y^5 + z^2 + x^2} + \frac{z^5 - z^2}{z^5 + x^2 + y^2} \geq 0.$$

Bài 4. Xét dãy số $a_1, a_2, \dots$ được xác định như sau

$$a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Tìm tất cả các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau với mọi số hạng của dãy số trên.

Bài 5. Cho $ABCD$ là một tứ giác lồi có các cạnh BC và AD bằng nhau và không song song với nhau. Xét E và F lần lượt là các điểm nằm ở phần trong các cạnh BC và AD sao cho $BE = DF$.

Các đường thẳng AC và BD cắt nhau tại điểm P , các đường thẳng BD và EF cắt nhau tại điểm Q , các đường thẳng EF và AC cắt nhau tại điểm R . Chứng minh rằng khi E và F thay đổi, đường tròn ngoại tiếp tam giác PQR luôn đi qua một điểm cố định thứ hai khác P .

Bài 6. Trong một kì thi học sinh giỏi, các thí sinh phải giải 6 bài toán. Biết rằng với hai bài toán bất kì luôn có nhiều hơn $\frac{2}{5}$ số thí sinh dự

thi giải được cả hai bài này. Ngoài ra, không có thí sinh nào giải được cả 6 bài toán. Chứng minh rằng có ít nhất 2 thí sinh sao cho mỗi người trong họ giải được đúng 5 bài toán.



LTS : Trên tạp chí THPT số 337, tháng 7.2005 đã trình bày đáp án và những bình luận cho câu IV, V khối A, Đề thi tuyển sinh Đại học 2005. Trong bài báo này chúng tôi giới thiệu tiếp đáp án và lời bình của một số câu khối A, B, D trong các kì thi tuyển sinh Đại học vừa qua của thầy giáo Nguyễn Anh Dũng. Đồng thời giới thiệu các bài viết khai thác sâu thêm đối với câu III khối A của thầy giáo Lê Quốc Hán và câu IV.2 khối A của thầy giáo Trần Mạnh Hưng. Hi vọng rằng những bài viết này sẽ giúp các bạn học sinh năm tới đạt kết quả tốt trong kì thi vào Đại học, Cao đẳng.

VỀ CÁCH GIẢI ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC MÔN TOÁN NĂM 2005

(Tiếp theo kì trước)

NGUYỄN ANH DŨNG
(Hà Nội)

CÁC BÀI TOÁN VỀ HÀM SỐ

Câu I.2 Khối A. Gọi (C_m) là đồ thị hàm số $y = mx + \frac{1}{x}$ (*) (m là tham số).

Tìm m để hàm số (*) có cực trị và khoảng cách từ điểm cực tiểu của (C_m) đến tiệm cận xiên của (C_m) bằng $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Hướng dẫn giải. Ta có $y' = m - \frac{1}{x^2}$; $y' = 0$
 $\Leftrightarrow \frac{1}{m^2} = m > 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{m}}$.

Xét dấu y' , tìm được tọa độ điểm cực tiểu $T\left(\frac{1}{\sqrt{m}}; 2\sqrt{m}\right)$.

Đồ thị có tiệm cận xiên $y = mx$. Khoảng cách từ điểm T đến tiệm cận xiên bằng $\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{m^2+1}}$. Từ giả thiết ta có $\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{m^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$
 $\Leftrightarrow m^2 - 2m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$.

Lưu ý. Khoảng cách từ điểm $A(x_0; y_0)$ đến đường thẳng $y = ax + b$ (Δ) được tính bởi công thức $d(A, \Delta) = \frac{|ax_0 - y_0 + b|}{\sqrt{a^2 + 1}}$.

Bài luyện tập. Cho hàm số

$$y = \frac{x^2 - 3x + 4}{x - 1}.$$

Chứng minh rằng tích các khoảng cách từ điểm M bất kì trên đồ thị đến hai đường tiệm cận của đồ thị có giá trị không phụ thuộc vị trí của điểm M.

Câu I.2 Khối B. Gọi (C_m) là đồ thị của hàm số $y = \frac{x^2 + (m+1)x + m + 1}{x + 1}$.

Chứng minh rằng với tham số m bất kì, đồ thị (C_m) luôn có điểm cực đại, điểm cực tiểu và khoảng cách giữa hai điểm đó bằng $\sqrt{20}$.

Hướng dẫn giải. Ta có $y = x + m + \frac{1}{x + 1}$

$$y' = 1 - \frac{1}{(x+1)^2}; y' = 0 \Leftrightarrow x = -2, x = 0.$$

Xét dấu y' tìm được điểm cực đại D $(-2; m-3)$ và cực tiểu T $(0; m+1)$, suy ra

$$DT = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20}.$$

Lưu ý. Hàm số phân thức $y = \frac{u}{v}$ có $y' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$. Khi $y' = 0$ thì $u'v = v'u$ dẫn đến $\frac{u}{v} = \frac{v'u'}{v^2}$.

Do đó nếu hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x + b'}$ có điểm cực trị tại $(x_0; y_0)$ thì

$$y_0 = \frac{u(x_0)}{v(x_0)} = \frac{u'(x_0)}{v'(x_0)} = \frac{2ax_0}{a'} + \frac{b}{a'}.$$

Từ đó suy ra PT đường thẳng đi qua hai điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị là

$$y = \frac{2ax}{a'} + \frac{b}{a'}.$$

Bài luyện tập. Cho hàm số

$$y = \frac{x^2 + (3m+2)x + 2m-1}{x-1}.$$

Tìm m để hàm số có cực trị và đường thẳng đi qua hai điểm cực đại, cực tiểu tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 2.

Câu I.2 Khối D. Gọi (C_m) là đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{m}{2}x^2 + \frac{1}{3}$.

Gọi M là điểm thuộc (C_m) có hoành độ bằng -1 . Tìm m để tiếp tuyến của (C_m) tại điểm M song song với đường thẳng $5x - y = 0$.

Hướng dẫn giải. Ta có $y' = x^2 - mx$. PT tiếp tuyến tại điểm $x = -1$ là $y = (m+1)x + \frac{m+2}{2}$. Tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = 5x$ khi $\begin{cases} m+1=5 \\ m+2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m=4$.

Lưu ý. Nếu bạn cho rằng tiếp tuyến tại $x = -1$ song song với đường thẳng $5x - y = 0$ chỉ cần điều kiện $y'(-1) = 5$ thì bạn sẽ bị mất điểm vì thiếu điều kiện $m+2 \neq 0$. Đôi khi nếu thiếu điều kiện hệ số tự do khác không thì tiếp tuyến trùng với đường thẳng đã cho.

Bài luyện tập. Cho hàm số

$y = x^3 - 3x^2 + 4x + 1$. Tìm a để đồ thị có hai tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = ax$. Giả sử M, N là các điểm tiếp xúc. Hãy chứng minh rằng trung điểm của đoạn thẳng MN cố định (khi a thay đổi).

CÁC BÀI TOÁN VỀ

PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

Câu II.2 Khối A. Giải phương trình

$$\cos^2 3x \cdot \cos 2x - \cos^2 x = 0.$$

Hướng dẫn giải. PT tương đương với:

$$\frac{1+\cos 6x}{2} \cdot \cos 2x - \frac{1+\cos 2x}{2} = 0.$$

Thay $\cos 6x = 4\cos^3 2x - 3\cos 2x$ và rút gọn được PT

$$4\cos^4 2x - 3\cos^2 2x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\cos^2 2x - 1)(4\cos^2 2x + 1) = 0.$$

Ta được nghiệm $\cos^2 2x = 1 \Leftrightarrow \sin 2x = 0$

$$\Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Lưu ý. Việc giải PT lượng giác có hai hướng thường gặp sau:

- 1) Quy về phương trình bậc 2, bậc 3, ... đối với sin hoặc cosin của một góc nào đó.
- 2) Biến đổi phương trình về dạng tích.

Các số hạng $\cos^2 3u$, $\sin^2 3u$ thường được hạ bậc để đưa về $\cos 6u$ rồi sau đó dùng công thức góc nhân ba để đưa về $\cos 2u$.

Bài luyện tập. Giải phương trình

$$\sin^2 3x = 4\cos 4x + 3.$$

Câu II.2 Khối B. Giải phương trình

$$1 + \sin x + \cos x + \sin 2x + \cos 2x = 0.$$

Hướng dẫn giải. Để ý rằng

$$1 + \sin 2x = (\sin x + \cos x)^2,$$

$$\cos 2x = (\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x); \text{ hoặc}$$

$$\sin 2x + 1 + \cos 2x = 2\sin x \cos x + 2\cos^2 x = 2\cos x(\sin x + \cos x).$$

Biến đổi PT về dạng tích

$$(\sin x + \cos x)(2\cos x + 1) = 0$$

Đến đây việc giải tiếp không còn gì khó khăn.

Lưu ý. Các số hạng có chứa thừa số $\sin x \pm \cos x$ thường gặp là $1 \pm \sin 2x$, $\cos 2x$, $1 \pm \tan x$, $1 \pm \cot x$, $\sin^3 x \pm \cos^3 x$, $\sin^4 x - \cos^4 x$, ...

Bài luyện tập. Giải phương trình

$$\sin^3 x - \cos^3 x = 1 - \cot x + \cos 2x.$$

Câu II.2 Khối D. Giải phương trình

$$\cos^4 x + \sin^4 x + \cos\left(x - \frac{p}{4}\right) \sin\left(3x - \frac{p}{4}\right) \cdot \frac{3}{2} = 0.$$

Hướng dẫn giải

$$\text{Thay: } \cos^4 x + \sin^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x \\ = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x,$$

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \left[\sin\left(4x - \frac{\pi}{2}\right) + \sin 2x \right]$$

$$\text{và } \sin\left(4x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos 4x = 2\sin^2 2x - 1$$

vào PT ban đầu và biến đổi để được PT $\sin^2 2x + \sin 2x - 2 = 0$.

Bạn đọc tự giải tiếp.

Lưu ý. Các biến đổi thường gặp

$$\cos^4 x + \sin^4 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x =$$

$$= \frac{1 + \cos^2 2x}{2} = \frac{3 + \cos 4x}{4}$$

$$\cos^6 x + \sin^6 x = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x =$$

$$= \frac{1 + 3\cos^2 2x}{4} = \frac{5 + 3\cos 4x}{8}$$

Bài luyện tập. Giải phương trình

$$\cos^4 x + \sin^4 x - 2\left(\cos^6 \frac{x}{2} + \sin^6 \frac{x}{2}\right) + 1 = 0.$$

THÊM MỘT CÁCH GIẢI BÀI TOÁN TỔ HỢP

TRẦN MẠNH HÙNG

(GV. trường CĐSP TP Hồ Chí Minh)

Đề thi tuyển sinh Đại học 2005, môn Toán khối A, câu IV phần 2 có bài toán về tổ hợp sau:

Tìm số nguyên dương n sao cho

$$C_{2n+1}^1 - 2 \cdot 2C_{2n+1}^2 + 3 \cdot 2^2 C_{2n+1}^3 - 4 \cdot 2^3 C_{2n+1}^4 + \dots \\ + (2n+1)2^{2n} C_{2n+1}^{2n+1} = 2005.$$

Trong đáp án của Bộ GD&ĐT và lời giải trên THPT số 337 (7.2005) đã giải dựa vào việc lấy đạo hàm của đa thức dạng $(x+1)^n$.

Dưới đây trình bày thêm một cách giải chỉ dùng kiến thức của giải tích tổ hợp:

Ta có $(i+1)C_{k+1}^{i+1} = (k+1)C_k^i$, trong đó i, k là

các số nguyên, không âm.

Từ đó

$$C_{2n+1}^1 - 2 \cdot 2C_{2n+1}^2 + 3 \cdot 2^2 C_{2n+1}^3 - 4 \cdot 2^3 C_{2n+1}^4 + \dots \\ + (2n+1)2^{2n} C_{2n+1}^{2n+1} \\ = (2n+1)C_{2n}^0 - (2n+1) \cdot 2C_{2n}^1 + (2n+1)2^2 C_{2n}^2 - \\ - (2n+1)2^3 C_{2n}^3 + \dots + (2n+1)2^{2n} C_{2n}^{2n} \\ = (2n+1)(C_{2n}^0 - 2C_{2n}^1 + 2^2 C_{2n}^2 - 2^3 C_{2n}^3 + \dots + 2^{2n} C_{2n}^{2n}) \\ = (2n+1)(1-2)^{2n} = 2n+1$$

Theo giả thiết ta có $2n+1 = 2005 \Rightarrow n = 1002$.

MỘT SỐ TÍNH CHẤT... (Tiếp trang 9)

Dựa vào tính chất $NR \perp MP \Rightarrow NR = MP$ và các vectơ $\overrightarrow{NH}$ và $\overrightarrow{NR}$ cùng chiều, ta tìm được $R(-3, 2)$. Do đó đường thẳng AD đi qua R và Q có PT là: $x+3=0$. Kẻ $IK \perp AD$ tính được $K(-3, -1)$ và $IK=4$. Vì $KA=KD=KI$ nên A và D nằm trên đường tròn (γ) tâm K , bán kính bằng 4. Do đó tọa độ A và D là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} (x+1)^2 + (y+1)^2 = 16 \\ x+3=0. \end{cases} \text{ Suy ra } \begin{cases} A(-3, 3) \\ D(-3, -5). \end{cases}$$

Từ đó $C(5, -5); B(5, 3)$.

Nếu $A(-3, -5)$ và $D(-3, 3)$ thì dẫn đến M thuộc CD , không thỏa mãn.

Để kết thúc, mời các bạn giải các bài tập sau:

BT1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ vuông góc Oxy tìm tọa độ các đỉnh B, C, D của hình vuông $ABCD$, biết $A(-4, 5)$ và phương trình đường chéo $(BD): 7x - y + 8 = 0$.

BT2. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ vuông góc Oxy cho hai điểm $A(-1, -1), C(3, 5)$.

a) Tìm tọa độ B và D sao cho $ABCD$ là hình vuông và tung độ điểm B dương.

b) Tính diện tích hình vuông $ABCD$.

c) Gọi M, N, P, Q là trung điểm của BC, CD, DA và AB . Tính diện tích của tứ giác tạo bởi AM, BN, CP và DQ .

BT3. Cho elip $(E): \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{6} = 1$. Tính độ dài mỗi cạnh của các hình vuông nội tiếp elip đó.

NHÂN ĐỀ THI VÀO ĐẠI HỌC NĂM 2005

MỘT SỐ TÍNH CHẤT THÚ VỊ CỦA HÌNH VUÔNG

LÊ QUỐC HÁN

(GV khoa Toán, ĐH Vinh)

Hình vuông là một tứ giác đều, tức là một tứ giác có bốn cạnh bằng nhau và bốn góc bằng nhau (mỗi góc bằng 90°). Tuy nhiên, khi giải các bài toán liên quan đến hình vuông, người ta lại sử dụng các tính chất của hình vuông nhiều hơn các dấu hiệu đặc trưng theo định nghĩa. Các tính chất này có thể được giới thiệu trong sách giáo khoa lớp 8 dưới dạng Lí thuyết hoặc Bài tập, cũng có thể chứng được "giấu kín" trong các kiến thức quen thuộc, buộc người học phải tự tìm tòi, phát hiện.

1) Tính chất quen thuộc nhất của hình vuông liên quan đến hai đường chéo: Trong một hình vuông, hai đường chéo bằng nhau, vuông góc với nhau và cắt nhau tại trung điểm mỗi đường.

Dựa vào tính chất này, có thể giải dễ dàng câu III (phần 1), Đề thi vào Đại học Khối A, năm 2005:

"Trong mặt phẳng với hệ tọa độ vuông góc Oxy cho hai đường thẳng $(d_1): x - y = 0$ và $(d_2): 2x + y - 1 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh hình vuông ABCD biết đỉnh $A \in (d_1)$, đỉnh $C \in (d_2)$ và các đỉnh B, D thuộc trục hoành".

2) Tính chất thứ hai có thể ít quen thuộc hơn với một số học sinh: Giao điểm hai đường chéo là tâm đối xứng của hình vuông và khoảng cách từ nó tới cạnh hình vuông bằng nửa cạnh hình vuông đó.

Tính chất này giúp chúng ta giải một lớp khá rộng các bài tập liên quan đến hình vuông. Sau đây là một thí dụ.

Thí dụ 1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ vuông góc Oxy cho ba điểm $I(1, 1)$, $M(-2, 2)$ và $N(2, -2)$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông ABCD sao cho I là tâm hình vuông, M nằm trên cạnh AB và N nằm trên cạnh CD.

Lời giải. Gọi P là giao điểm của NI với AB. Vì N và P đối xứng nhau qua I nên $P(0, 4)$. Do đó PT đường thẳng AB (đi qua M và P) là: $x - y + 4 = 0$. Kẻ $IH \perp AB$. Khi đó $HI = d(I, AB) = 2\sqrt{2}$ và $H(-1, 3)$. Vì $HA = HB = HI$, nên A và B nằm trên đường tròn (γ) tâm H, bán

kinh $HI = 2\sqrt{2}$.

Vậy A và B là giao điểm của đường thẳng AB:

$x - y + 4 = 0$ và

đường tròn (γ) :

$$(x+1)^2 + (y-3)^2 = 8.$$

Từ đó $A(1, 5)$,

$B(-3, 1)$. Vì C

và A đối xứng

nhau qua I nên

$C(1, -3)$; B và D

đối xứng nhau

qua I nên $D(5, 1)$ (h. 1). Nếu lấy $A(-3, 1)$ và

$B(1, 5)$ thì có $C(5, 1)$ và $D(1, -3)$.

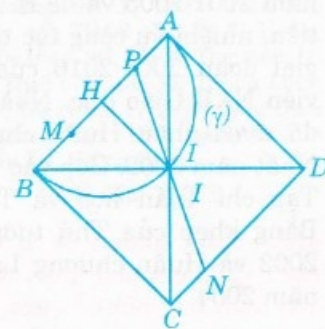
3) Tính chất sau đây ít quen thuộc với nhiều học sinh: Cho hình vuông ABCD và các điểm M, N, P, Q nằm trên các cạnh AB, CD, AD và BC theo thứ tự. Khi đó $MN = PQ$ khi và chỉ khi $MN \perp PQ$. Chứng minh tính chất này khá đơn giản. Độc giả có thể tự làm xem như một bài tập nhỏ. Thí dụ sau đây chứng tỏ tính chất trên rất "lợi hại" trong việc giải các bài toán liên quan đến hình vuông.

Thí dụ 2: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ vuông góc Oxy cho các điểm $I(1, -1)$, $M(2, 3)$ và $N(5, 0)$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông ABCD sao cho I là tâm của hình vuông M thuộc cạnh AB và N thuộc cạnh BC.

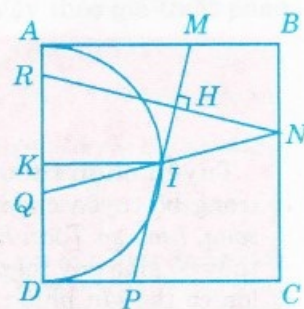
Lời giải. Gọi P là điểm đối xứng của M qua tâm I thì $P(0, -5)$ là giao điểm của MI với CD. Gọi Q là điểm đối xứng của N qua tâm I thì $Q(-3, -2)$ là giao điểm của NI với AD. Đường thẳng kẻ từ N, vuông góc với MP, cắt MP tại H và cắt AD tại R.

Khi đó $H\left(\frac{25}{17}, \frac{15}{17}\right)$.

(Xem tiếp trang 8)



Hình 1



Hình 2

ĐẠI HỘI THI ĐUA YÊU NƯỚC NXB GIÁO DỤC LẦN THỨ BA

Tại Hội trường Hoa Sen, khách sạn Kim Liên ngày 09.07.2005 đã diễn ra Đại hội Thi đua yêu nước NXB Giáo dục lần thứ 3. Đại hội đã tổng kết phong trào thi đua khen thưởng 5 năm 2001-2005 và đề ra phương hướng, mục tiêu, nhiệm vụ công tác thi đua khen thưởng giai đoạn 2006-2010 của các đơn vị thành viên NXB Giáo dục. Nhà xuất bản Giáo dục đã được nhận Huân chương Độc lập hạng Nhất năm 2002. Góp vào thành tích chung ấy Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ được nhận Bằng khen của Thủ tướng Chính phủ năm 2002 và Huân chương Lao động hạng Nhất năm 2004.

HỘI NGHỊ TÁC GIẢ SÁCH THAM KHẢO NXB GIÁO DỤC

Ngày 28.07.2005 Hội nghị tác giả sách tham khảo 2005 NXB Giáo dục khu vực phía Bắc đã diễn ra tại Hội trường Hoa Sen, khách sạn Kim Liên. Gần 300 tác giả và đại biểu cùng 200 biên tập viên và cán bộ khối biên tập NXBGD đã về dự. Sau phát biểu khai mạc và đề dẫn của Ông Ngô Trần Ái, Tổng Giám đốc NXB Giáo dục, và trình bày định hướng xuất bản sách tham khảo 2006 - 2010 của Ông Vũ Dương Thụy, Tổng Biên tập NXBGD, hai nhóm các tác giả đã lên giao lưu, trao đổi về nội dung và phương thức xuất bản các sách tham khảo mang tính giáo dục, sách dịch, sách điện tử... Những tác giả có nhiều đóng góp trong việc viết sách tham khảo thời gian qua đã được khen thưởng.

VTN

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC CHUẨN BỊ SÁCH GIÁO KHOA PHỤC VỤ NĂM HỌC 2005 - 2006

Để chuẩn bị cho năm học 2005 - 2006, tính đến ngày 4/8/2005, Nhà xuất bản Giáo dục đã phát hành 145 triệu bản sách giáo khoa, trong đó sách giáo khoa lớp 4 là 27 triệu bản, sách giáo khoa lớp 9 là 30,5 triệu bản, phục vụ năm học mới, đảm bảo không có tình trạng "sốt sách", "thiếu sách" tại các địa phương.

Riêng sách giáo khoa lớp 4 và lớp 9 theo chương trình mới, Nhà xuất bản Giáo dục đảm bảo mỗi học sinh và giáo viên có một bộ sách để sử dụng.

Để tạo điều kiện giúp đỡ những học sinh có hoàn cảnh khó khăn, học sinh trong diện chính sách có đủ sách học, Nhà xuất bản Giáo dục đã phát hành khoảng 2 triệu phiếu ưu tiên giảm từ 10 đến 15% giá sách giáo khoa.

STT	LỚP	BỘ SÁCH HỌC SINH		BỘ SÁCH (VỞ) BÀI TẬP	
		Số cuốn	Thành tiền (đồng)	Số cuốn	Thành tiền (đồng)
1	Lớp 1	06	37.400	08	23.200
2	Lớp 2	06	35.600	08	24.900
3	Lớp 3	06	38.700	08	29.100
4	Lớp 4	09	62.300	08	33.000
5	Lớp 5	11	42.800	04	17.000
6	Lớp 6	12	75.800	06	21.800
7	Lớp 7	12	88.200	06	23.200
8	Lớp 8	13	95.900	07	32.200
9	Lớp 9	13	93.200	07	35.200
10	Lớp 10	16	49.500	05	15.400
11	Lớp 11	16	54.800	06	22.100
12	Lớp 12	16	61.300	05	17.100

BẠCH KIM

SÁCH MỚI THUỘC TỦ SÁCH TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Tuyển chọn theo Chuyên đề Toán học và Tuổi trẻ (Quyển 1) là cuốn sách đầu tiên trong bộ tuyển chọn. Sách gồm 3 chuyên đề: *Phương pháp giải toán, Toán học và Đời sống, Lịch sử Toán học* vốn là những chuyên đề bạn đọc rất quan tâm. Sách có ích đối với thầy cô giáo dạy toán, các em học sinh và mọi người yêu toán. Các đơn vị mua với số lượng lớn có thể gửi phiếu báo về tòa soạn. Sách sẽ có mặt trên thị trường vào cuối năm 2005. Các bạn hãy đón đọc và thông tin cho nhiều người cùng biết. Cảm ơn các bạn.

THTT



MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP XÁC ĐỊNH GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

NGUYỄN LÂM TUYỀN

(SV ĐKTD 1, K47, ĐHBK Hà Nội)

Dãy số là một chủ đề quan trọng trong chương trình toán phổ thông, đặc biệt là trong các kỳ thi học sinh giỏi toán. Bài viết này xin được giới thiệu về giới hạn của dãy số, một vấn đề mà khi tìm hiểu đến người làm toán luôn tìm thấy những điều mới lạ và thú vị.

Cũng như các lĩnh vực khác của toán học, giới hạn dãy số rất đa dạng về thể loại và phong phú về phương pháp. Ngoài một số cách thông thường như sử dụng định nghĩa giới hạn, định nghĩa tích phân, định nghĩa đạo hàm, hay chứng minh một dãy đơn điệu và bị chặn sau đó giải phương trình truy hồi để tìm giới hạn v.v... chúng ta cũng cần chú ý tới một số phương pháp khác, tương đối hiệu quả cho dạng toán này. Sau mỗi phương pháp ở bài báo này có nêu thí dụ áp dụng.

1. Phương pháp dùng định lí Lagrange

Trước hết xin nhắc lại

Định lí Lagrange. Giả sử hàm số $f(x)$ xác định và có đạo hàm trên đoạn $[a, b]$, khi đó tồn tại một điểm $c \in (a, b)$ sao cho $f'(c) \cdot (a - b) = f(a) - f(b)$.

Từ đó có hệ quả sau :

Hệ quả. Giả sử hàm số $f(x)$ xác định và có đạo hàm trên miền xác định D , thỏa mãn điều kiện $|f'(x)| \leq c < 1$ với c là hằng số và phương trình $f(x) = x$ có nghiệm duy nhất β thuộc D , khi đó dãy số (x_n) ($n = 0, 1, 2, \dots$), xác định bởi x_0 thuộc D và $x_{n+1} = f(x_n)$, có giới hạn là β khi n dần tới vô hạn.

Chứng minh. Giả sử $|f'(x)| \leq c < 1$. Theo định lí Lagrange, với mỗi n đủ lớn, tồn tại c_n nằm giữa x_n và β sao cho $f(x_n) - f(\beta) = (x_n - \beta) \cdot f'(c_n)$ suy ra $|x_{n+1} - \beta| = |x_n - \beta| \cdot |f'(c_n)| \leq |x_n - \beta| \cdot c$.

Từ đó $0 \leq |x_n - \beta| \leq |x_{n-1} - \beta| \cdot c \leq \dots \leq |x_0 - \beta| \cdot c^n$.
Do $\lim_{n \rightarrow +\infty} c^n = 0$ nên $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \beta$ (đpcm).

Cần lưu ý rằng hàm số $g(x) = f(x) - x$ có $g'(x) = f'(x) - 1 < 0$ nên sự tồn tại của β là duy nhất.

Thí dụ 1. Cho số thực $c > 2$. Dãy số (x_n) , ($n = 0, 1, 2, \dots$) được xác định theo cách sau :
 $x_0 = \sqrt{c}$, $x_{n+1} = \sqrt{c - \sqrt{c + x_n}}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$)
nếu các biểu thức dưới căn là không âm. Chứng minh rằng dãy (x_n) được xác định với mọi giá trị n và tồn tại $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$.

(Thi HSG Toán Quốc gia THPT bảng B, 1999 – 2000)

Lời giải. • Ta chứng minh (x_n) xác định với mọi n bằng quy nạp :

Từ giả thiết $c > 2 \Rightarrow c - \sqrt{c + x_0} = c - \sqrt{c + \sqrt{c}} > c - \sqrt{2c} > 0 \Rightarrow x_1$ được xác định

Giả sử x_k ($k \geq 1$) đã được xác định. Khi đó $0 < x_k < \sqrt{c} < c \Rightarrow c - \sqrt{c + x_k} < c - \sqrt{2c} > 0$.

$\Rightarrow x_{k+1}$ được xác định $\Rightarrow$ đpcm.

• Ta có $0 \leq x_n \leq \sqrt{c}$, $\forall n$.

Xét hàm số $f(x) = \sqrt{c - \sqrt{c + x}}$ trên $[0; \sqrt{c}]$.

Ta có : $f'(x) = \frac{-1}{4\sqrt{c - \sqrt{c + x}} \cdot \sqrt{c + x}}$.

Chú ý : $c > 2$

$\Rightarrow c(c - 2) + \frac{3}{4}\sqrt{c}\left(\sqrt{c} - \frac{4}{3}\right) + \frac{1}{64} > 0$

$\Rightarrow \left(c - \frac{1}{8}\right)^2 > c + \sqrt{c} \Rightarrow c - \sqrt{c + \sqrt{c}} > \frac{1}{8}$.

$$\text{Vậy } 4\sqrt{c-\sqrt{c+x}} \cdot \sqrt{c+x} > 4\sqrt{c-\sqrt{c+\sqrt{c}}} \cdot \sqrt{c} \\ > 4\sqrt{\frac{1}{8}} \cdot \sqrt{2} = 2 \Rightarrow |f'(x)| < \frac{1}{2}.$$

Xét hàm số $g(x) = f(x) - x$ trên $[0; \sqrt{c}]$. Ta có $g'(x) = f'(x) - 1 < 0$ và $g(0) > 0$, $g(\sqrt{c}) < 0 \Rightarrow$ phương trình $f(x) = x$ có nghiệm duy nhất trên $[0; \sqrt{c}]$. Gọi nghiệm đó là α , khi đó theo hệ quả trên ta có $\lim_{x \rightarrow \infty} x_n = \alpha$ (đpcm).

2. Phương pháp sử dụng định lí Stolz - Cesaro

Định lí Stolz. Cho các dãy số (x_n) và (y_n) với $n = 1, 2, 3, \dots$. Giả sử rằng (y_n) là dãy dương tăng, $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = +\infty$ và $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = L$, khi

đó ta cũng có $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{y_n} = L$.

Chứng minh. Từ định nghĩa giới hạn và giả thiết $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = L$, suy ra với mỗi

$\varepsilon > 0$ bất kì tồn tại số tự nhiên N_0 sao cho với mọi $k \geq N_0$ luôn có: $\left| \frac{x_{k+1} - x_k}{y_{k+1} - y_k} - L \right| < \frac{\varepsilon}{2}$

$$\Leftrightarrow -(y_{k+1} - y_k) \cdot \frac{\varepsilon}{2} < x_{k+1} - x_k - L(y_{k+1} - y_k) \\ < (y_{k+1} - y_k) \cdot \frac{\varepsilon}{2}.$$

Cho $k = N_0, N_0 + 1, \dots, n - 1$ rồi cộng theo từng vế các BĐT đó ta được:

$$-(y_n - y_{N_0}) \cdot \frac{\varepsilon}{2} < x_n - x_{N_0} - L(y_n - y_{N_0}) \\ < (y_n - y_{N_0}) \cdot \frac{\varepsilon}{2} \\ \Rightarrow -\frac{\varepsilon}{2} < \frac{x_n}{y_n} - L - z_n < \frac{\varepsilon}{2} \quad (1)$$

$$\text{trong đó } z_n = \frac{x_{N_0} - L \cdot y_{N_0}}{y_n}.$$

Vì $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = +\infty$ nên $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = 0 \Rightarrow$ tồn tại số tự nhiên M_0 sao cho với mọi $n > M_0$ thì:

$$-\frac{\varepsilon}{2} < z_n < \frac{\varepsilon}{2} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra với mọi

$$n \geq \max\{N_0, M_0\} \text{ luôn có: } -\varepsilon < \frac{x_n}{y_n} - L < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{x_n}{y_n} - L \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{y_n} = L \text{ (đpcm).}$$

Trường hợp đặc biệt, với $x_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$ và $y_n = n$, ta có định lí:

Định lí Cesaro về trung bình của một dãy số

$$\text{Cho dãy } (v_n) \text{ (} n = 1, 2, \dots \text{)}. \text{ Đặt } w_n = \frac{v_1 + v_2 + \dots + v_n}{n}.$$

Khi đó, nếu dãy (v_n) hội tụ đến L khi n tăng lên vô hạn thì dãy (w_n) cũng hội tụ đến L khi n tăng lên vô hạn.

Lưu ý. Định lí Cesaro có thể chứng minh trực tiếp bằng định nghĩa như sau:

Chứng minh. Do (v_n) hội tụ đến L nên với mỗi $\varepsilon > 0$ bất kì, tồn tại số tự nhiên N_0 sao cho với mọi $n \geq N_0$ ta có $|v_n - L| < \varepsilon$.

Xét hiệu

$$w_n - L = \frac{(v_1 + v_2 + \dots + v_{N_0}) + (v_{N_0+1} + \dots + v_n) - nL}{n} \\ = \frac{v_1 + v_2 + \dots + v_{N_0}}{n} + \frac{(v_{N_0+1} - L) + \dots + (v_n - L)}{n}$$

$$\text{Nhận thấy rằng } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{v_1 + v_2 + \dots + v_{N_0}}{n} \right) = 0;$$

$$\text{còn } \left| \frac{(v_{N_0+1} - L) + \dots + (v_n - L)}{n} \right| \leq \frac{(n - N_0)\varepsilon}{n} < \varepsilon,$$

$$\text{suy ra } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(v_{N_0+1} - L) + \dots + (v_n - L)}{n} = 0.$$

$$\text{Do đó } \lim_{n \rightarrow +\infty} (w_n - L) = 0 \text{ hay } \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = L.$$

Thí dụ 2. Cho dãy số (T_n) với $n = 1, 2, \dots$ được xác định bởi $T_1 > 0$ cho trước và thỏa mãn điều kiện: $T_{n+1} = T_n + \frac{1}{\sqrt{T_n}}$, với mọi $n = 1,$

2.... Chứng minh rằng dãy số $U_n = \frac{T_n^{3/2}}{n}$ với $n = 1, 2, \dots$ có giới hạn hữu hạn khi n tăng lên vô hạn và tìm giới hạn đó.

Lời giải.

- Trước hết ta chứng minh $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = +\infty$.

Giả sử ngược lại, dãy (T_n) bị chặn. Khi đó, do (T_n) là dãy dương, tăng nên tồn tại $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = \beta$

hữu hạn, từ đó $\beta = \beta + \frac{1}{\sqrt{\beta}}$, vô lí.

- Tiếp theo, xét dãy $v_n = T_{n+1}^{3/2} - T_n^{3/2}$ với $n = 1, 2, \dots$

Ta sẽ chứng minh $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{3}{2}$. Thật vậy đặt

$$x_n = \frac{1}{T_n^{3/2}}. \text{ Có}$$

$$\begin{aligned} v_n &= \left(T_n + \frac{1}{\sqrt{T_n}} \right)^{3/2} - T_n^{3/2} = \left(\frac{x_n + 1}{x_n \sqrt{T_n}} \right)^{3/2} - T_n^{3/2} \\ &= \frac{(1+x_n)^{3/2} - 1}{x_n} = \frac{(1+x_n)^3 - 1}{x_n [(1+x_n)^{3/2} + 1]} \\ &= \frac{x_n^2 + 3x_n + 3}{(1+x_n)^{3/2} + 1}. \end{aligned}$$

Vì $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = +\infty$ nên $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n^2 + 3x_n + 3}{(1+x_n)^{3/2} + 1} = \frac{3}{2}.$$

- Cuối cùng, áp dụng định lí Cesaro với $v_n = T_{n+1}^{3/2} - T_n^{3/2}$ ta được

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{T_n^{3/2} - T_1^{3/2}}{n} = \frac{3}{2} \\ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{T_n^{3/2}}{n} &= \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Trên đây là một số phương pháp giải các bài toán về giới hạn của dãy số. Hi vọng rằng các bạn sẽ tìm tòi ra nhiều phương pháp khác và không chỉ trong lĩnh vực này mà còn trong tất cả các lĩnh vực khác của toán học.

Có thể nói "Toán học như một viên kim cương càng mài giũa càng sáng đẹp". Và chúng ta hãy cùng làm cho toán học ngày càng sáng hơn, đẹp hơn các bạn nhé!

Để kết thúc bài báo, mời các bạn giải các bài toán sau.

BÀI TẬP

Bài 1. Giả sử $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Xét dãy số (u_n)

$(n = 1, 2, 3, \dots)$ được xác định bởi: $u_1 > 0$ và $u_{n+1} = u_n \sin^2 \alpha + \frac{2002 \cos^2 \alpha}{u_n^{\tan^2 \alpha}}$ với $n = 1, 2, 3, \dots$

Chứng minh rằng dãy số (u_n) có giới hạn khi n tăng lên vô hạn và tìm giới hạn đó.

(Bài T7/296 - THPT 2/2002)

Bài 2. Dãy số (x_n) với $n = 1, 2, \dots$ được xác định bởi $x_1 \in \mathbb{R}$ và $x_{n+1} = \frac{2}{3} \arctg \frac{x_n^2}{\sqrt{3}} - \left(1 + \frac{\pi}{9}\right)$, với $n = 1, 2, 3, \dots$. Chứng minh rằng dãy số này có giới hạn hữu hạn khi n tăng lên vô hạn. Tìm giới hạn đó.

Bài 3. Dãy số (y_n) với $n = 1, 2, \dots$ có y_1 tùy ý, thỏa mãn $y_{n+1} = \frac{\sqrt{1+y_n^2}}{3} - \ln \sqrt{y_n + \sqrt{y_n^2 + 1}}$ với $n = 1, 2, \dots$. Chứng minh rằng tồn tại $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n$.

Bài 4. Cho dãy số (z_n) với $n = 1, 2, \dots$ thỏa mãn:

$$16z_{n+1} = 6\cos z_n + 3\cos 2z_n + 2\cos 3z_n - 3(8\pi - 1)$$

với mọi $n = 1, 2, \dots$. Tìm $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n$.

Bài 5. Cho số thực a không thuộc $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$ và số thực b tùy ý. Dãy số (x_n) với $n = 1, 2, \dots$ được xác định như sau: $x_1 = b$,

$$x_{n+1} = \frac{a}{3} \ln(x_n^2 + a^2) - a^2, \text{ với mọi } n = 1, 2, \dots$$

Chứng minh rằng dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn khi $n \rightarrow +\infty$.

Bài 6. Cho $a > -1$. Lập dãy số (v_n) với $n = 1, 2, \dots$ như sau: $v_1 = a$, $v_{n+1} = \frac{n \cdot v_n^3 + 1}{v_n^2 \cdot \sqrt[3]{n^3 + n^2}}$

với $n = 1, 2, \dots$. Tìm $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{C_{2n}^n \cdot v_n}$, trong đó C_n^k là số tổ hợp chập k của n phần tử.

(ĐS: $4\sqrt[3]{3}$).



PHƯƠNG TRÌNH BẬC BA VÀ CÁC HỆ THỨC HÌNH HỌC TRONG TAM GIÁC

(Tiếp theo kì trước)

TẠ DUY PHƯƠNG
(Viện Toán học)

4. Các bất đẳng thức hình học

Kết hợp các đẳng thức hình học ở phần trước với một số bất đẳng thức quen thuộc và một số phép biến đổi, ta có thể chứng minh nhiều bất đẳng thức thú vị dưới đây, trong đó một số BĐT là đề thi tuyển sinh Đại học trong nước hoặc thi Olympic toán các nước.

$$45) a) \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{2p} \quad b) a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{4p^2}{3}$$

$$c) p^2 \geq 3\sqrt{3}S \quad d) a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S$$

(Vô địch New York, Mỹ, 1977)

45e) Chứng minh rằng đẳng thức $a + b + c = 2\sqrt{27S^2}$ xảy ra khi và chỉ khi tam giác là đều.

(CĐSP Hà Nội, Khối A, 2001)

45f) Tam giác có diện tích bằng 1 và ba cạnh thỏa mãn $\sqrt{3}(a+b+c)^2 = 36$. Hãy xác định dạng của tam giác đó.

(Đại học Luật TP HCM, 1995)

$$46) ab + ac + bc \leq a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + ac + bc)$$

$$47) p^2 \geq \frac{27}{2}Rr \quad 48) a^2 + b^2 + c^2 \leq 9R^2$$

$$49) a + b + c \leq 3\sqrt{3}R \quad 50) p^2 \geq 3r(r + 4R)$$

$$51) ab + bc + ac \geq 4\sqrt{3}S$$

$$52) p\sqrt{3} \leq r + 4R$$

$$53) 3\sqrt{3}r \leq p \leq 2R + (3\sqrt{3} - 4)r$$

53b) Chứng minh rằng tam giác thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 36r^2$ là tam giác đều

(Đại học Xây dựng Hà Nội, 1994)

$$54) p^2 + r^2 \geq 14Rr$$

$$55) \frac{1}{R} + \frac{1}{r} \geq \frac{9\sqrt{3}}{2p}$$

$$56) R(4R + r)^2 \geq 2p^2(2R - r)$$

$$57) \frac{r}{R} \leq \frac{1}{2}$$

$$58) 2p^2 \leq 9R^2 + 2r^2 + 8Rr$$

$$59) p^2 + r^2 + 4Rr \geq 4\sqrt{3}pr$$

$$60) 5p^2 \geq 27r(r + 2R)$$

$$61) p^2 \geq r^2 + 4Rr + 2\sqrt{3}pr$$

$$62) 3p^2 \geq 9r(r + 2R) + 4\sqrt{3}pr$$

$$63) r(16R - 5r) \leq p^2 \leq 4R^2 + 4Rr + 3r^2$$

$$64) (p-a)(p-b)(p-c) \leq \frac{abc}{8}$$

64b) Chứng minh rằng tam giác thỏa mãn $8(p-a)(p-b)(p-c) = abc$

là tam giác đều.

(Đại học Kinh tế Quốc dân, 1996)

$$65) a^4 + b^4 + c^4 \geq 16S^2$$

$$66) 12r(2R - r) \leq a^2 + b^2 + c^2 \leq 8R^2 + 4r^2$$

$$67) \frac{52}{27}p^2 \leq a^2 + b^2 + c^2 + 2abc < 2p^2$$

67b) Cho $p = 1$. Chứng minh:

$$\frac{52}{27} \leq a^2 + b^2 + c^2 + 2abc < 2$$

(Thi trên College Mathematics Journal, Mỹ, 1.1994)

67c) Cho $2p = 3$. Chứng minh:

$$3(a^2 + b^2 + c^2) + 4abc \geq 13$$

(Đại học Vinh, 2001)

$$68) S \leq \frac{3abc}{4\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$69) \frac{1}{4} < \frac{ab + bc + ca}{(a + b + c)^2} \leq \frac{1}{3}$$

$$70) 8(a + b + c)^3 xyz \leq 27a^2 b^2 c^2$$

$$71) 8(a^2 + b^2 + c^2)xyz \leq abc(ab + ac + bc)$$

$$72) abc(xy + yz + zx) \leq 2xyz(ab + bc + ca)$$

$$73) \frac{1}{3} \leq \frac{a^2+b^2+c^2}{(a+b+c)^2} < \frac{1}{2}.$$

$$74) 2r\sqrt{3} \leq \frac{2p}{3} \leq \frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c} \leq p-r\sqrt{3}.$$

$$75) 10-8\frac{r}{R} \leq 2\frac{a^3+b^3+c^3}{abc} \leq 4\frac{R}{r}-2.$$

$$76) m_a+m_b+m_c \leq \frac{9R}{2}.$$

$$77) m_a m_b m_c \leq \frac{27R^3}{8}.$$

$$78a) a^3+b^3+c^3 \geq \frac{8p^3}{9}.$$

$$78b) a^3+b^3+c^3 \geq \frac{8\sqrt{3}Sp}{3}.$$

(Vô địch New York, 1979)

78c) Trong tất cả các tam giác có chu vi cho trước, hãy định ra tam giác có tổng lập phương các cạnh là bé nhất.

(Đại học An ninh-Cảnh sát)

$$79) \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \leq \frac{1}{4r^2}.$$

$$80) 9r^2 \leq xy+yz+zx \leq \frac{9}{4}R^2.$$

$$81) 9r^2 \leq \frac{9}{2}Rr \leq r(8R-7r) \leq x^2+y^2+z^2 \leq (2R-r)^2.$$

$$82) pr(4R-5r) \leq x^3+y^3+z^3 \leq p(4R^2-8Rr+3r^2).$$

$$83) \frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{a+c-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3.$$

$$84) \frac{3}{2} \leq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} < 2.$$

$$85) 3\sqrt{3}r^3 \leq xyz \leq r^2(2R+(3\sqrt{3}-4)r) \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}Rr^2$$

$$86) \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} \geq \frac{2}{Rr} \geq \frac{4}{R^2}.$$

$$87) \frac{a^2}{yz} + \frac{b^2}{zx} + \frac{c^2}{xy} \geq 12.$$

$$88) \frac{(h_a+h_b+h_c)^2}{ab+ac+bc} \geq \frac{9r^2}{R^2}.$$

$$89) 9r \leq h_a+h_b+h_c \leq \frac{2}{3R}(m_a^2+m_b^2+m_c^2).$$

$$90) h_a h_b + h_b h_c + h_c h_a \leq p^2.$$

$$91) \frac{h_b+h_c}{b+c} \frac{h_a+h_c}{a+c} \frac{h_a+h_b}{a+b} \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

$$92) a) 4rr_a \leq a^2.$$

$$b) r_a+r_b+r_c \geq h_a+h_b+h_c$$

$$93) 4r(r_a+r_b+r_c) \leq a^2+b^2+c^2$$

$$94) r_a^2+r_b^2+r_c^2+5r^2 \geq 8R^2.$$

$$95) r_a^2+r_b^2+r_c^2+r^2 \geq m_a^2+m_b^2+m_c^2.$$

$$96) \frac{r_b+r_c}{r_a} + \frac{r_a+r_c}{r_b} + \frac{r_b+r_a}{r_c} \geq 6.$$

$$97) \frac{4R+r}{r(2R+(3\sqrt{3}-4)r)} \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq \frac{4R+r}{3\sqrt{3}r^2}.$$

$$98) \frac{h_b}{h_a^2} + \frac{h_c}{h_b^2} + \frac{h_a}{h_c^2} > \frac{1}{r}.$$

$$99) \frac{abc}{r} \geq \frac{a^3}{r_a} + \frac{b^3}{r_b} + \frac{c^3}{r_c}.$$

Kết luận: Coi các yếu tố của tam giác như là nghiệm của phương trình bậc ba, ta có một cách nhìn nhất quán các hệ thức trong tam giác. Ta còn có thể suy ra nhiều hệ thức khác nữa từ các hệ thức trên. (Xem: Tạ Duy Phương, *Phương trình bậc ba và các hệ thức trong tam giác*, NXB Giáo dục, 2004). Rất nhiều hệ thức lượng giác cũng được chứng minh nếu coi hàm số lượng giác của các góc trong tam giác là nghiệm của phương trình bậc ba tương ứng. Hy vọng sẽ được trở lại vấn đề này trong một dịp khác.

ĐỌC LẠI CHO ĐÚNG

Trong bài *Giải phương trình vô tỉ bằng cách dùng các biểu thức liên hợp* trên THPT số 333 tháng 3.2005 có một số chỗ nhầm lẫn.

Ở Thí dụ 3 trang 2 cột trái, từ dòng 5 trở đi sửa lại như sau:

$$4(x+2)\sqrt{x^2-1}=3(x^2-1) \text{ hay } 4(x+2)=3\sqrt{x^2-1}.$$

Vì $x > 1$, bình phương hai vế dẫn đến phương trình

$$7x^2+64x+73=0.$$

PT này có hai nghiệm: $x_1 = \frac{\sqrt{513}-32}{7}$ thỏa mãn điều

kiện đề bài; $x_2 = \frac{-32-\sqrt{513}}{7} < -2$ nên loại bỏ.

Vậy PT đã cho có ba nghiệm là $x_1 = \frac{\sqrt{513}-32}{7}$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$.

Ở Thí dụ 5, xét mẫu thức với $x < 1$ hoặc $x \geq 4$.

Cảm ơn các bạn Trần Xuân Uy (Nam Định), Nguyễn Đức Dương (Hòa Bình) đã phát hiện ra sai sót này.

Thành thật xin lỗi bạn đọc.

THHT



CÁC LỚP THCS

Bài T1/338 (Lớp 6). Hỏi biểu thức $x^4 + y^4 + z^4$, trong đó x, y, z là các phân số dương, có thể lấy giá trị 2004 không?

NGUYỄN ANH DŨNG
(Hà Nội)

Bài T2/338 (Lớp 7). Cho tam giác ABC , lấy điểm D thuộc nửa mặt phẳng không chứa điểm C bờ AB sao cho $DA \perp AB$ và $AD = AB$. Lấy điểm E thuộc nửa mặt phẳng không chứa điểm B bờ AC sao cho $EA \perp AC$ và $AE = AC$. So sánh diện tích tam giác ADE với diện tích tam giác ABC .

PHẠM ĐỨC HẠNH
(GV THPT Hoàng Mai, Quỳnh Lưu,
Nghệ An)

Bài T3/338. Tìm mọi nghiệm nguyên của phương trình:

$$(2x - y - 2)^2 = 7(x - 2y - y^2 - 1)$$

HOÀNG ANH TUẤN
(GV TT GDTX Văn Bàn, Lào Cai)

Bài T4/338. Giải phương trình

$$\sqrt{5x-1} + \sqrt[3]{9-x} = 2x^2 + 3x - 1$$

VŨ ANH TUẤN
(GV THPT BC Bình Giang, Hải Dương)

Bài T5/338. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{a}{pb+qc} + \frac{b}{pc+qd} + \frac{c}{pd+qa} + \frac{d}{pa+qb} \geq \frac{4}{p+q}$$

trong đó a, b, c, d, p, q là các số dương và $p \geq q$.

Bất đẳng thức trên còn đúng không với $p < q$.

PHẠM THỊNH
(Xí nghiệp sửa chữa các công trình dầu khí
Vũng Tàu, Bà Rịa - Vũng Tàu)

Bài T6/338. Trong mặt phẳng cho hai đường thẳng d_1 và d_2 cắt nhau tại điểm K và một điểm M nằm ngoài d_1, d_2 . Một đường thẳng d đi qua M cắt d_1 và d_2 lần lượt tại A

và B (khác K). Kẻ $AP \perp d_2$ tại P , kẻ $BQ \perp d_1$ tại Q . Chứng minh rằng đường thẳng PQ luôn đi qua một điểm cố định khi đường thẳng d thay đổi nhưng luôn đi qua M .

ĐÀO QUỐC DŨNG
(GV THPT Dân tộc NT, Quỳnh Hợp,
Nghệ An)

Bài T7/338. Cho tam giác ABC vuông tại C với đường cao CD và có diện tích S . Vẽ đường tròn tâm O đường kính AB . Hai đường tròn tâm O_1 và O_2 tiếp xúc với đoạn AB lần lượt tại E và F , tiếp xúc với đoạn CD và tiếp xúc với đường tròn tâm O . Chứng minh rằng

$$S = \frac{AD \cdot BD \cdot AE \cdot BF}{2 \cdot ED \cdot FD}$$

NGUYỄN ĐỀ
(Hải Phòng)

CÁC LỚP THPT

Bài T8/338. Tìm giá trị nhỏ nhất của số nguyên dương n sao cho tồn tại đa thức $P(x)$ bậc n với hệ số nguyên và thỏa mãn các điều kiện:

a) $P(0) = 1, P(1) = 1$.

b) Với số nguyên dương m bất kì thì số dư trong phép chia $P(m)$ cho 2003 là 0 hoặc 1.

TRẦN VIỆT ANH
(SV K51 CLC khoa Toán Tin ĐHSP Hà Nội)

Bài T9/338. Tìm tất cả các hàm số

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện:

$$f(x^2 + f(y)) = y + x \cdot f(x) \text{ với mọi số thực } x, y.$$

TRẦN QUANG VINH
(Văn phòng khoa Toán Tin, ĐHSP
TP Hồ Chí Minh)

Bài T10/338. Giả sử (F_n) ($n = 1, 2, \dots$) là dãy Fibonacci ($F_1 = F_2 = 1; F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ với $n = 2, 3, 4, \dots$). Chứng minh rằng nếu $a \neq -\frac{F_{n+1}}{F_n}$

với mọi $n = 1, 2, 3, \dots$ thì dãy số (x_n) trong đó

$$x_1 = a, x_{n+1} = \frac{1}{1+x_n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$
 là xác định

và nó có giới hạn hữu hạn khi n tăng lên vô hạn. Tìm giới hạn đó.

HOÀNG TRỌNG HẢO
(Hà Nội)

Bài T11/338. Tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ với diện tích S . Gọi m_a, m_b, m_c lần lượt là độ dài các đường trung tuyến xuất phát từ A, B, C . Chứng minh rằng

$$S \leq \frac{a^2 m_a^2 + b^2 m_b^2 + c^2 m_c^2}{\sqrt{3}(a^2 + b^2 + c^2)}$$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

NGUYỄN TRUNG TUÂN
(SV Toán A, K33, ĐHSP Thái Nguyên)

Bài T12/338. Gọi R và r lần lượt là bán kính mặt cầu ngoại tiếp và nội tiếp tứ diện gần đều $ABCD$ ($AB = CD$, $AC = BD$, $BC = AD$)

Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\sqrt{\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C}} > \frac{3R}{2r}$$

trong đó A, B, C là các góc của tam giác ABC .

HỒ QUANG VINH
(Hà Nội)

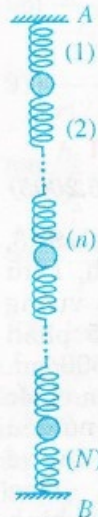
CÁC ĐỀ VẬT LÝ

Bài L1/338. Trong buồng thang máy đang đi lên nhanh dần đều với gia tốc $a_0 = 1 \text{ m/s}^2$ có gắn một ròng rọc, khối lượng không đáng kể. Một sợi dây nhẹ, không giãn vắt qua ròng rọc, một đầu dây treo vật $m = 40 \text{ kg}$, đầu kia có một người nặng $M = 40 \text{ kg}$ trèo lên với gia tốc $a = 0,5 \text{ m/s}^2$ đối với dây. Ở thời điểm $t_0 = 0$ vật cách sàn thang máy $0,5 \text{ m}$ và đứng yên đối

với thang máy. Khi $t = 1 \text{ s}$ thì dây treo vật bị đứt đột ngột, vật rơi xuống tấm kim loại mỏng đặt ở sàn thang máy. Tính nhiệt độ tăng lên của tấm kim loại do va chạm. Giả sử khi va chạm, toàn bộ động năng của vật đều biến thành nhiệt truyền cho tấm kim loại. Lấy $g = 10 \text{ m/s}^2$, nhiệt dung của kim loại là 300 J/K .

ĐỖ QUỐC HÙNG

(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)



Bài L2/338. Cho hệ gồm N lò xo nhẹ và $(N - 1)$ vật nhỏ ghép nối tiếp như hình vẽ (với $N \geq 2$). Các lò xo có cùng chiều dài tự nhiên l_0 và độ cứng K ; các vật nhỏ đều có khối lượng m . Biết rằng các vật đứng cân bằng và các lò xo thẳng đứng. A, B cố định và khoảng cách $AB = N \cdot l_0$.

a) Tìm độ biến dạng của lò xo thứ n nào đó.

b) Tìm điều kiện để lò xo thứ n không biến dạng.

NGUYỄN VĂN HANH
(GV THPT chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/338 (for 6th grade).

Can the expression $x^4 + y^4 + z^4$ take the value 2004 for positive fractions x, y, z ?

T2/338 (for 7th grade).

Let be given a triangle ABC . Take the point D on the half-plane with boundary AB not containing C such that $DA \perp AB$ and $AD = AB$. Take the point E on the half-plane with boundary AC not containing B such that $EA \perp AC$ and $AE = AC$. Compare the areas of the triangles ADE and ABC .

T3/338. Find all integral solutions of the equation $(2x - y - 2)^2 = 7(x - 2y - y^2 - 1)$.

T4/338. Solve the equation

$$\sqrt{5x-1} + \sqrt[3]{9-x} = 2x^2 + 3x - 1.$$

T5/338. Prove the inequality

$$\frac{a}{pb+qc} + \frac{b}{pc+qd} + \frac{c}{pd+qa} + \frac{d}{pa+qb} \geq \frac{4}{p+q}$$

for positive numbers a, b, c, d, p, q satisfying $p \geq q$.

Does the inequality hold for $p < q$?

T6/338. In plane let be given two lines d_1, d_2 intersecting at K and let M be a point not lying on d_1, d_2 .

A line d passing through M cuts d_1 and d_2 respectively at A and B (distinct from K). Draw $AP \perp d_2$ at $P, BQ \perp d_1$ at Q . Prove that the line PQ passes through a fixed point when the line d turns around M .

T7/338. Let ABC be a triangle right at C , let CD be its altitude and let S be its area. Let (O) be the circle with diameter AB , let $(O_1), (O_2)$ be the circles touching (O) , touching the segment CD and touching the segment AB respectively at E and F . Prove that

$$S = \frac{AD \cdot BD \cdot AE \cdot BF}{2ED \cdot FD}.$$

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T8/338. Find the least positive integer n such that there exists a polynomial of degree n with integral coefficients $P(x)$ satisfying the following conditions:

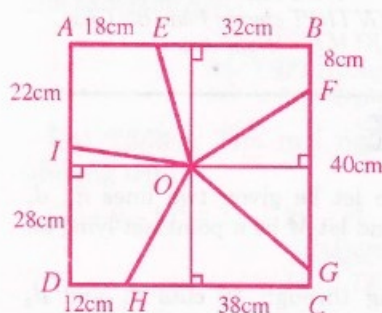
i) $P(0) = 1, P(1) = 1$;



Giải đáp bài : CHIA BÁNH

(Đề đăng trên THPT số 335, tháng 5.2005)

(Dựa theo bạn Đào Đức Trung, 9A3, THCS Giầy Phong Châu, Phú Ninh, Phú Thọ). Giả sử chiếc bánh dạng hình vuông ABCD tâm O đã được cắt thành 5 phần bằng nhau, mỗi phần có diện tích 500cm^2 . Nhận thấy rằng khoảng cách từ tâm chiếc bánh hình vuông đến các cạnh của nó đều bằng nhau. Bài toán chia bánh được quy về



việc chia chu vi hình vuông (đường gấp khúc ABCD) thành 5 phần có độ dài bằng nhau mà độ dài mỗi phần là

$\frac{50 \times 4}{5} = 40$ (cm). Vì có một người đã cắt bánh theo đường OE mà AE = 18 (cm) nên EB = 32cm, do đó chúng ta có thể thực hiện phép chia như sau :

Trên cạnh BC lấy điểm F sao cho BF = 8 (cm); trên cạnh BC lấy điểm G sao cho FG = 40(cm), trên cạnh CD lấy điểm H sao cho CH = 38(cm); trên cạnh DA lấy điểm I sao cho DI = 28 (cm). Lúc đó rõ ràng là $S_{EOFB} = S_{FOG} = S_{GOHC} = S_{HOID} = S_{IOEA} = 500$ (cm²).

Tất cả các bài giải gửi về Tòa soạn đều đúng. Ngoài bạn Trung các bạn sau cũng có lời giải đúng và gọn : Đào Thị Thúy Quỳnh, 7B, THCS Nguyễn Hiền, Nam Trực, Nam Định ; Cao Xuân Sáng, 11A2, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP Vinh ; Đào Trần Mỹ Hạnh, 7B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, Nghệ An; Nguyễn Thành Phụng, 44 - Lê Lợi, phường Thạch Thang, Quận Hải Châu, TP Đà Nẵng.

HỒNG QUANG

CÁCH GIẢI NÀO ĐƠN GIẢN NHẤT

Có 150 đội bóng tham gia thi đấu theo thể thức mỗi cặp đấu loại trực tiếp (mỗi trận phải phân biệt thắng thua, không hòa). Đội nào thắng được thi đấu tiếp ở vòng sau. Nếu vòng đấu nào có số các đội là số lẻ thì tổ chức bốc thăm để chọn 1 đội được quyền thi đấu ở vòng tiếp sau, các đội còn lại thi đấu bình thường. Hỏi phải tổ chức bao nhiêu trận đấu để chọn ra được một đội vô địch ?

Sẽ có 5 tặng phẩm cho bạn nào có cách giải đơn giản nhất và gửi bài sớm nhất.

VÂN KHANH

- ii) for every positive integer m , the remainder of the division of $P(m)$ by 2003 is 0 or 1.

T9/338. Find all functions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfying the condition

$$f(x^2 + f(y)) = y + xf(x)$$

for all real numbers x, y .

T10/338. Let (F_n) ($n = 1, 2, \dots$) be the Fibonacci sequence ($F_1 = F_2 = 1$; $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, $n = 2, 3, 4, \dots$). Prove that if $a \neq -\frac{F_{n+1}}{F_n}$ for every $n = 1, 2, 3, \dots$ then the sequence of numbers (x_n) , where $x_1 =$

a , $x_{n+1} = \frac{1}{1+x_n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), is defined and it has a finite limit when n tends to infinity and find this limit.

T11/338. Let ABC be a triangle with $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ and with area S . Let m_a, m_b, m_c be respectively the lengths of the medians issued from A, B, C . Prove that

$$S \leq \frac{a^2 m_a^2 + b^2 m_b^2 + c^2 m_c^2}{\sqrt{3}(a^2 + b^2 + c^2)}$$

When does equality occur ?

T12/338. Let R and r be respectively the radii of the circumsphere and the inscribed sphere of a tetrahedron $ABCD$ with $AB = CD$, $AC = BD$, $BC = AD$.

Prove the inequality

$$\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\sqrt{\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C}} > \frac{3R}{2r}$$

where A, B, C are the angles of triangle ABC .



Bài T1/334. (Lớp 6). Tính tổng S gồm 23 số hạng :

$$S = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \dots + \frac{1}{(n-1)n(n+1)} + \dots + \frac{1}{23.24.25}.$$

Lời giải. Để thấy rằng với mỗi số tự nhiên $n > 1$, ta có:

$$\frac{2}{(n-1).n.(n+1)} = \frac{(n+1)-(n-1)}{(n-1).n.(n+1)} = \frac{1}{(n-1).n} - \frac{1}{n.(n+1)}.$$

Sử dụng hệ thức trên cho từng số hạng trong tổng sau

$$2S = \frac{2}{1.2.3} + \frac{2}{2.3.4} + \dots + \frac{2}{(n-1).n.(n+1)} + \dots + \frac{2}{23.24.25} = \frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{(n-1).n} - \frac{1}{n(n+1)} + \dots + \frac{1}{23.24} - \frac{1}{24.25}.$$

Để ý rằng trong vế phải của hệ thức trên, trừ số hạng đầu và cuối, các số hạng còn lại tạo thành từng cặp đối nhau. Do đó có thể rút gọn:

$$2S = \frac{1}{1.2} - \frac{1}{24.25} = \frac{299}{600}.$$

$$\text{Vậy } S = \frac{299}{1200}.$$

Nhận xét. 1. Một số bạn sử dụng phương pháp đồng nhất hệ số như sau:

Tìm các số a, b, c thỏa mãn đồng nhất thức

$$\frac{1}{(n-1).n.(n+1)} = \frac{a}{n-1} + \frac{b}{n} + \frac{c}{n+1}.$$

Từ đó có phân tích:

$$\frac{1}{(n-1).n.(n+1)} = \frac{1}{2(n-1)} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2(n+1)}.$$

Sử dụng phân tích này cho từng số hạng trong tổng S và rút gọn, ta được kết quả của bài toán.

2. Một số bạn đã tính các bài toán tổng quát:

$$S_1 = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \dots + \frac{1}{n.(n+1).(n+2)}.$$

$$S_2 = \frac{1}{1.2.3.4} + \frac{1}{2.3.4.5} + \dots + \frac{1}{n.(n+1).(n+2).(n+3)}.$$

3. Bạn Nguyễn Văn Thuyền, 6H1, THCS thị trấn Chò, Yên Phong, Bắc Ninh đã có ý hay sau đây:

Từ kết quả

$$\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \dots + \frac{1}{(n-1)n.(n+1)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2n(n+1)} < \frac{1}{4}$$

và $\frac{1}{k^3} < \frac{1}{k^3 - k} = \frac{1}{(k-1)k(k+1)}$, bạn đưa ra bài toán:

Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \geq 2$, ta có bất

$$\text{đẳng thức } \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{n^3} < \frac{1}{4}.$$

3. Có tới gần 700 bạn tham gia giải bài toán trên và hầu hết có lời giải đúng.

Sau đây là một phần trong số các bạn có lời giải tốt:

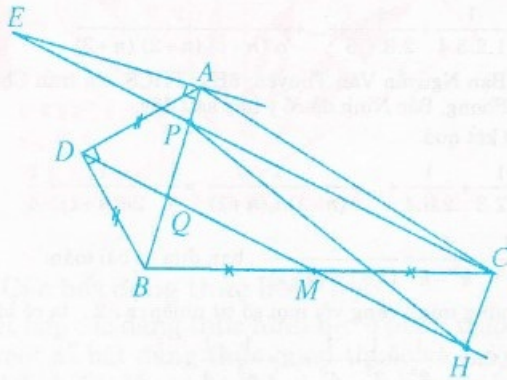
Ngệ An: Nguyễn Đình Hải, 6C, THCS Yên Sơn, Đô Lương; Đặng Thị Cẩm Nhung, 6A, THCS Nghi Hương, TX Cửa Lò; **Đắc Lắc:** Đỗ Thị Xuân Quỳnh, 6C, THCS Lê Quý Đôn, TT Krông Năng; **Hà Nội:** Vương Duy Anh, Lê Quang Huy, 6H1, THCS Trưng Vương, Q Hoàn Kiếm, Phạm Phương Chi, 6A, THCS Ngũ Hiệp, Thanh Trì; **TP Hồ Chí Minh:** Nguyễn Thị Kim Xuân, 6/3, THCS Phan Tây Hồ, Gò Vấp; **Bình Thuận:** Phạm Thị Thùy Trang, L5, TH Phú Thủy 2, Trịnh Văn Đức, L6, THCS Nguyễn Trãi, TP Phan Thiết; **Quảng Nam:** Lưu Khánh Duy, 6C, THCS Quế Xuân, Quế Sơn; **Khánh Hòa:** Trần Thị Ánh Nguyên, 6⁷, THCS Cam Nghĩa, Cam Ranh; **Bình Định:** Nguyễn Hồ Nhật Nguyên, 6A1, THCS Trần Hưng Đạo, TP Quy Nhơn; **Sóc Trăng:** Phạm Nguyễn Khôi Nguyên, 6A1, THCS Kế Sách, H Kế Sách; **Quảng Trị:** Trương Nhã Uyên, 4/1, TH Hàm Nghi, Nguyễn Thúc Vũ Hoàng, 6M, THCS Nguyễn Huệ, TX Đông Hà, Trần Hoàng Hải, 5B, TH Kim Đồng Hồ Xá, Vĩnh Linh; **Quảng Bình:** Nguyễn Anh Dũng, 6C, THCS Hạ Trạch, Bố Trạch, Nguyễn Thị Mai Hương, 6₁, THCS Phong Bá, Tuyên Hóa; **Yên Bái:** Bùi Thị Thu Trang, 6G, THCS Lê Hồng Phong, TP Yên Bái.

NGUYỄN ANH DŨNG

Bài T2/334. (Lớp 7). Cho tam giác ABC với góc A không vuông và góc B khác 135°. Gọi M là trung điểm của BC. Về phía ngoài $\triangle ABC$ vẽ tam giác ABD vuông cân đáy AB. Đường thẳng qua A vuông góc với AB và đường thẳng qua C song song với MD cắt nhau tại E. Đường thẳng AB cắt CE tại P và cắt DM tại Q. Chứng minh rằng Q là trung điểm của BP.

Lời giải. Trên tia đối của tia MQ lấy điểm H sao cho $MH = MQ$. Xét $\triangle BMQ$ và $\triangle CMH$ có $MB = MC$ (gt), $MQ = MH$, $\widehat{BMQ} = \widehat{CMH}$ (đối đỉnh), do đó $\triangle BMQ = \triangle CMH$ (c.g.c). Suy ra $BQ = CH$ (1) và $\widehat{MBQ} = \widehat{MCH}$. Hai góc

MBQ và MCH ở vị trí so le trong, chúng bằng nhau, do đó $BQ \parallel CH$ hay $PQ \parallel CH$.



Nối PH . Xét $\triangle PQH$ và $\triangle HCP$ có PH chung, $\widehat{CPH} = \widehat{QHP}$ (so le trong, $PC \parallel QH$), $\widehat{QPH} = \widehat{CHP}$ (so le trong, $PQ \parallel CH$), từ đó $\triangle PQH = \triangle HCP$ (g.c.g). Suy ra $PQ = CH$ (2).

Để thấy Q nằm giữa B và P dù góc B nhọn hay lớn hơn 135° . Từ (1) và (2) suy ra Q là trung điểm của BP .

Nhận xét. 1. Bài toán này không khó, nhiều bạn tham gia giải và cho lời giải đúng. Có khá đông bạn dùng tính chất đường trung bình của tam giác, đây là kiến thức thuộc chương trình Toán lớp 8. Một số bạn đã nêu và chứng minh một bổ đề để giải bài toán này: "Trong một tam giác, nếu một đường thẳng đi qua trung điểm của một cạnh và song song với cạnh thứ hai thì nó cũng đi qua trung điểm cạnh thứ ba". Theo đó không cần sử dụng các giả thiết $AB \perp AE$ và $\triangle ABD$ vuông cân. Tuy nhiên bạn đọc nên lưu ý các giả thiết này là cần để cho Q nằm giữa B và P .

2. Các bạn sau đây có lời giải chính xác và ngắn gọn:

Vĩnh Phúc: Hà Ngọc Thủy, 7A, THCS Thái Hòa, Lập Thạch, Nguyễn Thị Hải Yến, Phạm Thị Thu Hằng, 7A, THCS Yên Lạc, Yên Lạc, Lê Sơn Hải, Nguyễn Trường Tuấn, 7B, THCS Yên Lạc; **Hưng Yên:** Nguyễn Thị Văn Anh, 7A, THCS Hiến Nam, TX Hưng Yên; **Thanh Hóa:** Lê Ngọc Chính, 7C, THCS Lê Hữu Lập, Hậu Lộc, Lê Hoài Nam, 7B, THCS Nguyễn Chí, Đông Sơn; **Hà Tĩnh:** Trần Quốc Luật, 7B, THCS Sơn Hồng, Hương Sơn; **Quảng Ngãi:** Võ Việt Phương, 7C, THCS Huỳnh Thúc Kháng, Nghĩa Hành; **Khánh Hòa:** Trần Thị Ánh Nguyên, 6/7, THCS Cam Nghĩa, Cam Ranh.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

Bài T3/334. Tìm số tự nhiên lẻ n nhỏ nhất sao cho n^2 biểu diễn được thành tổng của một số lẻ các số chính phương liên tiếp.

Lời giải. Giả sử số lẻ n^2 biểu diễn được thành $2k+1$ số chính phương liên tiếp với $k > 0$, nghĩa là

$$n^2 = (a-k)^2 + (a-k+1)^2 + \dots + a^2 + \dots + (a+k)^2$$

hay $n^2 = (2k+1)a^2 + 2(1 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2)$

$$\text{hay } 3n^2 = 3(2k+1)a^2 + k(k+1)(2k+1) \quad (1)$$

Chú ý rằng với n lẻ thì

$$n^2 = (2t+1)^2 = 4t(t+1) + 1 = 8s+1$$

với t, s nguyên. Vì a^2 cũng lẻ nên $a^2 = 8r+1$ với r nguyên. Từ đó và từ (1) có

$$3(8s+1) = 3(2k+1)(8s+1) + k(k+1)(2k+1)$$

suy ra $6k + k(k+1)(2k+1) = k(6 + (k+1)(2k+1))$ chia hết cho 8 (2)

a) Nếu k chẵn thì $6 + (k+1)(2k+1)$ lẻ nên k phải chia hết cho 8.

b) Nếu k lẻ, đặt $k = 8p+r$ với $r = 1, 3, 5, 7$, thay vào (2) được

$$6 + (8k+r)(16k+2r+1) = 8v + 6 + (r+1)(2r+1)$$

chia hết cho 8 (với v nguyên). Thử với $r = 1, 3, 5, 7$ chỉ có $r = 5$ thỏa mãn. Vậy $k = 8p+5$.

• Xét $k = 5$. Từ (1) có $n^2 = 11a^2 + 110$ hay $n^2 = 11(a^2 + 10)$ (3).

Suy ra $a^2 + 10 = a^2 - 1 + 11 = (a-1)(a+1) + 11$ chia hết cho 11. Chú ý rằng số lẻ $a > k = 5$ nên thử với $a = 21, 23, \dots$ thấy $a = 23, n = 77$ thỏa mãn (3). Còn với $k = 8p+5 \geq 13$ thì

$$n^2 \geq (2k+1)k^2 + \frac{k(k+1)(2k+1)}{3} > 77^2.$$

• Xét $k = 8$. Từ (1) có $n^2 = 17a^2 + 17.24$ (4)

Phương trình (4) không có nghiệm nguyên. Thực vậy, nếu n chia hết cho 3 thì a phải chia hết cho 3, khi đó n^2 chia hết cho 9 nhưng vế phải của (4) không chia hết cho 9; nếu $n = 3m+r$ với $r = 1, 2$ thì n^2 chia cho 3 dư 1 nhưng vế phải của (4) chia cho 3 dư 2.

Còn với $k = 8p \geq 16$ thì $n^2 > 77^2$.

Vậy số tự nhiên n nhỏ nhất thỏa mãn đề bài là $n = 77$, lúc đó có $77^2 = 18^2 + 19^2 + \dots + 27^2 + 28^2$, tổng này có 11 số chính phương liên tiếp.

Nhận xét. 1) Phương trình (4) tương đương với $n^2 = 17(a^2 + 24)$, suy ra $a^2 + 24$ chia hết cho 17 (5). Có thể thử với a lẻ và $8 < a < 19$ (xét với $n^2 < 77^2$) để thấy điều kiện (5) không xảy ra.

2) Các bạn sau có lời giải đúng:

Phú Thọ: Phạm Mai Luân, 9B, THCS Phong Châu, TX Phú Thọ; **Bắc Ninh:** Lê Thế Tài, 9B, THCS Từ Sơn; **Nam Định:** Mai Thanh Tùng, 9A7, THCS Trần Đăng Ninh, TP Nam Định; **Quảng Trị:** Trương Xuân Nhã, 7A, THCS Nguyễn Huệ, Đông Hà; **Quảng Nam:** Phan

Thị Thu Trang, 9/4, THCS Nguyễn Văn Trỗi, Điện
Thắng, Điện Bàn.

VIỆT HẢI

Bài T4/334. Tìm các số dương a_1, a_2, a_3, a_4
thỏa mãn các điều kiện :

$$\frac{a_1^2}{a_2+a_3} + \frac{a_2^2}{a_3+a_4} + \frac{a_3^2}{a_4+a_1} + \frac{a_4^2}{a_1+a_2} = 1$$

$$\text{và } a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 \geq 1.$$

Lời giải. Đặt

$$A = \frac{a_1^2}{a_2+a_3} + \frac{a_2^2}{a_3+a_4} + \frac{a_3^2}{a_4+a_1} + \frac{a_4^2}{a_1+a_2}$$

$$B = a_1^2(a_2+a_3) + a_2^2(a_3+a_4) + a_3^2(a_4+a_1)$$

$$+ a_4^2(a_1+a_2)$$

$$C = a_1^2(a_2+a_3)^2 + a_2^2(a_3+a_4)^2 + a_3^2(a_4+a_1)^2$$

$$+ a_4^2(a_1+a_2)^2$$

$$D = 2[a_1^2(a_2^2+a_3^2) + a_2^2(a_3^2+a_4^2) + a_3^2(a_4^2+a_1^2) + a_4^2(a_1^2+a_2^2)]$$

$$E = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2$$

Với mọi x, y ta luôn có : $2(x^2 + y^2) \geq (x + y)^2$,
do đó $D \geq C$ (1).

Dễ dàng biến đổi

$$E^2 - D = (a_1 - a_3)^2 + (a_2 - a_4)^2 \geq 0, \text{ nên } E^2 \geq D \text{ (2)}$$

Theo BĐT Bu-nhi-a-cốp-xki, ta có :

$$AB \geq E^2 \text{ (3) và } CE \geq B^2 \text{ (4).}$$

Từ (1), (2), (4) ta có :

$$B^2 \leq CE \leq DE \leq E^3 \Rightarrow B \leq E\sqrt{E}.$$

$$\text{Từ đó và (3) suy ra: } A \geq \frac{E^2}{B} \geq \frac{E^2}{E\sqrt{E}} = \sqrt{E} \geq 1.$$

Vậy $A = 1 \Leftrightarrow$ Đẳng thức ở (1), (2), (3), (4)
xảy ra $\Leftrightarrow a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = \frac{1}{2}$.

Nhận xét. Đa số các bạn giải theo cách giải trên
(tương tự như cách giải ở bài T3/297, trên THPT tháng
7.2002). Các bạn có lời giải tốt là : **Vinh Phúc** : Ngô Thị
Bích Phượng, 9A, THCS Yên Lạc ; **Kim Đình Sơn**, 7D,
THCS Liên Bảo, TX Vinh Yên ; **Bắc Ninh** : Nguyễn Văn
Luật, 9A4, THCS thị trấn Chờ, Yên Phong ; **Nguyễn Văn**
Thuyền, 6A1, THCS thị trấn Yên Phong ; **Hải Dương** :
Phạm Thị Thùy Dung, 9A, THCS Đại Đức, Kim Thành ;
Hà Nam : Nguyễn Việt Dũng, Thiếu Quốc Nghi, 9C,
THCS Nam Cao, Lý Nhân ; **Nam Định** : Nguyễn Hồng
Trường, 9D, THCS Nguyễn Hiền, Nam Trực ; **Thanh**
Hóa : Hoàng Ngọc Quyết, 9D, THCS Lê Hữu Lập, Hậu

Lộc, **Trịnh Hùng Linh**, 9C, THCS Lê Thánh Tông, Thọ
Xuân ; **Hà Tĩnh** : Lê Văn Anh, 8/1, THCS Nguyễn Du,
Hương Sơn ; **Đà Nẵng** : Nguyễn Như Quốc Trung,
Nguyễn Như Đức Trung, 9/1, THCS Lý Thường Kiệt,
Hải Châu ; **Khánh Hòa** : Võ Thái Thông, 9/4, trường
Ngô Gia Tự, Cam Nghĩa, Cam Ranh ; **Kiên Giang** :
Trần Minh Hào, THCS Bàn Tân Định, Giồng Riềng.

TRẦN HỮU NAM

Bài T5/334. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$T = \frac{a^2}{a^2+(b+c)^2} + \frac{b^2}{b^2+(c+a)^2} + \frac{c^2}{c^2+(a+b)^2}$$

trong đó a, b, c là các số thực khác 0.

Lời giải. Áp dụng các BDT

$$(b+c)^2 \leq 2(b^2+c^2); (a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2);$$

$$(c+a)^2 \leq 2(c^2+a^2), \text{ ta có :}$$

$$T \geq \frac{a^2}{a^2+2(b^2+c^2)} + \frac{b^2}{b^2+2(a^2+c^2)}$$

$$+ \frac{c^2}{c^2+2(a^2+b^2)} \text{ hay}$$

$$T+3 \geq \left(\frac{a^2}{a^2+2(b^2+c^2)} + 1 \right) + \left(\frac{b^2}{b^2+2(a^2+c^2)} + 1 \right)$$

$$+ \left(\frac{c^2}{c^2+2(a^2+b^2)} + 1 \right)$$

$$= \frac{2}{5} \cdot 5(a^2+b^2+c^2) \left(\frac{1}{a^2+2(b^2+c^2)} + \frac{1}{b^2+2(a^2+c^2)} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{c^2+2(a^2+b^2)} \right).$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho các bộ ba

số dương m, n, p và $\frac{1}{m}, \frac{1}{n}, \frac{1}{p}$ được

$$(m+n+p) \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} \right) \geq 3\sqrt[3]{mnp} \cdot 3\sqrt[3]{\frac{1}{mnp}} = 9$$

$$\text{Suy ra } T+3 \geq \frac{2}{5} \cdot 9 \Leftrightarrow T \geq \frac{3}{5}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của T là $\frac{3}{5}$ khi $a = b = c$.

Nhận xét. 1) Đa số các bạn tham gia đều có lời giải
đúng và cách giải tương tự như trên.. Một số bạn đã nêu
ra bài toán tổng quát sau đây :

"Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$T = \frac{a_1^2}{a_1^2+(S-a_1)^2} + \frac{a_2^2}{a_2^2+(S-a_2)^2} + \dots + \frac{a_n^2}{a_n^2+(S-a_n)^2}$$

trong đó $S = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ và $a_1, a_2, \dots, a_n$ là các số
thực khác 0 (với $n \geq 3$)"

và bằng cách làm tương tự như trên tìm được kết quả :

$$\min T = \frac{n}{n^2 - 2n + 2} \text{ khi } a_1 = a_2 = \dots = a_n.$$

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt :

Thanh Hóa : Nguyễn Thọ Hải, 9C, THCS Lê Hữu Lập, Hậu Lộc, Nguyễn Xuân Hiếu, 8G, THCS Trần Mai Ninh, TP Thanh Hóa ; **Nam Định :** Nguyễn Hồng Trường, 9D, THCS Nguyễn Hiền, Nam Trực, Hà Phong Giang, 9A, THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên, Mai Thanh Tùng, 9A7, THCS Trần Đăng Ninh, TP Nam Định ; **Nghệ An :** Lê Tuấn Hiệp, 8C, THCS Thái Sơn, Đô Lương, Nguyễn Thị Hồng, Thái Thị Thu, Hồ Vĩnh Duy, Đặng Công Việt, Nguyễn Thủy Vy, 8A, Nguyễn Tất Hoàng, 8B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương ; **Hải Dương :** Phạm Ngọc Dương, 7B, THCS Liên Hòa, Kim Thành, Phan Ngọc Hiếu, 8/3, THCS Lê Quý Đôn, Hoàng Tiến Đạt, 9A1, THCS Ngô Gia Tự, TP Hải Dương ; **Hà Tây :** Nguyễn Thế Tâm, 8A1, THCS Ngô Sĩ Liên, Chương Mỹ, Nguyễn Thái Hà, 9A, Phú Quốc Tuấn, 9D, THCS Thạch Thất ; **Đắk Lắk :** Võ Văn Tuấn, 8A5, THCS Nguyễn Du, Krông Buk ; **Hà Tĩnh :** Trần Tiến Dũng, 9B, THCS Xuân Lộc, Can Lộc ; **Đà Nẵng :** Nguyễn Như Đức Trung, 9/1, THCS Lý Thường Kiệt ; **Hà Nam :** Nguyễn Việt Xuân, 9CT, THCS Trần Phú, Phù Lý ; **Quảng Trị :** Trương Xuân Nhã, 7A, THCS Nguyễn Huệ ; **Hà Nội :** Nguyễn Quý Tuấn, 8A, PTDL Lương Thế Vinh ; **Bắc Ninh :** Nguyễn Ngọc Thái, 9A, THCS Thuận Thành ; **Phú Thọ :** Nguyễn Ngọc Linh, 8A3, THCS Lâm Thao ; **Thừa Thiên - Huế :** Nguyễn Vũ Thành Long, 9/1, THCS Chu Văn An, Huế ; **Bắc Giang :** Hoàng Đức Trung, 9A1, THCS Ngô Sĩ Liên, TX Bắc Giang ; **Vĩnh Phúc :** Ngô Thị Bích Phượng, 9A, THCS Yên Lạc ; **An Giang :** Nguyễn Quốc Khánh, 9A13, THCS Nguyễn Trãi, TP Long Xuyên ; **Bà Rịa - Vũng Tàu :** Đinh Ngọc Thái, 9A8, THCS Vũng Tàu ; **Bến Tre :** Phạm Quang Duy Trọng, 9/3, THCS TX Bến Tre ; **Đồng Tháp :** Lê Hữu Trí, 9A1, THCS TT. Mi Thợ.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T6/334. Đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABC , tiếp xúc với các cạnh BC , CA , AB lần lượt tại D , E , F . Đường thẳng qua A vuông góc với IA cắt các đường thẳng DE , DF tương ứng tại M , N . Đường thẳng qua B vuông góc với IB cắt các đường thẳng EF , ED tương ứng tại P , Q . Đường thẳng qua C vuông góc với IC cắt các đường thẳng FD , FE tương ứng tại S , T . Chứng minh rằng

$$MN + PQ + ST \geq AB + BC + CA.$$

Lời giải. Ta có $AE = AF$, $IE = IF$ suy ra $AI \perp EF$. Vì $AI \perp MN$ nên $MN \parallel EF$. Từ đó $\widehat{ANF} = \widehat{EFD}$. Mặt khác $\widehat{EFD} = \widehat{DEC} = \widehat{AEM}$ suy ra $\widehat{ANF} = \widehat{AEM}$ (1). Chứng minh tương tự cũng có $\widehat{AME} = \widehat{AFN}$ (2). Từ (1), (2) ta thấy $\triangle ANF \sim \triangle AEM$, dẫn đến $\frac{AN}{AE} = \frac{AF}{AM}$, hay $AM \cdot AN = AE \cdot AF = AE^2$ (*)

Từ (*), áp dụng bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân cho hai số dương ta được

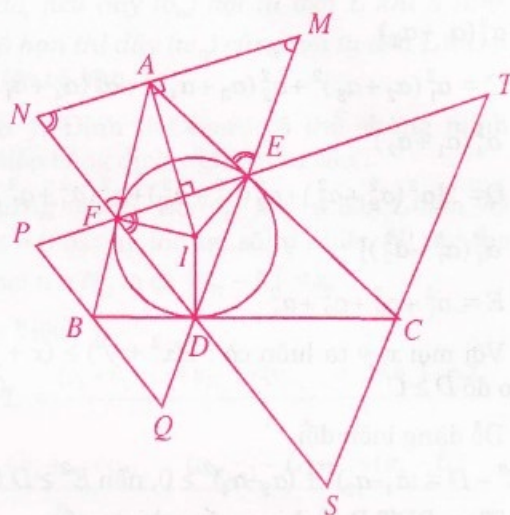
$$MN = AM + AN \geq 2\sqrt{AM \cdot AN} = 2AE = AE + AF$$

Tương tự có $PQ \geq BD + BF$; $ST \geq CD + CE$. Do đó $MN + PQ + ST \geq AB + BC + CA$.

Bất đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} AM = AN = AE = AF \\ BP = BQ = BD = BF \\ CS = CT = CD = DE \end{cases} \Leftrightarrow \widehat{DE} = \widehat{DF} = \widehat{EF}$$

$\Leftrightarrow \triangle DEF$ đều $\Leftrightarrow \triangle ABC$ đều.



Nhận xét. Mấu chốt của bài toán là việc chứng minh $AM \cdot AN = AE \cdot AF$; $BP \cdot BQ = BF \cdot BD$; $CS \cdot CT = CD \cdot CE$. Hầu hết các bạn đều sử dụng kiến thức về tam giác đồng dạng để suy ra các hệ thức này. Các bạn sau có lời giải gọn hơn cả, xét đúng điều kiện để bất đẳng thức xảy ra :

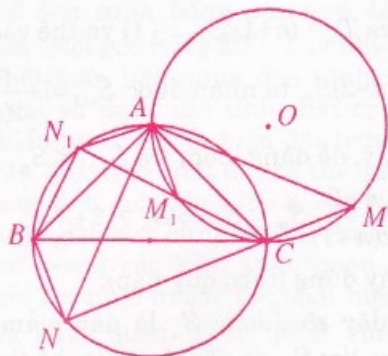
Hà Nội : Bùi Huy Hoàng, 9E, trường Hà Nội - Amsterdam ; **Vĩnh Phúc :** Nguyễn Thị Thu Phương, 9A, THCS Xuân Lôi, Lập Thạch, Ngô Thị Bích Phượng, 9A, THCS Yên Lạc, Yên Lạc, Trần Anh Trung, 9A, THCS Tự Lập, Mê Linh ; **Phú Thọ :** Đào Đức Trung, 9A3, THCS Giấy Phong Châu, Phù Ninh, Nguyễn Sơn Tùng, 9B, THCS Nguyễn Quang Bích, Tam Nông ; **Hải Dương :** Nguyễn Hồng Quảng Bôn, 9D, THCS Minh Tân, Kinh Môn ; **Nam Định :** Phạm Phi Diệp, 6A, THCS Yên Thọ, Ý Yên ; **Thanh Hóa :** Trịnh Hùng Linh, 9C, THCS Lê Thánh Tông, Thọ Xuân, Nguyễn Cao Tuấn, 8B, THCS Nhữ Bá Sĩ, Hoàng Hóa ; **Quảng Trị :** Trương Xuân Nhã, 7A, THCS Nguyễn Huệ, Đông Hà ; **Đà Nẵng :** Nguyễn Như Đức Trung, Nguyễn Như Quốc Trung, 9/1, THCS Lý Thường Kiệt, Q. Hải Châu.

HỒ QUANG VINH

Bài T7/334. Cho tam giác ABC vuông cân đáy BC . Tìm quỹ tích những điểm M thỏa mãn điều kiện : $MB^2 - MC^2 = 2MA^2$.

Lời giải. 1. *Phần thuận.* * Nếu $M \equiv A$ hoặc $M \equiv C$ thì $MB^2 - MC^2 = 2MA^2$.

* Nếu $M \neq A$ và $M \neq C$, thỏa mãn giả thiết. Vẽ $\triangle ABN = \triangle ACM$ sao cho $\widehat{MAN} = 90^\circ$.



Ta có : $\triangle AMN$ vuông cân tại A nên $\widehat{ANM} = 45^\circ$ (1). Mặt khác $MN^2 + NB^2 = 2MA^2 + MC^2$ và bằng MB^2 (gt).

Từ đó $\triangle NMB$ vuông tại N (2).

Từ (1) và (2) ta có $\widehat{ANB} = 45^\circ$ (khi M nằm khác phía với B đối với AC) hoặc $\widehat{ANB} = 135^\circ$ (trong trường hợp ngược lại : điểm M_1, N_1 trên hình).

Từ đó N nằm trên đường tròn đi qua A, B, C . Suy ra $\widehat{AMC} = 45^\circ$ hoặc $\widehat{AMC} = 135^\circ$. Vậy M thuộc cung chứa góc 45° (khi M nằm khác phía với B đối với AC) hoặc cung chứa góc 135° (trong trường hợp ngược lại), nghĩa là M thuộc đường tròn tâm O bán kính OA với OAC vuông cân tại O .

2. *Phần đảo.* Nếu $M \equiv A, M \equiv C$ thì $MB^2 - MC^2 = 2MA^2$. Lấy điểm M bất kì thuộc đường tròn $(O; OA)$, $M \neq A, M \neq C$. MC cắt đường tròn (ABC) tại $N \neq C$.

Ta có $\widehat{ANM} = \widehat{AMN} = 45^\circ$ nên $\triangle AMN$ vuông cân tại A . Suy ra $\widehat{NAB} = \widehat{MAC}, NA = MA, AB = AC$.

Nên $\triangle ABN = \triangle ACM$. Vậy $\triangle BNM$ vuông tại N . Từ đó $2MA^2 + MC^2 = MN^2 + NB^2 = MB^2$ (đpcm).

3. *Kết luận.* Quỹ tích M là đường tròn tâm O là đỉnh tam giác vuông cân OAC dựng ngoài $\triangle ABC$, bán kính OA .

Nhận xét. 1) Một số bạn chưa làm phần đảo đã kết luận quỹ tích. Một bài quỹ tích phải có phần thuận và phần đảo rồi mới kết luận.

2) Một số bạn kết luận quỹ tích chỉ là 1 cung chứa góc là thiếu.

3) Giải tốt bài này có các bạn : **Phú Thọ** : Nguyễn Sơn Tùng, 9B, THCS Nguyễn Quang Bích, Tam Nông ; **Hải Dương** : Hoàng Tiến Đạt, 9A1, THCS Ngô Gia Tự ; **Nam Định** : Hà Phong Giang, THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên ; **Thanh Hóa** : Hoàng Đức Ý, THCS Trần Mai Ninh, Nguyễn Danh Lâm, 8B, THCS Nhữ Bá Sĩ, Hoàng Hóa ; **Nghệ An** : Lê Tuấn Hiệp, 8C, THCS Thái Sơn, Đô Lương ; **Thừa Thiên - Huế** : Nguyễn Vũ Thanh Long, 9/1, THCS Chu Văn An ; **Đà Nẵng** : Nguyễn Như Quốc Trung, 91, THCS Lý Thường Kiệt ; **Đắk Lắk** : Võ Văn Tuấn, 8A5, THCS Nguyễn Du, Krông Buk.

VŨ KIM THỦY

Bài T8/334. Cho n số dương khác nhau ($n \geq 4$). Chứng minh rằng bao giờ cũng chọn được ít nhất hai số sao cho tổng và hiệu của chúng không trùng với số nào trong $n - 2$ số còn lại.

Lời giải. (Của bạn **Trịnh Hà Linh**, 10T, THPT chuyên Lam Sơn, **Thanh Hóa**)

Ta chứng minh bằng phản chứng. Giả sử tồn tại n số $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ sao cho tổng hoặc hiệu của hai số bất kì trùng với một trong $n - 2$ số còn lại.

Ta có $a_n + a_i > a_n$ ($i = 1, 2, \dots, n - 1$) nên $a_n - a_i = a_j$ ($j \neq i, n$) (1). Vì $a_n - a_1 > a_n - a_2 > \dots > a_n - a_{n-1}$ và $a_{n-1} > a_{n-2} > \dots > a_1$ nên ta có $a_n - a_i = a_{n-i}, \forall i = 1, 2, \dots, n - 1$ (2)

a) Nếu $n = 2k$. Từ (2) $a_{2k} - a_k = a_k$. Mâu thuẫn với (1).

b) Nếu $n = 2k + 1$. Ta có $a_{n-1} + a_i > a_{n-1} + a_1 = a_n$ ($i = 2, 3, \dots, n - 2$) do đó $a_{n-1} - a_i = a_j$ ($i = 2, 3, \dots, n - 2$). Mà $a_{n-2} = a_n - a_2 > a_{n-1} - a_2 > \dots > a_{n-1} - a_{n-2}$ và $a_{n-3} > a_{n-4} > \dots > a_1$ nên suy ra $a_{n-1} - a_i = a_{n-1-i}$ (3)

Thay $n = 2k + 1, i = k$ ($k > 1$ do $n \geq 4$) vào (3) ta được $a_{2k} - a_k = a_k$. Vậy theo giả thiết phản chứng có $a_{2k} + a_k = a_j$. Nhưng lại có $a_{2k} + a_k > a_{2k} + a_1 = a_{2k+1} = a_n$ (do (2)). Ta có mâu thuẫn.

Nhận xét. 1) Chú ý rằng kết luận của bài toán không đúng với $n = 3$ chẳng hạn xét ba số $\{1, 2, 3\}$.

Có một số bạn lập luận chưa chặt chẽ trong cách giải của mình.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt : **Trần Trung Dũng**, 10A1, THPT chuyên **Vinh Phúc**; **Nguyễn Hoàng Dũng**, 10CT, Nguyễn Thượng Hiền TP Hồ Chí Minh; **Nguyễn Hải Thạch**, 10T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Quảng Trị**; **Nguyễn Thanh Tuấn**, 11 Toán, THPT Lê Quý Đôn, Nha Trang, **Khánh Hòa**; **Trương Xuân Nhã**, 7A, THCS

Nguyễn Huệ, **Quảng Trị**; Nguyễn Bá Duy Khoa, THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Đà Nẵng**; Bùi Quang Huy, 11 Toán, chuyên Hưng Yên.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T9/334. Chứng minh rằng tổng

$$S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{C_n^k}$$

(trong đó C_n^k là tổ hợp chập k của n) có giới hạn khi n tăng lên vô hạn và tìm giới hạn đó.

Lời giải. (Của đa số các bạn)

Cách 1. Ta có

$$\begin{aligned} S_{2n} &= \sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{C_{2n}^k} = 2 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{C_{2n}^k} + \frac{1}{C_{2n}^n} \\ &= 2 + \frac{2}{C_{2n}^1} + 2 \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{C_{2n}^k} + \frac{1}{C_{2n}^n} \end{aligned}$$

Mặt khác, ứng với $2 \leq k \leq n$, thì

$$C_{2n}^k = \frac{(2n)!}{k!(2n-k)!} \geq n(2n-1)$$

$$\text{nên } 2 < S_{2n} \leq 2 + \frac{2}{2n} + \frac{2(n-2)}{n(2n-1)} + \frac{1}{n(2n-1)},$$

$$\text{hay } 2 < S_{2n} \leq 2 + \frac{2}{2n} + \frac{2n-3}{n(2n-1)}$$

$$\text{Ta lại có } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{2}{2n} + \frac{2n-3}{n(2n-1)} \right) = 0$$

$$\text{nên } \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = 2.$$

Tương tự, từ hệ thức

$$\begin{aligned} S_{2n+1} &= \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{1}{C_{2n+1}^k} = 2 \sum_{k=0}^n \frac{1}{C_{2n+1}^k} \\ &= 2 + \frac{2}{C_{2n+1}^1} + 2 \sum_{k=2}^n \frac{1}{C_{2n+1}^k} \end{aligned}$$

Mặt khác, ứng với $2 \leq k \leq n$, thì

$$C_{2n+1}^k = \frac{(2n+1)!}{k!(1n+1-k)!} \geq n(2n+1)$$

$$\text{nên } 2 < S_{2n+1} \leq 2 + \frac{2}{2n+1} + \frac{2(n-1)}{n(2n+1)}$$

$$\text{Ta lại có } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{2}{2n+1} + \frac{2(n-1)}{n(2n+1)} \right) = 0$$

$$\text{nên } \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} = 2.$$

Từ đây suy ra đpcm.

$$\text{Cách 2. Ta có } S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{C_n^k}. \text{ Đặt } T_n = \sum_{k=0}^n \frac{k+1}{C_n^k}.$$

Sử dụng hệ thức $C_n^k = C_n^{n-k}$, ta thu được

$$T_n = \frac{n+1}{C_n^0} + \frac{n}{C_n^1} + \frac{n-1}{C_n^2} + \dots + \frac{1}{C_n^n}$$

$$\text{và } 2T_n = (n-2)S_n. \text{ Để ý rằng } \frac{k+1}{C_n^k} = \frac{n+1}{C_{n+1}^{k+1}}.$$

Suy ra $T_n = (n+1)(S_{n+1} - 1)$ và thế vào

$$2T_n = (n-2)S_n, \text{ ta nhận được } S_{n+1} = 1 + \frac{n+2}{2(n+1)} S_n.$$

Từ đây, dễ dàng kiểm tra $S_{n+1} < S_n$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{n+2}{2(n+1)} S_n < S_n \Leftrightarrow S_n > 2 + \frac{2}{n}$$

điều này đúng (theo quy nạp).

Vậy dãy số dương S_n là dãy giảm nên có giới hạn $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = a$. Ta thu được hệ thức

$$a = 1 + \frac{1}{2} a \Leftrightarrow a = 2.$$

Nhận xét. Xin nêu tên một số bạn sau có lời giải đúng:

Bùi Quang Huy, 11T, THPT chuyên Hưng Yên; Nguyễn Tuấn Tú, 11CT, THPT Lê Hồng Phong, TP Hồ Chí Minh; Lê Vinh Hòa, Trịnh Ngọc Tú, Nguyễn Văn Ngọc, Dương Minh Hùng, 10T, THPT chuyên Nguyễn Huệ, Hà Tây; Hà Minh Tuấn, 10A2, Nguyễn Trọng Nhật Quang, 11A1 Toán, ĐHKHTN Hà Nội; Kim Đức Toàn, 11T, THPT Trần Phú, Nguyễn Hoài Nam, Trần Trung Dũng, Nguyễn Xuân Thọ, Nguyễn Kim Thuật, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; Nguyễn Văn Phương, 11A, THPT chuyên Bình Phước; Trịnh Thành Kiên, Hoàng Vũ Anh, 10T, THPT chuyên Lam Sơn, Mai Xuân Thiên, 10C1, THPT Thạch Thành, Thanh Hóa; Nguyễn Thị Ba, 11A1, THPT Cửa Lò, Lê Ngọc Thạch, Nguyễn Văn Khôi, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An; Nguyễn Bá Duy Sơn, 11/2, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Đà Nẵng; Thái Thị Thu Trang, 10, THPT Vĩnh Linh, Nguyễn Thị Mai Trang, 10A, Nguyễn Hữu Ninh, 11T1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Quảng Trị; Phạm Thành Thái, Đỗ Đình Thọ, Lê Tân Hoàng, 10T, THPT Nguyễn Trãi, Hải Dương; Đặng Ngọc Thanh, 10T, THPT chuyên Quảng Bình; Nguyễn Văn Minh, 11/1, THPT Sào Nam, Quảng Nam; Châu Ngọc Huy, 11A1, THPT Đầm Dơi, Cà Mau; Lê Anh Phước, 11T, THPT chuyên Lương Văn Chánh, Phú Yên; Trần Đình Cường, 10T, THPT chuyên Hà Tĩnh.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T10/334. Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng:

$$P = tg^2 x \cdot tg^2 y + tg^2 y \cdot tg^2 z + tg^2 z \cdot tg^2 x$$

trong đó x, y, z là ba số dương thỏa mãn các điều kiện:

$$x+y+z = \frac{\pi}{2}; \cos(x-z) \leq \frac{7}{5} \sin y; \cos(x-y) \geq 3 \sin z$$

Lời giải. Đặt $a = \operatorname{tg} y \cdot \operatorname{tg} z$, $b = \operatorname{tg} z \cdot \operatorname{tg} x$, $c = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y$.

Ta có $a, b, c > 0$ và do $\operatorname{tg} x = \cot g(y+z) =$

$$\frac{1}{\operatorname{tg}(y+z)} = \frac{1 - \operatorname{tg} y \cdot \operatorname{tg} z}{\operatorname{tg} y + \operatorname{tg} z} \text{ suy ra } a+b+c = 1.$$

Chú ý : $\cos(x-z) \leq \frac{7}{5} \sin y = \frac{7}{5} \cos(x+z)$ hay

$$5(\cos x \cdot \cos z + \sin x \cdot \sin z) \leq 7(\cos x \cdot \cos z - \sin x \cdot \sin z)$$

$$\Leftrightarrow 12 \cdot \sin x \cdot \sin z \leq 2 \cos x \cdot \cos z$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg} z \cdot \operatorname{tg} x \leq \frac{1}{6}, \text{ tức là } b \leq \frac{1}{6} \quad (2)$$

$$\text{Tương tự } \cos(x-y) \geq 3 \sin z \Leftrightarrow c \geq \frac{1}{2} \quad (3)$$

Do đó bài toán trên đưa về bài toán : "Cho a, b, c là ba số thực dương thỏa mãn các điều kiện (1), (2) và (3). Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng $P = a^2 + b^2 + c^2$ "

Biến đổi ta có : $P = a^2 + b^2 + c^2 =$

$$= \left(a^2 + \frac{1}{9}\right) + \left(b^2 + \frac{1}{36}\right) + \left(c^2 + \frac{1}{4}\right) - \frac{7}{18}$$

$$\geq \frac{2}{3}a + \frac{1}{3}b + c - \frac{7}{18} = \frac{2}{3}(a+b+c) + \frac{1}{3}c - \frac{1}{3}b - \frac{7}{18}$$

$$\geq \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} - \frac{7}{18} = \frac{7}{18}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi : $a = \frac{1}{3}$,

$$b = \frac{1}{6}, c = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \operatorname{tg} y \cdot \operatorname{tg} z = \frac{1}{3}, \operatorname{tg} z \cdot \operatorname{tg} x = \frac{1}{6},$$

$$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \frac{1}{2}, \operatorname{tg} y = 1, \operatorname{tg} z = \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow x = \alpha, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \text{ mà } \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}, y = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{và } z = \frac{\pi}{4} - \alpha.$$

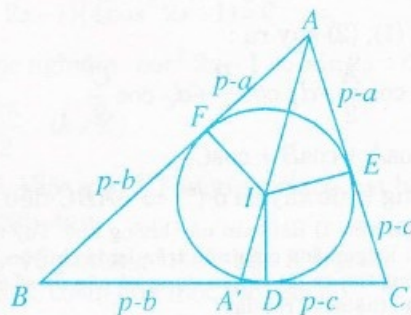
Nhận xét. Bài toán này thuộc dạng cơ bản, không khó. Các bạn sau có lời giải tốt : **Vĩnh Phúc** : Trần Trung Dũng, Nguyễn Đức Học, Nguyễn Xuân Thọ, 10A1, Ngô Tuấn Anh, 10A9, THPT chuyên ; **Hưng Yên** : Phan Tiến Dũng, Nguyễn Văn Thọ, 10T, THPT chuyên ; **Hà Tây** : Lê Vinh Hòa, Trịnh Ngọc Tú, Nguyễn Xuân Việt, 10T, THPT Nguyễn Huệ ; **Hà Nam** : Nguyễn Mạnh An, 10A1, THPT chuyên ; **Thanh Hóa** : Trịnh Khắc Hùng, Trịnh Hồng Phương, 10A5, THPT Nông Cống I ; **Nghệ An** : Trần Đức Nhân, 10A1, THPT Phan Bội Châu ; **Đà Nẵng** : Trương Huy Tiếp, 10A1, THPT Lê Quý Đôn ; **TP Hồ Chí Minh** : Nguyễn Hoàng Dũng, 10T, THPT Nguyễn Thượng Hiền ; **Đắk Lắk** : Lê Đức Quang, 10T, THPT Nguyễn Du ; **Gia Lai** : Trần Đức Việt, 10C3, THPT Hùng Vương, Pleiku.

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T11/334. Gọi d_a, d_b, d_c lần lượt là độ dài các đường phân giác trong xuất phát từ các đỉnh A, B, C của tam giác ABC và p là nửa chu vi tam giác đó. Chứng minh rằng :

$$d_a \cos(A/2) + d_b \cos(B/2) + d_c \cos(C/2) \geq p(\cos A + \cos B + \cos C)$$

Lời giải. (Của bạn Tô Ngọc Quang, 10T, THPT Sơn Tây, TX Sơn Tây, Hà Tây)



$$\text{Ta có : } d_a \cos \frac{A}{2} = AA' \cos \frac{A}{2}$$

$$\geq (AI + ID) \cos \frac{A}{2} = AE + ID \cos \frac{A}{2}$$

$$= p - a + r \cos \frac{A}{2} \text{ (hình vẽ)}$$

$$\text{Tương tự, } d_b \cos \frac{B}{2} \geq p - b + r \cos \frac{B}{2}$$

$$d_c \cos \frac{C}{2} \geq p - c + r \cos \frac{C}{2}$$

$$\text{Suy ra : } d_a \cos \frac{A}{2} + d_b \cos \frac{B}{2} + d_c \cos \frac{C}{2}$$

$$\geq 3p - (a+b+c) + r \left(\cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2} \right) \\ = p + r \left(\cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2} \right) \quad (1)$$

Mặt khác, ta có :

$$p + r \left(\cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2} \right)$$

$$\geq p(\cos A + \cos B + \cos C) \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow p + r \left(\cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2} \right) \geq p \left(1 + \frac{r}{R} \right)$$

(kết quả quen thuộc)

$$\Leftrightarrow r \left(\cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2} \right) \geq \frac{a+b+c}{2R} r$$

$$\Leftrightarrow \cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2} \geq \sin A + \sin B + \sin C \quad (3)$$

Chú ý rằng :

$$\begin{cases} \frac{\sin B + \sin C}{2} \leq \sin \frac{B+C}{2} = \cos \frac{A}{2} \\ \frac{\sin C + \sin A}{2} \leq \sin \frac{C+A}{2} = \cos \frac{B}{2} \\ \frac{\sin A + \sin B}{2} \leq \sin \frac{A+B}{2} = \cos \frac{C}{2} \end{cases}$$

Suy ra : (3) đúng $\Rightarrow$ (2) đúng.

Từ (1), (2) suy ra :

$$d_A \cos \frac{A}{2} + d_B \cos \frac{B}{2} + d_C \cos \frac{C}{2}$$

$$\geq p(\cos A + \cos B + \cos C) \quad (*)$$

Đẳng thức xảy ra ở (*) $\Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

Nhận xét. 1) Bài toán này không khó. Tuy nhiên, tìm ra một lời giải đơn giản như trên lại là chuyện không dễ. Vì không tìm ra (1) và tận dụng nó nên đa số các lời giải đều dài, thậm chí rất dài.

2) Một vài bạn nhận thấy (*) tương đương với

$$\cos A + \cos B + \cos C \leq 3 - \left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \right) \quad (4)$$

Nhưng lại nhận xét sai lầm rằng : (4) đúng vì

$$\begin{cases} \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2} \\ \cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2} \end{cases}$$

3) Các bạn sau đây có lời giải tốt : **Hà Tĩnh** : Hoàng Thanh Hà, 11 Lí, Trần Vinh Phúc, 10T, THPT chuyên Hà Tĩnh ; **Quảng Ngãi** : Võ Xuân Quang, 10T, THPT chuyên Lê Khiết ; **Hà Nội** : Nguyễn Trọng Nhật Quang, 11A1, ĐHKHTN - ĐHQG ; Thanh Hóa : Nguyễn Hải, 10A1, THPT Đông Sơn I ; **Hải Dương** : Đặng Văn Thanh, 11A1, THPT Khúc Thừa Dụ, Ninh Giang ; **Nghệ An** : Nguyễn Đức Tùng, 11A2, THPT Phan Bội Châu.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài T12/334. Cho tam giác ABC vuông ở A và M là trung điểm của BC . Trên đường thẳng d qua M vuông góc với mặt phẳng (ABC) lấy điểm S (S khác M). Mặt phẳng (Q) qua BC vuông góc với mặt phẳng (SAB) , cắt SA tại D . Hãy xác định vị trí của điểm S trên đường thẳng d sao cho tứ diện $ABCD$ có thể tích lớn nhất.

Lời giải. (Dựa theo Vũ Mạnh Tuấn, 12 Toán, THPT chuyên Hưng Yên).

Đặt $AC = b$, $AB = c$, $SM = x$, gọi góc phẳng nhị diện cạnh AB của nửa $mp(ABS)$ và nửa $mp(ABC)$ là α . Do ΔABC vuông ở A nên $MA = MB = MC$, từ đó suy ra $SA = SB = SC$. Gọi N là trung điểm cạnh AB ; ta có $NM \parallel AC$,

$$NM = \frac{1}{2}AC = \frac{b}{2}$$

và $SN \perp AB$,

$NM \perp AB$. Do

đó $\widehat{SNM} = \alpha$.

Vì $\alpha < 90^\circ$ và

$(BCD) \perp (SAB)$

với BD là giao

tuyến của hai

mặt phẳng

(BCD) và (SAB)

nên D thuộc đoạn SA . Trong mặt phẳng

(BCD) dựng $CK \perp (BD)$ tại K ; thế thì

$CK \perp mp(SAB)$ và do đó $CK \perp AB$, $CK \perp AK$.

Lại vì $AB \perp AC$ nên $AB \perp mp(ACK)$ và do đó,

$AB \perp AK$, suy ra $AK \parallel NS$ và $\widehat{KAC} = \alpha$, ΔACK

vuông ở K . Từ đó ta được : $\Delta SNM \sim \Delta CAK$

trong đó : $\widehat{SMN} = \widehat{CKA} = 90^\circ$, $SN \parallel KA$, $MN \parallel CA$

và $\widehat{SNM} = \widehat{CAK} = \alpha$. Từ hai tam giác vuông

$$\text{đồng dạng này ta được hệ thức : } \frac{SN}{CA} = \frac{NM}{AK}$$

$$\text{hay là : } AK \cdot SN = CA \cdot NM = \frac{1}{2}b^2 \quad (1).$$

Gọi P là giao điểm của SN và BD ; thế thì do $NP \parallel AK$ nên ta có :

$$NP = \frac{1}{2}AK \quad (2) \quad \text{và} \quad \frac{SD}{DA} = \frac{SP}{KA},$$

$$\text{hay là : } \frac{SD}{DA} = \frac{SN - (AK/2)}{AK};$$

$$\text{Và do đó ta được : } \frac{SD}{DA} = \frac{SN}{AK} - \frac{1}{2}; \quad (3)$$

Lại từ (1) ta có :

$$\frac{SN}{AK} = \frac{SN^2}{AK \cdot SN} = \frac{MN^2 + x^2}{b^2/2} = \frac{1}{2} + \frac{2x^2}{b^2} \quad (4)$$

Đổi chiếu (3) và (4), ta được :

$$\frac{SD}{DA} + 1 = \frac{SA}{DA} = \frac{2x^2}{b^2} + 1 = \frac{2x^2 + b^2}{b^2} \quad (5)$$

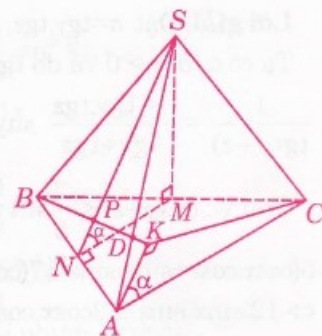
Mặt khác, dễ thấy rằng :

$$\frac{v(ABCD)}{v(ABCS)} = \frac{DA}{SA} \quad (6)$$

Từ (5) và (6) ta được:

$$v(ABCD) = v(SABC) \cdot \frac{b^2}{2x^2 + b^2}, \text{ hay là :}$$

$$v(ABCD) = \frac{bcx}{6} \cdot \frac{b^2}{2x^2 + b^2}$$



$$= \frac{b^2 c}{6} \cdot \frac{bx}{(x\sqrt{2})^2 + b^2} \leq \frac{b^2 c}{6} \cdot \frac{bx}{2bx\sqrt{2}}$$

(suy từ BĐT: $(x\sqrt{2})^2 + b^2 \geq 2b(x\sqrt{2})$)

$$\text{Vậy } v(ABCD) \leq \frac{1}{24} b^2 c \sqrt{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $x\sqrt{2} = b$,
hay là: $x = \frac{b\sqrt{2}}{2}$.

Tóm lại: Thể tích tứ diện $ABCD$ đạt cực đại
 $v_{\max} = \frac{\sqrt{2}}{24} b^2 c$ khi và chỉ khi S là một trong
hai điểm trên đường thẳng d đối xứng nhau
qua điểm M sao cho đoạn thẳng MS có độ dài
bằng đường chéo của hình vuông có cạnh
bằng $\frac{b}{2}$.

Nhận xét. 1) Mặt phẳng (Q) nói trong bài toán chính
là mặt phẳng (BCP) và $(Q) \perp (SAB)$ theo giao tuyến BD .
Lời giải trên đây chỉ đòi hỏi vận dụng kiến thức có trong
sách giáo khoa về hình học phẳng và hình học không
gian, về đại số.

Đa số các bạn giải được ngắn gọn hơn bằng sử dụng
định lý Mê-nê-la-uyt để xác định tỉ số $\frac{DS}{DA}$ mà điểm D
(giao điểm của mặt phẳng (Q) và đoạn thẳng SA) chia
trong đoạn SA . Thật vậy, áp dụng định lý đó vào tam
giác SAN và cát tuyến BPD ta được hệ thức:
 $\frac{BA}{BN} \cdot \frac{PN}{PS} \cdot \frac{DS}{DA} = 1$ và từ đó suy ra:

$$\frac{SD}{DA} = \frac{BN}{BA} \cdot \frac{SP}{PN} \quad (\text{trong đó } \frac{BN}{BA} = 1), \quad (i)$$

Sau đó tính được (nhờ hệ thức trong tam giác SMN
vuông ở M và $MP \perp SN$):

$$\frac{SP}{PN} = \frac{SP \cdot SN}{PN \cdot SN} = \frac{SM^2}{MN^2} = \frac{4x^2}{b^2} \quad (ii)$$

Sau cùng, từ (i) và (ii) cũng thu được $\frac{DS}{DA}$ rồi $\frac{SA}{DA}$
như (5) ở trên.

2) Một số bạn sử dụng phương pháp tọa độ cũng cho
kết quả như lời giải trên, song đáng tiếc nhiều bạn đã
giải sai. Số còn lại cũng giải đúng nhưng không tính toán
được giá trị lớn nhất của thể tích tứ diện $ABCD$ theo b và
 c mà chỉ cho giá trị độ dài của $MS = \frac{AC}{\sqrt{2}}$ để $v(ABCD)$
đạt giá trị cực đại.

3) Bạn *Trình Văn Nam*, 12A1, THPT Phan Bội Châu,
Nghệ An còn đề xuất và giải bài toán tổng quát hơn
bằng cách thay trung điểm M của cạnh BC bởi một điểm
tùy ý thuộc đoạn BC với $\frac{MB}{MC} = k$ ($k > 0$) và cho kết quả

$$v(ABCD) \leq \frac{b^2 c \sqrt{k(k+1)}}{12(k+1)}. \text{ Đẳng thức xảy ra } \Leftrightarrow SM = b \sqrt{\frac{k}{k+1}}. \text{ (Bài toán trên ứng với giá trị } k = 1).$$

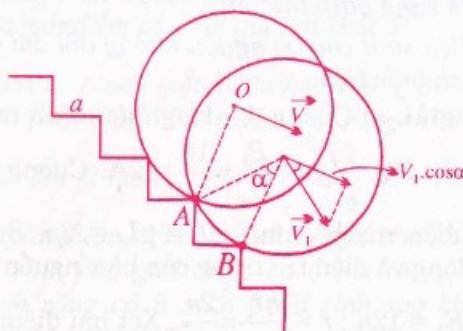
4) Ngoài hai bạn *Vũ Mạnh Tuấn* và *Trình Văn Nam*
các bạn sau đây có lời giải tương đối gọn gàng: **Vinh**
Phúc: *Trần Trung Dũng*, 10A1, *Nguyễn Văn Ngọc*, *Lê*
Trường Sơn, 11A1, THPT chuyên, *Trần Văn Huỳnh*,
10A1, THPT Ngô Gia Tự, Lập Thạch; **Sơn La**: *Tô Phương*
Nhung, 11A2, THPT Mai Sơn, Sơn La; **Nam Định**:
Phạm Cao Kỳ, 11B5, THPT Hải Hậu A; **Hải Phòng**:
Phạm Duy Tùng, 12A2, THPT Kiến An; **Thanh Hóa**:
Bùi Khắc Kiên, 11 THPT Lam Sơn, *Lê Ngọc Du*, 10A10,
THPT Lê Văn Hưu, Thiệu Hóa; **Nghệ An**: *Lê Văn Lương*,
11T, THPT Hà Huy Tập, TP Vinh, *Nguyễn Viết Khôi*,
11A1, THPT Phan Bội Châu; **Hà Tĩnh**: *Nguyễn Ngọc*
Anh, 11 Toán K13, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Quảng Trị**:
Nguyễn Thiện Nhân, 11 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn;
Thừa Thiên - Huế: *Nguyễn Tuấn Minh*, 11 Toán,
THPT Quốc học - Huế; **Đà Nẵng**: *Nguyễn Tường Huân*,
11/1, THPT Lê Quý Đôn; **Quảng Ngãi**: *Thới Thanh*
Tân, 11A9, THPT Đức Phổ I; **An Giang**: *Trần Quốc*
Trạng, 10A1, THPT Long Xuyên; **Bà Rịa - Vũng Tàu**:
Trần Văn Linh, THPT Lê Quý Đôn, Vũng Tàu.

NGUYỄN ĐĂNG PHÁT

Bài L1/234. Một quả cầu bán kính R lăn
trên một cầu thang, bề rộng và chiều cao của
các bậc thang đều bằng a (hình vẽ). Va chạm
của quả cầu với các bậc thang là không đàn
hồi. Quả cầu sẽ đạt được vận tốc lớn nhất
bằng bao nhiêu khi chiều dài cầu thang là đủ
lớn.

Biết a khá nhỏ so với R và bỏ qua ma sát.

Lời giải. Sau khi va chạm với bậc thang ở
điểm A vận tốc $\vec{v}$ của quả cầu hướng vuông
góc với bán kính OA (xem hình vẽ bên).
Trong chuyển động tiếp theo của nó, khối
tâm quả cầu sẽ chuyển động theo đường tròn
bán kính R với tâm ở điểm A (do $R \gg a$) và
tới khi nó va chạm lần nữa với bậc thang thì
khối tâm rơi xuống được một độ cao là a . Tại
thời điểm mà quả cầu va chạm với bậc thang



tại B, vận tốc v_1 của khối tâm được xác định bởi: $\frac{mv^2}{2} + mga = \frac{mv_1^2}{2} \Rightarrow v_1 = \sqrt{v^2 + 2ga}$.

Vì va chạm không đàn hồi nên chỉ có thành phần vận tốc của quả cầu vuông góc với bán kính là được bảo toàn. Với vận tốc trung bình không đổi của quả cầu thành phần đó phải bằng v , nghĩa là $v_1 \cos \alpha = v$. Từ đó $v = \sqrt{v^2 + 2ga} \cos \alpha$ (1). Nhưng vì $a \ll R$ nên $\sin \alpha = \frac{a\sqrt{2}}{R} \Rightarrow \cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{2a^2}{R^2}}$. Thay vào (1) ta được: $v = \sqrt{\frac{(R^2 - 2a^2)}{a}} \cdot g \approx \sqrt{g \frac{R^2}{a}}$. Vậy

$$v_{\max} \approx R \sqrt{\frac{g}{a}}.$$

Nhận xét. Các bạn có lời giải và đáp số đúng:

Vinh Phúc: Nguyễn Thành Công B, 10A3, Lê Đình Anh, Cù Quốc Cường, Nguyễn Minh Khương, 11A3, THPT chuyên Vinh Phúc; **Bắc Ninh:** Trần Thái Hà, 11 Lí, Nguyễn Minh Cường, 12 Lí, THPT chuyên Bắc Ninh; **Tiền Giang:** Trương Huỳnh Phạm Tân, 11 Lí, THPT chuyên Tiền Giang; **TP Hồ Chí Minh:** Dương Quảng Điền, 11 Lí, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Thái Nguyên:** Ngô Thu Hà, 11 Lí, THPT chuyên Thái Nguyên; **Hải Dương:** Nguyễn Việt Anh, 11 Lí, THPT chuyên Nguyễn Trãi.

MAI ANH

Bài L2/334. Một bộ nguồn gồm $x = 16$ nguồn điện được mắc thành m dãy song song, mỗi dãy có n nguồn mắc nối tiếp. Suất điện động của mỗi nguồn là $E_1 = 12V$ và điện trở trong $r_1 = 2\Omega$. Dùng bộ nguồn này để cung cấp điện cho một bộ đèn gồm $y = 12$ đèn được mắc thành p dãy song song, mỗi dãy có q đèn mắc nối tiếp. Trên mỗi đèn có ghi $9V-18W$. Hãy chỉ ra:

a) Các cách mắc nguồn (tìm m, n) và các cách mắc bóng đèn tương ứng (tìm p, q) để các đèn sáng bình thường.

b) Hiệu suất của bộ nguồn không đổi đối với các cách mắc trên.

Lời giải. a) Cường độ dòng điện định mức của mỗi đèn: $I_d = \frac{P_d}{U_d} = \frac{18}{9} = 2A$. Cường độ

dòng điện mạch chính: $I = pI_d = 2p$. Suất điện động và điện trở trong của bộ x nguồn là:

$$E = nE_1 = 12n; r = \frac{nr_1}{m} = \frac{2n}{m}. \text{ Xét hai điểm A,}$$

B như trên hình vẽ: $U_{AB} = qU_d = 9q$; mặt khác $U_{AB} = E - Ir = 12n - \frac{4pn}{m}$. Từ đó:

$12n - \frac{4pn}{m} = 9q$. Vì $pq = 12$ nên ta có phương trình: $p^2n^2 - 48pn + 432 = 0$. Suy ra:

$$n = \frac{24p \pm 12p}{p^2}. \text{ PT có 2 nghiệm}$$

$n_1 = \frac{36}{p} = 3 \cdot \frac{12}{p} = 3q$ và $n_2 = \frac{12}{p} = q$. Vì n là ước số của $x = 16$ mà q phải là số nguyên nên chỉ có nghiệm $n = q$. Mặt khác q lại phải là ước của 12 nên $n = q$ chỉ có thể nhận các trị số $n = q = 1; 2; 4$.

Từ đó suy ra

3 cặp (m, n) là $(16; 1), (8; 2); (4; 4)$ và 3 cặp tương ứng của (p, q) là $(12; 1); (6; 2)$ và $(3; 4)$.

b) Hiệu suất của bộ nguồn là:

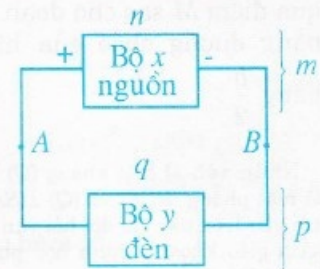
$$H = \frac{U_{AB}}{E} = \frac{9q}{12n} = \frac{3}{4} = 75\%, \text{ chứng tỏ hiệu}$$

suất bộ nguồn không đổi với ba cách mắc trên.

Nhận xét. Các bạn có lời giải gọn và đúng:

Vinh Phúc: Nguyễn Đức Trọng, 10A3, Nguyễn Ngọc Hưng, Đoàn Anh Quân, Nguyễn Minh Phương, Lê Quốc Cường, Lê Đình Anh, 11A3, THPT chuyên; **Phú Thọ:** Tô Minh Tiến, Nguyễn Quang Huy, 10 Lí, THPT chuyên Hùng Vương; **Nghệ An:** Phạm Bá Sơn, 11A3, THPT chuyên Phan Bội Châu; **Bắc Ninh:** Trần Thái Hà, 11 Lí, THPT chuyên Bắc Ninh; **TP Hồ Chí Minh:** Dương Quảng Điền, 11 Lí, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Hải Phòng:** Phạm Tuấn Hiệp, 11 Lí, THPT NK Trần Phú; **Thái Nguyên:** Ngô Thu Hà, 11 Lí, THPT chuyên Thái Nguyên; **Đồng Tháp:** Phạm Tuấn Khải, 11A1, THPT Thanh Bình I; **Quảng Ngãi:** Lê Hà Kiệt, 12A2, THPT Đức Phổ I; **Ninh Bình:** Nguyễn Mạnh Tùng, 11B8, THPT Nguyễn Huệ, TX Tam Điệp; **Bình Định:** Lý Viễn Trường, 10A1, THPT Phù Cát 1; **Hải Dương:** Trịnh Thanh Sơn, 11A1, THPT Ninh Giang; **Thanh Hóa:** Nguyễn Tiến Liên, 11A11, THPT Yên Định 2; **Vinh Long:** Dương Minh Tiến, 11TL, THPT Nguyễn Bình Khiêm; **Tiền Giang:** Trương Huỳnh Phạm Tân, 11 Lí, THPT Tiền Giang; **Yên Bái:** Trần Đức Mi, 11 Toán, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành; **Hà Tĩnh:** Nguyễn Ngọc Anh, 11 Toán K13, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Hưng Yên:** Vũ Mạnh Tuấn, 12 Toán, THPT chuyên Hưng Yên.

MAI ANH





Giải đáp bài :

PHƯƠNG TRÌNH CÓ NGHIỆM DUY NHẤT Ứ ?

(Đề đăng ở THPT số 336, tháng 6 năm 2005).

– Bài giải đã cho đáp số sai $m \geq \frac{3}{8}$! Nguyên nhân dẫn đến sai lầm là việc nhận xét "PT $x^2 + (x+1)^2 = \frac{m}{x^2+x+1}$ (1) có nghiệm duy nhất khi PT $2t^2 - t = m$ (2) có nghiệm duy nhất với $t \geq \frac{3}{4}$ (1)".

Rõ ràng nếu có một giá trị của t mà $t > \frac{3}{4}$ thì theo cách đặt $t = x^2 + x + 1$ tương ứng sẽ có hai giá trị của x thỏa mãn ràng buộc đó, dẫn đến PT ban đầu không thể có nghiệm duy nhất được.

Để khắc phục sai lầm ta phải thêm điều kiện PT (ẩn x): $x^2+x+(1-t) = 0$ có nghiệm duy nhất, khi đó phải có biệt thức $\Delta = 1-4(1-t) = 0$
 $\Leftrightarrow t = \frac{3}{4}$, lúc đó $x = -\frac{1}{2}$ là nghiệm duy nhất của PT (1) và $m = \frac{3}{8}$ là giá trị cần tìm.

Một số bạn giải lại bài toán bằng cách xét điều kiện cần và đủ sau khi đã nhận xét rằng PT (1) có nghiệm $x = x_0$, thì nó cũng nhận $x = (-1 - x_0)$ làm nghiệm, cũng đi đến đáp số đúng. Các bạn sau có đáp án tốt hơn cả :

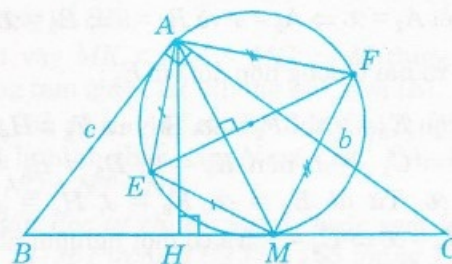
Nguyễn Mạnh Hưng, 9B, THCS Từ Sơn, Từ Sơn, Bắc Ninh, Nguyễn Văn Hậu, 11A1, THPT Yên Dũng II, Yên Dũng, Bắc Giang ; Lê Công Truyền, 11A1, THPT chuyên Vinh

Phúc, Vinh Phúc , Nguyễn Đình Tuấn, 11PT3, THPT Nguyễn Huệ, Hà Tây ; Lê Thị Tương, 11B1, THPT Hoàng Hóa II, Hoàng Hóa, Thanh Hóa.

NGỌC HIỀN

CÓ HỢP LÍ KHÔNG ?

Gặp bài toán "Cho tam giác ABC vuông tại A, AC = b, AB = c. M là một điểm trên cạnh BC. Gọi E và F lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABM và tam giác ACM. Xác định vị trí của M để diện tích $\triangle AEF$ nhỏ nhất. Tính giá trị nhỏ nhất đó theo b, c" có một bạn đã giải như sau :



Dựng $AH \perp BC$ ($H \in BC$).

Ta có $\widehat{AEM} = 2\widehat{ABM}$, $\widehat{AFM} = 2\widehat{ACM}$, suy ra $\widehat{AEM} + \widehat{AFM} = 2(\widehat{ABM} + \widehat{ACM}) = 180^\circ$.

$\Rightarrow \widehat{EAF} = \widehat{EMF} = 90^\circ$, do đó tứ giác AEMF nội tiếp trong đường tròn đường kính EF.

Ta thấy diện tích $S(AEF) = \frac{1}{2}S(AEMF) = \frac{1}{4}AM \cdot EF \geq \frac{1}{4}AM^2 \geq \frac{1}{4}AH^2 = \frac{1}{4} \left(\frac{b^2c^2}{b^2+c^2} \right)$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow M$ trùng với H . Do đó giá trị nhỏ nhất của $S(AEF)$ là $\frac{b^2c^2}{4(b^2+c^2)}$, đạt được khi và chỉ khi M trùng với H .

Cách giải trên có hợp lí không ? Lời giải của bạn như thế nào ?

THÁI NHẬT PHƯỢNG
(GV THCS Cam Nghĩa, Cam Ranh, Khánh Hòa)

KẾT QUẢ CUỘC THI VUI ...

(Tiếp từ bài 3)

Khai triển khối lập phương $ABCD.EFKH$ và kí hiệu các ô vuông như hình 4. Chú ý rằng ba ô chung đỉnh kí hiệu bởi cùng một chữ, mỗi mặt kí hiệu bởi cùng một chỉ số. Kí hiệu màu đỏ là $\mathcal{D}$, xanh là $\mathcal{X}$, tím là $\mathcal{T}$.

Ba ô chung đỉnh phải được tô bằng ba màu khác nhau (*).

Theo đề bài đã xác định $A_1 = \mathcal{X}$, $B_1 = D_1 = \mathcal{D}$, $C_1 = \mathcal{X}$. Với A_2 thì chỉ có thể $A_2 = \mathcal{X}$ hoặc $A_2 = \mathcal{D}$.

1) Xét $A_2 = \mathcal{X} \Rightarrow A_5 = \mathcal{D}$ và $B_2 = \mathcal{T} \Rightarrow B_3 = \mathcal{X}$.

Xảy ra hai trường hợp đối với E_2 :

a) Nếu $E_2 = \mathcal{D}$ thì $F_2 = \mathcal{X}$. Suy ra $F_6 = H_6 = \mathcal{D}$ và $F_3 = C_3 = \mathcal{T}$, nên $K_3 = \mathcal{D}$, $D_5 = E_5 = \mathcal{T}$, $H_5 = \mathcal{X}$. Từ đó $E_6 = \mathcal{X}$, $K_6 = \mathcal{T}$, $H_4 = \mathcal{T} \Rightarrow D_4 = K_4 = \mathcal{X} \Rightarrow C_4 = \mathcal{D}$. Ta có một nghiệm như ở hình 3a, 3b.

b) Nếu $E_2 = \mathcal{T}$. Lập luận tương tự trên dẫn đến trái với (*).

2) Xét $A_2 = \mathcal{D}$. Lập luận tương tự như trên dẫn đến có 1 nghiệm. Tuy nhiên nếu đổi chỗ mặt đáy dưới $EFKH$ cho đáy trên $CBAD$ thì ta lại được hình 3a, 3b. Như vậy bài toán chỉ có một nghiệm.

Khá đông các bạn giải được bài toán này, tuy nhiên có rất ít bạn lập luận về số nghiệm của bài toán. Bạn *Võ Thái Thông*, 9/4, THPT Ngô Gia Tự, Cam Nghĩa, Cam Ranh, Khánh Hòa đã lập luận và giải đúng.

BÀI 5. Tìm các số nguyên tố

Gọi các hàng từ trên xuống dưới là $a, b, c, d, e, g, h, i, k$. Gọi các cột từ trái sang phải là 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Chú ý. 1) Nếu số có 1 chữ số thì số trong ô đó chỉ có thể là 2, 3, 7.

2) Chữ số tận cùng của các số nguyên tố (SNT) lớn hơn 11 chỉ có thể là 3 hoặc 7.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a	1	2	1	3		1	1	7	1
b	5		3	1		2	9		5
c	6	7		3	1	7		5	3
d	7	3	3		7		4	9	1
e			8	3		3	7		
g	5	6	9		2		9	4	1
h	1	1		3	3	1		7	9
i	7		4	3		9	7		3
k	1	2	1	7		3,7	1	2	1

Xét các số có 4 chữ số ta tìm được ngay $(a, 8) = 7$, $(c, 9) = 3$, $(i, 1) = 7$, $(i, 9) = 3$. Ta cũng có $(k, 6)$ bằng 3 hoặc 7 đều được $\Rightarrow (k, 8) = 2$.

Xét các số dạng $\overline{1x1y}$ với $y = 3, 7$ còn $x = 2, 3, 5, 7$ (SNT) thì chỉ có 1213 và 1217 là SNT. $(a, 4)$ và $(c, 4)$ khác 7 vì không có SNT $\overline{71x}$. Vậy $(a, 4) = 3$, $(c, 4) = 3$ và $(k, 4) = 7$.

Xét các số có 2 chữ số và 3 chữ số. Dễ thấy $(i, 7) = 7 \Rightarrow (b, 3) = 3$ (khác 7 vì đã có 71). Có $(d, 5) = 7$, còn $(c, 6) = 7$ vì đã có 313. Suy ra $(b, 6) = 2$. Có $(h, 8) = 7 \Rightarrow (g, 8) = 4$. Có $(g, 2) = 6$. Vì đã có 61 (g, h cột 2), 31 (3, 4 hàng b), 71 (i, k cột 7) nên $(i, 3) = 4 \Rightarrow (i, 4) = 3$ vì đã có 47 (g, h cột 8). Có $(h, 4) = 3$ vì trong các số $\overline{x37}$ chỉ có 337 là SNT. Suy ra $(h, 5) = 3$. Có $(d, 4) = 4$ (khác 6 vì 639, 679 đều là hợp số). Lập luận tiếp ở cột 1 ô c, d, ta suy ra bảng trên, đồng thời có $(g, 5) = 2$, $(e, 5) = 3$.

Bài toán có 2 nghiệm như bảng trên, trong đó ô $(k, 6)$ có thể lấy giá trị 3 hoặc 7.

Hoan nghênh các bạn tìm đúng và đủ 2 nghiệm, có lập luận: *Dương Đức Thanh*, 10A3, THPT Lý Thái Tổ, Từ Sơn, Bắc Ninh, *Nguyễn Xuân Mỹ*, 11A, THPT Vĩnh Lợi, Bạc Liêu, *Nguyễn Văn Anh*, số 41 tổ 7, TTr. Thuận Châu, Sơn La.

HỘI THI TIN HỌC TRẺ KHÔNG CHUYÊN TOÀN QUỐC LẦN THỨ XI - 2005

Hội thi Tin học trẻ không chuyên toàn quốc lần thứ XI do Trung ương Đoàn TNCS Hồ Chí Minh, Bộ Khoa học và Công nghệ, Bộ Giáo dục và Đào tạo, Bộ Bưu chính - Viễn thông, Bộ Tài chính, Đại học Quốc gia Hà Nội, Đài Truyền hình Việt Nam, UBND TP Hà Nội, Hội Tin học Việt Nam phối hợp tổ chức đã diễn ra từ ngày 3 đến ngày 6/8/2005 tại Đại học Quốc gia Hà Nội.

Về dự Hội thi năm nay có **193** thí sinh từ 53 tỉnh, thành và ngành trong cả nước, trong đó có **64** thí sinh Tiểu học (bảng A), **60** thí sinh Trung học cơ sở (bảng B), **60** thí sinh Trung học phổ thông (bảng C), **9** thí sinh dự thi phần mềm sáng tạo, khối không chuyên (bảng E). Tổng số phần mềm sáng tạo khối không chuyên (bảng D) và khối chuyên (bảng E) là **34** (phần mềm). Ngoài ra Hội thi còn tổ chức thi "Tin học Vui" (bảng G) cho tất cả các thí sinh dự thi.

Chiều ngày 6/8/2005 tại Hội trường Thăng Long, Khách sạn Méliá Hà Nội, Ban chỉ đạo hội thi đã trao **99** giải thưởng cho các thí sinh đoạt giải các khối thi, phần mềm sáng tạo khối chuyên và không chuyên: **Vũ Thái Bảo (Hải Phòng)** giải Nhất bảng A, **Trần Ngọc Minh Huy (Đà Nẵng)** giải Nhất bảng B, **Nguyễn Đức Lân (Đà Nẵng)** giải Nhất bảng C. Giải đồng đội thuộc về đội **Đà Nẵng, Lê Trương Quỳnh Giang (lớp 3, TH Đoàn Thị Điểm, Lâm Đồng)** là thí sinh trẻ tuổi nhất đoạt giải. Cuộc thi có **6** thí sinh là người thuộc các dân tộc thiểu số.

Để biểu dương sự cố gắng học tập của các thí sinh, Ban Bí thư TƯ, Đoàn đã quyết định tặng Huy hiệu "Tuổi trẻ sáng tạo" cho các thí sinh đạt giải Nhất, tặng Bằng khen của BCH. TƯ, Đoàn cho tất cả các thí sinh đoạt giải Nhì và giải Ba; Lãnh đạo Bộ Giáo dục và Đào tạo đã quyết định tặng Bằng khen cho 7 thí sinh đoạt giải Nhất thi toàn quốc, giải Nhất phần mềm sáng tạo.

Để ghi nhận và biểu dương các tập thể, cá nhân có thành tích xuất sắc trong chỉ đạo và phối hợp tổ chức, phục vụ, tài trợ Hội thi trong 11 năm qua, Nhà nước đã tặng thưởng **Huân chương Lao động Hạng Ba** cho Trung tâm phát triển Khoa học, Công nghệ và Tài năng trẻ - Thường trực Ban tổ chức Hội thi; Thủ tướng Chính phủ tặng Bằng khen cho 4 đơn vị: Trung tâm Phát triển Khoa học và Công nghệ trẻ thuộc Thành Đoàn TP Hồ Chí Minh, Bưu điện tỉnh Lâm Đồng, Hội đồng Đội TP Hà Nội, Khoa Công nghệ Thông tin Trường Đại học Công nghệ thuộc ĐHQG Hà Nội; Ban Bí thư TƯ, Đoàn TNCS Hồ Chí Minh quyết định tặng Kỷ niệm chương "Vì thế hệ trẻ" - Danh hiệu cao

DANH SÁCH ĐỘC GIẢ ĐOẠT GIẢI CUỘC THI XUÂN RA ĐỀ - HÈ GIẢI ĐÁP

GIẢI NHẤT : *Lương Thế Huân*, sinh ngày 11.05.1960, 160/1/22 Xô Viết Nghệ Tĩnh, P.21, Q. Bình Thạnh, TP Hồ Chí Minh.

GIẢI NHÌ :

- 1) *Phan Trọng Tiệp*, sinh ngày 10.03.1980, trường THPT Chiêm Hóa, **Tuyên Quang**.
- 2) *Trần Như Ngọc*, sinh ngày 20.09.1991 THCS thị trấn Phước An, lớp 8A3, huyện Krông Pắc, **Đắk Lắk**.

GIẢI BA :

- 1) *Dương Đức Thanh*, sinh ngày 24.02.1989, trường THPT Lý Thái Tổ, lớp 10A3, Huyện Từ Sơn, **Bắc Ninh**.
- 2) *Hoàng Thị Thu Hằng*, sinh ngày 30.07.1988, xóm Trại, xã Nam Tiến, huyện Phổ Yên, **Thái Nguyên**.
- 3) *Hoàng Tuấn Linh*, sinh ngày 08.08.1988 trường THPT Nguyễn Tất Thành, lớp 11 Toán, TP Yên Bái, **Yên Bái**.

GIẢI KHUYẾN KHÍCH :

- 1) *Nguyễn Trọng Tín*, sinh ngày 14.02.1988, trường THPT Gia Định, lớp 11A1, **TP Hồ Chí Minh**.
- 2) *Nguyễn Văn Nguyên*, sinh ngày 12.02.1947, 30 Nguyễn Trường Tộ, Khu phố 2, Lộc Tiến, TX Bảo Lộc, **Lâm Đồng**.
- 3) *Hồ Minh Nhật*, sinh ngày 03.11.1990, 71 Phó Đức Chính, P. Thắng Tam, TP Vũng Tàu, **Bà Rịa - Vũng Tàu**.
- 4) *Lê Minh Nhật*, sinh ngày 02.11.1988, trường THPT số 1 Tuy Phước, lớp 11A1, huyện Tuy Phước, **Bình Định**.
- 5) *Mai Thế Sự*, sinh ngày 01.12.1988, trường Võ Minh Đức, lớp 11/5, TX Thủ Dầu Một, **Bình Dương**.
- 6) *Phan Thị Hằng*, sinh ngày 13.10.1989, trường THPT Trần Hưng Đạo, lớp 10A8, Mang Yang, **Gia Lai**.

THTT

quý của Đoàn TNCS Hồ Chí Minh cho 3 chuyên gia Công nghệ Thông tin đã có nhiều đóng góp giáo dục, đào tạo thế hệ trẻ; tặng Bằng khen của BCH TƯ, Đoàn cho 25 tập thể và 30 cá nhân.

Hội thi Tin học trẻ không chuyên toàn quốc lần thứ XI - 2005 đã đạt được các mục tiêu, yêu cầu đề ra, đó là cổ vũ được đông đảo thanh thiếu nhi hăng say tìm hiểu về công nghệ thông tin, tích cực học tập và nâng cao kiến thức Tin học, tạo tiền đề quan trọng và cần thiết cho tuổi trẻ Việt Nam xung kích đi đầu trong sự nghiệp Công nghiệp hóa, Hiện đại hóa đất nước, góp phần thực hiện thắng lợi chỉ thị 58 - CT/TƯ của Bộ Chính trị ĐCSVN.

P.V

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964

Số 338 (8-2005)

Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội

ĐT - Fax : 04.5144272

Email : toanhocvt@yahoo.com

TRONG SỐ NÀY

1 **Dành cho Trung học Cơ sở – For Lower Secondary Schools**

Vũ Hữu Chin – Một số bài toán về tập hợp điểm thỏa mãn bất đẳng thức

4 **Kì thi Olympic Toán Quốc tế lần thứ 46**

5 **Bạn có biết – Do you know ?**

Phan Thanh Quang - Chứng minh mới của bài toán bốn màu

6 **Chuẩn bị thi vào Đại học – University Entrance Preparation**

Nguyễn Anh Dũng – Về cách giải đề thi tuyển sinh đại học môn Toán khối A năm 2005 (tiếp theo kì trước)

8 **Trần Mạnh Hưng – Thêm một cách giải bài toán tổ hợp**

9 **Lê Quốc Hán – Một số tính chất thú vị của hình vuông**

11 **Phương pháp giải toán - Math Problem Solving**

Nguyễn Lâm Tuyền – Một số phương pháp xác định giới hạn của dãy số.

14 **Tìm hiểu sâu thêm toán học sơ cấp - Advanced Elementary Mathematics**

Tạ Duy Phương – Phương trình bậc ba và các hệ thức hình học trong tam giác (tiếp theo kì trước)

16 **Đề ra kì này – Problems in This Issue**
T1/338, ..., T12/338, L1, L2/338.

18 **Giải trí toán học – Math Recreation**

19 **Giải bài kì trước – Solutions to Previous Problems.**

Giải các bài của số 334.

29 **Sai lầm ở đâu ? - Where's the Mistake?**

31 **Hội thi tin học trẻ không chuyên toàn quốc lần thứ XI - 2005**

Bìa 1 : Đoàn Việt Nam tham dự IMO lần thứ 46 tại Mexico, từ trái qua phải :

- *Hàng sau:* Thầy Lê Bá Khánh Trình, Thầy Nguyễn Thành Văn, Thầy Lê Tự Cường, Thầy Vũ Đình Hòa, Thầy Nguyễn Văn Thông

- *Hàng trước:* Trần Chiêu Minh, Nguyễn Nguyên Hùng, Phạm Kim Hùng, Đỗ Quốc Khánh, Trần Trọng Đan, Nguyễn Trường Thọ

Bìa 3: Kết quả Cuộc thi Xuân ra đề - Hè giải đáp

ĐÓN ĐỌC THPT SỐ 339 (9.2005)

- Góc định hướng
- Tính đối xứng của bài toán cực trị
- Toán học và sự lan truyền của bệnh dịch
- Sử dụng tính chẵn lẻ trong giải toán
- Sử dụng bất đẳng thức Cô-si để giải các bài toán thi tuyển sinh

Mời các bạn đặt mua tạp chí THPT tại Bưu điện.

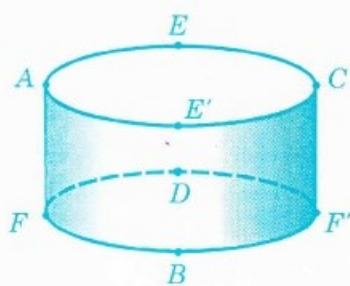
THPT

Kết quả Cuộc thi vui XUÂN RA ĐỀ, HÈ GIẢI ĐÁP

Cuộc thi của chúng ta năm nay đã thành công mặc dù tổ chức vào dịp hè chính là mùa ôn thi đại học với nhiều bận và một số bạn khác gặp khó khăn khi tìm mua báo. Địa chỉ các bạn đoạt giải đều khắp từ Bắc vào Trung và Nam, từ đồng bằng đến miền núi. Qua đó cũng thấy sự hấp dẫn của cuộc thi. Số lượng bài giải đợt 2 có ít hơn đợt 1 có lẽ do đề của đợt 2 còn khó so với mức độ yêu cầu của một đợt thi vui giải trí trong hè. Điều này sẽ được điều chỉnh trong các cuộc thi tương tự lần sau. Trong lời giải chúng tôi không chỉ ghi kết quả mà trình bày cả phần lập luận để thấy rõ cách giải và chỉ ra bài toán có bao nhiêu nghiệm. Xin chúc mừng 12 bạn được giải của cuộc thi vui **Xuân ra đề - Hè giải đáp** lần này.

Sau đây là đáp án các bài thi đợt 2.

BÀI 4. Cắt gập hình không gian



Hình 1

Muốn cắt gập được khối tứ diện đều cạnh $2h$ theo yêu cầu đề bài thì diện tích xung quanh của hình trụ bằng diện tích toàn phần của tứ diện đều.

Diện tích xung quanh của hình trụ có chiều cao h , bán kính đáy r được tính bởi công thức

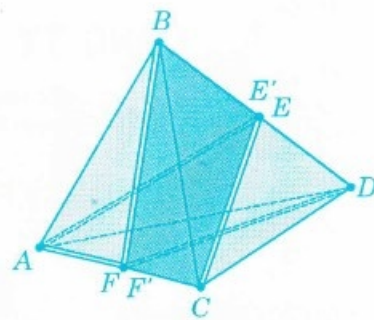
$$S_{xq} = 2\pi rh \quad (1)$$

Diện tích toàn phần của tứ diện đều cạnh $2h$ là

$$S_{tp} = 4h^2\sqrt{3} \quad (2)$$

Từ (1), (2) có $r = \frac{2h\sqrt{3}}{\pi} \quad (3)$

Như vậy muốn lấy phần diện tích xung quanh của hình trụ, chiều cao h gấp lại tạo thành bề mặt khối tứ diện đều cạnh $2h$ thì

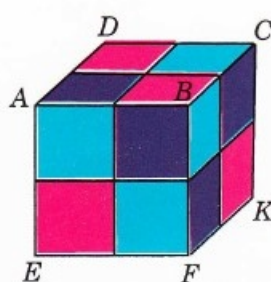


Hình 2

bán kính đáy hình trụ phải thỏa mãn hệ thức (3).

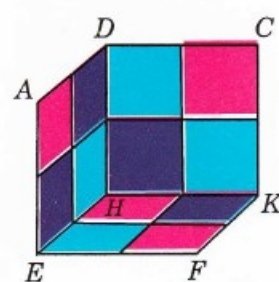
Cách cắt dán được mô tả qua các hình 1 và hình 2, trong đó đường đôi ở hình 2 chỉ ra hai mép giấy sát nhau.

BÀI 6. Tô màu khối lập phương



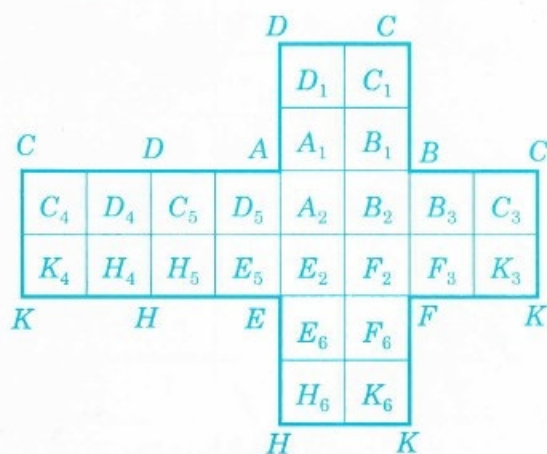
Các mặt phía trước

Hình 3a



Các mặt phía sau

Hình 3b



Hình 4

(Xem tiếp trang 30)

ISSN : 0866-8035

Chỉ số : 12884

Mã số : 8BT40M5

Giấy phép XB số 67/GP-BVHTT do Bộ VHTT cấp ngày 15.6.2004

In tại Công ty CP in Diên Hồng, 187B Giảng Võ

In xong và nộp lưu chiểu tháng 8 năm 2005

Giá : 4000 đồng

Bốn nghìn đồng



CÔNG TY CỔ PHẦN XNK BÌNH TÂY (BITEX)

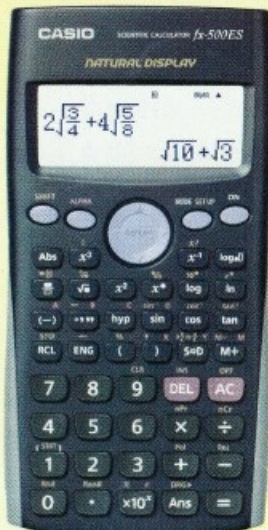
HCM: 110-112 Hậu Giang, P.6, Q.6, Tp. HCM. Tel: 08 - 9604325, Fax: 08 - 9602478
Hà Nội: 128 Bạch Mai, P. Cầu Dền, Q. Hai Bà Trưng, Tel: 04 - 8682014, Fax: 04 - 8682009

MÁY TÍNH KHOA HỌC DUY NHẤT

fx-500ES

HIỂN THỊ NHƯ SÁCH GIÁO KHOA

fx-570ES



fx-500ES có các chức năng tương đương fx-500MS

fx-570ES có các chức năng tương đương fx-570MS



- Nhập và hiển thị kết quả như sách giáo khoa.
- Lập bảng.
- Màn hình hiển thị rộng.
- Tính tổng.

Cách nhập các bài toán vào máy và hiển thị kết quả giống như giáo viên viết trên bảng.

Mới

Mới

S-V.P.A.M 403 S-V.P.A.M XEM T.KẾ HIỂN THỊ NHƯ SÁCH GIÁO KHOA 10+2 MA TRẬN ĐIỂM PHIM NHƯA

S-V.P.A.M 253 S-V.P.A.M XEM T.KẾ HIỂN THỊ NHƯ SÁCH GIÁO KHOA 10+2 MA TRẬN ĐIỂM PHIM NHƯA

Dạng toán	Bài toán mẫu	Loại máy ES (mới)		Loại máy MS & các loại máy khác
		Nhập - Hiển thị như sách giáo khoa		Nhập - Hiển thị thường
Căn thức	$\sqrt{2} + \sqrt{8}$	$\sqrt{2} + \sqrt{8}$ 3.42640687		$\sqrt{2} + \sqrt{8}$ 4.242640687
Phân số	$4\frac{3}{7} + \frac{5}{2} + 2$	$4\frac{3}{7} + \frac{5}{2} + 2$ 6.13114		$4\frac{3}{7} + \frac{5}{2} + 2$ 8.13114
Phương trình	$73x^2 - 47x - 25460 = 0$	$73x^2 - 47x - 25460 = 0$ -25460		$a?$ 73. Nhập từng yếu tố
Đạo hàm	$f(x) = x^3, f'(4) = ?$	$\frac{d}{dx}(x^3) _{x=4}$ 48		$d/dx(x^3, 4)$ 48
Tích phân	$\int_1^5 x^2 dx$	$\int_1^5 x^2 dx$ 41.1/3		$\int(x^2, 1, 5)$ 4.3333333
Logarit	$\log_3 17$	$\log_3(17)$ 2.578901923		$\log 17 \div \log 3$ 2.578901923
Ma trận	$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \\ 4 & 7 & 5 \end{bmatrix}$	$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \\ 4 & 7 & 5 \end{bmatrix}$		$MatA11$ 2. Nhập từng yếu tố
Tính tổng	$\sum_{x=1}^5 x^2$	$\sum_{x=1}^5 (x^2)$ 55		Không có tính năng này
Toán Vector	$A(3, -2, 7)$	$A = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 7 \end{bmatrix}$		$VctA1$ 3. Nhập từng yếu tố

MÁY TÍNH CASIO THẬT PHẢI CÓ

VIỆN KHOA HỌC HÌNH SỰ
BỘ CÔNG AN
CASIO
TEM CHỐNG HÀNG GIẢ
TEM CHỐNG GIẢ
CỔ CHỨC VPKHMS-BCA ĐÀ QUẢNG
NHỊ CHIỀU TIA CỰC TÍM



CASIO