

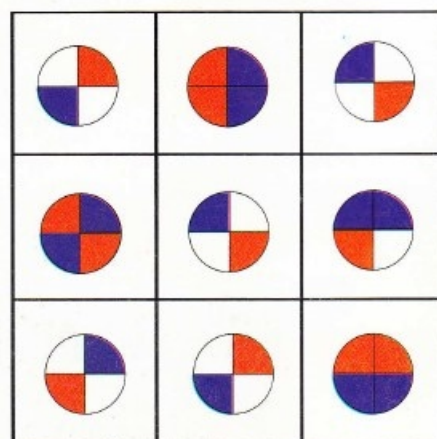
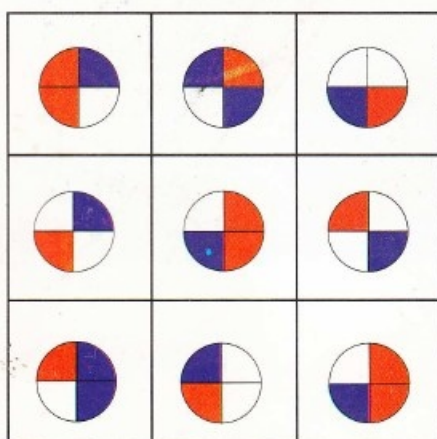
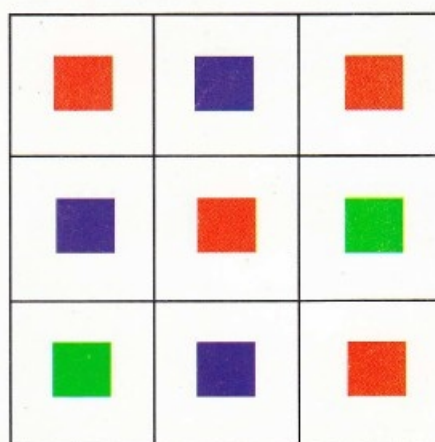
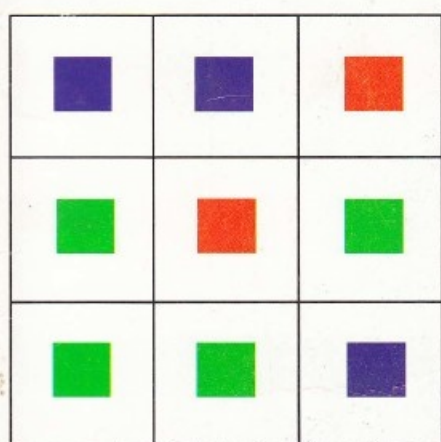
BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC



TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

12²⁰⁰⁴
SỐ 330

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 41
DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ
Trụ sở: 187 B Giảng Võ, Hà Nội. ĐT-Fax: (04) 5144272
Email: toanhocvt@yahoo.com



NGÀY 17-12-2004 LỄ KỶ NIỆM 40 NĂM TẠP CHÍ TOÁN HỌC & TUỔI TRÉ
VÀ ĐÓN NHẬN HUÂN CHƯƠNG LAO ĐỘNG HẠNG NHẤT

Chúc mừng

- * NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC TẠI THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH KỈ NIỆM 25 NĂM VÀ ĐƯỢC TẶNG HUÂN CHƯƠNG LAO ĐỘNG HẠNG NHẤT
- * CÔNG TY BẢN ĐỒ - TRANH ẢNH GIÁO KHOA KỈ NIỆM 15 NĂM VÀ ĐƯỢC TẶNG HUÂN CHƯƠNG LAO ĐỘNG HẠNG BA
- * NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC TẠI THÀNH PHỐ ĐÀ NẴNG TRÒN 10 NĂM VÀ ĐƯỢC TẶNG HUÂN CHƯƠNG LAO ĐỘNG HẠNG BA
- * ÔNG NGÔ TRẦN ÁI, CHỦ TỊCH HĐQT KIỂM TỔNG GIÁM ĐỐC NXB GIÁO DỤC ĐƯỢC TẶNG HUÂN CHƯƠNG LAO ĐỘNG HẠNG BA



Thứ trưởng Bộ GD và ĐT Nguyễn Tấn Phát trao Huân chương Lao động hạng Nhất cho NXB GD tại thành phố Hồ Chí Minh.



Thứ trưởng Bộ GD và ĐT Phạm Vũ Luận trao Huân chương Lao động hạng Ba cho Công ty Bản đồ - Tranh ảnh giáo khoa.



Phó Chủ tịch UBND thành phố Đà Nẵng Trần Phước Chính trao huân chương Lao động hạng Ba cho NXBGD tại thành phố Đà Nẵng.



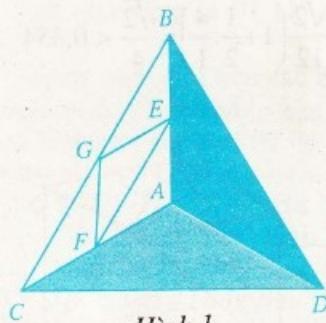
HÌNH VON KOCH

TRONG KHÔNG GIAN BA CHIỀU

TRƯƠNG CÔNG THÀNH

(NXB Giáo dục)

Trong tạp chí THPT số 329 tháng 11.2004 đã giới thiệu về một mô hình của hình học Fractal là Bông tuyết Von-Côc (Von Koch) xuất phát từ hình tam giác đều.



Hình 1

Điều bất ngờ ở ví dụ này là có thể xây dựng một dãy các hình $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3, \dots, \mathcal{H}_n, \dots$ sao cho diện tích của các hình đó tăng dần nhưng không vượt quá một đơn vị diện tích, còn số cạnh và chu vi của chúng tăng dần đến vô hạn. Trong bài này bằng cách tương tự, ta cũng xây dựng một dãy các hình trong không gian ba chiều, xuất phát từ hình tứ diện đều.

• Xét hình $\mathcal{H}_1$ là tứ diện đều ABCD có 6 cạnh với độ dài đều bằng 1 và 4 mặt, mỗi mặt là một tam giác đều (h. 1).

Diện tích toàn phần của hình $\mathcal{H}_1$ là $S_1 = 4S_{\Delta} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1 = \sqrt{3}$.

Thể tích của hình $\mathcal{H}_1$ là

$$V_1 = \frac{1}{3} S_{\Delta} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{12}$$

• Chia mỗi mặt tam giác của hình $\mathcal{H}$ ra thành bốn phần (bốn tam giác nhỏ bằng nhau) theo các đường trung bình của tam giác ban đầu, lấy tam giác nằm giữa và về phía ngoài của hình $\mathcal{H}$

dựng hình tứ diện đều (hình chóp nhỏ) với đáy là tam giác nằm giữa rồi bỏ đi tam giác nằm giữa đó ta được hình mới.

Chẳng hạn đối với mặt ABC của hình $\mathcal{H}_1$ (hình 1) thì tam giác nằm giữa là GEF, còn 3 tam giác không nằm giữa là AEF, BEG, CFG, ta dựng hình tứ diện đều đáy là GEF.

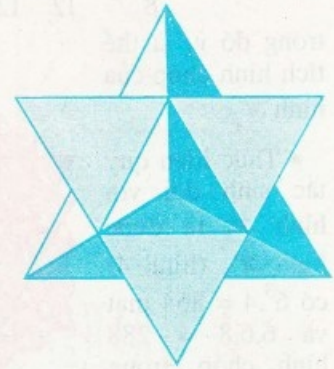
Quy tắc biến đổi hình $\mathcal{H}$ nói trên gọi là quy tắc sinh.

Khi dựng thêm hình chóp với đáy GEF trên một mặt ABC của hình $\mathcal{H}$ thì từ 1 mặt ABC của hình $\mathcal{H}$ sẽ có 6 mặt của hình mới, đó là 3 mặt tam giác nhỏ không nằm giữa của mặt ABC và 3 mặt tam giác của hình chóp mới dựng nằm về phía ngoài hình $\mathcal{H}$. Do đó nếu hình $\mathcal{H}$ gồm m mặt tam giác thì hình mới có $6m$ mặt. Vì mỗi hình chóp chỉ tính 3 mặt chung đỉnh về phía ngoài của hình $\mathcal{H}$ nên nếu hình $\mathcal{H}$ có h hình chóp thì $\mathcal{H}$ có

$$m = 3h \text{ mặt, và hình mới dựng có } \frac{6m}{3} = 2m = 6h$$

hình chóp.

• Áp dụng quy tắc sinh đối với hình tứ diện đều $\mathcal{H}_1$ (hình 1) ta được hình $\mathcal{H}_2$ có $6 \cdot 4 = 24$ mặt và $2 \cdot 4 = 8$ hình chóp (hình 2). Do 4 mặt tam giác có diện tích S_1 ta bỏ đi 4 tam giác nằm giữa có



Hình 2

diện tích là $\frac{1}{4} S_1$

và thêm 6 tam giác với diện tích như thế (6 mặt mới) nên diện tích toàn phần của hình $\mathcal{H}_2$ là

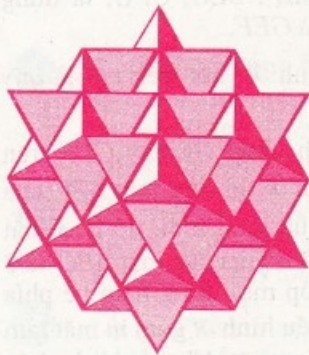
$$S_2 = S_1 \cdot \frac{6}{4} = S_1 \cdot \frac{3}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Mỗi hình chóp ở hình $\mathcal{H}_2$ có diện tích đáy bằng $\frac{1}{4}$ diện tích một mặt của hình $\mathcal{H}_1$ và chiều cao bằng $\frac{1}{2}$ chiều cao hình $\mathcal{H}_1$ nên thể tích một

hình chóp bằng $\frac{1}{8}$ thể tích hình chóp có đáy là một mặt của hình $\mathcal{H}_1$. Hình $\mathcal{H}_1$ có 4 mặt nên

hình $\mathcal{H}_2$ có 8 hình chóp, trong đó có 4 hình chóp mới dựng, do đó thể tích hình $\mathcal{H}_2$ là

$$V_2 = V_1 + 4 \cdot \frac{1}{8} \cdot V_1 = \frac{\sqrt{2}}{12} + \frac{\sqrt{2}}{12} \cdot 4 \cdot \frac{1}{8}$$



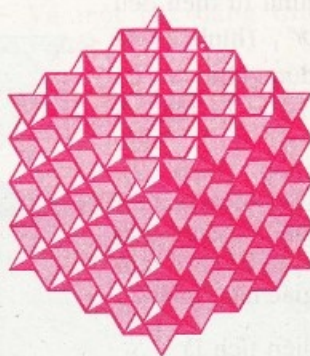
Hình 3

$$S_3 = S_2 \cdot \frac{3}{2} = \sqrt{3} \left(\frac{3}{2} \right)^2 = \frac{9\sqrt{3}}{4}$$

$$V_3 = V_2 + 6 \cdot 4 \cdot \frac{1}{8} v_2 = \frac{\sqrt{2}}{12} + \frac{\sqrt{2}}{12} \cdot 4 \cdot \frac{1}{8} + \frac{\sqrt{2}}{12} \cdot 4 \cdot 6 \cdot \left(\frac{1}{8} \right)^2$$

trong đó v_2 là thể tích hình chóp của hình $\mathcal{H}_2$.

• Thực hiện quy tắc sinh đối với hình $\mathcal{H}_3$ ta được hình $\mathcal{H}_4$ (hình 4) có $6^3 \cdot 4 = 864$ mặt và $6 \cdot 6 \cdot 8 = 288$ hình chóp, trong đó có $3 \cdot 6 \cdot 8 = 144$ hình chóp mới dựng.



Hình 4

Từ đó tính được

$$S_4 = S_3 \cdot \frac{3}{2} = \sqrt{3} \left(\frac{3}{2} \right)^3 = \frac{27\sqrt{3}}{8}$$

$$V_4 = V_3 + 6 \cdot 24 \cdot \frac{1}{8} v_3 =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{12} + \frac{\sqrt{2}}{12} \cdot 4 \cdot \frac{1}{8} + \frac{\sqrt{2}}{12} \cdot 4 \cdot 6 \cdot \left(\frac{1}{8} \right)^2 + \frac{\sqrt{2}}{12} \cdot 4 \cdot 6^2 \cdot \left(\frac{1}{8} \right)^3$$

trong đó v_3 là thể tích hình chóp của $\mathcal{H}_3$.

• Tổng quát hóa sau $n-1$ ($n \geq 2$) lần thực hiện quy tắc sinh ta được hình $\mathcal{H}_n$ có $6^{n-1} \cdot 4$ mặt,

$$6^{n-2} \cdot 8 \text{ hình chóp và } S_n = S_{n-1} \cdot \frac{3}{2} = \sqrt{3} \left(\frac{3}{2} \right)^{n-1}$$

$V_n = V_{n-1} + 6^{n-2} \cdot 4 v_{n-1}$ trong đó v_{n-1} là thể tích hình chóp của hình $\mathcal{H}_{n-1}$.

$$V_n = \frac{\sqrt{2}}{12} \left[1 + 4 \cdot \frac{1}{8} + 4 \cdot 6 \cdot \left(\frac{1}{8} \right)^2 + 4 \cdot 6^2 \cdot \left(\frac{1}{8} \right)^3 + \dots + 4 \cdot 6^{n-2} \cdot \left(\frac{1}{8} \right)^{n-1} \right]$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{12} \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4} \right)^2 + \dots + \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4} \right)^{n-2} \right]$$

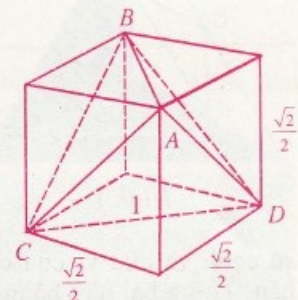
Áp dụng công thức $a(1+q+q^2+\dots+q^n) = a \cdot \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ với $q = \frac{3}{4} < 1$ rồi cho n dần tới vô hạn được

$$V = \frac{\sqrt{2}}{12} \left[1 + \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{3}{4}} \right] = \frac{\sqrt{2}}{12} \left(1 + \frac{1}{2} \cdot 4 \right) = \frac{\sqrt{2}}{4} < 0,354$$

Chú ý rằng nếu ta dựng hình lập phương có cạnh

bằng $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (đơn vị

dài) thì đường chéo của các mặt bên có độ dài 1 (đvđ) và hình tứ diện ABCD ở hình 5 bằng đúng hình $\mathcal{H}_1$. Lúc đó thể



Hình 5

tích hình lập phương là $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^3 = \frac{\sqrt{2}}{4}$, nghĩa là

thể tích hình $\mathcal{H}_n$ với n lớn tùy ý không vượt quá thể tích hình lập phương này.

Cuối cùng xin nêu hai bài tập để bạn đọc tự suy nghĩ và phát hiện thêm khi thực hiện quy tắc sinh cho các hình.

Bài 1. Cho hình vuông ABCD. Chia mỗi cạnh hình vuông thành 4 đoạn có độ dài bằng nhau $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3B = BB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3C = CC_1 = C_1C_2 = C_2C_3 = C_3D = DD_1 = D_1D_2 = D_2D_3 = D_3A$. Dựng hình vuông cạnh A_1A_2 về phía ngoài ABCD và dựng hình vuông cạnh A_2A_3 vào phía trong ABCD rồi xóa cạnh A_1A_2 và A_2A_3 .

ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN NGOẠI NGỮ TRƯỜNG ĐẠI HỌC NGOẠI NGỮ – ĐHQG HÀ NỘI NĂM 2004

MÔN THI : TOÁN

(Thời gian làm bài : 150 phút)

Bài 1. (2 điểm). Cho biểu thức

$$M = \left(\frac{2x\sqrt{x} + x - \sqrt{x}}{x\sqrt{x} - 1} - \frac{x + \sqrt{x}}{x - 1} \right) \frac{x - 1}{2x + \sqrt{x} - 1} + \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x} - 1}$$

a) Hãy tìm điều kiện của x để biểu thức M có nghĩa, sau đó rút gọn M .

b) Với giá trị nào của x thì biểu thức M đạt giá trị nhỏ nhất và tìm giá trị nhỏ nhất đó của M ?

Bài 2. (2 điểm)

a) Giải phương trình

$$(x^2 + 3x + 2)(x^2 + 7x + 12) = 24$$

b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = 2 - 5x^2 - y^2 - 4xy + 2x$$

Bài 3. (2 điểm). Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 6x^2 - 3xy + x = 1 - y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Bài 4. (3 điểm). Cho đường tròn (O) và dây

cung BC cố định. Gọi A là điểm di động trên cung lớn BC của đường tròn (O) , (A khác B, C). Tia phân giác của góc ACB cắt đường tròn (O) tại điểm D khác điểm C , lấy điểm I thuộc đoạn CD sao cho $DI = DB$. Đường thẳng BI cắt đường tròn (O) tại điểm K khác điểm B .

a) Chứng minh tam giác KAC cân.

b) Chứng minh đường thẳng AI luôn đi qua một điểm J cố định, từ đó hãy xác định vị trí của A để độ dài đoạn AI là lớn nhất.

c) Trên tia đối của tia AB lấy điểm M sao cho $AM = AC$. Tìm tập hợp các điểm M khi A di động trên cung lớn AB của đường tròn (O) .

Bài 5. (1 điểm)

Hãy tìm cặp số $(x; y)$ sao cho y nhỏ nhất thỏa mãn :

$$x^2 + 5y^2 + 2y - 4xy - 3 = 0$$

MÔN THI : VĂN - TIẾNG VIỆT

(Thời gian làm bài : 150 phút)

Câu 1. (1,5 điểm). Thế nào là câu phức thành phần vị ngữ? Cho ví dụ và phân tích ngữ pháp ví dụ đó.

Câu 2. (1,5 điểm)

Phân tích hiệu quả thẩm mĩ của các biện pháp tu từ trong hai câu thơ sau :

*Chiếc thuyền im bến mỏi trở về nằm
Nghe chất muối thấm dần trong thớ vỏ.*

(*Quê hương* - TẾ HANH)

Câu 3. (7 điểm)

*Cảnh nào cảnh chẳng đeo sầu
Người buồn cảnh có vui đâu bao giờ*

(*Truyện Kiều* - NGUYỄN DU)

Giải thích ngắn gọn cách hiểu của em về hai câu thơ trên, từ đó phân tích tám câu thơ cuối cùng của đoạn *Kiều ở Lầu Ngưng Bích* (trích *Truyện Kiều*, SGK Văn học 9, tập 1) để làm nổi bật bút pháp tả cảnh ngụ tình đã đạt đến thành công tuyệt vời của thiên tài Nguyễn Du.

• Làm tương tự như thế đối với ba cạnh còn lại. Thực hiện quy tắc sinh này nhiều lần ta được dãy các hình gọi là các hòn đảo Minkowski có diện tích bằng diện tích $ABCD$ nhưng chu vi tăng lên vô hạn.

Bài 2. Cho hình lập phương $ABCD A'B'C'D'$. Chia mỗi mặt hình vuông thành 9 hình vuông nhỏ bằng nhau (cạnh bằng $AB/3$), lấy hình vuông

nhỏ nằm giữa rồi dựng một hình lập phương có đáy là hình vuông nhỏ nằm giữa đó về phía ngoài hình lập phương đang xét và bỏ hình vuông nhỏ nằm giữa đó.

Thực hiện quy tắc sinh này n lần ta được hình đa diện có số mặt và diện tích toàn phần tăng mãi nhưng thể tích không vượt quá thể tích hình cầu ngoại tiếp hình lập phương ban đầu.

LỜI GIẢI ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN TRƯỜNG ĐẠI HỌC VINH NĂM 2004

(Đề thi đã đăng ở THPT số 329, tháng 11 năm 2004)

VÒNG I

Câu I. 1) Vì $x = \sqrt[3]{3+2\sqrt{2}} + \sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}$ nên
 $x^3 = 6 + 3(\sqrt[3]{3+2\sqrt{2}} + \sqrt[3]{3-2\sqrt{2}})$.

Do đó $x^3 = 6 + 3x$. Tương tự có $y^3 - 3y = 34$.
 Vậy $P = (x^3 - 3x) + (y^3 - 3y) + 2004 = 2044$.

2) Ta có:

$$P = \frac{\sqrt{5}-1}{5-1} + \frac{\sqrt{9}-\sqrt{5}}{9-5} + \dots + \frac{\sqrt{2005}-\sqrt{2001}}{2005-2001}$$

$$= \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1 + \sqrt{9}-\sqrt{5} + \dots + \sqrt{2005}-\sqrt{2001}) = \frac{\sqrt{2005}-1}{4}$$

Câu II. 1) ĐK $x \geq -2004$. Đặt $t^2 = x + 2004$,

$$t \geq 0 \Rightarrow t^2 - x = 2004, \text{ ta có } \begin{cases} x^2 + t = 2004 \\ t^2 - x = 2004 \end{cases}$$

$$\Rightarrow t^2 - x - x^2 - t = 0 \text{ hay } (t+x)(t-x-1) = 0$$

$$\Rightarrow t = -x \text{ hoặc } t = x + 1.$$

Từ đó PT đã cho có 2 nghiệm

$$x_1 = \frac{1-\sqrt{8017}}{2}; \quad x_2 = \frac{-1+\sqrt{8013}}{2}$$

2) PT đã cho tương đương với

$$(x-\sqrt{2})(x^2-2\sqrt{2}x-1) = 0$$

Giải PT này ta được 3 nghiệm: $x_1 = \sqrt{2}$,
 $x_2 = \sqrt{2}-\sqrt{3}$, $x_3 = \sqrt{2}+\sqrt{3}$.

Câu III. Áp dụng BĐT Cô-si cho ba số dương ta có

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 3\sqrt[3]{(abc)^2};$$

$$h_a^2 + h_b^2 + h_c^2 \geq 3\sqrt[3]{(h_a h_b h_c)^2}, \text{ suy ra}$$

$$(a^2 + b^2 + c^2)(h_a^2 + h_b^2 + h_c^2) \geq 9\sqrt[3]{(ah_a \cdot bh_b \cdot ch_c)^2} = 36.$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow a = b = c = \sqrt{\frac{4\sqrt{3}}{3}}$$

Câu IV. 1) (Hình 1). Do $\widehat{AIE} = \widehat{AJE} = 90^\circ$ nên tứ giác $AIEJ$ nội tiếp đường tròn đường kính AE . Do $\widehat{CME} = \widehat{CJE} = 90^\circ$ nên tứ giác $CMJE$ nội tiếp đường tròn đường kính CE .

2) Ta thấy $\widehat{IEM} = \widehat{AEC}$ (cùng bù với $\widehat{ABC}$) suy ra $\widehat{AEI} = \widehat{CEM}$, mặt khác $\widehat{AEI} = \widehat{AJI}$ (cùng chắn

$\widehat{AI}$), $\widehat{CEM} = \widehat{CJM}$ (cùng chắn $\widehat{CM}$), suy ra $\widehat{CJM} = \widehat{AJI}$ mà I, M nằm về hai phía của đường thẳng AC nên I, J, M thẳng hàng.

Tương tự như trên ta chứng minh được ba điểm H, M, K thẳng hàng. Do tứ giác $CFMK$

nội tiếp nên $\widehat{CFK} = \widehat{CMK}$; do tứ giác $CMJE$ nội tiếp nên $\widehat{JME} = \widehat{JCE}$. Mặt khác $\widehat{ECF} = 90^\circ$, suy ra $\widehat{CFK} = \widehat{JCE}$ ($= 90^\circ - \widehat{ACF}$). Từ đó $\widehat{CMK} = \widehat{JME} \Rightarrow \widehat{JMK} = \widehat{EMC} = 90^\circ$, hay $IJ \perp HK$.

3) Dựng $BN \perp AC$, vì $\widehat{BAC} = 60^\circ$ nên $\widehat{ABN} = 30^\circ \Rightarrow AN = \frac{AB}{2} = \frac{c}{2}$, suy ra

$$BN^2 = AB^2 - AN^2 = \frac{3c^2}{4}$$

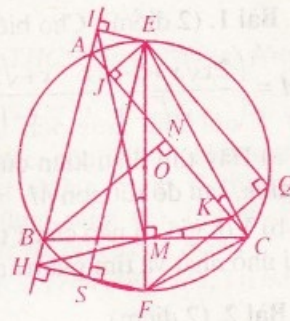
$$\Rightarrow BC^2 = BN^2 + CN^2 = \frac{3c^2}{4} + \left(b - \frac{c}{2}\right)^2 =$$

$$b^2 + c^2 - bc \text{ hay } BC = \sqrt{b^2 + c^2 - bc}.$$

Xét tam giác đều BCE có

$$R = OE = \frac{2}{3}EM = \frac{2BC\sqrt{3}}{3 \cdot 2} = \frac{1}{3}\sqrt{3(b^2 + c^2 - bc)}$$

4) Gọi S là giao điểm của FH với đường tròn (O) thì tứ giác $EIHS$ là hình chữ nhật nên $IH = ES$. Ta lại có $AB \parallel ES$ nên $\widehat{AE} = \widehat{BS}$, mà $\widehat{BE} = \widehat{CE}$ nên $\widehat{EBS} = \widehat{AEC}$, vậy $ES = AC = b \Rightarrow IH = b$. Gọi Q là giao điểm của FK với đường tròn (O) thì tứ giác $EJKQ$ là hình chữ nhật nên $JK = EQ$. Vì $EQ \parallel AC$ nên $\widehat{AE} = \widehat{CQ}$ mà $\widehat{BE} = \widehat{CE}$ nên $\widehat{EQ} = \widehat{AB}$, do đó $EQ = AB = c$, suy ra $JK = c$. Vậy $IH + JK = b + c$.



Hình 1

VÒNG II

Câu V. 1) ĐK $x \neq -3$ và $x \neq -4$. Đặt $f(x) = x^2 - 2m^2x + 2m^4 - 7m^2 + 6$. PT đã cho tương đương với $x^2 - 2m^2x + 2m^4 - 7m^2 + 6 = 0$. Vì $f(-3) = 2m^4 - m^2 + 15 \neq 0$, với mọi m và $f(-4) = 2m^4 + m^2 + 22 \neq 0$ với mọi m nên yêu cầu của bài toán tương đương với biệt số $\Delta = 0$ hay $m^4 - 7m^2 + 6 = 0$, suy ra $m = \pm 1$; $m \pm \sqrt{6}$.

2) Đặt $u = x + \frac{1}{x}$, $v = y + \frac{1}{y}$, $p = z + \frac{1}{z}$. Khi đó hệ đã cho có dạng

$$\begin{cases} u+v+p=\frac{51}{4} \\ u^2+v^2+p^2=\frac{867}{16} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3(u^2 + v^2 + p^2) = \frac{2601}{16} = \left(\frac{51}{4}\right)^2 = (u+v+p)^2 \quad (1)$$

Nhưng dễ chứng minh $3(u^2 + v^2 + p^2) \geq (u+v+p)^2$ (2), nên từ (1), (2) suy ra $u = v = p = \frac{17}{4}$. Từ đó hệ đã cho có 8 nghiệm (x, y, z) là

$$(4, 4, 4), \left(4, 4, \frac{1}{4}\right), \left(4, \frac{1}{4}, 4\right), \left(\frac{1}{4}, 4, 4\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 4\right), \left(\frac{1}{4}, 4, \frac{1}{4}\right), \left(4, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right).$$

Câu VI. Áp dụng BĐT Bu-nhi-a-cốp-xki cho hai bộ số $(3, 4)$ và $\left(\frac{x}{3}, -\frac{y}{4}\right)$ ta có

$$\left(3 \cdot \frac{x}{3} - 4 \cdot \frac{y}{4}\right)^2 \leq (3^2 + 4^2) \left(\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16}\right) = 25 \cdot 36$$

$\Rightarrow |x-y| \leq 30$. Ta thấy $|x-y| = 30$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{9} = -\frac{y}{16} \\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 36 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (x, y) = \left\{ \left(\frac{54}{5}, -\frac{96}{5}\right), \left(-\frac{54}{5}, \frac{96}{5}\right) \right\}$$

Từ đó $1974 \leq P \leq 2034$. Do đó

$$P_{\min} = 1974 \text{ đạt được khi } (x, y) = \left(-\frac{54}{5}, \frac{96}{5}\right)$$

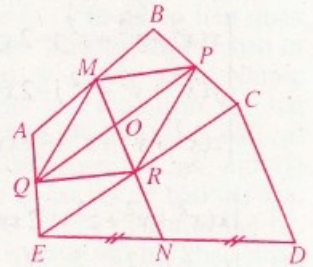
$$P_{\max} = 2034 \text{ đạt được khi } (x, y) = \left(\frac{54}{5}, -\frac{96}{5}\right).$$

Câu VII. Thử thấy $a = 1, b = 2, c = 5$ là một nghiệm của PT đã cho.

Giả sử $a = \min\{a, b, c\}$ ($a < b < c$) thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3abc$ (1), khi đó xét phương trình $(a+d)^2 + b^2 + c^2 = 3(a+d)bc$
 $\Rightarrow 2ad + d^2 = 3bcd \Rightarrow d = 3bc - 2a \in \mathbb{N}^*$
 nghĩa là phương trình (1) có nghiệm $(a'; b; c)$ ($a' = a + d$). Với điều kiện $a < b < c$ thì ta thấy: $\min\{a', b, c\} > \min\{a, b, c\} = a$.

Cứ tiếp tục như thế suy ra tồn tại một nghiệm của PT (1) thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

Câu VIII. Gọi R là trung điểm của CE . Khi đó $NR \parallel CD$ và $MPRQ$ là hình bình hành, suy ra MR đi qua trung điểm O của $PQ \Rightarrow M, O, R$ thẳng hàng.

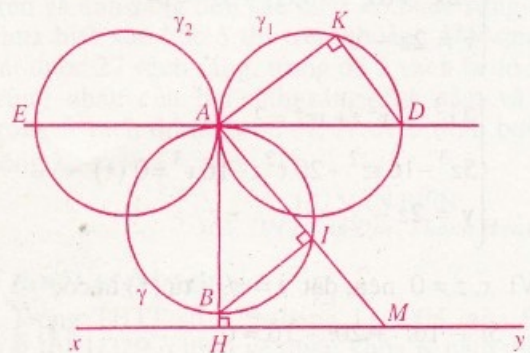


Hình 2

Giả sử $MN \parallel CD$, thì MN đi qua R nên cũng đi qua trung điểm của PQ . Đảo lại, giả sử MN đi qua trung điểm O của PQ thì MN cũng đi qua R nên $MN \parallel CD$.

Câu IX. • Tìm tập hợp điểm I

Phần thuận. Dựng $AH \perp xy$, trên AH lấy B sao cho $AB \cdot AH = k^2$, lúc đó H và B cố định. Vì $k < AH$ nên $AB < k < AH$. Do $AI \cdot AM = AB \cdot AH = k^2$



Hình 3

(Xem tiếp trang 8)

LỜI GIẢI CÁC BÀI TOÁN THI CHỌN HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA THPT MÔN TOÁN - NĂM 2004

BẢNG A

NGUYỄN KHẮC MINH

(Cục Khảo thí và Kiểm định CLGD - Bộ GD&ĐT)

Bài 1. Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x^3 + x(y-z)^2 = 2 \\ y^3 + y(z-x)^2 = 30 \\ z^3 + z(x-y)^2 = 16. \end{cases}$$

Lời giải.

Viết lại hệ đã cho dưới dạng tương đương:

$$\begin{cases} x(x^2 + y^2 + z^2) - 2xyz = 2 \\ y(x^2 + y^2 + z^2) - 2xyz = 30 \\ z(x^2 + y^2 + z^2) - 2xyz = 16 \end{cases} \quad (I)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(x^2 + y^2 + z^2) - 2xyz = 2 \\ (y-z)(x^2 + y^2 + z^2) = 14 \\ (z-x)(x^2 + y^2 + z^2) = 14 \end{cases} \quad (II)$$

Dễ thấy, $(0, 0, 0)$ không là nghiệm của hệ (II).
Do đó

$$(II) \Leftrightarrow \begin{cases} x(x^2 + y^2 + z^2) - 2xyz = 2 \\ (y-z)(x^2 + y^2 + z^2) = 14 \\ y = 2z - x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3 - 2x^2z + xz^2 = 2 \\ -2x^3 + 6x^2z - 9xz^2 + 5z^3 = 14 \\ y = 2z - x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3 - 2x^2z + xz^2 = 2 \\ 5z^3 - 16xz^2 + 20x^2z - 16x^3 = 0 (*) \\ y = 2z - x \end{cases}$$

Vì $x, z \neq 0$ nên, đặt $t = z/x$, từ (*) ta có:

$$5t^3 - 16t^2 + 20t - 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t-2)(5t^2 - 6t + 8) = 0 \Leftrightarrow t = 2.$$

Từ đó $z = 2x$. Vì vậy

$$(II) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3 - 2x^2z + xz^2 = 2 \\ z = 2x \\ y = 2z - x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = 1, y = 3 \text{ \& } z = 2.$$

Bài 2. Trong mặt phẳng, cho tam giác ABC .
Gọi D là giao điểm của cạnh AB và đường phân giác trong của $\angle ACB$.

Xét một đường tròn (O) đi qua hai điểm C, D và không tiếp xúc với các đường thẳng BC, CA . Đường tròn này cắt lại các đường thẳng BC và CA tương ứng tại M và N .

1/ Chứng minh rằng có một đường tròn (S) tiếp xúc với đường thẳng DM tại M và tiếp xúc với đường thẳng DN tại N .

2/ Đường tròn (S) cắt lại các đường thẳng BC và CA tương ứng tại P và Q . Chứng minh rằng các đoạn thẳng MP và NQ có độ dài không đổi, khi đường tròn (O) thay đổi.

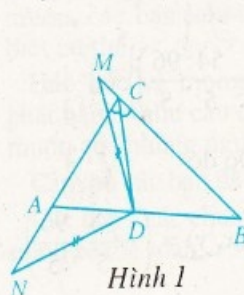
(X) kí hiệu đường tròn tâm X).

Lời giải.

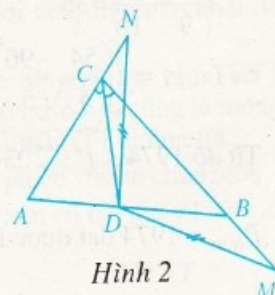
1/ Vì CD là phân giác trong của $\angle ACB$ nên $\angle DCA = \angle DCB$.

Nhận thấy, tùy thuộc vào vị trí của M và N trên BC và CA (xem các Hình 1, 2, độc giả tự vẽ hình trong trường hợp M thuộc cạnh BC , N thuộc tia đối của tia AC) mà ta sẽ có $\angle DCM = \angle DCB$ hoặc $\angle DCM = 180^\circ - \angle DCB$, $\angle DCN = \angle DCA$ hoặc $\angle DCN = 180^\circ - \angle DCA$.

Từ đó suy ra ta luôn có: $\sin(\angle DCM) = \sin(\angle DCN)$.



Hình 1



Hình 2

Vì vậy, kí hiệu R là bán kính đường tròn (O), ta có $DM = 2R \cdot \sin(\angle DCM) = 2R \cdot \sin(\angle DCN) = DN$.

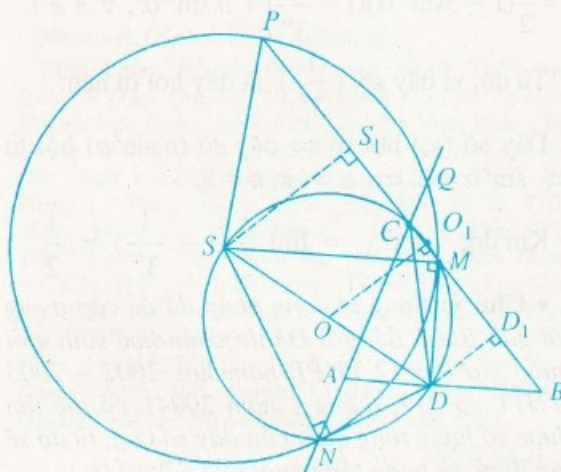
Gọi S là giao điểm của đường thẳng vuông góc với DM tại M và đường thẳng vuông góc với DN tại N . Xét hai tam giác vuông SMD và SND có: cạnh huyền SD chung,

$$DM = DN \text{ (theo chứng minh trên).}$$

$$\text{Do đó } \triangle SMD = \triangle SND.$$

Suy ra $SM = SN$. Vì thế, đường tròn tâm S bán kính SM tiếp xúc với đường thẳng DM tại M và tiếp xúc với đường thẳng DN tại N .

2/ (Hình 3) Dễ thấy S nằm trên đường tròn (O) và O là trung điểm của SD .



Hình 3

Gọi S_1 , O_1 và D_1 tương ứng là hình chiếu vuông góc của S , O và D trên đường thẳng BC .

Vì MP là một dây cung của đường tròn (S) nên S_1 là trung điểm của MP . (1)

Vì O là trung điểm của SD nên O_1 là trung điểm của S_1D_1 .

Lại vì CM là một dây cung của đường tròn (O) nên O_1 là trung điểm của CM .

Từ đó suy ra M và S_1 tương ứng là ảnh của C và D_1 qua phép đối xứng tâm O_1 .

Do đó $MS_1 = CD_1$. Kết hợp với (1) ta được $MP = 2MS_1 = 2CD_1$.

Bằng cách xét tương tự đối với các điểm N , Q và các hình chiếu vuông góc của S , O , D trên đường thẳng CA , ta chứng minh được $NQ = 2CD_2$, với D_2 là hình chiếu vuông góc của D trên CA .

Vì D cố định và các đường thẳng BC , CA cố định nên CD_1 và CD_2 là các độ dài không đổi

khi đường tròn (O) thay đổi. Vì vậy, từ các kết quả thu được ở trên ta có điều để bài yêu cầu chứng minh.

• **Chú ý:** Kết quả của bài toán không thay đổi khi D là một điểm tùy ý trên tia phân giác trong của $\angle ACB$.

Bài 3. Cho A là tập hợp gồm 16 số nguyên dương đầu tiên. Hãy tìm số nguyên dương k nhỏ nhất có tính chất: trong mỗi tập con có k phần tử của tập hợp A đều tồn tại hai số phân biệt a và b sao cho $a^2 + b^2$ là một số nguyên tố.

Lời giải. Giả sử k là số nguyên dương sao cho trong mỗi tập con có k phần tử của tập A đều tồn tại hai số phân biệt a và b mà $a^2 + b^2$ là một số nguyên tố.

• Xét tập con T gồm tất cả các số chẵn thuộc tập A . Dễ thấy, T có 8 phần tử và với a, b tùy ý thuộc T luôn có $a^2 + b^2$ là một hợp số. Từ đó suy ra $k \geq 9$.

• Bằng cách tính và kiểm tra trực tiếp tất cả các tổng $a^2 + b^2$, với $a, b \in A$, ta được một phân hoạch gồm 8 tập con của tập A mà mỗi tập con gồm hai phần tử là hai số có tổng bình phương là một số nguyên tố:

$$A = \{1; 4\} \cup \{2; 3\} \cup \{5; 8\} \cup \{6; 11\} \cup \{7; 10\} \cup \{9; 16\} \cup \{12; 13\} \cup \{14; 15\}.$$

Theo nguyên lí Dirichlet, trong 9 phần tử tùy ý của tập A phải có hai phần tử thuộc cùng một tập con trong phân hoạch nêu trên. Nói một cách khác, trong mỗi tập con có 9 phần tử của tập A đều tồn tại hai số phân biệt a, b mà $a^2 + b^2$ là một số nguyên tố.

• Từ các kết quả trên ta được: $k_{\min} = 9$.

• **Chú ý:** Phân hoạch gồm 8 tập con của tập A đã nêu trong lời giải không phải là phân hoạch duy nhất có tính chất: mỗi tập con gồm 2 phần tử là 2 số mà tổng bình phương của chúng là một số nguyên tố.

Bài 4. Xét dãy số thực (x_n) , $n = 1, 2, 3, \dots$, xác

$$\text{định bởi: } x_1 = 1 \text{ và } x_{n+1} = \frac{(2 + \cos 2\alpha)x_n + \cos^2 \alpha}{(2 - 2\cos 2\alpha)x_n + 2 - \cos 2\alpha}$$

với mọi $n = 1, 2, 3, \dots$, trong đó α là một tham số thực.

Hãy xác định tất cả các giá trị của α để dãy

$$\text{số } (y_n), \text{ với } y_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2x_k + 1}, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

có giới hạn hữu hạn khi $n \rightarrow +\infty$. Hãy tìm giới hạn của dãy số (y_n) trong các trường hợp đó.

Lời giải. Vì $x_1 = 1 > 0$, $2 + \cos 2\alpha > 0$, $\cos^2 \alpha \geq 0$, $2 - 2\cos \alpha \geq 0$, $2 - \cos 2\alpha > 0$ nên từ hệ thức xác định dãy số (x_n) suy ra $x_n > 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$, từ hệ thức xác định dãy (x_n) ta có:

$$\begin{aligned} 2x_{n+1} + 1 &= \\ &= \frac{(4 + 2\cos 2\alpha + 2 - 2\cos 2\alpha)x_n + 2\cos^2 \alpha + 2 - \cos 2\alpha}{(2 - 2\cos 2\alpha)x_n + 2 - \cos 2\alpha} \\ &= \frac{3(2x_n + 1)}{(2 - 2\cos 2\alpha)x_n + 2 - \cos 2\alpha}. \end{aligned}$$

Do đó

$$\begin{aligned} \frac{1}{2x_{n+1} + 1} &= \frac{(1 - \cos 2\alpha)(2x_n + 1) + 1}{3(2x_n + 1)} \\ &= \frac{1}{3} \left(2\sin^2 \alpha + \frac{1}{2x_n + 1} \right) \end{aligned}$$

Suy ra

$$\frac{1}{2x_{n+1} + 1} - \sin^2 \alpha = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2x_n + 1} - \sin^2 \alpha \right)$$

Từ đó, đặt $u_n = \frac{1}{2x_n + 1} - \sin^2 \alpha$, $n \in \mathbb{N}^*$,

ta được: $u_{n+1} = \frac{1}{3} u_n$.

Như thế, dãy số (u_n) là một cấp số nhân với số hạng đầu $u_1 = \frac{1}{3} - \sin^2 \alpha$ và công bội $q = \frac{1}{3}$.
Do đó, với $n \in \mathbb{N}^*$ tùy ý, ta có

$$\sum_{k=1}^n u_k = \left(\frac{1}{3} - \sin^2 \alpha \right) \times \frac{1 - \frac{1}{3^n}}{1 - \frac{1}{3}}$$

$$= \frac{3}{2} \left(\frac{1}{3} - \sin^2 \alpha \right) \left(1 - \frac{1}{3^n} \right).$$

Suy ra

$$\begin{aligned} y_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{2x_k + 1} = \sum_{k=1}^n (u_k + \sin^2 \alpha) \\ &= \frac{3}{2} \left(\frac{1}{3} - \sin^2 \alpha \right) \left(1 - \frac{1}{3^n} \right) + n \sin^2 \alpha \\ &= \frac{1}{2} (1 - 3\sin^2 \alpha) \left(1 - \frac{1}{3^n} \right) + n \sin^2 \alpha, \quad \forall n \geq 1. \end{aligned}$$

Từ đó, vì dãy số $\left(\frac{1}{3^n} \right)$ là dãy hội tụ nên:

Dãy số (y_n) hội tụ $\Leftrightarrow$ dãy số $(n \sin^2 \alpha)$ hội tụ
 $\Leftrightarrow \sin^2 \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Khi đó, $\lim y_n = \lim \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3^n} \right) = \frac{1}{2}$.

• **Chú ý:** Bằng phương pháp đã đề cập trong lời giải Bài 6 Bảng B Đề thi chọn học sinh giỏi quốc gia lớp 12 THPT năm học 2002 – 2003 (THPT số 319, tháng 1 năm 2004), có thể tìm được số hạng tổng quát của dãy số (x_n) ; từ đó sẽ tìm được số hạng tổng quát của dãy số (y_n) .

Tuy nhiên, việc giải bài toán bằng phương pháp vừa nêu sẽ gặp phải các tính toán không đơn giản, dễ gây nhầm lẫn nếu kỹ năng tính toán không thật vững.

(Kì sau đăng tiếp)

LỜI GIẢI ĐỀ THI TUYỂN SINH... (Tiếp trang 5)

nên $\frac{AI}{AH} = \frac{AB}{AM} \Rightarrow \Delta AIB \sim \Delta AHM$ suy ra
 $\widehat{AIB} = \widehat{AHM} = 90^\circ$.

Vậy điểm I nằm trên đường tròn (γ) đường kính AB (trừ điểm A).

Phần đảo. Lấy điểm I bất kì trên đường tròn (γ) ($I \neq A$). Đường thẳng AI cắt xy tại M , lúc đó
 $\widehat{AIB} = 90^\circ \Rightarrow \Delta AIB \sim \Delta AHM \Rightarrow \frac{AI}{AH} = \frac{AB}{AM}$ hay
 $AI \cdot AM = AB \cdot AH = k^2$.

Kết luận. Tập hợp điểm I là đường tròn (γ) đường kính AB , trừ điểm A .

• **Tìm tập hợp điểm K .** Do $AK = AI$ và $\widehat{KAI} = 90^\circ$ nên K là ảnh của I qua phép quay tâm A , góc quay 90° hoặc (-90°) . Tập hợp điểm I là đường tròn (γ) đường kính AB trừ điểm A , suy ra tập hợp điểm K là ảnh của (γ) qua phép quay trên, trừ điểm A , đó là các đường tròn (γ_1) , (γ_2) có các đường kính AD , AE (hình 3).

MAI VĂN TU
(GV khối PTCTT ĐH Vinh)



$$\Leftrightarrow \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(\sqrt{\frac{t_i}{t_j}} - \sqrt{\frac{t_j}{t_i}} \right)^2 < 1 \quad (2)$$

Nếu tồn tại ít nhất một bộ ba số t_i, t_j, t_k với $1 \leq i < j < k \leq n$ sao cho $t_k \geq t_i + t_j$ thì

$$\left(\sqrt{\frac{t_k}{t_i}} - \sqrt{\frac{t_i}{t_k}} \right)^2 + \left(\sqrt{\frac{t_k}{t_j}} - \sqrt{\frac{t_j}{t_k}} \right)^2$$

VỀ MỘT BẤT ĐẲNG THỨC TRONG KÌ THI TOÁN QUỐC TẾ 2004

TRẦN XUÂN ĐÁNG, ĐỖ VĂN ĐỨC, TRẦN QUỐC HOÀN

Lời tòa soạn. Trong kì thi Olympic Toán Quốc tế lần thứ 45 (năm 2004) tổ chức tại Hy-Lạp có bài toán sau :

Bài toán 1. Cho số nguyên $n \geq 3$. Giả sử $t_1, t_2, \dots, t_n$ là các số thực dương sao cho

$$n^2 + 1 > (t_1 + t_2 + \dots + t_n) \left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \dots + \frac{1}{t_n} \right) \quad (1)$$

Chứng minh rằng t_i, t_j, t_k là độ dài ba cạnh của một tam giác với mọi i, j, k thỏa mãn $1 \leq i < j < k \leq n$.

Tòa soạn đã nhận được lời giải bài toán 1 này của các bạn Trần Xuân Đáng (GV trường THPT chuyên Lê Hồng Phong, Nam Định), Đỗ Văn Đức (GV trường THPT chuyên Lương Văn Tụy, Ninh Bình), Trần Quốc Hoàn, (HS 12T, THPT chuyên Nguyễn Trãi, Hải Dương), hơn nữa các bạn nói trên đều đưa ra các bài toán tổng quát hơn. Dưới đây trình bày tổng hợp một số cách giải bài toán 1 và các bài toán tổng quát hơn của ba bạn.

Lời giải 1. Bất đẳng thức (BĐT) (1) tương đương với

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{i=1}^n t_i \right) \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{t_j} \right) - n^2 < 1 \\ \Leftrightarrow & \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(\frac{t_i}{t_j} + \frac{t_j}{t_i} \right) - n(n-1) < 1 \\ \Leftrightarrow & \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(\frac{t_i}{t_j} + \frac{t_j}{t_i} - 2 \right) < 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & = \frac{(t_k - t_i)^2}{t_i t_k} + \frac{(t_k - t_j)^2}{t_j t_k} \geq \\ & \geq \frac{(t_k - t_i)t_j}{t_i t_k} + \frac{(t_k - t_j)t_i}{t_j t_k} = \frac{t_i}{t_j} + \frac{t_j}{t_i} - \frac{t_i + t_j}{t_k} \\ & \geq 2 - 1 = 1 \end{aligned}$$

Từ đó suy ra BĐT (2) không thỏa mãn. Vậy mọi bộ ba số t_i, t_j, t_k với $1 \leq i < j < k \leq n$ thỏa mãn (1) đều lập thành ba cạnh của một tam giác.

Lời giải 1. Giả sử tồn tại ba số nào đó, ta kí hiệu chúng là t_1, t_2, t_3 mà $t_1 + t_2 \leq t_3$ (*).

Khi đó áp dụng BĐT Cô-si ta có

$$\begin{aligned} & (t_1 + t_2 + t_3) \left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3} \right) = \\ & = 3 + \frac{t_2}{t_1} + \frac{t_1}{t_2} + \frac{t_1 + t_2}{t_3} + t_3 \left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} \right) \\ & \geq 3 + 2 + \frac{t_1 + t_2}{t_3} + 4 \frac{t_3}{t_1 + t_2} \geq \\ & \geq 5 + 5 \cdot \sqrt[5]{\frac{t_1 + t_2}{t_3} \left(\frac{t_3}{t_1 + t_2} \right)^4} = 5 + 5 \cdot \sqrt[5]{\left(\frac{t_3}{t_1 + t_2} \right)^3} \\ & \geq 5 + 5 = 10 \quad (3) \end{aligned}$$

Mọi đẳng thức ở (3) xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = t_2 \\ t_3 = 2t_1 \end{cases}$

• Với $n = 3$ thì từ (3) suy ra không thỏa mãn (1) nghĩa là (*) không thể xảy ra.

• Với $n \geq 4$, áp dụng BĐT (3), BĐT Cô-si và BĐT Bu-nhi-a-côp-xki

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}\right) \geq n^2 \quad (4)$$

ta có: $(t_1 + t_2 + \dots + t_n)\left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \dots + \frac{1}{t_n}\right)$

$$\begin{aligned} &= (t_1 + t_2 + t_3)\left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3}\right) + \\ &+ \sum_{i=4}^n \left[(t_1 + t_2 + t_3)\frac{1}{t_i} + \left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3}\right)t_i \right] \\ &+ \left(\sum_{i=4}^n t_i\right)\left(\sum_{i=4}^n \frac{1}{t_i}\right) \\ &\geq 10 + (n-3) \cdot 2 \cdot \sqrt{(t_1 + t_2 + t_3)\left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3}\right)} + (n-3)^2 \\ \text{hay } &\left(\sum_{i=1}^n t_i\right)\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{t_i}\right) \geq 10 + 2\sqrt{10}(n-3) + (n-3)^2 \\ &= (n + \sqrt{10} - 3)^2 \quad (5) \end{aligned}$$

Đẳng thức ở (5) xảy ra $\Leftrightarrow t_1 = t_2, t_3 = 2t_1$ và $t_i = \frac{2\sqrt{10}t_1}{5}$ với $i = 4, 5, \dots, n$.

Từ biểu thức cuối cùng của (5) suy ra với $n \geq 4$ thì $\left(\sum_{i=1}^n t_i\right)\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{t_i}\right) \geq 10 + 2\sqrt{10}(n-3) + (n-3)^2$
 $= n^2 + 1 + 2(\sqrt{10} - 3)(n-3) > n^2 + 1$
 điều này trái với BĐT (1), nghĩa là (*) không thể xảy ra.

Vậy với $n \geq 3$ thì mọi cặp t_i, t_j, t_k thỏa mãn (1) là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Lời giải 2 đã chứng minh được bài toán 2 tổng quát hơn:

Bài toán 2. Cho số nguyên $n \geq 3$. Giả sử $t_1, t_2, \dots, t_n$ là các số thực dương sao cho

$$(t_1 + t_2 + \dots + t_n)\left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \dots + \frac{1}{t_n}\right) < (n + \sqrt{10} - 3)^2 \quad (6)$$

Chứng minh rằng t_i, t_j, t_k là độ dài ba cạnh của một tam giác với mọi i, j, k thỏa mãn $1 \leq i < j < k \leq n$.

Vế phải của (6) cũng có thể viết

$$(n + \sqrt{10} - 3)^2 = n^2 + 1 + 2(\sqrt{10} - 3)(n-3).$$

Bài toán 3. Với mỗi số nguyên $n \geq 3$, tìm hằng số dương k lớn nhất sao cho nếu n số thực dương $t_1, t_2, \dots, t_n$ thỏa mãn

$$(t_1 + t_2 + \dots + t_n)\left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \dots + \frac{1}{t_n}\right) < k$$

thì t_i, t_j, t_k là độ dài ba cạnh của một tam giác với mọi i, j, k thỏa mãn $1 \leq i < j < k \leq n$.

Trong lời giải 2 đã chứng tỏ rằng

- với $n = 3$ thì đẳng thức ở (3) xảy ra khi $t_1 = t_2$ và $t_3 = 2t_1$, suy ra $k = 10 = (3 + \sqrt{10} - 3)^2$.
- với $n \geq 4$ thì đẳng thức ở (5) xảy ra khi $t_1 = t_2, t_3 = 2t_1$ và $t_i = \frac{2\sqrt{10}}{5}t_1$ với mọi $i = 4, 5, \dots, n$, suy ra $k = (n + \sqrt{10} - 3)^2$.

Bạn Đỗ Văn Đức đã nêu và chứng minh bài toán tổng quát hơn nữa:

Bài toán 4. Cho các số nguyên dương n, k với $n \geq k \geq 3$ và giả sử n số thực dương $t_1, t_2, \dots, t_n$

$$\text{thỏa mãn } (t_1 + t_2 + \dots + t_n)\left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \dots + \frac{1}{t_n}\right)$$

$$< (n + \sqrt{2k^2 - 4k + 4} - k)^2$$

Chứng minh rằng mỗi số trong k số $t_{i_1}, t_{i_2}, \dots, t_{i_k}$ đều nhỏ hơn tổng của $k-1$ số còn lại với $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$.

Bài toán 2 là trường hợp riêng của bài toán 4 khi $k = 3$.

Lời giải. Nếu tồn tại $t_1, t_2, \dots, t_k$ và $t_1 + t_2 + \dots + t_{k-1} \leq t_k$, khi đó ta chứng minh:

$$(t_1 + t_2 + \dots + t_k)\left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \dots + \frac{1}{t_k}\right) \geq 2(k-1)^2 + 2 \quad (6)$$

Thật vậy, đặt $(k-1)^2 + 1 = p$. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si và BĐT (4) ta có:

$$\begin{aligned} &(t_1 + t_2 + \dots + t_k)\left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \dots + \frac{1}{t_k}\right) = \\ &= (t_1 + t_2 + \dots + t_{k-1})\left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \dots + \frac{1}{t_{k-1}}\right) + \\ &+ \frac{t_1 + t_2 + \dots + t_{k-1}}{t_k} + t_k\left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \dots + \frac{1}{t_{k-1}}\right) + 1 \geq \\ &(k-1)^2 + \frac{t_1 + t_2 + \dots + t_{k-1}}{t_k} + (k-1)^2 \frac{t_k}{t_1 + t_2 + \dots + t_{k-1}} + 1 \\ &\geq p + p \cdot \sqrt[p]{\left(\frac{t_k}{t_1 + t_2 + \dots + t_{k-1}}\right)^{p-2}} \geq p + p \cdot \sqrt[p]{\left(\frac{t_k}{t_k}\right)^{p-2}} \\ &= 2p = 2(k-1)^2 + 2 \Rightarrow (6) \text{ đúng.} \end{aligned}$$

GIÁO SƯ NGÔ BẢO CHÂU NHẬN GIẢI THƯỞNG CỦA VIỆN TOÁN HỌC CLAY NĂM 2004

Viện Toán học Clay, được thành lập năm 1998 tại Cambridge, bang Massachusetts, Mỹ. Ngoài việc tài trợ các nhà toán học mở các trường mùa hè, các hội nghị, hội thảo chuyên đề về toán học, Viện còn đặt ra hai loại giải thưởng:

*) Giải thưởng đặc biệt, mỗi giải 1 triệu USD, dành cho việc giải quyết bảy bài toán thiên niên kỷ do Viện lựa chọn.

*) Giải thưởng hàng năm dành cho những thành tựu toán học đặc biệt xuất sắc, mỗi năm một hoặc hai giải.

Sáu năm qua, giải thưởng hàng năm của Viện Clay đã được trao cho các nhà toán học xuất sắc: Andrew Wiles (1999), Alain Connes và Laurent Lafforgue (2000), Edward Witten và Stanislav Smirnov (2001), Oded Schramm và Manindra Agrawal (2002), Richard Hamilton và Terence Tao (2003).

Chiều ngày 5-11-2004 (giờ địa phương), tức sáng 6-11-2004 (giờ Việt Nam) tại giảng đường Đại học Harvard (bang Massachusetts, Mỹ) Viện Toán học Clay đã trân trọng trao Giải thưởng nghiên cứu Clay năm 2004 cho Ngô Bảo Châu và Gérard Laumon.

Ngô Bảo Châu, sinh năm 1972 tại Hà Nội, anh nguyên là học sinh Khối Phổ thông Chuyên Toán Trường ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội, hai lần đạt huy chương vàng Olympic Toán Quốc tế tại

Ô-xtrây-li-a (1988) và CHLB Đức (1989), giờ là Tiến sĩ khoa học, Giáo sư Đại học Paris 11.

Ngô Bảo Châu được mời đọc báo cáo tại phiên họp toàn thể về công trình dày 100 trang khổ A4 mà anh và Gérard Laumon vừa công bố hồi tháng 4-2004 với nhau đề: *Le lemme fondamental pour les groupes unitaires* (Bổ đề cơ bản cho các nhóm unita). Công thức vết (trace formula) là một trong những kỹ thuật chính để "công phá" nhiều giả thuyết trong Chương trình Langland (Langland Program), một lược đồ toán học đang được nhiều bộ óc lớn trên thế giới dồn sức từng bước thực hiện. Có thể nói công trình của Ngô Bảo Châu và Gérard Laumon là một bước phát triển tiếp sau công trình của Andrew Wiles chứng minh định lý cuối cùng của Fermat (được tặng Giải thưởng Wolfskehl năm 1997 và Giải thưởng nghiên cứu Clay năm 1999), cũng như công trình của bạn anh, Laurent Lafforgue, về công thức vết (được tặng Giải thưởng nghiên cứu Clay năm 2000 và huy chương Fields năm 2002).

Hội đồng xét chọn giải thưởng năm nay bao gồm các nhà toán học nổi tiếng sau: James Carlson, Simon Donaldson, Gregory Margulis, Richard Melrose, Yum-Tong Siu, Andrew Wiles. Chính Andrew Wiles đã tiến cử Ngô Bảo Châu và Gérard Laumon nhận giải thưởng năm nay về công trình Bổ đề cơ bản cho các nhóm unita.

NGUYỄN PHÚC

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = t_2 = \dots = t_{k-1} = a > 0 \\ t_k = (k-1)a \end{cases}$

a) $n=k$ thì (6) mâu thuẫn với giả thiết bài toán 4.

b) $n \geq k+1$ khi đó:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^n t_i \right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{t_i} \right) &= \left(\sum_{i=1}^k t_i \right) \left(\sum_{i=1}^k \frac{1}{t_i} \right) + \left(\sum_{i=k+1}^n t_i \right) \left(\sum_{i=k+1}^n \frac{1}{t_i} \right) \\ &+ \sum_{i=k+1}^n \left[\left(\sum_{j=1}^k t_j \right) \frac{1}{t_i} + \left(\sum_{j=1}^k \frac{1}{t_j} \right) t_i \right] \geq \\ &\geq 2(k-1)^2 + 2 + (n-k)^2 + (n-k) \cdot 2 \sqrt{\left(\sum_{i=1}^k t_i \right) \left(\sum_{i=1}^k \frac{1}{t_i} \right)} \\ &\geq 2(k-1)^2 + 2 + (n-k)^2 + 2(n-k) \sqrt{2(k-1)^2 + 2} \\ &= (n-k + \sqrt{2(k-1)^2 + 2})^2 = \left(n + \sqrt{2k^2 - 4k + 4} - k \right)^2. \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow t_1 = t_2 = \dots = t_{k-1} = a > 0$,
 $t_k = (k-1)a$ và $t_i = \frac{a\sqrt{2(k-1)^2 + 2}}{\sqrt{(k-1)^2 + 1}}$; với $i = k+1$,

$k+2, \dots, n$.

Điều này mâu thuẫn với giả thiết bài toán 4. Vậy bài toán 4 được chứng minh.

Cuối cùng là một số bài toán dành cho bạn đọc.

Bài 1. Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn $5abc > a^3 + b^3 + c^3$. Chứng minh rằng a, b, c là độ dài các cạnh của một tam giác.

Bài 2. Cho ba số dương a, b, c thỏa mãn

$$abc \leq 2 \text{ và } \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} < \frac{9}{4}.$$

Chứng minh rằng a, b, c là độ dài các cạnh của một tam giác.

Bài 3. Cho số nguyên $n \geq 3$. Giả sử bất đẳng thức

$$\left(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \right)^2 > (n-1)(a_1^4 + a_2^4 + \dots + a_n^4)$$

đúng với n số thực dương $a_1, a_2, \dots, a_n$. Chứng minh rằng a_i, a_j, a_k là độ dài ba cạnh của một tam giác với mọi i, j, k thỏa mãn $1 \leq i < j < k \leq n$.

(Đề thi Olympic Toán Trung Quốc, 1988)



CÁC LỚP THCS

Bài T1/330. (Lớp 6). Tìm các số nguyên x, y, z thỏa mãn các đẳng thức :

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = \frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z} = x + y + z = 3.$$

THÁI NHẬT PHƯỢNG

(GV THCS Cam Nghĩa, Cam Ranh, Khánh Hòa)

Bài T2/330. (Lớp 7). Tam giác ABC có $\widehat{ACB} = 50^\circ$, $\widehat{BAC} = 100^\circ$. Trên cạnh AB lấy điểm M sao cho $AM = AC$. Hãy so sánh CM và AB .

TRẦN VĂN HINH

(GV THCS Nam Giang, Nam Trực Nam Định)

Bài T3/330. Tìm tất cả nghiệm nguyên dương của phương trình

$$x^y + y^z + z^x = 2(x + y + z)$$

PHAN LÊ NHẬT DUY

(GV THCS Lâm Mộng Quang, Vĩnh Mỹ, Phú Lộc, Thừa Thiên - Huế)

Bài T4/330. Giải phương trình

$$\sqrt{\sqrt{3}-x} = x\sqrt{\sqrt{3}+x}$$

TẠ HOÀNG THÔNG

(SV Toán - Tin 2001 ĐHKHTN TP. Hồ Chí Minh)

Bài T5/330. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{2abc} + \frac{a^2+b^2}{c^2+ab} + \frac{b^2+c^2}{a^2+bc} + \frac{c^2+a^2}{b^2+ac} \geq \frac{9}{2}$$

trong đó a, b, c là các số thực dương.

TRẦN ANH ĐỨC

(SV CK51 khoa Toán Tin ĐHSP Hà Nội)

Bài T6/330. Cho tam giác ABC có $AB = AC$. Từ điểm M trên BC kẻ $MP \perp AB$ và $MQ \perp AC$ sao cho P, Q lần lượt nằm trên các đường thẳng AB, AC . Chứng minh rằng đường trung trực của PQ luôn đi qua một điểm cố định khi M di động trên cạnh BC .

PHẠM ĐỨC BÌNH

(GV THCS Hương Sơn, Bình Xuyên, Vĩnh Phúc)

Bài T7/330. Cho tam giác ABC với đường cao AH (H khác B, C). Kẻ $HE \parallel AC$ và $HM \perp AB$ sao cho E, M nằm trên đường thẳng AB . Kẻ $HF \parallel AB$ và $HN \perp AC$ sao cho F, N nằm trên đường thẳng AC . Chứng minh rằng ba đường thẳng EF, MN và BC đồng quy.

ĐÀO QUỐC DŨNG

(SV 4A, K50 khoa Toán Tin ĐHSP Hà Nội)

CÁC LỚP THPT

Bài T8/330. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $P = x^{y^z}$ trong đó x, y, z là các số nguyên lớn hơn 2 và thỏa mãn $x + y + z = 20$.

HOÀNG TRỌNG HẢO

(Hà Nội)

Bài T9/330. Gọi M và m là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số

$$f(x) = \cos(2002x) + k\cos(x+\alpha)$$

trong đó k, α là các tham số thực. Chứng minh rằng $M^2 + m^2 \geq 2$.

TRẦN TUYẾT THANH

(GV Học viện Phòng không Không quân Sơn Tây, Hà Tây)

Bài T10/330. Cho số nguyên dương n . Xét hàm số $f(x) : [0; n] \rightarrow \mathbb{R}$ liên tục và thỏa mãn $f(0) = f(n)$. Chứng minh rằng tồn tại n cặp số a_i, b_i ($i = 1, 2, \dots, n$) với a_i, b_i thuộc $[0; n]$ sao cho $b_i - a_i$ là số nguyên dương và $f(a_i) = f(b_i)$ với mọi $i = 1, 2, \dots, n$.

NGUYỄN HỒNG PHONG

(SV Toán 2B, ĐHSP Huế)

Bài T11/330. Trong mặt phẳng cho đường thẳng xy và đoạn thẳng AB vuông góc với xy tại A . Trên tia Ax lấy điểm C , trên tia Ay lấy điểm D (C, D khác A). Kẻ $AE \perp BC$ (E thuộc BC) và $AF \perp BD$ (F thuộc BD). Một đường thẳng đi qua trung điểm Q của AB lần lượt cắt các đường thẳng xy, BC, BD ở P, M, N . Chứng minh rằng các điểm P, E, F thẳng hàng khi và chỉ khi Q là trung điểm của MN .

TRẦN VĂN XUÂN

(GV CDSP Bạc Liêu)

Bài T12/330. Cho tứ diện đều $A_1A_2A_3A_4$. Gọi d_i ($i = 1, 2, 3, 4$) lần lượt là khoảng cách từ điểm M nào đó trong không gian tới mặt đối diện đỉnh A_i của tứ diện $A_1A_2A_3A_4$. Đặt $x_i = MA_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$). Chứng minh rằng

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \leq 9(d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2)$$

TRẦN VIỆT ANH

(SV K51 CLC khoa Toán Tin ĐHSP Hà Nội)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/330. (For 6th grade). Find the integers x, y, z satisfying the equalities

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = \frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z} = x + y + z = 3.$$

T2/330. (For 7th grade). Let ABC be a triangle with $\widehat{ACB} = 50^\circ$, $\widehat{BAC} = 100^\circ$, let M be the point on the side AB such that $AM = AC$. Compare CM with AB .

T3/330. Find all integer - roots of the equation $x^y + y^z + z^x = 2(x+y+z)$

T4/330. Solve the equation

$$\sqrt{\sqrt{3}-x} = x\sqrt{\sqrt{3}+x}$$

T5/330. Prove the inequality

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{2abc} + \frac{a^2+b^2}{c^2+ab} + \frac{b^2+c^2}{a^2+bc} + \frac{c^2+a^2}{b^2+ac} \geq \frac{9}{2}$$

where a, b, c are positive real numbers.

T6/330. Let be given a triangle ABC with $AB = AC$. From every point M on the side BC , draw $MP \perp AB$ and $MQ \perp AC$ (P, Q lie respectively on the lines AB, AC). Prove that the perpendicular bisector of PQ passes through a fixed point when M moves on the side BC .

T7/330. Let ABC be a triangle with the altitude AH (H distinct from B, C). Draw $HE \parallel AC$, $HM \perp AB$ (E and M lie on the line AB), draw $HF \parallel AB$, $HN \perp AC$ (F and N lie on the line AC). Prove that the lines EF, MN and BC are concurrent.

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T8/330. Find the greatest and the least values of the expression $P = x^y z$ where x, y, z are integers greater than 2 and satisfy $x+y+z = 20$.

T9/330. Let M and m be respectively the greatest value and the least value of the function

$$f(x) = \cos(2002x) + k\cos(x+\alpha)$$

where k, α are real parameters. Prove that $M^2 + m^2 \geq 2$.

T10/330. Let be given a positive integer n . Consider a continuous function $f(x) : [0; n] \rightarrow R$ satisfying $f(0) = f(n)$. Prove that there exist n couples of numbers a_i, b_i ($i = 1, 2, \dots, n$) belonging to $[0; n]$ such that $b_i - a_i$ are positive integers and $f(a_i) = f(b_i)$ for all $i = 1, 2, \dots, n$

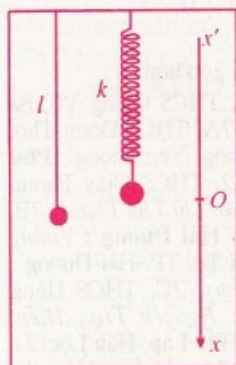
T11/330. In plane let be given a line xy , a segment AB perpendicular to xy at A , a point C on the ray Ax , a point D on the ray Ay (C, D distinct from A). Draw $AE \perp BC$ (E lies on BC), $AF \perp BD$ (F lies on BD). A line passing through the midpoint Q of AB cuts the lines xy, BC, BD respectively at P, M, N . Prove that P, E, F are collinear when and only when Q is the midpoint of MN .

T12/330. Given a regular tetrahedron $A_1A_2A_3A_4$. Let d_i ($i = 1, 2, 3, 4$) be the distance from a point M in space to the face opposite to vertex A_i of the tetrahedron $A_1A_2A_3A_4$. Prove that

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \leq 9(d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2)$$

where $x_i = MA_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$).

CÁC ĐỀ VẬT LÝ



Bài L1/330. Một buồng thang máy có treo một con lắc lò xo và một con lắc đơn. Con lắc lò xo có độ cứng $k = 49 \text{ N/m}$. Khi thang máy đứng yên thì phương trình dao động hướng thẳng đứng quanh vị trí cân bằng của chúng lần lượt là: $x = 2\sin(14t - \pi/2)$ (cm) (với con lắc lò

xo), $\alpha = 8^\circ \sin(14t + \pi/2)$ (độ) (với con lắc đơn).

Khi con lắc đơn qua vị trí cân bằng thì thang máy bắt đầu chuyển động đi lên theo phương thẳng đứng nhanh dần đều với gia tốc $a = (7/9)g$. Sau khi chuyển động được $3\pi/4$ (s) thì dây treo con lắc bị đứt.

a. Viết phương trình dao động mới của các con lắc khi thang máy chuyển động và dây treo chưa bị đứt.

b. Mô tả chuyển động của con lắc kể từ khi dây treo thang máy bị đứt. Lấy $g = 10 \text{ (m/s}^2)$

NGUYỄN VĂN ĐỨC

(SV Lý A K36 DHSP Thái Nguyên)

(Xem tiếp trang 23)



Bài T1/326. (Lớp 6). Phân tích số 2003^{2004} thành tích của hai số tự nhiên a, b . Hỏi $a+b$ có chia hết cho 2004 không?

Lời giải. Vì số 2003 là số nguyên tố nên nếu $2003^{2004} = a \cdot b$ với a, b là hai số tự nhiên thì mỗi số a, b phải là một lũy thừa của 2003.

Nghĩa là $a = 2003^n, b = 2003^m$ với n, m là các số tự nhiên thỏa mãn $n + m = 2004$.

Vì tổng của n và m là một số chẵn nên n, m là hai số tự nhiên cùng chẵn hoặc cùng lẻ.

Ta thấy $2003 \cdot 2003 = 2004 \cdot 2002 + 1$ và tích $(2004a+1)(2004b+1)$ lại có dạng $2004c+1$. Từ đó $2003^{2n} = (2004t+1)^n = 2004k+1$ còn $2004^{2m+1} = 2004k + 2003$.

Nếu n và m đều chẵn thì $a+b$ có dạng $(2004r+1) + (2004s+1) = 2004(r+s) + 2$ không chia hết cho 2004. Nếu n và m đều lẻ thì $a+b$ có dạng $(2004r + 2003) + (2004s + 2003) = 2004(r+s+1) + 2002$ không chia hết cho 2004.

Vậy trong mọi trường hợp số $a+b$ không chia hết cho 2004.

Nhận xét. 1) Một số bạn lí luận tương tự như trên nhưng chỉ cần chứng minh $a+b$ không chia hết cho 3 và từ đó $a+b$ không chia hết cho 2004. Cách giải trình bày trên vẫn áp dụng được cho trường hợp tổng quát hơn khi số mũ không chia hết cho 3.

2) Bạn **Trần Minh Ngọc**, 300D tổ 26 Kỳ Bá, **Thái Bình** (lưu ý bạn nên viết theo địa chỉ của nhà trường) đã chứng minh bài toán tổng quát:

Giả sử p là số nguyên tố, n là số tự nhiên và nếu phân tích số p^n thành tích của hai số tự nhiên a, b thì $a+b$ chia hết cho $p+1$ khi n là số lẻ và $a+b$ không chia hết cho $p+1$ khi n là số chẵn.

3) Các bạn sau đây có bài giải tốt:

Nghe An: Vũ Đình Long, 6A, Tăng Văn Bình, Lê Đình Quân, Hoàng Thị Lệ Quyên, 6B, THCS Lý Nhật Quang, Đồ Lương, **Võ Văn Lâm**, 6B, THCS Nghĩa Phúc, Tân Kỳ, **Vũ Đức Hoàn**, 6A, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu; **Khánh Hòa:** Trần Thị Ánh Tuyết, 6⁷, THCS Cam Nghĩa, Cam Ranh; **Đak Lak:** Trần Thị Thanh Quý, 6B, THCS Đào Duy Từ, TP. Buôn Mê Thuột; **Gia Lai:** Nguyễn Thị Hồng Phúc, 5A, TH Kim Đồng, KBang; **Vĩnh Phúc:** Nguyễn Thị Ngọc, Nguyễn Thị Giang, 6A1, THCS Yên Lạc, Yên Lạc; **Hải Dương:** Đoàn Đức

Thành, 6A, THPT Nguyễn Trãi, Nam Sách, **Đặng Hương Thảo**, 6/3, THCS Lê Quý Đôn, TP. Hải Dương; **Thanh Hóa:** Dương Văn Minh, 6A, THCS Trần Mai Ninh, TP. Thanh Hóa, **Lê Quý Trinh**, 6A, THCS Bút Sơn, Hoàng Hóa, **Lê Thị Thương**, 6D, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoàng Hóa; **Hà Nội:** Nguyễn Tuấn Long, 6E, THCS Lê Quý Đôn, Cầu Giấy.

NGUYỄN ANH DŨNG

Bài T2/326. (Lớp 7). Các số dương a, b, c, d

thỏa mãn các điều kiện $\frac{a^4}{b} + \frac{c^4}{d} = \frac{1}{b+d}$ và $a^2 + c^2 = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^{2004}}{b^{1002}} + \frac{c^{2004}}{d^{1002}} = \frac{2}{(b+d)^{1002}}.$$

Lời giải. (Theo bạn **Trần Thị Thanh Thủy**, 6B, THCS Đào Duy Từ, TP. Buôn Ma Thuột, **Đak Lak** và **Đổng Thị Tú Hồng**, 7B1, THCS Hương Sơn, Hà Tây).

Sử dụng giả thiết $a^2 + c^2 = 1$, ta có:

$$\frac{a^4}{b} + \frac{c^4}{d} = \frac{(a^2 + c^2)^2}{b+d},$$

$$\text{từ đó } (a^4d + c^4b)(b+d) = bd(a^2 + c^2)^2$$

$$\text{hay } a^4d^2 + c^4b^2 = 2a^2c^2bd$$

$$\Rightarrow (a^2d - c^2b)^2 = 0, \text{ do đó } a^2d = c^2b$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{b} = \frac{c^2}{d} = \frac{a^2 + c^2}{b+d} = \frac{1}{b+d}.$$

$$\text{Suy ra } \frac{a^{2004}}{b^{1002}} = \frac{c^{2004}}{d^{1002}} = \frac{1}{(b+d)^{1002}}.$$

$$\text{Vậy } \frac{a^{2004}}{b^{1002}} + \frac{c^{2004}}{d^{1002}} = \frac{2}{(b+d)^{1002}}.$$

Nhận xét. 1) Rất nhiều bạn khái quát hóa bài toán dưới dạng: Cho các số dương a, b, c, d thỏa mãn các ĐK:

$$a^2 + c^2 = 1, \frac{a^4}{b} + \frac{c^4}{d} = \frac{1}{b+d}. \text{ Chứng minh rằng}$$

$$\frac{a^{2n}}{b^n} + \frac{c^{2n}}{d^n} = \frac{1}{(b+d)^n} \quad (n \in \mathbb{N}, n \geq 3).$$

2) Danh sách các bạn có lời giải gọn hơn cả:

Hà Nội: Hà Văn Hiếu, 7A10, THCS Giảng Võ, Ba Đình; **Bắc Ninh:** Đỗ Văn Đạt, 7A, THCS Đông Thọ, **Đỗ Vũ Thạch**, 6C, THCS Yên Phong, Yên Phong; **Phú Thọ:** Nguyễn Trường Giang, 6A2, THCS Giấy Phong Châu, Phù Ninh; **Vĩnh Phúc:** Trần Thị Thu Thanh, 7B, THCS Tam Dương, Tam Dương; **Hải Dương:** Vương Quang Dũng, 6A, THCS Ngô Gia Tự, TP. Hải Dương; **Thái Bình:** Nguyễn Thị Kim Thủy, 7C, THCS Hùng Dũng, Hưng Hà; **Thanh Hóa:** Nguyễn Trần Hiền, Nguyễn Thị Hồng, 7C, THCS Lê Hữu Lập, Hậu Lộc, **Lê Quý Trinh**, 6A, THCS TTr Bút Sơn, Hoàng Hóa, **Lê**

Trọng Cường, 7B, THCS Nguyễn Chí, Đông Sơn, Lê Hồng Chiến, 7G, THCS Trần Mai Ninh, TP. Thanh Hóa ;
Nghệ An : Tăng Văn Bình, 6B, Đặng Công Việt, 7A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương ; **Quảng Trị**: Trương Xuân Nhã, 7A, THCS Nguyễn Huệ, Đông Hà, Lê Bá Thành Đạt, 7/2, THCS Thành Cổ, Thành Cổ ; **Quảng Bình**: Nguyễn Phương Thảo, 7D, THCS Hoàn Lão, Bố Trạch ; **Quảng Ngãi** : Trần Tân Thanh, 7C, THCS Hành Phước, Phan Thị Thủy Uyên, 7C, THCS Huỳnh Thúc Kháng, Nghĩa Hành ; **TP. Hồ Chí Minh**: Nguyễn Thị Quỳnh Trang, 7A1, Trường Trần Đại Nghĩa, Q.1.

HỒ QUANG VINH

Bài T3/326. Tìm số nguyên tố p nhỏ nhất sao cho viết được p thành 10 tổng dạng

$$p = x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + 2y_2^2 = x_3^2 + 3y_3^2 = \dots = x_{10}^2 + 10y_{10}^2 ; \text{ trong đó } x_i, y_i (i = 1, 2, \dots, 10) \text{ là các số nguyên dương.}$$

Lời giải. Dễ thấy $p > 10$.

• Từ $p = x_{10}^2 + 10y_{10}^2$ thì số dư r của p khi chia cho 10 chính là số dư của x_{10}^2 khi chia cho 10 với $0 \leq x_{10} \leq 9$, suy ra $r = 0, 1, 4, 5, 6, 9$ nhưng số nguyên tố $p > 10$ nên chỉ có thể $r = 1, 9$. (1)

• Từ $p = x_3^2 + 3y_3^2$ thì số dư của $p > 10$ khi chia cho 3 chỉ có thể là 1. (2)

• Từ $p = x_8^2 + 8y_8^2$ thì số dư s của p khi chia cho 8 chính là số dư của x_8^2 khi chia cho 8 với $0 \leq x_8 \leq 7$, suy ra $s = 0, 1, 4$ nhưng số nguyên tố $p > 10$ nên chỉ có thể $s = 1$. (3)

• Từ (2), (3) suy ra $p-1$ chia hết cho $3 \cdot 8 = 24$ hay $p-1 = 24m$. Lại từ (1) suy ra $24m$ khi chia cho 10 có tận cùng là 0 hoặc 8 nên m khi chia cho 10 có tận cùng là 0 hoặc 2 hoặc 7 hay $m = 10a + u$ với $u = 0, 2, 7$. (4)

• Từ $p = x_7^2 + 7y_7^2$ thì số dư t của p khi chia cho 7 chính là số dư của x_7^2 khi chia cho 7 với $0 \leq x_7 \leq 6$, suy ra $t = 0, 1, 2, 4$ nhưng số nguyên tố $p > 10$ nên chỉ có thể $t = 1, 2, 4$. Do $p-1 = 24m$ nên $24m$ khi chia cho 7 chỉ có thể tận cùng là 0, 1, 3, suy ra m khi chia cho 7 chỉ có thể tận cùng là 0, 1, 5 hay $m = 7b + v$ với $v = 0, 1, 5$. (5)

Ta tìm các số $m < 50$ thỏa mãn đồng thời (4) và (5). Khi cho $0 \leq a \leq 4$ và $0 \leq b \leq 6$ được $m = 7, 12, 22, 40, 42, 47$. Từ công thức

$$p = 24m + 1 \text{ ta thấy :}$$

$$m = 7 \text{ thì } p = 169 = 13^2 \text{ là hợp số,}$$

$$m = 12 \text{ thì } p = 289 = 17^2 \text{ là hợp số,}$$

$$m = 22 \text{ thì } p = 529 = 23^2 \text{ là hợp số}$$

$m = 40$ thì $p = 961 = 31^2$ là hợp số.

Với $m = 42$ thì $p = 1009$ là số nguyên tố. Ta tìm được

$$1009 = 15^2 + 28^2 = 19^2 + 2.18^2 = 31^2 + 3.4^2 = 15^2 + 4.14^2 = 17^2 + 5.12^2 = 25^2 + 6.8^2 = 1^2 + 7.12^2 = 19^2 + 8.9^2 = 28^2 + 9.5^2 = 3^2 + 10.10^2$$

Vậy $p = 1009$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Nhận xét. Rất tiếc là không có bạn nào giải được bài này.

VIỆT HẢI

Bài T4/326. Giải phương trình :

$$\sqrt[3]{3x+1} + \sqrt[3]{5-x} + \sqrt[3]{2x-9} - \sqrt[3]{4x-3} = 0 \quad (1)$$

Lời giải. (Của đa số các bạn).

$$\text{Đặt } a = \sqrt[3]{3x+1}, b = \sqrt[3]{5-x}, c = \sqrt[3]{2x-9}$$

Suy ra $a^3 + b^3 + c^3 = 4x - 3$. Khi đó từ (1) có

$$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3$$

$$\Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b)(b+c)(c+a) = a^3 + b^3 + c^3$$

$$\Leftrightarrow (a+b)(b+c)(c+a) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ b+c=0 \\ c+a=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{3x+1} + \sqrt[3]{5-x} = 0 \\ \sqrt[3]{5-x} + \sqrt[3]{2x-9} = 0 \\ \sqrt[3]{2x-9} + \sqrt[3]{3x+1} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{3x+1} = \sqrt[3]{x-5} \\ \sqrt[3]{5-x} = \sqrt[3]{9-2x} \\ \sqrt[3]{9-2x} = \sqrt[3]{3x+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ x=4 \\ x=8/5 \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm là

$$x = -3, x = 4, x = \frac{8}{5}.$$

Nhận xét. 1) Tương tự giải được bài toán tổng quát là :

$$\sqrt[3]{a_1x+b_1} + \sqrt[3]{a_2x+b_2} + \sqrt[3]{a_3x+b_3} = 0$$

$$= \sqrt[3]{(a_1+a_2+a_3)x+b_1+b_2+b_3}$$

2) Hơn 200 bạn đã tham gia giải bài này, nhưng có tới gần 60 bạn giải không chính xác. Các bạn có lời giải tốt là :

Vinh Phúc : Nguyễn Ngọc Đại, 9C, THCS Vĩnh Tường ; **Phú Thọ** : Nguyễn Tiến Thanh, 9C, THCS Nguyễn Quang Bích, Tam Nông ; **TP. Hồ Chí Minh**: Lê Đức Lợi, 9¹, THCS Hồng Bàng, Q. 5 ; **Nghệ An** : Lê Tuấn Hiệp, 8C, THCS Thái Sơn, Đô Lương ; **Bắc Ninh**: Vũ Thị Hảo, 8A, THCS Lê Văn Thịnh, Gia Bình ; **Đồng Nai**: Đặng Anh Tài, 9², THCS Quang Trung, Tân Phú ; **Thanh Hóa** : Lê Thị Hạnh, 8A5, THCS Quang Trung, TP. Thanh Hóa ; **Hưng Yên**: Nguyễn Văn Thọ, 10T, THCS Hưng Yên ; **Quảng Bình**: Phạm Tiến Đồng, 9A, THCS Hoàn Lão, Bố Trạch ; **Vũng Tàu**: Đinh Ngọc Thái, 9A8, THCS Vũng Tàu.

TRẦN HỮU NAM

Bài T5/326. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a(b+1)} + \frac{1}{b(c+1)} + \frac{1}{c(a+1)} \geq \frac{3}{abc+1} \quad (1)$$

trong đó a, b, c là các số dương.

Lời giải. Nhân hai vế của (1) với $abc+1$ rồi sau đó cộng thêm 3 vào hai vế ta được

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow \left(\frac{abc+1}{a(b+1)} + 1 \right) + \left(\frac{abc+1}{b(c+1)} + 1 \right) + \left(\frac{abc+1}{c(a+1)} + 1 \right) \geq 6 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{a+1}{a(b+1)} + \frac{b(c+1)}{b+1} \right) + \left(\frac{b+1}{b(c+1)} + \frac{c(a+1)}{c+1} \right) + \\ &\quad \left(\frac{c+1}{c(a+1)} + \frac{a(b+1)}{a+1} \right) \geq 6 \\ &\Leftrightarrow \left(\frac{a+1}{a(b+1)} + \frac{a(b+1)}{a+1} \right) + \left(\frac{b+1}{b(c+1)} + \frac{b(c+1)}{b+1} \right) + \\ &\quad + \left(\frac{c+1}{c(a+1)} + \frac{c(a+1)}{c+1} \right) \geq 6 \quad (2) \end{aligned}$$

Đặt vế trái của (2) là T .

Áp dụng BĐT Cô-si $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$ cho mỗi cặp số ở vế trái của (2) ta được

$$T \geq 2 + 2 + 2 = 6$$

Vậy (2) đúng và do đó (1) được chứng minh.

Nhận xét. Tất cả các bài dự thi đều có lời giải đúng. Các bạn sau có lời giải tốt: **Võ Thị Hoàng Nga**, 6A, THCS Hermann, TP. Vinh, **Nghệ An**; **Phạm Ngọc Dương**, 7B, THCS Liên Hòa, Kim Thành, **Hải Dương**; **Trịnh Văn Vương**, 9B, THCS Điện Biên, TP. Thanh Hóa, **Thanh Hóa**; **Nguyễn Thị Nga**, 9B, THCS Uy Nỗ, Đông Anh, **Hà Nội**; **Trương Xuân Nhã**, 7A, THCS Nguyễn Huệ, Đông Hà, **Quảng Trị**; **Nguyễn Gia Luyện**, 9⁸, THCS Nguyễn Du, Gò Vấp, **TP. Hồ Chí Minh**; **Phạm Hoàng Dương**, 7/7, THCS Trần Phú, Điện Bàn, **Quảng Nam**; **Võ Văn Tuấn**, 7A5, THCS Buôn Hồ, Krông Buk, **Đắk Lắk**; **Đỗ Thị Thúy**, 8D, THCS Lập Thạch, **Vĩnh Phúc**; **Lê Tuấn Hiệp**, 8C, THCS Thái Sơn, Đô Lương, **Nghệ An**.

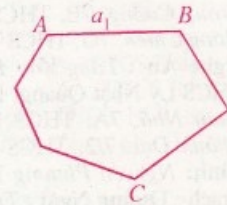
PHAN DOÀN THOẠI

Bài T6/326. Chứng minh rằng trong một đa giác luôn tồn tại ít nhất hai cạnh có độ dài a, b thỏa mãn $a \leq b \leq 2a$.

Lời giải. Gọi độ dài các cạnh của đa giác là $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ ($n \geq 3$). Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_{n-1} \geq a_n$ (1). (Không nhất thiết theo thứ tự đỉnh). Giả sử không tồn tại cặp chỉ số i, j với $1 \leq i < j \leq n$ thỏa mãn $a_j \leq a_i < 2a_j$. Khi đó có $a_i \geq 2a_{i+1}$ với mọi $i = 1, 2, \dots, n-1$.

Như vậy:

$$\begin{cases} a_1 \geq 2a_2 \\ a_2 \geq 2a_3 \\ \dots \\ a_{n-2} \geq 2a_{n-1} \\ a_{n-1} \geq 2a_n \end{cases}$$



Cộng theo từng vế với các BĐT trên ta được

$$\begin{aligned} a_1 + (a_2 + \dots + a_{n-1}) &\geq 2(a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1}) + 2a_n \\ \Rightarrow a_1 &\geq a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + 2a_n \\ \Rightarrow a_1 &> a_2 + a_3 + \dots + a_n \quad (2) \end{aligned}$$

Bất đẳng thức (2) không xảy ra vì độ dài a_i của đoạn AB không thể lớn hơn độ dài đường gấp khúc ACB . Mâu thuẫn này chứng tỏ tồn tại hai cạnh có độ dài a_i, a_{i+1} sao cho $a_i < 2a_{i+1}$.

Mặt khác, theo trên thì $a_i \geq a_{i+1}$. Như vậy ta đã chứng minh được tồn tại hai cạnh a_i, a_{i+1} thỏa mãn $a_i \leq a_{i+1} < 2a_i$.

Nhận xét. 1) Đây là bài toán dễ, có khá đông bạn tham gia giải và cho lời giải đúng. Nhiều bạn nêu và chứng minh được kết quả "mạnh hơn" của bài toán như lời giải nêu trên là $a \leq b < 2a$. Một số bạn viết lại BĐT

$$b > 2a \text{ dưới dạng } a < \frac{1}{2}b, \text{ dẫn đến BĐT}$$

$$a_2 + a_3 + \dots + a_n < \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \right) a_1,$$

rồi áp dụng công thức $(1-x)(1+x+x^2+\dots+x^{n-1}) = 1-x^n$ với $x = 1/2$ từ đó suy ra $a_2 + a_3 + \dots + a_n < a_1$ và dẫn đến mâu thuẫn.

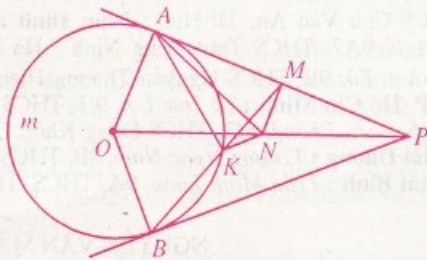
2) Các bạn sau đây có lời giải đúng và ngắn gọn:

Vĩnh Phúc: **Đỗ Thị Thanh Thủy**, 8D, THCS Lập Thạch, huyện Lập Thạch; **Phú Thọ:** **Nguyễn Tiến Thanh**, 9C, THCS Nguyễn Quang Bích; **Hà Tây:** **Khuất Văn Phiến**, 9D, THCS Thạch Thất, Thạch Thất; **Hà Nội:** **Tô Việt Anh**, 9A, THCS Nguyễn Trường Tộ, Đống Đa; **Nam Định:** **Phạm Thị Trường**, 9A7, THCS Trần Đăng Ninh, Cao Mạnh Hùng, 9A, THCS Yên Định, Hải Hậu; **Hải Dương:** **Phạm Ngọc Dương**, 7B, THCS Liên Hòa, Kim Thành; **Thái Bình:** **Bùi Công Thế**, 9A2, THCS Thượng Hiền, Kiến Xương; **Thanh Hóa:** **Trịnh Hà Linh**, 9A, THCS Lê Đình Kiên, Yên Định; **Vũ Đức Lộc**, 8C, THCS Lê Hữu Lập, Hậu Lộc, **Hoàng Đức Ý**, 9E, THCS Trần Mai Ninh, TP. Thanh Hóa; **Quảng Trị:** **Nguyễn Thị Lý**, 9B, THCS Trần Quốc Toàn, Đông Hà, **Nguyễn Kim Tiến**, 9B, THCS Hải Vĩnh, Hải Lăng; **Đắk Lắk:** **Võ Văn Tuấn**, 7A5, THCS Buôn Hồ, Krông Buk; **Đồng Nai:** **Hoàng Phúc Hưng**, 9/3, THCS Nguyễn Bình Khiêm, Biên Hòa; **Bạc Liêu:** **Trần Mỹ Linh**, 9/1, THCS Trần Huỳnh, TX Bạc Liêu; **Gia Lai:** **Dương Thị Thảo**, 7/4, THCS Nguyễn Du, Pleiku; **TP. Hồ Chí Minh:** **Lê Đức Lợi**, 9/1, THCS Hồng Bàng, Q. 5.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

Bài T7/326. Từ một điểm P nằm ngoài một đường tròn tâm O kẻ hai tiếp tuyến PA, PB . Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AP và OP . Đường thẳng BM cắt đường tròn lần nữa tại K . Chứng minh rằng $KN \perp AK$.

Lời giải. 1) Khi N nằm ngoài đường tròn : Ta có $\widehat{AOP} = \widehat{MNP} = \widehat{ANM}$. Mà $\widehat{AOB} = \widehat{AKB}$ nên $\widehat{ANM} = \frac{1}{2} \widehat{AKB}$ (1).



$$\text{Mặt khác } \widehat{MKA} = 180^\circ - \widehat{AKB} = \frac{1}{2}(360^\circ - \widehat{AKB}) = \frac{1}{2} \widehat{AKB} \quad (2)$$

Nên $\widehat{MKA} = \widehat{MNA}$ (từ (1) và (2)). Vậy tứ giác $AKNM$ nội tiếp, từ đó $\widehat{NKA}$ vuông hay $KN \perp AK$.

2) Khi N nằm trong đường tròn : Chứng minh tứ giác $AKNM$ nội tiếp tương tự trên.

3) Khi N nằm trên đường tròn : Lúc đó $\triangle ABP$ đều. B, N, M thẳng hàng. Khi đó không tồn tại đường thẳng NK .

Nhận xét. 1) Hầu hết các bạn chỉ chứng minh theo 1 hình vẽ có được.

2) Các bạn có lời giải tốt :

Phú Thọ : Nguyễn Văn Quỳnh, 9A, THCS Tam Sơn, Cẩm Khê ; **Vĩnh Phúc :** Tạ Thị Quỳnh, Ngô Thị Bích Phương, Bùi Thị Bích Phương, Hoàng Anh Sơn, 8A, THCS Yên Lạc ; **Hung Yên :** Nguyễn Văn Thọ, 10T, THPT chuyên Hưng Yên ; **Thái Bình :** Trần Minh Tuấn, 9A, THCS TT Vũ Thư ; **Hải Dương :** Trương Ngọc Nam, 8B, THCS Minh Tâm, Kinh Môn ; **Hà Nam :** Nguyễn Thị Thu Hằng, 9B, THCS Nguyễn Hữu Tiến, Duy Tiên, Nguyễn Phương Thảo (?) ; **Hà Nội :** Tô Việt Anh, 9A, THCS Nguyễn Trường Tộ, Hoàng Minh Trí, THCS Kim Liên ; **Nam Định :** Nguyễn Tuấn Anh, 9A, Lương Thế Vinh, Trần Thủy Trinh, THCS Yên Bình, 9B, Ý Yên ; **Thanh Hóa :** Trịnh Văn Vương, 9B, THCS Điện Biên, Nguyễn Lưu Bách, 9C, THCS Lê Hữu Lập, Hậu Lộc ; **Hà Tĩnh :** Nguyễn Thị Cẩm Hằng, xóm 3, xã Trung Lộc, Can Lộc, Bùi Hoàng Đan, 9/4, THCS Lê Văn Thiêm, TX. Hà Tĩnh ; **Thừa Thiên - Huế :** Tôn Nữ Thủy Dung, 9E, THCS Thừa Lưu, huyện Phú Lộc ; **Quảng Nam :** Phan Xuân Sơn, 8/2, THCS Lê Quý Đôn,

Thăng Bình ; **Khánh Hòa :** Phan Nhật Minh, 9/1, THCS Đinh Tiên Hoàng, Ninh Hòa.

VŨ KIM THỦY

Bài T8/326. Giải phương trình hai ẩn nguyên dương : $x^{y^x} = y^{x^y}$ (1)

Lời giải. Giả sử x, y là hai số nguyên dương thỏa mãn phương trình (1), ta sẽ chứng minh $x = y$. Như vậy phương trình (1) chỉ có nghiệm $x = y$ là số nguyên dương tùy ý.

Giả sử phương trình (1) có nghiệm $x \neq y \in \mathbb{N}^*$.

Nhận xét : Nếu $y = 1$ thì $x^{y^x} = y^{x^y} = 1$, suy ra $x = 1$. Tương tự nếu $x = 1$ thì suy ra $y = 1$. Do đó từ $x \neq y$ ta có $x \geq 2, y \geq 2$.

Nếu các cơ số x, y mà $x \neq y$ thì từ (1) suy ra các số mũ phải thỏa mãn $y^x \neq x^y$.

Không mất tính tổng quát (nếu cần đổi chỗ kí hiệu x và y cho nhau) ta có thể giả sử $y^x > x^y$

$$(2). \text{ Chia cả hai vế của (1) cho } x^{x^y}, \text{ ta có } x^{(y^x - x^y)} = \left(\frac{y}{x}\right)^{x^y}$$

Vì $x^{(y^x - x^y)} \in \mathbb{Z}$ do $y^x > x^y$, nên từ đẳng thức trên ta suy ra $\frac{y}{x} \in \mathbb{Z}$.

Đặt $y = m.x, m \in \mathbb{N}^*, m \geq 2$.

Thay vào BĐT (2), ta nhận được $(m.x)^x > x^{m.x}$, suy ra $m.x > x^m$.

Mặt khác, ta chứng minh bằng quy nạp theo $m = 2, 3, 4, \dots$ rằng

$$x^m \geq m.x \text{ (chú ý } x \in \mathbb{N}^*, x \geq 2) \quad (3)$$

Thật vậy với $m = 2$ thì $x^m = x^2 \geq 2x$.

Giả sử BĐT trên đã đúng với $m = k \geq 2$, ta sẽ chứng minh nó cũng đúng với $n = k+1$ như sau :

$$x^{k+1} = x.x^k \geq x(k.x) \geq 2k.x > (k+1).x.$$

Như vậy giả thiết phản chứng là sai vì (2) và (3) mâu thuẫn với nhau. Tức là $x = y$ (dpcm).

Nhận xét. 1) Thực ra ta có kết quả mạnh sau : "Với mọi số thực x, y mà $y > x > 0$, chứng minh $y^{x^y} > x^{y^x}$ ". Đây là đề toán của Tạp chí "The American Math Monthly", 1990. Để chứng minh bài toán trên, chúng ta phải dùng kiến thức của đạo hàm hàm số và chứng minh tương đối phức tạp.

2) Tòa soạn nhận được lời giải của gần 100 bạn học sinh. Tất cả các lời giải đều theo hai hướng : dùng đạo hàm (như kết quả tổng quát), hoặc theo cách như trình bày ở trên. Tuy nhiên rất nhiều bạn vì không chia cả hai vế của (1) cho x^{x^y} , nên để rút ra kết luận $y : x$ các bạn đã phải dùng phương pháp so sánh số mũ. Phải nhấn mạnh : một số (không ít) các bạn đã giải sai do nắm kiến thức cơ bản của số học, đạo hàm không chắc chắn, thậm chí có bạn còn hiểu $x^{x^y} = (x^y)^x = x^{x \cdot y}$ (!)

3) Các bạn sau có lời giải tốt : **Bác Ninh** : Vương Văn Tín, 11A1, THPT Gia Bình 2 ; **Bác Giang** : Phạm Mạnh Khương, 10A10, THPT Hiệp Hòa I ; **Hoàng Văn Thanh**, 10A4, Bùi Minh Tuệ, 10T, THPT NK Ngô Sĩ Liên ; **Phú Thọ** : Nguyễn Sơn Tùng, 9B, Nguyễn Tiến Thanh, 9C, THCS Nguyễn Quang Bích, Tam Nông ; **Hà Nội** : Trần Anh Tuấn, 10A, PTCT, ĐHKHTN – ĐHQG ; **Vinh Phúc** : Nguyễn Văn Quang, Nguyễn Xuân Thọ, Nguyễn Kim Thuật, 10A1, Đỗ Việt Kiên, 11A1, THPT chuyên ; **Hà Nam** : Nguyễn Mạnh An, 10A1, THPT chuyên ; **Nam Định** : Phạm Cao Kỳ, Vương Hồng Quang, 11B5, THPT A Hải Hậu ; **Thanh Hóa** : Hoàng Đức Ý, 9E, THCS Trần Mai Ninh, Vũ Văn Tâm, 10T, THPT Lam Sơn, Phạm Thị Hương Giang, 11B, THPT Hà Trung, Nguyễn Thị Phương, 11B1, THPT Hoàng Hóa II ; **Nghe An** : Đinh Quỳnh Nga, 11A2, THPT Nghi Lộc I ; **Quảng Ngãi** : Lương Bá Linh, 11T, THPT Lê Khiết ; **Đắk Lắk** : Võ Văn Tuấn, 7A5, THCS Buôn Hồ, Krông Buk.

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T9/326. Cho hai số thực không âm thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^2 = 1$. Chứng minh rằng

$$xy + \max\{x, y\} \leq \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

Lời giải. Gọi vế trái BĐT cần chứng minh là $f(x, y)$. Không mất tính tổng quát có thể giả sử $x \geq y$, thế thì $f^2(x, y) = x^2(y+1)^2$

Sử dụng giả thiết và BĐT giữa trung bình cộng và trung bình nhân ta có

$$\begin{aligned} f^2(x, y) &= (1 - y^2)(1 + y)^2 = \frac{1}{3}(3 - 3y)(1 + y)^3 \\ &\leq \frac{1}{3} \left(\frac{3 - 3y + 1 + y + 1 + y + 1 + y}{4} \right)^4 = 27/16 \end{aligned}$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh. Dấu đẳng thức đạt được khi và chỉ khi $3 - 3y = 1 + y$ và

$$x^2 + y^2 = 1 \text{ hay là } y = \frac{1}{2} \text{ và } x = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ hoặc}$$

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2}, x = \frac{1}{2}.$$

Nhận xét. Bài toán này có nhiều cách giải. Tuy nhiên, cách đơn giản nhất là dùng BĐT giữa trung bình cộng và trung bình nhân. Đã có hơn 400 bạn gửi lời giải cho bài toán này, xin nêu tên những bạn nhỏ tuổi có lời giải tốt :

Thanh Hóa : Hoàng Đức Ý, 9E, Hoàng Vũ Hạnh, 9B, THCS Trần Mai Ninh, Trịnh Văn Vương, 9B, THCS Điện Biên, Nguyễn Khánh Linh, Nguyễn Việt Hòa, 9A, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoàng Hóa, Phạm Văn Đông, 9C, THCS Lý Thường Kiệt, Hà Trung, Lê Hoàn, 9C, THCS Lý Tự Trọng, Nguyễn Lưu Bách, 9C, THCS Lê Hữu Lập, Hậu Lập, Lê Quý Trình, 6A, THCS Thị trấn Bút Sơn, Hoàng Hóa, ; **Khánh Hòa** : Võ Thái Thông, 8/4, THCS Ngô Gia Tự, Cam Nghĩa, Cam Ranh ; **Nghe An** : Võ Quang Vinh, 8D, THCS Thái Hòa II, Nghĩa Đàn, Nguyễn Trung Kiên, 9E, THCS Đặng Thai Mai, Vinh ; **Quảng Bình** : Nguyễn Phi Hùng, 9A, THCS Hoàn Lão, Bố Trạch ; **Quảng Trị** : Nguyễn Hùng Anh, 9K, THCS Nguyễn Huệ, Đông Hà ; **Thừa Thiên – Huế** : Nguyễn Vũ Thanh Long, 9/1, THCS Chu Văn An, TP Huế ; **Nam Định** : Trần Quang Anh, 9A7, THCS Trần Đăng Ninh ; **Hà Tây** : Nguyễn Anh Tú, 9B, THCS Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hòa ; **TP. Hồ Chí Minh** : Lê Đức Lợi, 9/1, THCS Hồng Bàng, Q.5, Kiều Phong, 8/3, THCS Đồng Khởi, Q. Tân Bình ; **Hải Dương** : Trương Ngọc Nam, 8B, THCS Minh Tân ; **Thái Bình** : Trần Minh Tuấn, 9A, THCS Thị trấn Vũ Thư.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T10/326. Tìm tất cả các hàm $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ thỏa mãn điều kiện $x f(xf(y)) = f(f(y))$ với mọi x, y thuộc $\mathbb{R}^+$.

Lời giải. (Của bạn Nguyễn Đình Duy, lớp 12, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm, Quảng Nam).

$$\text{Cho } y = 1 \text{ thì } f(xf(1)) = \frac{f(f(1))}{x}.$$

$$\text{Cho } x = \frac{1}{f(1)} \text{ thì } f(1) = f(1)f(f(1)) \text{ vậy}$$

$$f(f(1)) = 1. \text{ Do đó } f(xf(1)) = \frac{1}{x} = \frac{f(1)}{xf(1)}.$$

$$\text{Đặt } y = xf(1) \text{ suy ra } f(y) = \frac{f(1)}{y}.$$

Vì $xf(1)$ nhận mọi giá trị trên $\mathbb{R}^+$ nên ta suy ra

$$f(y) = \frac{f(1)}{y} \text{ với mọi } y \in \mathbb{R}^+.$$

Thử lại thấy hàm $f(x) = \frac{a}{x}$ thỏa mãn điều kiện

đầu bài với $a \in \mathbb{R}^+$ là hằng số.

Nhận xét. Bài toán này được rất nhiều bạn tham gia giải. Các lời giải gửi đến đều đúng. Các bạn có lời giải tốt : Nguyễn Song Toàn, 12 chuyên Thăng Long, Đà Lạt, Lâm Đông, Nguyễn Minh Hữu, 12A2, THPT Nguyễn Huệ, Phú Yên ; Nguyễn Lâm Anh, 11T, THPT Bến Tre, Bến Tre ; Nguyễn Bá Duy Khoa, THPT Lê Quý Đôn, Đà Nẵng ; Lê Trung, 11T, THPT chuyên Bạc Liêu, Bạc Liêu ; Hà Xuân Thiên Hương, 10T, chuyên Lương Thế Vinh, Biên Hòa, Đồng Nai ; Bùi Ngọc Quỳnh, 12A, THPT An Nhơn, Bình Định.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T11/326. Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn tâm I . Gọi R và r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{IA \cdot IB} + \frac{1}{IB \cdot IC} + \frac{1}{IC \cdot IA} \leq \frac{5R+2r}{8Rr^2}$$

Lời giải. Kí hiệu

$$\sum \cos A = \cos A + \cos B + \cos C$$

$$\sum \sin \frac{A}{2} = \sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2}$$

$$\sum \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} + \sin \frac{C}{2} \sin \frac{A}{2} + \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2}$$

Trước hết, xin nhắc lại một vài kết quả quen thuộc trong tam giác.

$$\sum \cos A = 1 + \frac{r}{R} \quad (1); \quad \sum \sin \frac{A}{2} \leq \frac{3}{2} \quad (2)$$

Trở lại bài toán, ta có :

$$\sum \frac{1}{IB \cdot IC} \leq \frac{5R+2r}{8Rr^2} \quad (*)$$

$$\Leftrightarrow \sum \frac{r}{IB \cdot IC} \leq \frac{5}{8} + \frac{1}{4} \frac{r}{R}$$

$$\Leftrightarrow \sum \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \leq \frac{5}{8} + \frac{1}{4} (\sum \cos A - 1) \quad (\text{theo } 1)$$

$$\Leftrightarrow 2 \sum \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \leq \frac{5}{4} + \frac{1}{2} \left(\sum \left(1 - 2 \sin^2 \frac{A}{2} \right) - 1 \right)$$

$$\Leftrightarrow 2 \sum \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \leq \frac{5}{4} + \frac{1}{2} \left(2 - 2 \sum \sin^2 \frac{A}{2} \right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\sum \sin \frac{A}{2} \right)^2 \leq \frac{9}{4} \Leftrightarrow \sum \sin \frac{A}{2} \leq \frac{3}{2} \quad (2)$$

Vậy (*) tương đương với (2), theo chú ý ban đầu, (2) đúng. Suy ra, (*) đúng.

Nhận xét. 1) Đây là bài toán dễ, rất nhiều bạn tham gia giải, tất cả đều giải đúng, tuy nhiên, một số bạn giải quá dài.

2) Bạn **Đỗ Quốc Khánh** đã đưa ra và chứng minh một bất đẳng thức mạnh hơn (*) là

$$\sum \frac{1}{IB \cdot IC} \leq \frac{R+r}{2Rr^2} \quad (**)$$

thông qua việc chứng minh một BĐT lượng giác quen thuộc trong tam giác

$$\left(\sum \sin \frac{A}{2} \right)^2 \leq \sum \cos^2 \frac{A}{2}$$

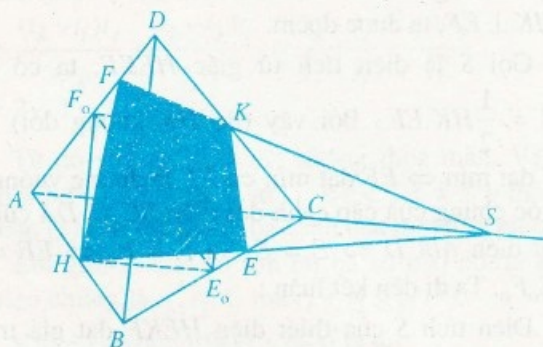
3) Các bạn sau đây có lời giải tốt : **Bạc Liêu** : Lê Trung, 11T, THPT chuyên Bạc Liêu ; **Bà Rịa - Vũng**

Tàu : Trần Văn Linh, 10T, THPT chuyên Lê Quý Đôn ; **Bình Định** : Nguyễn Phúc Thọ, 11T, THPT Lê Quý Đôn ; **Quảng Ngãi** : Trần Lương Khiêm, 10T, THPT chuyên Lê Khiết ; **Đà Nẵng** : Nguyễn Tuấn Hoàng, 11/2, Trần Sơn Hà, 10/2, THPT chuyên Lê Quý Đôn ; **Vĩnh Long** : Nguyễn Phúc Khải, 12T, THPT Nguyễn Bình Khiêm ; **Đồng Nai** : Nguyễn Thế Nam, 11T, Tạ Quang Hiến, 12T, THPT chuyên Lương Thế Vinh.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài T12/326. Cho hình tứ diện đều $ABCD$ cạnh a . Gọi H và K lần lượt là trung điểm của AB và CD . Một mặt phẳng bất kì đi qua HK cắt các cạnh BC và AD của tứ diện tại E và F theo thứ tự. Chứng minh rằng $EF \perp HK$. Tìm giá trị nhỏ nhất của diện tích tứ giác $HEKF$.

Lời giải. Theo giả thiết thì tứ giác $HEKF$ là thiết diện của hình tứ diện đều $ABCD$ đã cho, xác định bởi một mặt phẳng σ nào đó đi qua đường thẳng HK (và cắt hai cạnh đối diện BC, DA).



Để ý rằng ba đường thẳng CA, HE và KF đôi một đồng phẳng nên chúng đồng quy ở một điểm S nào đó (hình vẽ) hoặc song song với nhau từng đôi một. Ba đường thẳng DB, HF và KE cũng vậy. Hơn nữa, cũng dễ thấy rằng nếu $CA \parallel HE \parallel KF$ thì $DB \parallel HF \parallel KE$ và ngược lại ; đồng thời khi đó E và F theo thứ tự ở vị trí trung điểm E_0 của cạnh BC và trung điểm F_0 của cạnh DA . Thiết diện trong trường hợp này (xác định bởi mặt phẳng σ đi qua HK , song song với cặp cạnh đối diện CA, DB) là hình vuông HE_0KF_0

có cạnh bằng $\frac{a}{2}$ do $ABCD$ là một tứ diện đều (suy ra từ $AC \perp DB, AC = DB = a$).

• Xét trường hợp tổng quát, ở đó mặt phẳng thiết diện σ không song song với CA và DB , hai đường thẳng HE và KF cắt nhau tại S thuộc đường thẳng CA . Áp dụng định lí Mê-nê-la-uyt

vào hai tam giác BAC và DAC (tương ứng với hai cát tuyến SEH và SKF), ta thu được hệ thức sau đây :

$$\frac{HA}{HB} \cdot \frac{EB}{EC} \cdot \frac{KC}{KD} \cdot \frac{FD}{FA} = +1 \quad (1)$$

(Hệ thức (1) này cũng được gọi là *định lí Mê-nê-la-uyt* trong hình học không gian đối với tứ giác gheñh $ABCD$ và thiết diện $HEKF$).

Vì theo giả thiết $\frac{HA}{HB} = \frac{KC}{KD} = -1$, nên từ (1)

ta suy ra : $\frac{EB}{EC} = \frac{FA}{FD} \quad (2).$

Thế thì, theo định lí Talét (đảo) trong không gian, hệ thức (2) chứng tỏ rằng ba đường thẳng AB , CD và EF cùng song song với một mặt phẳng. Mặt phẳng này có phương là mặt phẳng γ song song với cặp cạnh đối diện AB và CD của tứ diện đều $ABCD$. Lại vì HK là đường vuông góc chung của AB và CD nên $HK \perp \gamma$ và do đó, $HK \perp EF$, ta được đpcm.

Gọi S là diện tích tứ giác $HEKF$, ta có :

$$S = \frac{1}{2} HK \cdot EF.$$

Bởi vậy (do HK không đổi) :

S đạt min $\Leftrightarrow EF$ đạt min $\Leftrightarrow EF$ là đường vuông góc chung của cặp cạnh đối diện BC và DA của tứ diện $ABCD \Leftrightarrow E = E_0$ và $F = F_0 \Leftrightarrow EF = E_0F_0$. Ta đi đến kết luận :

Diện tích S của thiết diện $HEKF$ đạt giá trị nhỏ nhất $S_{\min}$ khi và chỉ khi mặt phẳng σ chứa thiết diện song song với AC và BD , cũng tức là khi và chỉ khi thiết diện là hình vuông HE_0KF_0 . Và khi đó :

$$S_{\min} = S_{HE_0KF_0} = \frac{a^2}{4}.$$

Nhận xét. 1) Đa số các bạn đều biết sử dụng định lí Mê-nê-la-uyt trong hình học phẳng để thu được hệ thức (1) hoặc sử dụng trực tiếp ngay định lí Mê-nê-la-uyt trong không gian mà nội dung là hệ thức (1) và sau đó, thu được (2). Tuy nhiên, cũng còn nhiều bạn chưa biết vận dụng định lí đảo của định lí Ta-lét trong không gian nên việc chứng minh $EF \perp HK$ còn dài dòng. Ngoài ra, để chứng minh tính chất này, một số bạn dựng hình hộp $AB'CD'C'DA'B$ ngoại tiếp tứ diện đều $ABCD$, hình hộp này là một hình lập phương. Đặc biệt, có hai bạn nhận xét rằng tứ diện đều $ABCD$ nhận (HK) là một trong các trục đối xứng của nó.

Phép đối xứng trục $D(HK)$ qua HK biến (BC) thành (AD) và biến mặt phẳng σ chứa thiết diện $HEKF$ thành chính nó nên biến giao điểm E của BC và σ thành giao

điểm của AD với σ do đó (HK) là đường trung trực của đoạn EF và $HK \perp EF$ tại trung điểm của EF .

2) Nhiều bạn chưa chú ý đến việc vẽ hình nên hình vẽ thiết diện $HEKF$ không chính xác. Một số bạn sử dụng vectơ, thậm chí cả phương pháp tọa độ hoặc phải dùng đến việc khảo sát hàm số để tìm giá trị nhỏ nhất của diện tích thiết diện. Lời giải của các bạn này vì thế không gọn.

3) Hai bạn Hoàng Long và Trần Ngọc Hải còn có nhận xét đúng rằng bài toán trên chỉ là một trường hợp đặc biệt của bài T10/294 (khi $a = b$ thì chóp tam giác đều $DABC$ trở thành tứ diện đều).

4) Các bạn sau đây có lời giải tốt, tương đối gọn gàng hơn cả : **Hà Nội** : Nguyễn Hoàng Hải, 10A1, Nguyễn Hồng Thanh, Nguyễn Hoàng Việt, 11A1, PTCTT-DHSP, Phạm Thành Nam, 12A1, THPT Liên Hà, Đông Anh ; **Bắc Giang** : Nguyễn Văn Hậu, 11A1, THPT II Yên Dũng ; **Hà Tây** : Cán Đình Hùng, 11A3, THPT Thạch Thất ; **Phú Thọ** : Nguyễn Quang Huy, Lê Bá Long, 11A1, THPT chuyên Hùng Vương, Việt Trì ; **Hưng Yên** : Vũ Mạnh Tuấn, 11T, Vũ Thanh Xuân, 10T, THPT chuyên Hưng Yên ; **Hải Dương** : Nguyễn Anh Tuấn, 11T, THPT Nguyễn Trãi, TP. Hải Dương ; **Hải Phòng** : Phạm Duy Thành, 12T, THPT NK Trần Phú ; **Thái Bình** : Nguyễn Văn Chuyển, THPT chuyên Thái Bình ; **Thanh Hóa** : Lê Ngọc Tuấn, 10T, Trịnh Đình Linh, 12T, THPT chuyên Lam Sơn, Vũ Quốc Đạt, 11A1, THPT Lê Hoàn, Thọ Xuân, Nguyễn Văn Thư, 10B3, THPT Như Thanh, Hoàng Long, 11A1, THPT Nông Cống I, Hoàng Khắc Hiếu, 11A1, THPT Nguyễn Xuân Ôn ; **Nghệ An** : Nguyễn Tường Anh, A1, K32, Cao Xuân Sảng, 11A2, Bùi Hoàng Vương, 11A2, THPT Phan Bội Châu, Võ Thị Hoàng Nga, 6A, Hà Trường Sang, 12A1, TH Hermann, TP. Vinh, Trần Văn Thắng, 12H, THPT Đô Lương II, Nguyễn Lê Phước, 10A2, Đậu Thế Linh, Nguyễn Đức Tùng, 11A1, Phan Quang Anh, 11A3, Mạnh Phúc Thọ, 12A1, Nguyễn Đức Hùng, 12A2, PTCTT, DH Vinh ; **Hà Tĩnh** : Lê Đăng Hoàng, 12T, THPT chuyên Hà Tĩnh ; **Quảng Trị** : Nguyễn Hữu Ninh, 11T, Lê Tiến Triển, 12T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Quảng Trị ; **Đà Nẵng** : Đỗ Quốc Khánh, 12A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn ; **Quảng Ngãi** : Phạm Viết Huy, 12T, THPT chuyên Lê Khiết ; **Phú Yên** : Đặng Nhất Tân, 11T, THPT Lương Văn Chánh ; **Gia Lai** : Trần Thanh Nam, 10C3, THPT Hùng Vương, Pleiku ; **Cần Thơ** : Nguyễn Thành Công, 11A1, THPT Lý Tự Trọng, TP. Cần Thơ.

NGUYỄN ĐĂNG PHÁT

L1/326. Một ô tô chuyển động theo đường thẳng nằm ngang trong mưa, các hạt mưa rơi theo phương thẳng đứng với vận tốc không đổi. Biết rằng vận tốc của ô tô là $v_1 = 36 \text{ km/h}$, mưa rơi trên kính phía trước với số hạt là $N_1 = 200$ (hạt/s), khi tốc độ ô tô $v_2 = 72 \text{ km/h}$ thì số hạt lúc này là $N_2 = 300$ (hạt/s). Hỏi nếu ô tô dừng lại thì có bao nhiêu hạt mưa rơi vào kính trong 1 giây.

Lời giải. Có nhiều cách giải. Dưới đây là cách giải của bạn Nguyễn Phúc Thọ, 12T, THPT Lê Quý Đôn, Bình Định.

Khi ôtô đứng yên thì có N_0 hạt mưa rơi trên kính phía trước trong 1 giây. Khi ôtô chuyển động thì kính trước “quét” qua một khoảng không gian nên có thêm một lượng hạt mưa đập vào kính trong 1 giây, lượng hạt mưa này tỉ lệ bậc nhất với thể tích không gian đã bị “quét” trong 1 giây, tức là tỉ lệ thuận với vận tốc v của ôtô. Như vậy, số hạt mưa đập lên kính phía trước trong 1 giây khi ôtô có vận tốc v là: $N = N_0 + kv$, với k là hệ số tỉ lệ.

Theo đầu bài, khi $v_1 = 36\text{km/h} = 10\text{m/s}$ thì $N_1 = 200\text{hạt/s}$, nghĩa là: $200 = N_0 + 10k$ (1)

Tương tự khi $v_2 = 72\text{km/h} = 20\text{m/s}$ thì $N_2 = 300\text{hạt/s}$, nghĩa là: $300 = N_0 + 20k$ (2)

Từ (1) và (2) tìm được $N_0 = 100\text{hạt/s}$.

Nhận xét. Các bạn có lời giải đúng:

Vĩnh Phúc: Nguyễn Đức Trọng, 10A3, Trần Ngọc Linh, Vũ Ngọc Quang, 11A3, Nguyễn Thị Phương Dung, Nguyễn Văn Linh, 12A3, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Bắc Giang:** Dương Trung Hiếu, 12B, THPT NK Ngô Sĩ Liên; **Bắc Ninh:** Nguyễn Minh Cường, 12A1, THPT Yên Phong I; **Hưng Yên:** Hoàng Huy Đạt, 12 Lí, THPT chuyên Hưng Yên; **Hải Dương:** Lê Hoàng Dũng, 10 Lí, THPT Nguyễn Trãi; **Nghệ An:** Nguyễn Mạnh Thành, A3, K31, THPT Phan Bội Châu; **Thanh Hóa:** Trịnh Văn An, 10A1, THPT Yên Định II; **Đồng Tháp:** Thái Phan, 12T, THPT TX Sa Đéc; **TP. Hồ Chí Minh:** Trần Nhật Tuấn, 11A1, THPT Bùi Thị Xuân; **TP. Hà Nội:** Trịnh Trọng Thành, 10A chuyên Lí, ĐHKHTN – ĐHQG; **Quảng Ngãi:** Lê Hà Kiệt, 12A2, THPT Đức Phổ I.

MAI ANH

L2/326. Trên quãng đường AB dài 81km, có một chiếc xe đi từ A đến B. Cứ sau 15 phút chuyển động thẳng đều xe lại dừng và nghỉ 5 phút. Trong khoảng thời gian 15 phút đầu xe có vận tốc $v_1 = 10\text{km/h}$ và trong các khoảng thời gian kế tiếp xe có vận tốc lần lượt $2v_1, 3v_1, 4v_1, \dots$ Xuất phát cùng lúc là một xe khác chuyển động thẳng đều từ B về A với vận tốc $v_2 = 30\text{km/h}$.

a) Tìm thời điểm và vị trí gặp nhau của hai xe.

b) Tìm vị trí hai xe gặp nhau nếu xe đi từ B xuất phát muộn hơn xe đi từ A là 12 phút.

Lời giải. a) Giả sử hai xe gặp nhau khi xe đi từ A đang chạy với vận tốc $(k+1)v_1$ và đi với vận tốc này được Δt giờ $\left(0 \leq \Delta t \leq \frac{1}{4}(\text{h})\right)$ (1). Quãng đường xe từ A đi được là:

$$S_A = v_1 \cdot \frac{1}{4} + 2v_1 \cdot \frac{1}{4} + \dots + kv_1 \cdot \frac{1}{4} + (k+1)v_1 \Delta t$$

$$= \frac{5}{4}k(k+1) + (k+1)10\Delta t \text{ (km)} \quad (2)$$

Quãng đường xe từ B đi được là:

$$S_B = v_2 \left[k \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{4} \right) + \Delta t \right] = 10k + 30\Delta t \text{ (km)} \quad (3)$$

Khi hai xe gặp nhau:

$$S_A + S_B = 81(\text{km}) \quad (4)$$

Từ (1), (2), (3) và (4) rút ra: $3,8 \leq k \leq 4,7 \Rightarrow k = 4 \Rightarrow \Delta t = 0,2(\text{h})$.

Thời điểm hai xe gặp nhau kể từ lúc xuất phát: $t = k \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{12} \right) + \Delta t = \frac{23}{15}(\text{h}) = 1\text{h}32\text{ph}$. Vị trí gặp nhau cách B là: $S_B = v_2 t = 46\text{km}$, cách A là 35km.

Dễ dàng kiểm tra lại rằng không xảy ra trường hợp hai xe gặp nhau khi xe đi từ A đang nghỉ.

b) Nếu coi hai xe xuất phát cùng một lúc thì ban đầu hai xe cách nhau $S = 81 + \frac{12}{60} \cdot 30 = 87(\text{km})$ và hai xe gặp nhau khi $S_A + S_B = 87\text{km}$ (5)

Giả sử hai xe gặp nhau khi xe đi từ A đang nghỉ lần thứ k và xe đã nghỉ được Δt giờ với

$$0 \leq \Delta t \leq \frac{1}{12}(\text{giờ}) \quad (6)$$

Khi đó quãng đường xe A và xe B đi được tương ứng là: $S_A = \frac{5}{4}k(k+1) \text{ (km)}$ (7)

$$\text{và } S_B = v_2 \left[k \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{4} \right) - \frac{1}{12} + \Delta t \right] = 10k - 2,5 + 30\Delta t \text{ (km)} \quad (8)$$

Từ (5), (6), (7) và (8) rút ra: $4,98 \leq k \leq 5,08 \Rightarrow k = 5 \Rightarrow \Delta t = \frac{1}{15}(\text{h})$. Thời điểm hai xe gặp nhau kể từ lúc xe đi từ A xuất phát là:

$$t = k \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{12} \right) - \frac{1}{12} + \Delta t = \frac{33}{20}(\text{h}) = 1\text{h}39 \text{ phút.}$$

Vị trí hai xe gặp nhau cách A là:

$$S_A = \frac{5}{4}k(k+1) = 37,5\text{km.}$$

Không xảy ra trường hợp hai xe gặp nhau khi xe A đang chạy.

Nhận xét. Có thể sử dụng phương pháp vẽ đồ thị đường đi của hai xe. Các bạn có lời giải đầy đủ và đáp số đúng:

(Xem tiếp trang 25)



DÂY SỐ PHI-BÔ-NA-XI VÀ VẤN ĐỀ SINH TRƯỞNG



Phibônaxi (Fibonacci) biệt danh là Lê-ô-na-đô Pi-da-nô (Léonardo Pisano) tức là Léonardo ở thành Pi-sa, nhà toán học thế kỉ XIII (khoảng 1170-khoảng 1250)

Ông là tác giả của dãy số Phi-bô-na-xi nổi tiếng được minh họa bằng bài toán *Thỏ đẻ con*.

Dãy số Phi-bô-na-xi có nhiều ứng dụng đến nỗi năm 1963 một Hiệp hội Phi-bô-na-xi được thành lập và xuất bản Tạp chí *The Fibonacci Quarterly* ra 3 tháng một kì.

Từ dãy Phi-bô-na-xi, với những tính chất toán học phong phú của nó, người ta cố gắng tìm những mô hình trong thiên nhiên, sinh học, y học, di truyền học... phản ánh mối liên hệ giữa toán học và thực tế cuộc sống muôn hình muôn vẻ. Bài báo này giới thiệu một số mối liên hệ đó.

Chúng ta ai cũng có cha mẹ, 4 ông bà nội ngoại, 8 cụ nội cụ ngoại... (trừ trường hợp đặc biệt). Do vậy cứ đi ngược một bậc, thì số tổ tiên tăng gấp đôi. Đời thứ n về trước có $2n$ vị tổ tiên.

Dòng họ của loài ong

Ong cái có cả bố, mẹ. Ong đực chỉ có mẹ. Vậy một con ong đực có bao nhiêu tổ tiên ở đời thứ n ?

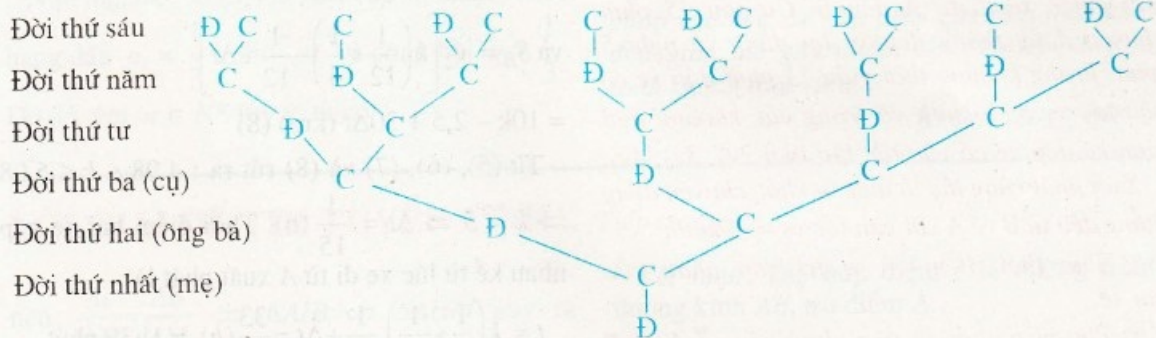
Một con ong đực có 1 ong mẹ, 2 ong ông bà (1 đực, 1 cái), 3 ong cụ (1 đực, 2 cái), rồi 5, 8, 13 v.v...

Nếu gọi n là thế hệ thứ n về trước và $f(n)$ là số tổ tiên thì có hệ thức $f(1) = 1, f(2) = 2$ và nếu coi $f(0) = 1$ thì với $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ $f(n)$ lấy các giá trị 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21... là dãy Phi-bô-na-xi được xác định như sau :

Nếu coi $f(0) = 1, f(1) = 1$

và $f(n) = f(n-1) + f(n-2)$ với $n = 2, 3, \dots$

Dưới đây vẽ sơ đồ cây các thế hệ của loài ong. Trong sơ đồ tính đến đời thứ sáu.



Hậu duệ của thỏ

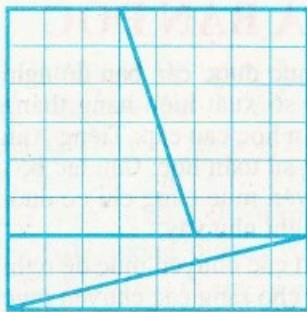
Bài toán *thỏ đẻ con* dẫn đến dãy số Phi-bô-na-xi :

Có bao nhiêu cặp thỏ vào cuối năm, nếu từ đầu năm có một cặp thỏ (đực và cái) và cứ sau

một tháng thì mỗi cặp thỏ đó (kể cả cặp thỏ ban đầu) lại sinh ra một cặp thỏ con (đực và cái) ?

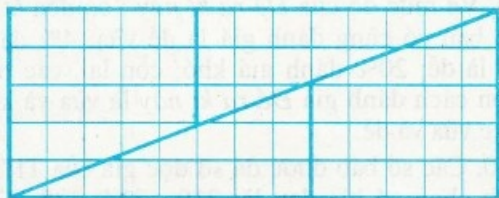
Bạn hãy vẽ sơ đồ các cặp thỏ và kể từ các cặp thỏ ban đầu ta thấy số cặp thỏ sau các tháng chính là dãy số Phi-bô-na-xi :

Số tháng	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Số cặp thỏ	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233



$$64 = 65!$$

Cắt một hình vuông có cạnh là 8 đơn vị thành 4 phần như hình vẽ bên rồi ghép lại thành một hình chữ nhật có kích thước 5×13 . So sánh diện tích hai hình thì $64 = 65!$



Thực ra giữa 4 phần của hình chữ nhật có chỗ trống tạo thành hình bình hành có 1 đơn vị diện tích.

Trò chơi nguy hiểm trên do Lewis Carroll đưa ra có thể tổng quát hóa dựa vào một tính chất của dãy số Phi-bô-na-xi là $f(n) \times f(n+2) = (f(n+1))^2 \pm 1$ với số nguyên dương n bất kì.

Từ công thức trên suy ra công thức gần đúng

$$\frac{f(n+2)}{f(n+1)} \approx \frac{f(n+1)}{f(n)}$$

Tỉ số của hai số nguyên dương này biểu thị gần đúng (khi n càng lớn thì sai số càng giảm) tỉ

$$\text{số vàng } \frac{f(n+1)}{f(n)} \approx \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,61803398.$$

Nói nôm na, các thế hệ của loài ong tăng lên theo kiểu mỗi con ong có $\varphi \approx 1,618$ bố mẹ, chứ không phải là $1,5 = 3/2$ bố mẹ như nhiều người tưởng !

Sự hấp dẫn của tỉ số vàng

$$\text{Có thể tìm thấy tỉ số vàng } \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ trong}$$

nhiều hiện tượng tự nhiên và kiến trúc hội họa. Chẳng hạn như số lá cây mọc theo hình xoắn tròn ốc quanh thân cây có khoảng cách giữa hai lá so với thân cây gần bằng : $2/5$ đối với cây sồi, $3/8$ đối với cây dương cây lê, $5/13$ đối với cây liễu. Sự kiện $f(n+1) : f(n)$ tiến đến tỉ số vàng có thể giải thích : sự phân bố tốt nhất của lá là sự phân bố sao cho chúng có thể được hưởng được nhiều tia nắng nhất. Người ta có thể chứng minh rằng phân bố tối ưu khi các lá tạo với nhau góc $2\pi\varphi$ radian.

Mô hình tế bào

Một minh họa độc đáo của dãy $f(n)$ do Amar Klar làm ở Trung tâm nghiên cứu ung thư ở Maryland Hoa Kỳ đưa ra. Vấn đề có liên quan đến sự phân chia tế bào. Thường một tế bào tự phân ra thành 2 tế bào cái giống nhau. Nhưng cũng có trường hợp, như loài giun tròn, thì hai tế bào cái đó không giống nhau. Một tế bào cái phải mất một khoảng thời gian lâu hơn mới có khả năng tự phân chia ra so với tế bào cái kia, thậm chí sự "lệch pha" có thể đến một thế hệ. Như vậy số tế bào ở những thế hệ khác nhau là $f(n)$.

Minh họa của dãy Phi-bô-na-xi trong sinh học còn ít. Gần đây người ta thấy rằng chính chất ô-xin (auxine) tác động đến việc phân bố lá. Quan hệ giữa chất auxine và quy tắc của dãy Phi-bô-na-xi như thế nào đến nay vẫn còn là điều bí ẩn.

PHAN THANH QUANG
(Theo Benoit Rittaud trong
Recherche số 3/2004)

ĐỀ RA KÌ NÀY (Tiếp trang 13)

Bài L2/330. Một khe hẹp S , đặt trên một gương phẳng G , cách mặt gương $1(\text{mm})$. Một màn ảnh E đặt vuông góc với mặt gương, song song với khe S và cách khe $2(\text{m})$. Khi chiếu tia sáng đơn sắc qua khe S lên màn ảnh E người ta thấy có những vạch sáng và vạch tối xen kẽ nhau một cách đều đặn. Khoảng cách giữa 15 vạch sáng liên tiếp là $0,84(\text{cm})$ (hai vạch ngoài cùng của 15 vạch nói trên nằm tại hai vị trí M và N trên màn ảnh E).

1) Hãy giải thích hiện tượng có những vạch sáng, vạch tối nói trên.

2) Tính bước sóng của ánh sáng đơn sắc λ dùng trong thí nghiệm.

3) Nếu chiếu đồng thời ánh sáng đơn sắc nói trên và ánh sáng đơn sắc khác có bước sóng λ_x chưa biết vào khe S thì trên khoảng MN quan sát được 27 vạch sáng, trong đó 5 vạch là do sự trùng nhau của hai ánh sáng đơn sắc, và 2 trong 5 vạch đó nằm tại M, N . Xác định bước sóng λ_x .

CHU VĂN BIÊN
(GV DH Hồng Đức, Thanh Hóa)

ĐỌC LẠI CHO ĐÚNG

Trong THPT số 329 tháng 11.2004 mục Đề Vật lí L1/329 ở hình vẽ thiếu khóa K nằm giữa điện trở R_4 và điểm nối của R_3 với nguồn điện. Thành thật xin lỗi tác giả và bạn đọc.

THHT



TỔNG KẾT Ý KIẾN CỦA BẠN ĐỌC

Ngay sau khi tạp chí Toán học và Tuổi trẻ tổ chức trưng cầu ý kiến (tháng 10.2004), tòa soạn đã nhận được nhiều ý kiến đóng góp sôi nổi, nhiều lời tâm sự nhiệt huyết của độc giả trong cả nước đối với THPT và cán bộ tòa soạn. Kết quả thăm dò cho thấy :

1. Về tuổi: phiếu góp ý của các bạn trẻ ở độ tuổi thanh, thiếu niên là 79%, của giáo viên hoặc sinh viên, người đã đi làm là 21%.

2. Về giới tính: 79% phiếu góp ý là của các bạn nam, còn lại 21% là của các bạn nữ.

3. Đối tượng độc giả gửi phiếu: các bạn THPT là 64%, các thầy cô giáo là 17%, các bạn THCS là 11%, các bạn sinh viên là 5%, các độc giả khác là 3%.

4. Nguồn tạp chí đến với độc giả: đặt mua dài hạn tại bưu điện là 68%, mua tại hiệu sách báo là 25%, được THPT biếu tặng là 3%. Số còn lại là 4%.

5. Chuyên mục được bạn đọc yêu thích:

Bất ngờ lớn là chuyên mục *Phương pháp giải toán* chiếm vị trí cao nhất. Lần đầu tiên có một chuyên mục vượt qua *Đề ra kì này* về mức độ yêu thích của độc giả THPT. Cụ thể:

Đề ra kì này : 66%, *Giải bài kì trước* : 55%, *Dành cho THCS* : 40%, *Chuẩn bị thi vào đại học* : 51%, *Tìm hiểu sâu thêm toán học sơ cấp* : 49%, *Giới thiệu về toán học cao cấp* : 31%, *Diễn đàn dạy- học toán* : 27%, *Toán học và đời sống* : 35%, *Bạn đọc tìm tòi* : 33%, *Lịch sử toán học* : 37%, *Toán học và tin học* : 26%, *Bạn có biết* : 23%, *Tiếng Anh qua các bài toán* : 22%, *Đề thi Olympic các nước* : 38%, *Đề thi HSG quốc gia, tỉnh, thành* : 50%, *Đề thi vào các trường chuyên THPT* : 47%, *Giai thoại toán học* : 22%, *Giải trí toán học* : 42%, *Tin tức dạy và học toán* : 24%, *Tính toán cách nào* : 37%, *Phương pháp giải toán* : 80%, *Từ kho tàng toán học* : 21%, *Toán học muôn màu* : 19%, *X hỏi ? Y, Z trả lời* : 24%, *Toán học và Vật lí* : 28%, *Câu lạc bộ* : 19%, *Sai lầm ở đâu* : 49%.

6. Ý kiến của bạn đọc về những chuyên mục cần tăng thêm diện tích, tần số xuất hiện hàng tháng được tập trung chủ yếu ở các chuyên mục : *Phương pháp giải toán*; *Chuẩn bị thi vào đại học*; *Đề thi HSG quốc gia, tỉnh, thành*; *Đề thi vào các trường chuyên THPT*; *Sai lầm ở đâu*; *Tìm hiểu sâu thêm toán học sơ cấp*; *Tính toán cách nào*; *Dành cho THCS*; *Diễn đàn dạy- học toán*.

7. Một số chuyên mục được các bạn đề nghị rút gọn diện tích, tần số xuất hiện hàng tháng như : *Giới thiệu về toán học cao cấp*; *Tiếng Anh qua các bài toán*; *Lịch sử toán học*; *Câu lạc bộ* . Tuy nhiên, mỗi chuyên mục cũng chỉ có dưới 8% lượng độc giả đề nghị như vậy.

8. Có rất ít phiếu nêu các chuyên mục đề nghị nên bỏ hẳn, vì hầu hết cho rằng các chuyên mục của THPT đều bổ ích và thiết thực.

9. Về mức độ của *Đề ra kì này* : có đến 60% các bạn có cùng đánh giá là dễ vừa; 4% đánh giá là dễ; 20% đánh giá khó; còn lại, các bạn chọn cách đánh giá *Đề ra kì này* là vừa và khó hoặc vừa và dễ.

10. Các số báo được đa số độc giả của THPT bình chọn có bìa đẹp là: 319, 324, 325, 327, 328 (các tháng 1, 6, 7, 9, 10.2004)

11. Tòa soạn rất mừng vì nhận được rất nhiều lời động viên, ủng hộ, khen ngợi cùng những đóng góp quý báu của các bạn. Trong các góp ý của các bạn, đáng chú ý là các ý kiến sau:

- Nhu cầu của hầu hết bạn đọc là đề nghị tạp chí THPT tăng trang, tăng thêm mục mới (như đề hóa học, đề vật lý, đề sinh học, đề ra kì này riêng cho các bạn ôn thi đại học), và tăng kì phát hành.

- Nhìn chung, các bạn đánh giá ở những số gần đây, THPT có hình thức trình bày đẹp, phong phú, hấp dẫn người đọc.

Trong thời gian tới Tòa soạn sẽ cố gắng cải tiến nội dung và hình thức tạp chí theo yêu cầu của các bạn, trước hết là tăng tần suất xuất hiện của các chuyên mục có nhiều người yêu thích. Tuy nhiên Tòa soạn cũng muốn các bạn biết chúng tôi còn gặp những khó khăn dù rất muốn tăng trang và thêm chuyên mục. Việc này sẽ tiến hành khi có điều kiện thuận lợi. Tiếng Anh của học sinh Việt Nam rất yếu mà trong các tài liệu tiếng Anh hầu như không có bài về toán học nên chúng tôi vẫn duy trì chuyên mục này.

- Tạp chí phát hành tại Hà Nội vào ngày 15 hàng tháng, bởi vậy, khi bạn nhận được THPT muộn, các bạn liên hệ với bưu điện gần nhất để biết cụ thể.

Háo hức và mong đợi từng số tạp chí THPT phát hành, nhu cầu đó của các bạn cũng là mong muốn của những người làm THPT chúng tôi.

Cảm ơn các bạn đã gửi phiếu về cho chúng tôi.

Các bạn khác chưa gửi vẫn có thể gửi ý kiến của mình về tòa soạn.

THPT



Giải đáp bài :

BÍ QUYẾT THẮNG CUỘC

(THTT số 328, tháng 10 năm 2004)

Chúng ta chú ý đến định lý cơ bản sau : Nếu tổng các hệ số của đa thức $P(x)$ bằng không thì đa thức đó chia hết cho $(x-1)$.

Từ điều kiện đầu bài Mão là người thay số trước nên cũng là người thay số sau cùng. Vậy ta có thể đưa ra một phương án đơn giản sau giúp Mão thắng Dẫn :

Đầu tiên Mão thay $g = -1$, bước tiếp theo nếu Dẫn thay một trong các chữ a, b, c, d, e, f bởi một số bất kỳ thì Mão chỉ cần thay một trong các chữ còn lại bởi số đối của số mà Dẫn vừa thay.

Nhiều bạn sử dụng kết quả : Nếu tổng các hệ số bậc chẵn của đa thức $P(x)$ bằng tổng các hệ số bậc lẻ của đa thức đó thì $P(x)$ chia hết cho $(x+1)$ cũng đưa ra được bí quyết giúp bạn Mão thắng cuộc.

Sau đây là các bạn có đáp án tốt : Đào Đức Trung, 9A3, THCS Giấy Phong Châu, Phù Ninh, Phú Thọ ; Trần Văn Tổ, SV K28D, khoa Toán - tin, ĐHSPT Hà Nội II, Xuân Hòa, Mê Linh, Vĩnh Phúc; Nguyễn Thị Hiền, 10A1, THPT chuyên Toán ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội; Dương Xuân Quý, 8E, THCS Thị trấn huyện Quỳnh Hợp, Nghệ An; Phạm Tiến Động, 10T, THPT chuyên Quảng Bình.

HỒNG QUANG

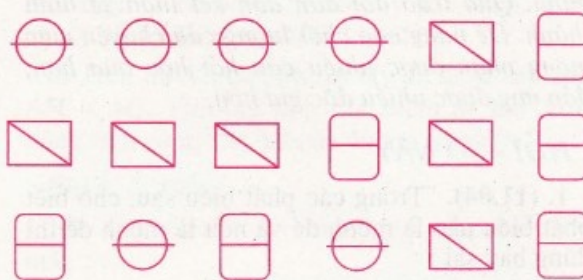
GIẢI BÀI KÌ TRƯỚC (Tiếp trang 21)

Vĩnh Phúc : Nguyễn Thị Phương Dung, 12A3, Vũ Ngọc Quang, 11A3, Lê Thị Hạnh, Nguyễn Đức Trọng, 10A3 THPT chuyên Vĩnh Phúc ; Bắc Ninh : Nguyễn Minh Cường, 11 Lí, THPT chuyên Bắc Ninh ; Bắc Giang : Đỗ Văn Tuấn, 10B, THPT NK Ngô Sĩ Liên ; Nam Định: Nguyễn Văn Phi, 12 Lí, THPT Lê Hồng Phong ;

TRẮC NGHIỆM THÔNG MINH IQ TEST

Bên cạnh tự luận, trắc nghiệm là một trong các hình thức thi, kiểm tra ở nhiều nước. IQ Test là hình thức trắc nghiệm kiểm tra chỉ số thông minh. Mỗi bài thi thường từ 20 đến 60 câu và được làm trong khoảng thời gian từ 15 phút đến 25 phút. Lần này, chúng ta làm quen với một loại IQ Test mới : *IQ Test – Matrix – Flip*. Trong mỗi câu bạn thấy có 2 ma trận (ma trận là bảng các số hoặc các hình sắp xếp theo dòng và cột). Các số hoặc hình trong hai ma trận này sắp xếp theo một logic nào đó nhưng một vài ô bị thay đổi không phù hợp với cách chung. Bạn phải chỉ ra cặp các ô vuông (mỗi ô nằm ở một ma trận) đã bị thay đổi đó.

Xem ví dụ sau :



Để trả lời bạn hãy ghi số của ô bị thay đổi theo cách đánh số của hai ma trận như sau :

1	2	3		1	2	3
4	5	6	→	4	5	6
7	8	9	←	7	8	9

Câu trả lời là 84. Lí do : ô số 8 ở ma trận bên trái đã bị đổi với ô số 4 của ma trận bên phải để có 2 ma trận đã cho ở đầu bài.

Bây giờ bạn hãy làm 2 bài sau, tất cả chỉ trong không quá 3 phút thôi nhé. (Xem đề bài ở bìa 1). Bạn cần giải thích lí do chọn các đáp án đó khi gửi bài về THTT.

THỦY VŨ

Nghệ An : Trịnh Văn Nam, 10 Toán, THPT chuyên Phan Bội Châu ; Đắk Lắk : Nguyễn Chí Linh, 12A1, THPT Phan Bội Châu, Krông Năng ; Bình Định: Nguyễn Phúc Thọ, 12T, THPT Lê Quý đôn ; Thanh Hóa: Phạm Thị Hương Giang, 11B, THPT Hà Trung ; Nguyễn Thị Thành, 12B1, THPT Nông Cống 4.

MAI ANH



Mục này là diễn đàn của tất cả các bạn. Tòa soạn chỉ chọn các câu hỏi và những câu trả lời hay trong số thư gửi đến để đăng. Bởi các vấn đề về kí hiệu, tên định lí, công thức, cách trình bày, cách dạy học... còn có những cách hiểu, cách làm khác nhau không chỉ ở nước ta. Nếu chưa đồng ý, bạn có thể gửi đến ý kiến khác của mình. Qua trao đổi dần dần kết luận sẽ hình thành. Để nâng cao chất lượng của chuyên mục mong nhận được nhiều câu hỏi học hóc búa hơn, đáp ứng được nhiều độc giả hơn.

HỎI - SỐ NÀY

1. (11.04). "Trong các phát biểu sau, cho biết phát biểu nào là mệnh đề và nếu là mệnh đề thì đúng hay sai :

- Số 0 là một số chẵn
- $2x + 3$ là một số nguyên dương
- Bạn có chăm học không ?"

(Một bạn đọc lớp 10A1, THPT Tiên Du, Bắc Ninh)

2. (12.04). "Trong hình học không gian, khi vẽ hình chóp có đáy là hình bình hành thì có thể

nhìn thấy cùng lúc ba mặt của hình đó được không ?"

(Nguyễn ..., 11A2, THPT Tân Yên I, Bắc Giang)

TRẢ LỜI - NHỮNG SỐ TRƯỚC

1. (8.04). Nếu viết như vậy thì dễ bị hiểu lầm là phương trình có 4 nghiệm. Kết luận đúng là "Nghiệm của hệ đã cho là $(x = 1, y = -1)$ và $(x = -1, y = 1)$

(Lưu Hải Cường, 8A, THCS Nam Thắng, Nam Trực, Nam Định).

2. (8.04). • Khi thi học sinh giỏi lớp 9, ta không thể sử dụng các công thức không có trong SGK mà không chứng minh vì thi học sinh giỏi là thi vận dụng sáng tạo, tình tế, có chiều sâu các kiến thức đã học trong SGK.

(Trần Thế Anh, 9B, THCS Trần Huy Liệu, Vụ Bản, Nam Định)

• Theo em, học sinh phải chứng minh rồi mới được sử dụng. Tuy nhiên, có lẽ không nên ra đề thi mà lời giải phải sử dụng các bất đẳng thức khó mới chứng minh được.

(Trịnh Đức Linh, 12A, THPT TX. Hưng Yên)

• Ta có thể sử dụng công thức

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ mà không phải chứng minh. Nhưng khi sử dụng công thức $S = \frac{abc}{4R}$ hay bất đẳng thức Trêbusep thì phải chứng minh vì không là bất đẳng thức quen thuộc ở lớp 9.

(Lê Đức Dũng, 11T, THPT chuyên Quảng Bình).

VŨ ĐO QUAN



Giải đáp bài :

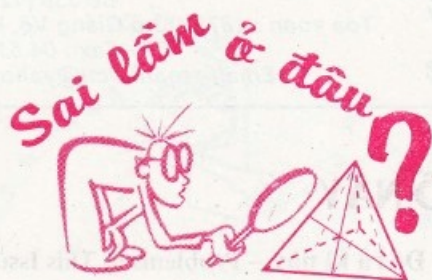
QUÁ KHỨ VÀ TƯƠNG LAI

1. Số báo THPT số 1 ra 15.10.1964 gồm 16 trang : Trang 1 là Lời nói đầu. Trang 2 và 3 có bài *Số ảo ngu ngốc hay thông minh* (GS Nguyễn Cảnh Toàn), trang 4 là bài *Vòng tròn chín điểm* (GS Ngô Thúc Lan), trang 5 có Đề ra kì này, trang 6, 7, 8 là các đề toán thi (Đề thi vào Đại

học Tổng hợp Hà Nội 1.7.1963). Trang 9 đến 13 là Giải các bài toán ra cho học sinh giỏi, lớp 10 năm học 1963-1964 (GS Lê Văn Thiêm). Trang 14 mục Toán học và Đời sống có bài *Đã tiết kiệm chưa* (GS Hoàng Tụy), trang 15 : Giải đáp thắc mắc (Lê Đình Phi) và trang 16 : Giải trí toán học (Võ Viết Căn - Trương Quang Đệ). In tại nhà in Hà Nội. Báo in khổ 19x27 không bìa. Giá bán lẻ 0đ10 (Một hào).

BÍNH NAM HÀ

2. Em hình dung tờ Toán học và Tuổi trẻ năm 2014 sẽ là một tờ báo mới mẻ đầy màu sắc, gồm 48 trang với nhiều chuyên mục. Trong đó số báo tháng 10 sẽ là một số báo với bìa ngoài là những hình ảnh thể hiện những bước tiến của Toán học và Tuổi trẻ trong suốt nửa thế kỉ. Nội dung sẽ dành ra một số trang nói về tờ báo "Nửa thế kỉ gần bó cùng bạn trẻ Việt Nam yêu



Giải đáp bài :

SAI Ở Đâu ?

(THTT số 326, tháng 8 năm 2004)

Rõ ràng $x = 145$ không phải là nghiệm PT $\sqrt{x-1} + \sqrt{2x-1} = 5$ (1). Vì với điều kiện $u \geq 0$, $v \geq 0$ và lại có $u + v = 5$ nên $0 \leq u, v \leq 5$, do đó nghiệm $v = 17$ của PT $v^2 - 20v + 51 = 0$ không thỏa mãn điều kiện này. Nguyên nhân xuất hiện nghiệm ngoại lai $x = 145$ của PT (1) chính là ở chỗ đó!

Kết quả đúng là PT (1) có nghiệm duy nhất $x = 5$.

Ngoài cách giải trên các bạn đã giải lại PT (1) theo nhiều cách, chẳng hạn, đặt điều kiện $x \geq 1$ rồi bình phương 2 vế PT đó... Các bạn sau có lời bình tốt hơn cả là Nguyễn Hoàng Long, 10A1, khối PTCT-Tin, ĐHSPT Hà Nội; Mai Diệu Linh, 8G, THCS Đặng Thai Mai, TP. Vinh, Nghệ An; Lê Đoàn Thiên Phú, 8/8, THCS Chu Văn An, TP. Đà Nẵng; Tăng Bửu Vinh, 7/1, THCS Chu Văn An, Q. 11 Lê Đức Lợi, 9¹, THCS Hồng Bàng, Q.5, TP Hồ Chí Minh.

NGỌC HIỂN

NỬA TIN NỬA NGỜ...

Tình cờ, tôi thấy trong vở bài tập của bạn tôi có bài toán: "Cho hình chóp SABCD, đáy ABCD là hình vuông cạnh a , $SA \perp mp(ABCD)$, $SA = a$. Chứng minh $AH \perp SB$, $AI \perp SC$, $AK \perp SD$

a) Chứng minh bốn điểm A, H, I, K cùng nằm trên một đường tròn

b) Tính tỉ số thể tích hai phần của hình chóp được phân chia bởi mặt phẳng qua A vuông góc với SC.

Lời giải ghi như sau :

a) Ta có $\left. \begin{matrix} SA \perp mp(ABCD) \\ AB \perp BC \end{matrix} \right\} \Rightarrow SB \perp BC$, mà

$BC \perp SA$ nên $BC \perp mp(SAB) \Rightarrow BC \perp AH$. Theo giả thiết $AH \perp SB$, do đó $AH \perp mp(SBC) \Rightarrow AH \perp HI$. Tương tự ta cũng chứng minh được $AK \perp KI$, suy ra A, I, H, K cùng nằm trên một đường tròn.

b) Mặt phẳng qua A, vuông góc với SC chính là mặt phẳng (AHIK). Ta có

$$\frac{V_{SAHIK}}{V_{SABCD}} = \left(\frac{SA}{SA}\right) \cdot \left(\frac{SH}{SB}\right) \cdot \left(\frac{SI}{SC}\right) \cdot \left(\frac{SK}{SD}\right) \quad (1)$$

Dễ thấy

$$\frac{SH}{SB} = \frac{SK}{SD} = \frac{1}{2}$$

Sử dụng hệ thức lượng cho tam giác vuông SAC có $SA^2 = SI \cdot SC \Rightarrow$

$$\frac{SA^2}{SC^2} = \frac{SI}{SC} \quad \text{nên}$$

$$\frac{SI}{SC} = \frac{a^2}{3a^2} = \frac{1}{3}$$

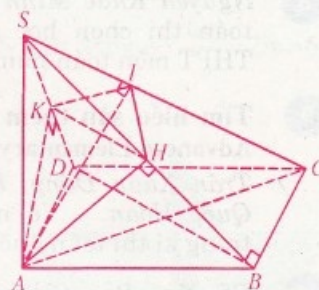
$$\text{Vậy từ (1) có } \frac{V_{SAHIK}}{V_{SABCD}} = \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{12}$$

$$\text{Từ đây suy ra } \frac{V_{AHIKDCB}}{V_{SAHIK}} = 11$$

Đọc xong lời giải đó tôi... nửa tin, nửa ngờ. Bạn có cùng tâm trạng như tôi không?

TRẦN ĐĂNG QUÂN

(SV lớp B2, K47, khoa Vật lý ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội)



toán" cùng nhiều chuyên mục với những sự tiến bộ vượt bậc của Toán học, nhiều những hình vẽ liên quan đến toán học hiện đại...

3. Trích thư gửi bạn đọc năm 2014 : ... "Tờ báo thực sự đã trở thành người bạn, người thầy của chúng tôi. Mặc dù bây giờ sách tham khảo rất nhiều nhưng trên kệ sách của chúng tôi không bao giờ vắng bóng tờ báo. Chúng tôi luôn sưu tầm và giữ gìn những tờ Toán học và Tuổi trẻ yêu quý, đón chờ từng tháng báo ra, háo hức

hồi hộp tìm kiếm tên mình trong mục : "Giải bài kì trước". Đã có lần tôi bị mẹ tôi mắng cho một trận vì hồi mẹ tôi xem báo THTT đã về chưa nhiều lần quá... Tôi viết bức thư này để bày tỏ tình cảm của mình với Toán học và Tuổi trẻ, để mong nhận được sự đồng cảm của các bạn trẻ yêu toán năm 2014, của hai thế hệ độc giả Toán học và Tuổi trẻ. Xin chào các bạn".

TẠ HỒNG SƠN,

9A3, THCS Lâm Thao, Phú Thọ

TRONG SỐ NÀY

- 1** **Dành cho Trung học Cơ sở – For Lower Secondary Schools**
Trương Công Thành – Hình Von Koch trong không gian ba chiều
 - 3** **Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT chuyên ngoại ngữ trường ĐH Ngoại Ngữ – ĐHQG Hà Nội năm 2004**
 - 4** **Lời giải đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT chuyên toán tin trường Đại học Vinh năm 2004**
 - 6** **Nguyễn Khắc Minh – Lời giải các bài toán thi chọn học sinh giỏi quốc gia THPT môn toán năm 2004 – bảng A**
 - 9** **Tìm hiểu sâu thêm toán học sơ cấp – Advanced Elementary Mathematics**
Trần Xuân Đáng, Đỗ Văn Đức, Trần Quốc Hoàn – Về một bất đẳng thức trong kì thi toán quốc tế
 - 11** **GS Ngô Bảo Châu nhận giải thưởng của Viện toán học Clay năm 2004**
 - 12** **Đề ra kì này – Problems in This Issue**
T1/330, ..., T12/330, L1, L2/330
 - 14** **Giải bài kì trước – Solutions to Previous Problems.**
Giải các bài của số 326.
 - 22** **Toán học và đời sống - Math and Life**
Phan Thanh Quang – Dây số Phi-bô-na-xi và vấn đề sinh trưởng
 - 24** **Tổng kết ý kiến bạn đọc**
 - 25** **Giải trí toán học - Math Recreation**
 - 26** **X hỏi, Y, Z trả lời**
Câu lạc bộ – Math Club
 - 27** **Sai lầm ở đâu ? - Where's the Mistake?**
- Bìa 4 : Henri Paul Cartan – Nhà toán học và nhà sư phạm lớn.**

Tổng biên tập :
NGUYỄN CẢNH TOÀN

Chịu trách nhiệm xuất bản :
Chủ tịch HĐQT kiêm Tổng Giám đốc NXB Giáo dục
NGÔ TRẦN ÁI
Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập NXB Giáo dục
VŨ DƯƠNG THỤY

Trưởng ban biên tập : NGUYỄN VIỆT HẢI.
Biên tập : HỒ QUANG VINH.
Đại diện phía Nam : TRẦN CHÍ HIẾU, 231 Nguyễn Văn Cừ, Q. 5, Tp. Hồ Chí Minh.

Thư kí Tòa soạn : VŨ KIM THỦY.
Trị sự, Trình bày : VŨ ANH THU – NGUYỄN THỊ OANH.

ĐT : 08.8309049

ĐÓN ĐỌC THPT SỐ 331 (1/2005)

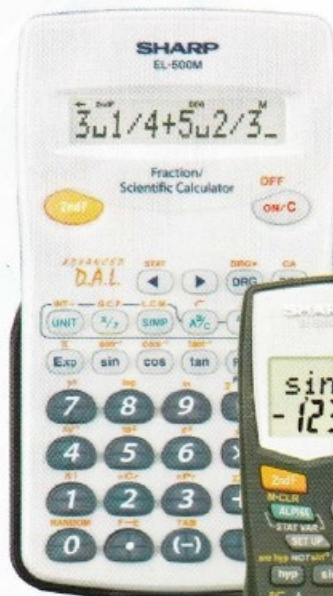
- Âm nhạc dưới con mắt toán học
 - Lời giải các bài toán thi chọn học sinh giỏi quốc gia THPT năm 2004 (tiếp theo)
 - Hướng dẫn giải Đề thi tuyển sinh môn toán lớp 10 trường THPT chuyên Ngoại Ngữ Hà Nội
 - Đề thi tuyển sinh lớp 10 môn toán trường THPT Lê Hồng Phong, Nam Định
 - Hướng dẫn giải và kết quả Cuộc thi giải toán trên máy tính bỏ túi (11.04).
- Mời các bạn đặt mua Tạp chí THPT cho năm 2005 tại Bưu điện.**

THPT

SHARP
SHARP CORPORATION OSAKA, JAPAN

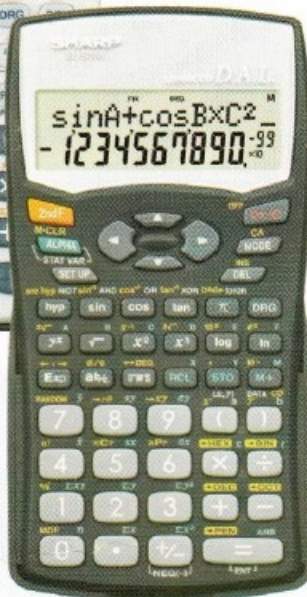
MÁY TÍNH KHOA HỌC

CHẤT LƯỢNG, HIỆU QUẢ, TIẾT KIỆM HƠN
VỚI NHỮNG TÍNH NĂNG **VƯỢT TRỘI**



EL - 500M

- Có 131 chức năng.
- Màn hình hiển thị 11 số (Kết quả hiển thị 10+2 số).
- Chuyển đổi giữa phân số và số thập phân.
- Tính toán trên hỗn số, phân số và số thập phân.
- Tính phần trăm, lũy thừa, căn thức, thống kê.
- Tính Logarit, lượng giác, tổ hợp, chỉnh hợp.
- Thích hợp nhất cho học sinh cấp II.



EL - 509W

- Có 272 chức năng.
- Màn hình 2 dòng (Dòng trên hiển thị 12 số, dòng dưới hiển thị 10+2 số).
- Thích hợp nhất cho học sinh cấp III.
- Đầy đủ các chức năng của máy EL-500M.

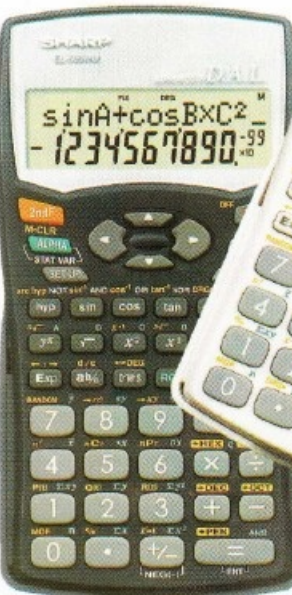
Bổ xung các chức năng sau:

- Giải phương trình bậc nhất.
- Tính toán có sử dụng ô nhớ.
- Tính số ngẫu nhiên.
- Tính đạo hàm, tích phân, thống kê.



EL - 9900

- Màn hình hiển thị được 132 x 64 điểm ảnh.
- Có 827 chức năng.
- Khả năng lưu trữ 64 KB.
- Có đầy đủ các chức năng của máy EL-9400.
- Có chức năng vẽ đồ thị.
- Bàn phím với 2 chế độ (chuyên sâu & cơ bản).
- Thích hợp cho nghiên cứu và giảng dạy.



EL - 509WM

- Màn hình 2 dòng (Dòng trên hiển thị 12 số, dòng dưới hiển thị 10+2 số).
- Thích hợp nhất cho học sinh cấp III.
- Đầy đủ các chức năng của máy EL-509W.

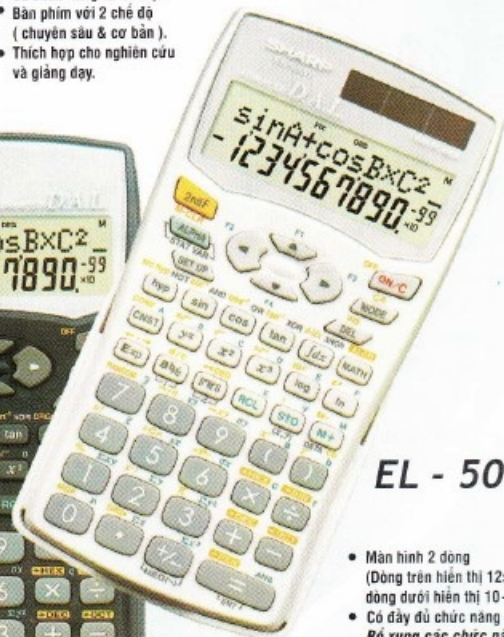
Bổ xung các chức năng sau:

- Giải phương trình bậc I, II, III.
- Giải phương trình bậc I, II, III.
- Tính toán có sử dụng ô nhớ.
- Tính số ngẫu nhiên.
- Tính đạo hàm, tích phân, thống kê.



ZQ - P10

- Màn hình hiển thị 12 cột & 3 dòng.
- Khả năng lưu trữ 96 KB tương đương 1,500 tên và số điện thoại.



EL - 506W

- Màn hình 2 dòng (Dòng trên hiển thị 12 số, dòng dưới hiển thị 10+2 số).
- Có đầy đủ chức năng của EL-509W.
- **Bổ xung các chức năng sau:**
- Giải phương trình bậc I, II, III.
- Giải hệ phương trình bậc I với 2 và 3 ẩn.
- Tính toán với số phức, ma trận, vector, trong dạng đại số và lượng giác.
- Thích hợp nhất cho SV Đại học.



- Toàn bộ máy tính **SHARP** chính hiệu đều được dán tem chống hàng giả. Tem do Trung tâm kỹ thuật tài liệu nghiệp vụ - Bộ Công An phát hành
- Máy tính **SHARP** chính hiệu được bảo hành 1 năm.

Đơn vị Nhập khẩu & Phân phối duy nhất tại Việt Nam



CÔNG TY CỔ PHẦN XUẤT NHẬP KHẨU LÊ MINH
LEMINH IMPORT EXPORTATION JOINT STOCK COMPANY

VĂN PHÒNG TẠI HÀ NỘI

111A - Thụy Khuê - Quận Tây Hồ, Hà Nội
ĐT: 84.8.8474577 - Fax: 84.8.8474592
E-mail: limexhn@hn.vnn.vn

VĂN PHÒNG TẠI HỒ CHÍ MINH

164 Đường Công Hoà, P.12, Quận Tân Bình, HCM
ĐT: 84.8.8116417 - Fax: 84.8.8424237
E-mail: limexhcm@hcm.vnn.vn

HENRI PAUL CARTAN

NHÀ TOÁN HỌC VÀ NHÀ SƯ PHẠM LỚN



Nhà toán học đa ngành, nhà sư phạm nồng nhiệt, nhà đồng sáng lập nhóm Bourbaki, đó là Henri Paul Cartan (Ăng-ri Pôn Cac-tăng) sinh ngày 8.7.1904 tại thành phố Nancy nước Pháp.

Cuối tháng 6-2004 gần như mù, có bà vợ đi kèm đẩy xe lăn, Henri thực sự xúc động khi ông vào phòng diễn kịch của Trường Cao đẳng Sư phạm Paris (École Normale Supérieure de Paris: ENS), nơi xưa kia H. Cartan theo học, để dự tổ chức lễ mừng thọ 100 tuổi của một trong những gương mặt trọng đại của toán học Pháp. Henri Cartan còn xúc động hơn khi nhận quà tặng của những bạn đồng nghiệp Trung Quốc và Nhật Bản nổi tiếng nhất. Đây là một bằng chứng về sự tỏa rạng quốc tế của nhà sáng lập nhóm Bourbaki cuối cùng còn sống, nhà cách tân say sưa với giảng dạy toán ở Pháp, nhà sáng tạo những công cụ toán học, nhà khoa học dẫn thân bảo vệ nhân quyền...

H. Cartan là một con người có niềm tin và lòng dũng cảm. Một biểu hiện rõ ràng là năm 1935, Cartan cùng với bạn mình là André Weil, quyết định xây dựng lại những cơ sở của toán học, bắt đầu từ giải tích. Nhóm huyền thoại Bourbaki ra đời. Năm 1946, ngay sau chiến tranh, H. Cartan đến nước Đức để gặp các bạn đồng nghiệp nhằm phục hồi Trường toán học quốc gia của họ. Trước đó ít lâu H. Cartan đã biết anh mình bị hành quyết vì có hoạt động kháng chiến. Năm 1973, H. Cartan đã cùng với Laurent Schwartz và Michel Broué yêu cầu thả nhà toán học Nga Leonid Pliouchitch bị giam giữ ở Liên Xô. Và đã thành công! H. Cartan cũng là sáng lập viên của Hội đồng các nhà toán học. Hội đồng này sau đó đã quan tâm đến những bạn đồng nghiệp khác bị bạc đãi, nhất là ở Nam Phi.

Nhưng Henri Cartan nổi tiếng nhất là ở lĩnh vực toán học. Giống như bố Cartan là Elie Joseph Cartan (Êli Giô-đép Cac-tăng), cũng là nhà toán học nổi tiếng. Henri Cartan quan tâm tới những hàm nhiều biến phức và đặt nền móng của lý thuyết các bó (Théorie des faisceaux), những đối tượng này là những công cụ mạnh rất thông dụng, nhất là ở giải tích. H. Cartan là nhà

toán học đi đầu sáng tạo ra một lĩnh vực mới là Đại số đồng điều. Năm 1956, cùng với Samuel Eilenberg, H. Cartan đã xuất bản một tác phẩm về đề tài đó và tái bản nhiều lần. Một số người đặt biệt danh cho cuốn sách đó là *Con khủng long* để nhấn mạnh sự trường tồn của nó. Những kỹ thuật này dùng để giải những bài toán cả về hình học và về tô pô học hoặc về giải tích.

Ngoài những công trình đó, ảnh hưởng của Henri Cartan còn lộ rõ qua khoảng 20 cuộc hội thảo mà H. Cartan tổ chức giữa những năm 1948 và 1963 ở ENS. Đây là nơi làm việc nhiều năm của các giáo sư và sinh viên muốn tiếp cận với những bài toán hiện đại. *"Mọi cái phải được chứng minh. Đôi khi lâu, nhưng không vội vàng"*, Jean Pierre Serre, giải thưởng Fields năm 1954, giải thưởng Wolf năm 2000 và giải thưởng Abel năm 2003, nhớ lại khi Cartan đùa giỡn một "lỗ hổng" nhỏ trong cuộc hội thảo thứ ba. Người ta đặt biệt danh cho H. Cartan là "con muỗi" vì ông thích "cù những người khác khi tranh luận", như lời của Pierre Cartier, Giám đốc CNRS (Trung tâm Quốc gia nghiên cứu Khoa học Pháp). Andrien Douady ở trường Đại học Orsay xác nhận sự chặt chẽ của giáo sư của mình: *"Cartan không bỏ qua những sự không chính xác, vì ông là người hay bắt bẻ"*.

"Henri Cartan là tác giả của sự thay đổi": Pierre Cartier nói tóm tắt. Đúng vậy, được đào tạo theo cách cũ nhưng H. Cartan đã từ bỏ kiểu cũ đó để cách tân toán học, thể hiện qua việc xây dựng cơ sở toán học của nhóm Bourbaki hoặc những bài giảng của mình ở ENS.

"Về toán học, chính Henri Cartan và Laurent Schwartz đã đổi mới các chương trình", Pierre Cartier nói rõ thêm. Trong những năm sau chiến tranh, mọi cái phải gây dựng lại. Lúc đầu, Cartan soạn thảo những giáo trình cho những năm đầu, những giáo trình thạc sĩ, các kỳ thi nhập học. Ông cùng với Schwartz quyết định tất cả. Họ nắm số phận của tất cả các thanh niên Pháp say sưa với toán học thời đó, nhưng không bao giờ lạm dụng quyền hành.

"Tất cả chúng ta đều là học trò của Henri Cartan", Pierre Cartier kết luận. Đó là Jean-Pierre Serre, René Thom, Roger Godement hoặc Alexander Grothendieck..., tức là những nhà toán học nổi tiếng trong mấy thập niên qua.

DAVID LAROUSSERIE

(Nguyễn Văn Thiêm lược dịch theo *La Recherche* tháng 9.2004).

ISSN : 0866-8035

Chỉ số : 12884

Mã số : 8BT32M4

Chế bản tại Tòa soạn

In tại Công ty CP in Diên Hồng, 187B Giảng Võ

In xong và nộp lưu chiểu tháng 12 năm 2004

Giá : 3500 đồng

Ba nghìn năm trăm đồng