

T. Huy

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC



TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

3 2005
SỐ 333

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 42
DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ
Trụ sở: 187 B Giảng Võ, Hà Nội. ĐT-Fax: (04) 5144272
Email: toanhocvt@yahoo.com



HỘI THI CÁN BỘ, GIÁO VIÊN THƯ VIỆN GIỎI TOÀN QUỐC LẦN THỨ HAI

Năm 2005 hướng tới Cuộc thi cán bộ, giáo viên thư viện giỏi toàn quốc lần thứ hai, các địa phương trên cả nước đang tổ chức Hội thi cấp tỉnh, thành phố như Lạng Sơn, Thái Nguyên, Ninh Bình, Hải Phòng, Hà Nội, Vĩnh Phúc, TP.Đà Nẵng, Quảng Trị, Tiền Giang, Cần Thơ, TP.Hồ Chí Minh...

Đây là hoạt động thiết thực nhằm nâng cao trình độ chuyên môn, nghiệp vụ của cán bộ, giáo viên thư viện trường học và động viên đội ngũ cán bộ, giáo viên thư viện trường học trong cả nước phát huy sáng kiến kinh nghiệm phục vụ yêu cầu nâng cao chất lượng dạy và học trong nhà trường.

Theo số liệu điều tra năm 2004 của Nhà xuất bản Giáo dục, hiện có 17.459 trường (trong tổng số 23.472 trường tham gia điều tra) có thư viện, đạt tỉ lệ 74%; trong đó mới chỉ có 4.169 trường (24%) đạt Tiêu chuẩn thư viện trường phổ thông do Bộ Giáo dục và Đào tạo ban hành. Trong số hơn 24.000 cán bộ, giáo viên thư viện, có 33% là cán bộ chuyên trách, còn lại là kiêm nhiệm.

Tại hội thi, mỗi thí sinh sẽ tham gia 2 phần thi chính: bài thi lý thuyết, tập trung vào các văn bản quy định về công tác thư viện trường học; thi giới thiệu sách và ứng xử trong các tình huống xảy ra trong hoạt động thư viện trường học.

Hội thi cấp quốc gia sẽ được tổ chức tại 3 khu vực: các tỉnh phía Nam, khu vực miền Trung và Tây Nguyên vào cuối tháng 3/2005; các tỉnh phía Bắc vào đầu tháng 4/2005.

Bài và ảnh: BẠCH KIM



Hội thi cán bộ, giáo viên thư viện giỏi tại Vĩnh Phúc



Hội thi cán bộ, giáo viên thư viện giỏi tại Hà Nội



SÁCH MỚI

Tòa soạn tạp chí Toán học và Tuổi trẻ vừa nhận được cuốn sách *Bài toán hàm số qua các kì thi Olympic*, Nhà xuất bản Giáo dục, 2004 của tác giả Nguyễn Trọng Tuấn, GV trường THPT Hùng Vương, Pleiku, Gia Lai.

Cuốn sách là một tài liệu giúp đỡ phần nào cho giáo viên và học sinh trong việc giảng dạy và bồi dưỡng học sinh giỏi. Nội dung chính của cuốn sách là các bài toán liên quan đến hàm số, giải phương trình hàm trên tập số thực và tập số rời rạc khác. Ngoài ra trong cuốn sách còn có một phần gồm các bài viết tìm hiểu sâu hơn về một số bài toán hàm số trong các kì thi toán.

Cảm ơn tác giả đã tặng sách và trân trọng giới thiệu với bạn đọc.

THTT



GIẢI PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỈ BẰNG CÁCH DÙNG CÁC BIỂU THỨC LIÊN HỢP

PHẠM BÁCH PHÚ

(SV lớp CLC K52 Toán, DHSP Hà Nội)

Việc giải phương trình (PT) có từ hai căn thức chứa biến trở lên thường không dễ dàng. Người ta đã đưa ra nhiều cách giải như nâng lên lũy thừa để làm mất căn, đặt căn thức làm ẩn số phụ, sử dụng các hằng đẳng thức phù hợp...

Trong bài này xin giới thiệu một phương pháp khác để giải phương trình vô tỉ đó là sử dụng biểu thức liên hợp. Ta đã biết $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=a-b$ với $a \geq 0, b \geq 0$ trong đó $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ và $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ là hai biểu thức liên hợp với nhau. Thực chất của phương pháp này là nếu nhân một biểu thức dạng $a \pm \sqrt{b}$ với biểu thức liên hợp mà xuất hiện một nhân tử chung với biểu thức khác của phương trình thì sau khi đặt nhân tử chung ta chuyển về giải phương trình đơn giản hơn:

Xin minh họa bằng các thí dụ dưới đây.

Thí dụ 1. Giải phương trình

$$\sqrt{4x+1} - \sqrt{3x-2} = \frac{x+3}{5} \quad (1)$$

Hướng dẫn giải: Điều kiện:

$4x+1 \geq 0$ và $3x-2 \geq 0$ suy ra $x \geq 2/3$. Từ đó $x+3 > 0$. Nhận xét thấy $(4x+1) - (3x-2) = x+3$ nên nếu nhân cả hai vế của PT (1) với biểu thức liên hợp với vế trái (biểu thức này luôn dương) thì xuất hiện nhân tử chung là $x+3$. Ta có:

$$(1) \Leftrightarrow x+3 = \frac{x+3}{5}(\sqrt{4x+1} + \sqrt{3x-2})$$

$$\Leftrightarrow (x+3)(\sqrt{4x+1} + \sqrt{3x-2} - 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{4x+1} + \sqrt{3x-2} = 5 \text{ do } x+3 > 0$$

PT cuối cùng có thể giải bằng cách bình phương hai vế hoặc so sánh giá trị của vế trái với 5 khi $\frac{2}{3} \leq x < 2$ và $x > 2$ để tìm thấy nghiệm duy nhất là $x = 2$. Thử lại ta thấy PT (1) có một nghiệm là $x = 2$.

Thí dụ 2. Giải phương trình

$$\sqrt{12x+13} - \sqrt{4x+13} = \sqrt{x+1} \quad (2)$$

Hướng dẫn giải. Điều kiện:

$12x+13 \geq 0, 4x+13 \geq 0, x+1 \geq 0$ suy ra $x \geq -1$. Nhân cả hai vế của PT (2) với biểu thức liên hợp với vế trái (biểu thức này luôn dương) được

$$8x = \sqrt{x+1}(\sqrt{12x+13} + \sqrt{4x+13})$$

$$\text{Từ (2) có } x+1 = \sqrt{x+1}(\sqrt{12x+13} - \sqrt{4x+13})$$

Trừ theo từng vế hai phương trình trên được

$$7x-1 = 2\sqrt{(x+1)(4x+13)}$$

Bình phương hai vế rồi giải phương trình ta

tìm được nghiệm là $x_1 = 3$ và $x_2 = \frac{-17}{33}$. Thử lại

ta thấy $x_2 = \frac{-17}{33}$ không thỏa mãn (2) và PT(2)

có nghiệm duy nhất là $x = 3$.

Chú ý rằng PT(2) có thể giải bằng cách bình phương hai vế hoặc chuyển một căn thức ở vế trái sang vế phải rồi bình phương hai vế sau đó đưa về giải PT bậc hai. Tuy nhiên ở đây vẫn nêu cách giải trên để thấy rằng phương pháp dùng biểu thức liên hợp vẫn sử dụng để giải được phương trình dạng $\sqrt{ax+b} - \sqrt{cx+d} = \sqrt{ex+f}$.

Thí dụ 3. Giải phương trình

$$\sqrt{2x^2+16x+18} + \sqrt{x^2-1} = 2x+4 \quad (3)$$

Hướng dẫn giải: Điều kiện $2x^2+16x+18 \geq 0, x^2-1 \geq 0$ suy ra $x \leq -4-\sqrt{7}, -4+\sqrt{7} \leq x \leq -1, x \geq 1$.

Nhận thấy rằng

$$(2x+4)^2 - (2x^2+16x+18) = 2(x^2-1),$$

ta viết (3) thành

$$\sqrt{x^2-1} = 2x+4 - \sqrt{2x^2+16x+18} \quad (4)$$

Thử thấy $x_1 = 1$ và $x_2 = -1$ là nghiệm của PT(4). Giả sử $x^2 \neq 1$. Nhân cả hai vế của PT(4) với biểu thức liên hợp với vế phải (biểu thức này khác 0 vì $x^2 \neq 1$) ta được

$$\sqrt{x^2-1}(2x+4+\sqrt{2x^2+16x+18}) = 2x^2-2$$

Từ (4) có

$$\sqrt{x^2-1}(2x+4-\sqrt{2x^2+16x+18}) = x^2-1$$

Cộng theo từng vế hai PT này được

$$4(x+1)\sqrt{x^2-1} = 3(x^2-1)$$

$$\text{hay } (x+1)(4\sqrt{x^2-1}-3x+3) = 0$$

Từ đó có nghiệm $x_1 = -1$.

Tiếp tục giải PT $4\sqrt{x^2-1} = 3x-3$ bằng cách bình phương hai vế, ta tìm được nghiệm $x_2 = -1$ và $x_3 = -25/7$. Nghiệm $x_3 = -25/7$ không thỏa mãn $3(x-1) \geq 0$ nên bị loại. Thử lại ta thấy PT(3) có hai nghiệm là $x_1 = 1$ và $x_2 = -1$.

Thí dụ 4. Giải phương trình

$$\sqrt{2x^2-1} + \sqrt{x^2-3x-2} = \sqrt{2x^2+2x+3} + \sqrt{x^2-x+2} \quad (5)$$

Hướng dẫn giải. Điều kiện: Các biểu thức $2x^2+2x+3$ và x^2-x+2 luôn luôn dương, hai biểu thức trong căn còn lại không âm dẫn đến

$$x \leq -\sqrt{2}/2 \text{ hoặc } x \geq (3+\sqrt{17})/2$$

Nhận thấy $2x^2-1 - (2x^2+2x+3) = -2(x+2) = x^2-3x-2 - (x^2-x+2)$ nên ta viết PT (5) trong dạng

$$\sqrt{2x^2-1} - \sqrt{2x^2+2x+3} = \sqrt{x^2-x+2} - \sqrt{x^2-3x-2} \quad (6)$$

Nhân theo từng vế PT trên với biểu thức liên hợp của cả vế trái và vế phải của PT(6) (để thấy các biểu thức này đều dương) được:

$$\begin{aligned} & -2(x+2)(\sqrt{x^2-x+2} + \sqrt{x^2-3x-2}) \\ & = 2(x+2)(\sqrt{2x^2-1} + \sqrt{2x^2+2x+3}) \quad (7) \end{aligned}$$

• Thử thấy $x = -2$ là nghiệm của PT (7) và thỏa mãn điều kiện ban đầu.

• Nếu $x \neq -2$ thì chuyển PT (7) về PT

$$\begin{aligned} & \sqrt{x^2-x+2} + \sqrt{x^2-3x-2} + \sqrt{2x^2-1} \\ & + \sqrt{2x^2+2x+3} = 0 \quad (8) \end{aligned}$$

Ta thấy với $x \leq -\sqrt{2}/2$ hoặc $x \geq (3+\sqrt{17})/2$ thì biểu thức ở vế trái của PT(8) đều không âm và có ít nhất một biểu thức dương nên vế trái của PT (8) dương, do đó PT(8) vô nghiệm.

Vậy $x = -2$ là nghiệm duy nhất của PT(5).

Thí dụ 5. Giải bất phương trình

$$\sqrt{x^2-3x+2} + \sqrt{x^2-4x+3} \geq 2\sqrt{x^2-5x+4} \quad (9)$$

Hướng dẫn giải: Điều kiện để các biểu thức trong căn không âm dẫn đến $x \leq 1$ hoặc $x \geq 4$.

Nhận thấy $x^2-3x+2 - (x^2-5x+4) = 2x-2 = 2(x^2-4x+3 - (x^2-5x+4))$ nên ta viết PT (9) trong dạng

$$\begin{aligned} & \sqrt{x^2-3x+2} - \sqrt{x^2-5x+4} + \sqrt{x^2-4x+3} \\ & - \sqrt{x^2-5x+4} \geq 0 \end{aligned}$$

Bất phương trình này tương đương với

$$\frac{2(x-1)}{\sqrt{x^2-3x+2} + \sqrt{x^2-5x+4}} + \frac{x-1}{\sqrt{x^2-4x+3} + \sqrt{x^2-5x+4}} \geq 0$$

(các mẫu thức đều dương):

Suy ra $x-1 \geq 0$ hay $x \geq 1$. Kết hợp với điều kiện ban đầu ta thấy bất phương trình có nghiệm là $x = 1$ và $x \geq 4$.

Các bạn hãy sử dụng phương pháp dùng biểu thức liên hợp để giải các PT và BPT sau:

- 1) $\sqrt{2x+1} + \sqrt{2x-3} = \sqrt{x+3} + \sqrt{x-1}$
- 2) $2 + \sqrt{3-8x} \geq 6x + \sqrt{4x-1}$
- 3) $\sqrt{2x^2+x-1} + \sqrt{3x^2+x-1} = \sqrt{x^2+4x-3} + \sqrt{2x^2+4x-3}$
- 4) $\sqrt{(x-n)(x-m+1)} + \sqrt{(x-n)(x-m)} \geq 2\sqrt{(x-n)(x-m-1)}$ với m, n thực
- 5) $\sqrt[3]{2-x} + \sqrt{x-1} = 1$.

Chờ đơn cuộc thi dành cho tất cả mọi người XUÂN RA ĐỀ - HÈ GIẢI ĐÁP

Bạn chưa làm được các bài trong Đề ra kì này vì khó quá? Bạn chưa tham gia thi giải toán bằng máy tính? Bạn vẫn có thể tham gia cuộc thi Vui và Giải trí mới trên THIT. Tất nhiên cả các bạn đã tham gia hai cuộc thi trên vẫn được tham dự. Cuộc thi dành cho tất cả mọi người. Xuân ra đề - Hè giải đáp sẽ có 6 câu hỏi đăng trên hai số báo tháng 4.2005 và 5.2005. Nhận bài giải lần lượt trong tháng 5, 6. Đáp án và danh sách các bạn được giải thưởng sẽ đăng trong hai số 337 (tháng 7.2005) và 338 (tháng 8.2005) Mong được các bạn hưởng ứng và thông tin cho nhiều người cùng biết. Bạn nhớ đặt báo tháng 4.2005 để biết thêm chi tiết về cuộc thi.

THIT

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10

TRƯỜNG THPT CHU VĂN AN VÀ THPT HÀ NỘI - AMSTERDAM 2004

Ngày thi thứ nhất : Dành cho mọi thí sinh

(Thời gian làm bài : 150 phút)

Bài 1. (2 điểm)

Cho biểu thức :

$$P = \left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} \right) \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{2} \right)^2$$

1. Rút gọn P

2. Tìm x để $\frac{P}{\sqrt{x}} > 2$

Bài 2. (2 điểm)

Cho phương trình :

$$x^2 - (m-2)x - m^2 + 3m - 4 = 0 \quad (m \text{ là tham số})$$

1. Chứng minh phương trình có 2 nghiệm phân biệt với mọi giá trị của m .

2. Tìm m để tỉ số giữa hai nghiệm của phương trình có giá trị tuyệt đối bằng 2.

Bài 3. (2 điểm).

Trên mặt phẳng tọa độ cho đường thẳng (d) có phương trình :

$$2kx + (k-1)y = 2 \quad (k \text{ là tham số})$$

1. Với giá trị nào của k thì đường thẳng (d) song song với đường thẳng $y = x\sqrt{3}$? Khi đó hãy tính góc tạo bởi (d) với tia Ox .

2. Tìm k để khoảng cách từ gốc tọa độ đến đường thẳng (d) là lớn nhất.

Bài 4. (4 điểm).

Cho góc vuông xOy và hai điểm A, B trên cạnh Ox (A nằm giữa O và B), điểm M bất kì trên cạnh Oy . Đường tròn (T) đường kính AB cắt tia MA, MB lần lượt tại điểm thứ hai là C, E . Tia OE cắt đường tròn (T) tại điểm thứ hai là F .

1. Chứng minh 4 điểm O, A, E, M nằm trên một đường tròn, xác định tâm của đường tròn đó.

2. Tứ giác $OCFM$ là hình gì ? Tại sao ?

3. Chứng minh hệ thức :

$$OE \cdot OF + BE \cdot BM = OB^2$$

4. Xác định vị trí của điểm M để tứ giác $OCFM$ là hình bình hành, tìm mối quan hệ giữa OA và AB để tứ giác là hình thoi.

Ngày thi thứ hai : Dành cho các thí sinh thi vào chuyên Toán - Tin

(Thời gian làm bài : 150 phút)

Bài 5. (2 điểm)

Chứng minh rằng số tự nhiên

$$A = 1.2.3 \dots 2003.2004 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2003} + \frac{1}{2004} \right)$$

chia hết cho 2005.

Bài 6. (2 điểm)

Cho phương trình: $x + 3(m - 3x^2)^2 = m$

1. Giải phương trình với $m = 2$.

2. Tìm m để phương trình có nghiệm.

Bài 7. (2 điểm).

Giải bất phương trình

$$\sqrt[3]{25x(2x^2+9)} \geq 4x + \frac{3}{x}$$

Bài 8. (3 điểm)

Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn, kẻ hai đường cao BE, CF .

1. Biết góc BAC bằng 60° , tính độ dài EF theo $BC = a$.

2. Trên nửa đường tròn đường kính BC không chứa E, F lấy một điểm M bất kì. Gọi H, I, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên BC, CE, EB . Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng

$$S = \frac{BC}{MH} + \frac{CE}{MI} + \frac{EB}{MK}$$

Bài 9. (1 điểm)

Cho một đa giác có chu vi bằng 1, chứng minh rằng có một hình tròn bán kính $r = \frac{1}{4}$ chứa toàn bộ đa giác đó.



GIÚP BẠN TỰ ÔN THI

ĐỀ ÔN LUYỆN SỐ 2

(Thời gian làm bài : 180 phút)

Câu I. 1) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số :

$$y = \frac{x^2 - x - 2}{x - 3}$$

2) Tính phần diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị của hàm số và trục hoành.

Câu II. 1) Giả sử a, b, c, d là các số thỏa mãn đẳng thức : $ab + 2(b+c+d) = c(a+b)$. Chứng minh rằng trong ba bất phương trình :

$$x^2 - ax + b \leq 0; \quad x^2 - bx + c \leq 0; \quad x^2 - cx + d \leq 0$$

ít nhất một bất phương trình có nghiệm.

2) Với những giá trị nào của a thì hệ phương

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 + 2 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = a \end{cases} \text{ có đúng hai nghiệm?}$$

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ ÔN LUYỆN SỐ 1

(Đề đã đăng trên THPT số 332, tháng 2 năm 2005)

Câu I. 1) Bạn đọc tự giải.

$$2) \text{ Ta có : } y' = \frac{x^2 - 2x + 3m - 3}{(x-1)^2}; \quad y' = 0 \Leftrightarrow f(x) = x^2 - 2x + 3m - 3 = 0 \quad (x \neq 1).$$

Hàm số có cực đại, cực tiểu khi PT $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 4 - 3m > 0 \\ f(1) = 3m - 4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < \frac{4}{3} \quad (1)$$

$$\text{Hàm số đã cho } y = \frac{x^2 - (5m-2)x + 2m+1}{x-1} = \frac{u}{v}$$

$$\text{có } y' = \frac{u'v - v'u}{v^2}.$$

Câu III. 1) Giải phương trình lượng giác :

$$\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x - \sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x = \frac{1}{2}$$

2) Cho $f(x) = (1 + x + x^3 + x^4)^4$. Sau khi khai triển và rút gọn ta được :

$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{16}x^{16}$. Hãy tính giá trị của hệ số a_{10} .

Câu IV. 1) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đề-các vuông góc Oxy cho elip (E) có phương

$$\text{trình } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\text{với } a > 0, b > 0).$$

Giả sử A, B là hai điểm thay đổi trên (E) sao cho OA vuông góc với OB .

a) Tính $\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2}$ theo a và b .

b) Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ O xuống AB . Tìm tập hợp các điểm H khi A, B thay đổi trên (E) .

2) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ với cạnh bằng a . Hãy tính khoảng cách giữa cạnh AA' và đường chéo BD' theo a .

Câu V. Cho x, y, z là những số dương thỏa mãn $xyz = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{x^9 + y^9}{x^6 + x^3y^3 + y^6} + \frac{y^9 + z^9}{y^6 + y^3z^3 + z^6} + \frac{z^9 + x^9}{z^6 + z^3x^3 + x^6}$$

PHẠM HÙNG

(GV ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội)

$$\text{Khi } y' = 0, \text{ thì } u'v - v'u = 0 \Rightarrow y = \frac{u}{v} = \frac{u'}{v'} = \frac{2x - 5m + 2}{2x - 5m + 2} \quad (2)$$

Giả sử hàm số có cực đại, cực tiểu tại $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$. Vì $y'(x_1) = 0, y'(x_2) = 0$ nên từ (2) suy ra $y_1 = 2x_1 - 5m + 2, y_2 = 2x_2 - 5m + 2$.

$$AB^2 = 5(x_1 - x_2)^2 = 5[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2] = 5[4 - 4(3m-3)] = 80 - 60m$$

$$AB < 2\sqrt{5} \Leftrightarrow AB^2 < 20 \Leftrightarrow 80 - 60m < 20 \Leftrightarrow m > 1 \quad (3)$$

Kết hợp (1) và (3), ta được : $1 < m < \frac{4}{3}$.

Câu II. 1) Ta có

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\cos x - \cos 3x} - 1}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\cos x - \cos 3x} - 1}{\cos x - \cos 3x} \cdot \frac{\cos x - 3\cos 3x}{x^2} \\ \text{Lại có: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\cos x - \cos 3x} - 1}{\cos x - \cos 3x} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1. \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin 2x \sin x}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} 4 \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \frac{\sin x}{x} = 4 \\ \text{Vậy } f'(0) &= 4 \end{aligned}$$

$$2) \text{ ĐK } \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \neq 0, \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \neq 0,$$

$$\text{tg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \neq 0, \text{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \neq 0.$$

$$\text{Do } \text{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cotg\left[\frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right] = -\cotg\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Rightarrow \text{tg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \cdot \text{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -1$$

$$\text{Ta được PT: } \sin^3 x \cdot \sin 3x + \cos^3 x \cdot \cos 3x = \frac{1}{8};$$

lại có

$$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x \Rightarrow 4\sin^3 x = 3\sin x - \sin 3x$$

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x \Rightarrow 4\cos^3 x = 3\cos x + \cos 3x$$

PT trở thành

$$(3\sin x - \sin 3x)\sin 3x + (3\cos x + \cos 3x)\cos 3x = \frac{1}{2}$$

$$3(\sin x \sin 3x + \cos x \cos 3x) + \cos^2 3x - \sin^2 3x = \frac{1}{2}$$

$$3\cos 2x + \cos 6x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 4\cos^3 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\cos 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{Nghiem } x = \frac{\pi}{6} + k\pi \quad (\text{loại vì } \text{tg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 0)$$

$$\text{Nghiem } x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \text{ thỏa mãn các ĐK bài toán.}$$

Câu III. 1) ĐK $x > -1, x \neq 0$

$$\text{BPT} \Leftrightarrow \frac{3}{\log_2(x+1)} > \frac{2}{\log_3 2 \cdot \log_3(x+1)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\log_2(x+1)} \left(3 - \frac{2}{\log_3 2}\right) > 0. \text{ Vì } 3 - \frac{2}{\log_3 2} < 0$$

$$\text{nên BPT} \Leftrightarrow \log_2(x+1) < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 0$$

$$2) \text{ Đặt } x\sqrt{3} = 2\sin t \Rightarrow x = \frac{2}{\sqrt{3}}\sin t, t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].$$

$$\text{Ta được: } dx = \frac{2}{\sqrt{3}}\cos t dt; \sqrt{4-3x^2} = 2\cos t;$$

$$x = 0 \Rightarrow t = 0; x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{3}. \text{ Do đó}$$

$$I = \frac{16}{3\sqrt{3}} \int_0^{\pi/3} \sin^2 t \cdot \cos^2 t \cdot dt = \frac{4}{3\sqrt{3}} \int_0^{\pi/3} \sin^2 2t \cdot dt =$$

$$\frac{2}{3\sqrt{3}} \int_0^{\pi/3} (1 - \cos 4t) dt = \frac{2}{3\sqrt{3}} \left(t - \frac{1}{4}\sin 4t\right) \Big|_0^{\pi/3} =$$

$$= \frac{2\pi}{9\sqrt{3}} + \frac{1}{12}$$

Câu IV. 1) Giả sử điểm $E(x, y)$ thỏa mãn $2\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB} = \vec{0}$ (1)

Ta có $\overrightarrow{EA} = (-x; 1-y), \overrightarrow{EB} = (3-x; 4-y)$. Từ (1) có $E(1; 2)$

$$2MA^2 + MB^2 = 2(\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EA})^2 + (\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EB})^2 = 3ME^2 + 2EA^2 + EB^2.$$

Vì $2EA^2 + EB^2$ không đổi nên $(2MA^2 + MB^2)$ có giá trị nhỏ nhất khi EM có giá trị nhỏ nhất, nghĩa là $EM \perp (d)$.

PT đường thẳng qua $E(1; 2)$ và vuông góc với (d) là $2(x-1) + y - 2 = 0 \Leftrightarrow 2x + y - 4 = 0$ (d_1)

Vì M là giao điểm của (d_1) và (d) nên $M(2; 0)$.

2) Tiêu điểm của parabol $F(-1; 0)$. Đường thẳng (Δ) qua F có PT:

$$a(x+1) + by = 0$$

Đường thẳng $y=0$ chỉ cắt parabol tại 1 điểm, không thỏa mãn bài toán. Chọn $a = 1 \Rightarrow x = -1 - by$. Tung độ giao điểm của parabol và đường thẳng (Δ) phải thỏa mãn PT

$$y^2 = -4(-1 - by) \Leftrightarrow y^2 - 4by - 4 = 0 \text{ luôn có 2 nghiệm } y_1 \neq y_2 \text{ thỏa mãn: } y_1 y_2 = -4.$$

Giả sử $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ là các giao điểm. PT tiếp tuyến với parabol tại A, B lần lượt là

$$y_1 y = -2(x_1 + x) \quad (d_1) \text{ và } y_2 y = -2(x_2 + x) \quad (d_2)$$

Ta có các vectơ pháp tuyến của $(d_1), (d_2)$ lần lượt là $\vec{n}_1 = (2; y_1); \vec{n}_2 = (2; y_2) \Rightarrow \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 4 + y_1 y_2 = 0$ hay $(d_1) \perp (d_2)$.

Câu V. a) Gọi số tạo thành là $\overline{abcde}$.

TH1. Số tạo thành chứa chữ số 0.

(Xem tiếp trang 9)



PHƯƠNG PHÁP TÁCH BỘ PHẬN KÉP ĐỂ TÌM GIỚI HẠN CỦA PHÂN THỨC CHỨA CĂN

PHẠM QUỐC PHONG
(GV THPT Hồng Lĩnh, Hà Tĩnh)

Trong bài *Phương pháp gọi số hạng vắng* trên tạp chí THPT số 262, tháng 4 năm 1999 đã nêu hai thuật toán để tìm giới hạn dạng $\frac{0}{0}$ của một số hàm số chứa căn thức. Nay

chúng tôi xin trình bày thêm *Phương pháp tách bộ phận kép*, đó là thuật toán thứ ba để xác định biểu thức chứa ẩn vắng mặt trong khi tìm giới hạn của phân thức chứa căn.

Nội dung phương pháp : Muốn tìm giới hạn

$$T = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt[m]{f(x)} - \sqrt[n]{g(x)}}{(x-a)^k} \quad (*) \text{ có dạng } \frac{0}{0} \quad (n, m, k$$

là các số tự nhiên, $1 \leq k \leq \min\{m, n\}$) ta biến đổi bằng cách thêm bớt biểu thức $\frac{h(x)}{(x-a)^k}$ vào

phân thức phải tìm giới hạn :

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt[m]{f(x)} - \sqrt[n]{g(x)}}{(x-a)^k} &= \frac{\sqrt[m]{f_1(x) + [h(x)]^m} - h(x)}{(x-a)^k} \\ &+ \frac{h(x) - \sqrt[n]{g_1(x) + [h(x)]^n}}{(x-a)^k} \\ &= \frac{f_1(x)}{(x-a)^k \cdot Q_f(x)} + \frac{g_1(x)}{(x-a)^k \cdot Q_g(x)} \end{aligned}$$

trong đó $Q_f(x)$, $Q_g(x)$ theo thứ tự là biểu thức liên hợp của $\sqrt[m]{f(x)} - h(x)$ và $h(x) - \sqrt[n]{g(x)}$.

Lúc đó

$$T = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(x)}{(x-a)^k \cdot Q_f(x)} + \lim_{x \rightarrow a} \frac{g_1(x)}{(x-a)^k \cdot Q_g(x)}$$

Điều quan trọng là chọn được $h(x)$ sao cho các giới hạn

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(x)}{(x-a)^k \cdot Q_f(x)}, \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{g_1(x)}{(x-a)^k \cdot Q_g(x)} \text{ có}$$

dạng xác định hoặc dạng quen thuộc.

Dưới đây là các thí dụ minh họa.

Thí dụ 1. Tìm giới hạn

$$T = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{8x^3 + x^2 + 6x + 9} - \sqrt[3]{9x^2 + 27x + 27}}{x^3}$$

Lời giải. Đặt $f(x) = 8x^3 + x^2 + 6x + 9 = 8x^3 + (x+3)^2$

$g(x) = 9x^2 + 27x + 27 = x^3 - (x+3)^3$, ở đây

$h(x) = x+3$

Viết lại

$$T = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{f(x)} - (x+3)}{x^3} + \frac{(x+3) - \sqrt[3]{g(x)}}{x^3} \right) \quad (1)$$

$$\text{Ta có } T_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{f(x)} - (x+3)}{x^3} =$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - (x+3)^2}{x^3(\sqrt{f(x)} + x+3)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x^3}{x^3(\sqrt{f(x)} + x+3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8}{\sqrt{f(x)} + x+3} = \frac{4}{3} \quad (2) \end{aligned}$$

$$T_2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+3) - \sqrt[3]{g(x)}}{x^3}$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+3)^3 - g(x)}{x^3[(x+3)^2 + (x+3)\sqrt[3]{g(x)} + \sqrt[3]{(g(x))^2}]} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(x+3)^2 + (x+3)\sqrt[3]{g(x)} + \sqrt[3]{(g(x))^2}} = \frac{1}{27} \quad (3) \end{aligned}$$

$$\text{Từ (1), (2), (3) ta có } T = \frac{4}{3} + \frac{1}{27} = \frac{37}{27}$$

Lưu ý. - Biểu thức $h(x)$ được xác định từ các biểu thức $f(x)$, $g(x)$ và được gọi là *bộ phận kép* trong bài toán tìm giới hạn dạng (*).

- Một vài số hạng của bộ phận kép $h(x)$ có thể bị ẩn trong $f_1(x)$, $g_1(x)$, ta phải tìm chúng để xác định chính xác biểu thức $h(x)$.

Thí dụ 2. Tìm giới hạn

$$T = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sqrt{\cos 2x + \sqrt[3]{1+3x}}}{2} - \sqrt[3]{\frac{\cos 3x + 3\cos x - \ln(1+x)}{4}}}{x}$$

Lời giải. Đặt $f(x) =$

$$= \frac{\cos 2x + \sqrt[3]{1+3x}}{2} = \cos^2 x + \frac{\sqrt[3]{1+3x} - 1}{2};$$

$$g(x) = \frac{\cos 3x + 3\cos x - \ln(1+x)}{4}$$

$$= \cos^3 x - \ln(1+x);$$

ở đây $h(x) = \cos x$.

$$\begin{aligned} \text{Viết lại } T &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{f(x)} - \sqrt[3]{g(x)}}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{f(x)} - \cos x}{x} + \frac{\cos x - \sqrt[3]{g(x)}}{x} \right) \quad (4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } T_1 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{f(x)} - \cos x}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \cos^2 x}{x(\sqrt{f(x)} + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sqrt[3]{1+3x} - 1}{2}}{2x(\sqrt{g(x)} + \cos x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt[3]{1+3x} - 1}{x} \cdot \frac{1}{2(\sqrt{g(x)} + \cos x)} \right) = \frac{1}{4} \quad (5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_2 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sqrt[3]{g(x)}}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^3 x - g(x)}{x(\cos^2 x + \cos x \sqrt[3]{g(x)} + \sqrt[3]{g^2(x)})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x(\cos^2 x + \cos x \sqrt[3]{g(x)} + \sqrt[3]{g^2(x)})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1+x)}{x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x + \cos x \sqrt[3]{g(x)} + \sqrt[3]{g^2(x)}} \right) = \frac{1}{3} \quad (6) \end{aligned}$$

$$\text{Từ (4), (5), (6) có } T = \frac{7}{12}.$$

Thí dụ 3. Tìm giới hạn

$$T = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos 2x - 2x} - \sqrt[4]{1+2x^2} - 4x}{x^2}$$

Lời giải. Đặt

$$f(x) = \cos 2x - 2x = (1-x)^2 - x^2 - 2\sin^2 x$$

$$\text{hay } f(x) - (1-x)^2 = -x^2 - 2\sin^2 x$$

$$g(x) = \sqrt{1+2x^2} - 4x = (1-x)^4 - x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 1 + \sqrt{1+2x^2},$$

$$\text{hay } (1-x)^4 - g(x) = (x^4 - 4x^3 + 6x^2 + 1) - \sqrt{1+2x^2},$$

ở đây $h(x) = 1-x$.

Viết lại

$$T = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{f(x)} - (1-x)}{x^2} + \frac{(1-x) - \sqrt[4]{g(x)}}{x^2} \quad (7)$$

Ta có

$$\begin{aligned} T_1 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{f(x)} - (1-x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - (1-x)^2}{x^2(\sqrt{f(x)} + 1-x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2 - 2\sin^2 x}{x^2(\sqrt{f(x)} + 1-x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1 - 2\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}{\sqrt{f(x)} + 1-x} = -\frac{3}{2} \quad (8) \\ T_2 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-x) - \sqrt[4]{g(x)}}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x^4 - 4x^3 + 6x^2 + 1) - \sqrt{1+2x^2}}{x^2[(1-x)^3 + (1-x)^2 \sqrt[4]{g(x)} + (1-x)\sqrt{g(x)} + \sqrt[4]{g^3(x)}]} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-x)^4 - g(x)}{x^2[(1-x)^3 + (1-x)^2 \sqrt[4]{g(x)} + (1-x)\sqrt{g(x)} + \sqrt[4]{g^3(x)}]} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 4x + 6 - \left(\frac{\sqrt{1+2x^2}}{x^2}\right)}{(1-x)^3 + (1-x)^2 \sqrt[4]{g(x)} + (1-x)\sqrt{g(x)} + \sqrt[4]{g^3(x)}} = \frac{5}{4} \quad (9) \end{aligned}$$

$$\text{Từ (7), (8), (9) có } T = -\frac{3}{2} + \frac{5}{4} = -\frac{1}{4}.$$

Mời các bạn thử sử dụng *phương pháp tách bộ phận kép* đã nêu để tìm các giới hạn sau

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} - \sqrt[3]{1+3x}}{x^2} \quad (\text{đề thi TS vào}$$

Trường Đại học Thủy Lợi Hà Nội, 2001)

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3+2x+x^2} - 2\cos 2x - \sqrt[4]{2+4x+x^3} - \sqrt{1+2x^2}}{x^2}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+52x+x} \cdot \ln(1+x) - \sqrt[3]{1+3x}}{3x^2}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{\sqrt{(1+2x)(1+x^2)} - \sqrt[3]{(1+3x)(1+3x^2)}}$$

BẠN CÓ BIẾT

GIMPS VÀ SỐ NGUYÊN TỐ MERSENNE LỚN NHẤT CHO ĐẾN NAY

Ngày 18/02/2005, Martin Nowak người Đức đã tìm ra số nguyên tố (SNT) lớn nhất được biết cho đến ngày nay, đó là số $2^{25.964.951}-1$. Số này có 7816230 chữ số và là số nguyên tố Mersenne thứ 42 được tìm thấy. Nếu nó được in ra kín trên mặt giấy A4 với cỡ font bình thường thì cũng mất tới hơn 1700 trang! Đây là lần thứ 8 kỷ lục về SNT lớn nhất được lập bởi Dự án tìm SNT Mersenne liên mạng (GIMPS). SNT Mersenne là các SNT có dạng $M_p = 2^p - 1$ với p là số nguyên tố, và cho đến nay người ta chỉ biết được 42 số như vậy. Việc tính toán để tìm ra SNT này đã mất hơn 50 ngày tính toán trên máy tính của bác sỹ Nowak (CPU Pentium IV, 2.4 GHz). SNT mới này được độc lập kiểm chứng cách sau 5 ngày bởi Tony Reix ở Grenoble, Pháp, có sử dụng chương trình Glucas của Guillermo Ballester Valor ở Granada, Tây Ban Nha.

Trước đó, SNT Mersenne thứ 40 được tìm thấy là $2^{20.996.011} - 1$ với 6.320.430 chữ số vào 17/11/2003 bởi Michael Shafer. Ngày 15/5/2004 Josh Findley đã tìm được SNT Mersenne thứ 41 là $2^{24036583} - 1$ gồm 7.235.733 chữ số.

Martin Nowak là một bác sỹ nhãn khoa ở Michelfeld, Đức. Ông biết tới GIMPS vào tháng 4/1999 khi đọc một bài viết ở báo địa phương. Ông là một người yêu thích Toán học, khởi đầu với một máy tính cá nhân tham gia vào GIMPS. Sáu năm sau, ông có 24 máy vi tính cùng tham gia vào GIMPS và vinh dự giờ đây đã đến với ông. Thực ra Nowak không tìm ra một mình mà có sự đóng góp của hàng chục trong số hàng ngàn tình nguyện viên của GIMPS. Danh tiếng cho khám phá mới này như vậy thuộc về "Nowak, Woltman, Kurowski, và nhiều người khác".

Dự án Tìm SNT Mersenne liên mạng (The Great Internet Mersenne Prime Search - viết tắt là GIMPS) được thành lập tháng 1/1996 bởi George Woltman nhằm xác lập các kỷ lục mới về độ lớn của SNT Mersenne. GIMPS kết hợp sức mạnh của hàng chục trong số hàng

ngàn máy tính thông thường để tìm ra "cái kim trong đồng rơm". Tiến sỹ Crandall đã phát triển thuật toán FFT dùng cho GIMPS. Người sáng lập Entropia, Scott Kurowski, đã phát triển hệ thống PrimeNet cho phép kết hợp rất nhiều máy tính chạy song song để được một "siêu máy tính ảo" có thể thực hiện 17 tỷ phép tính một giây. Chính điều này đã giúp GIMPS lập kỷ lục mới chỉ trong 9 tháng thay vì 1500 năm nếu như chạy trên một máy tính đơn lẻ!

Những người tham gia GIMPS đơn giản là do yêu thích và muốn tìm được SNT Mersenne mới, một số người hy vọng rằng sẽ đoạt được một phần của giải thưởng 100.000 USD của Quỹ tài trợ (Electronic Frontier Foundation) cho người tìm ra SNT đầu tiên với 10 triệu chữ số. Người đó sẽ nhận được 50.000 USD, Hội từ thiện sẽ nhận 25.000 USD và phần còn lại để tài trợ cho chính việc tìm ra các SNT lớn hơn. "Người tìm được số này có thể xuất hiện vào tuần tới hoặc cũng có thể là vài năm sau nữa, đó là sự hài hước trong khám phá Toán học!" - George Woltman nói. Năm 2000, một người tham gia GIMPS trước đó đã được nhận 50.000 USD cho việc tìm ra SNT có 1 triệu chữ số. "Sự kiên trì và làm việc theo nhóm rất cần cho sự thành công của chúng tôi... Xin chúc mừng và cảm ơn tới bác sỹ Nowak và tất cả 75.000 tình nguyện viên trên toàn thế giới đã làm nên sự thành công này" - Woltman bổ sung.

Bất cứ ai quan tâm với một máy vi tính nối mạng đều có thể tham gia vào GIMPS để trở thành một tay "săn số nguyên tố lớn"! Những phần mềm cần thiết có thể download miễn phí tại <http://www.mersenne.org>. Bạn đọc có thể tìm thấy các thông tin mới nhất của dự án GIMPS và các trang web liên quan tại trang web này. Các bạn có thể xem thêm về những số nguyên tố Mersenne trong THTT số 318 tháng 12.2003.

HÀN NGỌC ĐỨC
(K47A2 Toán Tin - ĐH KHTN Hà Nội)
(Theo <http://www.mersenne.org>)

Nhân kỉ niệm ngày Quốc tế Phụ nữ 8/3

GIƯỜNG HỌC TẬP VÀ NGHIÊN CỨU KHOA HỌC

CÔ SINH VIÊN VIỆT NAM XUẤT SẮC

Nguyễn Quỳnh Hương hiện là sinh viên trường đại học St. Cloud, bang Minnesota, Hoa Kỳ. Hương đang theo học cùng lúc 2 ngành Kế toán và Tài chính và sẽ tốt nghiệp loại danh dự (honor graduation) vào giữa tháng 5 này.

Suốt thời gian học THPT Lê Quý Đôn, TP Hồ Chí Minh, Hương sợ nhất là môn tiếng Anh. Tháng 6 năm 2000, Hương sang Hoa Kỳ du học với vốn tiếng Anh gần như là con số không. “Đi du học nhưng tôi không biết là mình có thể học và tốt nghiệp được ở Mỹ không nữa. Những ngày đầu tiên sao mà chật vật thế. Tôi sợ phải giao tiếp, sợ nói “thứ tiếng Anh” mà người khác không thể hiểu là mình đang nói gì. Tuy nhiên chương trình học, đặc biệt là môi trường học tập rất sôi động và lí thú. Những điều học được từ sách vở và các giáo sư luôn có tính thực tế và tính ứng dụng cao. Học không phải vì thành tích cao mà vì tôi thực sự ham muốn được hiểu biết sâu sắc hơn nữa về chuyên ngành mà mình theo học” - Cô kể lại như vậy. Nỗ lực ấy đã giúp Hương liên tục giành được học bổng “*Cultural Sharing Scholarship*” từ năm học thứ nhất cho đến nay.

Kết thúc 2 năm đại cương (general education) với số điểm trung bình tuyệt đối 4.0/4.0 và có tên trong quyển *National Dean's List* ghi danh những sinh viên xuất sắc nhất hàng năm của hơn 2500 trường đại học trên toàn nước Mỹ. Hương nhận được học bổng “*College of Business Executive Council*” và được kết nạp vào *Hiệp hội Beta Gamma Sigma* – Hiệp hội

Quốc tế của những sinh viên danh dự các ngành Business (kết nạp 7% sinh viên có thành tích xuất sắc nhất của ngành business trên toàn nước Mỹ). Hương cũng được chọn làm Phó chủ tịch Hiệp hội này tại trường đại học St. Cloud.

Ngoài ra, Hương còn là Giám đốc Quan hệ Công chúng của *Hiệp hội sinh viên nhóm ngành bảo hiểm Mỹ*. Học kì vừa qua Hương cũng đã liên kết với một số bạn sinh viên Việt Nam cùng trường thành lập Hội Sinh viên Việt Nam tại trường đại học St. Cloud (Vietnamese Student Association at SCSU).

Mong muốn của Hương và các bạn sinh viên Việt Nam ở đây là có thể giới thiệu văn hóa Việt Nam đến bạn bè thế giới cũng như giúp đỡ lẫn nhau trong học tập và cung cấp thông tin du học cho các bạn sinh viên Việt Nam.

Hương còn là trợ giáo môn Toán (Math Tutor) ở *Trung tâm kĩ năng toán học của trường (SCSU Math Skills Center)* ngay từ năm đầu đại học. Với vốn kiến thức khá vững về môn Toán từ thời trung học, Hương bắt nhịp với công việc này khá dễ dàng.

“Người Việt Nam rất giỏi, các bạn sinh viên Việt Nam là những người có chí cầu tiến cao và nhiều nhiệt huyết trong công việc. Chỉ cần cố gắng và tin tưởng vào bản thân, bạn sẽ đạt được những kết quả mà ngay cả bạn cũng không ngờ tới”. Quỳnh Hương đã kết thúc buổi trò chuyện với kinh nghiệm rút ra từ chính mình như thế.

(Theo Tin hoạt động các Hội KHKT 2.2005)

GIÚP BẠN... (Tiếp trang 5)

Ta có 4 cách chọn vị trí cho chữ số 0, sau đó có A_4^2 cách chọn hai trong bốn vị trí còn lại cho các chữ số 1, 2. Tiếp theo, số cách chọn hai trong bốn chữ số khác 0, 1, 2 cho hai vị trí còn trống là A_4^2 .

Theo quy tắc nhân, ta được số các số là: $4.A_4^2.A_4^2 = 576$.

TH2. Số tạo thành không chứa chữ số 0.

Ta có A_5^2 cách chọn hai trong 5 vị trí cho các chữ số 1, 2. Sau đó, số cách chọn 3 trong 4 chữ số khác 0, 1, 2 cho ba vị trí còn trống là A_4^3 .

Theo quy tắc nhân được số các số là: $A_5^2.A_4^3 = 480$.

Theo quy tắc cộng thì số các số tạo thành là: $576 + 480 = 1056$.

b) Đặt $a = x + 1$, $b = y + 1$, $c = z + 4$ thì $a, b, c > 0$ và $a+b+c = 6$.

$$Q = \frac{a-1}{a} + \frac{b-1}{b} + \frac{c-4}{c} = 3 - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} \right)$$

$$S = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} \geq \frac{4}{a+b} + \frac{4}{c} \geq \frac{16}{a+b+c} = \frac{8}{3} \text{ nên}$$

$$Q = 3 - S \leq 3 - \frac{8}{3} = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Vậy } \max Q = \frac{1}{3} \Leftrightarrow a = b; a+b = c \Leftrightarrow a=b=\frac{3}{2};$$

$$c = 3 \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}; z = -1.$$

NGUYỄN ANH DŨNG

GIẢI THƯỞNG LÊ VĂN THIÊM 2004

HÀ HUY KHOÁI
(Viện Toán học)

Để khuyến khích thế hệ trẻ say mê học tập môn toán và có thể lựa chọn toán học làm nghề nghiệp tương lai của mình, để ghi nhận công lao của những người thầy dạy toán tận tụy với nghề nghiệp, Hội Toán học Việt Nam trao giải thưởng hàng năm mang tên *Giải thưởng Lê Văn Thiêm* cho một số học sinh xuất sắc và thầy giáo dạy toán giỏi trong cả nước.

Giải thưởng đối với học sinh được trao cho hai đối tượng: các học sinh đoạt kết quả xuất sắc trong các kỳ thi Olympic toán Quốc tế, và các học sinh hoàn cảnh khó khăn nhưng đã vươn lên đạt thành tích cao trong học tập môn toán.

Giải thưởng Lê Văn Thiêm 2004 được trao cho các học sinh và thầy giáo sau đây:

I. HỌC SINH

1. **Phạm Kim Hùng**, sinh năm 1987, lớp 11, Khối PT Chuyên toán, ĐHKHTN - ĐHQG HN. Thành tích: Giải nhất kỳ thi học sinh giỏi toán Quốc gia THPT 2004, Huy chương vàng Olympic toán Quốc tế 2004.

2. **Nguyễn Kim Sơn**, sinh năm 1986, lớp 12, Khối PT Chuyên toán, ĐHSP Hà Nội. Thành tích: Giải nhì kỳ thi học sinh giỏi toán Quốc gia THPT 2004, Huy chương vàng Olympic toán Quốc tế 2004.

3. **Nguyễn Minh Trường**, sinh năm 1986, lớp 12, trường THPT Trần Phú, Hải Phòng. Thành tích: Giải nhất kỳ thi học sinh giỏi toán Quốc gia THPT 2004, Huy chương vàng Olympic toán Quốc tế 2004.

4. **Phạm Viết Huy**, sinh năm 1988, lớp 12 Trường THPT Chuyên Lê Khiết, Quảng Ngãi. Thành tích: Giải ba Quốc gia môn toán Tiểu học, 1997-1998, Giải khuyến khích kỳ thi học sinh giỏi toán Quốc gia THPT 2004.

II. GIÁO VIÊN

Thạc sĩ **Trần Xuân Đáng**, sinh năm 1955, giáo viên trường THPT Chuyên Lê Hồng Phong, Nam Định. Thành tích: Đã giảng dạy chuyên toán 12 năm, góp phần vào thành tích của đội tuyển Nam Định với 66 giải quốc gia, 4 giải trong các kỳ thi Olympic toán Châu Á - Thái Bình Dương, 1 giải trong kỳ thi Olympic toán Quốc tế (2003). Viết nhiều bài cho tạp chí Toán học và Tuổi trẻ. Được Bằng khen của Bộ trưởng Bộ Giáo dục và Đào tạo.

CÁC NHÀ TOÁN HỌC VIỆT NAM GẶP GỠ ĐẦU XUÂN

Nhân dịp Xuân Ất Dậu chiều 2.2.2005 tại Viện Toán học Việt Nam, Hội Toán học Việt Nam đã tổ chức cuộc gặp mặt các nhà toán học. Tới dự có GS. TSKH Phạm Thế Long, Chủ tịch Hội Toán học Việt Nam, các Phó Chủ tịch, Tổng thư ký Hội Toán học Việt Nam, các nhà toán học lão thành, các cán bộ nghiên cứu và giảng dạy toán tại Viện Toán học Việt Nam, các trường Đại học, Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ, nhiều giáo viên toán các trường THPT. GS. TSKH Lê Tuấn Hoa, Phó Chủ tịch kiêm Tổng Thư ký Hội Toán học Việt Nam, đã thông báo về công tác của Hội trong năm qua. GS. TSKH Hà Huy Khoái, Phó Chủ tịch Hội, Chủ tịch Hội đồng Giải thưởng Lê Văn Thiêm đã công bố danh sách 4 học sinh và 1 giáo viên toán được nhận Giải thưởng Lê Văn Thiêm năm 2004. Tiếp đó các nhà toán học lão thành và lãnh đạo Hội Toán học Việt Nam đã trao Giải thưởng Lê Văn Thiêm cho các giáo viên và học sinh.

HỘI THẢO 30 NĂM VIỆT NAM THAM DỰ OLYMPIC TOÁN QUỐC TẾ

Ngày 2.2.2005 tại Hội trường Ngụy Như Kon Tum 19 Lê Thánh Tông, Hà Nội đã diễn ra Hội thảo 30 năm Việt Nam tham dự Olympic Toán Quốc tế với gần 200 đại biểu do trường ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội cùng Hội Toán học Việt Nam tổ chức. Tham dự Hội thảo có GS. TSKH Trần Văn Nhung, Thứ trưởng Bộ GD-ĐT, đại diện của Vụ GD Trung học, Cục khảo thí và Kiểm định chất lượng GD, Hội Toán học Việt Nam, các nhà toán học làm việc tại các trường ĐHKHTN Hà Nội, ĐHSP Hà Nội, Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ, nhiều Trường đoàn, Phó trưởng đoàn và học sinh Việt Nam đã tham dự Thi Toán Quốc tế, giáo viên toán ở nhiều tỉnh, thành phố trong cả nước.

Hội thảo đã nghe các báo cáo và thảo luận về việc tổ chức phát hiện, tuyển chọn, bồi dưỡng năng khiếu toán học và chương trình nội dung kiến thức toán ở các lớp chuyên toán THPT.

Hội thảo cũng kiến nghị với Bộ GD-ĐT gấp rút chuẩn bị cho việc Việt Nam đăng cai tổ chức thi Olympic Toán Quốc tế vào năm 2007.

P.V



ĐỀ THI GIẢI TOÁN TRÊN MÁY TÍNH BỎ TÚI QUA TẬP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

A. ĐỀ DÀNH CHO THCS (3. 05)

Bài 11. CS. Tính gần đúng giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của phân thức

$$A = \frac{2x^2 - 7x + 1}{x^2 + 4x + 5}$$

Bài 12. CS. Tìm nhóm ba chữ số cuối cùng (hàng trăm, hàng chục, hàng đơn vị) của số

$$1^2 + 2^3 + 3^4 + 4^5 + 5^6 + 6^7 + 7^8 + 8^9 + 9^{10} + 10^{11} + 11^{12} + 12^{13} + 13^{14} + 14^{15} + 15^{16}$$

Bài 13. CS. Tính gần đúng góc nhọn x (độ, phút, giây) nếu

$$\sin x \cdot \cos x + 3(\sin x - \cos x) = 2.$$

Bài 14. CS. Điểm E nằm trên cạnh BC của hình vuông $ABCD$. Tia phân giác của các góc EAB , EAD cắt các cạnh BC , CD tương ứng tại M , N . Tính gần đúng giá trị nhỏ nhất của tỉ số $\frac{MN}{AB}$. Tính gần đúng (độ, phút, giây) góc EAB

$$\text{nếu } \frac{MN}{AB} = \frac{6}{7}.$$

Bài 15. CS. Hai đường tròn bán kính 3dm và 4dm tiếp xúc ngoài với nhau tại điểm A . Gọi B và C là các tiếp điểm của hai đường tròn đó với một tiếp tuyến chung ngoài. Tính gần đúng diện tích của hình giới hạn bởi đoạn thẳng BC và hai cung nhỏ AB , AC .

• Quy ước chung cho cả 2 nhóm bài : Ghi phương pháp giải vắn tắt, công thức, phím bấm của từng bài. Nếu kết quả là số hữu tỉ thì phải ghi kết quả dưới dạng số nguyên hoặc phân số. Nếu kết quả là số vô tỉ thì phải ghi kết quả dưới dạng số thập phân gần đúng có 10 chữ số.

• Nhận bài giải gửi trước ngày 15.4.2005 theo dấu Bưu điện. Các bạn học lớp 10 được dự thi phần THCS. Ghi rõ sử dụng máy tính loại nào. Ngoài phong bì ghi rõ : THI GIẢI TOÁN TRÊN MÁY TÍNH BỎ TÚI tháng 3 năm 200.5.

B. ĐỀ DÀNH CHO THPT (3. 05)

Bài 11. PT. Tính gần đúng giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{x+x^2} + \sqrt{3x-x^2} + 2$.

Bài 12. PT. Đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ đi qua các điểm $A(-4; 3)$, $B(7; 5)$, $C(-5; 6)$, $D(-3; -8)$. Tính giá trị của a , b , c , d và tính gần đúng khoảng cách giữa điểm cực đại và điểm cực tiểu của đồ thị đó.

Bài 13. PT. Tính gần đúng các nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x^3 + y^3 + xy = 5 \\ x^2 + y^2 + x + y = 7 \end{cases}$$

Bài 14. PT. Tứ giác $ABCD$ có $AB = 4\text{dm}$, $BC = 8\text{dm}$, $CD = 6\text{dm}$, $DA = 3\text{dm}$, $\widehat{BAD} = 80^\circ$. M là trung điểm của AB và N là điểm nằm trên cạnh CD sao cho MN chia tứ giác thành hai phần có diện tích bằng nhau. Tính gần đúng độ dài MN .

Bài 15. PT. Hình chóp $S.ABCD$ có đường cao $SA = 5\text{dm}$. Đáy $ABCD$ là hình thang với $AD \parallel BC$, $AD = 3\text{dm}$, $AB = 4\text{dm}$, $BC = 8\text{dm}$, $CD = 6\text{dm}$. Tính gần đúng diện tích toàn phần của hình chóp và góc (độ, phút, giây) giữa hai mặt phẳng (SAB) , (SCD)

PROBLEMS... (Tiếp trang 15)

T10/333. Prove that

$$\sum_{i=1}^n \sqrt{x_i^2 + \frac{1}{x_i^2}} \geq \left(n + \frac{1}{n}\right) \cdot \sqrt{n^2 + \frac{1}{n^2}} \cdot \left(\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{1+x_i^2}\right)$$

where $x_1, x_2, \dots, x_n$ are n positive numbers satisfying the condition $x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq 1$.

T11/333. Find the greatest value of the expression $F = \sin A \cdot \sin^2 B \cdot \sin^3 C$

where A, B, C are angles of a triangle.

T12/333. Let $ABCD$ be a tetrahedron inscribed in a sphere (O) with center O , let G be the centroid of $ABCD$, let M be a point lying in the interior of or on the sphere with diameter OG . The lines MA, MB, MC, MD cut again (O) respectively at A_1, B_1, C_1, D_1 . Prove that $V(A_1B_1C_1D_1) \geq V(ABCD)$ where V denotes volume.

SƠ KẾT CUỘC THI GIẢI TOÁN BẰNG MÁY TÍNH BỎ TÚI THÁNG 1.2005

Đề thi đã đăng trên THPT số 331 (1.2005)

Có lẽ là vào dịp Tết nên số lượng bài giải gửi về ít hơn đợt tháng 11.2004. Điều đáng mừng là các tỉnh phía Bắc đã có tỉ lệ các bạn tham gia cao hơn đợt trước. Học sinh Hà Nội còn ít tham gia. Đề thi đợt này cũng khó hơn nên số bạn đạt điểm tối đa không nhiều. Điều đáng nói là đầu bài đã ghi rõ: *Nếu kết quả là số hữu tỉ thì phải ghi kết quả dưới dạng số nguyên hoặc phân số* nhưng nhiều bạn vẫn ghi kết quả bài dạng số thập phân trong trường hợp là phải ghi phân số như bài 9.PT.

Lần này, các bạn sau đây được nhận quà tặng: **Khổng Hoàng Thao**, 8D, THCS Lập Thạch, **Vĩnh Phúc**; **Nguyễn Thu Hương**, 9B, THCS Lập Thạch, **Vĩnh Phúc**; **Nguyễn Thị Thêu**, 9D, THCS Đông Hưng, **Thái Bình**; **Cung Văn Dũng**, 10¹, THPT Quốc học, **Thừa Thiên - Huế**; **Nguyễn Nhật Linh**, 10 Toán, THPT chuyên **Hà Tĩnh**; **Nguyễn Quốc Hữu**, 10/10 THPT Lai Vung II, **Đồng Tháp**; **Lê Bùi Tiến Duy**, 10 chuyên Toán, THPT chuyên Lê Hồng Phong, **TP. HCM**; **Đinh Văn Sơn**, 10 Toán, THPT chuyên **Hà Tĩnh**; **Nguyễn Thanh Tùng**, 12A10 THPT, **Ngô Sỹ Liên**, **Phạm Việt Đức**, 11A2, THPT Tân Yên I, **Tân Yên**, **Bắc Giang**; **Trần Hữu Huyền Trân**, 12 Toán, THPT chuyên **Tiền Giang**.

Mời các bạn tham gia tiếp cuộc thi đợt 3 (tháng 3.2005) có đề đăng trên số báo này. Kết quả cuộc thi được sơ kết vào tháng 5.2005. Bài cần ghi đầy đủ các thông tin về bản thân như điều lệ cuộc thi quy định (họ tên, lớp, trường, ngày sinh...) để tiện liên lạc khi các bạn đoạt giải vào cuối năm học.

Sau đây là đáp án bài thi tháng 1.2005.

CÁC LỚP TRUNG HỌC CƠ SỞ

Bài 6. CS. Từ các đẳng thức $a+b+c = 3$ và $ab = -2$ ta biểu thị được b và c qua a . Thay các biểu thức đó vào đẳng thức $b^2 + c^2 = 1$ ta được một phương trình bậc 4 đối với a . Từ phương trình đó ta tìm được (bằng phương pháp lập) hai giá trị gần đúng của a . Vì b và c đã biểu thị được qua a nên M là một phân thức của a . Thay các giá trị gần đúng của a vào biểu thức M ta được hai giá trị gần đúng của M .

$$M_1 \approx 358,0411760; M_2 \approx 75,73054976$$

Bài 7. CS. Thay giá trị của x vào đa thức $P(x)$ ta được 5 phương trình bậc nhất đối với các ẩn a, b, c, d, e . Dùng phương pháp cộng đại số ta được ba phương trình bậc nhất đối với các ẩn a, b, c , một phương trình bậc nhất đối với 4 ẩn a, b, c, d và một phương trình bậc nhất đối với cả 5 ẩn. Giải hệ ba phương trình bậc nhất đối với các ẩn a, b, c ta được các giá trị của a, b, c . Sau đó tính được giá trị của d và e từ hai phương trình còn lại.

Thay các giá trị tìm được của a, b, c, d, e vào đa thức $P(x)$ rồi dùng phương pháp lập ta tính được gần đúng hai nghiệm của đa thức đó

$$a = \frac{1}{24}; b = -\frac{7}{12}; c = \frac{59}{24}; d = -\frac{59}{12}; e = 8; x_1 \approx 4,361495625; x_2 \approx 8,227215616$$

Bài 8. CS. Dễ dàng tính được CD . Gọi F là điểm đối xứng của C qua O . Từ sự đồng dạng của hai tam giác vuông COD và CEF ta tính được CE . Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ D xuống CE và M là trung điểm của OB . Từ quan hệ giữa đường cao và cạnh của tam giác CDM ta tính được DH . Do đó tính được diện tích tam giác CDE . Vì đã biết CD, DH, CE nên ta tính được các góc HCD và HED . Sau đó tính được góc CDE .

$$S = \frac{4}{5} \text{ dm}^2; \widehat{CDE} \approx 88^\circ 12' 36''$$

Bài 9. CS. Tứ giác $ABCD$ vừa nội tiếp đường tròn vừa ngoại tiếp đường tròn nên diện tích của nó bằng căn bậc hai của tích bốn cạnh và cũng bằng tích của bán kính đường tròn nội tiếp với nửa chu vi. Từ đó tính được bán kính đường tròn nội tiếp.

Góc ACD là góc nhỏ nhất của tứ giác $ABCD$ nên nó phải là góc nhọn. Tam giác ACD có góc nhọn ADC nên diện tích của nó là $\frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 8 \cdot \sin \widehat{ADC}$. Tam giác ACB có góc tù ABC nên diện tích của nó là $\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 \cdot \sin (180^\circ - \widehat{ABC}) = 15 \sin \widehat{ADC}$. Từ tổng diện tích hai tam giác đó

bằng diện tích tứ giác ABCD suy ra số đo của góc ADC và số đo của góc lớn nhất $\widehat{ABC}$.

Tam giác ACD có hai cạnh AD, CD và góc ADC đã biết nên ta tính được cạnh AC. Bán kính đường tròn ngoại tiếp được tính từ công

$$\text{thức } R = \frac{AC}{2 \sin \widehat{ADC}}.$$

$$r \approx 3,152907928 \text{ dm}; R \approx 4,666384983 \text{ dm};$$

$$\widehat{ABC} \approx 107^\circ 35' 50''$$

Bài 10. CS. Đặt $b_n = 3^8 \cdot 2^4 \cdot a_n = 104976 a_n$

với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ thì $b_{n+2} = \frac{1}{3} b_{n+1} + \frac{1}{2} b_n$ với

mọi $n \in \mathbb{N}^*$ và b_n là số tự nhiên với mọi $n \leq 10$. Tính dần dần giá trị của b_n ta sẽ được tổng 10 số hạng đầu của dãy số b_n là 1120643. Từ đó suy ra giá trị của S_{10} .

$$S_{10} = \frac{1120643}{104976}$$

CÁC LỚP TRUNG HỌC PHỔ THÔNG

Bài 6. PT. Đặt $t = xy$ thì $5 = x + y \geq 2\sqrt{xy} = 2\sqrt{t} > 0$ nên $0 < t \leq \frac{25}{4}$. Sau đó biến đổi A

thành một hàm số của t . Tính đạo hàm của A theo t . Tính gần đúng nghiệm của đạo hàm. Thay nghiệm đó vào biểu thức của hàm số ta được giá trị gần đúng cần tìm.

$$\min A \approx 5963,417630$$

Bài 7. PT. Gọi C và D là các giao điểm của hai đường tròn đã cho, x là số đo góc CAD. Tính diện tích phần chung của hai hình tròn và diện tích hình tròn tâm B theo x và AB. Khi so sánh hai diện tích đó ta được một phương trình của x . Giải phương trình đó bằng phương pháp lập ta được giá trị gần đúng của x . Sau đó ta tính được AC theo AB rồi suy ra tỉ số diện tích của hai hình tròn.

$$k \approx 1,342651674$$

Bài 8. PT. Từ quan hệ giữa các góc của tứ giác ABCD ta tính được các góc đó. Tiếp đó tính được diện tích tam giác ABD, cạnh BD, góc ABD, góc CBD, diện tích tam giác BCD, diện tích tứ giác ABCD.

$$S \approx 25,10056702 \text{ m}^2$$

Bài 9. PT. Đặt $b_n = 3^{12} \cdot 2^5 \cdot a_n = 17006112 a_n$

với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ thì $b_{n+3} = \frac{1}{3} b_{n+2} + \frac{1}{2} b_{n+1} + b_n$

với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ và b_n là số tự nhiên với mọi $n \leq 15$. Tính dần dần giá trị của b_n ta sẽ được $b_{15} = 884020909$. Từ đó suy ra giá trị của a_{15} .

$$a_{15} = \frac{884020909}{17006112}$$

Bài 10. PT. Trừ từng vế hai phương trình đã cho ta được phương trình

$$(x - y) \left[(x + y)(x^2 + y^2) - \frac{2}{xy} \right] = 0.$$

Trong trường hợp $x - y = 0$, thay $y = x$ vào phương trình $x^4 + xy - \frac{2}{y} = 5$ ta được phương

trình bậc 5 đối với x . Giải phương trình này bằng phương pháp lập ta được ba nghiệm gần đúng đầu tiên của hệ phương trình đã cho.

Trong trường hợp $(x + y)(x^2 + y^2) - \frac{2}{xy} = 0$,

khi đặt $S = x + y$ và $P = xy$ thì phương trình đó trở thành phương trình của hai ẩn S, P . Cộng từng vế hai phương trình đã cho ta cũng được một phương trình của hai ẩn S, P . Từ hai phương trình đó ta tính được S, P . Sau đó ta tìm được hai nghiệm gần đúng khác của hệ phương trình đã cho nhờ giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y = S \\ xy = P \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 \approx 1,440979177 \\ y_1 \approx 1,440979177 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 \approx -0,417027894 \\ y_2 \approx -0,417027894 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 \approx -1,176501724 \\ y_3 \approx -1,176501724 \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 \approx 1,604483557 \\ y_4 \approx -1,733381464 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_5 \approx -1,733381464 \\ y_5 \approx 1,604483557 \end{cases}$$

TVV & VKT



CÁC LỚP THCS

Bài T1/333. (Lớp 6). Viết các phân số với tử số, mẫu số dương theo thứ tự như sau :

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{1}, \frac{1}{3}, \frac{4}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{n}{1}, \frac{n-1}{2}, \dots, \frac{n-k}{k+1}, \dots, \frac{2}{n-1}, \frac{1}{n}, \dots, \text{ sao cho trong dãy không có phân số } \frac{m}{m} \text{ với mọi } m > 1.$$

Hỏi trong dãy trên phân số $\frac{2004}{2005}$ đứng ở vị trí thứ bao nhiêu ?

BÙI THẾ HÙNG
(GV khoa Toán, DHSP Thái Nguyên)

Bài T2/333. (Lớp 7). Cho tam giác ABC với đường cao AH . Gọi M và N lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ H đến AB và AC . Chứng minh rằng nếu $BM = CN$ thì tam giác ABC cân với đáy BC .

PHẠM HOÀNG HÀ
(GV THPT chuyên ngữ ĐHNN Hà Nội)

Bài T3/333. Tìm mọi cặp số nguyên dương x, y sao cho $\frac{x^4+2}{x^2y+1}$ là số nguyên dương.

TẠ HOÀNG THÔNG
(SV Toán 2001, ĐHKHTN TP Hồ Chí Minh)

Bài T4/333. Giải phương trình

$$16x^4 + 5 = 6\sqrt[3]{4x^3 + x}$$

HOÀNG HẢI DƯƠNG
(GV THCS Chu Mạnh Trinh, Văn Giang, Hưng Yên)

Bài T5/333. Chứng minh bất đẳng thức sau

$$\frac{a+b}{ab+c^2} + \frac{b+c}{bc+a^2} + \frac{c+a}{ca+b^2} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

trong đó a, b, c là các số thực dương.

PHẠM VĂN THUẬN
(ĐHKHTN Hà Nội)

Bài T6/333. Cho tam giác ABC với trục tâm H (H khác A, B, C) và M là trung điểm của BC . Đường thẳng đi qua H vuông góc với HM cắt đường thẳng AB ở E và cắt đường thẳng AC ở F . Chứng minh rằng tam giác MEF cân với đáy EF .

VI QUỐC DŨNG
(GV DHSP Thái Nguyên)

Bài T7/333. Lấy điểm M nằm trong hình chữ nhật $ABCD$ cho trước. Kẻ $CE \perp BM$ tại E , kẻ $DF \perp AM$ tại F . Gọi N là giao điểm của CE và DF . Tìm quỹ tích trung điểm của MN khi điểm M di chuyển bên trong hình chữ nhật $ABCD$.

NGUYỄN XUÂN HÙNG
(GV THPT Lam Sơn, Thanh Hóa)

CÁC LỚP THPT

Bài T8/333. Chứng minh rằng với bất kì số nguyên dương n thì hiệu $s_n = \left(\sum_{k=1}^n \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor \right) - \left\lfloor \sqrt{n} \right\rfloor$ là số nguyên chẵn, trong đó kí hiệu $\lfloor x \rfloor$ chỉ phần nguyên của x .

TRẦN NAM DŨNG
(GV khoa Toán, ĐHKHTN TP Hồ Chí Minh)

Bài T9/333. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2(x+1) = 2(y^3-x)+1 \\ y^2(y+1) = 2(z^3-y)+1 \\ z^2(z+1) = 2(x^3-z)+1 \end{cases}$$

DƯƠNG CHÂU DINH
(GV THPT Lê Quý Đôn, Quảng Trị)

Bài T10/333. Chứng minh rằng

$$\sum_{i=1}^n \sqrt{x_i^2 + \frac{1}{x_i^2}} \geq \left(n + \frac{1}{n} \right) \cdot \sqrt{n^2 + \frac{1}{n^2}} \cdot \left(\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{1+x_i^2} \right)$$

trong đó $x_1, x_2, \dots, x_n$ là n số dương và thỏa mãn điều kiện $x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq 1$.

NGUYỄN VIỆT HÒA
(GV THPT Trần Hưng Đạo, Tiền Lữ, Hưng Yên)

Bài T11/333. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $F = \sin A \cdot \sin^2 B \cdot \sin^3 C$ trong đó A, B, C là ba góc của một tam giác.

QUÁCH VĂN GIANG
(GV THPT Lương Văn Tụy, Ninh Bình)

Bài T12/333. Cho tứ diện $ABCD$ nội tiếp một mặt cầu tâm O và gọi G là trọng tâm của tứ diện. Lấy điểm M nằm bên trong hoặc trên mặt

của hình cầu đường kính OG . Các đường thẳng MA, MB, MC, MD cắt mặt cầu tâm O lần nữa tại các điểm A_1, B_1, C_1, D_1 theo thứ tự. Chứng minh rằng $V(A_1B_1C_1D_1) \geq V(ABCD)$, trong đó kí hiệu V chỉ thể tích của tứ diện.

NGUYỄN LÂM TUYỀN
(SVBK48, K47, ĐHBK Hà Nội)

CÁC ĐỀ VẬT LÝ

Bài L1/333. Một con kiến bò xa tổ theo một đường thẳng. Vận tốc của nó có độ lớn tỉ lệ nghịch với khoảng cách đến tâm tổ. Khi kiến ở điểm A cách tâm tổ $l_1 = 1\text{m}$ thì vận tốc của nó là $V_1 = 2\text{cm/s}$. Sau bao lâu nó đến điểm B cách tâm tổ $l_2 = 2\text{m}$?

NGUYỄN XUÂN QUANG
(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

Bài L2/333. Một điểm sáng S đặt dưới nước và cách mặt nước là $SO = y = 2,4\text{m}$. Mắt M đặt

ở phía trên mặt nước sao cho chùm tia sáng đi từ S tới mắt M có tia tới trung bình SI ứng với góc tới $\widehat{OSI}$ (I nằm trên mặt nước). Mắt nhìn thấy ảnh S' của S . Hãy xác định vị trí của S' biết rằng mắt chỉ hứng được một chùm tia sáng rất hẹp phát ra từ S . Cho chiết suất của nước là $n = 1,33$.

NGUYỄN QUANG HẬU
(Hà Nội)

Đọc lại cho đúng

Bất đẳng thức trong bài T9/332 trong THPT số 332 tháng 2.2005 của Giảng viên Phùng Văn Sự, Học viện Ngân hàng Phú Yên đã in nhầm số mũ, xin sửa lại như sau :

$$(x^2+3)(y^2+3)(z^2+3) \geq \frac{4}{27}(3xy+3yz+3zx+xyz)^2$$

Thành thật xin lỗi tác giả và bạn đọc.

THTT

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/333 (for 6th grade). The fractions with positive numerators and denominators are arranged in the following order :

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{1}, \frac{1}{3}, \frac{4}{1}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{4}, \frac{n}{1}, \frac{n-1}{2}, \dots, \frac{n-k}{k+1}, \dots,$$

$$\frac{2}{n-1}, \frac{1}{n}, \dots, \text{ where there are no fractions of the}$$

form $\frac{m}{m}$, $m > 1$.

At which place in this sequence lies the fraction $\frac{2004}{2005}$?

T2/333 (for 7th grade). Let ABC be a triangle with altitude AH . Let M, N be the orthogonal projections of H respectively on AB and AC . Prove that the condition $BM = CN$ implies that ABC is an isosceles triangle with base BC .

T3/333. Find all couple of positive integers x, y such that $\frac{x^4+2}{x^2y+1}$ is a positive integer.

T4/333. Solve the equation

$$16x^4 + 5 = 6\sqrt[3]{4x^3 + x}$$

T5/333. Prove the inequality

$$\frac{a+b}{ab+c^2} + \frac{b+c}{bc+a^2} + \frac{c+a}{ca+b^2} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

where a, b, c are positive real numbers.

T6/333. Let ABC be a triangle with orthocenter H (distinct from A, B, C), and M be the midpoint of BC . The line passing through H perpendicular to MH cuts the line AB at E and cuts the line AC at F . Prove that MEF is an isosceles triangle with base EF .

T7/333. From a point M in the interior of a rectangle $ABCD$, draw AM, BM then $CE \perp BM$ at $E, DF \perp AM$ at F . Let N be the point of intersection of CE and DF . Find the locus of the midpoint of MN when M moves in the interior of $ABCD$.

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T8/333. Prove that for every positive integer

n , the difference $s_n = \left(\sum_{k=1}^n \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor \right) - \left\lfloor \sqrt{n} \right\rfloor$ is an even integer, where $[x]$ denotes the integer part of x .

T9/333. Solve the system of equations

$$\begin{cases} x^2(x+1) = 2(y^3-x)+1 \\ y^2(y+1) = 2(z^3-y)+1 \\ z^2(z+1) = 2(x^3-z)+1 \end{cases}$$

(Xem tiếp trang 11)



Bài T1/329. (Lớp 6). Giả sử p, q là hai số nguyên tố thỏa mãn $p > q > 3$ và $p - q = 2$. Chứng minh rằng $p+q$ chia hết cho 12.

Lời giải. Xét các số p, q dạng $6k+r$ với r bằng 0, 1, 2, 3, 4, 5 ta thấy $6k, 6k+2 = 2(3k+1), 6k+3 = 3(2k+1), 6k+4 = 2k(3k+2)$ đều là hợp số khi p, q lớn hơn 5. Với $p = 5$ thì $q = 3$ trái giả thiết. Như vậy p chỉ có thể có hai dạng $6k+1$ và $6k+5$ với $k \geq 1$. Nếu $p = 6k+5$ thì $p = p-2 = 6k+3$ là hợp số. Nếu $p = 6k+1$ thì $q = p-2 = 6k-1$, lúc đó $p+q = (6k+1) + (6k-1) = 12k$ chia hết cho 12.

Nhận xét. 1) Nhiều bạn thiếu sót khi chỉ xét một dạng của p . Một số bạn khác xét dạng $4k+r$ hoặc $3k+r$ để lập luận $p+q$ chia hết cho 4 và cho 3 nên dài hơn.

2) Các bạn sau có lời giải gọn :

Phú Thọ : Cù Thanh Huyền, 6A2, THCS Hạ Hòa, Hạ Hòa ; **Vĩnh Phúc :** Trần Hồng Loan, Lê Thái Sơn, Nguyễn Hữu Hùng, Nguyễn Thị Thu Trang, Nguyễn Thị Thu Phương, THCS Yên Lạc, Yên Lạc ; **Hà Nội :** Phan Thái Nam, 6H1, THCS Trưng Vương, Hoàn Kiếm ; Hà Tây : Bùi Tài Thông, 6B, THCS Kiều Phú, Quốc Oai ; **Bắc Ninh :** Đỗ Vũ Thạch, 6B, THCS Yên Phong, Yên Phong ; **Thanh Hóa :** Hoàng Bá Thoa, 6C, Mai Thê Vương, Mai Mạnh Khiêm, 6B, THCS Chu Văn An, Nga Sơn, La Hồng Quân, 6B, THCS Nguyễn Chí Chích, Đông Sơn ; **Nghệ An :** Nguyễn Thị Thủy Dung, 6A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương ; **Gia Lai :** Nguyễn Thị Hồng Phúc, 5A, TH Kim Đồng, KBang ; **TP. Hồ Chí Minh :** Nguyễn Hữu Nghĩa, 6/1, THCS Hồng Bàng, Q. 5.

VIỆT HẢI

Bài T2/329. (Lớp 7). Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = (a-b)^4 + (b-c)^4 + (c-a)^4$$

trong đó a, b, c là các số thực không nhỏ hơn 1 và không lớn hơn 2.

Lời giải. Nhận thấy nếu đổi vị trí của hai trong ba chữ a, b, c cho nhau thì biểu thức P không thay đổi nên có thể giả thiết

$$2 \geq a \geq b \geq c \geq 1 \quad (1)$$

Khi đó, ta có

$$0 \leq a-b \leq 1 \Rightarrow (a-b)^4 \leq a-b$$

$$\Leftrightarrow (a-b)(1-(a-b)^3) \geq 0$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b$ hoặc $a = 2, b = 1$.

Cũng tương tự :

$$0 \leq b-c \leq 1 \Rightarrow (b-c)^4 \leq b-c$$

$$0 \leq c-a \leq 1 \Rightarrow (c-a)^4 \leq c-a$$

Do đó

$$P = (a-b)^4 + (b-c)^4 + (c-a)^4$$

$$\leq a-b + b-c + a-c \Rightarrow P \leq 2(a-c) \leq 2 \quad (2)$$

Ta có $P = 2$ khi $a = b = 2, c = 1$ hoặc $a = 2, b = c = 1$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là 2, giá trị đó đạt được khi trong ba số a, b, c có hai số bằng 2 và một số bằng 1 hoặc có hai số bằng 1 và một số bằng 2.

Nhận xét. 1) Có không nhiều bạn tham gia giải bài toán này. Điểm mấu chốt của lời giải là đưa ra giả thiết (1) để từ đó đi đến BĐT (2).

2) Một số bạn tìm được BĐT $P \leq 2$ nhưng chưa chỉ ra được hết các trường hợp xảy ra đẳng thức.

Các bạn sau đây có lời giải tốt : **Nam Định :** Bùi Lê Phương, 7C, THCS Trần Huy Liệu, Vụ Bản ; **Quảng Ngãi :** Trần Tấn Thanh, 8H, THCS Hành Phước, Phan Thị Thủy Ngân, 8C, Nguyễn Việt Phương, 7C, THCS Huỳnh Thúc Kháng, Nghĩa Hành ; **Nghệ An :** Nguyễn Mạnh Tuấn, 7B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương ; **Phú Thọ :** Nguyễn Tùng Lâm, 7G, THCS Chu Văn An, Thanh Sơn.

NGUYỄN ANH DŨNG

Bài T3/329. Chứng minh rằng tổng số (gồm 1999 số hạng)

$$S = 1^{100} - 2^{100} + 3^{100} - 4^{100} + \dots + n^{100} - (n+1)^{100} + \dots - 1998^{100} + 1999^{100}$$

chia hết cho 201899.

Lời giải. Trước hết ta có nhận xét rằng

$201899 = 1999 \times 101$ mà $(1999, 101) = 1$ nên ta cần chứng minh S chia hết cho 1999 và 101.

$$* \text{ Ta có } S = (1^{100} - 1998^{100}) - (2^{100} - 1997^{100}) + (3^{100} - 1996^{100}) - \dots + (999^{100} - 1000^{100}) + 1999^{100}$$

$$\text{Đề ý rằng } a^{100} - b^{100} = (a^2)^{50} - (b^2)^{50} = (a^2 - b^2).M : (a+b) \text{ nên } S \text{ chia hết cho } 1999.$$

* Trong tổng S , có 19 số hạng chia hết cho 101 là $101, 202 = 101 \times 2, 303 = 101 \times 3, \dots, 1919 = 101 \times 19$

Trong các số hạng còn lại, có 990 số dạng a^{100} (a lẻ, không chia hết cho 101) và 990 số dạng $-b^{100}$ (b chẵn, không chia hết cho 101). Vì 101 là số nguyên tố nên $(a, 101) = 1, (b, 101) = 1$. Theo định lý Phéc-ma nhỏ, ta có

$$a^{100} \equiv 1 \pmod{101}, b^{100} \equiv 1 \pmod{101}$$

$$\Rightarrow a^{100} - b^{100} \equiv 0 \pmod{101}.$$

Như vậy tổng S gồm hai nhóm : nhóm thứ nhất gồm 19 số chia hết cho 101, nhóm thứ hai

gồm 990 số dạng $a^{100} - b^{100}$, chia hết cho 101, suy ra $S \vdots 101$.

Vậy $S \vdots 201899$.

Nhận xét. 1. Bài này có khá đông bạn tham gia giải, tất cả đều cho lời giải đúng và sử dụng định lý Phec-ma nhỏ. Một số bạn chứng minh $S \vdots 101$ bằng cách viết $S = A - B$, trong đó

$$A = 1^{100} + 3^{100} + \dots + 1999^{100}$$

$$B = 2^{100} + 4^{100} + \dots + 1998^{100}$$

để chứng minh $A \equiv 990 \pmod{101}$, $B \equiv 990 \pmod{101}$ từ đó suy ra $S \vdots 101$.

2. Các bạn sau đây có lời giải ngắn gọn, lập luận rõ ràng:

Vĩnh Phúc: Nguyễn Hữu Hoàng, 9C, THCS Vĩnh Tường, Vĩnh Tường; **Thanh Hóa:** Nguyễn Cao Tuấn, Cao Thanh Bình, 8B, THCS Như Bá Sĩ, Hoàng Hóa, Đô Văn Thiện, Trịnh Hùng Linh, 9C, THCS Lê Thánh Tông, Thọ Xuân; **Nghệ An:** Lê Tuấn Hiệp, 8C, THCS Thái Sơn, Đô Lương; **Hà Tĩnh:** Nguyễn Thị Cẩm Hằng, 9C, THCS Trung Lộc, Can Lộc; **Quảng Trị:** Trương Xuân Nhã, Trần Hoàng Linh, 7A, THCS Nguyễn Huệ, Đồng Hà; **Đà Nẵng:** Nguyễn Như Quốc Trung, 9¹, THCS Lý Thường Kiệt; **TP Hồ Chí Minh:** Phạm Hoàng Long, Nguyễn Gia Luyện, lớp 9, THCS Nguyễn Du, Q. Gò Vấp; **Đắk Lắk:** Võ Văn Tuấn, 8A5, THCS Nguyễn Du, Krông Buk; **Bình Định:** Đoàn Kiều Văn Tâm, 9A4, THCS Đống Đa, TP. Quy Nhơn; **Bạc Liêu:** Trần Mỹ Linh, 9/1, THCS Trần Huỳnh, TX Bạc Liêu.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

Bài T4/329. Giải phương trình

$$x = (2004 + \sqrt{x})(1 - \sqrt{1 - \sqrt{x}})^2$$

Lời giải. (Của bạn Đào Đức Trung, 9A3, THCS Giấy Phong Châu, Phù Ninh, Phú Thọ)

Điều kiện để PT có nghĩa: $0 \leq x \leq 1$ (1)

Đặt $y = \sqrt{1 - \sqrt{x}} \Rightarrow 0 \leq y \leq 1$. Khi đó

$$\sqrt{x} = 1 - y^2, x = (1 - y^2)^2$$

Phương trình trở thành:

$$(1 - y^2)^2 = (2004 + 1 - y^2)(1 - y)^2$$

$$\Leftrightarrow (1 - y)^2(1 + y)^2 = (2005 - y^2)(1 - y)^2$$

$$\Leftrightarrow 2(1 - y)^2(y^2 + y - 1002) = 0$$

Vì $0 \leq y \leq 1$ nên $y^2 + y - 1002 \leq 1^2 + 1 - 1002 < 0$. Do đó PT trên tương đương với: $1 - y = 0$ hay $y = 1$. Do đó $\sqrt{x} = 0 \Rightarrow x = 0$ thỏa mãn (1).

Thử lại thấy PT có nghiệm duy nhất $x = 0$

Nhận xét. 1) Bài toán đã cho không khó nên hầu hết các bạn đều giải ra đúng kết quả. Các cách giải là khá phong phú. Phương pháp đặt ẩn phụ (được nhiều bạn dùng) đưa ra lời giải khá gọn gàng.

2) Bạn Nguyễn Tiến Thanh, 9C, THCS Nguyễn Quang Bích, Tam Nông, Phú Thọ đã đưa ra nhận xét: Bằng cách giải trên có thể giải được bài toán tổng quát:

$$\text{Giải phương trình: } ax = (b + c\sqrt{x})\left(d - \sqrt{d^2 - e\sqrt{x}}\right)^2$$

với a, b, c, d, e là các hằng số cho trước.

3) Các bạn có lời giải tốt (ngoài hai bạn trên) là:

Vĩnh Phúc: Nguyễn Ngọc Đại, 9C, THCS Vĩnh Tường; **Bắc Ninh:** Lê Thế Tài, 9B, THCS huyện Từ Sơn; **Thanh Hóa:** Lê Thị Nga, 9D, THCS Nguyễn Chí Chích, Đông Sơn, Nghệ An; **Lê Tuấn Hiệp**, 8C, THCS Thái Sơn, Đô Lương; **Hà Tĩnh:** Nguyễn Thành Trung, 9D, THCS thị trấn Kỳ Anh, Kỳ Anh; **TP Hồ Chí Minh:** Nguyễn Gia Luyện, 9⁸, THCS Nguyễn Du, Gò Vấp; **Bạc Liêu:** Trần Mỹ Linh, 9¹, THCS Trần Huỳnh, TX Bạc Liêu; **Đông Tháp:** Trần Bình Ngọc, 9A1, THPT TX Cao Lãnh.

TRẦN HỮU NAM

Bài T5/329. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{a + \sqrt{(a+b)(a+c)}} + \frac{b}{b + \sqrt{(b+c)(b+a)}} + \frac{c}{c + \sqrt{(c+a)(c+b)}} \leq 1$$

trong đó a, b, c là các số thực dương.

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki cho hai cặp số $(\sqrt{a}, \sqrt{b})$ và $(\sqrt{c}, \sqrt{a})$, ta có

$$\sqrt{(a+b)(a+c)} \geq \sqrt{(\sqrt{ac} + \sqrt{ab})^2} = \sqrt{ac} + \sqrt{ab}$$

$$\text{Do đó } a + \sqrt{(a+b)(a+c)} \geq a + \sqrt{ab} + \sqrt{ac} \text{ và}$$

$$\frac{a}{a + \sqrt{(a+b)(a+c)}} \leq \frac{a}{a + \sqrt{ab} + \sqrt{ac}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}}$$

Tương tự, ta có

$$\frac{b}{b + \sqrt{(b+c)(b+a)}} \leq \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}},$$

$$\frac{c}{c + \sqrt{(c+a)(c+b)}} \leq \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}}.$$

Cộng theo từng vế của ba bất đẳng thức cùng chiều ở trên và rút gọn, ta được điều phải chứng minh.

Bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki trở thành đẳng thức khi và chỉ khi $a^2 = bc$, và tương tự $b^2 = ac$, $c^2 = ab$, suy ra $a = b = c$. Do đó BĐT cần chứng minh trở thành đẳng thức khi và chỉ khi $a = b = c$.

Nhận xét. Lời giải đến từ hầu hết các tỉnh thành trong cả nước, đặc biệt nhiều hơn là từ Vĩnh Phúc và Thanh Hóa. Các bạn sau có lời giải ngắn gọn và đẹp: Phạm

Lương Thuần, 9C, THCS Đào Sư Tích, Trục Ninh, Nam Định; Nguyễn Thị Thu Hà, 9A1, THCS Lâm Thao, Lâm Thao, Phú Thọ; Trần Mỹ Linh, 9/1 THCS Trần Huỳnh, TX Bạc Liêu, Bạc Liêu; Trịnh Hùng Linh, 9C, THCS Lê Thánh Tông, Thọ Xuân, Thanh Hóa; Lê Tuấn Hiệp, 8C, THCS Thái Sơn, Đô Lương, Nghệ An; Trương Xuân Nhã, 7A, THCS Nguyễn Huệ, Đông Hà, Quảng Trị; Nguyễn Ngọc Thái, 9A, THCS Thuận Thành, Thuận Thành, Bắc Ninh; Tạ Thị Quỳnh, 9A, THCS Yên Lạc, Yên Lạc, Vĩnh Phúc; Đoàn Kiều Văn Tâm, 9A4, THCS Đồng Đa, TP. Quy Nhơn, Bình Định; Trần Khánh Toàn, 10A1, THPT Yên Mỹ, Hưng Yên.

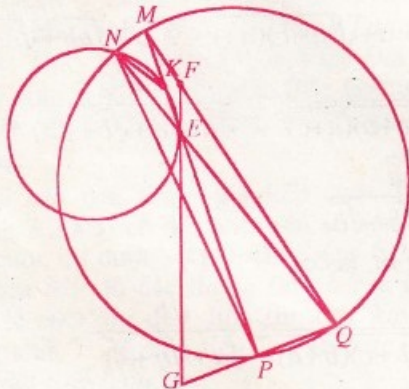
PHAN DOÃN THOẠI

Bài T6/329. Cho tứ giác $MNPQ$ nội tiếp đường tròn và MP cắt NQ tại E . Lấy điểm K nằm trong đoạn ME . Tiếp tuyến tại E với đường tròn ngoại tiếp tam giác NEK cắt các đường thẳng QM và QP lần lượt tại F và G . Chứng minh rằng $\frac{EG}{EF} = \frac{KP}{KM}$

Lời giải. Ta có $\widehat{GEQ} = \widehat{NEF} = \widehat{MEF} + \widehat{MEN} = \widehat{KNE} + \widehat{MEN} = \widehat{NKM}$

Và $\widehat{EQG} = \widehat{NMK}$ nên $\Delta NKM \sim \Delta GEQ$.

Suy ra $\frac{KM}{EQ} = \frac{NK}{GE}$ (1)



Mặt khác $\widehat{FEQ} = \widehat{NEG} = \widehat{NKE}$ (do $\widehat{KNE} = \widehat{KEF}$) và $\widehat{NPK} = \widehat{FQE}$. Suy ra $\Delta NPK \sim \Delta FQE$.

Nên $\frac{KP}{EQ} = \frac{NK}{FE}$ (2)

Chia theo vế (2) cho (1) ta được $\frac{EG}{EF} = \frac{KP}{KM}$

Nhận xét. 1) Để tồn tại ΔNEK và đoạn KM thì $K \neq M$, $K \neq E$ là giả thiết ta hiểu cần phải có.

2) Các bạn có lời giải tốt: Hải Phòng: Khúc Thị Thanh Huyền, xóm Hạnh Phúc, thôn Từ Lâm, Đông Minh, Vĩnh Bảo; Bắc Giang: Hoàng Đức Trung, 9A1,

THCS Ngô Sĩ Liên, TX Bắc Giang; Hải Dương: Nguyễn Thủy Dung, 8B, THCS thị trấn Phú Thái, Kim Thành; Phú Thọ: Nguyễn Sơn Tùng, THCS Nguyễn Quang Bích, Tam Nông; Nguyễn Trường Sơn, 9A1, THCS Giấy Phong Châu, Phù Ninh; Vĩnh Phúc: Bùi Thị Bích Phương, Đoàn Thị Bích Ngọc, 9A, THCS Yên Lạc; Bắc Ninh: Lê Thế Tài, 9B, THCS Từ Sơn; Nam Định: Lâm Tuấn Anh, 9C, THCS Đào Sư Tích, Trục Ninh, Đỗ Thủy An, 9D, THCS Nguyễn Hiền, Nam Trực; Phạm Thị Diệp, 6A, THCS Yên Thọ, Ý Yên; Thanh Hóa: Trịnh Hùng Linh, 9C, THCS Lê Thánh Tông, Thọ Xuân, Hoàng Ngọc Toàn, 7G, THCS Lộc Tân, Hậu Lộc; Nghệ An: Lê Tuấn Hiệp, 8C, THCS Thái Sơn, Đô Lương; Hà Tĩnh: Bùi Hoàng Đan, 9/4, THCS Lê Văn Thiêm, TX Hà Tĩnh, Nguyễn Thị Cẩm Hằng, 9C, THCS Trung Lộc, Can Lộc, Nguyễn Thành Trung, 9D, THCS thị trấn Kỳ Anh; Quảng Trị: Trương Xuân Nhã, Trần Hoàng Linh, 7A, THCS Nguyễn Huệ, Đông Hà, Hoàng Thị Tú Huyền, 8E, THCS Nguyễn Trãi, Hồ Xá, Vĩnh Linh; Quảng Nam: Phan Xuân Sơn, 9, THCS Lê Quý Đôn, Thăng Bình; Đắk Lắk: Võ Văn Tuấn, 8A5, THCS Nguyễn Du, Krông Buk.

VŨ KIM THỦY

Bài T7/329. Xét các tam giác ABC với $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ có chu vi $a+b+c = k$ (không đổi). Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$T = \frac{ab}{a+b+2c} + \frac{bc}{2a+b+c} + \frac{ac}{a+2b+c}$$

Lời giải. (Của bạn Phạm Phi Diệp, 6A, THCS Yên Thọ, Ý Yên, Nam Định).

Nhận xét. $\frac{1}{x+y} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) \forall x, y > 0$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = y$.

Nhận xét trên rất quen thuộc và đơn giản, việc chứng minh xin dành cho bạn đọc.

Theo nhận xét trên ta có:

$$\frac{ab}{a+b+2c} = \frac{ab}{(a+c)+(b+c)} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{ab}{a+c} + \frac{ab}{b+c} \right)$$

Tương tự như trên, ta có:

$$\frac{bc}{b+c+2a} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{bc}{b+a} + \frac{bc}{c+a} \right)$$

$$\frac{ca}{c+a+2b} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{ca}{c+b} + \frac{ca}{a+b} \right)$$

Vậy, ta có:

$$\begin{aligned} T &\leq \frac{1}{4} \left(\frac{bc}{a+b} + \frac{ca}{a+b} + \frac{ca}{b+c} + \frac{ab}{b+c} + \frac{ab}{c+a} + \frac{bc}{c+a} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{(b+a)c}{a+b} + \frac{(c+b)a}{b+c} + \frac{(a+c)b}{c+a} \right) \\ &= \frac{1}{4} (c+a+b) = \frac{k}{4} \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

Vậy, giá trị lớn nhất của T là $\frac{k}{4}$.

Nhận xét. Đây là bài toán dễ, khá nhiều bạn tham gia giải và đều giải đúng.

Phú Yên : Nguyễn Hoàng Linh, 7A, THCS Lê Lợi, TX. Tuy Hòa ; **Vĩnh Phúc :** Nguyễn Thị Thu Hiền, Ngô Thị Bích Phương, 9A, THCS Yên Lạc, Yên Lạc ; **Hà Nam :** Tạ Văn Hà, 9E, THCS Trần Phú, TX Phú Lý ; **Hải Dương :** Phạm Ngọc Dương, 7B, THCS Liên Hòa, Kim Thành ; **Thanh Hóa :** Trịnh Hùng Linh, 9C, THCS Lê Thánh Tông, Thọ Xuân ; **Nam Định :** Phạm Tiến Đạt, 9B, THCS Trần Huy Liệu, Vụ Bản, Cao Mạnh Hùng, 9A, THCS Yên Định, Hải Hậu ; **Hà Tây :** Lê Thanh Huỳnh, 6A, THCS Lương Mi, Chương Mỹ ; **Nghe An :** Lê Tuấn Hiệp, 8C, THCS Thái Sơn, Đô Lương.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài T8/329. Cho a, b là hai số thực khác 0. Xét dãy số (u_n) ($n = 0, 1, 2, \dots$) được xác định như sau : $u_0 = 0, u_1 = 1$,

$u_{n+2} = au_{n+1} - bu_n$ với mọi $n = 2, 3, \dots$

Chứng minh rằng nếu có bốn số hạng liên tiếp của dãy là số nguyên thì mọi số hạng của dãy đều là số nguyên.

Lời giải. (Của bạn Lãng Đức Tâm, 11A1, chuyên Vĩnh Phúc).

Bằng quy nạp dễ chứng minh rằng

$$u_{n+1}^2 - u_n u_{n+2} = b^n$$

Giả sử 4 số hạng liên tiếp $u_m, u_{m+1}, u_{m+2}, u_{m+3} \in \mathbb{Z}$. Khi đó ta có $b^m \in \mathbb{Z}, b^{m+1} \in \mathbb{Z} \Rightarrow b \in \mathbb{Q}$. Lại có $b^m \in \mathbb{Z}$ nên suy ra $b \in \mathbb{Z}$.

Ta chứng minh $a \in \mathbb{Z}$. Thật vậy từ điều kiện

$$\begin{cases} u_{m+2} = au_{m+1} - bu_m \\ u_{m+3} = au_{m+2} - bu_{m+1} \end{cases} \text{ suy ra } a \in \mathbb{Q} \text{ (vì } a \text{ vô}$$

tỉ thì $u_{m+1} = u_{m+2} = 0 \Rightarrow b = 0$ trái giả thiết)

Xét dãy đa thức hệ số nguyên $Q_n(x)$ xác định bởi $Q_0(x) = 0, Q_1(x) = 1, Q_{n+2}(x) = xQ_{n+1}(x) - bQ_n(x)$

Bằng quy nạp dễ chứng minh được $Q_n(x)$ là đa thức hệ số nguyên ($n \geq 1$) có $\deg Q_n = n - 1$, hệ số cao nhất bằng 1 và $Q_n(a) = u_n$. Đặc biệt $Q_{m+1}(a) = u_{m+1}$. Vậy a là nghiệm hữu tỉ của đa thức hệ số nguyên $Q_{m+1}(x) - u_{m+1}$ với hệ số cao nhất bằng 1. Vậy $a \in \mathbb{Z}$. Vì $a, b \in \mathbb{Z}$ nên $u_n \in \mathbb{Z}$ với mọi n .

Nhận xét. 1) Sau khi chứng minh được $a \in \mathbb{Z}$ có thể giải theo cách khác như sau (Của bạn Nguyễn Trọng Hòa, 12T, THPT Lam Sơn, Thanh Hóa)

Đặt $a = \frac{p}{q}$ với $(p, q) = 1, v_n = q^{n-1} u_n$. Khi đó $v_0 = 0$,

$$v_1 = 1 \text{ và } v_{n+2} = pv_{n+1} - bq^2 v_n.$$

Từ đó suy ra $v_n \in \mathbb{Z} (\forall n)$ và $v_n \equiv p^{n-1} \pmod{q}$ hay $q^{n-1} u_n \equiv p^{n-1} \pmod{q}$. Đặc biệt do $u_{m+2} \in \mathbb{Z}$ nên $p^{m+1} : q \Rightarrow q = 1$.

2) Bài này có số bạn tham gia giải không nhiều và trong số đó có không ít lời giải chưa chặt chẽ.

Các bạn có lời giải tốt : **Trịnh Hà Linh**, 10 chuyên Lam Sơn, **Thanh Hóa** ; **Lê Bá Khiết**, 12T, THPT chuyên Lương Thế Vinh, **Đồng Nai**, **Lê Công Tuyển**, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc, **Trương Ngọc Sơn**, 10T, THPT Nguyễn Trãi, **Hải Dương**.

DẶNG HÙNG THẮNG

Bài T9/329. Tìm tất cả các giá trị của tham số p sao cho các nghiệm x_1, x_2, x_3 của phương trình $x^3 - 3x^2 - px - 1 = 0$ thỏa mãn

$$\frac{1}{2005} < \frac{1}{(x_1-1)^3} + \frac{1}{(x_2-1)^3} + \frac{1}{(x_3-1)^3} < \frac{1}{2004}$$

Lời giải. Cách 1. (Của bạn Hoàng Vũ Hạnh và các bạn 10T, THPT chuyên Lam Sơn, Thanh Hóa). Theo định lý Vi-ét, ta có

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 = -p \\ x_1 x_2 x_3 = 1 \end{cases} \quad (1)$$

$$(2)$$

$$(3)$$

Từ (3) suy ra các số thực x_1, x_2, x_3 hoặc cùng dương hoặc có 1 số dương và 2 số âm.

Nếu cả ba số đều dương thì theo BĐT giữa trung bình cộng và trung bình nhân, ta thu được

$3 = x_1 + x_2 + x_3 \geq 3 \sqrt[3]{x_1 x_2 x_3} = 3$, tức là $x_1 = x_2 = x_3 = 1$, điều này không xảy ra vì biểu thức vô nghĩa.

Nếu có 1 số dương và 2 số âm (chẳng hạn $x_2 < 0, x_3 < 0$) thì

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x_1-1)^3} &= \frac{1}{(1-x_2+1-x_3)^3} < \\ &< \frac{4}{(1-x_2)^3 + (1-x_3)^3} < \frac{1}{(1-x_2)^3} + \frac{1}{(1-x_3)^3} \end{aligned}$$

Từ đó suy ra

$$\frac{1}{(x_1-1)^3} + \frac{1}{(x_2-1)^3} + \frac{1}{(x_3-1)^3} < 0 < \frac{1}{2005}$$

Vậy không tồn tại số thực p thỏa mãn yêu cầu bài ra.

Cách 2. (Của đa số các bạn)

Theo định lí Vi-et ta có (1) (2) (3) như trên

Từ phương trình đã cho suy ra

$$(x-1)^3 = (p+3)x$$

Từ đó và giả thiết ta có

$$\frac{1}{2005} < \frac{1}{p+3} \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} \right) < \frac{1}{2004}$$

$$\text{Suy ra } \frac{1}{2005} < \frac{-p}{p+3} < \frac{1}{2004}$$

$$\text{hay } \frac{-3}{2005} < p < \frac{-3}{2006} \quad (4)$$

$$\text{Đặt } x = 1 + 2\sqrt{\frac{p+3}{3}} y, \text{ ta thu được}$$

$$4y^3 - 3y = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{p+3}} (> 1)$$

Suy ra phương trình chỉ có một nghiệm thực, trái với giả thiết.

Nhận xét. 1) Nếu xét trên trường số phức thì kết quả (4) thỏa mãn yêu cầu bài ra vì Định lí Vi-et vẫn đúng trong trường hợp các nghiệm là phức. Đây là một bài toán loại dễ và đơn giản nên có nhiều bạn có lời giải, tuy nhiên rất ít bạn có lời giải đúng. Một số bạn còn sử dụng

đạo hàm để khảo sát hàm số $f(x) = x^2 - 3x - \frac{1}{x}$ lấy giá trị bằng số thực p , suy ra phương trình ban đầu có ba nghiệm thực khi $p \geq f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{15}{4}$. Điều kiện đó không thỏa mãn (4).

2) Các bạn sau đây có lời giải đúng :

Hà Nội : Hà Minh Tuấn, 10A2, THPT chuyên ĐHKHTN ; **Bắc Ninh:** Lê Quang Anh, 10T, THPT NK Hàn Thuyên ; **Hải Dương :** Đặng Văn Thanh, 11A, THPT Khúc Thừa Dụ, Ninh Giang ; **Hải Phòng:** Phạm Trung Đoàn, 12A1, THPT Vĩnh Bảo ; **Hưng Yên :** Bùi Quang Huy, Vũ Thanh Xuân, 11T, THPT chuyên ; **Nam Định :** Vương Hồng Quang, 11B5, THPT A Hải Hậu ; **Lạng Sơn :** Lý Hoàng Đại, 11A, THPT Chu Văn An ; **Quảng Bình :** Trương Phúc Thọ, 12AT, THPT chuyên; **Phú Yên :** Phạm Văn Huy, 10T, THPT chuyên Lương Văn Chánh ; **Thái Bình :** Bùi Hải Âu, 12A2, THPT Nguyễn Đức Cảnh ; **Thanh Hóa :** Nguyễn Phương Hoàng, 11B1, THPT Lê Văn Hưu ; **Ninh Bình :** Tạ Đức Hải, 12B2, THPT Kim Sơn A ; **Bắc Giang :** Trần Văn Long, 12A7, THPT Yên Dũng ; **Quảng Trị :** Trần Hoàn Vinh, 7A, THCS Nguyễn Huệ, Đông Hà ; **Quảng Ngãi :** Lương Bá Linh, Nguyễn Tấn Việt, Phạm Tấn Đạo, Lê Đức Ý, 11T, THPT chuyên Lê Khiết ; **Quảng Ninh:** Hoàng Trung Hiếu, 11t, THPT Yên Hưng; **Phú Thọ:** Nguyễn Quang Huy, 11A1, THPT chuyên.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T10/329. Cho các số dương a_i, b_i ($i = 1, 2, \dots, n$). Chứng minh rằng

$$\frac{a_1^r}{b_1^s} + \frac{a_2^r}{b_2^s} + \dots + \frac{a_n^r}{b_n^s} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^r}{n^{r-s-1} (b_1 + b_2 + \dots + b_n)^s}$$

trong đó r, s là các số hữu tỉ dương và $r \geq s+1$.

$$\text{Lời giải. Đặt } A_i = \frac{na_i}{a_1 + a_2 + \dots + a_n},$$

$$B_i = \frac{nb_i}{b_1 + b_2 + \dots + b_n}, i = 1, 2, \dots, n.$$

Bất đẳng thức (BĐT) cần chứng minh tương đương với BĐT sau :

$$\frac{A_1^r}{B_1^s} + \frac{A_2^r}{B_2^s} + \dots + \frac{A_n^r}{B_n^s} \geq n \quad (1)$$

Do r, s là các số hữu tỉ dương và $r \geq s+1$ nên r, s viết được dưới dạng $r = \frac{p}{q}, s = \frac{k}{q}$, trong đó $p, q, k \in \mathbb{N}^*, p \geq k+q$.

Áp dụng BĐT Cô-si cho q số $\frac{A_i^{p/q}}{B_i^{k/q}}, k$ số B_i

và $p-k-q$ số 1, ta có $q \cdot \frac{A_i^{p/q}}{B_i^{k/q}} + k \cdot B_i + p-k-q \geq p \cdot A_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$)

Cộng theo từng vế các BĐT trên được

$$q \cdot \sum_{i=1}^n \frac{A_i^{p/q}}{B_i^{k/q}} + k \sum_{i=1}^n B_i + n(p-k-q) \geq p \cdot \sum_{i=1}^n A_i \quad (2)$$

$$\text{Chú ý } \sum_{i=1}^n A_i = \sum_{i=1}^n B_i = n.$$

Do đó từ BĐT (2) ta suy ra BĐT (1).

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\frac{A_i^{p/q}}{B_i^{k/q}} = B_i \text{ với mọi } i = 1, 2, \dots, n \text{ nếu } r = s+1,$$

$$\frac{A_i^{p/q}}{B_i^{k/q}} = B_i = 1 \text{ với mọi } i = 1, 2, \dots, n \text{ nếu } r > s+1.$$

$$\text{Tức là } \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n} \text{ nếu } r = s+1$$

$$a_1 = a_2 = \dots = a_n \text{ và } b_1 = b_2 = \dots = b_n \text{ nếu } r > s+1$$

Nhận xét. Đây là bài toán mở rộng của bài T9/308 THPT số 312 tháng 6.2003 với cùng cách chứng minh. Các bạn học sinh THCS sau có lời giải đúng :

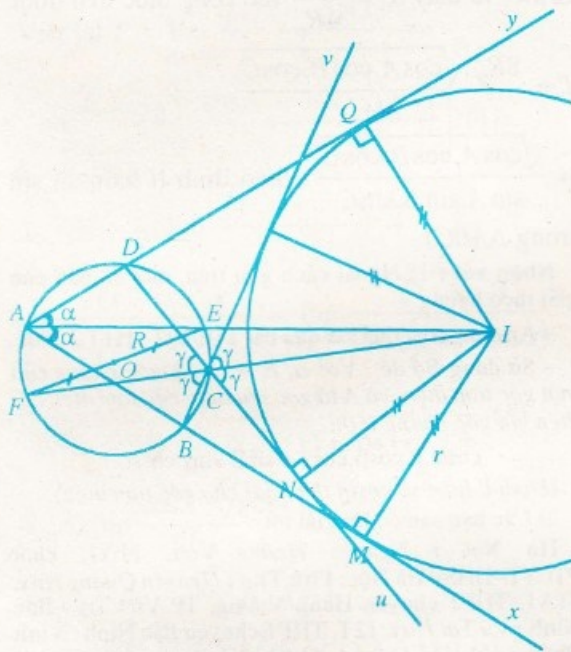
Bắc Ninh : Nguyễn Văn Luật, 9A5, THCS thị trấn Chờ, Yên Phong ; **Phú Thọ:** Nguyễn Tiến Thanh, 9C, Nguyễn Sơn Tùng, 9B, THCS Nguyễn Quang Bích, Tam Nông ; **Vĩnh Phúc :** Trần Minh Anh, 9A, THCS Lăng Công, Lập Thạch ; **Nguyễn Ngọc Đại,** 9C, THCS Vĩnh Tường ; **Thanh Hóa :** Cao Anh Tuấn, 9A, THCS Nhữ Bá Sĩ, Hoàng Hóa ; **Quảng Trị :** Trần Hoàng Anh, 7A, THCS Nguyễn Huệ, Đông Hà.

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T11/329. Giả sử tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R và các tia đối của các tia BA, DA, CB, CD cùng tiếp xúc với một đường tròn tâm I bán kính r. Đặt $d = OI$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{(d+R)^2} + \frac{1}{(d-R)^2} = \frac{1}{r^2} \quad (*)$$

Lời giải. (Dựa theo Tô Hồng Sơn, lớp 10A1, THPT Phan Bội Châu, TP. Vinh, Nghệ An)



Gọi E và F là giao điểm thứ hai của đường tròn (O, R) theo thứ tự với các đường thẳng IA và IC. Để thấy rằng E và F là trung điểm của hai cung bù nhau của (O, R) cùng căng dây cung BD, và do đó, EF là đường kính của đường tròn (O, R) vuông góc với dây BD, suy ra $OE = OF = R$. Bởi vậy ta có :

$$IE^2 + IF^2 = 2OI^2 + \frac{1}{2}EF^2, \text{ hay là}$$

$$2(d^2 + R^2) = IE^2 + IF^2 \quad (1)$$

Mặt khác, lại có :

$$\mathcal{P} \frac{1}{(O)} = \overline{IA} \cdot \overline{IE} = \overline{IC} \cdot \overline{IF}, \text{ và do đó :}$$

$$\left[\mathcal{P} \frac{1}{(O)} \right]^2 = \overline{IA}^2 \cdot \overline{IE}^2 = \overline{IC}^2 \cdot \overline{IF}^2$$

$$= (d^2 - R^2)^2 = (d+R)^2(d-R)^2 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta được :

$$\frac{1}{(d+R)^2} + \frac{1}{(d-R)^2} = \frac{2d^2 + 2R^2}{(d+R)^2(d-R)^2}$$

$$= \frac{IE^2}{IA^2 + IE^2} + \frac{IF^2}{IC^2 + IF^2} = \frac{1}{IA^2} + \frac{1}{IC^2} \quad (3)$$

Gọi M, N theo thứ tự là tiếp điểm của đường tròn (I, r) với các đường thẳng AB, CD (M trên tia đối của tia BA và N trên tia đối của tia đối của tia CD), và đặt : $\widehat{BAD} = 2\alpha$, $\widehat{BCD} = 2\gamma$. Thế thì : $\widehat{IAM} = \alpha$ và $\widehat{ICN} = \gamma$, $\alpha + \gamma = 90^\circ$ và do đó : $r = IM = IAsin\alpha = IN = ICsin\gamma = ICcos\alpha$

$$\text{Suy ra } \frac{IM^2}{IA^2} + \frac{IN^2}{IC^2} = 1 \quad (4)$$

Cuối cùng, từ (3) và (4) ta được hệ thức (*) cần tìm.

Nhận xét. 1) Trong số các lời giải của bài toán gửi đến Tòa soạn thì lời giải trên đây của bạn Tô Hồng Sơn là lời giải ngắn gọn và đẹp hơn cả. Bạn Sơn đã biết phân tích về trái của hệ thức (*) và khai thác giả thiết của bài toán, biểu thị được các đại lượng $2(d^2 + R^2)$ và $d^2 - R^2$ qua OI , IA , IE , IC và IF nhờ công thức đường trung tuyến trong tam giác và phương tích của điểm I đối với đường tròn (O, R).

2) Ta có thể gọi đường tròn (I, r) là đường tròn bàng tiếp các góc đối diện $\widehat{BAC}$ và $\widehat{BCD}$ của tứ giác nội tiếp ABCD. Và hệ thức (*) cũng xảy ra tương tự như trong trường hợp một tứ giác lồi ABCD vừa nội tiếp đường tròn (O, R), vừa ngoại tiếp đường tròn (I, r).

Chú ý rằng tứ giác lồi ABCD bàng tiếp được một đường tròn khi và chỉ khi một trong hai đường chéo chia đôi chu vi của nó, cũng tức là khi và chỉ khi hiệu các cặp cạnh đối bằng nhau hay là : $AB - CD = DA - BC$.

3) Các bài giải đều đúng nhưng một số bạn cho lời giải hơi dài. Các bạn sau đáng được biểu dương :

Hà Nội : Nguyễn Trọng Nhật Quang, 11 Toán, ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội ; **Vĩnh Phúc :** Nguyễn Hoài Nam, 10A1, Vũ Văn Quang, Lê Đức Trung, 11A1, Hà Đình Thiệu, 12A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc ; **Hải Dương :** Trương Ngọc Sơn, Đỗ Đình Thọ, 10 Toán, THPT Nguyễn Trãi, Hải Dương ; **Hưng Yên :** Bùi Quang Huy, 11 Toán, THPT chuyên Hưng Yên ; **Thanh Hóa :** Hoàng Vũ Hạnh, Trịnh Huy Giang, Vũ Văn Tân, Trịnh Hà Linh, 10 Toán, THPT Lam Sơn ; **Nghệ An :** Phùng Bá Đại, 11A1, THPT Bắc Yên Thành ; **Thừa Thiên - Huế :** Trần Quốc Toàn, 11 Toán, ĐHKHTN Huế ; **Đồng Nai :** Lê Bá Khiết, THPT chuyên Lương Thế Vinh, Biên Hòa ; **TP Hồ Chí Minh :** Nguyễn Tuấn Tú, THPT Lê Hồng Phong.

NGUYỄN ĐĂNG PHÁT

Bài T12/329. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD$, $AC = BD$, $BC = AD$. Gọi $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ lần lượt là số đo nhị diện có cạnh là BC, CA, AB của tứ diện đó. Chứng minh rằng

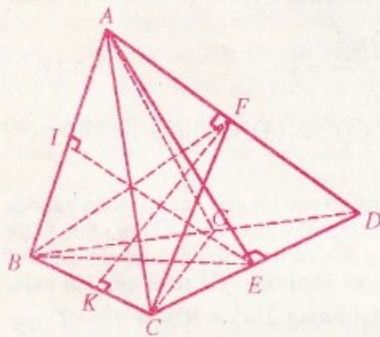
$$\cos \frac{\varphi_1}{2} \cdot \cos \frac{\varphi_2}{2} \cdot \cos \frac{\varphi_3}{2} = \frac{\sqrt{\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C}}{\sin A \cdot \sin B \cdot \sin C}$$

trong đó kí hiệu A, B, C là các góc của $\triangle ABC$.

Lời giải. **Bổ đề:** Cho tứ diện $ABCD$. Mặt phẳng phân giác của nhị diện cạnh AB có số đo φ cắt CD tại E , khi đó ta có hệ thức

$$S_{ABE} = \frac{2S_{ABC} \cdot S_{ABD} \cdot \cos \frac{\varphi}{2}}{S_{ABC} + S_{ABD}}$$

Phép chứng minh bổ đề này bạn đọc có thể



xem trong bài *Về cách xác định góc phẳng nhị diện của hình chóp* (THIT số 332, tháng 2 năm 2005). Trờ lại bài toán, đặt $AB = CD = a$, $AC = BD = b$, $BC =$

$AD = c$; S_0 là diện tích một mặt nào đó của tứ diện $ABCD$. Giả sử các mặt phân giác của nhị diện cạnh AB, BC, AC của tứ diện $ABCD$ cắt các cạnh đối diện lần lượt tại E, F, G . Từ tính chất mặt phẳng phân giác và để ý rằng diện tích các mặt của tứ diện gần đều $ABCD$ bằng nhau, suy ra E, F, G tương ứng là trung điểm của CD, AD, BD . Sử dụng bổ đề trên, ta có

$$S_{BCF} = \frac{2S_0^2 \cdot \cos \frac{\varphi_1}{2}}{S_0 + S_0} = S_0 \cdot \cos \frac{\varphi_1}{2};$$

$$S_{ACG} = S_0 \cdot \cos \frac{\varphi_2}{2}; S_{ABE} = S_0 \cdot \cos \frac{\varphi_3}{2}.$$

Ta có:

$$T = \cos \frac{\varphi_1}{2} \cdot \cos \frac{\varphi_2}{2} \cdot \cos \frac{\varphi_3}{2} = \frac{S_{ABE} \cdot S_{ACG} \cdot S_{BCF}}{S_0^3} \quad (1)$$

Gọi I là trung điểm AB thì $EI \perp AB$, vậy $S_{ABE} = \frac{1}{2} IE \cdot AB$. Dùng định lí Pi-ta-go và công thức đường trung tuyến trong tam giác tính được

$$IE = \sqrt{\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}}. \text{ Do đó } S_{ABE} = \frac{a}{2} \sqrt{\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}}.$$

Tương tự

$$S_{ACG} = \frac{b}{2} \sqrt{\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2}}, S_{BCF} = \frac{c}{2} \sqrt{\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}}$$

Từ (1) có

$$T = \frac{abc \sqrt{\frac{1}{8}(b^2 + c^2 - a^2)(a^2 + c^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2)}}{8S_0^3} = \frac{a^2 b^2 c^2 \sqrt{\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C}}{8S_0^3} \quad (\text{áp dụng định lí hàm số cosin cho } \triangle ABC).$$

Gọi R_0 là bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ và thay $S_0 = \frac{abc}{4R_0}$ vào công thức trên được

$$T = \frac{8R_0^3 \cdot \sqrt{\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C}}{abc} = \frac{\sqrt{\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C}}{\sin A \cdot \sin B \cdot \sin C} \quad (\text{theo định lí hàm số sin trong } \triangle ABC)$$

Nhận xét: 1) Ngoài cách giải trên, một số bạn còn giải theo hướng

– Áp dụng trực tiếp kết quả bài T10/292 THIT 2.2002.

– Sử dụng **Bổ đề:** Với α, β, γ là các góc phẳng của một góc tam diện, và A là góc nhị diện của tam diện đối diện với góc phẳng α thì

$$\cos \alpha = \cos \beta \cdot \cos \gamma + \sin \beta \cdot \sin \gamma \cdot \cos A$$

(Định lí hàm số cosin thứ nhất cho góc tam diện)

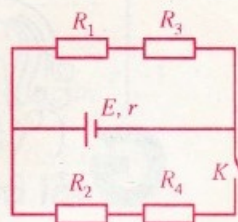
2) Các bạn sau có lời giải tốt:

Hà Nội: Nguyễn Hoàng Việt, 11A1, khối PTCTT–ĐHSP Hà Nội; **Phú Thọ:** Nguyễn Quang Huy, 11A1, THPT chuyên Hùng Vương, TP Việt Trì; **Bắc Ninh:** Vũ Tài Huy, 12T, THPT chuyên Bắc Ninh; **Vĩnh Phúc:** Vũ Văn Quang, 11A1, Hà Đình Thiệu, 12A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hải Phòng:** Phạm Duy Tùng, 11B2, THPT Kiến An; **Hải Dương:** Vũ Đình Quyên, 10T, THPT Nguyễn Trãi; **Thanh Hóa:** Trần Văn Duy, 11A1, THPT Hậu Lộc I, Hậu Lộc; **Bùi Khắc Kiên,** 11T, Nguyễn Trọng Hòa 12T, THPT chuyên Lam Sơn, **Nghe An,** Nguyễn Đức Tùng, 11A2, THPT chuyên Phan Bội Châu, TP. Vinh; **Hà Tĩnh:** Hoàng Minh Đức, 11T, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Quảng Bình:** Trương Phúc Thọ, 12T, THPT chuyên Quảng Bình; **Đà Nẵng:** Nguyễn Tường Huân, 11/1, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Quảng Ngãi:** Nguyễn Văn Cường, 11T, THPT chuyên Lê Khiết; **Đắk Lắk:** Đỗ Thanh Tùng, 10CT, THPT chuyên Nguyễn Du, TP Buôn Ma Thuột; **Lâm Đồng:** Nguyễn Quang Minh, 12T, THPT chuyên Thăng Long, TP Đà Lạt; **Đồng Nai:** Nguyễn Thế Nam, 12 Toán – Tin, THPT Lương Thế Vinh; **Bà Rịa – Vũng Tàu:** Trần Văn Linh, 11T, THPT Lê Quý Đôn, TP Vũng Tàu;

TP Hồ Chí Minh : Lê Đỗ Hoàng Long, 11CT, THPT chuyên Lê Hồng Phong ; Cần Thơ : Nguyễn Thành Công, 11A1, THPT chuyên Lý Tự Trọng, TP Cần Thơ.

HỒ QUANG VINH

Bài L1/329. Cho mạch điện như hình vẽ : Nguồn điện có $E = 18V$; $r = 6\Omega$. Các điện trở $R_1 = 2\Omega$; $R_2 = 1\Omega$. Bỏ qua điện trở dây nối và khóa K. Biết rằng khi K mở và K đóng thì công suất tiêu thụ ở mạch ngoài đều bằng $P = 12W$. Tìm các điện trở R_3 và R_4 .



Lời giải. Gọi R_n là điện trở tương đương của mạch ngoài ta có : $P_n = I^2 R_n = \left(\frac{E}{R_n + r} \right)^2 R_n$.

Thay số : $12 = \left(\frac{18}{R_n + 6} \right)^2 R_n \Rightarrow R_n^2 - 15R_n + 36 = 0$ (1) Suy ra $R_n = 3 (\Omega)$ hoặc $R_n = 12 (\Omega)$.

Khi K mở thì $R_n = R_{1n} = R_1 + R_3$ (2). Còn khi K đóng thì $R_n = R_{2n} = \frac{R_{1n}(R_2 + R_4)}{R_{1n} + R_2 + R_4}$ (3)

Từ (2) và (3) ta thấy chỉ có thể xảy ra trường hợp $R_{1n} = 12 (\Omega)$ và $R_{2n} = 3 (\Omega)$. Từ đó ta tìm được : $R_3 = 10 (\Omega)$ và $R_4 = 3 (\Omega)$

Nhận xét. Các bạn có lời giải gọn và đáp số đúng :
 Bắc Ninh : Nguyễn Công Dương, 11 Lí, THPT chuyên Bắc Ninh ; Bắc Giang : Phạm Thế Mạnh, Dương Trung Hiếu, 12B, THPT NK Ngô Sĩ Liên ; Vĩnh Phúc : Nguyễn Ngọc Hưng, Ngô Việt Cường, 11A3, Nguyễn Minh Phương, Nguyễn Văn Bắc, 10A3 THPT chuyên Vĩnh Phúc ; Phú Thọ : Nguyễn Hữu Toàn, 10 chuyên Lí, Nguyễn Vũ Long, 11B1, THPT chuyên Hùng Vương ; Hưng Yên : Phạm Quốc Việt, Nguyễn Tuấn Anh, 12 Lí, THPT chuyên Hưng Yên ; Nghệ An : Lê Anh Tuấn, 11A1, Nguyễn Bùi Thiệu, 11A3, Nguyễn Đức Tùng, 11A2, THPT Phan Bội Châu, Vinh ; Hải Phòng : Phạm Tuấn Hiệp, 11 Lí, THPT NK Trần Phú ; Hải Dương : Lê Hoàng Dũng, 11 Lí, THPT chuyên Nguyễn Trãi ; Bình Định : Nguyễn Hữu Nhân, 12 Lí, THPT chuyên Lê Quý Đôn ; Hà Nội : Bùi Phi Anh, 12 Lí, THPT Hà Nội - Amsterdam ; Yên Bái : Trần Quảng Khải, 11 Lí, K14, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành ; Đắk Lắk : Nguyễn Thành Nội, 11CT, THPT Nguyễn Du, TP Buôn Ma Thuột ; Đồng Tháp : Thái Phan, 12T, THPT TX Sa Đéc ; Tiền Giang : Trương Huỳnh Thanh Trúc, 12 Lí, THPT chuyên Tiền Giang ; Quảng Ngãi : Lê Hà Kiệt, 12A2, THPT Đức Phổ 1, Nguyễn Tuấn Duy, 12 Lí, THPT Lê Khiết ; Thanh Hóa : Nguyễn Mạnh Cường, 10F, Trần Đại Dương, 11F, THPT chuyên Lam Sơn, Lê Thị Văn Anh, 10A1, THPT Đồng Sơn I ; Ninh Bình : Ngô Bảo Ngọc, 11A3, THPT Lương Văn Tụy.

MAI ANH

Bài L2/329. Một khối khí có $M = 29g/mol$ đựng trong một bình hình hộp chữ nhật với áp suất $p = 1atm$ và thể tích $V = 5$ lít. Đáy dưới A của bình có nhiệt độ $T_o = 300K$, đáy trên B có nhiệt độ $T_B = 350K$ và nhiệt độ của khí được duy trì tăng đều đặn từ đáy A tới đáy B. Hãy tính khối lượng m của khối khí ; cho biết $R = 0,082lit.atm/K$.

Lời giải. Xét một lớp mỏng khối khí song song với đáy bình có thể tích dV , khối lượng dm . Từ phương trình trạng thái $pV = \frac{m}{M}RT$ ta

$$có \quad pdV = \frac{RT}{M}dm \quad (1)$$

Nhiệt độ T tại điểm cách đáy A một khoảng y là : $T = \frac{T_B - T_o}{l}y + T_o$ (2)

$$Mặt khác \quad dV = \frac{V}{l}dy \quad (3)$$

Thay (2) và (3) vào (1), rút ra :

$$dm = \frac{MpV}{R(T_B - T_o)} \cdot \frac{dy}{\left[y + \frac{2T_o}{T_B - T_o} \right]}. \text{ Từ đó :}$$

$$\int_0^m dm = \frac{MpV}{R(T_B - T_o)} \int_0^l \frac{dy}{\left[y + \frac{2T_o}{T_B - T_o} \right]}$$

$$\Rightarrow m = \frac{MpV}{R(T_B - T_o)} \ln \frac{T_B}{T_o} \approx 5,45g.$$

Nhận xét. Các bạn có lời giải gọn và đáp số đúng :
 Bắc Ninh : Nguyễn Xuân Nam, Nguyễn Minh Cường, 11 Lí, THPT chuyên Bắc Ninh ; Vĩnh Phúc : Nguyễn Đức Trọng, Nguyễn Văn Bắc, 10A3, Nguyễn Ngọc Hưng, Đoàn Anh Quân, Ngô Việt Cường, 11A3, THPT chuyên Vĩnh Phúc ; Quảng Ngãi : Đặng Đình Nhất, 12 Lí, THPT chuyên Lê Khiết ; Hải Dương : Lê Quang Vinh, 12A1, THPT Nam Sách ; Hà Tĩnh : Trần Đức Phi, 11 Lí, THPT chuyên Hà Tĩnh ; Bắc Giang : Dương Trung Hiếu, Phạm Thế Mạnh, 12B, THPT chuyên Bắc Giang ; Nghệ An : Nguyễn Bùi Thiên, 11A3, Nguyễn Mạnh Thành, A3, K31, Nguyễn Khánh Hưng, 12A3, K31, THPT Phan Bội Châu, Nghệ An ; Hưng Yên : Phạm Quốc Việt, Nguyễn Tuấn Anh, 12 Lí, THPT chuyên Hưng Yên ; Hà Nội : Bùi Phi Anh, 12 Lí, THPT Hà Nội - Amsterdam ; Thanh Hóa : Trần Đại Dương, 11 F, THPT chuyên Lam Sơn ; Thái Nguyên : Chu Tuấn Anh, 12 Lí, THPT chuyên Thái Nguyên ; Tiền Giang : Trần Thị Mỹ Phương, 12 Lí, THPT chuyên Tiền Giang ; Vĩnh Long : Huỳnh Thanh Bình, 12L, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm ; Quảng Ngãi : Nguyễn Tấn Duy, 12 Lí, THPT Lê Khiết ; Bình Định : Nguyễn Hữu Nhân, 12L, THPT chuyên Lê Quý Đôn ; Phú Thọ : Nguyễn Minh Tân, 12A4, THPT Thanh Thủy ; Gia Lai : Bùi Quang Toàn, 12C, THPT Hùng Vương.

MAI ANH



NHỮNG ĐƠN VỊ ĐO BẮT NGUỒN TỪ CUỘC SỐNG

Bạn đã biết đơn vị đo chiều dài của Anh - Mỹ foot (= 12inch $\approx$ 30,5cm) chính là chiều dài trung bình 1 bàn chân của người Âu - Mỹ. Còn inch, yard, sea mile có xuất xứ từ những chiều dài nào nhỉ?

Bạn có biết đơn vị đo nào khác và xuất xứ của nó?

VŨ ĐÔ QUAN

Thông tin thêm

THI THƠ TẾT TOÁN TUỔI TRẺ TOÀN T

Bài Tuổi trẻ thi thơ tác giả quên ghi họ tên và tên trường như số báo 1.2005 đã cho biết. Đó là bài của Phạm Văn Linh, lớp 12A1, THPT Kinh Môn, Hải Dương.

THTT

PHỦ MẶT PHẲNG... (Tiếp bài 4)

1) Với $n = 4$ thì có $\frac{1}{k} + \frac{1}{m} = \frac{5}{12} \leq \frac{2}{m}$ nên $m \leq 4$, suy ra $m = 4$ và $k = 6$.

Từ đó nếu chú ý đến sự sắp xếp bốn đa giác hoán vị vòng quanh ở đỉnh chung thì ta có đỉnh loại A dạng $(\mathcal{D}_6, \mathcal{D}_4, \mathcal{D}_3, \mathcal{D}_4)$ và đỉnh loại B dạng $(\mathcal{D}_6, \mathcal{D}_4, \mathcal{D}_4, \mathcal{D}_3)$. Tổ hợp các đa giác đều dạng này để phủ mặt phẳng ta được các hình 1, 2, 3.

2) Với $n = 3$ thì có $\frac{1}{k} + \frac{1}{m} = \frac{1}{3} \leq \frac{2}{m}$ nên $m \leq 6$.

• Với $m = 5$ thì k không nguyên.

• Với $m = 6$ thì $k = 6$. Lúc đó ta có đỉnh loại C dạng $(\mathcal{D}_6, \mathcal{D}_3, \mathcal{D}_6, \mathcal{D}_3)$ và đỉnh loại D dạng $(\mathcal{D}_6, \mathcal{D}_6, \mathcal{D}_3, \mathcal{D}_3)$ và tổ hợp các đa giác đều dạng này để phủ mặt phẳng ta có các hình 4, 5.

• Với $m = 4$ thì $k = 12$. Lúc đó (k, m, n, p) là $(12, 4, 3, 3)$. Các bạn hãy tự xét các đỉnh kề nhau để thấy rằng trường hợp này không xảy ra.



THÁNG 3 SỐ 333

Tháng 3 này tạp chí Toán học và Tuổi trẻ ra số 333. Tòa soạn đưa in từ 8.3 nhưng có bạn do ở xa nên mãi đến 26.3 mới nhận được báo. Hoàn nhận được báo liền đổ Trang hãy dùng 26 con số 3 và các phép toán $+, -, \times, :, \sqrt{\quad}, \log$, dấu ngoặc và nâng lên lũy thừa để lập các đẳng thức đúng. Trang loay hoay mãi chưa làm được. Hoàn bèn gợi ý một đẳng thức có ý nghĩa và đúng yêu cầu:

$$\log_{(3:3:3)} \left[\frac{(3 \times 3 \times 3) : (3 - 3 - 3)}{-(3 + 3 + 3)} \right]^3 = \sqrt[3]{\frac{(3 \times 3 \times 3) + (3 + 3 + 3)}{(3 - 3 - 3)}} \quad (3:3:3)$$

Bạn thử xem có những cách viết khác không nhé? Quà tặng sẽ dành cho các bạn viết được nhiều cách nhất.

BÍNH NAM HÀ

Các bạn cũng tìm kiếm thêm xem việc tổ hợp các hình ở trên đã đầy đủ chưa?

II. Trong trường hợp ở mỗi đỉnh chung có 5 đa giác đều, lập luận tương tự trên dẫn đến giải phương trình nghiệm nguyên $\frac{1}{k} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{3}{2}$.

Giả sử $k \geq m \geq n \geq p \geq q$. Giải tương tự trên ta có các nghiệm (k, m, n, p, q) là $(6, 3, 3, 3, 3)$ và $(4, 4, 3, 3, 3)$ tương ứng với các hình 6, 7, 8. Việc tổ hợp các hình dạng này để phủ mặt phẳng dành cho bạn đọc.



Hình 6



Hình 7



Hình 8

III. Nếu ở mỗi đỉnh chung có 6 đa giác đều trở lên thì chỉ xảy ra khi 6 đa giác đều là các tam giác đều, nên không thể có hai loại đa giác khác nhau.

PHI PHI



VÀI SỰ KIỆN LỊCH SỬ VỀ DẪY SỐ

NGUYỄN PHÚ LỘC

(Khoa Sư phạm, Đại học Cần Thơ)

Dãy số được học sinh phổ thông học trong chương trình Đại số và Giải tích lớp 11. Khái niệm này, thật sự xuất hiện từ thời cổ Hy Lạp và nhiều nước khác trên thế giới như ở Trung Quốc vào thế kỉ thứ 13 và 14. Ở Châu Âu cũng nhiều nhà toán học có sử dụng và nghiên cứu dãy số như Oresme (1325–1382), Stevin (1548–1620), Galileo (1564–1642), Pascal (1623–1662), Fermat (1601–1665), Descartes (1596–1650), Newton (1642–1727), Leibniz (1646–1716), Brook Taylor (1685–1731), Colin Maclaurin (1698–1746),...

Vì khuôn khổ bài viết, ở đây chúng tôi chỉ xin giới thiệu một số phát hiện về dãy số của ba nhà toán học Archimedes, Fibonacci, Leibniz mà các bạn học sinh trung học phổ thông có thể hiểu được.

1. Dãy số đã xuất hiện từ cổ Hy Lạp khi nhiều nhà toán học cổ đã dùng phương pháp "vét cạn" (lập luận dựa theo dãy số) để đo diện tích các hình. Đặc biệt Archimedes (287–212 trước Công nguyên) đã sử dụng một kĩ thuật lập luận được gọi là "Phương pháp" ("method") để đạt được một số kết quả đáng chú ý về diện tích các hình và thể tích các khối. Ông đã xây dựng nhiều ví dụ và cố gắng giải thích bằng cách nào mà các tổng vô hạn của một dãy số có những kết quả hữu hạn. Chẳng hạn, khi tìm ra công thức : diện tích phần giới hạn bởi một cung

parabol và dây cung là luôn bằng bốn phần ba tích của đáy với chiều cao, Archimedes đã phải giải một bài toán về dãy số (bằng trực giác) :

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^n} + \dots = \frac{4}{3}$$

Để đạt được kết quả trên Archimedes nhận thấy rằng : $\frac{1}{4^k} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^k} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^{k-1}}$

$$\begin{aligned} \text{Do đó } 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \left(\frac{1}{4^n} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^n} \right) \\ = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \left(\frac{1}{4^{n-1}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^{n-1}} \right) = \\ = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Kết quả trên dẫn đến

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \left(\frac{1}{4^n} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^n} \right) = \frac{4}{3} \quad (*)$$

Khi n thật lớn, từ (*) suy ra

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^n} + \dots = \frac{4}{3}$$

Công trình của Archimedes về dãy không thật sự hoàn hảo hay tỉ mỉ như những nghiên cứu sau này về dãy và chuỗi, chẳng hạn như của Newton và Leibniz. Nhưng nó cũng là kết quả thật đáng kinh ngạc. Mặc dù Archimedes làm việc trong điều kiện rất khó khăn bởi thiếu những khái niệm chính xác và hiệu quả, nhưng ông đã khám phá ra nhiều yếu tố của ngành Giải tích hiện đại về dãy và chuỗi.

2. Nhà toán học người Ý tên là Fibonacci (1170–1240) đã khám phá ra một dãy số tự nhiên (gọi là dãy Fibonacci) trong đó mỗi số bằng tổng của hai số đứng ngay trước nó (1, 1, 2, 3, 5, 8, ...) từ bài toán "thỏ đẻ con" trong cuốn sách "Liber abbaci" (Sách về bàn tính) :

Giả sử thỏ đẻ con theo quy luật là : một đôi thỏ cứ mỗi tháng đẻ được một đôi thỏ con, mỗi đôi thỏ con sau 2 tháng lại bắt đầu sinh một đôi thỏ nữa, rồi sau đó mỗi tháng tiếp tục đẻ ra một đôi thỏ, ... và giả sử tất cả các thỏ đều sống. Hỏi nếu có một đôi thỏ nuôi từ tháng giêng và đẻ vào tháng hai thì đến cuối năm có bao nhiêu chú thỏ ?

Dãy số Fibonacci có những tính chất đặc sắc và sau này người ta tìm thấy nhiều ứng dụng trong toán học và khoa học.

3. Nhà toán học Đức Leibniz – người phát minh ra phép tính vi – tích phân đã từng có những kết quả thú vị xung quanh dãy số. Khi đến Paris năm 1672, ông đã chú ý đến một sự kiện lý thú về tổng của các hiệu của các số hạng liên tiếp của một dãy số :

Cho một dãy số $a_1, a_2, \dots, a_n$

Xét dãy số $d_1, d_2, \dots, d_n$ với $d_i = a_i - a_{i-1}$. Lúc này ta có

$$d_1 + d_2 + \dots + d_n = (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \dots + (a_n - a_{n-1}) = a_n - a_1. (**)$$

Do đó tổng của các hiệu số liên tiếp bằng hiệu của số hạng đầu và số hạng cuối của dãy.

Chẳng hạn, Leibniz quan sát dãy hiệu của một dãy bình phương các số tự nhiên liên tiếp (tính cả số 0) : $0, 1, 4, \dots, n^2$ là dãy các số lẻ liên tiếp $1, 3, 5, \dots, 2n-1$ bởi vì $i^2 - (i-1)^2 = 2i - 1$. Suy ra $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$ (1)

Nếu cộng $2 + 4 + \dots + 2n$ vào hai vế của (1) ta có :

$$1 + 2 + 3 + \dots + 2n$$

$$= (1 + 3 + \dots + (2n-1)) + (1+3+ \dots + (2n-1)) + n$$

$$= (n^2) + (n^2) + n$$

$$\text{hay } 1+2+3+\dots+2n = \frac{2n}{2}(2n+1) \quad (2)$$

Nếu cộng hai vế của (2) với $(2n+1)$, ta có

$$1+2+3+\dots+2n+(2n+1) = \frac{2n+1}{2}(2n+2) \quad (3)$$

Chú ý rằng (2) và (3) cho kết quả tổng quát :

$$1+2+3+\dots+n = \frac{n}{2}(n+1) \text{ với } n \text{ là một số nguyên dương bất kì.}$$

Nếu áp dụng (**) cho dãy số $0, 1, 8, \dots$,

$$n^3 \text{ ta đạt được } 3\sum_{i=1}^n i^2 - 3\sum_{i=1}^n i + n = n^3 \text{ hay}$$

$$3\sum_{i=1}^n i^2 - 3\frac{n}{2}(n+1) + n = n^3. \text{ Giải phương trình này}$$

ta có :

$$\sum_{i=1}^n i^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$$

Các kết quả đạt được của Leibniz về tổng các số hiệu số đã gợi đến khả năng tính tổng của các chuỗi số vô hạn. Giả sử các số $b_1, b_2, \dots, b_n$

... là các hiệu số của các số hạng liên tiếp của dãy số $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ trong đó $b_i = a_i - a_{i+1}$

$$\text{Khi đó } b_1 + b_2 + \dots + b_n = a_1 - a_{n+1}$$

$$\text{Nếu có } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \text{ thì } \sum_{n=1}^{\infty} b_n = a_1 \quad (4)$$

Bây giờ nếu ta lập dãy các hiệu số của các số hạng của một cấp số nhân $1, a, a^2, \dots, a^n, \dots$ là $(1-a), (1-a)a, (1-a)a^2, \dots, (1-a)a^n, \dots$ Áp dụng

$$\text{công thức (4) ta có } \sum_{n=0}^{\infty} (1-a)a^n = 1 \text{ vì}$$

$$(1-a) + (1-a)a + (1-a)a^2 + (1-a)a^3 + \dots = 1 - a^n$$

suy ra

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$$

Nếu áp dụng (4) cho dãy nghịch đảo các số tự nhiên lẻ $1, 1/3, 1/5, \dots$ ta dễ dàng chứng minh được rằng :

$$\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \dots = \frac{1}{2}$$

Tại Paris, khi Leibniz đến thăm Christiaan Huygens (1629-1695), người đã viết luận văn "Horologium Oscillatorium" (1673) về lý thuyết đồng hồ có quả lắc, Leibniz đã mô tả kết quả về tổng các hiệu số. Khi ấy Huygens đề nghị Leibniz cố gắng tìm tổng của chuỗi

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{n(n+1)/2} \dots$$

$$\text{Vì } \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}, \text{ nên}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots = \frac{1}{2} \quad (***)$$

Nhân hai vế của (***) với 2 được :

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{n(n+1)/2} = 1.$$

Đây chính là kết quả mà Huygens yêu cầu Leibniz tìm.

Các bạn có thể tìm đọc :

Edwards, C.H., *The Historical of Development of the Calculus*, Springer - Verlag, New York (1937). Katz, V.J., *History of Mathematics - An Introduction*, Addison Wesley, Amsterdam (1998).



LƯU Ý KHI GIẢI MỘT SỐ BÀI TẬP TÍNH ĐẠO HÀM – NGUYÊN HÀM

HỒ CÔNG DŨNG

Bài toán : Tính nguyên hàm : $I = \int \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}} dx$

Lời giải. Ta có :

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}} dx = \int (x-1)x^{-1/3} dx = \int (x^{2/3} - x^{-1/3}) dx = \\ &= \frac{3}{5}x^{5/3} - x^{2/3} + C \end{aligned}$$

• Có lẽ các bạn đã nhận ra bài toán ở trên là một bài tập nguyên hàm của sách giáo khoa Giải tích 12. Và lời giải trên là lời giải rất phổ biến trong học sinh và nhiều tài liệu hiện hành (riêng sách Bài tập Giải tích 12, chỉ đưa ra đáp số không giới thiệu cách giải).

• Chúng ta dễ thấy rằng lời giải trên chỉ đúng khi $x \in (0; +\infty)$, trong khi đó $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}}$ có nguyên hàm trên các khoảng $(-\infty; 0)$; $(0; +\infty)$.

Lỗi sai này được diễn ra một cách phổ biến ở nhiều bài tập kiểu này vì khi tính nguyên hàm người giải ít có thói quen lưu ý đến miền liên tục của hàm số (dĩ nhiên không yêu cầu chứng minh, chỉ lưu ý để thực hiện đúng các phép toán) và miền xác định của hàm lũy thừa với số mũ hữu tỉ không nguyên hoặc vô tỉ.

• Tôi xin đề nghị một lời giải cho bài toán trên :

+ Với $x \in (0; +\infty)$ thì giải như trên.

+ Với $x \in (-\infty; 0)$. Ta có :

$$\begin{aligned} \int \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}} dx &= \int \frac{(-x)+1}{\sqrt[3]{-x}} dx \\ &= \int [(-x)^{2/3} + (-x)^{-1/3}] dx \\ &= -\frac{3}{5}(-x)^{5/3} - \frac{3}{2}(-x)^{2/3} + C \\ &= -\frac{3}{5}\sqrt[3]{(-x)^5} - \frac{3}{2}\sqrt[3]{(-x)^2} + C \\ &= \frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5} - \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + C \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \int \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}} dx = \frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5} - \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + C, \forall x \neq 0.$$

• Tương tự như vậy, trong phần bài tập ôn chương I (Đạo hàm) của Giải tích 12, khi giải các bạn cần cẩn thận với các phép biến đổi về lũy thừa của các bài tập dạng dưới đây :

Tìm đạo hàm của các hàm số sau :

a) $y = \frac{a}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{b}{x\sqrt[3]{x}}$; b) $\sqrt[3]{a+bx^3}$;

c) $y = x^2 \cdot \sqrt[3]{x^2}$.

TIN BUỒN

Tòa soạn tạp chí THPT vô cùng thương tiếc báo tin : Nhà giáo **Hồ Công Dũng** sinh ngày 20 tháng 4 năm 1962 tại Thuận An, Thừa Thiên – Huế, đã dạy học tại các trường THPT Hàm Thuận, Thuận Hải, trường THPT chuyên Trần Hưng Đạo, Bình Thuận và là Chủ tịch Hội đồng Quản trị trường THPT dân lập Lê Lợi thành phố Phan Thiết tỉnh Bình Thuận, do căn bệnh hiểm nghèo đã đột ngột qua đời hồi 6 giờ 30 phút ngày 22 tháng 2 năm 2005.

Nhà giáo Hồ Công Dũng đã có nhiều bài viết trên tạp chí Toán học và Tuổi trẻ, là cộng tác viên thân thiết của tờ báo.

Tòa soạn xin chia buồn cùng gia quyến và nhà trường.

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ Mathematics and Youth Magazine

XUẤT BẢN TỪ 1964

Số 333 (3-2005)

Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội

ĐT - Fax : 04.5144272

Email : toanhocct@yahoo.com

TRONG SỐ NÀY

- 1 **Dành cho Trung học Cơ sở – For Lower Secondary Schools**
Phạm Bắc Phú – Giải phương trình vô tỉ bằng cách dùng các biểu thức liên hợp.
- 3 **Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 trường THPT Chu Văn An và THPT Hà Nội – Amsterdam năm 2004.**
- 4 **Chuẩn bị thi vào Đại học – University Entrance Preparation**
Giúp bạn tự ôn thi Đề ôn luyện số 2 – Giải đề ôn luyện số 1.
- 6 **Phương pháp giải toán – Math Problem Solving**
Phạm Quốc Phong – Phương pháp tách bộ phận kép để tìm giới hạn của phân thức chứa căn.
- 8 **Bạn có biết ? – Do You Know ?**
Hàn Ngọc Đức – GIMPS và số nguyên tố Mersenne lớn nhất cho đến nay.
- 9 **Gương học tập và nghiên cứu khoa học – Cô sinh viên Việt Nam xuất sắc .**
- 10 **Hà Huy Khoái – Giải thưởng Lê Văn Thiêm 2004.**
- 11 **Đề thi giải toán trên máy tính bỏ túi qua tạp chí THPT 3.2005. Kết quả cuộc thi 1.2005.**
- 14 **Đề ra kì này – Problems in This Issue**
T1/333, ..., T12/333, L1, L2/333
- 16 **Giải bài kì trước – Solutions to Previous Problems.**
Giải các bài của số 329.
- 24 **Câu lạc bộ – Math Club**
- 24 **Giải trí toán học – Math Recreation**
- 25 **Lịch sử toán học - History of Math**
Nguyễn Phú Lộc – Vài sự kiện lịch sử về dãy số.
- 27 **Sai lầm ở đâu - Where's the Mistake ?**

Bìa 1 : Ảnh trên - Lễ trao giải thưởng Lê Văn Thiêm năm 2004.

Ảnh dưới : Lãnh đạo Hội Toán học VN, một số Trường đoàn, Phó trưởng đoàn, đoàn viên đã tham dự thi Toán Quốc tế.

Bìa 2 : Hội thi cán bộ, giáo viên thư viện giỏi toàn quốc lần thứ hai

Bìa 4 : Toán học muôn màu – Multifarious Mathematics
Phủ mặt phẳng mà ở mỗi đỉnh chung có nhiều hơn 3 đa giác đều

Tổng biên tập :
NGUYỄN CẢNH TOÀN

Chịu trách nhiệm xuất bản :
Chủ tịch HĐQT kiêm Tổng Giám đốc NXB Giáo dục
NGÔ TRẦN ÁI
Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập NXB Giáo dục
VŨ DƯƠNG THUY

Trưởng ban biên tập : NGUYỄN VIỆT HẢI

Thư kí Tòa soạn : VŨ KIM THUY

Biên tập : HỒ QUANG VINH

Trị sự, Chế bản : VŨ ANH THƯ – NGUYỄN THỊ OANH

Đại diện phía Nam : TRẦN CHÍ HIẾU, 231 Nguyễn Văn Cừ, Q. 5, Tp. Hồ Chí Minh. ĐT : 08.8309049

ĐÓN ĐỌC THPT SỐ 334 (4/2005)

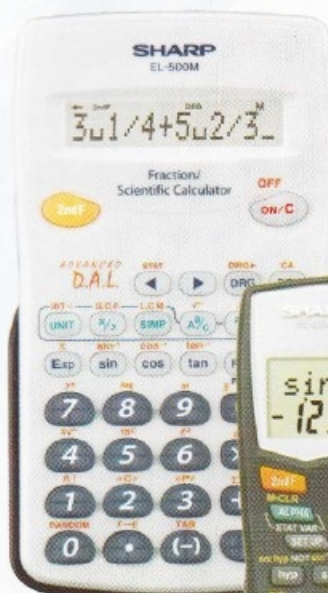
- Hướng dẫn giải đề thi tuyển sinh vào lớp 10 các trường THPT Hà Nội - Amsterdam và Chu Văn An, Hà Nội.
 - Hướng dẫn giải đề ôn luyện số 2. Đề ôn luyện số 3.
 - Bất đẳng thức Trê-bư-sep và xu hướng hôn nhân
 - Mời các bạn tham gia Cuộc thi mới Xuân ra đề - Hè giải đáp.
 - Lưu ý khi sử dụng phương pháp lượng giác để giải toán đại số
- Mời các bạn đặt mua Tạp chí THPT tại Bưu điện.

THPT

SHARP
SHARP CORPORATION OSAKA, JAPAN

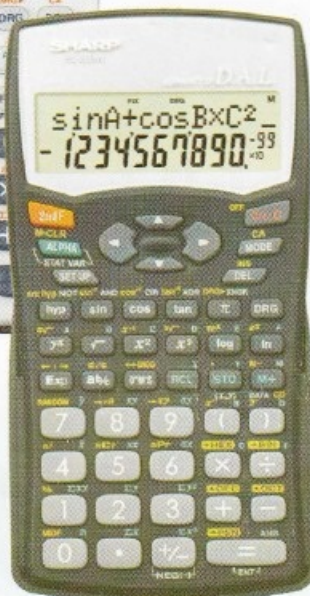
MÁY TÍNH KHOA HỌC

CHẤT LƯỢNG, HIỆU QUẢ, TIẾT KIỆM HƠN
VỚI NHỮNG TÍNH NĂNG **VƯỢT TRỘI**



EL - 500M

- Có 131 chức năng.
- Màn hình hiển thị 11 số (Kết quả hiển thị 10+2 số).
- Chuyển đổi giữa phân số và số thập phân.
- Tính toán trên hỗn số, phân số và số thập phân.
- Tính phần trăm, lũy thừa, căn thức, thống kê.
- Tính Logarit, lượng giác, tổ hợp, chỉnh hợp.
- Thích hợp nhất cho học sinh cấp II.



EL - 509W

- Có 272 chức năng.
- Màn hình 2 dòng (Dòng trên hiển thị 12 số, dòng dưới hiển thị 10+2 số).
- Thích hợp nhất cho học sinh cấp III.
- Đầy đủ các chức năng của máy EL-500M.

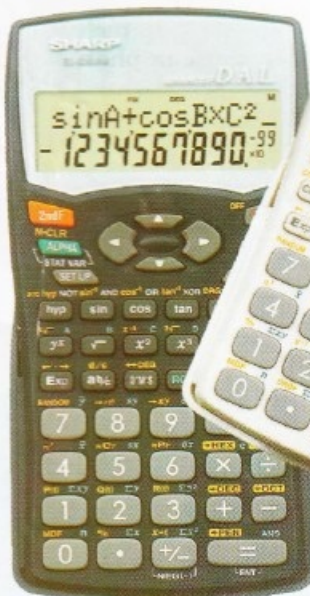
Bổ xung các chức năng sau:

- Giải phương trình hồi quy.
- Tính toán có sử dụng ô nhớ.
- Tính số ngẫu nhiên.
- Tính đạo hàm, tích phân, thống kê.



EL - 9900

- Màn hình hiển thị được 132 x 64 điểm ảnh.
- Có 827 chức năng.
- Khả năng lưu trữ 64 KB.
- Có đầy đủ các chức năng của máy EL-9400.
- Có chức năng vẽ đồ thị.
- Bàn phím với 2 chế độ (chuyên sâu & cơ bản).
- Thích hợp cho nghiên cứu và giảng dạy.



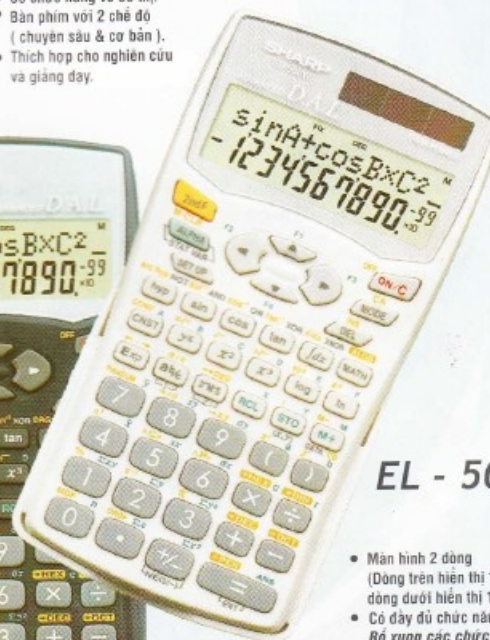
EL - 509WM

- Màn hình 2 dòng (Dòng trên hiển thị 12 số, dòng dưới hiển thị 10+2 số).
- Thích hợp nhất cho học sinh cấp III.
- Đầy đủ các chức năng của máy EL-509W.



ZQ - P10

- Màn hình hiển thị 12 cột & 3 dòng.
- Khả năng lưu trữ 96 KB tương đương 1,500 tên và số điện thoại.

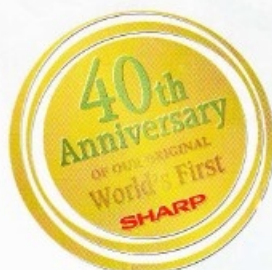


EL - 506W

- Màn hình 2 dòng (Dòng trên hiển thị 12 số, dòng dưới hiển thị 10+2 số).
- Có đầy đủ chức năng của EL-509W.
- Bổ xung các chức năng sau:**
- Giải phương trình bậc I, II, III.
- Giải hệ phương trình bậc I với 2 và 3 ẩn.
- Tính toán với số phức, ma trận, vector, trong dạng đại số và lượng giác.
- Thích hợp nhất cho SV Đại học.

Bổ xung các chức năng sau:

- Giải phương trình bậc I, II, III.
- Giải phương trình hồi quy.
- Tính toán có sử dụng ô nhớ.
- Tính số ngẫu nhiên.
- Tính đạo hàm, tích phân, thống kê.



- Toàn bộ máy tính **SHARP** chính hiệu đều được dán tem chống hàng giả. Tem do Trung tâm kỹ thuật tài liệu nghiệp vụ - Bộ Công An phát hành.
- Máy tính **SHARP** chính hiệu được bảo hành 1 năm.

Đơn vị Nhập khẩu & Phân phối duy nhất tại Việt Nam



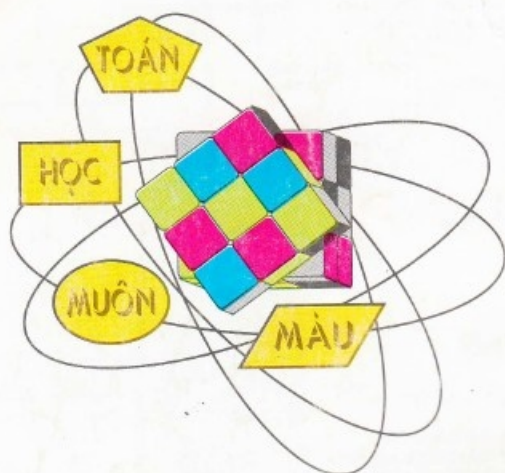
CÔNG TY CỔ PHẦN XUẤT NHẬP KHẨU LÊ MINH
LEMINH IMPORT EXPORTATION JOINT STOCK COMPANY

VĂN PHÒNG TẠI HÀ NỘI

111A - Thụy Khuê - Quận Tây Hồ, Hà Nội
ĐT: 84.4.8474577 - Fax: 84.4.8474592
E-mail: limexhn@hn.vnn.vn

VĂN PHÒNG TẠI HỒ CHÍ MINH

164 Đường Cộng Hòa, P.12, Quận Tân Bình, HCM
ĐT: 84.8.8116417 - Fax: 84.8.8424237
E-mail: limexhcm@hcm.vnn.vn

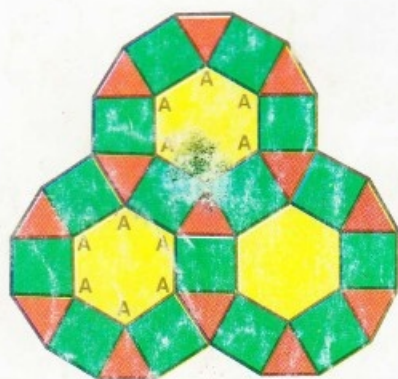


PHỦ MẶT PHẲNG MÀ Ở MỖI ĐỈNH CHUNG CÓ NHIỀU HƠN 3 ĐA GIÁC ĐỀU

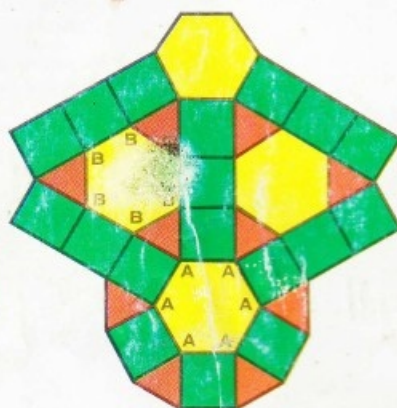
(xem THPT số 326 tháng 8.2004 và số 329 tháng 11.2004)

Xét đa giác đều $A_1A_2...A_n$ có n cạnh với tâm O , góc ở đỉnh là $\widehat{A_nA_1A_2} = \alpha$ ta có $180^\circ = \widehat{OA_1A_2} + \widehat{OA_2A_1} + \widehat{A_1OA_2} = \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} + \frac{360^\circ}{n}$ suy ra $\alpha = 180^\circ \left(1 - \frac{2}{n}\right)$.

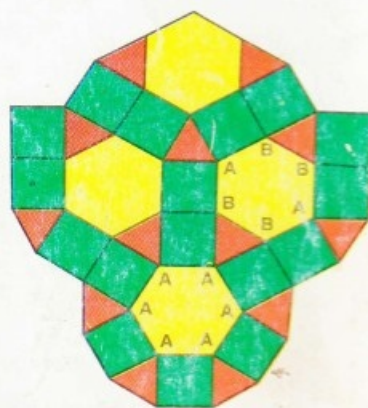
I. Giả sử ở mỗi đỉnh chung có bốn đa giác đều k, m, n, p cạnh (tất cả các cạnh bằng nhau) là $\mathcal{D}_k, \mathcal{D}_m, \mathcal{D}_n, \mathcal{D}_p$



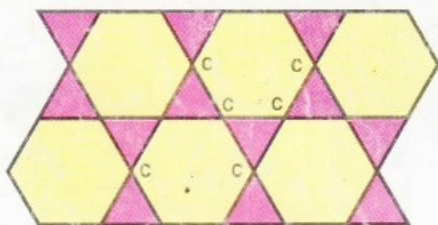
Hình 1



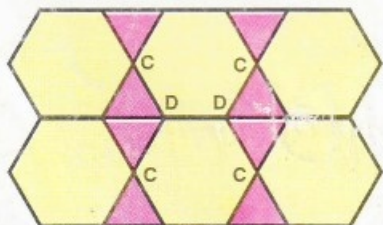
Hình 2



Hình 3



Hình 4



Hình 5

với các góc ở đỉnh là $\alpha_k, \alpha_m, \alpha_n, \alpha_p$. Điều kiện để bốn đa giác này có chung đỉnh và phủ kín mặt phẳng là

$$\alpha_k + \alpha_m + \alpha_n + \alpha_p = 360^\circ, \text{ suy ra } \frac{1}{k} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} = 1 \quad (1)$$

$$\text{Giả sử } k \geq m \geq n \geq p \quad (2)$$

Dễ thấy $\frac{1}{k} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} \leq \frac{4}{p}$ nên từ (1) suy ra $p \leq 4$.

Xét các trường hợp sau :

$$\text{a) Nếu } p = 4 \text{ thì từ (1) có } \frac{1}{k} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{3}{4} \leq \frac{3}{n} \text{ nên } n \leq 4.$$

$$\text{Kết hợp với (2) có } n = 4. \text{ Từ đó } \frac{1}{k} + \frac{1}{m} = \frac{1}{2} \leq \frac{2}{m} \text{ nên } m \leq 4.$$

Suy ra $m = 4$ và $k = 4$. Lúc đó bốn hình vuông chung đỉnh và không có hai loại đa giác khác nhau.

$$\text{b) Nếu } p = 3 \text{ thì từ (1) có } \frac{1}{k} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{2}{3} \leq \frac{3}{n} \text{ nên } n \leq 4.$$

(Xem tiếp trang 24)

ISSN : 0866-8035

Chỉ số : 12884

Mã số : 8BT35M5

Chế bản tại Tòa soạn

In tại Công ty CP in Diên Hồng, 187B Giảng Võ

In xong và nộp lưu chiểu tháng 3 năm 2005

Giá : 3500 đồng

Ba nghìn năm trăm đồng