

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC



TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

7 2005
Số 337

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 42

DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ

Trụ sở: 187B Giảng Võ, Hà Nội. ĐT-Fax: (04) 5144272

Email: toanhocvt@yahoo.com



Hình 3a



Hình 3b



Hình 4a



Hình 4b



Hình 5



Hình 6



Hình 7

Một số đường cong dạng hình hoa

Dáng điệu
chiếc lá rơi

PHƯƠNG TRÌNH BẬC BA
VÀ CÁC HỆ THỨC HÌNH HỌC
TRONG TAM GIÁC



THƯ CẢM ƠN

Kính gửi : GS. TSKH. Nguyễn Cảnh Toàn

Chủ tịch Hội đồng Quản trị kiêm Tổng Giám đốc Nhà xuất bản Giáo dục thay mặt Hội đồng quản trị, BCH Đảng ủy, Ban Tổng Giám đốc, BCH Công đoàn và toàn thể EBENVO Nhà xuất bản Giáo dục trân trọng cảm ơn Giáo sư về những đóng góp trong những năm qua đối với sự ổn định, phát triển của Nhà xuất bản Giáo dục nói chung và Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ nói riêng.

Tối hôm nay, Giáo sư đã hoàn thành tốt nhiệm vụ của mình và được trở về nghỉ dưỡng cùng gia đình theo chế độ của Nhà nước. Chủ tịch Hội đồng Quản trị kiêm Tổng Giám đốc Nhà xuất bản Giáo dục xin được gửi tới Giáo sư lời cảm ơn sâu sắc, lời chúc sức khỏe, hạnh phúc và rất mong Giáo sư tiếp tục sinh hoạt trong Câu lạc bộ hưu trí của Nhà xuất bản Giáo dục.

Xin gửi tới Giáo sư lời chào trân trọng.

CHỦ TỊCH HỘI ĐỒNG QUẢN TRỊ
KIÊM TỔNG GIÁM ĐỐC NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC
NGÔ TRẦN ÁI

HỌP MẶT CHIA TAY GS. NGUYỄN CẢNH TOÀN

Ngày 22 tháng 6 năm 2005 tại Hội trường NXB Giáo dục, 72 Trần Hưng Đạo, Hà Nội đã diễn ra buổi họp mặt thân mật chia tay GS. Nguyễn Cảnh Toàn. Tối dự có đại diện Ban Tổng Giám đốc NXB Giáo dục, Ban Tổ chức nhân sự, Phòng Tổ chức Lao động Tiền lương và Chánh Văn phòng NXB Giáo dục cùng toàn thể biên tập viên, nhân viên tạp chí THPT. GS. Nguyễn Cảnh Toàn là Tổng biên tập đầu tiên và liên tục suốt gần 41 năm của tạp chí THPT, một tạp chí truyền thống dành cho các bạn trẻ yêu toán.

GIAO LƯU BA TẠP CHÍ THUỘC NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

Ngày 21.6.2005, tại 187B Giảng Võ, Hà Nội đã diễn ra cuộc gặp gỡ giao lưu giữa ba tạp chí Toán học và Tuổi trẻ, Toán Tuổi thơ, Văn học và Tuổi trẻ. Đến dự có GS. TSKH. Nguyễn Cảnh Toàn, nguyên Tổng biên tập tạp chí Toán học và Tuổi trẻ ; Tổng Giám đốc kiêm Chủ tịch Hội đồng Quản trị NXB Giáo dục Ngô Trần Ái ; PGS. TS. Vũ Dương Thụy, Phó Tổng GD NXB GD, Tổng biên tập NXB GD, Tổng biên tập tạp chí Toán Tuổi thơ ; PGS.TS. Phan Doãn Thoại, Tổng biên tập mới được bổ nhiệm của tạp chí Toán học và Tuổi trẻ ; TS. Lê Hữu Tinh, Tổng biên tập của tạp chí Văn học và Tuổi trẻ cùng các Phó Tổng biên tập, Trưởng ban biên tập, Thư kí Tòa soạn các tạp chí. Nhiều ý kiến phát biểu về mối quan hệ giữa ba tạp chí trong cùng một Nhà xuất bản và đề cập đến sự hợp tác cùng nhau phát triển.

GẶP GỠ GIỮA BA TẠP CHÍ KHOA HỌC TỰ NHIÊN PHỤC VỤ HỌC ĐƯỜNG

Nhân dịp ngày Nhà báo Việt Nam, tại trụ sở tạp chí Tin học và Nhà trường đã diễn ra buổi giao lưu giữa ba tạp chí Toán học và Tuổi trẻ, Vật lí và Tuổi trẻ, Tin học và Nhà trường. Có mặt tại cuộc gặp là các ông Phạm Văn Thiều, Trưởng ban biên tập Vật lí và Tuổi trẻ ; Ông Bùi Việt Hà, Thư kí Tòa soạn Tin học và Nhà trường ; TS. Nguyễn Việt Hải, Trưởng ban biên tập và ThS. Vũ Kim Thủy, Thư kí Tòa soạn tạp chí Toán học và Tuổi trẻ. Các kinh nghiệm về nội dung, phát hành đã được trao đổi, bàn thảo.

(Xem tiếp trang 7)





TRUNG HỌC CƠ SỞ

Trong bài viết này ta tìm giá trị nhỏ nhất (GTNT), giá trị lớn nhất (GTLN) của một biểu thức mà các biến phải thỏa mãn một điều kiện nào đó, hoặc các biến là nghiệm của phương trình (PT) hoặc bất phương trình (BPT) bằng cách đưa phương trình hoặc bất phương trình nhiều ẩn đã cho về bất phương trình một ẩn với ẩn số là biểu thức đang xét (hoặc sai khác một hằng số).

Ví dụ 1. Tìm GTNN và GTLN của xy biết x và y là nghiệm của phương trình:

$$x^4 + y^4 - 3 = xy(1 - 2xy) \quad (1)$$

Lời giải

$$PT (1) \Leftrightarrow xy + 3 = (x^2 + y^2)^2 \geq 4x^2y^2$$

Đặt $t = xy$ thì BPT trên trở thành $4t^2 - t - 3 \leq 0$

$$\Leftrightarrow (t - 1)(4t + 3) \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{4} \leq t \leq 1.$$

$$\text{Vậy GTNN của } xy \text{ là } -\frac{3}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = y^2 \\ xy = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = -y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{GTLN của } xy \text{ là } 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = y^2 \\ xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \pm 1$$

Ví dụ 2. Các số dương x, y, z thỏa mãn:

$$xyz \geq x + y + z + 2.$$

Tìm GTNN của $x + y + z$.

$$\text{Lời giải. } (x + y + z)^3 \geq (3\sqrt[3]{xyz})^3 = 27xyz$$

$$\Rightarrow (x + y + z)^3 \geq 27(x + y + z + 2)$$

Đặt $t = x + y + z > 0$ thì

$$t^3 - 27t - 54 \geq 0 \Leftrightarrow (t - 6)(t + 3)^2 \geq 0 \Leftrightarrow t \geq 6.$$

Vậy GTNN của $x + y + z$ là 6 khi $x = y = z = 2$.

Ví dụ 3. Cho các số thực x, y, z thỏa mãn

$$x^2 + 2y^2 + 2x^2z^2 + y^2z^2 + 3x^2y^2z^2 = 9 \quad (2)$$

Tìm GTNN và GTLN của $A = xyz$.

TÌM CỰC TRỊ CỦA MỘT BIỂU THỨC MÀ CÁC BIẾN CÓ ĐIỀU KIỆN RÀNG BUỘC

THÁI NHẬT PHƯƠNG

(GV THCS Cam Nghĩa, Cam Ranh, Khánh Hòa)

Lời giải

$$(2) \Leftrightarrow (x^2 + y^2z^2) + 2(y^2 + x^2z^2) + 3x^2y^2z^2 = 9$$

Sử dụng BĐT Cô-si ta có

$$2|A| + 4|A| + 3A^2 \leq 9 \Leftrightarrow A^2 + 2|A| - 3 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (|A| - 1)(|A| + 3) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow |A| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq A \leq 1.$$

Vậy GTNN của A là -1 khi hai trong ba số $x; y; z$ đều bằng 1 (hoặc đều bằng -1), số còn lại bằng -1 và GTLN của A là 1 khi hai trong ba số $x; y; z$ đều bằng 1 (hoặc đều bằng -1), số còn lại bằng 1.

Ví dụ 4. Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn:

$$x^4 + y^4 + x^2 - 3 = 2y^2(1 - x^2) \quad (3)$$

Tìm GTNN và GTLN của $x^2 + y^2 + \frac{1}{2}$.

Lời giải

$$(3) \Leftrightarrow (x^2 + y^2)^2 + x^2 + y^2 - 3 = 3y^2$$

Đặt $t = x^2 + y^2 > 0$ dẫn đến $t^2 + t - 3 \geq 0$

$$\Leftrightarrow \left(t + \frac{\sqrt{13}+1}{2}\right) \left(t - \frac{\sqrt{13}-1}{2}\right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow t \geq \frac{\sqrt{13}-1}{2}.$$

Vậy GTNN của $x^2 + y^2 + \frac{1}{2}$ là $\frac{\sqrt{13}}{2}$

khi $x = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{13}-1}{2}}; y = 0$.

$$(3) \Leftrightarrow (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 + y^2) - 3 = -3x^2$$

Đặt $t = x^2 + y^2 > 0$ dẫn đến $t^2 - 2t - 3 \leq 0$

$$\Leftrightarrow (t + 1)(t - 3) \leq 0 \Leftrightarrow t \leq 3.$$

Vậy GTLN của $x^2 + y^2 + \frac{1}{2}$ là $3\frac{1}{2}$ khi $x = 0$;

$$y = \pm \sqrt{3}.$$

(Xem tiếp trang 4)

SINGAPORE MATHEMATICAL SOCIETY

SINGAPORE MATHEMATICAL OLYMPIAD (SMO) 2005
(SENIOR SECTION)

Tuesday, 31 May 2005 (9.30-12.00)

Important :

Answer ALL 35 questions

Enter your answer on the answer sheet provided.

For the multiple choice questions, enter your answer in the answer sheet by shading the bubbles containing the letters (A, B, D, D or E) corresponding to the correct answer.

For the other short questions, write your answer in answer sheet and shade the appropriate bubbles below your answer.

No steps are needed to justify your answer.

Each question carries 4 marks.

No calculator are allowed.

1. What is the smallest positive prime factor of the integer $2005^{2007} + 2007^{2005}$?

(A) 5 ; (B) 7 ; (C) 2 ; (D) 11 ; (E) 3.

2. What is the value of

$$\frac{2005^2 + 2 \times 2005 \times 1995 + 1995^2}{800}$$

(A) 20000 ; (B) 2000 ; (C) 200000 ;
(D) 2000000 ; (E) None of the above.

3. Let p be a real number such that the equation $2y^2 - 8y = p$ has only one solution. Then

(A) $p < 8$; (B) $p = 8$; (C) $p > -8$; (D) $p = -8$
(E) $p < -8$.

4. What is the sum of the last two digits of the integer $1! + 2! + 3! + \dots + 2005!$?

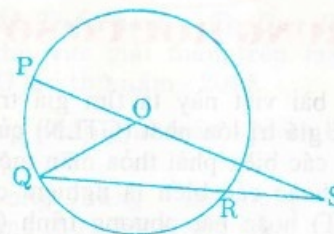
(A) 3 ; (B) 4 ; (C) 5 ; (D) 6 ; (E) 7.

5. $5002^{2005 \log_{5002} 2005}$ is equal to

(A) 1 ; (B) 2005^{2005} ; (C) 5002^{2005} ;
(D) 2005^{5002} ; (E) 5002^{5002} .

6. In the diagram, P , Q and R are three points on the circle whose centre is O . The lines PO and QR are produced to meet at S . Suppose that $RS = OP$, and $\widehat{PSQ} = 12^\circ$ and $\widehat{POQ} = x^\circ$. Find the value of x .

(A) 36 ; (B) 42 ; (C) 48 ; (D) 54 ; (E) 60



7. Let x and y be positive real numbers. What is the smallest possible value of $\frac{16}{x} + \frac{108}{y} + xy$?

(A) 16 ; (B) 18 ; (C) 24 ; (D) 30 ; (E) 36.

8. In the cartesian plane, the graph of the function $y = \frac{2x-1}{x-1}$ is reflected about the line

$y = -x$. What is the equation for the graph of the image of the reflection?

(A) $y = \frac{x-1}{2x+1}$; (B) $y = \frac{x-1}{x+2}$; (C) $y = \frac{2x-1}{x+1}$

(D) $y = \frac{x+1}{x-2}$; (E) $y = \frac{-1-x}{2+x}$.

9. Simplify $\sqrt{2 \left(1 + \sqrt{1 + \left(\frac{x^4 - 1}{2x^2} \right)^2} \right)}$, where x is any positive real numbers.

(A) $\frac{x^2+1}{\sqrt{2}x}$; (B) $\frac{x^2+1}{x}$; (C) $\sqrt{\frac{x^2+1}{2x^2}}$;

(D) $x^2 + 1$; (E) $\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x}$.

10. Let x and y be real numbers such that $x^2 + y^2 = 2x - 2y + 2$.

What is the largest possible value of $x^2 + y^2$?

(A) $10 + 8\sqrt{2}$; (B) $8 + 6\sqrt{2}$; (C) $6 + 4\sqrt{2}$
(D) $4 + 2\sqrt{2}$; (E) None of the above.

11. Find the greatest integer less than $(2 + \sqrt{3})^4$.

12. $\triangle ABC$ is a triangle such that $\hat{C} = 90^\circ$. Suppose $AC = 156\text{cm}$, $AB = 169\text{cm}$ and the perpendicular distance from C to AB is $x\text{ cm}$. Find the value of x .

13. Find the sum of all the real numbers x that satisfy the equation

$$(3^x - 27)^2 + (5^x - 625)^2 = (3^x + 5^x - 652)^2$$

14. Three positive integers are such that they differ from each other by at most 6. It is also known that the product of these three integers is 2808. What is the smallest integer among them?

15. Simplify

$$\frac{2005^2(2004^2 - 2003)}{(2004^2 - 1)(2004^3 + 1)} \times \frac{2003^2(2004^2 + 2005)}{2004^3 - 1}$$

16. Consider the function $f(x) = \frac{1}{3^x + \sqrt{3}}$.

Find the value of

$$\sqrt{3} [f(-5) + f(-4) + f(-3) + f(-2) + f(-1) + f(0) + f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5) + f(6)].$$

17. Let A and B be two positive four-digit integers such that $A \times B = 16^5 + 2^{10}$. Find the value of $A+B$.

18. A triangle $\triangle ABC$ is inscribed in a circle of radius 4cm . Suppose that $\hat{A} = 60^\circ$, $AC - AB = 4\text{cm}$, and the area of $\triangle ABC$ is $x\text{ cm}^2$. Find the value of x^2 .

19. Let a , b and c be real numbers such that $a = 8 - b$ and $c^2 = ab - 16$.

Find the value of $a + c$.

20. Let $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8$ be positive integers such that

$$a_1^2 + (2a_2)^2 + (3a_3)^2 + (4a_4)^2 + (5a_5)^2 + (6a_6)^2 + (7a_7)^2 + (8a_8)^2 = 204.$$

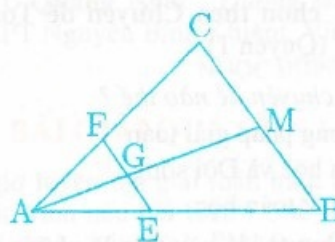
Find the value of $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8$.

21. Find the value of the positive integer n if

$$\frac{1}{\sqrt{4} + \sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{6} + \sqrt{7}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} = 10$$

22. Let A and B be two positive prime integers such that $\frac{1}{A} - \frac{1}{B} = \frac{192}{2005^2 - 2004^2}$. Find the value of B .

23. In $\triangle ABC$, $AB : AC = 4 : 3$ and M is the midpoint of BC . E is a point on AB and F is a point on AC such that $AE : AF = 2 : 1$. It is also given that EF and AM intersect at G with $GF = 72\text{cm}$ and $GE = x\text{ cm}$. Find the value of x .



24. It is given that $x = \frac{1}{2 - \sqrt{3}}$. Find the value of $x^6 - 2\sqrt{3}x^5 - x^4 + x^3 - 4x^2 + 2x - \sqrt{3}$.

25. Let a , b and c be the lengths of the three sides of a triangle. Suppose a and b are the roots of the equation $x^2 + 4(c+2) = (c+4)x$, and the largest angle of the triangle is x° . Find the value of x .

26. Find the largest real number x such that

$$\frac{x^2 + x - 1 + |x^2 - (x-1)|}{2} = 35x - 250.$$

27. How many ways can the word MATHEMATICS be partitioned so that each part contains at least one vowel? For example MA-THE-MATICS, MATHE-MATICS, MATHEM-A-TICS and MATHEMATICS are such partitions.

28. Consider a sequence of real numbers $\{a_n\}$

defined by $a_1 = 1$ and $a_{n+1} = \frac{a_n}{1 + na_n}$ for $n \geq 1$.

Find the value of $\frac{1}{a_{2005}} - 2000000$.

29. For a positive integer k , we write

$(1+x)(1+2x)(1+3x)\dots(1+kx) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_kx^k$, where $a_0, a_1, \dots, a_k$ are the coefficients of the polynomial. Find the smallest possible value of k if $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1}$ is divisible by 2005.

30. Find the largest positive number x such that $(2x^3 - x^2 - x + 1)^{\frac{1}{2x+1}} = 1$.

SÁCH MỚI

CỦA TỦ SÁCH TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Tên sách là gì vậy ?

Tuyển chọn theo Chuyên đề Toán học và Tuổi trẻ (Quyển 1)

Những chuyên đề nào thế ?

- 1) Phương pháp giải toán
- 2) Toán học và Đời sống
- 3) Lịch sử toán học

À, ba chuyên đề này vốn là những chuyên đề bạn đọc rất quan tâm. Sách sẽ có ích cho cả thầy cô giáo, học sinh và mọi người yêu toán. Nội dung sách sẽ lí thú đấy.

Sách được trình bày ra sao ?

Vẫn là khổ sách và báo truyền thống của THPT hơn bốn thập kỉ qua, đó là $19 \times 27\text{cm}$ và có độ dày đáng kể.

Bao giờ sẽ có sách bán trên thị trường?

Chỉ cuối năm nay, năm 2005 thôi.

Làm thế nào để có sách ?

Các trường lớn, Phòng, Sở Giáo dục mua nhiều có thể gửi phiếu báo số lượng mua về tòa soạn. Các bạn cũng có thể tìm mua tại các Công ty sách và thiết bị trường học, các hiệu sách lớn trong cả nước.

Câu hỏi cuối cùng là giá bán bao nhiêu ?

Hẹn trả lời các bạn sau khi sách đã hoàn thành.

Sau Quyển 1 này chúng tôi còn xuất bản các Quyển tiếp theo trong Tủ sách Toán học và Tuổi trẻ. Bạn nhớ đừng để Tủ sách bị thiếu khuyết Quyển 1. Các bạn hãy đón đọc và thông báo cho nhiều bạn cùng biết.

THHT

31. How many ordered pairs of integers (x, y) satisfy the equation $x^2 + y^2 = 2(x + y) + xy$?

32. Find the number of ordered 7-tuples of positive integers $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7)$ that have both of the following properties :

- (i) $a_n + a_{n+1} = a_{n+2}$ for $1 \leq n \leq 5$, and
- (ii) $a_6 = 2005$.

33. Let n be a positive integer such that one of the roots of the quadratic equation

$$4x^2 - (4\sqrt{3} + 4)x + \sqrt{3}n - 24 = 0$$

is an integer. Find the value of n .

34. Consider the simultaneous equations

$$\begin{cases} xy + xz = 255 \\ xz - yz = 224. \end{cases}$$

Find the number of ordered triples of positive integers (x, y, z) that satisfy the above system of equations.

35. Find the total number of positive integers N satisfying both of the following properties :

- (i) N is divisible by 7, and
- (ii) when the first and last digits of N are interchanged, the resulting positive integer is also divisible by 7. (Note that the resulting integer need not be a four-digit number).

TÌM CỤC TRỊ ... (Tiếp trang 1)

Các bạn hãy biến đổi các điều kiện trong các bài tập tương tự dưới đây để tìm GTNN, GTLN của các biểu thức.

Bài 1. Cho các số dương x, y, z thỏa mãn :

$$2xyz + xy + yz + zx \leq 1. \text{ Tìm GTLN của } xyz.$$

(ĐS : GTLN của xyz là $\frac{1}{8}$)

Bài 2. Cho các số dương x, y, z thỏa mãn :

$$(x+y+z)^3 + x^2 + y^2 + z^2 + 4 = 29xyz$$

Tìm GTNN của xyz

(ĐS : GTNN của xyz là 8)

Bài 3. Tìm GTNN và GTLN của biểu thức $S = x^2 + y^2$ biết x và y là nghiệm của phương trình: $5x^2 + 8xy + 5y^2 = 36$

(ĐS : GTNN của S là 4, GTLN của S là 36).

Bài 4. Cho x và y là các số thực thỏa mãn

$$(x^2 + y^2)^3 + 4x^2 + y^2 + 6x + 1 = 0$$

Tìm GTLN của $x^2 + y^2$

(ĐS : GTLN của $x^2 + y^2$ là 1).

Bài 5. Tìm các số nguyên không âm x, y, z, t để biểu thức $x^2 + y^2 + 2z^2 + t^2$ đạt giá trị nhỏ nhất, biết rằng

$$x^2 - y^2 + t^2 = 21 \text{ và } x^2 + 3y^2 + 4z^2 = 101$$

(ĐS : GTNN của biểu thức là 61).



PHƯƠNG TRÌNH BẬC BA VÀ CÁC HỆ THỨC HÌNH HỌC TRONG TAM GIÁC

TẠ DUY PHƯỢNG
(Viện Toán học)

Trong bài này, ta ký hiệu: A, B, C là ba góc và a, b, c là ba cạnh tương ứng của tam giác ABC ; R, r, r_o, r_b, r_c theo thứ tự là bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp và các đường tròn bàng tiếp ứng với góc A, B, C ; h_a, h_b, h_c là các đường cao tương ứng với các cạnh a, b, c ; S là diện tích; p là nửa chu vi tam giác; $x = p - a, y = p - b, z = p - c$.

Chúng ta sẽ chỉ ra rằng, các yếu tố hình học (cạnh, đường cao, bán kính đường tròn bàng tiếp,...) của tam giác chính là nghiệm của phương trình bậc ba có các hệ số chứa ba yếu tố R, r, p . Chính vì thế mà người ta gọi R, r, p là các yếu tố cơ bản của tam giác.

Từ đó, theo tính chất nghiệm của phương trình bậc ba, ta suy ra rất nhiều hệ thức hình học thú vị trong tam giác, trong đó có nhiều hệ thức còn ít được biết đến.

1. Nghiệm của phương trình bậc ba

Có thể chứng minh được các tính chất sau đây của phương trình bậc ba $t^3 + at^2 + bt + c = 0$ (1.1)

Định lý 1. Nghiệm t_1, t_2, t_3 của phương trình bậc ba (1.1) có các tính chất sau:

- 1) $t_1 + t_2 + t_3 = -a$. 2) $t_1 t_2 + t_2 t_3 + t_3 t_1 = b$.
- 3) $t_1 t_2 t_3 = -c$. 4) $t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 = a^2 - 2b$.
- 5) $(t_1 + t_2)(t_2 + t_3)(t_3 + t_1) = -ab + c$.
- 6) $t_1^3 + t_2^3 + t_3^3 = -a^3 + 3ab - 3c$.
- 7) $t_1^4 + t_2^4 + t_3^4 = a^4 - 2a^2 b + 2b^2 + 4ac$.

$$8) \frac{t_1 + t_2}{t_3} + \frac{t_1 + t_3}{t_2} + \frac{t_2 + t_3}{t_1} = \frac{ab - 3c}{c}.$$

9) Với mọi k và l ta có:

$$(k + lt_1)(k + lt_2)(k + lt_3) = k^3 - k^2 la + kl^2 b - l^3 c$$

Hệ quả 1. $(1 - t_1)(1 - t_2)(1 - t_3) = 1 + a + b + c$.

Hệ quả 2. $(1 + t_1)(1 + t_2)(1 + t_3) = 1 - a + b - c$.

$$10) t_1^2 t_2^2 + t_2^2 t_3^2 + t_3^2 t_1^2 = b^2 - 2ac.$$

$$11) (t_1 + t_2 - t_3)(t_2 + t_3 - t_1)(t_3 + t_1 - t_2) = a^3 - 4ab + 8c.$$

$$12) (t_1 - t_2)^2 (t_2 - t_3)^2 (t_3 - t_1)^2 = -4a^3 c + a^2 b^2 + 18abc - 4b^3 - 27c^2.$$

Định lý 2. Phương trình bậc ba (1.1) có các nghiệm thực t_1, t_2, t_3 khi và chỉ khi

$$-4a^3 c + a^2 b^2 + 18abc - 4b^3 - 27c^2 \geq 0. \quad (1.2)$$

Định lý 3. Phương trình (1.1) có ba nghiệm dương khi và chỉ khi có (1.2) và

$$a < 0, b > 0, c < 0. \quad (1.3)$$

Định lý 4. Nghiệm của (1.1) là ba cạnh tam giác khi và chỉ khi có (1.2), (1.3) và

$$a^3 - 4ab + 8c > 0. \quad (1.4)$$

2. Phương trình bậc ba của tam giác

Mệnh đề 1. Các cạnh của tam giác là nghiệm của phương trình

$$t^3 - 2pt^2 + (p^2 + r^2 + 4Rr)t - 4pRr = 0. \quad (2.1)$$

Chứng minh. Giả sử a là độ dài một cạnh của tam giác. Ta có:

$$a = 2R \sin A = 4R \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} \quad (*)$$

$$\text{và } p - a = r \cotg \frac{A}{2} = r \frac{\cos \frac{A}{2}}{\sin \frac{A}{2}}. \quad (**)$$

$$\text{Chia (*) cho (**) được: } \sin^2 \frac{A}{2} = \frac{ar}{4R(p-a)}.$$

$$\text{Nhân (*) với (**) được: } \cos^2 \frac{A}{2} = \frac{a(p-a)}{4Rr}.$$

$$\text{Chứng tỏ: } \frac{ar}{4R(p-a)} + \frac{a(p-a)}{4Rr} = 1.$$

Quy đồng mẫu số và nhóm số hạng ta có:

$$a^3 - 2a^2 p + (r^2 + p^2 + 4Rr)a - 4Rrp = 0,$$

hay a là nghiệm của phương trình (2.1).

Mệnh đề 2. $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ là nghiệm của

$$4pRrt^3 - (p^2 + 4Rr + r^2)t^2 + 2pt - 1 = 0. \quad (2.2)$$

Mệnh đề 3. x, y, z là nghiệm của phương trình

$$t^3 - pt^2 + r(4R+r)t - pr^2 = 0. \quad (2.3)$$

Chứng minh. Thay a bằng $p - (p - a)$ vào (2.1) và khai triển, ta đi đến

$$(p-a)^3 - p(p-a)^2 + r(r+4R)(p-a) - pr^2 = 0.$$

Vậy $x = p - a$ là nghiệm của (2.3).

Nhận xét. $x = p - a, y = p - b, z = p - c$ chính là các độ dài của các tiếp tuyến xuất phát từ các đỉnh A, B, C tương ứng.

Mệnh đề 4. $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$ là nghiệm của

$$pr^2t^3 - r(4R+r)t^2 + pt - 1 = 0. \quad (2.4)$$

Mệnh đề 5. h_a, h_b, h_c là nghiệm của

$$2Rt^3 - (p^2 + r^2 + 4Rr)t^2 + 4p^2rt - 4p^2r^2 = 0. \quad (2.5)$$

Chứng minh. Thay $a = \frac{2pr}{h_a}$ vào (2.1):

$$\left(\frac{2pr}{h_a}\right)^3 - 2p\left(\frac{2pr}{h_a}\right)^2 + (p^2 + r^2 + 4Rr)\frac{2pr}{h_a} - 4pRr = 0.$$

Quy đồng mẫu số ta được:

$$2Rh_a^3 - (p^2 + r^2 + 4Rr)h_a^2 + 4p^2rh_a - 4p^2r^2 = 0.$$

Vậy h_a là nghiệm của (2.5).

Mệnh đề 6. $\frac{1}{h_a}, \frac{1}{h_b}, \frac{1}{h_c}$ là nghiệm của

$$4p^2r^2t^3 - 4p^2rt^2 + (p^2 + r^2 + 4Rr)t - 2Rr = 0. \quad (2.6)$$

Mệnh đề 7. r_a, r_b, r_c là nghiệm của

$$t^3 - (4R+r)t^2 + p^2t - p^2r = 0. \quad (2.7)$$

Chứng minh. Thay $\frac{1}{x} = \frac{r_a}{pr}$ vào (2.4):

$$pr^2\left(\frac{r_a}{pr}\right)^3 - r(4R+r)\left(\frac{r_a}{pr}\right)^2 + p\left(\frac{r_a}{pr}\right) - 1 = 0.$$

Quy đồng mẫu số ta đi đến:

$$r_a^3 - (4R+r)r_a^2 + p^2r_a - p^2r = 0.$$

Vậy r_a là nghiệm của phương trình (2.7).

Mệnh đề 8. $\frac{1}{r_a}, \frac{1}{r_b}, \frac{1}{r_c}$ là nghiệm của

$$p^2rt^3 - p^2t^2 + (4R+r)t - 1 = 0. \quad (2.8)$$

3. Đẳng thức hình học trong tam giác

Áp dụng các tính chất nêu trong §1 của (1.1) vào các phương trình (2.1)-(2.8), ta có thể chứng minh các hệ thức sau đây:

$$1) ab + bc + ac = p^2 + r^2 + 4Rr.$$

$$2) a^2 + b^2 + c^2 = 2(p^2 - r^2 - 4Rr).$$

$$3) 2(ab + ac + bc) = a^2 + b^2 + c^2 + 4r(r + 4R).$$

$$4) \text{ (Vô địch Áo, 1971)}$$

Ký hiệu G là trọng tâm tam giác ABC , các góc $GAB = \alpha, GBC = \beta, GCA = \gamma$. Khi đó:

$$4a) GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2).$$

$$4b) \cot \alpha + \cot \beta + \cot \gamma = \frac{3(a^2 + b^2 + c^2)}{4S}.$$

$$4c) \cot \alpha + \cot \beta + \cot \gamma = \frac{3}{2} \frac{p^2 - r^2 - 4Rr}{pr}.$$

$$5) m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2) = \frac{3}{2}(p^2 - r^2 - 4Rr).$$

$$6) abc = 4pRr = 4RS. \quad 7) h_a h_b h_c = \frac{2p^2 r^2}{R}.$$

$$8) (a+b)(b+c)(a+c) = 2p(p^2 + r^2 + 2Rr).$$

$$9) a^3 + b^3 + c^3 = 2p(p^2 - 3r^2 - 6Rr).$$

$$10) (a+b-c)(b+c-a)(a+c-b) = 8xyz = 8pr^2.$$

$$11) \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{4pRr}.$$

$$12) a^4 + b^4 + c^4 = 2(p^4 - (4R+3r)2p^2 + r^2(4R+r)^2).$$

$$12b) \text{ (ĐH Dân lập Hùng Vương, 2000)}$$

$$2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - (a^4 + b^4 + c^4) = 16p^2r^2 = 16S^2$$

$$13) \frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{a+c}{b} = \frac{p^2 + r^2 - 2Rr}{2Rr}.$$

$$14) xy + yz + zx = r(4R+r).$$

$$15) x^2 + y^2 + z^2 = p^2 - 2r(4R+r).$$

$$16) x^3 + y^3 + z^3 = p^3 - 12Rrp.$$

$$17) \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{4R+r}{pr}.$$

$$18) \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} = \frac{1}{r^2}.$$

$$19) \frac{a}{yz} + \frac{b}{zx} + \frac{c}{xy} = \frac{2(4R+r)}{pr}.$$

$$20) \frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} = \frac{4p(R-r)}{r}.$$

$$21) \frac{a^2}{yz} + \frac{b^2}{zx} + \frac{c^2}{xy} = \frac{4(R+r)}{r}.$$

$$22) h_a + h_b + h_c = \frac{1}{2R}(p^2 + r^2 + 4Rr).$$

$$23) r_a + r_b + r_c = 4R + r. \quad 24) r_a r_b r_c = p^2 r.$$

$$25) h_a h_b + h_b h_c + h_c h_a = \frac{2p^2 r}{R}.$$

$$26) (h_a + h_b)(h_b + h_c)(h_c + h_a) = \frac{p^2 r(p^2 + r^2 + 2Rr)}{R^2}.$$

$$27) \frac{(a+b)c}{ab} + \frac{(b+c)a}{bc} + \frac{(a+c)b}{ac} = \\ = \frac{h_b + h_c}{h_a} + \frac{h_a + h_c}{h_b} + \frac{h_a + h_b}{h_c} = \\ = \frac{p^2 + r^2 - 2Rr}{2Rr}$$

$$28) r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a = p^2.$$

$$29) r_a^2 + r_b^2 + r_c^2 = (4R + r)^2 - 2p^2.$$

$$30) r_a^3 + r_b^3 + r_c^3 = (4R + r)^3 - 12p^2 R.$$

$$31) (r_a + r_b)(r_b + r_c)(r_c + r_a) = 4p^2 R.$$

$$32) \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}.$$

$$33) \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = \frac{r_a + r_b}{r_c} + \frac{r_b + r_c}{r_a} + \frac{r_c + r_a}{r_b} = \\ = \frac{4R - 2r}{r}.$$

$$34) \frac{1}{r_a r_b} + \frac{1}{r_b r_c} + \frac{1}{r_c r_a} = \frac{4R + r}{p^2 r}.$$

$$35) (r + r_a)(r + r_b)(r + r_c) = 2r(2Rr + p^2 + r^2).$$

$$36) \frac{1}{r_a^3} + \frac{1}{r_b^3} + \frac{1}{r_c^3} = \frac{p^2 - 12Rr}{p^2 r^3} = \frac{1}{r^3} - \frac{12R}{s^2}.$$

Tổ hợp các đẳng thức trên, ta suy ra nhiều đẳng thức không kém thú vị khác. Thí dụ, từ (2) và Định lý hàm số sin ta có:

$$37) a \sin A + b \sin B + c \sin C = \frac{p^2 - r^2 - 4Rr}{R}.$$

Từ (6) và (10) suy ra:

$$38) \frac{xyz}{abc} = \frac{r}{4R}.$$

Từ (1), (22) và Định lý hàm số sin ta có:

$$39) h_a + h_b + h_c = b \sin C + c \sin A + a \sin B =$$

Từ (7) và (25) suy ra:

$$\frac{bc + ac + ab}{2R} = \frac{1}{2R}(p^2 + r^2 + 4Rr).$$

$$40) r(h_a h_b + h_b h_c + h_c h_a) = h_a h_b h_c.$$

Từ (24) và (28) suy ra:

$$41) r(r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a) = r_a r_b r_c.$$

Từ (28) và (31) suy ra:

$$42) 4R(r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a) = (r_a + r_b)(r_b + r_c)(r_c + r_a).$$

Từ (8) và (26) suy ra:

$$43) \frac{h_b + h_c}{b + c} \frac{h_a + h_c}{a + c} \frac{h_a + h_b}{a + b} = \frac{pr}{2R^2}.$$

Kết hợp $S = pr$ với (7), (10), (24) suy ra:

$$44) S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \\ = \sqrt{\frac{1}{2} R h_a h_b h_c} = \sqrt{r r_a r_b r_c}.$$

(Kì sau đăng tiếp)

GẶP GỠ GIỮA BA TẬP CHÍ... (Tiếp bài 2)

Dưới đây xin thông báo địa chỉ các tạp chí để bạn đọc tiện liên hệ:

Văn học và Tuổi trẻ: 187B Giảng Võ, Quận Đống Đa, Hà Nội

Tel: (04)5121598; Tel + Fax: (04) 5142649;

Email: vanhocvt@yahoo.com

Toán Tuổi thơ:

38 ngõ 61 Trần Duy Hưng, quận Cầu Giấy, Hà Nội.

Tel: (04)5567125; Website: <http://toantuoitho.nxbgd.com.vn>

Vật lý và Tuổi trẻ:

10 Đào Tấn (46 Nguyễn Văn Ngọc), P. Thủ Lệ, Q. Ba Đình, Hà Nội;

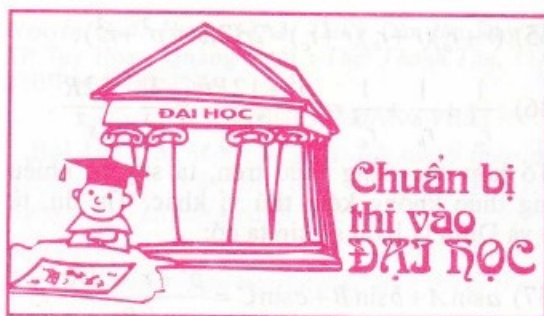
Tel: (04)8349209; Email: vps@iop.vast.ac.vn

Tin học và Nhà trường: Phòng 1407 Nhà 17T2 khu Trung Hòa Nhân Chính, Q. Cầu Giấy, Hà Nội

Tel: (04)2511017; Fax: (04)2511081; Email: toasoan@thnt.com.vn

Website: thnt.com.vn

VPV



LTS. Kỳ thi tuyển sinh vào Đại học Khối A năm nay diễn ra vào hai ngày 4, 5/7/2005. Đề thi môn Toán khối A năm nay được đánh giá là khá cơ bản, phù hợp với chương trình và có tính phân loại học sinh. Tòa soạn nhận được lời giải và các bình luận của các thầy giáo về đề thi này. Dưới đây xin giới thiệu đáp án và lời bình của các thầy giáo Nguyễn Anh Dũng và Đặng Thanh Hải cho hai câu IV, V. Đáp án và lời bình cho các câu còn lại chúng tôi sẽ đăng ở số báo tiếp theo.

VỀ CÁCH GIẢI ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC MÔN TOÁN KHỐI A NĂM 2005

NGUYỄN ANH DŨNG - ĐẶNG THANH HẢI
(Hà Nội)

Câu IV. 1) Tính tích phân

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x + \sin x}{\sqrt{1+3\cos x}} dx.$$

Lời giải. $\sin 2x + \sin x = (2\cos x + 1)\sin x$

Đặt $t = \sqrt{1+3\cos x}$ (1).

Ta được: $dt = \frac{-3\sin x}{2\sqrt{1+3\cos x}} dx$

$$\Rightarrow \frac{\sin x}{\sqrt{1+3\cos x}} dx = -\frac{2dt}{3} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) có } \cos x = \frac{t^2-1}{3} \Rightarrow 2\cos x + 1 = \frac{2t^2+1}{3} \quad (3)$$

$$x=0 \Rightarrow t=2; \quad x=\frac{\pi}{2} \Rightarrow t=1$$

Từ (2), (3) có

$$I = \int_1^2 \left(\frac{4t^2}{9} + \frac{2}{9} \right) dt = \left(\frac{4t^3}{27} + \frac{2t}{9} \right) \Big|_1^2 = \frac{34}{27}.$$

Lưu ý. 1) Cũng có thể đặt $\cos x = t$, sau đó tính tích phân đối với hàm biến t .

2) Để tính tích phân dạng $\int \frac{a\sin 2x + b\sin x}{\sqrt{c+d\cos x}} dx$,

ta đổi biến số bằng cách đặt $t = \sqrt{c+d\cos x}$

Bài luyện tập. Tính tích phân

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{2\sin 2x + 3\sin x}{\sqrt{6\cos x - 2}} dx$$

Câu IV. 2) Tìm số nguyên dương n sao cho

$$C_{2n+1}^1 - 2.2C_{2n+1}^2 + 3.2^2C_{2n+1}^3 - 4.2^3C_{2n+1}^4 + \dots$$

$$+ (2n+1).2^{2n}C_{2n+1}^{2n+1} = 2005$$

(C_n^k là tổ hợp chập k của n phần tử).

Lời giải. Xét đa thức $P(x) = (x+1)^{2n+1}$

$$P(x) = C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1x + C_{2n+1}^2x^2 + C_{2n+1}^3x^3 + \dots + C_{2n+1}^{2n+1}x^{2n+1}$$

$$P'(x) = C_{2n+1}^1 + 2C_{2n+1}^2x + 3.C_{2n+1}^3x^2 + \dots$$

$$+ (2n+1)C_{2n+1}^{2n+1}x^{2n}$$

$$P'(-2) = C_{2n+1}^1 - 2.2C_{2n+1}^2 + 3.2^2C_{2n+1}^3 - \dots$$

$$+ (2n+1)2^{2n}C_{2n+1}^{2n+1} = 2005$$

Mặt khác,

$$P(x) = (x+1)^{2n+1} \Rightarrow P'(x) = (2n+1).(x+1)^{2n}$$

$$P'(-2) = 2n+1 = 2005 \Rightarrow n = 1002$$

Lưu ý. 1. Để tính tổng dạng

$$S = C_n^1 + 2.a.C_n^2 + 3.a^2.C_n^3 + \dots + n.a^{n-1}.C_n^n,$$

ta xét đa thức $P(x) = (x+1)^n$, rồi khai triển nhị thức Newton, ta được $S = P'(a)$.

2. Để tính tổng dạng

$$S = \frac{a-b}{1} C_n^0 + \frac{a^2-b^2}{2} C_n^1 + \frac{a^3-b^3}{3} C_n^2 + \dots + \frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{n+1} C_n^n$$

ta xét đa thức $P(x) = (x+1)^n$, rồi khai triển nhị thức Newton, ta được

$$S = \int_b^a P(x).dx$$

Bài luyện tập. Tính tổng

a/ $S = C_n^0 - 2C_n^1 + 3C_n^2 - 4C_n^3 + \dots + (-1)^n (n+1)C_n^n$

b/ $S = C_n^0 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + \dots + \frac{1}{n+1}C_n^n$

Câu V. Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 4. \text{ Chứng minh rằng}$$

$$\frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{x+2y+z} + \frac{1}{x+y+2z} \leq 1$$

Lời giải. **Cách 1.** Áp dụng BĐT $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$

với $x, y > 0$, ta được:

$$8 = 2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) + \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) + \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{x}\right) \geq 4\left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x}\right) \quad (1)$$

Tương tự, ta có

$$2\left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x}\right) = \left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{x+z}\right) + \left(\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z}\right) + \left(\frac{1}{y+z} + \frac{1}{z+x}\right) \geq 4\left(\frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{x+2y+z} + \frac{1}{x+y+2z}\right) \quad (2).$$

Từ (1), (2) suy ra

$$8 \geq 8\left(\frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{x+2y+z} + \frac{1}{x+y+2z}\right) \Rightarrow \text{dpcm.}$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = \frac{3}{4}$

Cách 2. Áp dụng BĐT $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$ và BĐT

Cô-si cho các số dương ta có

$$2x+y+z = (x+y) + (x+z) \geq 2(\sqrt{xy} + \sqrt{xz})$$

Do đó:

$$\frac{1}{2x+y+z} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{xy} + \sqrt{xz}} \right) \leq \frac{1}{8} \left(\frac{1}{\sqrt{xy}} + \frac{1}{\sqrt{xz}} \right)$$

Tương tự: $\frac{1}{x+2y+z} \leq \frac{1}{8} \left(\frac{1}{\sqrt{xy}} + \frac{1}{\sqrt{yz}} \right)$

$$\frac{1}{x+y+2z} \leq \frac{1}{8} \left(\frac{1}{\sqrt{xz}} + \frac{1}{\sqrt{yz}} \right)$$

Cộng theo từng vế 3 BĐT trên ta được:

$$\frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{x+2y+z} + \frac{1}{x+y+2z} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\sqrt{xy}} + \frac{1}{\sqrt{yz}} + \frac{1}{\sqrt{zx}} \right) \quad (3)$$

Mặt khác từ BĐT Cô-si:

$$4 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{x} \right) \geq \frac{1}{\sqrt{xy}} + \frac{1}{\sqrt{yz}} + \frac{1}{\sqrt{zx}} \quad (4)$$

Từ (3), (4) suy ra

$$\frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{x+2y+z} + \frac{1}{x+y+2z} \leq 1.$$

Cách 3. Áp dụng BĐT Cô-si cho 4 số dương (hoặc BĐT Bu-nhi-a-cốp-xki).

$$(x+x+y+z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \geq$$

$$\geq 4 \cdot \sqrt{x^2 yz} \cdot 4 \sqrt{\frac{1}{x^2 yz}} = 16.$$

Suy ra $\frac{1}{2x+y+z} \leq \frac{1}{16} \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right)$

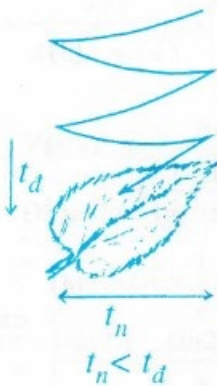
Tương tự $\frac{1}{x+2y+z} \leq \frac{1}{16} \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{1}{z} \right)$

$$\frac{1}{x+y+2z} \leq \frac{1}{16} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{z} \right).$$

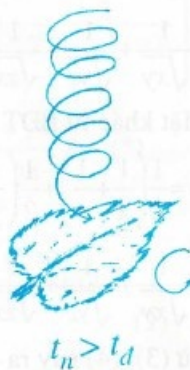


Dáng điệu chiếc lá rơi

"... Lá thu rơi xào xạc..." Cảnh lá vàng lác đác rơi trong gió thu, thật đẹp đến nao lòng! Nhưng những nhà toán học còn nhìn lá vàng rơi dưới con mắt phân tích khoa học. Đó là quỹ đạo rơi của lá tuân theo quy luật nào?



Hình 1



Hình 2

Dáng điệu rơi của lá nói chung rất phức tạp và khó mà xác định được rõ ràng. Có chiếc lá lượn lờ như bướm, có chiếc rơi chậm, có chiếc rơi nhanh.

Có một nhận xét là dưới tác dụng của gió, các vật mỏng gần đồng dạng nhau, có dáng rơi khác nhau. Một chiếc lá lớn lượn qua trái, qua phải. Còn một chiếc lá nhỏ dày hơn giống như một tấm bìa nhỏ đồng dạng, lại có xu hướng quay xung quanh nó trước khi rơi.

Các nhà vật lý đã nghiên cứu sự rơi của một tấm mỏng trong môi trường lỏng, đồng nhất, trong những điều kiện có kiểm soát chặt chẽ. Khi thay đổi khối lượng, kích thước của vật trong chừng mực nhất định, họ thấy rằng vật chuyển động theo hai cách như ở hình 1 và hình 2. Có thể phân tích quỹ đạo của lá rơi thành một chuyển động sóng (ngang) và một chuyển động thẳng đứng, với thời gian bay ngang là t_n , thời gian rơi thẳng đứng là t_d . Dáng điệu rơi của lá phụ thuộc vào độ lớn của t_n và t_d . Chiếc lá sẽ bay lượn lắc qua lắc lại nếu t_n nhỏ hơn t_d (h. 1), hoặc lá quay xung quanh nó theo kiểu lò xo nếu t_n lớn hơn t_d (h.2).

Tỉ số giữa thời gian bay ngang và thời gian bay thẳng đứng gọi là số Froude, kí hiệu là

$$F_r = \frac{t_n}{t_d}.$$

Tỉ số này đặc trưng cho sự so sánh quán tính và lực hấp dẫn. Vì thế nhiều vật thể có hình dạng, kích thước, khối lượng, vận tốc khác nhau, có thể có kiểu dáng rơi giống nhau, nếu chúng cùng có một số Froude (đó là một ví dụ về *luật tương tự*). Người ta đã chứng tỏ rằng dáng điệu rơi có điểm chuyển tiếp với $F_r = 0,67$.

Những *luật về sự tương tự* đem lại các kết quả rất đơn giản cho nhiều hiện tượng bề ngoài phức tạp. Có một điều lí thú là các nhà sinh học và khảo cổ học cũng dựa vào số Froude để xác định dáng đi của khủng long, khi nghiên cứu dấu chân hóa thạch của nó để lại trên đá.

PHAN THANH QUANG
(Theo Recherche 1/2003)

☛ Cộng theo từng vế ba BĐT trên ta được

$$\frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{x+2y+z} + \frac{1}{x+y+2z} \\ \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) = 1$$

Lưu ý: Bạn đọc có thể xem thêm một số cách giải cho BĐT tương tự, đó là câu III (Đề thi Tuyển sinh lớp 10 CT ĐH Vinh năm 2002) THPT số 309, tháng 3.2003.

Bài luyện tập. Cho $a_1, a_2, \dots, a_n$ là các số dương thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} = k$ với $n > 1$ và $k > 0$ cho trước.

Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{(n-1)a_1 + a_2 + \dots + a_n} + \frac{1}{a_1 + (n-1)a_2 + a_3 + \dots + a_n} + \dots \\ \frac{1}{a_1 + \dots + a_{n-1} + (n-1)a_n} \leq \frac{k}{2(n-1)}.$$



LƯỢNG GIÁC trong TOÁN 9 và trong chương trình TOÁN PHỔ THÔNG

TRẦN PHƯƠNG DUNG

(NXB Giáo dục)

Nhiều vấn đề của thực tiễn dẫn đến bài toán *Giải tam giác*, tức là bài toán tìm các yếu tố còn lại của một tam giác khi biết ba yếu tố của nó, trong đó ít nhất là biết một cạnh. Để giải quyết các bài toán loại này, cần đến khái niệm tỉ số lượng giác của một góc.

Trước tiên là khái niệm tỉ số lượng giác của góc nhọn. Khái niệm này được xây dựng dựa vào các tam giác vuông đồng dạng và nó được dùng chủ yếu để giải các tam giác vuông. Đó cũng chính là nội dung cơ bản của môn lượng giác trong Hình học 9. Có thể nói khái niệm tỉ số lượng giác của góc nhọn là Khái niệm cơ sở ban đầu của môn Lượng giác.

Sang Hình học 10, Khái niệm tỉ số lượng giác được mở rộng cho một góc bất kì ở giữa 0° và 180° . Với sự mở rộng này, ta có thể giải được bài toán *Giải tam giác* một cách tổng quát. Như vậy, Lượng giác trong Hình học 9 và Hình học 10 chủ yếu gắn với các bài toán về tam giác lượng.

Một sự nghiên cứu sâu sắc hơn về lượng giác được đặt ở Đại số 10 và Đại số & Giải tích 11. Trong các cuốn SGK này có giới thiệu góc và cung lượng giác, các hàm số lượng giác và đi kèm với chúng là phương trình, bất phương trình lượng giác. Khép lại phần lượng giác trong chương trình Toán phổ thông là Đạo hàm của các hàm số lượng giác được giới thiệu ở Giải tích 12.

Bây giờ quay trở lại vấn đề Lượng giác trong Hình học 9. Khái niệm Tỉ số lượng giác của góc nhọn được đặt trong chương "*Hệ thức lượng trong tam giác vuông*" của Toán 9 tập 1. Nhờ khái niệm này, xây dựng được các hệ thức giữa cạnh và góc trong một tam giác vuông, từ đó bài toán "*Giải tam giác vuông*" được giải quyết. Trong chương này, ngoài các hệ thức giữa cạnh

và góc của tam giác vuông, ở đầu chương, sách còn giới thiệu một số hệ thức giữa cạnh và đường cao, cạnh và hình chiếu trong tam giác vuông. Có thể coi chương "*Hệ thức lượng trong tam giác vuông*" như một ứng dụng của tam giác đồng dạng. Trước đây, chương này được sắp xếp ở lớp 8, ngay sau chương "*Tam giác đồng dạng*". Trong chương trình mới, vì phải chuyển một phần Hình học không gian xuống lớp 8 nên chương này được chuyển lên đầu lớp 9. Trong chương không có kiến thức khó, duy nhất một khái niệm mới được đưa vào chương này, đó là khái niệm tỉ số lượng giác của góc nhọn. Các kiến thức của chương được trình bày trong SGK theo kiểu dẫn dắt, gợi mở, hướng dẫn để học sinh sinh tự tìm ra kết quả là chính.

Cái mới của chương này là đặc biệt chú trọng đến vấn đề thực tiễn, đến nhu cầu của việc đưa ra kiến thức mới. Mở đầu cho mỗi § trong chương là một bài toán thực tế hoặc những nhiệm vụ cụ thể mà ta cần giải quyết. Ngoài ra, hàng loạt các bài tập có nội dung thực tế được đưa vào chương này. Tất cả những điều này giúp học sinh hiểu được "cái gốc" của vấn đề, biết định hướng khi học nội dung của mỗi § và của chương.

Một nét mới nữa của chương này là học sinh sẽ gặp những điều bất ngờ, lí thú trong các mục "*Có thể em chưa biết*". Bài đọc thêm *Tìm tỉ số lượng giác và góc bằng máy tính bỏ túi Casio FX-220* sẽ giúp học sinh học chương này thuận lợi hơn trong vấn đề tính toán.

Có thể nói chương "*Hệ thức lượng trong tam giác vuông*" ở Toán 9 tập 1 được trình bày tương đối gợi mở và hấp dẫn. Điều đó thực sự giúp giáo viên có thể đổi mới phương pháp dạy học theo hướng phát huy tính tích cực của học sinh và cũng giúp học sinh dễ dàng tự học.

THI KHU VỰC GIẢI TOÁN TRÊN MÁY TÍNH CASIO LẦN THỨ NĂM - 2005

NGUYỄN THẾ THẠCH (Vụ TrHPT), TẠ DUY PHƯƠNG (Viện Toán học)

Kì thi khu vực “Giải toán trên máy tính Casio” lần thứ 5 do Bộ Giáo dục và Đào tạo tổ chức đã được tiến hành vào ngày 1.3.2005. Có 59 đội tuyển của các tỉnh, thành phố tham dự. Dưới đây chúng tôi giới thiệu ba đề thi chính thức của Trung học Phổ thông, Trung học Cơ sở và Trung học Bổ túc để các bạn tham khảo.

ĐỀ THPT

Bài 1. Cho các hàm số

$$f(x) = 3x - 1; g(x) = \frac{2}{x} \quad (x \neq 0).$$

a) Hãy tính giá trị của các hàm hợp $f(g(x))$ và $g(f(x))$ tại $x = \sqrt{3}$.

b) Tìm các số x thỏa mãn hệ thức

$$f(g(x)) = g(f(x)).$$

Bài 2. Hệ số của x^2 và x^3 trong khai triển nhị thức $(\sqrt[5]{3} + x)^{20}$ tương ứng là a và b .

Hãy tính tỉ số $\frac{a}{b}$.

Bài 3. Cho đa thức $P(x) = x^5 + 2x^2 + x + 3$

a) Hãy tìm số dư của đa thức $P(x)$ khi chia cho nhị thức $(x + \sqrt{2})$;

b) Hãy tìm một nghiệm gần đúng của $x^5 + 2x^2 + x + 3 = 0$ nằm trong khoảng từ -2 đến -1 (sai khác nghiệm không quá 1 phần nghìn).

Bài 4. Cho dãy số $u_n = \left(1 + \frac{\sin n}{n}\right)^n$.

a) Hãy chứng tỏ rằng, với $N = 1000$, có thể tìm ra cặp hai số tự nhiên l, m lớn hơn N sao cho $|u_m - u_l| \geq 2$.

b) Hãy cho biết với $N = 1000000$ điều nói trên còn đúng hay không?

c) Với các kết quả tính toán như trên, em có dự đoán gì về giới hạn của dãy số đã cho (khi $n \rightarrow \infty$).

Bài 5. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 1,5x - 0,2y + 0,1z = 0,4 \\ -0,1x + 1,5y - 0,1z = 0,8 \\ -0,3x + 0,2y - 0,5z = 0,2 \end{cases}$$

Bài 6. Tìm nghiệm dương nhỏ nhất của

$$\sin \pi x^2 = \sin(\pi(x^2 + 2x)).$$

Bài 7. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x \log_2 3 + \log_2 y = y + \log_2 x \\ x \log_2 12 + \log_2 x = y + \log_2 y \end{cases}$$

Bài 8. Cho hình thang vuông ABCD có hai đáy AD và BC vuông góc với cạnh bên CD, A(0;1), B(2;7), C(8;9).

a) Tìm tọa độ đỉnh D.

b) Gọi E là giao điểm của các đường thẳng AB và DC. Hãy tính tỉ số của diện tích tam giác BEC với diện tích hình thang ABCD.

Bài 9. Cho hai quạt tròn OAB và CAB với tâm tương ứng là O và C, và các bán kính là OA=9cm, CA=15cm; số đo góc AOB là 2,3 rad.

a) Tính số đo góc ACB theo rad.

b) Tính chu vi hình trăng khuyết AXBYA tạo bởi hai cung tròn.

Bài 10. Người ta khâu ghép các miếng da hình lục giác đều (màu sáng) và ngũ giác đều (màu sẫm) để tạo thành quả bóng như hình vẽ.

a) Có bao nhiêu mảnh da mỗi loại?

b) Biết quả bóng có bán kính là 13 cm, hãy tính gần đúng độ dài cạnh của các mảnh da.

(Coi các mảnh da như các đa giác phẳng và diện tích mặt cầu quả bóng xấp xỉ bằng tổng diện tích các đa giác phẳng đó).



ĐỀ THCS

Bài 1. 1) Tính giá trị của biểu thức:

$$a) A = \frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right) \cdot \left[\left(\frac{3}{7} - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{3}{7} + \frac{4}{5}\right)\right]}{\left(\frac{7}{8} + \frac{3}{5}\right) \cdot \left[\left(\frac{2}{9} + \frac{3}{5}\right) \cdot \left(\frac{5}{6} - \frac{3}{4}\right)\right]}$$

$$b) B = \frac{\sin^2 35^\circ \cdot \cos^3 20^\circ - 15 \lg^2 40^\circ \cdot \lg^3 25^\circ}{\frac{3}{4} \sin^3 42^\circ : 0,5 \cot g^3 20^\circ}.$$

2) Tìm nghiệm của phương trình

$$\frac{1}{2 + \frac{3}{4 + \frac{5}{6 + \frac{7}{8}}}} = \frac{1}{3 + \frac{2}{5 + \frac{3}{7 + \frac{4}{9}}}} + x \cdot \left(4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}} \right).$$

Bài 2. 1) Cho bốn số $A = [(2^3)^2]^3$,

$$B = [(3^2)^3]^2; \quad C = 2^{3^{2^3}}, \quad D = 3^{2^{3^2}}.$$

Hãy so sánh A với B , C với D .

2) $E = 0,3050505\dots$ là số thập phân vô hạn tuần hoàn được viết dưới dạng phân số tối giản. Tổng của tử và mẫu là (đánh dấu đáp số đúng):

- A. 464; B. 446; C. 644; D. 646;
E. 664; G. 466.

Bài 3. 1) Chỉ với các chữ số 1, 2, 3, hỏi có thể viết được nhiều nhất bao nhiêu số tự nhiên khác nhau mà mỗi số đều có ba chữ số? Hãy viết tất cả các số đó.

2) Trong tất cả n số tự nhiên khác nhau mà mỗi số đều có bảy chữ số, được viết ra từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 thì có k số chia hết cho 5 và m số chia hết cho 2. Hãy tính các số n, k, m .

Bài 4. Cho biết đa thức

$$P(x) = x^4 + mx^3 - 55x^2 + nx - 156$$

chia hết cho $x-2$ và chia hết cho $x-3$. Hãy tìm giá trị của m, n rồi tính tất cả các nghiệm của đa thức.

Bài 5. Cho phương trình

$$x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 2x - 3 = 0 \quad (1)$$

1) Tìm nghiệm nguyên của (1).

2) Phương trình (1) có số nghiệm nguyên là (đánh dấu đáp số đúng):

- A. 1; B. 2; C. 3; D. 4.

Bài 6. Biết diện tích hình thang vuông $ABCD$ là $S = 9,92 \text{ cm}^2$, $AB = a = 2,25 \text{ cm}^2$, góc $ABD = \alpha = 50^\circ$. Tính độ dài các cạnh AD, BC, DC và số đo các góc ABC, BCD .

Bài 7. Tam giác ABC vuông tại đỉnh C có $AB = a = 7,5 \text{ cm}$; $A = \alpha = 58^\circ 25'$. Từ đỉnh C , vẽ phân giác CD và trung tuyến CM .

Tính độ dài các cạnh AC, BC , diện tích của các tam giác ABC và CDM .

Bài 8. Cho tam giác nhọn ABC có $AB = c = 32,25 \text{ cm}$; $AC = b = 35,75 \text{ cm}$, số đo góc $A = \alpha = 63^\circ 25'$. Tính diện tích của tam giác ABC , độ dài cạnh BC , số đo các góc B, C .

Bài 9. Cho dãy số

$$U_n = \frac{(3 + \sqrt{2})^n - (3 - \sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

1) Tính U_1, U_2, U_3, U_4, U_5 .

2) Chứng minh: $U_{n+2} = 6U_{n+1} - 7U_n$.

3) Lập quy trình bấm phím liên tục tính U_{n+2} trên máy tính Casio.

Bài 10. Cho đa thức

$$P(x) = x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + 132005.$$

Biết rằng khi x lần lượt nhận các giá trị 1, 2, 3, 4 thì giá trị tương ứng của đa thức $P(x)$ lần lượt là 8, 11, 14, 17. Tính giá trị của đa thức $P(x)$ với $x = 11, 12, 13, 14, 15$.

ĐỀ THBT

Bài 1. Tìm nghiệm gần đúng của

$$4 \cos 2x + 5 \sin 2x = 6.$$

Bài 2. Tam giác ABC có $AB = 7 \text{ dm}$,

$A = 48^\circ 23' 18''$ và $C = 54^\circ 41' 39''$.

Tính AC và diện tích tam giác.

Bài 3. Tính gần đúng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = 1 + 2 \sin 2x + 3 \cos x$ trên đoạn $[0; \pi]$.

Bài 4. Hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với các cạnh $AB = 9 \text{ dm}$, $AD = 4\sqrt{3} \text{ dm}$, chân đường cao là giao điểm H của hai đường chéo đáy, cạnh bên $SA = 7 \text{ dm}$. Tính gần đúng đường cao SH và thể tích hình chóp.

Bài 5. Tính gần đúng giá trị của a và b nếu đường thẳng $y = ax + b$ đi qua điểm

$$M(5; -4) \text{ và là tiếp tuyến của ellip } \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

(Xem tiếp trang 29)



Xét tam giác ABC có các cạnh $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$ ta có các bất đẳng thức (BĐT) $a+b > c$; $a+c > b$; $b+c > a$, suy ra :
 $a+b+c > 2a$; $a+b+c > 2b$; $a+b+c > 2c$

Nếu ta đặt :
$$\begin{cases} \delta_1 = a+b+c \\ \delta_2 = ab+ac+bc \\ \delta_3 = abc \end{cases}$$

thì $\delta_1 - 2a > 0$, $\delta_1 - 2b > 0$, $\delta_1 - 2c > 0$,
 suy ra : $(\delta_1 - 2a)(\delta_1 - 2b)(\delta_1 - 2c) > 0$

hay $\delta_1^3 - 4\delta_1\delta_2 + 8\delta_3 < 0$ (1)

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si chúng ta lại có :

$(\delta_1 - 2a)(\delta_1 - 2b) \leq c^2$; $(\delta_1 - 2b)(\delta_1 - 2c) \leq a^2$

$(\delta_1 - 2c)(\delta_1 - 2a) \leq b^2$

Nhân theo từng vế ba BĐT trên suy ra

$(\delta_1 - 2a)(\delta_1 - 2b)(\delta_1 - 2c) \leq \delta_3$ hay

$\delta_1^3 - 4\delta_1\delta_2 + 9\delta_3 \geq 0$ (2)

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$ hay ΔABC là tam giác đều.

Sử dụng hai BĐT (1) và (2) vào một số bài toán hình học và lượng giác ta thấy rất hiệu quả. Sau đây là một số thí dụ minh họa.

Thí dụ 1. Giả sử a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng :

a) $a^3 + b^3 + c^3 + 2abc < a^2(b+c) + b^2(a+c) + c^2(a+b)$

b) $\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{a+c-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3$

Lời giải. a) Ta có : $a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b = (a+b+c)(ab+ac+bc) - 3abc = \delta_1\delta_2 - 3\delta_3$.

Vì $a^3 + b^3 + c^3 = \delta_1^3 - 3\delta_1\delta_2 + 3\delta_3$ nên BĐT đã cho tương đương với : $\delta_1^3 - 4\delta_1\delta_2 + 8\delta_3 < 0$.

ỨNG DỤNG CỦA MỘT BẤT ĐẲNG THỨC TRONG TAM GIÁC

LÊ QUANG TRUNG

(GV Cao đẳng sư phạm Bạc Liêu)

BĐT này đúng theo (1). Vậy BĐT đã cho được chứng minh.

b) Ta có BĐT trên tương đương với

$$\frac{a}{\delta_1 - 2a} + \frac{b}{\delta_1 - 2b} + \frac{c}{\delta_1 - 2c} \geq 3$$

$$\Leftrightarrow a(\delta_1 - 2b)(\delta_1 - 2c) + b(\delta_1 - 2a)(\delta_1 - 2c) + c(\delta_1 - 2a)(\delta_1 - 2b)$$

$$\geq 3 \times (\delta_1 - 2a)(\delta_1 - 2b)(\delta_1 - 2c)$$

$$\Leftrightarrow \delta_1^3 - 4\delta_1\delta_2 + 12\delta_3 \geq 3(-\delta_1^3 + 4\delta_1\delta_2 - 8\delta_3)$$

$$\Leftrightarrow \delta_1^3 - 4\delta_1\delta_2 + 9\delta_3 \geq 0.$$

BĐT này đúng, theo (2).

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c \Leftrightarrow \Delta ABC$ là tam giác đều.

Chú ý : Hai câu này có thể chứng minh trực tiếp tuy nhiên nếu biết (1) thì dễ thấy hướng giải hơn.

Thí dụ 2. Cho tam giác ABC có diện tích S và độ dài ba cạnh là a, b, c . Chứng minh rằng :

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq 16S^2$$

Lời giải. Ta có $a^4 + b^4 + c^4 =$

$$= (a^2 + b^2 + c^2)^2 - 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$$

$$= [(a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca)]^2 - 2[(ab+bc+ca)^2 - 2abc(a+b+c)] = \delta_1^4 - 4\delta_1^2\delta_2 + 2\delta_2^2 + 4\delta_1\delta_3.$$

Từ công thức Hê-rông :

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ với } p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{\delta_1}{2},$$

$$\text{suy ra : } S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c) =$$

$$= \frac{\delta_1}{16}(\delta_1 - 2a)(\delta_1 - 2b)(\delta_1 - 2c)$$

Khi đó BĐT đã cho tương đương với BĐT

$$\delta_1^4 - 4\delta_1^2\delta_2 + 2\delta_2^2 + 4\delta_1\delta_3 \geq -\delta_1^4 + 4\delta_1^2\delta_2 - 8\delta_1\delta_3$$

$$\Leftrightarrow \delta_1^4 - 4\delta_1^2\delta_2 + 6\delta_1\delta_3 + \delta_2^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \delta_1(\delta_1^3 - 4\delta_1\delta_2 + 9\delta_3) + (\delta_2^2 - 3\delta_1\delta_3) \geq 0.$$

BĐT này đúng. (Vì $\delta_1^3 - 4\delta_1\delta_2 + 9\delta_3 \geq 0$ theo (2) và $(x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx)$, $\forall x, y, z$, đặt $x = ab$, $y = bc$, $z = ca$ thì $\delta_2^2 \geq 3\delta_1\delta_3$ hay $\delta_2^2 - 3\delta_1\delta_3 \geq 0$).

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$ hay ΔABC là tam giác đều.

Thí dụ 3. Giả sử A, B, C là ba góc của ΔABC . Chứng minh rằng

$$a) 1 < \cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}.$$

b) Nếu $\sin A + \sin B + \sin C = \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C$ thì ΔABC là tam giác đều.

Lời giải. a) Đặt $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, $T = \cos A + \cos B + \cos C$.

Theo định lí hàm số cô-sin cho ΔABC ta có:

$$\begin{aligned} T &= \frac{ab^2 + ac^2 + a^2b + a^2c + c^2a + c^2b - a^3 - b^3 - c^3}{2abc} \\ &= \frac{\delta_1\delta_2 - 3\delta_3 - (\delta_1^3 - 3\delta_1\delta_2 + 3\delta_3)}{2\delta_3} \\ &= \frac{4\delta_1\delta_2 - \delta_1^3 - 6\delta_3}{2\delta_3} \end{aligned}$$

Vì $4\delta_1\delta_2 - \delta_1^3 - 6\delta_3 > 2\delta_3$ theo (1) nên $T > 1$.

Vì $4\delta_1\delta_2 - \delta_1^3 - 6\delta_3 \leq 3\delta_3$ theo (2) nên $T \leq \frac{3}{2}$.

Đẳng thức xảy ra khi ΔABC là tam giác đều.

b) Theo định lí hàm số sin và định lí hàm cô-sin cho ΔABC ta có

$$\begin{aligned} \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C &= \frac{1}{R} (a \cos A + b \cos B + c \cos C) \\ &= \frac{1}{R} \left(\frac{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}{2abc} \right) \\ &= \frac{-\delta_1^4 + 4\delta_1^2\delta_2 - 8\delta_1\delta_3}{2R\delta_3} = \frac{\delta_1}{2R} \end{aligned}$$

Vì $\sin A + \sin B + \sin C = \frac{a+b+c}{2R} = \frac{\delta_1}{2R}$ nên từ $\sin A + \sin B + \sin C = \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C$ ta có:

$$\frac{-\delta_1^4 + 4\delta_1^2\delta_2 - 8\delta_1\delta_3}{2R\delta_3} = \frac{\delta_1}{2R}$$

$$\Leftrightarrow -\delta_1^4 + 4\delta_1^2\delta_2 - 9\delta_1\delta_3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \delta_1^3 - 4\delta_1\delta_2 + 9\delta_3 = 0 \Leftrightarrow a = b = c \text{ theo (2)}$$

hay ΔABC là tam giác đều.

Bài tập tự luyện

Bài 1. Gọi a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác, p là nửa chu vi. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \geq 2 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right).$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Bài 2. Cho ΔABC có $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$ thỏa mãn hệ thức:

$$\frac{a \cos A + b \cos B + c \cos C}{a+b+c} = \frac{1}{2}.$$

Chứng minh rằng ΔABC là tam giác đều.

Bài 3. Với A, B, C là ba góc của một tam giác ABC bất kì, chứng minh rằng:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin^2 A} + \frac{1}{\sin^2 B} + \frac{1}{\sin^2 C} &\geq \\ &\geq \frac{1}{\cos^2 \frac{A}{2}} + \frac{1}{\cos^2 \frac{B}{2}} + \frac{1}{\cos^2 \frac{C}{2}} \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

PROBLEMS IN THIS ISSUE

(Tiếp trang 17)

T10/337. Let be given a natural number $n \geq 2$ and positive real numbers a, b with $a < b$. Find the greatest value of the expression

$$Q = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)^2, \text{ where } x_1, x_2, \dots, x_n \text{ are } n$$

real numbers belong to the segment $[a, b]$.

T11/337. A line passing through the incenter of triangle ABC cuts the sides AB and AC respectively at M and N . Prove that

$$\frac{BM \cdot CN}{AM \cdot AN} \leq \frac{BC^2}{4AB \cdot AC}$$

T12/337. Let be given a tetrahedon $ABCD$. Let A_1, B_1, C_1, D_1 be respectively the centroids of the faces opposite to the vertices A, B, C, D . The lines AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 cut the circumsphere of $ABCD$ again at A_2, B_2, C_2, D_2 respectively. Prove that

$$\frac{AA_1}{AA_2} + \frac{BB_1}{BB_2} + \frac{CC_1}{CC_2} + \frac{DD_1}{DD_2} \leq \frac{8}{3}.$$



CÁC LỚP THCS

Bài T1/337. (Lớp 6). Tìm bốn chữ số đầu tiên bên trái của số S gồm 1000 số hạng :

$$S = 1 + 2^2 + 3^3 + \dots + n^n + \dots + 1000^{1000}$$

NGUYỄN PHƯỚC
(GV THCS Hương Long,
Thừa Thiên - Huế)

Bài T2/337. (Lớp 7). Cho tam giác ABC có $AB > AC$. Trên các cạnh AB và AC theo thứ tự lấy các điểm M và N sao cho $AM = AN$. Gọi K là giao điểm của BN và CM . Hãy so sánh độ dài của KB và KC .

ĐẶNG THẾ ANH
(SV K28E khoa Toán, ĐHSPhà Nội 2)

Bài T3/337. Xét một tam giác có số đo độ dài ba cạnh là ba số tự nhiên liên tiếp lớn hơn 3 và số đo diện tích của tam giác cũng là số tự nhiên. Chứng minh rằng tồn tại một đường cao của tam giác đã cho chia tam giác đó thành hai tam giác nhỏ mà số đo độ dài các cạnh của cả hai tam giác nhỏ cũng là số tự nhiên.

HOÀNG XUÂN VINH
(Ban Toán, NXB Giáo dục)

Bài T4/337. Giải phương trình

$$x^3 - 3x^2 + 2\sqrt{(x+2)^3} - 6x = 0$$

ĐỖ THANH HÂN
(GV THPT chuyên Bạc Liêu)

Bài T5/337. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T = 2ac + bd + cd$, trong đó các số thực a, b, c, d thỏa mãn các điều kiện : $4a^2 + b^2 = 2$ và $c + d = 4$.

NGUYỄN THỊ LOAN
(GV THCS Đức Bắc, Lập Thạch, Vĩnh Phúc)

Bài T6/337. Cho tam giác ABC . Các tia phân giác trong BM và CN (M thuộc AC , N thuộc AB) cắt nhau tại D . Chứng minh rằng $\triangle ABC$ vuông tại A khi và chỉ khi $2BD \cdot CD = BM \cdot CN$.

VŨ ANH NAM
(GV THCS Từ Liêm, Nam Ban, Lâm Đồng)

Bài T7/337. Cho góc $\widehat{xPy} = 30^\circ$. Trên tia Px lấy điểm A và trên tia Py lấy điểm B sao cho $AB = d$ không đổi. Tìm giá trị lớn nhất của chu vi $\triangle PAB$, của diện tích $\triangle PAB$ khi A, B di động trên các cạnh của góc xPy .

NGUYỄN ĐỨC TẤN
(GV TP Hồ Chí Minh)

CÁC LỚP THPT

Bài T8/337. Xét hàm số $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ thỏa mãn $f(0) = 1$ và $f(f(x)) = x + 4 \cdot f(x)$ với mọi $x \in \mathbb{Z}$. Hãy tìm tất cả các số tự nhiên n ($n \geq 1$) sao cho $f_n(0)$ chia hết cho $20^{11 \cdot 2005}$, trong đó $f_1(x) = f(x)$ và $f_n(x) = f(f_{n-1}(x))$ với mọi $n \geq 2$.

PHẠM MINH PHƯƠNG
(GV PTCTT ĐHSPhà Nội)

Bài T9/337. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = (x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z)$$

trong đó x, y, z là các số thực thuộc đoạn $[0, 1]$.

TRẦN TUẤN ANH
(Khoa Toán Tin, ĐHKHTN TP HCM)

Bài T10/337. Cho số tự nhiên $n \geq 2$ và các số thực dương a, b với $a < b$. Tìm giá trị lớn nhất

của biểu thức $Q = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)^2$ trong đó

$x_1, x_2, \dots, x_n$ là n số thực thuộc đoạn $[a, b]$.

HÀN NGỌC ĐỨC
(SV K47A2 khoa Toán Tin, ĐHKHTN Hà Nội)

Bài T11/337. Một đường thẳng đi qua tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC , cắt các cạnh AB và AC theo thứ tự tại M và N . Chứng minh

$$\text{rằng : } \frac{BM \cdot CN}{AM \cdot AN} \leq \frac{BC^2}{4 \cdot AB \cdot AC}$$

LÊ HOÀI BẮC
(SV 4B khoa Toán, ĐHSPhà Huế,
Thừa Thiên - Huế)

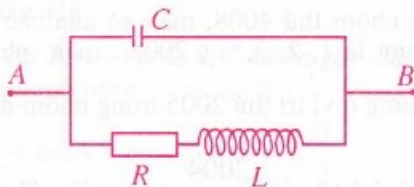
Bài T12/337. Cho hình tứ diện $ABCD$. Gọi A_1, B_1, C_1, D_1 lần lượt là trọng tâm các mặt đối diện với các đỉnh A, B, C, D . Các đường thẳng AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 cắt mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ lần nữa theo thứ tự tại A_2, B_2, C_2, D_2 . Chứng minh rằng :

$$\frac{AA_1}{AA_2} + \frac{BB_1}{BB_2} + \frac{CC_1}{CC_2} + \frac{DD_1}{DD_2} \leq \frac{8}{3}$$

NGUYỄN PHỒN CHIẾN
(SV K49, BK 58 ĐHBK Hà Nội)

CÁC ĐỀ VẬT LÝ

Bài L1/337. Cho mạch điện xoay chiều có sơ đồ như ở hình bên. Cho biết $C = 1\mu\text{F}$; $R = 0,1\Omega$; L là cuộn cảm thuần có $L = 1\text{mH}$. Đặt vào hai đầu đoạn mạch một hiệu điện thế xoay chiều có giá trị hiệu dụng $U = 220\text{V}$ và có tần số góc ω .



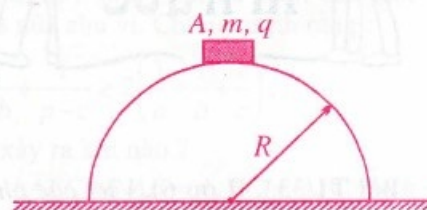
1) Hỏi ω phải có trị số $\omega_{\min}$ bằng bao nhiêu để cường độ hiệu dụng của dòng điện mạch chính đạt trị số cực tiểu?

2) Tìm cường độ hiệu dụng của các dòng điện mạch chính và mạch rẽ khi $\omega = \omega_{\min}$.

NGUYỄN QUANG HẬU
(Hà Nội)

Bài L2/337. Một vật nhỏ có khối lượng $m = 3\text{g}$ và tích điện $q = +2.10^{-4}\text{C}$, ban đầu đặt ở đỉnh của mặt bán trụ có bán kính $R = 75(\text{cm})$ (hình vẽ). Trong không gian có một từ trường đều, vectơ cảm ứng từ song song với trục của mặt trụ.

Nếu ban đầu vật trượt về bên phải thì khi bắt đầu rời khỏi mặt trụ, vật có vận tốc v_1 , còn nếu ban đầu vật trượt về bên trái thì khi bắt đầu rời khỏi mặt trụ vật có vận tốc là v_2 . Xác định độ lớn và hướng của vectơ cảm ứng từ, biết rằng $|v_1 - v_2| = 2,3\text{cm/s}$. Bỏ qua các loại lực ma sát.



TRẦN VĂN NGÀ
(GV THPT Phan Bội Châu, Vinh, Nghệ An)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/337. (for 6th grade).

Find the first four digits (on the left) of the number S which is the following sum of 1000 terms

$$S = 1 + 2^2 + 3^3 + \dots + n^n + \dots + 1000^{1000}$$

T2/337. (for 7th grade)

Let ABC be a triangle with $AB > AC$. Take the points M, N respectively on the sides AB and AC such that $AM = AN$. Let K be the point of intersection of BN and CM . Compare the lengths of KB and KC .

T3/337. Consider a triangle such that the measures of its sides are three consecutive integers greater than 3 and its area is also an integer. Prove that the triangle has an altitude which divides it into two small triangles such that the measures of the sides of both small triangles are integers.

T4/337. Solve the equation

$$x^3 - 3x^2 + 2\sqrt{(x+2)^3} - 6x = 0$$

T5/337. Find the greatest value of the expression $T = 2ac + bd + cd$, where a, b, c, d are real numbers satisfying the conditions :

$$4a^2 + b^2 = 2 \text{ and } c + d = 4.$$

T6/337. Let ABC be a triangle. Its angle bisectors BM, CN (M on the side AC, N on the side AB) intersect at D . Prove that $\triangle ABC$ is right at A when and only when $2BD \cdot CD = BM \cdot CN$.

T7/337. Let be given an angle $\widehat{xPy} = 30^\circ$. A is an arbitrary point on the ray Px , B is an arbitrary point on the ray Py such that $AB = d$ (d is a given constant). Find the greatest value of the perimeter and the greatest value of the area of triangle PAB .

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T8/337. Let $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ be a function satisfying the conditions :

$$f(0) = 1, f(f(x)) = x + 4f(x) \text{ for all } x \in \mathbb{Z}.$$

Find all natural numbers n ($n \geq 1$) such that $f_n(0)$ is divisible by $20^{11^{2005}}$, where $f_1(x) = f(x)$, $f_n(x) = f(f_{n-1}(x))$ for all $n \geq 2$.

T9/337. Find the greatest value of the expression

$$P = (x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z)$$

where x, y, z are real numbers belong to the segment $[0; 1]$.

(Xem tiếp trang 15)



Bài T1/333. (Lớp 6). Viết các phân số với tử số, mẫu số dương theo thứ tự như sau :

$\frac{1}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{n}{1}, \frac{n-1}{2}, \dots, \frac{n-k}{k+1}, \dots, \frac{2}{n-1}, \frac{1}{n}, \dots$, sao cho trong dãy không có phân số $\frac{m}{m}$ với mọi $m > 1$.

Hỏi trong dãy trên phân số $\frac{2004}{2005}$ đứng ở vị trí thứ bao nhiêu ?

Lời giải. Ta chia dãy trên ra thành các nhóm như sau:

$$\left(\frac{1}{1}\right), \left(\frac{2}{1}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{3}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}\right), \dots, \left(\frac{n}{1}, \frac{n-1}{2}, \dots, \frac{n-k}{k+1}, \dots, \frac{2}{n-1}, \frac{1}{n}\right), \dots$$

Nhóm thứ nhất gồm 1 phân số có tổng của tử số và mẫu số bằng 2.

Nhóm thứ hai gồm 2 phân số có tổng của tử số và mẫu số bằng 3.

Nhóm thứ ba gồm 3 phân số có tổng của tử số và mẫu số bằng 4.

Nhóm thứ tư gồm 4 phân số có tổng của tử số và mẫu số bằng 5.

.....

Nhóm thứ n gồm các phân số có tổng của tử số và mẫu số bằng $n + 1$.

Trong đó:

– Nếu n chẵn thì nhóm thứ n có n phân số.

– Nếu $n > 1$ và n lẻ thì nhóm thứ n có $n-1$ phân số.

Phân số $\frac{2004}{2005}$ thuộc nhóm thứ 4008.

Để ý rằng trong dãy 2, 3, 4, 5, ..., 4007 có 2003 số lẻ.

Do đó, tổng số phân số có trong các nhóm thứ 1, 2, 3, 4, 5, ..., 4007 là:

$$1+2+(3-1)+4+(5-1)+\dots+4006+(4007-1) = (1+2+3+4+5+\dots+4006+4007) - 2003 = \frac{4007 \cdot 4008}{2} - 2003 = 8028025$$

Trong nhóm thứ 4008, mẫu số của các phân số lần lượt là 1, 2, 3, ..., 2005, ... nên phân số $\frac{2004}{2005}$ đứng ở vị trí thứ 2005 trong nhóm này.

Vậy số thứ tự của $\frac{2004}{2005}$ trong dãy đã cho là $8028025 + 2005 = 8030030$.

Nhận xét. Hầu hết các bạn có lời giải đúng đều theo cách trên. Một số bạn có lẽ chỉ quan sát hai nhóm đầu nên đã nhầm rằng số phân số trong nhóm n là n .

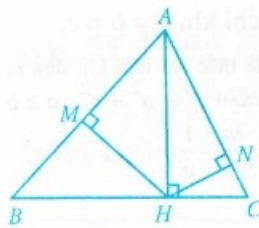
Không ít bạn đã đưa ra nhận xét tổng quát: mẫu số của mỗi phân số là số thứ tự của phân số đó trong nhóm tương ứng. Thực ra điều đó chỉ đúng với nhóm thứ nhất và các nhóm thứ chẵn mà thôi.

Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Nghệ An: Vũ Đình Long, Nguyễn Thị Thùy Dung, 6A, THCS Lý Nhật Quang, Đồ Lương ; **Hà Nội:** Lê Quang Huy, 6H1, THCS Trưng Vương, Q. Hoàn Kiếm ; **Phú Thọ:** Nguyễn Thùy Linh A, 6A2, THCS Hạ Hòa, TT Hạ Hòa ; **Khánh Hòa:** Trần Thị Ánh Nguyên, 6⁷, THCS Cam Nghĩa, Cam Ranh ; **Nam Định:** Nguyễn Đăng Khang, 6A9, THCS Phùng Chí Kiên, TP Nam Định ; **Thái Nguyên:** Ngô Trần Việt Hà, 6A4, THCS Chu Văn An TP Thái Nguyên ; **Hải Phòng:** Trần Đức Hùng, 6A9, THCS Chu Văn An, Q. Ngô Quyền ; **Hòa Bình:** Đào Anh Sáng, 6A, THCS TT Kỳ Sơn ; **Hà Tây:** Phan Hồng Minh, Trần Phương Thảo, Lê Lan Anh, 6A3, THCS Trần Phú, H. Phú Xuyên ; **Hà Tĩnh:** Thái Mạnh Cường, 6A, THCS Vượng Lộc, Can Lộc ; **Hưng Yên:** Hoàng Thu Hương, 6A3, THCS Chu Mạnh Trinh, Văn Giang ; **Hải Dương:** Nguyễn Thanh Loan, Nguyễn Thị Thủy Phương, Nguyễn Hương Ngọc, Bùi Thị Anh Phương, Đoàn Mỹ Linh, Nguyễn Minh Trang, Đoàn Thái Quỳnh, Lê Thị Thu Huyền, Lê Thị Thúy, 6/3, THCS Lê Quý Đôn TP Hải Dương ; **Vĩnh Phúc:** Nguyễn Thanh Tùng, Nguyễn Thị Phương Thảo, 6A2, Nguyễn Trung Anh, Phạm Thị Thùy Dương, Trần Thị Hồng Hạnh, Đỗ Trang Linh, Nguyễn Minh Dũng, Nguyễn Thu Nga, Đào Ngọc Diễm Trang, Đỗ Phương Mai, Phùng Thị Thúy Nga, 6A1, THCS Hai Bà Trưng, TX Phúc Yên; Nguyễn Văn Vi, Nguyễn Hữu Giang, Phùng Ngọc Quý, Nguyễn Thu Nga, Nguyễn Thị Hương A, 6A1, THCS Yên Lạc, H. Yên Lạc; Đỗ Duy Hoàn, 6A, THCS Lăng Công, Lập Thạch.

NGUYỄN ANH DŨNG

Bài T2/333. (Lớp 7). Cho tam giác ABC với đường cao AH. Gọi M và N lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ H đến AB và AC. Chứng minh rằng nếu $BM = CN$ thì tam giác ABC cân với đáy BC.



Lời giải. Giả sử tam giác ABC không cân. Không ảnh hưởng đến tính tổng quát, ta có thể giả sử $AB > AC$. Khi đó $HB > HC$ (liên hệ giữa hình chiếu và đường xiên).

Ta có : $BH^2 = BM^2 + HM^2$ (định lý Pi-ta-go trong tam giác vuông BMH) ; $CH^2 = CN^2 + HN^2$ (Định lý Pi-ta-go) mà $BM = CN$ (giả thiết), suy ra $HM > HN$ (1)

$$\text{Ta lại có } \begin{cases} AH^2 = AM^2 + HM^2 \\ AH^2 = AN^2 + HN^2 \end{cases}$$

mà từ (1) có $HM > HN$ nên $AM < AN$.

Kết hợp với điều kiện $BM = CN$, suy ra $AB < AC$, mâu thuẫn với điều giả sử trên. Vậy tam giác ABC cân với đáy BC .

Nhận xét. 1. Bài toán này không khó, hầu hết các bạn tham gia giải đều áp dụng định lý Pi-ta-go và dùng phương pháp chứng minh phản chứng. Một số bạn áp dụng định lý Pi-ta-go để chứng minh trực tiếp, có lời giải dài hơn một chút. Một số bạn khác dùng phương pháp so sánh cạnh và góc trong tam giác nhưng không xét đủ hai trường hợp (điểm H nằm trong đoạn BC và H nằm ngoài đoạn BC).

2. Các bạn sau đây có lời giải tốt hơn cả :

Vĩnh Phúc : Vũ Trung Đức, 7A, THCS Lập Thạch, Lập Thạch, **Phạm Thị Thủy A**, 7B, THCS Đồng Cương, Yên Lạc ; **Hà Nội :** Nguyễn Lâm Phúc, 7C Trường Hà Nội - Amsterdam ; **Phú Thọ :** Trần Trung Hiếu, 7B, THCS Đoàn Hùng, huyện Đoàn Hùng ; **Nghệ An :** Nguyễn Cảnh Thông, Hoàng Trung Đức, Nguyễn Thị Kim Chi, Võ Văn Công, Hoàng Thị Lệ Quyên, Tăng Văn Bình, 7B, Nguyễn Thị Thanh Xuân, 7C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương ; **Hà Tĩnh :** Nguyễn Trung Thành, 7D, THCS TTtr Kỳ Anh.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

Bài T3/333. Tìm mọi cặp số nguyên dương

x, y sao cho $\frac{x^4+2}{x^2y+1}$ là số nguyên dương.

Lời giải. (của bạn Võ Văn Tuấn, 8A5, THCS Nguyễn Du, Krông Buk, Đắk Lắk)

Đặt $\frac{x^4+2}{x^2y+1} = a$ với a là số nguyên dương thì

$$x^4 + 2 = a(x^2y + 1) \text{ hay } x^2(x^2 - ay) = a - 2 \quad (1)$$

Xét 3 trường hợp sau :

1) Nếu $a = 1$ thì từ (1) có $x^2(x^2 - y) = -1$, suy ra $x^2 = 1$ và $1 - y = -1$ nên có nghiệm $x = 1, y = 2$.

2) Nếu $a = 2$ thì từ (1) có $x^2(x^2 - 2y) = 0$, suy ra $x^2 = 2y$ nên có nghiệm $x = 2k, y = 2k^2$ với k là số nguyên dương.

3) Nếu $a > 2$ thì từ (1) có $a - 2 > 0$ và $(a - 2) : x^2$ nên $a \geq x^2 + 2 > x^2$, từ đó $0 < x^2 - ay < x^2 - x^2y \leq 0$. Điều này không xảy ra. Vậy cặp số nguyên dương (x, y) thỏa mãn đề bài là $(1, 2)$ và $(2k, 2k^2)$, trong đó k là số nguyên dương.

Nhận xét. 1) Nhiều bạn đã sử dụng tính chất chia hết để giải bài toán nghiệm nguyên này, nhưng chưa kết hợp đánh giá hai vế của (1) nên lập luận dài hơn cách giải trên. Một số lời giải cũng dài khi đặt $x^2 = t$ để đưa về giải phương trình bậc hai của t với tham số a , đồng thời đặt điều kiện để có nghiệm nguyên.

2) Ngoài bạn Tuấn, các bạn sau có lời giải đúng :

Phú Thọ : Nguyễn Trường Giang, 6A2, Đào Đức Trung, 9A3, THCS Giầy Phong Châu, Phù Ninh, Nguyễn Sơn Tùng, 9B, THCS Nguyễn Quang Bích, Tam Nông ; **Vĩnh Phúc :** Phạm Văn Giang, 9A, THCS Yên Lạc, Nguyễn Đức Tâm, 9E, THCS Cao Minh, TX. Phúc Yên ; **Bắc Ninh :** Lê Thế Tài, 9B, THCS Từ Sơn ; **Hà Tây :** Nguyễn Thái Hà, 9A, Khuất Văn Phiến, 9D, THCS Thạch Thất ; **Hà Nội :** Đỗ Như Milan, 8A1, THCS Chu Văn An, Q. Ba Đình ; **Nam Định :** Cao Mạnh Hùng, 9A, THCS Yên Định, Hải Hậu, Phạm Tiến Đạt, 9B, THCS Trần Huy Liệu, Vụ Bản ; **Hải Dương :** Phan Tiến Thành, 9B, THCS Phú Thái, Kim Thành ; **Thanh Hóa :** Trịnh Quang Thanh, 8B, THCS Hàm Rồng, Hoàng Đức Ý, 9E, THCS Trần Mai Ninh, TP. Thanh Hóa, Mai Phương Loan, 8B, THCS Chu Văn An, Nga Sơn, Nguyễn Lưu Bách, 9C, THCS Lê Hữu Lập, Hậu Lộc, Trịnh Hùng Linh, 9C, THCS Lê Thánh Tông, Thọ Xuân ; **Nghệ An :** Nguyễn Thị Văn Anh, 8G, THCS Đặng Thai Mai, Vinh, Lê Duy Nam, Hoàng Trung Đức, Dương Hoàng Hưng, Võ Văn Công, Nguyễn Mạnh Tuấn, 7B, Vương Đình Phong, 9D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương ; **Hà Tĩnh :** Nguyễn Thành Trung, 9D, THCS TTtr Kỳ Anh, Lê Văn Anh, 8/1, THCS Nguyễn Du, Hương Sơn ; **Quảng Trị :** Trương Xuân Nhã, 7A, THCS Nguyễn Huệ, Đông Hà ; **Quảng Ngãi :** Đoàn Duy Mẫn, 9A, THCS TTtr Sông Vệ, Tư Nghĩa ; **Khánh Hòa :** Võ Thái Thông, 9/4 THCS Ngô Gia Tự, Cam Nghĩa, Cam Ranh ; **TP Hồ Chí Minh :** Nguyễn Gia Luyện, 9/8 THCS Nguyễn Du, Q. Gò Vấp ; **Bạc Liêu :** Vũ Như Ngọc, 9/1, THCS Trần Huỳnh, TX Bạc Liêu.

VIỆT HẢI

Bài T4/333. Giải phương trình

$$16x^4 + 5 = 6\sqrt[3]{4x^3 + x} \quad (1)$$

Lời giải. Vì $16x^4 + 5 > 0$ nên $6\sqrt[3]{4x^3 + x} > 0$, do đó $x > 0$. Áp dụng BĐT Cô-si cho 3 số dương : $4x, 4x^2 + 1, 2$, ta có :

$$\begin{aligned} 6\sqrt[3]{4x^3 + x} &= 3\sqrt[3]{4x(4x^2 + 1) \cdot 2} \leq \\ 4x + 4x^2 + 1 + 2 &= 4x^2 + 4x + 3 \end{aligned} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra :

$$16x^4 + 5 \leq 4x^2 + 4x + 3 \Leftrightarrow 8x^4 - 2x^2 - 2x + 1 \leq 0 \\ \Leftrightarrow (2x-1)^2(2x^2 + 2x + 1) \leq 0 \Leftrightarrow (2x-1)^2 \leq 0 \\ (3) (\text{do } 2x^2 + 2x + 1 > 0 \text{ với } \forall x)$$

Lại vì $(2x-1)^2 \geq 0$ với $\forall x$, nên từ (3) suy ra :

$$2x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2} \text{ (thỏa mãn (1)).}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất

$$x=\frac{1}{2}.$$

Nhận xét. Tất cả các bạn tham gia đều có lời giải đúng. Đa số các bạn có cách giải tương tự như trên. Các bạn có lời giải ngắn gọn là :

Hà Nội : Đỗ Như Milan, 8A1, THCS Chu Văn An ;
Bắc Ninh : Lê Thế Tài, 9B, THCS Từ Sơn, Vũ Thị Thêu, 9A, THCS Hàn Thuyên, Lương Tài ; **Vĩnh Phúc :** Ngô Thị Bích Phượng, Phạm Văn Giang, 9A, THCS Yên Lạc ;
Nam Định : Cao Mạnh Hùng, 9A, THCS Yên Định, Hải Hậu ; **Quảng Bình :** Phan Hồng Sơn, 7A, THCS Hải Trach, Bố Trạch ; **Hải Dương :** Nguyễn Tuấn Thành, 9A, THCS Võ Thị Sáu, TP Hải Dương ; **Hà Tây :** Nguyễn Thái Hà, 9A, THCS Thạch Thất.

TRẦN HỮU NAM

Bài T5/333. Chứng minh bất đẳng thức sau

$$\frac{a+b}{ab+c^2} + \frac{b+c}{bc+a^2} + \frac{c+a}{ca+b^2} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \quad (1)$$

trong đó a, b, c là các số thực dương.

Lời giải. Kí hiệu vế trái của (1) là A, vế phải của (1) là B. Xét hiệu : $A - B$

$$= \left(\frac{a+b}{ab+c^2} - \frac{1}{c} \right) + \left(\frac{b+c}{bc+a^2} - \frac{1}{a} \right) + \left(\frac{c+a}{ca+b^2} - \frac{1}{b} \right) \\ = \frac{(a-c)(c-b)}{(ab+c^2)c} + \frac{(b-a)(a-c)}{(bc+a^2)a} + \frac{(c-b)(b-a)}{(ca+b^2)b}$$

Do vai trò của a, b, c trong (1) là bình đẳng nên ta giả sử $a \geq b \geq c > 0$. Khi đó

$$(b-a)(a-c) \leq 0 ; (c-b)(b-a) \geq 0$$

$$c^3 \leq b^3 \Rightarrow abc + c^3 \leq abc + b^3$$

$$\Rightarrow \frac{(c-b)(b-a)}{(ca+b^2)b} \leq \frac{(c-b)(b-a)}{(ab+c^2)c}$$

Suy ra $A - B$

$$\leq \frac{(a-c)(c-b)}{(ab+c^2)c} + \frac{(c-b)(b-a)}{(ab+c^2)c} + \frac{(b-a)(a-c)}{(bc+a^2)a} \\ = \frac{-(c-b)^2}{(ab+c^2)c} + \frac{(b-a)(a-c)}{bc+a^2} \leq 0$$

Vậy BĐT (1) đã được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Nhận xét. 1) Không ít bạn đã mắc sai lầm khi đưa ra các khẳng định như : $a \geq b \Rightarrow ab + c^2 \geq a^2 + c^2$; $a \geq b$

$$\Rightarrow \frac{c}{a} > \frac{c}{b} ; a \geq b \geq c \Rightarrow \frac{b+c}{bc+a^2} \leq \frac{2a}{2a^2} = \frac{1}{a},$$

$$\frac{a^2 + 2ab + b^2}{4ab} \leq \frac{4ab}{4ab} ; \dots$$

Từ đó dẫn đến những đánh giá không đúng.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt :

Nam Định : Phạm Tiến Duật, 9B, THCS Trần Huy Liệu, Trần Quang Anh, 9A, THCS Trần Đăng Ninh ;
Thanh Hóa : Hoàng Tuấn Anh, 9C, THCS Lương Chi ;
Hoàng Đức Ý, 9E, THCS Trần Mai Ninh ; **Hà Nội :** Trần Trung Đức, 8H1, THCS Trưng Vương ; **Nghệ An :** Nguyễn Đức Công, 8D, THCS Lý Nhật Quang ; **Khánh Hòa :** Võ Thái Thông, 9/4, THCS Ngô Gia Tự.

PHẠM THỊ BẠCH NGỌC

Bài T6/333. Cho tam giác ABC với trực tâm H (H khác A, B, C) và M là trung điểm của BC. Đường thẳng đi qua H vuông góc với HM cắt đường thẳng AB ở E và cắt đường thẳng AC ở F. Chứng minh rằng tam giác MEF cân với đáy EF.

Lời giải. (Dựa theo bạn Nguyễn Tiến Thanh, 9C, THCS Nguyễn Quang Bích, Tam Nông, Phú Thọ).

Xét hai trường hợp sau :

• **Trục tâm H**

nằm trong $\triangle ABC$:

Gọi O là tâm

đường tròn ngoại

tiếp $\triangle ABC$. Nối

AO cắt đường tròn

(O) tại D, khi đó

$DC \perp AC$, mà BH

$\perp AC$, suy ra

$BH \parallel CD$. Tương tự

có $CH \parallel BD$. Do đó tứ giác BHCD là hình bình

hành $\Rightarrow H, M, D$ thẳng hàng và $\widehat{HBD} = \widehat{HCD}$

(1).

Vì các tứ giác BEHD, CFHD nội tiếp được

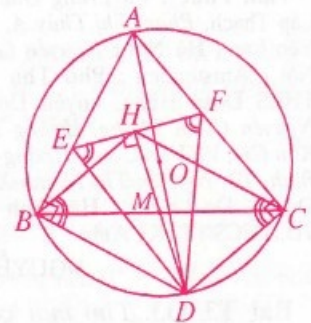
một đường tròn nên $\widehat{HBD} = \widehat{DEH}$;

$\widehat{HCD} = \widehat{DFH}$ (2)

Từ (1), (2) suy ra $\widehat{DEH} = \widehat{DFH}$ hay $\triangle DEF$

cân, với đáy EF. Do đó $\triangle MEF$ cân, với đáy EF.

Từ đó có $ME = MF$.



• **Trục tâm H nằm ngoài $\triangle ABC$:** Trong trường hợp này thì $\widehat{HED} = 180^\circ - \widehat{HBD} = 180^\circ - \widehat{HCD} = \widehat{HFD}$. Lập luận tương tự như trường hợp trên ta cũng có $ME = MF$, bài toán được chứng minh.

Nhận xét. 1) Bài T6/333 tương tự như bài toán "Con bướm". Vì lý do đó nên bài toán này có khá nhiều lời giải. Bạn **Hồ Minh Tấn**, 9C, THCS Lê Thánh Tông, Thọ Xuân, **Thanh Hóa** đã đưa ra 4 lời giải khác nhau cho bài T6/333. Nhiều bạn đã đưa ra ít nhất hai cách giải cho bài toán đó. Hoan nghênh bạn **Hoàng Thị Hoài**, 8C, THCS Anh Sơn, Anh Sơn, **Nghệ An** đã đề xuất thêm bài toán: Giả sử H là trục tâm của $\triangle ABC$. Đường thẳng bất kỳ qua H cắt AB , AC lần lượt tại E và F . Đường thẳng vuông góc với EF tại H cắt BC tại M . Chứng minh rằng $\triangle MEF$ cân tại M khi và chỉ khi $EH = FH$.

2) Tất cả các lời giải gửi về Tòa soạn đều đúng. Sau đây là những bạn có lời giải tốt: **Hà Nội**: Tô Việt Anh, 9A1, THCS Nguyễn Trường Tộ, Q. Đống Đa, Nguyễn Quý Tuấn, 8A, PTDL Lương Thế Vinh, Q. Cầu Giấy; **Phú Thọ**: Nguyễn Sơn Tùng, 9B, THCS Nguyễn Quang Bích, Tam Nông; **Hà Tây**: Khuất Văn Phiến, 9D, THCS Thạch Thất, Thạch Thất; **Nam Định**: Vũ Duy Thành, 9C, THCS Đào Sư Tích, Trục Ninh, Trần Thị Thủy Trang, 9A, THCS Xuân Trường, Xuân Trường; **Thanh Hóa**: Vũ Đức Lộc, 9C, THCS Lê Hữu Lập, Hậu Lộc, Trần Công Phan Vinh, 9B, Hoàng Đức Ý, 9E, THCS Trần Mai Ninh, TP. Thanh Hóa; **Hà Tĩnh**: Nguyễn Thành Trung, 9D, THCS TT Kỳ Anh, Kỳ Anh; **Thừa Thiên - Huế**: Nguyễn An Hoàng, THCS Kim Long, TP Huế; **Quảng Nam**: Phan Thị Thu Trang, 9/4, THCS Nguyễn Văn Trỗi, Điện Thắng, Điện Bàn; **Đà Nẵng**: Nguyễn Như Đức Trung, 9/1, THCS Lý Thường Kiệt, Q. Hải Châu; **Khánh Hòa**: Phan Nhật Minh, 9/1, THCS Đinh Tiên Hoàng, Ninh Hòa, Võ Thái Thông, 9/4, THCS Ngô Gia Tự, Cam Nghĩa, Cam Ranh; **TP Hồ Chí Minh**: Phạm Hoàng Long, 9², THCS Nguyễn Du, Q. Gò Vấp; **Nghệ An**: Vương Đình Phong, 9D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương.

HỒ QUANG VINH

Bài T7/333. Lấy điểm M nằm trong hình chữ nhật $ABCD$ cho trước. Kẻ $CE \perp BM$ tại E , kẻ $DF \perp AM$ tại F . Gọi N là giao điểm của CE và DF . Tìm quỹ tích trung điểm của MN khi điểm M di chuyển bên trong hình chữ nhật $ABCD$.

Lời giải. Phần thuận. Gọi H là trung điểm của MN . Vẽ $\triangle CM'D = \triangle AMB$. (M' nằm trong hình chữ nhật $ABCD$). Ta có $\widehat{M'CD} = \widehat{MAB} = \widehat{ADF}$. Nên $CM' \perp ND$. Tương tự $DM' \perp CN$. Suy ra M' là trục tâm của $\triangle NCD$. Vậy $NM' \perp CD$ tại Y . Suy ra $\triangle BMX = \triangle M'DY$ nên $MX = DY$ hay khoảng cách từ M đến BC bằng khoảng cách từ N đến AD . Vậy H di chuyển trên đường trung trực của DC .

Giới hạn : Gọi trung điểm của DC là Z . N' là giao điểm của các đường vuông góc từ C và D

theo thứ tự đến BZ và AZ . Trung điểm của ZN' là H' . Khi đó H thuộc tia $H'N'$.

Phần đảo.

Lấy H bất kỳ thuộc tia $H'N'$. Gọi E' và F là hai điểm thuộc nửa đường tròn đường kính AD (nằm trong $ABCD$) sao cho $HE' = HF$, E' không trùng F . Vẽ E đối xứng với E' qua $H'N'$. M là giao của AF và BE . N là giao của DF và CE . O là trung điểm của MN . Suy ra $OE = OF$, $O \in H'N'$ (vì M, E, F thỏa mãn phần thuận). $HE = HF$, H thuộc $H'N'$ nên $H \equiv O$, hoặc $EF \perp H'N'$ (khi đó $E' \equiv F$ vô lý). Vậy $H \equiv O$ hay H là trung điểm của MN .

Kết luận : Quỹ tích trung điểm H là tia $H'N'$ thuộc trung trực của DC .

Nhận xét. Giải tốt bài này gồm có các bạn: **Đắk Lắk**: Võ Văn Tuấn, 8A5, THCS Nguyễn Du, Krông Buk; **Quảng Trị**: Trương Xuân Nhã, 7A, THCS Nguyễn Huệ, Đông Hà; **Thanh Hóa**: Hoàng Đức Ý, 9E, THCS Trần Mai Ninh.

VŨ KIM THUY

Bài T8/333. Chứng minh rằng với bất kỳ số nguyên dương n thì hiệu $S_n = \left(\sum_{k=1}^n \left[\frac{n}{k} \right] \right) - [\sqrt{n}]$ là số nguyên chẵn, trong đó kí hiệu $[x]$ chỉ phần nguyên của x .

Lời giải. (Dựa trên lời giải của bạn **Trịnh Văn Nam**, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, **Nghệ An**) và **Lê Công Truyền**, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc).

Ta chứng minh bằng quy nạp theo n . Với $n=1$ khẳng định đúng do $S_1 = 0$. Giả sử S_n chẵn.

$$\text{Để thấy } [\sqrt{n+1}] - [\sqrt{n}] =$$

$$\begin{cases} 0 & \text{nếu } n+1 \text{ không chính phương} \\ 1 & \text{nếu } n+1 \text{ chính phương} \end{cases}$$

Ta có :

$$S = S_{n+1} - S_n =$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n+1} \left[\frac{n+1}{k} \right] - \left[\frac{n}{k} \right] \right) + [\sqrt{n+1}] - [\sqrt{n}]$$

$$= A + [\sqrt{n+1}] - [\sqrt{n}]$$

trong đó A là số ước dương của $n+1$.

$$\text{Giả sử } n+1 = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_t^{\alpha_t} \\ \Rightarrow A = (\alpha_1+1) \dots (\alpha_t+1)$$

• Nếu α_i chẵn ($\forall i$) thì $n+1$ là chính phương, A là số lẻ do đó $S = A + 1$ là chẵn suy ra $S_{n+1} = S + S_n$ là chẵn.

• Nếu $\exists \alpha_i$ lẻ thì A chẵn và $[\sqrt{n+1}] - [\sqrt{n}] = 0$. Do đó $S = A$ chẵn. Suy ra $S_{n+1} = S + S_n$ là chẵn.

Nhận xét. 1) Bài toán có thể giải trực tiếp bằng cách chứng minh rằng $S_n = 2|T_n|$, trong đó $T_n = \{(x, y) | x < y, xy \leq n\}$ (lời giải của bạn Nguyễn Mạnh An, 10A1, THPT chuyên Hà Nam).

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Nguyễn Tuấn Minh, 11CT Quốc học Huế, Thừa Thiên - Huế; Hoàng Văn Hùng, Kinh Môn, Hải Dương; Phan Thị Thu Trang, 9/4, THCS Nguyễn Văn Trỗi, Quảng Nam; Bùi Khắc Liên, 11T, THPT Lam Sơn, Thanh Hóa; Nguyễn Hoàng Việt, 11A1, ĐHSPT Hà Nội, Kha Tuấn Minh, PTNK ĐHQG TP. HCM.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T9/333. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2(x+1) = 2(y^3-x)+1 \\ y^2(y+1) = 2(z^3-y)+1 \\ z^2(z+1) = 2(x^3-z)+1 \end{cases}$$

Lời giải. (Của đa số các bạn)

Viết hệ đã cho dưới dạng

$$\begin{cases} x^3 + x^2 + 2x = 2y^3 + 1 \\ y^3 + y^2 + 2y = 2z^3 + 1 \\ z^3 + z^2 + 2z = 2x^3 + 1 \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} f(x) = g(y) \\ f(y) = g(z) \\ f(z) = g(x) \end{cases} \quad (1) \quad (2) \quad (3)$$

trong đó $f(t) = t^3 + t^2 + 2t$ và $g(t) = 2t^3 + 1$. Nhận xét rằng $g(t), f(t)$ là hàm đồng biến trên R vì

$$f'(t) = 3t^2 + 2t + 2 > 0, g'(t) = 6t^2 \geq 0, \forall t \in R.$$

Giả sử (x, y, z) thỏa mãn hệ đã cho và không giảm tổng quát có thể coi $x \geq y$. Khi đó từ (1) và (2) suy ra $g(y) \geq g(z)$ hay $y \geq z$. Từ đó, từ (2) và (3) suy ra $g(z) \geq g(x)$ hay $z \geq x$. Suy ra $x = y = z$.

Vậy hệ đã cho tương đương với hệ

$$\begin{cases} x = y = z \\ h(x) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

trong đó $h(t) = t^3 - t^2 - 2t + 1$. Nhận xét rằng $h(t)$ là hàm số liên tục trên R và $h(-2) < 0$, $h(0) > 0$, $h(1) < 0$ và $h(2) > 0$ nên phương trình $h(t) = 0$ có cả ba nghiệm phân biệt đều nằm trong $(-2, 2)$. Đặt $x = 2\cos u$ với $u \in (0, \pi)$. Khi đó $\sin u \neq 0$ và (4) có dạng

$$\begin{cases} x = y = z = 2\cos u, u \in (0, \pi) \\ 8\cos^3 u - 4\cos^2 u - 4\cos u + 1 = 0 \end{cases} \\ \text{hay} \quad \begin{cases} x = y = z = 2\cos u, u \in (0, \pi) \\ \sin u (8\cos^3 u - 4\cos^2 u - 4\cos u + 1) = 0 \end{cases} \\ \text{hay} \quad \begin{cases} x = y = z = 2\cos u, u \in (0, \pi) \\ \sin 4u = \sin 3u \end{cases} \quad (5)$$

Giải hệ (5) ta thu được $u \in \left\{ \frac{\pi}{7}, \frac{3\pi}{7}, \frac{5\pi}{7} \right\}$ và

$$\begin{cases} x = y = z = 2\cos u \\ u \in \left\{ \frac{\pi}{7}, \frac{3\pi}{7}, \frac{5\pi}{7} \right\} \end{cases} \quad (6)$$

Nhận xét. 1) Nhiều bạn giải phương trình $h(x) = 0$ trực tiếp thông qua việc đặt ẩn phụ để đưa về dạng lượng giác

$$4t^3 - 3t = -\frac{9}{4\sqrt{7}}.$$

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Nguyễn Đức Thân, Lê Đức Quang, Đỗ Thanh Tùng, 10T, THPT chuyên Nguyễn Du, Đắk Lắk; Ngô Anh Tú, 10A1, THPT Phả Lại, Vũ Xuân Dương, 10T, THPT chuyên Nguyễn Trãi, Hải Dương; Hoàng Khắc Hiếu, 12A1, THPT Nguyễn Xuân Ôn, Nghệ An; Thái Thị Thu Trang, 10A, THPT Vĩnh Linh, Trương Xuân Nhã, Nguyễn Tiến Lâm, 10T, Hồ Sỹ Thắng, Nguyễn Hữu Ninh, Nguyễn Thiện Nhân, 11T, THPT Lê Quý Đôn, Quảng Trị; Dương Minh Tiến, 11TL, THPT Nguyễn Bình Khiêm, Vĩnh Long; Lê Ánh Phước, 11T, THPT chuyên Lương Văn Chánh, Phú Yên.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T10/333. Chứng minh rằng

$$\sum_{i=1}^n \sqrt{x_i^2 + \frac{1}{x_i^2}} \geq \left(n + \frac{1}{n}\right) \cdot \sqrt{n^2 + \frac{1}{n^2}} \cdot \left(\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{1+x_i^2}\right) \quad (1)$$

trong đó $x_1, x_2, \dots, x_n$ là n số dương và thỏa mãn điều kiện $x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq 1$.

Lời giải. (Của bạn Trần Văn Huỳnh, 10A1, THPT Ngô Gia Tự, Lập Thạch, Vĩnh Phúc). Đầu tiên ta có hai nhận xét sau:

1) Nếu $a_1, a_2, \dots, a_n$ là các số thực dương, áp dụng BĐT Bu-nhi-a-côp-xki cho hai bộ số

$$(\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}, \dots, \sqrt{a_n}) \text{ và } \left(\frac{1}{\sqrt{a_1}}, \frac{1}{\sqrt{a_2}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{a_n}}\right)$$

ta có $\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}\right) \geq n^2$. Do đó $\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \geq \frac{n^2}{\sum_{i=1}^n a_i}$

BĐT trên trở thành đẳng thức khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

2) Với số thực dương x :

$$\frac{x}{1+x^2} = \frac{x}{1-\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} + x^2} \leq \frac{x}{1-\frac{1}{n^2} + 2\frac{x}{n}} = \frac{n^2 x}{n^2 - 1 + 2nx} = \frac{n}{2} \left(1 - \frac{n^2 - 1}{n^2 - 1 + 2nx}\right)$$

Áp dụng:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{1+x_i^2} &= \sum_{i=1}^n \frac{n}{2} \left(1 - \frac{n^2 - 1}{n^2 - 1 + 2nx_i}\right) = \\ &= \frac{n^2}{2} - \frac{n(n^2 - 1)}{2} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{1}{n^2 - 1 + 2nx_i} \\ &\leq \frac{n^2}{2} - \frac{n(n^2 - 1)}{2} \cdot \frac{n^2}{\sum_{i=1}^n (n^2 - 1 + 2nx_i)} \\ &= \frac{n^2}{2} - \frac{n(n^2 - 1) \cdot n^2}{2 \left(n(n^2 - 1) + 2n \sum_{i=1}^n x_i\right)} \\ &\leq \frac{n^2}{2} - \frac{n^3(n^2 - 1)}{2(n(n^2 - 1) + 2n)} \quad (\text{do } \sum_{i=1}^n x_i \leq 1) \\ &= \frac{n^2}{2} - \frac{n^3(n^2 - 1)}{2n(n^2 + 1)} = \frac{n^2}{n^2 + 1} \end{aligned}$$

Như vậy

$$\begin{aligned} \left(n + \frac{1}{n}\right) \sqrt{n^2 + \frac{1}{n^2}} \left(\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{1+x_i^2}\right) &\leq \\ &\leq \left(n + \frac{1}{n}\right) \cdot \sqrt{n^2 + \frac{1}{n^2}} \cdot \frac{n^2}{n^2 + 1} = \sqrt{n^4 + 1} \quad (2) \end{aligned}$$

Cũng theo BĐT Bu-nhi-a-côp-xki

$$\sqrt{\left(\frac{1}{n^2} + n^2\right) \left(x_i^2 + \frac{1}{x_i^2}\right)} \geq \frac{x_i}{n} + \frac{n}{x_i}, \text{ suy ra}$$

$$\sqrt{x_i^2 + \frac{1}{x_i^2}} \geq \frac{n}{\sqrt{n^4 + 1}} \left(\frac{x_i}{n} + \frac{n}{x_i}\right)$$

Do đó

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i^2 + \frac{1}{x_i^2}} &\geq \frac{1}{\sqrt{n^4 + 1}} \left(\sum_{i=1}^n x_i + n^2 \cdot \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}\right) \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{n^4 + 1}} \left(\sum_{i=1}^n x_i + \frac{n^4}{\sum_{i=1}^n x_i}\right) \quad (\text{theo nhận xét 1}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n^4 + 1}} \left(\sum_{i=1}^n x_i + \frac{1}{\sum_{i=1}^n x_i} + \frac{n^4 - 1}{\sum_{i=1}^n x_i}\right) \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{n^4 + 1}} \cdot \left(2 + \frac{n^4 - 1}{1}\right) = \sqrt{n^4 + 1} \quad (3) \end{aligned}$$

Từ (2) và (3) ta có BĐT (1).

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = \frac{1}{n}.$$

Nhận xét. Bài toán trên là một BĐT dạng cơ bản, hay. Hầu hết các bạn học sinh gửi lời giải tới tòa soạn phải dùng kiến thức của đạo hàm và hàm lồi.

Các bạn sau có lời giải tốt: **Bắc Ninh:** Ngô Quốc Duy, 10A1, THPT Lý Thái Tổ, Từ Sơn; **Hà Tây:** Nguyễn Phương Đăng Toàn, Phí Quốc Tuấn, 9D, THCS Thạch Thất, Tô Quang Ngọc, 10T, THPT Sơn Tây, Hoàng Thế Duy, 10A1, THPT Ngọc Tảo, Phú Thọ. **Vĩnh Phúc:** Ngô Thị Bích Phương, 9A, THCS Yên Lạc; **Thái Bình:** Nguyễn Văn Thành, 10A1, THPT Nam Tiến Hải; **Thanh Hóa:** La Tiến Nam, 10A1, THPT Thiệu Hóa; ...

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T11/333. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $F = \sin A \cdot \sin^2 B \cdot \sin^3 C$ **trong đó** A, B, C **là ba góc của một tam giác.**

Lời giải. (Của bạn Hoàng Khắc Hiếu, 12A1, THPT Nguyễn Xuân Ôn, Diên Châu, **Nghệ An**)

Trước hết, xin nhắc lại không chứng minh một nhận xét quen thuộc.

Nhận xét. Cho tam giác ABC . Với mọi x, y, z dương ta có:

$$\begin{aligned} yz \cos 2A + zx \cos 2B + xy \cos 2C &\geq -\frac{x^2 + y^2 + z^2}{2} \\ \text{Đẳng thức xảy ra} &\Leftrightarrow \frac{\sin 2A}{x} = \frac{\sin 2B}{y} = \frac{\sin 2C}{z}. \end{aligned}$$

Trở lại việc giải bài toán. Với mọi x, y, z dương, theo BĐT Cô-si và nhận xét trên, ta có :

$$\begin{aligned} F &= \sin A \cdot \sin^2 B \cdot \sin^3 C = \sqrt{\sin^2 A \cdot \sin^4 B \cdot \sin^6 C} \\ &= \sqrt{\frac{1}{yz} \cdot \left(\frac{2}{3x}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{xy}\right)^3 \cdot yz \sin^2 A \left(\frac{1}{2} z x \sin^2 B\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3} x y \sin^2 C\right)^3} \\ &\leq \sqrt{\frac{1}{yz} \cdot \left(\frac{2}{3x}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{xy}\right)^3} \times \\ &\quad \times \left(\frac{yz \sin^2 A + zx \sin^2 B + xy \sin^2 C}{6}\right)^3 \\ &= \frac{6\sqrt{3}}{x^2 \sqrt{x} \cdot y \cdot z \sqrt{3}} \times \\ &\quad \times \left(\frac{yz(1-\cos 2A) + zx(1-\cos 2B) + xy(1-\cos 2C)}{12}\right)^3 \\ &\leq \frac{6\sqrt{3}}{x^2 \sqrt{x} \cdot y \cdot z \sqrt{3}} \times \left(\frac{yz + zx + xy + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2}}{12}\right)^3 \\ \text{Vậy : } F &\leq \frac{6\sqrt{3}}{x^2 \sqrt{x} \cdot y \cdot z \sqrt{3}} \cdot \frac{(x+y+z)^6}{24^3} (*) \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra ở (*)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} yz \sin 2A = \frac{1}{2} zx \sin 2B = \frac{1}{3} xy \sin 2C \\ \frac{\sin 2A}{x} = \frac{\sin 2B}{y} = \frac{\sin 2C}{z} \end{cases} \quad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra :

$$\frac{\operatorname{tg} A}{1} = \frac{\operatorname{tg} B}{2} = \frac{\operatorname{tg} C}{3} \quad (3)$$

$$\Rightarrow \frac{\operatorname{tg} A}{1} \cdot \frac{\operatorname{tg} B}{2} \cdot \frac{\operatorname{tg} C}{3} = \left(\frac{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C}{1+2+3}\right)^3$$

$$\Rightarrow \frac{\operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C}{6} = \left(\frac{\operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C}{6}\right)^3$$

(vì $\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C$)

$$\text{Suy ra : } \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C = 1 \quad (4)$$

$$\text{Từ (3), (4) suy ra : } \operatorname{tg} A = 1, \operatorname{tg} B = 2, \operatorname{tg} C = 3 \quad (5)$$

$$\text{Từ (1), (2), (5) suy ra : } \sin 2A = 1 ; \sin 2B = \frac{4}{5} ;$$

$$\sin 2C = \frac{3}{5} \Rightarrow x : y : z = 5 : 4 : 3 \quad (6)$$

Có duy nhất một tam giác ABC thỏa mãn (5) (bạn đọc tự kiểm tra).

Ngược lại, khi tam giác ABC thỏa mãn (5), các số x, y, z thỏa mãn (6), dễ thấy (1), (2) đúng và tất nhiên đẳng thức xảy ra ở (*).

Thế (6) vào (*), ta có :

$$F \leq \frac{27}{25\sqrt{5}} \quad (**)$$

Theo sự phân tích trên, đẳng thức xảy ra ở (**) $\Leftrightarrow$ tam giác ABC thỏa mãn (5).

$$\text{Vậy, giá trị lớn nhất của } F \text{ là } \frac{27}{25\sqrt{5}}$$

Nhận xét. Bằng phương pháp trên, ta có thể giải bài toán tổng quát sau.

Cho ba số $m, n, p \in \mathbb{N}^*$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $F = \sin^m A \cdot \sin^n B \cdot \sin^p C$ trong đó A, B, C là ba góc của một tam giác.

Kết quả cụ thể là F nhận giá trị lớn nhất khi tam giác ABC thỏa mãn điều kiện :

$$\frac{\operatorname{tg} A}{m} = \frac{\operatorname{tg} B}{n} = \frac{\operatorname{tg} C}{p} = \sqrt{\frac{m+n+p}{mnp}}$$

và giá trị lớn nhất đó bằng :

$$\sqrt{\frac{m^m \cdot n^n \cdot p^p (m+n+p)^{m+n+p}}{(m+n)^{m+n} \cdot (n+p)^{n+p} \cdot (p+m)^{p+m}}}$$

Nhận xét. 1) Đây là bài toán khó. Chỉ có 22 bạn tham gia giải, 10 bạn giải sai.

2) Các bạn giải sai đều mắc một lỗi chung là sử dụng

$$\text{BĐT : } \sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Xin lưu ý rằng : F nhận giá trị lớn nhất khi tam giác ABC không phải là tam giác đều. Vì vậy, sử dụng BĐT trên, chắc chắn không đi đến kết quả.

3) Bạn **Nguyễn Quốc Hưng**, 11A3, THPT Dân lập Duy Tân, TP Tuy Hòa, **Phú Yên** có một lời giải thuần túy đại số khá đẹp.

4) Xin nêu tên 10 bạn có lời giải đúng : **Hưng Yên** : **Bùi Quang Huy**, 11T, THPT chuyên Hưng Yên ; **Hà Tây** : **Dương Minh Hùng**, 10T, THPT chuyên Nguyễn Huệ ; **Đắk Lắk** : **Lê Đức Quang**, 10CT, THPT chuyên Nguyễn Du, TP Buôn Ma Thuột ; **Hải Dương** : **Hoàng Văn Hùng**, 11A1, THPT Kinh Môn, Kinh Môn ; **Thanh Hóa** : **Trịnh Khắc Hùng**, 10A5, THPT Nông Cống I, Nông Cống ; **Phú Thọ** : **Nguyễn Quang Huy**, 11A1, THPT chuyên Hùng Vương, TP Việt Trì ; **Quảng Bình** : **Phạm Tiến Đồng**, 10T, THPT chuyên Quảng Bình, TX Đồng Hới ; **Vĩnh Phúc** : **Trần Trung Dũng**, 10A1, Lê Trường Sơn, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc ; TP Vinh

Yên ; **Cần Thơ** : Võ Quốc Bá Cẩn, 11A1, THPT chuyên Lý Tự Trọng, TP Cần Thơ.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài T12/333. Cho tứ diện $ABCD$ nội tiếp một mặt cầu tâm O và gọi G là trọng tâm của tứ diện. Lấy điểm M nằm bên trong hoặc trên mặt của hình cầu đường kính OG . Các đường thẳng MA, MB, MC, MD cắt mặt cầu tâm O lần nữa tại các điểm A_1, B_1, C_1, D_1 theo thứ tự. Chứng minh rằng $V(A_1B_1C_1D_1) \geq V(ABCD)$, trong đó kí hiệu V chỉ thể tích của tứ diện.

Lời giải. Trước hết, ta nêu Bổ đề sau :

$$\frac{v(ABCD)}{v(A_1B_1C_1D_1)} = \frac{MA.MB.MC.MD}{MA_1.MB_1.MC_1.MD_1} \quad (1)$$

Nội dung bổ đề này chính là bài toán T10/289 (TH&TT, 7/2001) ; vì vậy xin không nhắc lại chứng minh đẳng thức (1) ở đây.

Gọi (Q) là mặt cầu đường kính OG ta có :

$$|\mathcal{P}_{M(Q)}| = MA.MA_1 = MB.MB_1 = MC.MC_1 = MD.MD_1 = R^2 - OM^2 ;$$

$$\begin{aligned} \text{Từ đó suy ra : } & \frac{MA}{MA_1} + \frac{MB}{MB_1} + \frac{MC}{MC_1} + \frac{MD}{MD_1} \\ &= \frac{MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2}{R^2 - OM^2} \quad (2) \end{aligned}$$

Mặt khác, ta có :

$$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 &= \\ (\overline{OA} - \overline{OM})^2 + (\overline{OB} - \overline{OM})^2 + (\overline{OC} - \overline{OM})^2 + \\ (\overline{OD} - \overline{OM})^2 &= \\ = 4(R^2 + OM^2) - 8\overline{OG} \cdot \overline{OM} &= \\ = 4(R^2 - OM^2) + 8\overline{MO} \cdot \overline{MG} & \quad (\forall M) \end{aligned} \quad (3)$$

Lại vì điểm M nằm trong hoặc nằm trên mặt cầu (Q) nên $\overline{MO} \cdot \overline{MG} \leq 0$ (vì $\cos(\overline{MO}, \overline{MG}) \leq 0$ do $(\overline{MO}, \overline{MG}) \geq 90^\circ$), thành thử :

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 \leq 4(R^2 - OM^2) \quad (3')$$

Từ (2) và (3'), áp dụng BĐT về trung bình cộng và trung bình nhân, ta được

$$\begin{aligned} 4 &\geq \frac{MA}{MA_1} + \frac{MB}{MB_1} + \frac{MC}{MC_1} + \frac{MD}{MD_1} \\ &\geq 4 \sqrt{\frac{MA.MB.MC.MD}{MA_1.MB_1.MC_1.MD_1}} \quad (4) \end{aligned}$$

Suy ra :

$$MA_1.MB_1.MC_1.MD_1 \geq MA.MB.MC.MD \quad (5)$$

Cuối cùng, đối chiếu (1) và (5) ta thu được BĐT cần tìm : $v(A_1B_1C_1D_1) \geq v(ABCD)$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\overline{MO} \cdot \overline{MG} = 0$, $MA^2 = MB^2 = MC^2 = MD^2$ hay M trùng với tâm O của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

Nhận xét. 1) Từ hệ thức (3) (đúng với mọi điểm M trong không gian, ta suy ra

$$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 &\leq 4(R^2 - OM^2) \\ \Leftrightarrow \overline{MO} \cdot \overline{MG} &\leq 0 \quad (3') \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (\overline{MO}, \overline{MG}) = \widehat{OMG} \geq 90^\circ$$

$\Leftrightarrow M$ thuộc hình cầu đặc (Q) đường kính OG .

Đối chiếu (2) và (3') ta thu được kết quả sau :

Quý tích những điểm M trong không gian sao cho

$$T = \frac{MA}{MA_1} + \frac{MB}{MB_1} + \frac{MC}{MC_1} + \frac{MD}{MD_1} \leq 4 \quad (4')$$

là hình cầu đặc (hoặc hình cầu đóng) tâm Q , đường kính OG , bao gồm cả mặt cầu (O) là quỹ tích những điểm M sao cho $T = 4$.

Đây là bài toán quỹ tích trong không gian, tương tự với bài toán quỹ tích trong mặt phẳng mà chúng ta đã gặp trong Bài toán T9/183 (như bạn Nguyễn Văn Hậu, 11A1, THPT Yên Dũng, Bắc Giang đã chỉ ra).

2) Bạn Nguyễn Công Khanh, 11⁴ THPT Vinh Lộc, Phú Lộc, Thừa Thiên - Huế và một số bạn khác cũng chỉ ra rằng nếu M trùng với G thì ta gặp lại bài toán T10/277. và dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi G trùng với O , tức là khi và chỉ khi $ABCD$ là một tứ diện đều. Hai bạn Trịnh Văn Nam, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An và Nguyễn Thành Công, 11A1, THPT Lý Tự Trọng, TP Cần Thơ còn nhận xét rằng trong hình học phẳng đã có hai kết quả tương tự (khi thay tứ diện $ABCD$ bởi tam giác ABC , $v(ABCD)$ bởi diện tích $s(ABC)$). Đó là hai bài toán đã gặp trong tạp chí TH&TT :

$$a) \frac{s(ABC)}{s(A_1B_1C_1)} = \frac{MA.MB.MC}{MA_1.MB_1.MC_1} ;$$

b) Nếu M thuộc hình tròn đóng (Q) đường kính OG thì : $s(A_1B_1C_1) \geq s(ABC)$.

3) Ngoài bốn bạn trên đây, các bạn sau có lời giải tốt :

Vinh Phúc : Trần Văn Huỳnh, 10A1, THPT Ngô Gia Tự, Lập Thạch, Nguyễn Văn Ngọc, 10A1, THPT chuyên Vinh Phúc ; **Phú Thọ** : Nguyễn Quang Huy, 11A1, THPT chuyên Hùng Vương, Việt Trì ; **Hà Tây** : Trịnh Ngọc Tú, 10 Toán, THPT chuyên Nguyễn Huệ, Hà Đông ; **Hải Dương** : Nguyễn Phấn Hai, 11A1, THPT Kinh Môn, Vũ Văn Thiên, 10A2, THPT Nam Sách ; **Hưng Yên** : Bùi Quang Huy, 11 Toán, THPT chuyên Hưng Yên ; **Thanh Hóa** : Lê Thị Hạnh, 8A5, THCS Quang Trung, TP Thanh Hóa ; **Bùi Khắc Kiên**, 11T, THPT Lam Sơn ; **Nghệ An** : Nguyễn Viết Khôi, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh, Hoàng Khắc Hiếu, 12A1, THPT Nguyễn Xuân Ôn, Diễn Châu ; **Phú Yên** :

Nguyễn Quốc Hưng, 11A3, THPT Dân lập Duy Tân, TP Tuy Hòa ; **Quảng Ngãi** : *Thới Thanh Tân*, 11A9, THPT số 1, Đức Phổ.

NGUYỄN ĐĂNG PHÁT

Bài L1/333. Một con kiến bò xa tổ theo một đường thẳng. Vận tốc của nó có độ lớn tỉ lệ nghịch với khoảng cách đến tâm tổ. Khi kiến ở điểm A cách tâm tổ $l_1 = 1\text{m}$ thì vận tốc của nó là $V_1 = 2\text{cm/s}$. Sau bao lâu nó đến điểm B cách tâm tổ $l_2 = 2\text{m}$?

Lời giải. Theo đề bài ta có $v = \frac{k}{l}$ với k là hằng số. Tại A có $v_1 = \frac{k}{l_1} \Rightarrow k = v_1 l_1$.

Ta có : $dl = vdt = \frac{k}{l} dt = \frac{v_1 l_1}{l} dt$. Từ đó

$$\int_{l_1}^{l_2} dl = v_1 l_1 \int_0^t dt. \text{ Suy ra } t = \frac{l_2^2 - l_1^2}{2v_1 l_1} = 75(\text{s})$$

Nhận xét. Các bạn có lời giải và đáp số đúng :

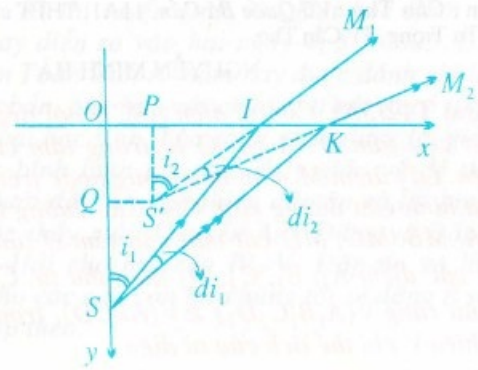
Vĩnh Phúc : *Trần Ngọc Linh*, 11A3, THPT chuyên Vĩnh Phúc ; **Bắc Giang** : *Dương Trung Hiếu*, 12B, THPT chuyên Bắc Giang ; **Phú Thọ** : *Nguyễn Hữu Toán*, 10 Lí, THPT chuyên Hùng Vương ; **Nghệ An** : *Nguyễn Trung Quân*, 10A3, THPT Phan Bội châu, *Nguyễn Đình Phụng*, 11G, THPT Nghĩa Đàn ; **Quảng Trị** : *Lê Thanh Tú Nhân*, 11 Lí, THPT chuyên Lê Quý Đôn ; **Hà Tĩnh** : *Trương Hữu Vũ*, LíK10, THPT chuyên Hà Tĩnh ; **Thái Nguyên** : *Chu Tuấn Anh*, 11 Lí, Ngô Thu Hà, Lí 11, THPT chuyên Thái Nguyên ; **Hưng Yên** : *Đoàn Diệu Thúy*, 11 Lí, *Nguyễn Mạnh Tuấn*, 12 Lí, THPT chuyên Hưng Yên ; **Hà Nội** : *Nguyễn Tiến Hùng*, 11B chuyên Lí, ĐHKHTN – ĐHQG Hà Nội ; **Khánh Hòa** : *Nguyễn Ngọc Kỳ Nam*, 11 Lí, THPT Lê Quý Đôn ; **Tiền Giang** : *Trần Thị Mỹ Phương*, 12 Lí, THPT chuyên Tiền Giang ; **Yên Bái** : *Trần Đức Mỹ*, 11T, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành ; **Đắk Lắk** : *Nguyễn Thanh Nội*, 11CT, THPT Nguyễn Du, Buôn Ma Thuột.

MAI ANH

Bài L2/333. Một điểm sáng S đặt dưới nước và cách mặt nước là $SO = y = 2,4\text{m}$. Mắt M đặt ở phía trên mặt nước sao cho chùm tia sáng đi từ S tới mắt M có tia tới trung bình SI ứng với góc tới $\widehat{OSI} = 30^\circ$ (I nằm trên mặt nước). Mắt nhìn thấy ảnh S' của S. Hãy xác định vị trí của S' biết rằng mắt chỉ hứng được một chùm tia sáng rất hẹp phát ra từ S. Cho chiết suất của nước là $n = 1,33$.

Lời giải. Xét chùm tia sáng hẹp từ S tới mắt M với 2 tia sáng biên là SIM_1 và SKM_2 , với góc tới $\widehat{OSI} = i_1 = 30^\circ$, $\widehat{OSK} = i_1 + di_1$. Ta có :

$$IK = OK - OI = OS[\text{tg}(i_1 + di_1) - \text{tg}i_1] =$$



$$= OS.d(\text{tg}i_1) = OS \frac{di_1}{\cos^2 i_1} \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác } IK = PK - PI = PS' \frac{di_2}{\cos^2 i_2} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra : } PS' = OS \frac{di_1}{di_2} \cdot \frac{\cos^2 i_2}{\cos^2 i_1} \quad (3)$$

Để tính $\frac{di_1}{di_2}$ áp dụng định luật khúc xạ :

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2.$$

$$\text{Ta có } n_1(\cos i_1) di_1 = n_2(\cos i_2) di_2.$$

$$\text{Do đó } PS' = OS \frac{n_2 \cos^3 i_2}{n_1 \cos^3 i_1} \quad (5)$$

Mặt khác :

$$\cos i_2 = \sqrt{1 - \sin^2 i_2} = \frac{1}{n_2} \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i_1}$$

$$\text{và } \cos i_1 = \sqrt{1 - \sin^2 i_1}.$$

Vì vậy ta có :

$$y_S = PS' = \frac{OS}{n_1} \left(\frac{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i_1}{1 - \sin^2 i_1} \right)^{3/2} = 116 (\text{cm})$$

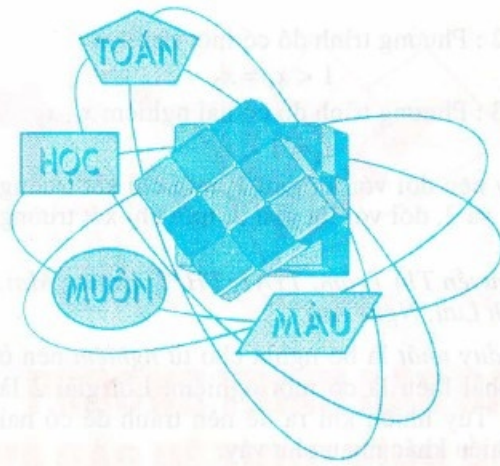
$$\text{Ta có : } \sin i_2 = \frac{n_1 \sin i_1}{n_2} = 0,665 \Rightarrow i_2 = 41^\circ,68$$

$$IP = PS' \text{tg} i_2 = 1,031 (\text{m}).$$

$$\text{Vậy } x_S = OP = OI - IP \approx 35,5(\text{cm}) \approx 36(\text{cm}).$$

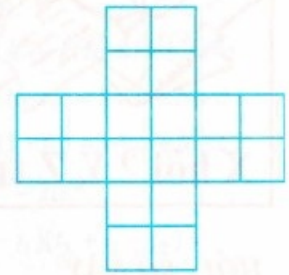
Nhận xét. Do đề bài in sót giá trị cụ thể của góc OSI nên chưa bạn nào xác định được vị trí của S'. Để bài lần này đã cho giá trị của góc OSI như trên.

MAI ANH



ĐẶT BI TRÊN BẢNG

Cho bảng chữ thập gồm 20 ô vuông (hình 1). Hỏi có thể đặt ít nhất bao nhiêu viên bi trên các ô vuông, mỗi ô không quá 1 viên bi, sao cho trong bất cứ 4 ô vuông nào mà tâm của chúng tạo thành 4 đỉnh của một hình vuông thì ít nhất có 1 ô vuông chứa bi.



Hình 1

Giải đáp: SẮP XẾP QUẦY HÀNG

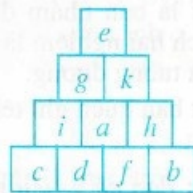
(Đề đăng trên THPT số 331 tháng 1.2005)

Kí hiệu 10 mặt hàng như ở hình 2.

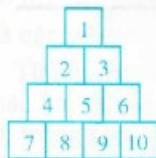
Nhận xét: Mặt hàng e tiếp giáp với 6 mặt hàng b, c, d, h, i, f nên không thể chuyển đổi cho nhau được. Như vậy chỉ có 3 cách chuyển ra là $e \rightarrow a, e \rightarrow g, e \rightarrow k$ và có 3 cách chuyển vào là $a \rightarrow e, g \rightarrow e, k \rightarrow e$.



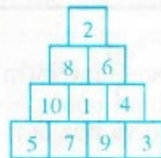
Hình 2



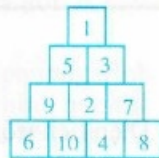
Hình 3



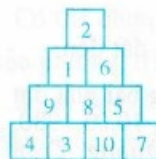
Kiểu A



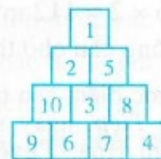
Kiểu B



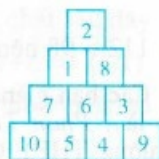
Kiểu C



Kiểu D



Kiểu E



Kiểu F

Cách chuyển $e \rightarrow g, e \rightarrow k$ chỉ là cách chuyển $e \rightarrow a$ rồi quay một góc 120° quanh tâm hình vuông e hoặc lấy đối xứng qua trục thẳng đứng,

nên chỉ xét một cách chuyển ra $e \rightarrow a$. Khi đó kết hợp với cách chuyển vào thì có 2 trường hợp: $a \rightarrow e$ hoặc $g \rightarrow e$ (trường hợp $k \rightarrow e$ chỉ là việc lấy đối xứng qua trục thẳng đứng của cách chuyển $g \rightarrow e$), vì vậy ta chỉ xét 2 trường hợp.

1) $e \rightarrow a$ và $a \rightarrow e$. Các vị trí b, c (h. 2) chỉ có thể đổi chỗ cho g, k , giả sử g ở bên trái k (h. 3). Vị trí d (h. 2) chỉ có thể là i (nếu là f dẫn đến mâu thuẫn). Từ đó hình 2 chuyển được thành hình 3 và nếu lấy đối xứng qua trục thẳng đứng hoặc quay một góc 120° quanh tâm của hình vuông ở chính giữa ta được thêm các hình khác.

2) $e \rightarrow a$ và $g \rightarrow e$. Lập luận tương tự như trên từ hình 2 chuyển được thành hình mới có các vị trí e, h, d nằm ở 3 đỉnh hình tam giác nhưng không thỏa mãn giả thiết là chỉ có mặt hàng số 1 hoặc số 2 luôn đặt trên cùng.

Vậy chỉ có 12 kiểu sắp xếp khác nhau là: A, B, C, D, E, F và 6 kiểu đối xứng qua trục thẳng đứng tương ứng của các kiểu trên là A', B', C', D', E', F' có mặt hàng số 1 hoặc số 2 ở trên cùng.

Tuy nhiên khi chuyển liên tiếp mà không lặp lại kiểu nào trước đó thì chỉ có thể đi qua 8 kiểu. Chẳng hạn:

$$A \rightarrow B \rightarrow A' \rightarrow B' \rightarrow C \rightarrow F' \rightarrow C' \rightarrow F$$

hoặc

$$A \rightarrow B' \rightarrow E \rightarrow B \rightarrow C' \rightarrow D' \rightarrow C \rightarrow D.$$

Bạn Nguyễn Mạnh Nhất, 11A1, THPT Thuận Thành I, Bắc Ninh có lời giải tốt được nhận tặng phẩm.

PHI PHI



HỎI - SỐ NÀY

1. (7.05). "Cho phương trình $x^2 + y^2 - 2ax - 2(a+1)y = 0$ (1). Chứng minh phương trình (1) là phương trình đường tròn với mọi a ".

a) Có ý kiến cho rằng chỉ cần chỉ ra $A^2 + B^2 - C = a^2 + (a+1)^2 > 0$ ($\forall a$) rồi suy ra kết luận.

b) Có ý kiến lại cho rằng đã là bài toán chứng minh thì phải làm rõ vì sao $a^2 + (a+1)^2 > 0$ ($\forall a$).

Chẳng hạn dấu bằng không xảy ra vì $\begin{cases} a=0 \\ a+1=0 \end{cases}$ dẫn đến vô lí.

Bạn cho biết ý kiến ?

(NKA, THPT Thanh Chương 3, Nghệ An)

TRẢ LỜI - NHỮNG SỐ TRƯỚC

1.(9.04). Đối với bài toán này, chúng ta phải xét đầy đủ cả ba trường hợp, lấy nghiệm là hợp của 3 trường hợp.

TH1 : Phương trình đó có hai nghiệm x_1, x_2 :

$$x_1 < 1 < x_2$$

TH2 : Phương trình đó có một nghiệm :

$$1 < x_1 = x_2.$$

TH3 : Phương trình đó có hai nghiệm x_1, x_2 :

$$x_1 = 1 < x_2.$$

Vậy nên đối với lời giải 1, mới chỉ xét trường hợp 1 và 3, đối với lời giải 2, mới chỉ xét trường hợp 2.

(Nguyễn Thị Trâm, 11A1, THPT Hoàng Mai, Quỳnh Lưu, Nghệ An)

Từ duy nhất là bỏ nghĩa cho từ nghiệm nên ở đây phải hiểu là có một nghiệm. Lời giải 2 là đúng. Tuy nhiên khi ra đề nên tránh để có hai cách hiểu khác nhau như vậy.

(Một bạn ở Nam Định không ghi tên)

2. (9.04). Phương trình bậc hai có tổng hai nghiệm là 7 và tích hai nghiệm là 14 thì phương trình đó theo định lí Viét phải là

$$x^2 - 7x + 14 = 0$$

Nhưng trong trường hợp này $\Delta < 0$ nên lại vô nghiệm. Cả hai câu trả lời $x^2 - 7x - 14 = 0$ hay $cx^2 - 7cx - 14 = 0$ đều sai.

(Nguyễn Thị Trâm, 11A1, THPT Hoàng Mai, Quỳnh Lưu, Nghệ An)

Chắc là bạn nhầm dấu và đề bài chưa đúng. Nếu tích hai nghiệm là -14 thì thật ra hai phương trình là tương đương.

(Một bạn quên ghi tên)

LTS: Bạn có ý kiến gì khác không ? Tòa soạn chờ câu trả lời của các bạn về các câu hỏi trong THPT số 330 (12.2004).

CUỘC THI VUI... (Tiếp bài 3)

Do $56 \times 2 = 112 > 98$ nên không cần chờ đất ở nơi khác đến

Cách 2. Đặt $R = 7$ và bán kính hình tròn nhỏ là $r = \frac{R}{2}$. Diện tích khuôn viên :

$$S = \pi R^2 = \frac{22}{7} \times 7^2 = 154 \text{ (m}^2\text{)}.$$

$$S_{vp(Out)} = \frac{\pi r^2}{4} - \frac{r^2}{2} = \frac{r^2}{2} \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) = 3,5 \text{ (m}^2\text{)}$$

Diện tích lát bê tông trong một vòng tròn nhỏ là $\pi r^2 - 4 \times 3,5 = \frac{49}{2} \text{ m}^2$.

Vậy diện tích cần lát bê tông là

$$4 \times \frac{49}{2} = 98 \text{ (m}^2\text{)}$$

Diện tích trồng cỏ và hoa là :

$$154 - 98 = 56 \text{ m}^2$$

Lượng đất này đủ rải được diện tích :

$$56 \times 2 = 112 \text{ m}^2.$$

$112 > 98$ nên không cần chờ thêm đất đến.

Các bạn giành được điểm cao trong bài giải đợt 1 là : Phan Trọng Tiệp, ngày sinh 10.03.1980, trường THPT Chiêm Hóa, Tuyên Quang, Trần Thị Thu Huyền, ngày sinh 12.03.1985, lớp K1, Tin 2, Đại học Lương Thế Vinh, Nam Định, Phan Phước Định, ngày sinh 03.07.1988, lớp 10A, THPT BC Hải Lăng, Quảng Trị ; Trần Đức Vượng, ngày sinh 01.01.1959, THCS Thắng Lợi, Sông Công, Thái Nguyên và một số bạn khác.

THTT



Giải đáp bài :

SỬ DỤNG CÔNG THỨC VECTO NHANH GỌN !

(Đề đăng trên THPT số 332, tháng 2.2005)

Lời giải kết luận $m = -2$ thì A, B, C, D lập thành một tứ giác là hoàn toàn sai lầm. Việc lập luận A, B, C, D lập thành một tứ giác $\Leftrightarrow \overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$ đồng phẳng là không chính xác, đây chỉ là điều kiện cần. Vì nếu A, B, C , hoặc A, C, D thẳng hàng thì các vectơ $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$ vẫn đồng phẳng nhưng bốn điểm A, B, C, D không lập thành một tứ giác. Chúng ta cũng có thể thấy ngay rằng với $m = -2$ thì $\overline{AD} = (-4, 4, 12)$, $\overline{AC} = (-1, 1, 3)$ dẫn đến $\overline{AD} = 4\overline{AC}$, suy ra A, C, D thẳng hàng, lúc đó A, B, C, D không thể lập thành một tứ giác được.

Có thể giải lại bài toán như sau :

Ta có A, B, C, D lập thành tứ giác

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD} \text{ đồng phẳng} \\ \text{Trong 4 điểm } A, B, C, D \text{ không có 3 điểm} \\ \text{nào thẳng hàng} \end{cases}$$

Kết luận : Không có giá trị nào của m thỏa mãn điều kiện bài toán.

THI KHU VỰC... (Tiếp trang 13)

Bài 6. Tính gần đúng các nghiệm của phương trình $4^x = 5 \sin x + 3x$.

Bài 7. Đường tròn $x^2 + y^2 + px + qy + r = 0$ đi qua ba điểm $A(5;4)$, $B(-2;8)$, $C(4;7)$. Tính giá trị của p, q, r .

Bài 8. Tính gần đúng tọa độ các giao điểm M và N của đường tròn $x^2 + y^2 - 8x + 6y = 21$ và

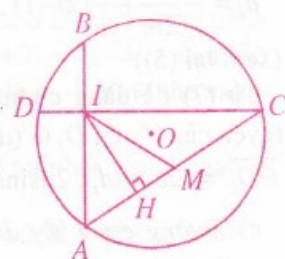
Những bạn sau có đáp án tốt hơn cả : Phan Đình Quân, 11B Toán, ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội ; Trần Văn Tổ, K28D, ĐHSP Hà Nội 2 ; Vinh Phúc ; Vũ Đình Duy, 11B6, THPT Sông Công, Thái Nguyên ; Lê Hà Kiệt, 12A2, THPT Đức Phổ I, Quảng Ngãi ; Dương Minh Tuấn, 11TL, THPT Nguyễn Bình Khiêm, Vĩnh Long.

NGỌC HIỂN

BÀI GIẢI QUÁ GỌN !

Trong giờ luyện tập giải toán hình học phẳng THCS giáo viên nêu bài toán : Cho đường tròn tâm O cố định, bán kính R không đổi và một điểm I cố định ở bên trong đường tròn đó. Hai dây cung AB và CD của đường tròn vuông góc với nhau tại I . Tìm giá trị lớn nhất của diện tích ΔIAC khi các dây cung AB và CD quay quanh I .

Học sinh trong lớp đã đưa ra một vài cách giải cho bài toán trên, trong đó có một cách như sau: Gọi IH và IM lần lượt là đường cao và trung tuyến của ΔIAC . Ta có $IH \leq IM$, mà $IM =$



$$\frac{1}{2}AC \text{ nên } IH \leq \frac{1}{2}AC \leq \frac{1}{2}(2R) = R.$$

$$\text{Do đó } S_{IAC} = \frac{1}{2}IH \cdot AC \leq \frac{1}{2}R \cdot 2R = R^2.$$

Vậy giá trị lớn nhất của diện tích ΔIAC là R^2 .

Một cách giải thật ngắn gọn ! Bạn thấy thế nào ?

NGUYỄN VĂN LẠC

(Phòng Giáo dục Tiên Lãng, Hải Phòng)

đường thẳng đi qua hai điểm $A(4;-5)$, $B(-5;2)$.

Bài 9. Gọi A và B là điểm cực đại và điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = x^3 - 5x^2 + 2x + 1$.

1) Tính gần đúng khoảng cách AB .

2) Đường thẳng $y = ax + b$ đi qua A và B . Tính giá trị của a và b .

Bài 10. Tìm nghiệm gần đúng của $\sin x \cos x + 3(\sin x + \cos x) = 2$.

MỘT SỐ ĐƯỜNG CONG DẠNG HÌNH HOA

(Tiếp bìa 3)

Thực vậy, từ (2) lấy đạo hàm bậc nhất theo t (xét $a = 1$) được :

$$(7) \begin{cases} x'(t) = m \cos(mt) \cdot \cos t - \sin t \cdot (1 + \sin mt) \\ y'(t) = m \cos(mt) \cdot \sin t + \cos t \cdot (1 + \sin mt) \end{cases}$$

$$(7') \begin{cases} x'(t_i) = m \cos(mt_i) \cdot \cos t_i \\ y'(t_i) = m \cos(mt_i) \cdot \sin t_i \end{cases}$$

Vậy phương tiếp tuyến của $\mathcal{D}_2$ tại O ứng với t_i là phương của $\overline{OA_i} = (2a \cos t_i; 2a \sin t_i)$.

b) Đường cong $\mathcal{D}_2$ tiếp xúc với vòng tròn $\mathcal{C}$ tại các điểm D_i ứng với các giá trị tham số :

$$d_i = -\frac{\pi}{2m} + \frac{\pi}{m}(2i-1), (i = 1, 2, \dots, m) \quad (8)$$

(xem lại (5))

Từ (7) dễ dàng chứng minh được vector tiếp tuyến của $\mathcal{D}_2$ tại $D_i (x'(d_i); y'(d_i))$ vuông góc với $\overline{OD_i} = (2a \cos d_i; 2a \sin d_i)$.

c) Đường cong $\mathcal{D}_2$ được chia thành m cung con $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \dots, \mathcal{C}_m$ ứng với các giá trị tham số trong các khoảng con α_i của $[0; 2\pi)$, ($i = 1, \dots, m$) với

$$\alpha_i = \left[-\frac{\pi}{2m} + \frac{2\pi}{m}(i-1); -\frac{\pi}{2m} + \frac{2\pi}{m}i \right) \quad (i = 1, \dots, m) \quad (9)$$

• Mỗi cung $\mathcal{C}_i$ nhận bán kính OD_i làm trục đối xứng và nội tiếp trong hình quạt tròn $OA_{i-1}A_i$ của vòng tròn $\mathcal{C}$.

Cách chứng minh như sau :

Trên cung $\mathcal{C}_i$ lấy điểm $M(t_1)$, $t_1 \in \alpha_i$, ta sẽ tìm được điểm $N(t_2)$ cũng thuộc cung $\mathcal{C}_i$, $t_2 \in \alpha_i$, sao cho M và N đối xứng với nhau qua bán kính OD_i (xem hình 1).

Trước hết chọn t_2 sao cho $t_1 + t_2 = 2d_i$ (nghĩa là góc $\widehat{MON}$ nhận OD_i làm đường phân giác). Sau đó chỉ cần chứng minh $\overline{MN} \perp \overline{OD_i}$, tức là $\overline{OD_i} \cdot \overline{MN} = 0$.

• Thực hiện phép quay tâm O , góc quay

$$\varphi = \frac{2\pi}{m} \quad (10)$$

thì cung $\mathcal{C}_i$ biến thành $\mathcal{C}_{i+1}$ ($i = 1, \dots, m-1$). Suy ra các cung con $\mathcal{C}_i$ đều có hình dạng, kích thước như nhau. Mỗi cung $\mathcal{C}_i$ có hình dạng một cách hoa. Từ đó ta suy ra hình dạng của $\mathcal{D}_2$.

d) Đường cong $\mathcal{D}_2$ có hình dạng một bông hoa m cánh hoa đều nhau (không phân biệt m chẵn hay lẻ). Mỗi cánh hoa $\mathcal{C}_i$ có trục đối xứng là bán kính OD_i của vòng tròn $\mathcal{C}$.

3. Sự giống nhau và khác nhau giữa hai đường cong $\mathcal{D}_1$ và $\mathcal{D}_2$.

a) Giống nhau : Hai đường cong đều có dạng một bông hoa có các cánh đều nhau. Mỗi cánh hoa đều nội tiếp trong một hình quạt tròn của vòng tròn $\mathcal{C}$ tâm O , bán kính $2a$. Mỗi cánh hoa đều có một trục đối xứng. Chúng là ảnh của nhau qua một phép quay tâm O .

b) Khác nhau :

• Với cùng một giá trị m trong phương trình (1) và (2), số cánh hoa của $\mathcal{D}_1$ là m hoặc $2m$ tùy thuộc m lẻ hay chẵn tương ứng, còn số cánh hoa của $\mathcal{D}_2$ là m không phân biệt m chẵn hay lẻ.

• Mỗi cánh hoa của $\mathcal{D}_2$ mập hơn mỗi cánh hoa của $\mathcal{D}_1$.

4. Các ví dụ. Để so sánh hai đường cong $\mathcal{D}_1$ và $\mathcal{D}_2$ chúng tôi trình bày hình ảnh của hai loại đường cong này với cùng một giá trị m .

Với $m = 2$, $\mathcal{D}_2$ có 2 cánh (hình 2b), còn $\mathcal{D}_1$ có 4 cánh (hình 2a).

Với $m = 3$, $\mathcal{D}_2$ có 3 cánh (hình 3b), còn $\mathcal{D}_1$ có 3 cánh (hình 3a).

Với $m = 4$, $\mathcal{D}_2$ có 4 cánh (hình 4b) và $\mathcal{D}_1$ có 8 cánh (hình 4a).

Với $m = 7$, $\mathcal{D}_2$ có 7 cánh (hình 5).

Với $m = 10$, $\mathcal{D}_2$ có 10 cánh (hình 6).

Với $m = 15$, $\mathcal{D}_2$ có 15 cánh (hình 7).

Các hình 3ab, 4ab, 5, 6, 7 được vẽ trên bìa 1 của sổ tạp chí này.



Ô SỐ

KỶ NIỆM 60 NĂM QUỐC KHÁNH

Ngày 2.9.2005 năm nay là tròn 60 năm Quốc khánh. Nhân dịp này CLB trình bày một bảng các ô số chứa các con số có ý nghĩa để thử tài bạn. Bạn cần có hiểu biết về nước Việt, cần một chút suy luận và cả may mắn nữa mới giải tốt ô số này.

Bạn cần chọn ra các con số theo dòng hoặc theo cột. Trong mỗi dòng lấy các con số từ trái sang phải, trong mỗi cột thì từ trên xuống dưới để lập được các số phù hợp với các câu gợi ý sau :

Dòng 1:

- Số tỉnh, thành có biển
- Số tỉnh, thành có đường biên giới trên đất liền
- Dân số Việt Nam (triệu người)
- Tuổi của Hà Nội tính từ Kinh đô Cổ Loa
- Mật độ dân số của tỉnh có mật độ cao nhất.

Dòng 2 :

- Dân số tỉnh có ít dân nhất
- Số thị xã nước ta
- Mật độ dân số trên 1km^2 của tỉnh có mật độ thấp nhất
- Diện tích tỉnh hẹp nhất.
- Tuổi của Hà Nội tính từ Thăng Long.

Dòng 3 :

- Số thị trấn của nước ta
- Diện tích một trong 3 tỉnh hẹp nhất.

Dòng 4 :

- Số tỉnh, thành phố thuộc trung ương
- Mật độ dân số trên 1km^2 nội thành Hà Nội.
- Số thành phố nước ta.

Dòng 5 :

- Dân số thị xã ít dân nhất.
- Mật độ dân số nội thành cao nhất trong các thành phố

- Dân số của tỉnh đông dân nhất

Cột 1 : Diện tích một trong 3 tỉnh hẹp nhất

Cột 2 : Mật độ dân số trên 1km^2 của TP thuộc trung ương có mật độ cao nhất.

Cột 3 : Số đô thị nước ta.

Cột 4 : Số thành phố thuộc trung ương.

Cột 8 : Năm kỉ niệm

Cột 9: Tuổi của đô thị cổ thứ hai sau Hà Nội.

Cột 10: Diện tích tỉnh rộng nhất.

Cột 13: Chiều dài bờ biển nước ta.

2	8	2	5	8	2	2	0	0	1	2	1	3
8	2	6	5	0	0	0	2	7	9	9	5	3
9	4	5	0	0	9	9	0	4	8	2	3	0
5	6	6	1	4	4	0	0	0	0	3	1	0
1	3	0	0	0	0	3	5	0	0	0	0	0

Các con số có thể được lấy lại để lập số khác.

Đáp án sẽ đăng trong THPT số 339 (9.2005.) Chúc các bạn giải được nhiều số nhất để nhận được quà của CLB.

VTT

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964

Số 337 (7-2005)

Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội

ĐT - Fax : 04.5144272

Email : toanhocvt@yahoo.com

TRONG SỐ NÀY

- 1 **Dành cho Trung học Cơ sở – For Lower Secondary Schools**
Thái Nhật Phương – Tìm cực trị của một biểu thức mà các biến có điều kiện ràng buộc.
- 2 **Singapore Mathematical Olympiad (SMO) 2005**
- 5 **Tìm hiểu sâu thêm toán học sơ cấp - Advanced Elementary Mathematics**
Tạ Duy Phương – Phương trình bậc ba và các hệ thức hình học trong tam giác
- 8 **Chuẩn bị thi vào Đại học – University Entrance Preparation**
Nguyễn Anh Dũng - Đặng Thanh Hải - Về cách giải đề thi tuyển sinh đại học môn Toán khối A năm 2005
- 10 **Toán học và đời sống – Mathematics and Life**
Phan Thanh Quang – Dáng điệu chiếc lá rơi.
- 11 **Diễn đàn dạy học toán - Math Teaching Forum**
- 12 **Trần Phương Dung** – Lượng giác trong Toán 9 và trong chương trình toán phổ thông.
- 14 **Nguyễn Thế Thạch - Tạ Duy Phương** - Thi khu vực giải toán trên máy tính CASIO lần thứ năm - 2005.
- 16 **Phương pháp giải toán - Math Problem Solving**
Lê Quang Trung - Ứng dụng của một bất đẳng thức trong tam giác.
- 18 **Đề ra kì này – Problems in This Issue**
T1/337, ..., T12/337, L1, L2/337.
- 20 **Giải bài kì trước – Solutions to Previous Problems.**
Giải các bài của số 333.
- 27 **Toán học muôn màu – Multifarious Mathematics**
- 28 **X hỏi ? Y, Z trả lời.**
- 29 **Sai lầm ở đâu ? - Where's the Mistake?**
- 31 **Câu lạc bộ – Math Club.**

Tổng biên tập :
PHAN ĐOÀN THOẠI

Chịu trách nhiệm xuất bản :
Chủ tịch HĐQT kiêm Tổng Giám đốc NXB Giáo dục
NGÔ TRẦN ÁI
Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập NXB Giáo dục
VŨ DƯƠNG THUY

Trưởng ban biên tập : NGUYỄN VIỆT HẢI.

Thư kí Tòa soạn : VŨ KIM THUY.

Biên tập : HỒ QUANG VINH.

Trì sư, Chế bản : VŨ ANH THU – NGUYỄN THỊ OANH.

Đại diện phía Nam : TRẦN CHÍ HIẾU, 231 Nguyễn Văn Cừ, Q. 5, Tp. Hồ Chí Minh.

ĐT : 08.8309049

ĐÓN ĐỌC THPT SỐ 338 (8.2005)

- Một số bài toán về tập hợp điểm thỏa mãn một bất đẳng thức hình học
- Một số phương pháp xác định giới hạn của dãy số
- Về một chứng minh mới của bài toán bốn màu
- Kết quả và đề thi Olympic Toán Quốc tế 2005.
- Phương trình bậc ba và các hệ thức hình học trong tam giác (tiếp theo)
- Kết quả Cuộc thi Xuân ra đề - Hè giải đáp.

Mời các bạn đặt mua tạp chí THPT tại Bưu điện.

THPT

MỘT SỐ ĐƯỜNG CONG DẠNG HÌNH HOA

TRẦN ĐÌNH VIỆN
(Hà Nội)

Tạp chí TH&TT số 305 tháng 11.2002 và số 332 tháng 2.2005 đã giới thiệu với bạn đọc đường cong *Hoa hồng nhiều cánh* có phương trình (PT) tham số đối với hệ tọa độ Đề-Các vuông góc Oxy trong mặt phẳng :

$$\begin{cases} x = 2a \cdot \sin(mt) \cdot \cos t \\ y = 2a \cdot \sin(mt) \cdot \sin t \end{cases} \quad (1)$$

trong đó a là hằng số dương, m là số tự nhiên ($m \geq 2$) cho trước, t là tham số.

Đường cong này có hình dạng một bông hoa m cánh đều nhau nếu m lẻ, hoặc $2m$ cánh đều nhau nếu m chẵn.

Từ đường cong *Hoa hồng nhiều cánh* ta xét một số đường cong tương tự cũng có dạng hình hoa. Để tiện sắp xếp và phân loại chúng, ta gọi đường có PT (1) nói trên là đường *Hoa đơn 1*, kí hiệu là $\mathcal{D}_1$. Dưới đây xin giới thiệu với bạn đọc đường cong *Hoa đơn 2*.

Đường cong Hoa đơn 2

1. *Phương trình*. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đề-các vuông góc Oxy , đường cong có PT tham số :

$$\begin{cases} x = a(1 + \sin(mt)) \cdot \cos t \\ y = a(1 + \sin(mt)) \cdot \sin t \end{cases} \quad (2)$$

trong đó a là hằng số dương, m là số tự nhiên ($m \geq 2$) cho trước, t là tham số, gọi là đường cong *Hoa đơn 2*, kí hiệu là $\mathcal{D}_2$.

Từ PT (2) của đường cong, ta suy ra :

- Chu kỳ của đường cong $\mathcal{D}_2$ là $T = 2\pi$ (không phân biệt m chẵn hay lẻ).

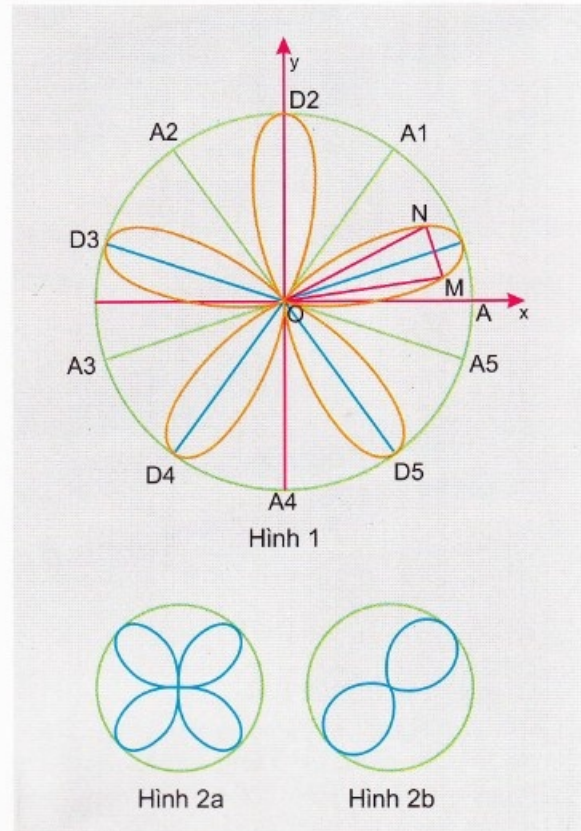
- $\mathcal{D}_2$ nhận trục tung Oy làm trục đối xứng.

2. Tính chất và hình dạng của đường cong $\mathcal{D}_2$

Trước hết từ (2) ta thấy x, y đồng thời triệt tiêu khi và chỉ khi $1 + \sin(mt) = 0 \Leftrightarrow mt = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

Suy ra, đường cong $\mathcal{D}_2$ đi qua gốc tọa độ O ứng với các giá trị tham số

$$t = -\frac{\pi}{2m} + \frac{2\pi}{m}k, (k \in \mathbb{Z}) \quad (3)$$



Gọi $\mathcal{C}$ là vòng tròn lượng giác tâm O , bán kính $2a$, với điểm đầu là $A(2a; 0)$. Trên $\mathcal{C}$ ta lấy các điểm A_i ($i = 1, 2, \dots, m$) (xem hình 1) sao cho

$$\widehat{AA_i} = -\frac{\pi}{2m} + \frac{2\pi}{m}i \quad (4)$$

Kí hiệu D_i là trung điểm của các cung $\widehat{A_{i-1}A_i}$ ($i = 1, 2, \dots, m$; coi A_0 trùng với A_m) ta có

$$\widehat{AD_i} = -\frac{\pi}{2m} + \frac{\pi}{m}(2i - 1), (i = 1, 2, \dots, m) \quad (5)$$

Từ đó suy ra một số tính chất của $\mathcal{D}_2$:

a) Trong một chu kỳ $[0, 2\pi)$, đường cong $\mathcal{D}_2$ đi qua điểm gốc m lần ứng với các giá trị tham số:

$$t_i = -\frac{\pi}{2m} + \frac{2\pi}{m}i \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (6)$$

đồng thời tiếp xúc với bán kính OA_i của vòng tròn $\mathcal{C}$ tại O .

(Xem tiếp trang 30)

Cuộc thi vui XUÂN RA ĐỀ, HÈ GIẢI ĐÁP

Cuộc thi đã đi được hơn nửa chặng đường. Nhiều bạn gửi bài về làm đúng được hết các câu hỏi. Bài được giải là bài không những đúng mà còn phải hay, ngắn gọn, sáng sủa. Số này chúng tôi đăng đáp án về 3 câu hỏi đợt 1 và danh sách một số bạn có lời giải tốt. Các bạn chờ đọc kết quả cuối cùng của cuộc thi đăng trên THPT số 328 (8.2005). Chúc các bạn may mắn.

Dưới đây là đáp án 3 bài của đợt 1.

BÀI 1. Cách 1. Dùng 2 công thức :

$$S = X - 1 + \left[\frac{X-1}{4} \right] - \left[\frac{X-1}{100} \right] + \left[\frac{X-1}{400} \right] + C$$

$$T = S - 7 \cdot \left[\frac{S}{7} \right] + 1$$

trong đó : X là năm, C là số thứ tự của ngày cần tính trong năm đó, T là thứ.

Năm 1964 nhuận nên :

$$S = 1963 + \left[\frac{1963}{4} \right] - \left[\frac{1963}{100} \right] + \left[\frac{1963}{400} \right] + 289 = 2727$$

$$T = 2727 - 7 \cdot \left[\frac{2727}{7} \right] + 1 = 5.$$

Vậy ngày 15.10.1964 là thứ năm.

Cách 2. (Theo Lê Quang Huy, 10 Toán, chuyên Lê Quý Đôn, TP Vũng Tàu).

Từ năm 1965 đến năm 2004 có 40 năm gồm 10 năm nhuận và 30 năm không nhuận.

Coi ngày 15.10.1964 là số 1 thì ngày 15.4.2005 là số :

$$17 + 30 + 31 + 365 \cdot 30 + 366 \cdot 10 + 31 + 28 + 31 + 15 = 14793$$

mà 14793 chia 7 dư 2 nên ngày 15.10.1964 là thứ năm (lùi 1 so với thứ 6 ngày 15.4.2005).

BÀI 2. Mỗi quân chuyển vào ô trống kề bên theo 4 hướng được kí hiệu như sau : trái (T), phải (P), lên trên (L), xuống dưới (X). Dưới đây là cách chuyển quân từ hình 1 sang hình 2 thỏa mãn tổng các số theo hàng ngang, theo cột dọc đều bằng 30 :

14X, 15X, 10P, 6P, 7L, 8L, 12T, 11X,
15T, 14L, 11P, 15X, 8P, 3P, 4L, 12T,
15T, 8X, 3P, 4P, 12L, 15T, 4X, 7X,
5X, 9T, 6L, 10T, 13X, 6P, 10L, 5P,
9X, 10T, 6T, 13L, 14L, 3P, 8L, 11T.

1	5	9	13
2	6	10	15
3	7	11	14
4	8	12	

Hình 1

1	10	6	13
2	9	5	14
12	7	8	3
15	4	11	

Hình 2

Chú ý rằng với mỗi ma phương khi đổi chỗ 2 hàng cho nhau (giữ nguyên thứ tự trong hàng) hoặc đổi chỗ 2 cột cho nhau (giữ nguyên thứ tự trong cột) thì lại được một ma phương, do đó có thể chọn ma phương sao cho hai quân ghi cùng một số của ma phương đó và hình 1 khá gần nhau thì theo việc chuyển quân đỡ phức tạp.

Lời giải trên là của bạn Nguyễn Đình Lai, 11A3, THPT Thuận Thành 1, Bắc Ninh, người lập kỉ lục về số bước chuyển quân ít nhất (40 bước), ít hơn số bước chuyển quân của tác giả bài này (42 bước, giữ nguyên vị trí các số 1, 2, 5, 6 ở hình 1), tiếp theo là cách chuyển của bạn Vũ Thị Hồng Hạnh, 6A, THCS Bắc Lệnh, Lào Cai (46 bước), Đoàn Hồng Quân, 11A2, THPT Sóc Sơn, Hà Nội (48 bước), Đỗ Xuân Bắc, P22, K48 học viện Phòng không Không quân Sơn Tây, Hà Tây (50 bước), ...

BÀI 3. Gọi O là tâm khuôn viên, X, Y là các tiếp điểm như hình vẽ. $R = 7$.

Cách 1.

$$\widehat{OIX} = \widehat{OIY} = 90^\circ.$$

Suy ra Y, I, X thẳng hàng. Kí hiệu S_{vp} là diện tích viên phân, S_q là diện tích hình quạt. $S_G = S_{vp(IaY)} + S_{vp(IaX)}$

$$\text{nên } S_G + S_C = S_{vp(YpX)}$$

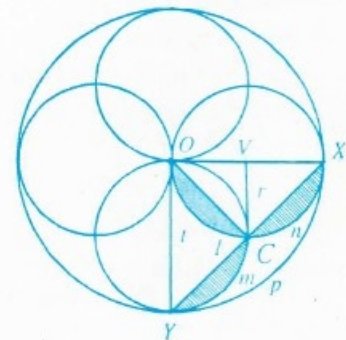
Diện tích phần định trồng cỏ và trồng hoa bằng 4 lần $S_{vp(YpX)}$ và bằng

$$S_1 = 4(S_{q(OXY)} - S_{\Delta OXY}) = 4\left(\frac{\pi R^2}{4} - \frac{R^2}{2}\right) = 56 \text{ (m}^2\text{)}.$$

Diện tích lát bê tông là

$$S_{\text{kiến}} - S_1 = \pi R^2 - 56 = \frac{22}{7} \times 7^2 - 56 = 98 \text{ m}^2.$$

(Xem tiếp trang 28)



ISSN : 0866-8035
Chỉ số : 12884
Mã số : 8BT39M5

Chế bản tại Tòa soạn
In tại Công ty CP in Diên Hồng, 187B Giảng Võ
In xong và nộp lưu chiểu tháng 7 năm 2005

Giá : 4000 đồng
Bốn nghìn đồng