

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

ĐK 3

Huỳnh Quốc Huy

T. Huy.



TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

10 2004
SỐ 328

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 41
DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ
Trụ sở: 187 B Giảng Võ, Hà Nội. ĐT-Fax: (04) 5144272
Email: toanhocvt@yahoo.com



Lãnh đạo NXB Giáo dục và Tạp chí trong
buổi tiếp đoàn Bộ Giáo dục Thái Lan.

40 NĂM TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ



Cán bộ toà soạn tạp chí THPT.



BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO



TOÁN HỌC
& Tuổi trẻ

Lá thư từ Bàn Biên tập

Bạn đọc yêu quý,

Bạn đang cầm trên tay tờ báo 328, đúng 40 năm sau khi tờ báo số 1 Toán học và Tuổi trẻ ra đời (10.1964). Độc giả nhỏ tuổi ngày ấy bây giờ cũng đã thành ông thành bà. Chính chúng tôi, những độc giả của ngày ấy, hôm nay làm báo vẫn còn nhớ nguyên cảm xúc cầm tờ báo mới còn thơm mùi mực in, một niềm vui khó tả. Một thế hệ thứ ba hôm nay đang đọc báo THTT, chắc cũng có niềm vui và suy nghĩ như bậc cha anh ngày nào khi đọc **Đề ra kỳ này** hay tìm thấy tên mình trong mục **Giải bài kỳ trước**. Dòng chảy 40 năm vẫn không ngừng nghỉ. Hàng vạn bài toán đã góp phần xây dựng nên những bộ óc với tư duy sáng tạo, khoa học để rồi dù ở lĩnh vực nào, độc giả của THTT cũng phát huy tốt năng lực của mình.

Từ chỗ 16 trang, không bìa, ra 2 tháng một kỳ, hôm nay THTT đã là tờ tạp chí 32 trang, bìa 4 màu, xuất bản hàng tháng, phát hành 30000 bản trên toàn quốc. Điều đó đủ nói lên sức sống của một tờ báo truyền thống. Đồng thời cũng nói lên rằng độc giả đã yêu quý THTT biết chừng nào. Nếu không thế, giữa rừng sách, báo tham khảo với muôn hồng nghìn tía hôm nay sao bạn lại chọn ra được tờ báo THTT của mình?

Tờ báo hôm nay đã có hơn 20 chuyên mục. Tất cả chỉ nhằm phục vụ mỗi quan tâm phong phú của các bạn.

Toán học và Tuổi trẻ vẫn có những bài toán học bữa thách thức nghị lực của các bạn giỏi toán, có các bài toán vừa sức các bạn yêu toán vốn là số đông và cả các bài đáp ứng yêu cầu của các bạn vừa mới biết đến THTT. Hy vọng chúng tôi sẽ ngày càng phục vụ các bạn tốt hơn, hiệu quả hơn trên con đường nâng cao dân trí, đào tạo nhân lực và bồi dưỡng nhân tài.

Thu này, Toán học và Tuổi trẻ tròn tuổi 40. Tuổi 40 tràn đầy nghị lực, vốn hiểu biết trong thế giới toán sơ cấp của THTT sẽ cùng tuổi thanh xuân của các bạn yêu toán đồng hành trên con đường tri tuệ như bao mùa xuân qua.

Toán học và Tuổi trẻ chúc các bạn sức khỏe, niềm vui và tràn đầy nhiệt huyết với toán học cũng như cuộc sống. Bạn chúc những gì cho tờ báo THTT thân yêu của chúng ta?

Tháng 10 năm 2004

THTT





MỘT BẤT ĐẲNG THỨC CÓ NHIỀU ỨNG DỤNG

TRẦN QUANG VINH

(SV K27C khoa Toán, DHSP TP. HCM)

biểu thức phân thì sử dụng BĐT (1) và (2) thuận lợi hơn vì có thể bỏ qua được vài bước biến đổi nói trên, đồng thời dễ nhận thấy dạng của biểu thức cần biến đổi.

Một số ví dụ dưới đây minh họa ưu thế của việc dùng BĐT (1) và (2) cho biểu thức phân, trong đó hạn chế xét với n bằng 3. Trong lời giải sử dụng BĐT $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ (3)

Ví dụ 1. Chứng minh rằng với các số dương a, b, c thì

$$\frac{(a+b)^2}{c} + \frac{(b+c)^2}{a} + \frac{(c+a)^2}{b} \geq 4(a+b+c)$$

Lời giải. Áp dụng BĐT (1) được

$$\frac{(a+b)^2}{c} + \frac{(b+c)^2}{a} + \frac{(c+a)^2}{b} \geq$$

$$\geq \frac{(2a+2b+2c)^2}{a+b+c} = 4(a+b+c)$$

Ví dụ 2. Chứng minh rằng với các số dương a, b, c thì

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{3(ab+bc+ca)}{2(a+b+c)}$$

Lời giải. Áp dụng BĐT (1) và (3) được

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{(a+b+c)^2}{2(a+b+c)}$$

$$\geq \frac{a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc}{2(a+b+c)} \geq \frac{3(ab+bc+ca)}{2(a+b+c)}$$

Ví dụ 3. Cho a, b, c là các số dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{b^2+bc+c^2} + \frac{b^2}{c^2+ca+a^2} + \frac{c^2}{a^2+ab+b^2} \geq \frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}$$

Lời giải. Đặt vế trái của BĐT là T . Áp dụng BĐT (2) và (3) được :

$$\begin{aligned} T &\geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a(b^2+bc+c^2)+b(c^2+ca+a^2)+c(a^2+ab+b^2)} \\ &= \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{(a+b+c)(ab+bc+ca)} \geq \frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c} \end{aligned}$$

Chúng ta đã biết có nhiều cách chứng minh bất đẳng thức (BĐT) Bu-nhi-a-cốp-xki sau :

Cho hai dãy số thực $a_1, a_2, \dots, a_n$ và $b_1, b_2, \dots, b_n$ thì có BĐT

$$\begin{aligned} & (a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\dots+b_n^2) \\ & \geq (a_1b_1+a_2b_2+\dots+a_nb_n)^2 \end{aligned}$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$$

với $b_i \neq 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$)

Áp dụng BĐT Bu-nhi-a-cốp-xki cho hai bộ số

$$\frac{a_1}{\sqrt{b_1}}, \frac{a_2}{\sqrt{b_2}}, \dots, \frac{a_n}{\sqrt{b_n}} \text{ và } \sqrt{b_1}, \sqrt{b_2}, \dots, \sqrt{b_n}$$

ta được BĐT

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \dots + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1+a_2+\dots+a_n)^2}{b_1+b_2+\dots+b_n} \quad (1)$$

trong đó $b_i > 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$)

$$\text{Đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$$

Đặt $b_i = a_i c_i > 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) thì

$$\frac{a_i^2}{b_i} = \frac{a_i^2}{a_i c_i} = \frac{a_i}{c_i} > 0 \text{ nên (1) tương đương với}$$

$$\frac{a_1}{c_1} + \frac{a_2}{c_2} + \dots + \frac{a_n}{c_n} \geq \frac{(a_1+a_2+\dots+a_n)^2}{a_1c_1+a_2c_2+\dots+a_nc_n} \quad (2)$$

trong đó $a_i c_i > 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$)

$$\text{Đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow c_1 = c_2 = \dots = c_n$$

Có sách gọi BĐT (1) và (2) là BĐT Svac-xơ.

BĐT Bu-nhi-a-cốp-xki thường được sử dụng để chứng minh BĐT của các biểu thức nguyên và cũng dùng cho biểu thức phân kèm theo một số bước biến đổi, nhưng nếu gặp BĐT của các

Ví dụ 4. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq 1$$

trong đó a, b, c là các số dương.

(Đề thi Olympic toán quốc tế 2001)

Lời giải. Đặt vế trái của BĐT là T . Áp dụng BĐT (2) được

$$T \geq \frac{(a+b+c)^2}{a\sqrt{a^2+8bc} + b\sqrt{b^2+8ca} + c\sqrt{c^2+8ab}} \quad (4)$$

rồi áp dụng BĐT Bù-nhi-a-cô-p-xki đối với mẫu thức

$$\begin{aligned} X^2 &= (\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{a^2+8bc} + \sqrt{b} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{b^2+8ca} + \\ &+ \sqrt{c} \cdot \sqrt{c} \cdot \sqrt{c^2+8ab})^2 \\ &\leq (a+b+c)(a(a^2+8bc) + b(b^2+8ca) + c(c^2+8ab)) \\ &= (a+b+c)(a^3+b^3+c^3+24abc) \leq (a+b+c)^4 \quad (5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Do } (a+b+c)^3 &= \\ &= a^3+b^3+c^3+3(a+b+c)(ab+bc+ca) - 3abc \\ &\geq a^3+b^3+c^3+27\sqrt[3]{abc} \cdot \sqrt[3]{a^2b^2c^2} - 3abc \\ &= a^3+b^3+c^3+24abc \end{aligned}$$

Từ (5) suy ra $X \leq (a+b+c)^2$, rồi từ (4) có $T \geq 1$ (đpcm).

Ví dụ 5. Tìm giá trị lớn nhất của tổng sau theo các hằng số dương x, y, z :

$$P = \frac{1}{xa+yb+zc} + \frac{1}{xb+yc+za} + \frac{1}{xc+ya+zb}$$

trong đó các số dương a, b, c thỏa mãn $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$.

Lời giải. Đặt $s = x + y + z$. Áp dụng BĐT (2)

$$\text{có: } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \geq \frac{(x+y+z)^2}{xa+yb+zc}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{xa+yb+zc} \leq \frac{1}{s^2} \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right)$$

$$\text{Tương tự } \frac{1}{xb+yc+za} \leq \frac{1}{s^2} \left(\frac{x}{b} + \frac{y}{c} + \frac{z}{a} \right)$$

$$\frac{1}{xc+ya+zb} \leq \frac{1}{s^2} \left(\frac{x}{c} + \frac{y}{a} + \frac{z}{b} \right)$$

Cộng theo từng vế ba BĐT trên ta được

$$P \leq \frac{s}{s^2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) = \frac{1}{s}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 3$.

$$\text{Vậy } P_{\max} = \frac{1}{x+y+z}.$$

• **Ví dụ 6.** Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng

$$Q = \frac{1}{a^2+b^2+c^2} + \frac{1}{abc}$$

trong đó a, b, c là các số dương thỏa mãn $a+b+c = 1$.

Lời giải. Áp dụng BĐT Cô-si có $1 = a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$ và $ab + bc + ca \geq 3\sqrt[3]{(abc)^2} \geq 9\sqrt[3]{abc} \sqrt[3]{(abc)^2} = 9abc$.

$$\begin{aligned} \text{Từ đó } Q &\geq \frac{1}{a^2+b^2+c^2} + \frac{9}{ab+bc+ca} \\ &= \frac{1}{a^2+b^2+c^2} + \frac{2}{ab+bc+ca} + \frac{7}{ab+bc+ca} \quad (6) \end{aligned}$$

Áp dụng BĐT (2) được

$$\begin{aligned} &\frac{1}{a^2+b^2+c^2} + \frac{1}{ab+bc+ca} + \frac{1}{ab+bc+ca} \\ &\geq \frac{9}{a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)} = \\ &= \frac{9}{(a+b+c)^2} = 9 \quad (7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Sử dụng BĐT (3) có } 1 &= (a+b+c)^2 = \\ &= a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca) \geq 3(ab+bc+ca) \quad (8) \end{aligned}$$

Thay (7) và (8) vào (6) ta được

$$Q \geq 9 + 7.3 = 30.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$

Ta có thể giải bài T4/322 THPT 4.2004 bằng cách dùng BĐT (1). Để giải bài T7/THCS THPT 6.2004 ta sử dụng BĐT (2) sau khi chứng minh

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq 1 \quad (*) \text{ như sau:}$$

$$\frac{10}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{12^2}{10a+b+c}$$

$$\frac{1}{a} + \frac{10}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{12^2}{a+10b+c}$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{10}{c} \geq \frac{12^2}{a+b+10c}$$

Cộng theo từng vế ba bất đẳng thức này kết hợp với (*) để suy ra điều phải chứng minh.

ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 HỆ THPT CHUYÊN TRƯỜNG ĐHKHTN - ĐHQG HÀ NỘI NĂM 2004

MÔN THI : TOÁN

VÒNG 1

(Thời gian làm bài : 150 phút)

Câu I.

1) Giải phương trình

$$lx + 11 + lx - 11 = 1 + lx^2 - 11.$$

2) Tìm nghiệm nguyên của hệ

$$\begin{cases} 2y^2 - x^2 - xy + 2y - 2x = 7, \\ x^3 + y^3 + x - y = 8. \end{cases}$$

Câu II : Cho các số thực dương a và b thỏa mãn

$$a^{100} + b^{100} = a^{101} + b^{101} = a^{102} + b^{102}$$

Hãy tính giá trị của biểu thức

$$P = a^{2004} + b^{2004}.$$

Câu III. Cho $\triangle ABC$ có $AB = 3\text{cm}$, $BC = 4\text{cm}$, $CA = 5\text{cm}$. Đường cao, đường phân giác, đường trung tuyến của tam giác kẻ từ đỉnh B chia

tam giác thành bốn phần. Hãy tính diện tích mỗi phần.

Câu IV. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn có hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau tại H (H không trùng với tâm của đường tròn). Gọi M và N lần lượt là chân các đường vuông góc hạ từ H xuống các đường thẳng AB và BC ; P và Q lần lượt là giao điểm của đường thẳng MH và NH với các đường thẳng CD và DA . Chứng minh rằng đường thẳng PQ song song với đường thẳng AC và bốn điểm M, N, P, Q nằm trên cùng một đường tròn.

Câu V. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$Q = \frac{1}{2} \left(\frac{x^{10}}{y^2} + \frac{y^{10}}{x^2} \right) + \frac{1}{4} (x^{16} + y^{16}) - (1 + x^2 y^2)^2.$$

VÒNG 2

(Thời gian làm bài : 150 phút)

Câu VI. Giải phương trình

$$\sqrt{x+3} + \sqrt{x-1} = 2$$

Câu VII. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} (x+y)(x^2+y^2) = 15, \\ (x-y)(x^2-y^2) = 3. \end{cases}$$

Câu VIII. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{(x^3 + y^3) - (x^2 + y^2)}{(x-1)(y-1)}$$

trong đó x, y là những số thực lớn hơn 1.

Câu IX. Cho hình vuông $ABCD$ và điểm M nằm trong hình vuông.

1) Tìm tất cả các vị trí của điểm M sao cho $\widehat{MAB} = \widehat{MBC} = \widehat{MCD} = \widehat{MDA}$.

2) Xét điểm M nằm trên đường chéo AC . Gọi N là chân đường vuông góc hạ từ điểm M xuống cạnh AB và O là trung điểm của đoạn

AM . Chứng minh rằng tỉ số $\frac{OB}{CN}$ có giá trị không đổi khi M di chuyển trên đường chéo AC .

3) Với giả thiết M nằm trên đường chéo AC , xét các đường tròn (S_1) và (S_2) có đường kính tương ứng là AM và CN . Hai tiếp tuyến chung của (S_1) và (S_2) tiếp xúc với (S_2) tại P và Q . Chứng minh rằng đường thẳng PQ tiếp xúc với (S_1) .

Câu X. Với số thực a , ta định nghĩa phần nguyên của số a là số nguyên lớn nhất không vượt quá a và kí hiệu là $[a]$. Dãy các số $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ được xác định bởi công thức

$$x_n = \left[\frac{n+1}{\sqrt{2}} \right] - \left[\frac{n}{\sqrt{2}} \right].$$

Hỏi trong 200 số $\{x_0, x_1, \dots, x_{199}\}$ có bao nhiêu số khác 0? (Cho biết $1,41 < \sqrt{2} < 1,42$).



Một bài toán về PHÂN HOẠCH MỘT TẬP HỢP

TRẦN TUYẾT THANH

(GV Học viện Phòng không Không quân
Sơn Tây, Hà Tây)

Trước hết ta hãy bắt đầu bằng bài toán đơn giản của sách giáo khoa *Giải tích lớp 12* (sách chỉnh lí hợp nhất năm 2000).

Bài toán 1. (Bài tập 17 phần b, trang 169 – Giải tích 12).

Có bao nhiêu cách phân phối 5 đồ vật khác nhau cho 3 người, sao cho mỗi người nhận được ít nhất một đồ vật.

Lời giải của bài toán này đã được trình bày trong cuốn sách *Bài tập Giải tích 12* theo ý tưởng xét các khả năng phân tích số tự nhiên 5 thành tổng của ba số nguyên dương :

$$5 = 1 + 1 + 3 = 1 + 2 + 2 = 1 + 3 + 1 = 2 + 1 + 2 = 2 + 2 + 1 = 3 + 1 + 1$$

Ứng với mỗi khả năng trên tìm số cách chia tương ứng và theo nguyên lí cộng ta được số cách chia theo yêu cầu bài toán là 150.

Phân tích lời giải : Lời giải theo ý tưởng trên thực hiện sẽ khá phức tạp khi số đồ vật cho trước là khá lớn và số người được chia cũng khá lớn. Bài viết này xin được trình bày phương pháp giải bài toán tổng quát của bài toán 1.

Bài toán 2. *Có bao nhiêu cách phân phối n đồ vật khác nhau cho k người sao cho mỗi người nhận được ít nhất một đồ vật ($n, k \in \mathbb{N}^+$).*

Để giải quyết bài toán 2 chúng ta cần một số kiến thức bổ sung về sự phân hoạch một tập hợp :

1. Các khái niệm.

Các tập hợp khác rỗng $A_1, A_2, \dots, A_k$ được gọi là một phân hoạch của tập hợp A nếu :

$$\begin{cases} A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k \\ A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i, j \in \{1, 2, \dots, k\}, i \neq j \end{cases}$$

Mỗi tập con A_i ($i = 1, 2, \dots, k$) được gọi là một thành phần của phân hoạch.

Kí hiệu $|A|$ là số các phần tử của tập hợp A (lực lượng của tập A) và $S(n, k)$ là số tất cả các phân hoạch của tập A gồm n phần tử thành k tập khác rỗng với các số n, k nguyên dương và $k \leq n$.

Dễ dàng thấy $S(n, 1) = S(n, n) = 1$.

2. Công thức truy hồi của $S(n, k)$

Chúng minh rằng $S(n, k)$ thỏa mãn hệ thức sau:

$$S(n+1, k) = k S(n, k) + S(n, k-1) \quad \text{với } k \leq n \quad (1)$$

Lời giải. Giả sử A là tập hợp với $|A| = n+1$; $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1}\}$. Gọi P là tập tất cả các phân hoạch của tập A thành k tập khác rỗng thì ta có

$$|P| = S(n+1, k) \quad (2)$$

• P_1 là tập tất cả các phân hoạch của tập A thành k thành phần khác rỗng sao cho $\{a_{n+1}\}$ là một thành phần của phân hoạch đó.

• P_2 là tập tất cả các phân hoạch của tập A thành k thành phần khác rỗng sao cho $\{a_{n+1}\}$ không là một thành phần của các phân hoạch

$$\text{đó. Khi đó : } \begin{cases} P = P_1 \cup P_2 \\ P_1 \cap P_2 = \emptyset \end{cases}$$

• Tính $|P_1|$:

Vì $\{a_{n+1}\}$ là một thành phần của mỗi phân hoạch trong P_1 , nên mỗi phân hoạch trong P_1 tương ứng với đúng một phân hoạch của tập $A \setminus \{a_{n+1}\} = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ thành $k-1$ thành phần khác rỗng, do đó $|P_1| = S(n, k-1)$ (8)

• Tính $|P_2|$:

Xét phân hoạch của P_2 , chẳng hạn $\alpha = \{A_1, A_2, \dots, A_k\}$ với $a_{n+1} \in A_1$. Khi đó $A_1 \setminus \{a_{n+1}\} \neq \emptyset$ do $\{a_{n+1}\}$ không là một thành phần trong phân hoạch của P_2 . Vì vậy $\alpha_1 = \{A_1 \setminus \{a_{n+1}\}, A_2, \dots, A_k\}$ tạo thành một phân hoạch gồm k thành phần khác rỗng của tập $A \setminus \{a_{n+1}\}$. Xét tương tự khi $a_{n+1} \in A_i$ ($i = 2, 3, \dots, k$).

$$= \frac{1}{k!} \sum_{j=1}^k (-1)^{k-j} C_k^j j^{n+1}.$$

Vậy (6) được chứng minh.

Với $k = n + 1$ ta còn chứng minh :

$$1 = S(n+1, n+1) = \frac{1}{(n+1)!} \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{n+1-j} C_{n+1}^j j^{n+1} \quad (7)$$

Bạn đọc nào chứng minh được công thức (7) ngắn gọn xin gửi về Tòa soạn THPT.

Theo nguyên lí quy nạp toán học với $k \leq n$ có :

$$S(n, k) = \frac{1}{k!} \sum_{j=1}^k (-1)^{k-j} C_k^j j^n$$

Các công thức tính số phân hoạch của một tập hợp $S(n, k)$ sẽ còn giúp ích cho các bạn giải nhiều bài toán tổ hợp khác.

VỀ SÁNG TÁC BIỂU TƯỢNG THPT

Dù thời gian quá ngắn nhưng đã có nhiều bạn gửi biểu tượng về tòa soạn. Một số hình đẹp đã được chọn trình bày trên bìa 2 của số báo này. Biểu tượng ở giữa của bạn Nguyễn Việt Dũng, lớp 12B, THPT Hoàng Mai, Quỳnh Lưu, Nghệ An. Hàng trên từ trái sang của quý vị và các bạn:

- Bùi Thanh Châm, 12A4, THPT chuyên Hà Nam

- Hoàng Huy Hưng, 12A2, THPT Dương Xá, Gia Lâm, Hà Nội.

- Bùi Thanh Châm,

- Ông Lương Bá Tín, 6 ngõ 21 đường Thành Thái, Thanh Hóa

- Bùi Thanh Châm,

Hàng dưới từ trái sang phải của các bạn :

- Bùi Thanh Châm,

- Nguyễn Trọng Quân, lớp 44C4, ĐH Thủy Lợi, Hà Nội

- Phạm Khánh Toàn, 12A2, THPT Quang Trung

- Ông Lương Bá Tín,

- Trần Văn Tuấn, 12K3, chuyên Lam Sơn, Thanh Hóa

Số báo sau chúng tôi sẽ công bố biểu tượng được chọn và các bạn được nhận quà tặng. Cảm ơn các bạn.

THPT

Thư từ bạn muốn nói

✉ "Trước hết cho em được nói lời cảm ơn ban biên tập tòa soạn bởi vì nhờ những cuốn tạp chí "Toán học và Tuổi trẻ" mà phong trào học tập của lớp em đã có nhiều thay đổi. Không những thế mà có nhiều bạn đã học tập tiến bộ hẳn nhờ tạp chí "Toán học và Tuổi trẻ". Cứ mỗi tháng sau khi nhận được báo "Toán học và Tuổi trẻ" là các bạn trong lớp em lại cùng nhau xem. Có những chuyên mục rất bổ ích cho học sinh THCS chúng em, những thắc mắc, những kiến thức mở rộng thực sự đã gây được sự chú ý của mỗi độc giả lớp em, trường em. Các bạn cùng suy nghĩ và bàn luận rất thú vị"...

PHAN THỊ BẢO YẾN

(8A, THCS Quán Hành - Nghi Lộc - Nghệ An)

✉ "Em một học sinh miền Trung (Sông Cầu, Phú Yên), sinh ra và lớn lên trong một gia đình bình thường. Tốt nghiệp THPT năm 2003 thi đại học nhưng không đỗ. Em rất buồn - phân vân không biết nên đi ôn thi ở trung tâm luyện thi hay ở nhà tự học. May sao bắt gặp được tạp chí em vô cùng mừng rỡ và quyết tâm ở nhà tự ôn thi. Thay vì phải làm và ôn lại những bài tập đã qua em đã bắt gặp được các bài Toán Lý đăng trên tạp chí thật mới mẻ và cách giải linh hoạt - bất ngờ. Săn lùng - tìm đọc tất cả những ấn phẩm, em đã có một lượng kiến thức kha khá - và rồi thời gian một năm học cũng qua mau. Em đã có đủ tự tin để bước vào cuộc thi tuyển lần thứ hai (2004). Và hôm nay em đã đậu được đại học - niềm ước ao của em bấy lâu nay. Em xin chân thành cảm ơn tạp chí và chúc tạp chí ngày càng hay và phổ biến rộng rãi hơn nữa"...

✉ "Em là một học sinh chuyên Toán của trường song tài liệu nghiên cứu và học tập của em rất ít. Từ khi đặt báo Toán học và Tuổi trẻ (2002) em thấy mình đã tiến bộ và học tập được nhiều hơn về những bài toán hay và những cách giải độc đáo đầy sáng tạo. Trong báo, mọi chuyên mục đều lôi cuốn đối với em"...

TRẦN THANH NAM

(10C3, THPT Hùng Vương, Gia Lai)

✉ "Tôi là một độc giả thường xuyên của quý báo. Là một giáo viên Toán nên việc nghiên cứu và giải các bài toán của báo Toán học và Tuổi trẻ là một công việc yêu thích"...

TRẦN MẠNH TUỒNG

(GV Toán, THPT Ngọc Lặc, Thanh Hóa)

KẾT QUẢ CUỘC THI GIẢI TOÁN VÀ VẬT LÝ

TRÊN TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ NĂM HỌC 2003-2004

Cuộc thi năm nay có số bạn đọc ở nhiều tỉnh hơn tham gia. Điều đáng mừng là nhiều bạn đọc nhỏ tuổi đã giải được nhiều bài khó. Nhiều bạn đọc ở miền Trung và miền Nam đã đoạt giải cho thấy diện đọc báo THTT đã mở rộng. Các bạn lớp 12 còn ít giải bài trên báo. Song song với cuộc thi này chúng ta còn có Cuộc thi giải Toán kỉ niệm 40 năm tạp chí Toán học và Tuổi trẻ. Kết quả cuộc thi đó sẽ đăng trên tạp chí vào số 329 ra tháng 11.2004. Xin chúc mừng 80 bạn được giải cuộc thi năm học 2003-2004. Các bạn hãy gửi địa chỉ mới của mình về để Tòa soạn gửi Bằng chứng nhận giải thưởng và quà tặng.

MÔN TOÁN

Giải Xuất sắc (2 giải)

- 1) Võ Văn Tuấn, 7A3, THCS Buôn Hồ, Krông Buk, Đắk Lắk.
- 2) Đỗ Quốc Khánh, 11A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Đà Nẵng

Giải Nhất (9 giải)

- 1) Tăng Văn Bình, 6B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, Nghệ An
- 2) Vương Bằng Việt, 7/1, THCS Nam Hà, TX. Hà Tĩnh
- 3) Trần Tấn Phong, 8A, THCS Lập Thạch, Vĩnh Phúc
- 4) Võ Thái Thông, 8/4, THCS Ngô Gia Tự, Cam Nghĩa, Cam Ranh, Khánh Hòa
- 5) Nguyễn Hữu Kiên, 9A, THCS Yên Lạc, Vĩnh Phúc
- 6) Nguyễn Anh Tuấn, 10T, THPT Nguyễn Trãi, TP. Hải Dương
- 7) Nguyễn Tiến Dũng, 10A1, THPT Thanh Hà, Hải Dương
- 8) Nguyễn Phúc Thọ, 11T, THPT Lê Quý Đôn, Bình Định
- 9) Trần Văn Thiện, 12C5, THPT Như Thanh, Thanh Hóa

Giải Nhì (14 giải)

- 1) Nguyễn Lâm Phúc, 6A4, THCS Trần Đăng Ninh, TP. Nam Định
- 2) Đại Thị Ánh, 7A, THCS Yên Lạc, Vĩnh Phúc
- 3) Bùi Bảo Khang, 7A1, THCS An Nhơn 2, An Nhơn, Bình Định
- 4) Lê Thị Hạnh, 7A5, THCS Quang Trung, TP. Thanh Hóa
- 5) Lê Việt Hưng, 7A3, THCS Quang Trung, TP Thanh Hóa
- 6) Nguyễn Ngọc Hiếu, 7A, THCS Nguyễn Công Trứ, Ba Đình, Hà Nội

- 7) Trần Ngọc Thúy, 7B, THCS Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hòa, Hà Tây
- 8) Nguyễn Lưu Bách, 8C, THCS Lê Hữu Lập, Hậu Lộc, Thanh Hóa
- 9) Lê Trung Thành, 8B, THCS Lê Hữu Lập, Hậu Lộc, Thanh Hóa
- 10) Lê Ngọc Tuấn, 9B, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoàng Hóa, Thanh Hóa
- 11) Nguyễn Quang Huy, 10 Toán, THPT chuyên Hùng Vương, Việt Trì, Phú Thọ
- 12) Lữ Thiện Nhân, 10T, THPT Sa Đéc, Đồng Tháp.
- 13) Lê Viết Ân, 10G, THPT Quốc học Huế, Thừa Thiên - Huế.
- 14) Lê Hùng Việt Bảo, 12 Toán, ĐHKHTN ĐHQG Hà Nội

Giải Ba (22 giải)

- 1) Trần Thị Thanh Bình, 6A, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu, Nghệ An
- 2) Vũ Đức Hoàn, 6A, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu, Nghệ An
- 3) Trần Thị Thùy Trang, 7B, THCS Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hòa, Hà Tây
- 4) Đỗ Hoàng Tùng, 8E, THCS Vĩnh Yên, Vĩnh Phúc
- 5) Hoàng Đức Ý, 8E, THCS Trần Mai Ninh, TP. Thanh Hóa
- 6) Nguyễn Phi Yến, 8A, THCS Ngô Sĩ Liên, Bắc Giang
- 7) Võ Quang Vinh, 8D, THCS Thái Hòa 2, Nghĩa Đàn, Nghệ An
- 8) Nguyễn Xuân Thọ, 9B, THCS Vĩnh Yên, TX Vĩnh Yên, Vĩnh Phúc
- 9) Lê Xuân Thống Nhất, 9B, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoàng Hóa, Thanh Hóa
- 10) Lê Ngọc Thạch, 9A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, Nghệ An

11) Nguyễn Kim Thuật, 9A, THCS Yên Lạc, Vĩnh Phúc

12) Trịnh Văn Nam, 9C, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu, Nghệ An

13) Đoàn Mạnh Hùng, 9A, THCS Yên Lạc, Vĩnh Phúc

14) Phạm Huy, 9C, THCS Tam Dương, Vĩnh Phúc

15) Nguyễn Tuấn Dương, 10T, THPT Lam Sơn, Thanh Hóa

16) Đỗ Hoàng Khiêm, 11A1, PTCT-T, ĐHSPT Hà Nội

17) Lương Xuân Bách, 11T, THPT chuyên Hưng Yên

18) Lê Tiến Triển, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Quảng Trị

19) Trương Minh Tiến, 11A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Đà Nẵng

20) Nguyễn Tuyết Mai, 12A, THPT NK Ngô Sĩ Liên, Bắc Giang

21) Mạch Nguyệt Minh, 12A1, THPT Lý Tự Trọng, Cần Thơ

22) Nguyễn Ngọc Cường, 12A1, THPT Phan Bội Châu, Nghệ An

Giải Khuyến khích (22 giải)

1) Bùi Trường Giang, 5E, TH Lê Hồng Phong, TX Thái Bình

2) Nguyễn Thị Hồng Phúc, 4A TH Kim Đồng, KBang, Gia Lai

3) Đinh Bá Duyệt, 6A, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu, Nghệ An

4) Nguyễn Khoa Thi, 6/2, THCS Phú Thanh, Phú Vang, Thừa Thiên - Huế

5) Phan Thị Phương Ly, 6A2, THCS Ngô Máy, Phù Cát, Bình Định

6) Tăng Bửu Vinh, 6/1, THCS Chu Văn An, Q. 11, TP. HCM

7) Đỗ Đình Khanh, 9A, THCS Yên Lạc, Vĩnh Phúc

8) Nguyễn Mạnh An, 9B, THCS Trần Phú, TX. Phú Lý, Hà Nam

9) Nguyễn Thị Hoàng Oanh, 9/1, THCS Đinh Tiên Hoàng, Ninh Hòa, Khánh Hòa

10) Thân Ngọc Thức, 9A, THCS Nguyễn Hồng, Tân Yên, Bắc Giang

11) Lê Bá Long, 10T, THPT chuyên Hùng Vương, Việt Trì, Phú Thọ

12) Nguyễn Trường Giang, 10A1, THPT Yên Phong I, Bắc Ninh

13) Nguyễn Trung Kiên A, 10A1, PTCT-T, ĐHSPT Hà Nội

14) Nguyễn Tuấn Tú, 10T, THPT chuyên Lê Hồng Phong, TP. Hồ Chí Minh

15) Trịnh Thành Kiên, 10T, THPT Lam Sơn, Thanh Hóa

16) Đinh Đức Thành, 11A1, THPT chuyên Hùng Vương, Việt Trì, Phú Thọ

19) Nguyễn Lệnh Quân, 11A1, PTCT-T, ĐHSPT Hà Nội

18) Trần Quốc Hoàn, 11 Toán, THPT chuyên Nguyễn Trãi, TP Hải Dương

19) Hoàng Ngọc Minh, 12A1, THPT chuyên Hùng Vương, Việt Trì, Phú Thọ

20) Lê Minh Thắng, 12A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc

21) Lê Phương, 12 Toán 1, THPT chuyên Lương Thế Vinh, TP Biên Hòa, Đồng Nai

22) Trương Song Hào, 12A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Quảng Trị

MÔN VẬT LÝ

Giải Nhất (1 giải)

1) Dương Trung Hiếu, 11B, THPT NK Ngô Sĩ Liên, Bắc Giang

Giải Nhì (3 giải)

1) Nguyễn Ngọc Hưng, 10A3, THPT chuyên Vĩnh Phúc

2) Thái Bá Sơn, K30A3, THPT Phan Bội Châu, Vinh, Nghệ An

3) Chu Thanh Bình, 12 Lí, THPT NK Hàn Thuyên, Bắc Ninh

Giải Ba (7 giải)

1) Bùi Văn Trung, 10F, THPT Lam Sơn, TP. Thanh Hóa.

2) Lê Hoàng Dũng, 10 Lí, THPT Nguyễn Trãi, TP. Hải Dương

3) Phạm Tuấn Hiệp, 10 Lí, THPT NK Trần Phú, Hải Phòng

4) Lê Đức Hải, 11 L2, THPT chuyên Nguyễn Huệ, Hà Đông, Hà Tây

5) Nguyễn Thị Phương Dung, 11A3, THPT chuyên Vĩnh Phúc

6) Hồ Năng Tân, 12B, THPT NK Ngô Sĩ Liên, Bắc Giang

7) Lê Văn Thông, 12 Lí, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Quy Nhơn, Bình Định

THPT



Từ trước tới nay, ta đã quen biết với tam giác Pascal là bảng các hệ số cho khai triển nhị thức

Newton, cùng với các kí hiệu C_n^k hoặc $\binom{n}{k}$.

Bây giờ, ta sẽ thử mở rộng các thuật toán đó cho trường hợp khai triển biểu thức $(a+b+c)^n$, và gọi là Tam thức Newton, trong đó a, b và c là những biến số.

Để dễ hiểu, ta xét trường hợp khai triển $(a+b+c)^2$ dựa vào tam giác Pascal cho nhị thức Newton như sau :

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2 &= (a+(b+c))^2 = 1.a^2 + (b+c)^0 \\ &\quad + 2a^1.(b+c)^1 \\ &\quad + 1.a^0.(b+c)^2 \\ &= 1.a^2(1) \\ &\quad + 2.a^1.(1.b+1.c) \\ &\quad + 1.a^0.(1.b^2+2bc+1.c^2).\end{aligned}$$

Hãy chú ý tới các hệ số bên ngoài và bên trong dấu ngoặc! Các bạn thấy có gì đặc biệt không?

Ta xét thêm trường hợp khai triển $(a+b+c)^3$ ứng với số mũ $n = 3$:

$$\begin{aligned}(a+b+c)^3 &= (a+(b+c))^3 = 1.a^3.(b+c)^0 \\ &\quad + 3.a^2.(b+c)^1 \\ &\quad + 3.a^1.(b+c)^2 \\ &\quad + 1.a^0.(b+c)^3 \\ &= 1.a^3.(1) \\ &\quad + 3.a^2.(1.b+1.c) \\ &\quad + 3.a^1.(1.b^2+2bc+1.c^2) \\ &\quad + 1.a^0.(1.b^3+3.b^2.c+3.bc^2+1.c^3) \\ &= a^3+3a^2b+3a^2c+3ab^2+6aba+3ac^2+b^3 \\ &\quad + 3b^2c+3bc^2+c^3.\end{aligned}$$

Ta có thể rút ra thuật toán tìm khai triển của $(a+b+c)^3$ như sau :

MỘT THUẬT TOÁN KHAI TRIỂN NHANH TAM THỨC NEWTON

PHẠM ĐĂNG LONG
(ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội)

Bước 1: Viết bảng các hệ số và biến bên trong ngoặc :

- Các hệ số của dòng thứ i ($i = 0, 1, 2, 3$) của bảng là dòng thứ i của tam giác số Pascal

- Các biến của dòng thứ i ($i = 0, 1, 2, 3$) của bảng tương ứng với các hệ số trên là dãy các biến của khai triển $(b+c)^i$.

- Đặt dấu cộng giữa các đơn thức trên.

Bước 2: Viết các nhân tử bên ngoài ngoặc :

- Các hệ số ở dòng thứ i ($i = 0, 1, 2, 3$) là dãy hệ số của dòng thứ $n = 3$ của tam giác Pascal nghĩa là dòng cuối cùng của bảng số ở bước 1.

- Các biến ở dòng thứ i ($i = 0, 1, 2, 3$) là dãy biến $a^{3-i} = a^{n-i}$.

- Đặt dấu cộng bên trái các dòng.

Bước 3. Tìm khai triển $(a+b+c)^3$:

- Nhân biểu thức trong ngoặc (ở bước 1) với các nhân tử ngoài ngoặc (ở bước 2)

- Cộng các biểu thức ở các dòng lại được kết quả.

Một cách tổng quát với số tự nhiên n tùy ý :

$$\begin{aligned}(a+b+c)^n &= (a + (b+c))^n = \\ &= \sum_{p=0}^n C_n^p a^{n-p} . (b+c)^p = \\ &= \sum_{p=0}^n C_n^p a^{n-p} \left(\sum_{q=0}^p C_p^q b^{p-q} c^q \right) = \\ &= \sum_{0 \leq q \leq p \leq n} C_n^p C_p^q a^{n-p} b^{p-q} c^q\end{aligned}$$

Và như vậy ta có

Thuật toán để khai triển tam thức Newton $(a+b+c)^n$ như sau :



CÁC LỚP THCS

Bài T1/328. (Lớp 6). Hãy so sánh hai số sau $2^{3^{2^3}}$ và $3^{2^{3^2}}$.

NGUYỄN THỊ NGÀ
(SV K27C khoa Toán Tin, DHSP HN2)

Bài T2/328. (Lớp 7). Tính tổng gồm 2004 số hạng :

$$f\left(\frac{1}{2005}\right) + f\left(\frac{2}{2005}\right) + \dots + f\left(\frac{2004}{2005}\right)$$

trong đó $f(x) = \frac{100^x}{100^x + 10}$

PHẠM XUÂN TRINH
(GV THCS Trúc Hùng, Trúc Ninh, Nam Định)

Bài T3/328. Giải phương trình nghiệm nguyên dương :

$$(n+1)(2n+1) = 10m^2$$

BÙI VĂN CHI
(GV THCS Lương Thế Vinh, Quy Nhơn, Bình Định)

Bài T4/328. Tìm mọi số nguyên dương n sao cho đa thức gồm $n+1$ số hạng

$$P(x) = x^{4n} + x^{4(n-1)} + \dots + x^8 + x^4 + 1$$

chia hết cho đa thức có $n+1$ số hạng

$$Q(x) = x^{2n} + x^{2(n-1)} + \dots + x^4 + x^2 + 1$$

NGUYỄN THỊ MINH
(GV THCS Cao Viên, Thanh Oai, Hà Tây)

Bài T5/328. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$T = \frac{a^2+1}{b^2+1} + \frac{b^2+1}{c^2+1} + \frac{c^2+1}{a^2+1}$$

trong đó a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a+b+c=1$.

TRƯƠNG HOÀNG HIẾU
(SV BK11 - K48 DH Bách Khoa, Hà Nội)

Bài T6/328. Cho tam giác ABC có góc A nhọn và $AC = 2AB$. Đường phân giác AD cắt đường cao BH tại K (D thuộc BC , H thuộc AC). Đường thẳng CK cắt AB tại E . Chứng minh rằng $\triangle ABC$ vuông tại B khi và chỉ khi diện tích hai tam giác BDE và HDE là bằng nhau.

TRẦN VĂN THÍNH
(GV THCS Tự Cường, Tiên Lãng, Hải Phòng)

Bài T7/328. Trên cạnh AB của tam giác đều ABC lấy điểm N , trên cạnh AC lấy điểm M sao cho $AN > NB$ và $AM > MC$. Đường thẳng BM cắt CN tại H . Gọi P và Q lần lượt là trực tâm của $\triangle ABM$ và $\triangle ACN$. Chứng minh rằng $BN = CM$ khi và chỉ khi $HP = HQ$.

TRINH BẢNG GIANG
(GV THPT NK ĐHQG TP. Hồ Chí Minh)

CÁC LỚP THPT

Bài T8/328. Tìm số nguyên tố p nhỏ nhất sao cho $\left[(3+\sqrt{p})^{2n}\right] + 1$ chia hết cho 2^{n+1} với mỗi số tự nhiên n , trong đó kí hiệu $[x]$ là phần nguyên của x .

BÙI THẾ HÙNG
(GV Toán DHSP Thái Nguyên)

Bài T9/329. Chứng minh rằng :

$$\left(\frac{a}{b+c}\right)^k + \left(\frac{b}{c+a}\right)^k + \left(\frac{c}{a+b}\right)^k \geq \frac{3}{2^k}.$$

trong đó a, b, c, k là các số thực dương và $k \geq \frac{2}{3}$.

TRẦN TUẤN ANH
(SV khoa Toán Tin, ĐH KHTN TP. Hồ Chí Minh)

Bài T10/328. Tìm tất cả các số thực dương a sao cho tồn tại số thực dương k và hàm số $f: R \rightarrow R$ thỏa mãn điều kiện

$$\frac{f(x)+f(y)}{2} \geq f\left(\frac{x+y}{2}\right) + k|x-y|^a$$

với mọi số thực x, y .

HÀN NGỌC ĐỨC
(SV K47A2 khoa Toán Tin, ĐHKHTN Hà Nội)

Bài T11/328. Ba đường cao AD, BE, CF của tam giác nhọn ABC cắt nhau tại H sao cho $AH > HD, BH > HE, CH > HF$. Chứng minh rằng $\tan^2 A + \tan^2 B + \tan^2 C > 6$.

PHẠM ĐỨC QUANG
(Phòng Toán, Viện NC chiến lược và chương trình GD)

Bài T12/328. Cho n điểm (n lẻ, $n > 1$) $A_1, A_2, \dots, A_n$ phân biệt trong không gian (coi A_{n+1} trùng với A_1, A_{n+2} trùng với A_2).

Chứng minh rằng :

$$1) \sum_{i=1}^n \widehat{A_i A_{i+1} A_{i+2}} \geq \pi$$

$$2) \sum_{i=1}^n \widehat{A_i Q A_{i+1}} \leq (n-1)\pi$$

trong đó Q là điểm tùy ý khác $A_1, A_2, \dots, A_n$.

VŨ HOÀNG HIỆP
(SV K6 CN ĐHKHTN Hà Nội)

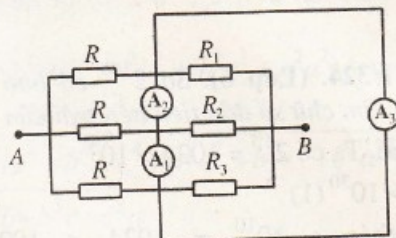
CÁC ĐỀ VẬT LÝ

Bài L1/328. Một vật dao động điều hòa dọc theo trục Ox với biên độ $A = 5$ cm. Biết rằng lúc ban đầu ($t = 0$) vật ở gốc tọa độ. Đến thời điểm $t = 4$ (s) vật đã di chuyển được một quãng đường $S = 55$ cm và vật cũng ở vị trí ban đầu nhưng chuyển động ngược chiều so với lúc bắt đầu

chuyển động. Viết phương trình chuyển động của vật.

NGUYỄN MINH TUẤN
(GV THPT Yên Thành II, Yên Thành, Nghệ An)

Bài L2/328. Tìm số chỉ của các ampe kế A_1, A_2, A_3 trong sơ đồ ở hình dưới, khi mắc A và B vào một nguồn điện có hiệu điện thế $U = 3,3$ V.



Biết rằng điện trở của các ampe kế rất nhỏ so với các điện trở trong mạch, và $R = 3$ (kΩ); $R_1 = 1$ (kΩ); $R_2 = 2$ (kΩ); $R_3 = 4$ (kΩ).

NGUYỄN NHẬT MINH
(Hà Nội)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/328. (For 6th grade).

Compare the numbers $2^{3^{2^3}}$ and $3^{2^{3^2}}$.

T2/328. (For 7th grade).

Calculate the following sum of 2004 numbers :

$$f\left(\frac{1}{2005}\right) + f\left(\frac{2}{2005}\right) + \dots + f\left(\frac{2004}{2005}\right)$$

$$\text{where } f(x) = \frac{100^x}{100^x + 10}$$

T3/328. Find positive integer - solutions of the equation

$$(n+1)(2n+1) = 10m^2$$

T4/328. Find all positive integers n such that the polynomial with $n+1$ terms

$$P(x) = x^{4n} + x^{4(n-1)} + \dots + x^8 + x^4 + 1$$

is divisible by the polynomial with $n+1$ terms

$$Q(x) = x^{2n} + x^{2(n-1)} + \dots + x^4 + x^2 + 1$$

T5/328. Find the greatest value of the expression

$$T = \frac{a^2+1}{b^2+1} + \frac{b^2+1}{c^2+1} + \frac{c^2+1}{a^2+1}$$

where a, b, c are non negative real numbers satisfying $a+b+c=1$.

T6/328. Let ABC be a triangle with acute angle A and $AC = 2AB$. The angle bisector AD cuts the altitude BH at K (D lies on BC , H on AC). The line CK cuts AB at E . Prove that $\triangle ABC$ is right at B when and only when the areas of the triangles BDE and HDE are equal.

T7/328. On the side AB of an equilateral triangle ABC take a point N , on the side AC take a point M so that $AN > NB$ and $AM > MC$. The line BM cuts CN at H . Let P and Q be respectively the orthocenters of $\triangle ABM$ and $\triangle ACN$. Prove that $BN = CM$ when and only when $HP = HQ$.

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T8/328. Find the least prime number p such that $\left[(3+\sqrt{p})^{2n}\right]+1$ is divisible by 2^{n+1} for every natural number n , where $[x]$ denotes the greatest integer not exceeding x .

(Xem tiếp trang 11)



Bài T1/324. (Lớp 6). Số 2^{100} có bao nhiêu chữ số? Tìm chữ số đầu tiên bên trái của số đó.

Lời giải. Ta có $2^{10} = 1024 > 10^3$
 $\Rightarrow 2^{100} > 10^{30}$ (1)

Mặt khác : $10^{10} = 1024 < 1025 \Rightarrow$
 $\frac{2^{100}}{10^{30}} = \left(\frac{2^{10}}{10^3}\right)^{10} < \left(\frac{1025}{1000}\right)^{10} = \left(\frac{41}{40}\right)^{10}$

Lưu ý rằng, nếu $0 < b < a$ thì $ab + b < ab + a$
 $\Rightarrow b(a+1) < a(b+1) \Rightarrow \frac{a+1}{b+1} < \frac{a}{b}$.

Sử dụng BDT trên, ta được :

$$\frac{41}{40} < \frac{40}{39} < \frac{39}{38} < \dots < \frac{32}{31} < \frac{31}{30}$$

Do đó

$$\frac{2^{100}}{10^{30}} < \left(\frac{41}{40}\right)^{10} < \frac{40}{39} \cdot \frac{39}{38} \dots \frac{32}{31} \cdot \frac{31}{30} = \frac{4}{3} < 2$$

$$\Rightarrow 2^{100} < 2 \cdot 10^{30} \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có $10^{30} < 2^{100} < 2 \cdot 10^{30}$ (3)

Vậy 2^{100} có 31 chữ số và chữ số đầu tiên bên trái là 1.

Nhận xét. 1. Có thể sử dụng cách giải trên để xét số chữ số của số 2^{10n} .

2. Có thể chứng minh BDT (2) như sau :

$$\text{Ta có } 2^{10} = 1024 < 1050 \Rightarrow 2^{11} < 2100 = 21 \cdot 10^2$$

$$\text{Do đó } 2^{33} < (21 \cdot 10^2)^3 = 21^3 \cdot 10^6 = 9261 \cdot 10^6 < 10^4 \cdot 10^6 = 10^{10}$$

$$\text{Ta được } 2^{99} < 10^{30} \Rightarrow 2^{100} < 2 \cdot 10^{30}$$

3) Một số bạn từ (3) đã kết luận sai là số 2^{100} có 30 chữ số!

4. Các bạn sau đây có lời giải tốt :

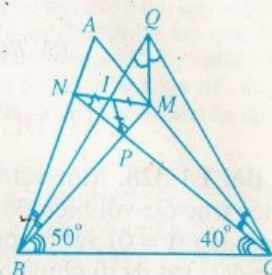
Nghe An : Vũ Đức Hoàn, 6A, Phan Huy Cao, 6C, THCS Cao Xuân Huy, Diên Châu ; **Quảng Nam :** Phan Lê Quang Chiến, 5A8, Tiểu học Tam Lộc, Tam Kỳ ; **Hưng Yên :** Nguyễn Thị Bích Ngọc, 6A3, THCS Chu Mạnh Trinh, Văn Giang ; **Hà Nội :** Nguyễn Thị Mai Anh, 6A, THCS Đại Kim, Hoàng Mai ; **Thanh Hóa :** Lê Tuấn Anh, 6C, THCS Lê Đình Kiên, Yên Định ;

TP. Hồ Chí Minh: Tăng Bửu Vinh, 6¹, THCS Chu Văn An, Q. 11.

NGUYỄN ANH DŨNG

Bài T2/324. (Lớp 7). Cho tam giác ABC có $\widehat{ABC} = 70^\circ$, $\widehat{ACB} = 50^\circ$. Trên cạnh AC lấy điểm M sao cho $\widehat{ABM} = 20^\circ$. Trên cạnh AB lấy điểm N sao cho $\widehat{ACN} = 10^\circ$. Gọi P là giao điểm của BM và CN. Chứng minh rằng $MN = 2PM$.

Lời giải. Dựng tam giác đều BCQ (Q, A cùng nằm trên nửa mặt phẳng bờ BC). Từ giả thiết bài toán có $\widehat{MBC} = \widehat{MCB} = 50^\circ$ suy ra $\triangle MBC$ cân tại M $\Rightarrow MB = MC$, kết hợp với $QB = QC$ có $\triangle QMB = \triangle QMC$



(c.c.c), dẫn đến $\widehat{MQC} = \widehat{MQB} = 30^\circ$ (1).

Vì $\widehat{NBC} = 70^\circ$, $\widehat{NCB} = 40^\circ$ nên $\widehat{BNC} = 70^\circ$, từ đó $\triangle CNB$ cân tại C $\Rightarrow CN = CB = CQ$. Xét hai tam giác CMN và CMQ có $CN = CQ$, CM chung, $\widehat{NCM} = \widehat{QCM} = 10^\circ$ do đó $\triangle CMN = \triangle CMQ$, từ (1) có $\widehat{MNC} = \widehat{MQC} = 30^\circ$ (2)

Cũng từ giả thiết bài ra ta thấy $\triangle MNP$ vuông tại P ; gọi I là trung điểm của MN thì do $\widehat{MNC} = 30^\circ$ (theo (2)) suy ra $\triangle MIP$ đều $\Rightarrow PM = IM = \frac{1}{2}MN$, hay $MN = 2PM$ (đpcm).

Nhận xét. Rất nhiều bạn giải theo hướng như trên. Các bạn sau trình bày ở lời giải gọn hơn cả :

Hải Phòng : Khắc Anh Minh Lương, 7A, THCS Nguyễn Bình Khiêm, Vĩnh Bảo, Nguyễn Thanh Sơn, 7A1, THCS Hồng Bàng ; **Hà Tây :** Cấn Mạnh Hùng, 7C, THCS Thạch Thất ; **Hải Dương :** Nguyễn Văn Tuấn, 6.1, THCS Hợp Tiến, Nam Sách, Phạm Tiến Tùng, 7A, THCS Tân An, Thanh Hà ; **Thanh Hóa :** Lê Công Tuấn Anh, 7C, THCS Lê Đình Kiên, Yên Định ; **Nghe An :** Trần Văn Phúc, 7A, THCS Cao Xuân Huy, Diên Châu ; **Hà Tĩnh :** Võ Thị Hạnh, 7E, THCS Bình An, Can Lộc ; **Quảng Bình :** Dương Thế Trung Dũng, 7C, THCS Hoàn Lão, Bố Trạch ; **Quảng Ngãi :** Tạ Thị Hải Vân, 7C, THCS Huỳnh Thúc Kháng, Nghĩa Hành ; **Bình Định :** Trần Thị Quỳnh Giao, 7A, Đào Minh Thuận, 7A2, THCS Ngô Mây, Phù Cát ; **Hà Nội :** Trịnh Văn Hòa, 7A5, THCS Giảng Võ, Ba Đình.

HỒ QUANG VINH

Bài T3/324. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3 + y = 2 & (1) \\ y^3 + x = 2 & (2) \end{cases}$$

Lời giải. (Của bạn *Lê Xuân Thống Nhất*, 9B, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoàng Hóa, Thanh Hóa).

Lấy (1) trừ (2) ta được :

$$(x - y)(x^2 + xy + y^2 - 1) = 0.$$

Có 2 trường hợp :

a) $x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$. Thay vào (1) ta được :

$$x^3 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + x + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 1 = 0 \text{ (do } x^2 + x + 2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} > 0)$$

$\Rightarrow x = y = 1$ là một nghiệm của hệ đã cho.

b) $x^2 + xy + y^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + xy + y^2 = 1$ (3).

Nhận xét rằng nếu $x \leq 0$ thì từ (1) suy ra $y \geq 2$

$$\Rightarrow x^2 + xy + y^2 = \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4} \geq \frac{3 \cdot 2^2}{4} > 1, \text{ trái}$$

với (3), do đó $x > 0$. Lập luận tương tự, ta cũng có $y > 0$.

Vì vậy, từ (3) suy ra : $y^2 < 1 \Rightarrow y < 1$. Kết hợp với (1) ta có $x^3 > 1 \Rightarrow x > 1 \Rightarrow x^2 + xy + y^2 > x^2 > 1$, trái với (3).

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x, y) = (1, 1)$.

Nhận xét. 1) Đa số các bạn đều giải theo cách trên (cách giải khá cơ bản cho hệ phương trình đối xứng loại 2, tức là hệ mà khi ta thay x bởi y và y bởi x thì phương trình này trở thành phương trình kia). Để chứng minh (3) vô nghiệm, các bạn đã làm theo nhiều cách khác nhau, tuy nhiên, một số chứng minh còn dài và một số lập luận không chặt chẽ.

Bạn *Trịnh Huy Giang*, 9A, THCS Nguyễn Chí, Đông Sơn, **Thanh Hóa** đã giải bài toán tổng quát : "Giải hệ

$$\begin{cases} x^{6k+3} + y = 2 \\ y^{6k+3} + x = 2 \end{cases} \text{ với } k \in \mathbb{N}."$$

2) Các bạn có lời giải tốt là :

Phú Thọ : *Lương Đức Hoàng, Nguyễn Hải Nam*, 9A, THCS Giấy Phong Châu, Phù Ninh ; **Vĩnh Phúc :** *Đại Thị Ánh*, 8A, THCS Yên Lạc ; **Hà Nam :** *Nguyễn Mạnh An*, 9B, THCS Trần Phú, TX Phù Lý ; **Thanh Hóa :** *La Tiến Nam, Trịnh Huy Giang*, 9A, THCS Nguyễn Chí, Đông Sơn, *Lê Xuân Thống Nhất*, 9B, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoàng Hóa ; **Nghệ An :** *Lê Ngọc Thạch*, lớp 9, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương ; **Đắk Lắk :** *Phan Duy Khánh*, 9A7, THCS Trần Hưng Đạo, TP. Buôn Ma Thuột.

TRẦN HỮU NAM

Bài T4/324. Chứng minh bất đẳng thức

$$\sqrt{a^4 + b^4 + c^4} + \sqrt{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2} \geq \sqrt{a^3 b + b^3 c + c^3 a} + \sqrt{ab^3 + bc^3 + ca^3}$$

trong đó a, b, c là các số thực không âm.

Lời giải. Theo bất đẳng thức Cô-si ta có

$$\sqrt{a^4 + b^4 + c^4} + \sqrt{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2} \geq 2\sqrt{(a^4 + b^4 + c^4)(a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2)} \quad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức Bu-nhi-a-côp-xki cho các bộ ba số $(a^2 ; b^2 ; c^2)$ và $(ab ; bc ; ca)$ ta được :

$$\begin{aligned} (a^4 + b^4 + c^4)(a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2) &\geq (a^3 b + b^3 c + c^3 a)^2 \\ &\geq \sqrt{(a^4 + b^4 + c^4)(a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2)} \geq \sqrt{a^3 b + b^3 c + c^3 a} \end{aligned} \quad (2)$$

Tương tự, áp dụng BĐT Bu-nhi-a-côp-xki cho các bộ ba số $(b^2 ; c^2 ; a^2)$ và (ab, bc, ca) ta được

$$\begin{aligned} &\sqrt{(b^4 + c^4 + a^4)(a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2)} \\ &\geq \sqrt{ab^3 + bc^3 + ca^3} \end{aligned} \quad (3)$$

Cộng hai vế của (2) và (3) ta được

$$\begin{aligned} &2\sqrt{(a^4 + b^4 + c^4)(a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2)} \\ &\geq \sqrt{a^3 b + b^3 c + c^3 a} + \sqrt{ab^3 + bc^3 + ca^3} \end{aligned} \quad (4)$$

Từ (1) và (4) ta suy ra điều phải chứng minh.

Nhận xét. Tòa soạn nhận được rất nhiều bài dự thi và tất cả đều giải đúng. Một số bạn có tổng quát hóa hay. Tiếc là có không ít bài trình bày chưa cẩn thận hoặc chưa sạch. Các bạn sau đây có lời giải tốt :

Tô Quang Ngọc, 9D, THCS Sơn Tây ; *Trịnh Ngọc Tú*, 9A3, THCS Ngô Sĩ Liên, Chương Mỹ, **Hà Tây**; *Trịnh Văn Vương*, 9B, THCS Điện Biên, TP Thanh Hóa, *Trịnh Hà Linh*, 9A, THCS Lê Đình Kiên, Yên Định, *Nguyễn Thị Ngọc Hà*, 8A, THCS Lê Quý Đôn, Bỉm Sơn, **Thanh Hóa** ; *Lê Ngọc Thạch*, 9A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Nghệ An** ; *Phạm Duy Hiệp*, 9A2, THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên, **Nam Định** ; *Nguyễn Tiến Thanh*, 8C, THCS Nguyễn Quang Bích, Tam Nông, *Nguyễn Thị Bích Nguyệt*, 9E, THCS Văn Lang, TP. Việt Trì, **Phú Thọ** ; *Đặng Thị Yến*, 9E, THCS Thái Phương, Hưng Hà, **Thái Bình** ; *Triệu Thị Ny Ny*, lớp 9, THCS Lý Thường Kiệt, Thăng Bình, **Quảng Nam** ; *Đinh Đức Linh*, 8E, THCS 49 Krông Năng, **Đắk Lắk** ; *Tô Minh Giang*, 9E, THCS Kì Tân, Kì Anh, *Trần Hạnh Nguyên*, 9E, THCS Nghèn, Can Lộc, **Hà Tĩnh** ; *Lê Xuân Tùng*, 9A, THCS Nguyễn Trường Tộ, Đồng Đa, **Hà Nội** ; *Đinh Thị Như Nguyễn*, 9A1, THCS Hai Bà Trưng, Mê Linh, *Nguyễn Xuân Thọ*, 9B, THCS Vĩnh Yên, TX. Vĩnh Yên, **Vĩnh Phúc** ; *Đặng Thị Kim Hợp*, 7C, THCS Yên Phong, **Bắc Ninh** ; *Trần Mĩ Linh*, 8/4, THCS Trần Huỳnh, TX. **Bạc Liêu**, *Vũ Thị Quỳnh Hoa*, 9C, THCS Chu Văn An, Chí Linh, **Hải Dương**.

PHAN DOÃN THOẠI

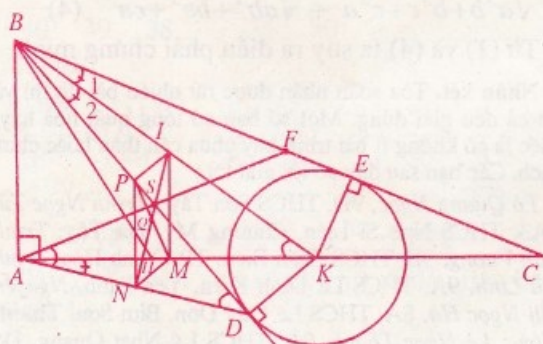
Bài T5/324. Cho tam giác ABC vuông tại A . Với mỗi điểm K trên cạnh AC dựng đường tròn tâm K tiếp xúc với BC tại E . Dựng BD tiếp xúc với đường tròn tâm K tại D (khác E). Gọi M, N, P và Q lần lượt là trung điểm của AK, AD, BD và MP . Gọi S là giao điểm của hai đường thẳng QN và BD . Hỏi điểm S chạy trên đường nào khi K di động trên cạnh AC ?

Lời giải. Khi K trùng A thì $BD \parallel DN$ nên không tồn tại điểm S .

Khi K trùng C thì ta có "đường tròn điểm C ", lúc đó S trùng với trung điểm của BC .

Khi K trùng với giao điểm H của BC và phân giác của góc B thì D, N, S trùng với A .

Ta xét trường hợp K nằm trong HC . Trường hợp K nằm trong AH , bạn đọc tự vẽ hình và chứng minh tương tự. Gọi I là trung điểm của BK , ta có MI và PN lần lượt là các đường trung bình của tam giác ABK và ABD , do đó $MI = PN = \frac{1}{2}AB$ và $MI \parallel PN \parallel AB$, suy ra tứ giác $MIPN$ là hình bình hành $\Rightarrow$ trung điểm Q của đường chéo PM cũng là trung điểm của IN . Từ đó suy ra bốn điểm I, S, Q, N thẳng hàng.



Trong các tam giác vuông ABK và DBK ta có $IA = ID = \frac{1}{2}BK \Rightarrow \triangle IAD$ cân tại $I \Rightarrow IN$ là đường trung trực của AD . Vì $S \in IN$ nên $\triangle SAD$ cân tại $S \Rightarrow \widehat{SAD} = \widehat{SDA}$ (1). Để thấy tứ giác $ABKD$ nội tiếp nên $\widehat{ADB} = \widehat{AKB}$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{SAD} = \widehat{AKB} \Leftrightarrow \widehat{FAC} + \widehat{KAD} = \widehat{C} + \widehat{B}_1$ (F là giao điểm AS và BC).

Ta lại có $\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2$ (tính chất của tiếp tuyến) $\widehat{KAD} = \widehat{B}_2$ (tứ giác $ABKD$ nội tiếp)

Suy ra $\widehat{FAC} = \widehat{C} \Rightarrow FA = FC$.

Để thấy $\widehat{FBA} = 90^\circ - \widehat{C} = \widehat{FAB} \Rightarrow \triangle FAB$ cân tại $F \Rightarrow FA = FB$, từ đó F là trung điểm của BC (cố định). Vậy S thuộc trung tuyến AF của tam giác ABC .

Để ý rằng tia BD và tia BA luôn ở cùng phía đối với đường thẳng BC nên khi K nằm trong đoạn AH thì S nằm cùng phía với A trong nửa mặt phẳng bờ AC . Ta đi tới kết luận: Khi K di động trên cạnh AC ($K \neq A$) thì điểm S chạy trên tia FA , chứa trung tuyến AF của $\triangle ABC$.

Nhận xét. 1) Đây là bài toán cơ bản dạng tìm quỹ tích, có khá đông bạn tham gia giải và đều tìm ra kết quả S nằm trên trung tuyến AF của tam giác ABC . Tuy nhiên, nhiều bạn chỉ hạn chế kết luận S chạy trên đoạn AF , do vẽ K gần C . Rất ít bạn đặt điều kiện $K \neq A$ để tồn tại điểm S .

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Vĩnh Phúc: Trần Trung Dũng, 9B, THCS Lập Thạch, huyện Lập Thạch; **Bắc Ninh:** Hoàng Văn Tuyền, 9A, THCS Lê Văn Thịnh, Gia Bình; **Hà Tây:** Đặng Văn Thủy, 9A3, THCS Ngô Sĩ Liên, Chương Mỹ; **Hải Dương:** Đặng Thị Thủy, 9A2, THCS Phả Lại, Chí Linh; **Thanh Hóa:** Lê Trung Kiên, 9A, Nguyễn Thị Ngọc Hà, 8A, Lê Quang Trưởng, 9D, THCS Lê Quý Đôn, TX Bim Sơn; **Hoàng Thu Hiến,** 9B, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoàng Hóa, **Trịnh Hà Linh,** 9A, THCS Lê Đình Kiên, Yên Định; **Bà Rịa - Vũng Tàu:** Lê Quang Huy, 9B, THCS Nguyễn An Ninh, TP. Vũng Tàu; **Bạc Liêu:** Trần Mỹ Linh, 8/4, THCS Trần Huỳnh, TX Bạc Liêu; **Đắk Lắk:** Võ Văn Tuấn, 7A5, THCS Buôn Hồ, Krông Buk.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

Bài T6/324. Cho đa thức $f(x)$ bậc 2003 và

$$f(k) = \frac{k^2}{k+1} \text{ với } k = 1, 2, 3, \dots, 2004.$$

Hãy tính $f(2005)$.

Lời giải.

Xét đa thức $g(x) = (x+1)f(x) - x^2$. Khi đó bậc của $g(x)$ là 2004 và $g(k) = 0$ ứng với $k = 1, 2, \dots, 2004$. Vậy nên

$$g(x) = a(x-1)(x-2)\dots(x-2004)$$

Từ điều kiện $g(-1) = -1$ ta thu được

$$-1 = a(-2)(-3)\dots(-2005) \text{ hay } a = -\frac{1}{2005!}$$

$$\text{Do đó } g(x) = -\frac{(x-1)(x-2)\dots(x-2004)}{2005!}$$

Vậy nên

$$f(2005) = \frac{g(2005) + 2005^2}{2005 + 1} = \frac{-1 + 2005^3}{2005 \cdot 2006}$$

Nhận xét. Đây là một bài tập loại dễ nên có rất nhiều bạn tham gia giải và gửi bài đến Tòa soạn. Các bạn đều

giải đúng và đa số giải theo cách trình bày đã nêu ở trên. Một số bài giải bằng phương pháp nội suy.

Xin nêu tên một số bạn nhỏ tuổi cũng giải đúng bài này:

Cần Thơ: Nguyễn Thành Công, 10A1, THPT chuyên Lý Tự Trọng; **Bắc Giang:** Hoàng Minh Tuấn, 10A, THPT NK Ngô Sĩ Liên; **Bắc Ninh:** Nguyễn Bất Hợp, 9T, THCS Long Châu, Hoàng Văn Tuyển, 9A, THCS Lê Văn Thịnh; **Đak Lak:** Ngô Thùy Dương, 10CT THPT chuyên Nguyễn Du; **Điện Biên:** Đỗ Phương Thủy, 10A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Đồng Nai:** Hà Xuân Thiên Hương, Nguyễn Thị Thùy An, 10T, THPT Lương Thế Vinh, TP Biên Hòa; **Đồng Tháp:** Nguyễn Minh Trí, 10T, THPT Sa Đéc; **Hà Nội:** Vũ Đoàn Hữu Phước, 9A, THCS Nguyễn Trường Tộ, Đống Đa, Nguyễn Thu Hằng, 10T1, THPT Hà Nội - Amsterdam, Đỗ Xuân Huy, 10A1, THPT chuyên ĐHSPT; **Hải Dương:** Phạm Hoàng Thái, 10K, THPT Kim Thành, Nguyễn Anh Tuấn, Vũ Đình Quyền, 9B, THCS Nguyễn Trãi; **Hà Tĩnh:** Hồ Vũ Hải, Võ Xuân Chúc, 10T, THPT chuyên; **Thừa Thiên - Huế:** Lê Viết Ân, 10/9, THPT Quốc học Huế, Nguyễn Vũ Thành Long, 8/1, THCS Chu Văn An, TP. Huế; **Nam Định:** Nguyễn Duy Khánh, 8C, THCS Đào Sư Tích; **Nghệ An:** Nguyễn Đình Phương, 10G, THPT Nghĩa Đàn, Cao Thị Minh Nguyệt, Tăng Văn Vương, 9C, THCS Cao Xuân Huy; **Phú Thọ:** Lê Bá Long, 10T, THPT chuyên, Nguyễn Bảo Trung, 9B, THCS Văn Lang, Trần Mạnh Trung, 9A, THCS Giấy Phong Châu; **Quảng Nam:** Nguyễn Dương Nguyễn, 10T, THPT chuyên; **Quảng Ninh:** Hoàng Trung Hiếu, Nguyễn Đình Long, 10 toán, THPT DL Yên Hưng, Bùi Ngọc Duy, 10A1, THPT Uông Bí; **Quảng Trị:** Nguyễn Tự Hành, Nguyễn Hữu Minh, Nguyễn Thanh Linh, 10T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Thái Bình:** Nguyễn Minh Tuấn, 9A, THCS TT Vũ Thư, Phạm Minh Tuấn, 10T, THPT chuyên Thái Bình; **Thanh Hóa:** Trịnh Huy Giang, Nguyễn Hải, Lê Tiến Nam, 9A, THCS Nguyễn Chí Chích, Lê Ngọc Tuấn, Lê Xuân Thống Nhất, 9B, THCS Nhữ Bá Sỹ, Lê Quang Trường, 9D, THCS Lê Quý Đôn, Nguyễn Lưu Bách, 8C, THCS Lê Hữu Lập; **TP. Hồ Chí Minh:** Lê Duy Khương, 9, THCS Hồng Bàng, Nguyễn Khai Minh, 10CT, THPT Lê Hồng Phong, Đỗ Tuấn Hoàng Anh, 9A14, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa; **Vĩnh Phúc:** Nguyễn Xuân Thọ, 9B, Nguyễn Sơn Tùng, 9C, THCS Vĩnh Yên.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T7/324. Chứng minh rằng $4x^2 + 4y^2 \leq xy + yz + zx + 5z^2$ trong đó x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x \leq y \leq z$.

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Lời giải. Từ giả thiết $0 < x \leq y \leq z$ ta suy ra $x^2 \leq xy \leq zx \leq yz \leq z^2$ và $y^2 \leq z^2$.

Do đó $4x^2 + 4y^2 \leq xy + zx + yz + z^2 + 4z^2 = xy + yz + zx + 5z^2$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$.

Nhận xét. Mặc dù bài toán này là một BĐT rất đơn giản, nhưng không ít bạn lại giải rất phức tạp (thậm chí có bạn phải dùng cả đạo hàm để chứng minh). Các bạn sau có lời giải gọn, sáng sủa:

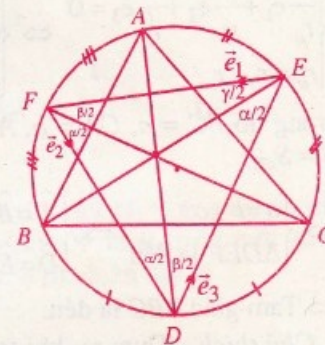
Hà Nội: Đỗ Văn Quyết, 10A6, THPT Đại Mỗ, Từ Liêm; **Vĩnh Phúc:** Nguyễn Thị Thu Hiền, 8A, THCS Yên Lạc; **Hải Dương:** Phạm Ngọc Dương, 6B, THCS Liên Hòa, Kim Thành; **Thanh Hóa:** Vũ Đức Lộc, 8C, THCS Lê Hữu Lập, Hậu Lộc; **Nghệ An:** Nguyễn Văn Mạnh, 9C, THCS Quỳnh Lương, Quỳnh Lưu; **Hà Tĩnh:** Vương Bằng Việt, 8/1, THCS Nam Hà; **Quảng Bình:** Hoàng Việt Triều, 10A1, THPT số 1, Quảng Trach, **Thừa Thiên - Huế:** Nguyễn Vũ Thanh Long, 8/1, THCS Chu Văn An, TP. Huế; **TP. Hồ Chí Minh:** Nguyễn Xuân Đạt, 10A1, THPT Bùi Thị Xuân; **Bình Định:** Lý Viễn Trường, 9A4, THCS Ngô Mây, Phù Cát, v.v...

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T8/324. Gọi r_a, r_b, r_c lần lượt là các bán kính đường tròn bàng tiếp góc A, B, C của tam giác ABC . Chứng minh rằng:

$$r_a \sin(A/2) + r_b \sin(B/2) + r_c \sin(C/2) \leq \frac{r_a^3 + r_b^3 + r_c^3}{6} \left(\frac{1}{r_a^2} + \frac{1}{r_b^2} + \frac{1}{r_c^2} \right) (*)$$

Lời giải. Gọi α, β, γ lần lượt là số đo các góc A, B và C của tam giác ABC . Xét tam giác DEF có



$$\hat{D} = \frac{1}{2}(\beta + \gamma),$$

$$\hat{E} = \frac{1}{2}(\gamma + \alpha),$$

$$\hat{F} = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$$

Chẳng hạn, các tia phân giác trong AD, BE, CF lần lượt cắt đường tròn ngoại tiếp ΔABC tại D, E, F thì ΔDEF thỏa mãn điều kiện đó. Trên các cạnh EF, FD, ED lần lượt đặt các vectơ đơn vị:

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{EF}}{EF}, \vec{e}_2 = \frac{\vec{FD}}{FD}, \vec{e}_3 = \frac{\vec{DE}}{DE}, \text{ thế thì ta có:}$$

$$\cos(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = -\cos F, \cos(\vec{e}_2, \vec{e}_3) = -\cos D,$$

$$\cos(\vec{e}_3, \vec{e}_1) = -\cos E.$$

Bây giờ xuất phát từ việc xét vectơ

$$\frac{1}{r_a} \vec{e}_1 + \frac{1}{r_b} \vec{e}_2 + \frac{1}{r_c} \vec{e}_3, \text{ ta được}$$

$$\left(\frac{1}{r_a} \vec{e}_1 + \frac{1}{r_b} \vec{e}_2 + \frac{1}{r_c} \vec{e}_3 \right)^2 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{r_a^2} + \frac{1}{r_b^2} + \frac{1}{r_c^2} + 2 \left(\frac{1}{r_b r_c} \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 + \frac{1}{r_c r_a} \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_1 + \frac{1}{r_a r_b} \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 \right) \geq 0 (1)$$

$$\frac{1}{r_b r_c} \cos D + \frac{1}{r_c r_a} \cos E + \frac{1}{r_a r_b} \cos F \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_a^2} + \frac{1}{r_b^2} + \frac{1}{r_c^2} \right) \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow r_a \sin \frac{A}{2} + r_b \sin \frac{B}{2} + r_c \sin \frac{C}{2} \leq \frac{1}{2} r_a r_b r_c \left(\frac{1}{r_a^2} + \frac{1}{r_b^2} + \frac{1}{r_c^2} \right) \quad (3)$$

Mặt khác, theo BĐT Cô-si, ta có :

$$r_a r_b r_c \leq \frac{1}{3} (r_a^3 + r_b^3 + r_c^3) \quad (4)$$

Cuối cùng, đối chiếu (3) và (4) ta thu được BĐT (*) cần tìm.

Đẳng thức ở (*) xảy ra khi và chỉ khi đẳng thức xảy ra đồng thời ở (1) và (4), nghĩa là khi và chỉ khi :

$$\begin{cases} \frac{1}{r_a} e_1 + \frac{1}{r_b} e_2 + \frac{1}{r_c} e_3 = \vec{0} \\ r_a = r_b = r_c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{S}{p-a} = \frac{S}{p-b} = \frac{S}{p-c} \\ \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 = \vec{0} \end{cases}$$

trong đó $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $2p = a+b+c$, $S = S_{ABC}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=b=c \\ \Delta DEF \text{ là đều} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{A} = \hat{B} = \hat{C} \\ \hat{D} = \hat{E} = \hat{F} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ Tam giác ABC là đều.

Chú thích : Thực ra, khi tam giác ABC là đều thì kéo theo DEF cũng là đều và ngược lại (vì $a = b = c \Leftrightarrow r_a = r_b = r_c \Leftrightarrow \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 = \vec{0} \Leftrightarrow DE = EF = FD$).

Nhận xét. 1) Trong lời giải trên đây chúng ta chỉ sử dụng có hai BĐT cơ bản : $\sqrt{2} \geq 0$ và BĐT Cô-si giữa trung bình cộng và trung bình nhân của ba số dương. Chính vì vậy mà lời giải được gọn gàng, sáng sủa. Phân tích kĩ hơn nữa lời giải này chúng ta thấy rằng nếu thay số đo của các góc A, B và C bởi các số thực $2x, 2y, 2z$ thỏa mãn $x + y + z = \frac{\pi}{2}$ và thay r_a, r_b, r_c bởi các số dương α, β, γ tùy ý thì cũng thu được BĐT (*) có dạng :

$$\alpha \sin x + \beta \sin y + \gamma \sin z \leq \frac{1}{6} (\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3) \left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2} \right)$$

2) Đa số các bạn không biết sử dụng công cụ vectơ thành thục tính toán quá công kềnh, phức tạp (do sử dụng quá nhiều hệ thức hoặc BĐT lượng giác trong hình tam giác, hoặc nhiều BĐT đại số khác như BĐT Trê-bư-sep chẳng hạn).

Đặc biệt bạn Nguyễn Văn Hải, 12G, THPT Nghĩa Đàn, Nghệ An đã sử dụng công cụ vectơ vào xét trực tiếp

tam giác ABC nên lời giải vừa gọn gàng, vừa đẹp nữa. Trước hết, bạn Hải chứng minh mệnh đề sau : Giả sử A, B và C là các góc của một tam giác và x, y, z là ba số dương tùy ý. Thế thì ta có BĐT sau :

$$2yz \cos A + 2zx \cos B + 2xy \cos C \leq x^2 + y^2 + z^2 \quad (**)$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x : y : z = BC : CA : AB$.

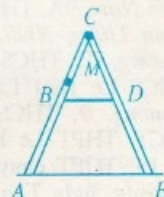
Gọi $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ lần lượt là vectơ đơn vị của các cạnh BC, CA, AB rồi từ BĐT $(x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3)^2 \geq 0$ ta dễ dàng thu được BĐT (**) vừa nêu ở trên. Tiếp đó, từ (**), bạn Hải thu được BĐT (*) cần tìm bằng cách thay x, y, z lần lượt bởi $\frac{\sqrt{r_a r_b r_c}}{r_a}, \frac{\sqrt{r_a r_b r_c}}{r_b}, \frac{\sqrt{r_a r_b r_c}}{r_c}$, sau đó áp dụng BĐT Cô-si (4).

3) Ngoài bạn Hải, các bạn sau đây có lời giải tương đối gọn gàng :

Hùng Yên : Bùi Quang Huy, Vũ Thanh Xuân, 10 Toán, Lương Thái Hưng, Nguyễn Duy Lợi, Vũ Mạnh Tuấn, 11Toán, THPT chuyên Hùng Yên ; **Bắc Giang :** Hoàng Minh Tuấn, 10A, THPT NK Ngô Sĩ Liên, Phạm Văn Trường, 11A10, THPT chuyên ban Ngô Sĩ Liên ; **Phú Thọ :** Đinh Đức Thành, 12A1, THPT chuyên Hùng Vương, Việt Trì ; **Thanh Hóa :** Nguyễn Lưu Bách, 8C, THCS Lê Hữu Lập, Hậu Lộc, Nguyễn Bá Hùng, 10B3, THPT Như Thanh ; **Nghe An :** Nguyễn Đức Tùng, 11A1, PTCT-T, ĐH Vinh, Nguyễn Ngọc Cường, 12A1, THPT chuyên Phan Bội Châu

NGUYỄN ĐĂNG PHÁT

Bài L1/324. Một thang gấp hình chữ A, độ dài hai nhánh $CA = CE = 2,5m$, với C là một bản lề. Buộc hai trung điểm B của CA và D của CE bằng một sợi dây $BD=0,7m$. Một người khối lượng $m = 60kg$ đứng tại bậc thang M ($CM = 1m$). Hãy tính



a) Lực căng của sợi dây BD

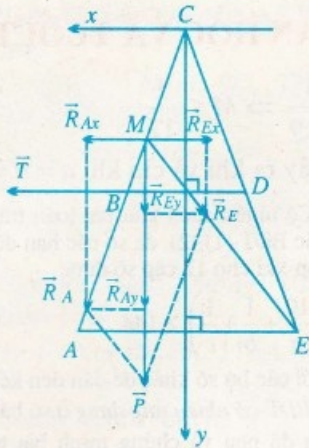
b) Các lực $\vec{P}_A$ và $\vec{P}_E$ do mặt sàn tác dụng lên các chân thang A và E . Cho biết $g = 10m/s^2$, mặt sàn AE nằm ngang. Bỏ qua ma sát giữa mặt sàn và các chân thang A, E và ma sát tại C .

Lời giải. Xem khối lượng thang không đáng kể (để bài không cho số liệu). Phân tích trọng lực $\vec{P}$ ($P = mg$) của người ra hai thành phần $\vec{R}_A$ theo phương MA và $\vec{R}_E$ theo phương ME thì : $\vec{P} = \vec{R}_A + \vec{R}_E$ (1).

Chiếu (1) lên hai trục Cx và Cy , tìm được :

$$R_{Ax} = -R_{Ex} \quad (2)$$

$$\text{và } P = R_{Ay} + R_{Ey} \quad (3)$$



Để hệ cân bằng, ta còn có phương trình mômen. Xét mômen đối với trục qua C vuông góc với mặt phẳng hình vẽ. Từ đó tìm được :

$$R_{Ay} = 420(\text{N}) ; R_{Ey} = 180(\text{N}) \text{ và } R_{Ax} = R_{Ay} \tan \frac{C}{2} = 122,5(\text{N}), R_{Ex} = -R_{Ax} = -122,5(\text{N})$$

Do đó : $R_A = 437,5(\text{N})$ và $R_E = 217,7(\text{N})$.

Xét lực căng T của dây BD, ta có $T = 2R_{Ax} = 245(\text{N})$.

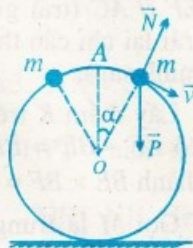
Như vậy các lực $\vec{P}_A$ và $\vec{P}_E$ do một mặt sàn tác dụng lên các chân thang A và E có hướng tương ứng theo chiều từ A đến C và từ E đến M, và có độ lớn tương ứng là $P_A = R_A = 437,5(\text{N})$ và $P_E = R_E = 217,7(\text{N})$.

Nếu khối lượng của thang đáng kể, và giả sử mỗi nhánh có khối lượng m_0 thì các thành phần R_{Ay} (của $\vec{R}_A$) và R_{Ey} (của $\vec{R}_E$) được cộng thêm P_0 ($P_0 = m_0 g$).

Nhận xét. Vì các bài gửi đến đều xem là $\vec{P}_A$ và $\vec{P}_E$ có hướng vuông góc với mặt sàn nên dẫn đến kết quả tính toán sai.

MAI ANH

Bài L2/324. Hai hạt cườm giống nhau, mỗi hạt có khối lượng m được luồn vào một vòng mảnh, cứng có khối lượng M . Vòng được đặt thẳng đứng trên mặt phẳng nằm ngang. Hai hạt cườm bắt đầu trượt không ma sát, không vận tốc đầu từ điểm cao nhất của vòng.



a) Xác định lực do mỗi hạt cườm tác dụng lên vòng khi chúng ở vị trí mà bán kính nối vật với tâm vòng tròn hợp với phương thẳng đứng một góc α .

b) Tìm điều kiện $\frac{M}{m}$ để vòng có thể nảy lên.

c) Giả sử điều kiện ở câu b được thỏa mãn. Hãy xác định góc α khi vòng bắt đầu nảy lên.

Lời giải. Mỗi hạt cườm (hạt cườm bên phải chẳng hạn, xem hình vẽ) chịu tác dụng của trọng lực $\vec{P}$ ($P = mg$) và phản lực $\vec{N}$ của vòng. Áp dụng định luật II Niu-tơn và định luật bảo toàn cơ năng ta có :

$$P \cos \alpha - N = \frac{mv^2}{R} \quad (1) ; \quad \frac{mv^2}{2} = mgR(1 - \cos \alpha) \quad (2)$$

Từ đó rút ra : $N = mg(3 \cos \alpha - 2)$ (3). Như vậy mỗi hạt cườm tác dụng lên vòng một lực đặt tại tâm O, có hướng theo chiều từ m đến O và có độ lớn $N' = -N = mg(2 - 3 \cos \alpha)$ (4)

Hợp lực do hai hạt cườm tác dụng lên vòng hướng thẳng đứng xuống dưới và có độ lớn tác dụng lên vòng hướng thẳng đứng xuống dưới và có độ lớn bằng $2N' \cos \alpha = mg \cos \alpha (2 - 3 \cos \alpha)$. Để vòng có thể nảy lên thì phải có : $2N' \cos \alpha \geq Mg$ (5) $\Rightarrow 4mg \cos \alpha - 6m \cos^2 \alpha \geq Mg$.

Xét trường hợp giới hạn :

$$6 \cos^2 \alpha - 4 \cos \alpha + \frac{M}{m} = 0 \quad (6)$$

Để phương trình này có nghiệm thì :

$$\Delta' = 4 - 6 \frac{M}{m} \geq 0 \Rightarrow \frac{M}{m} \leq \frac{2}{3} \quad (7)$$

Từ phương trình (6) tìm được : $\cos \alpha =$

$$1 + \frac{\sqrt{1 - \frac{3M}{2m}}}{3} \quad (\text{loại nghiệm } \cos \alpha = \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{3M}{2m}}}{3})$$

Nhận xét. Các bạn có lời giải đúng :

Vinh Phúc : Nguyễn Đăng Thành, Nguyễn Thị Phương Dung, 11A3, Hoàng Thị Hồng Hạnh, 12A3, THPT chuyên Vinh Phúc; **Bắc Giang :** Dương Trung Hiếu, 11B, THPT NK Ngô Sĩ Liên ; **Hà Nội :** Bùi Phi Anh, 11 Lí, THPT Hà Nội - Amsterdam , Hoàng Đức Thành, 10A, THPT chuyên Lí, ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội ; **Thái Nguyên :** Chu Tuấn Anh, 10 Lí, THPT chuyên Thái Nguyên ; **Hải Dương :** Lê Hoàng Dũng, 10 Lí, THPT Nguyễn Trãi ; **Hà Tây :** Lê Đức Hải, 12PT2, THPT chuyên Nguyễn Huệ ; **Hưng Yên :** Phạm Quốc Việt, 11 Lí, THPT chuyên Hưng Yên ; **Đắk Lắk :** Nguyễn Chí Linh, 11A, THPT Phan Bội Châu, Krông Năng.

MAI ANH

CUỘC THI KỈ NIỆM 40 NĂM TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Bài T7/THCS. Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện

$$6\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) \leq 1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

Chứng minh rằng

$$\frac{1}{10a+b+c} + \frac{1}{a+10b+c} + \frac{1}{a+b+10c} \leq \frac{1}{12}$$

Lời giải. Từ $\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{3}\right)^2 \geq 0$

$$\text{có } 6\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) \geq 4\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) - 2.$$

Từ đó và giả thiết

$$6\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) \leq 1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \text{ suy ra}$$

$$4\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + 3 \text{ hay } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq 1 \quad (1)$$

Từ (1) và BĐT

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9 \text{ ta có}$$

$$a+b+c \geq 9 \quad (2)$$

Sử dụng BĐT $\frac{4}{x+y} \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ ta có

$$\frac{4}{10a+b+c} = \frac{4}{6a+(4a+b+c)} \leq \frac{1}{6a} + \frac{1}{3a+(a+b+c)} \leq$$

$$\frac{1}{6a} + \frac{1}{12a} + \frac{1}{4(a+b+c)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{10a+b+c} \leq \frac{1}{16a} + \frac{1}{16(a+b+c)}.$$

Tương tự có

$$\frac{1}{a+10b+c} \leq \frac{1}{16b} + \frac{1}{16(a+b+c)}$$

$$\frac{1}{a+b+10c} \leq \frac{1}{16c} + \frac{1}{16(a+b+c)}$$

Cộng theo từng vế BĐT trên có

$$M = \frac{1}{10a+b+c} + \frac{1}{a+10b+c} + \frac{1}{a+b+10c} \leq \frac{1}{16}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + \frac{3}{16(a+b+c)}.$$

Áp dụng (1), (2) vào BĐT trên được

$$M \leq \frac{1}{16} + \frac{3}{16 \cdot 9} \Rightarrow M \leq \frac{1}{12}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 3$.

Nhận xét. 1) Có nhiều cách giải bài toán trên. Chẳng hạn sau khi có các BĐT (1), (2), đa số các bạn đã sử dụng BĐT Bu-nhi-a-côp-xki cho 12 cặp số được

$$(10a+b+c)\left(\frac{10}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 144$$

và xét tương tự với các bộ số khác để dẫn đến kết quả.

(Xem bài Một BĐT có nhiều ứng dụng ở số báo này).

2) Một số bạn đã nêu và chứng minh bài toán tổng quát:

Cho các số thực dương $a_1, a_2, \dots, a_n$ thỏa mãn

$$2n\left(\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \dots + \frac{1}{a_n^2}\right) \leq 1 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}$$

Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{x_1 a_1 + a_2 + \dots + a_n} + \frac{1}{a_1 + x_2 a_2 + \dots + a_n} + \dots + \frac{1}{a_1 + \dots + a_{n-1} + x_n a_n} \leq \frac{1}{x_1 + x_2 + \dots + x_n}$$

trong đó $n \geq 2, x_i (i = 1, 2, \dots, n)$ là các số dương.

VIỆT HẢI

Bài T8/THCS. Cho tam giác ABC vuông tại A với $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Một đường thẳng đi qua B cắt đường thẳng AC tại D và cắt đường tròn tâm A bán kính AC tại E và F . Chứng minh rằng

$$\left| \frac{1}{BE} - \frac{1}{BF} \right| = \frac{1}{BD}$$

Lời giải. Ta cần chứng minh

$$\frac{|BF - BE|}{BE \times BF} = \frac{1}{BD} \quad (1)$$

Vì $AB < AC$ nên B nằm trong đường tròn tâm A bán kính AC . Nếu $BE = BF$ thì $EF \perp AB$ nên $EF \parallel AC$ (trái giả thiết). Giả sử $BF > BE$ (nếu trái lại chỉ cần thay đổi chữ E và F trong chứng minh sau).

Lấy điểm K trên tia FB sao cho $FK = BE$. Ta có $BF - BE = BK$ và $AK = AB$. Khi đó (1) trở thành $BE \times BF = BD \times BK$ (2)

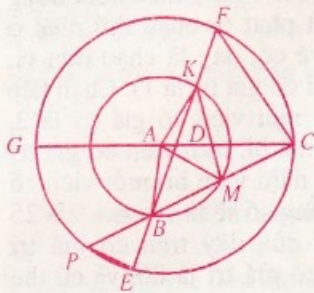
Gọi M là trung điểm của BC , BC cắt đường tròn tại P , CA cắt đường tròn tại G . Từ giả thiết có $\widehat{APC} = \widehat{ACP} = 30^\circ$, $\widehat{ABC} = 60^\circ = \widehat{APB} + \widehat{BAP}$, suy ra $\widehat{APC} = \widehat{BAP} = 30^\circ$. Để thấy

$AM = BM = CM = AB = AK = BP$ nên B, M, K nằm trên đường tròn tâm A (3)

Để chứng minh (2), xét các trường hợp :

1) Nếu D trùng với C thì EF trùng với PC và $BD = BC$ nên (2) trở thành $BP \times BC = BC \times BK$ mà theo (3), $CM = BP$, điểm K trùng với M nên (2) được chứng minh.

Nếu D trùng G thì chứng minh tương tự.



2) Nếu D nằm trong đoạn CG . Ta thấy $\triangle BEP \sim \triangle BCF$. Suy ra $\frac{BE}{BP} = \frac{BC}{BF}$ hay $BE \times BF = BC \times BP$.

Từ (3), $BP = BM$ nên (2) $\Leftrightarrow BC \times BM = BD \times BK$ (4)

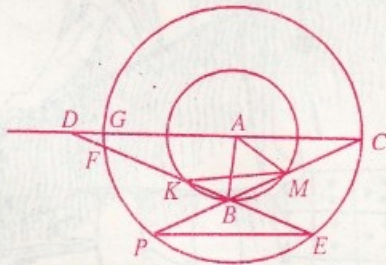
Xét $\triangle ABE$ và $\triangle ABF$ có AB chung, $AE = AF$ và $BF > BE$ nên $\widehat{BAF} > \widehat{BAE}$ hay $\widehat{ABF} < \widehat{ABE}$ (5)

Vì $\widehat{BAD} = 90^\circ$ nên B, E nằm cùng phía, B, F khác phía đối với CG .

Ta có $\widehat{BKM} = \frac{1}{2} \widehat{BAM} = 30^\circ = \widehat{BCA}$ nên $\triangle BKM \sim \triangle BCD$.

Suy ra $\frac{BM}{BK} = \frac{BD}{BC}$ tức có (4) nghĩa là có (1).

3) Nếu D nằm ngoài đoạn CG . Tương tự như trên có (5) và cần chứng minh (4). Từ (5) suy ra F nằm giữa B và D . Ta có $\widehat{BKM} = \widehat{BCD}$ (cùng bằng



hoặc cùng bù với $\frac{1}{2} \widehat{BAM}$) nên $\triangle BKM \sim \triangle BCD$,

suy ra $\frac{BM}{BK} = \frac{BD}{BC}$ tức là có (4), suy ra (1).

Nhận xét. Nhiều bạn không chia các trường hợp hoặc chỉ xét $BE < BF$, $BE > BF$ nên chưa chứng minh đủ các trường hợp.

VŨ KIM THUY

Bài T7/THPT. Tìm số thực c lớn nhất thỏa mãn điều kiện : với mọi cặp số nguyên dương m, n luôn tìm được số thực x sao cho

$$\sin(mx) + \sin(nx) \geq c$$

Lời giải. Với mỗi cặp số nguyên dương (m, n) đặt $f(m, n) = \max_{x \in \mathbb{R}} (\sin(mx) + \sin(nx))$

Để thấy $f(m, n) = f\left(\frac{m}{d}, \frac{n}{d}\right)$ nếu $(m, n) = d$ nên ta có thể giả thiết $(m, n) = 1$ và $m \geq n$ (do vai trò bình đẳng của m, n).

Nhận xét 1. $f(m, n) \geq 1 + \cos\left(\frac{\pi}{m}\right)$

Chứng minh : Do $(m, n) = 1$ nên với mọi số nguyên s tồn tại $k, q \in \mathbb{Z}$ sao cho $s = qm - kn$

Từ tính chất này, ta tìm được $k, q \in \mathbb{Z}$ sao cho

$$-2 - m + n \leq 4s \leq 2 - m + n$$

hay $|m - n + 4(qm - kn)| \leq 2$.

Chọn $x = \frac{(4k+1)\pi}{2m}$ thì $\sin(mx) = 1$ và

$$\sin(nx) = \cos\left(\frac{(m-n)+4(qm-kn)\pi}{2m}\right) \geq \cos\left(\frac{\pi}{m}\right).$$

Vậy $f(m, n) \geq 1 + \cos\left(\frac{\pi}{m}\right)$.

Nhận xét 2: $f(3, 1) = \frac{8\sqrt{3}}{9}$.

Thật vậy $\sin 3x + \sin x = 4\sin x - 4\sin^3 x \leq$

$$4\sqrt{\sin^2 x (1 - \sin^2 x)^2}$$

$$= 8\sqrt{\sin^2 x \left(\frac{1 - \sin^2 x}{2}\right) \left(\frac{1 - \sin^2 x}{2}\right)} \leq 8\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^3}$$

$$= \frac{8\sqrt{3}}{9}. \text{ Đẳng xảy ra khi } \sin x = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Trở lại bài toán ta chứng minh

$c = f(3, 1) = \frac{8\sqrt{3}}{9}$ là giá trị cần tìm.

Thật vậy : Nếu $m \geq 4$ thì theo nhận xét 1

$$f(m, n) \geq 1 + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) > c. \text{ Lại có}$$

$$f(3, 1) = \frac{8\sqrt{3}}{9} = c, f(3, 2) \geq \sin \frac{3\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{2} > c;$$

$$f(2, 1) \geq \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) > c \text{ và } f(1, 1) = 2 > c.$$

ĐẶNG HÙNG THẮNG

(Xem tiếp trang 23)



BÍ MẬT CỦA TOÁN HỌC INCA ĐÃ ĐƯỢC KHÁM PHÁ

Một nhà nghiên cứu Italia, với một thời gian kỉ lục đã khám phá ra điều bí mật của những yupana mà nhiều thế hệ các nhà khoa học đã mất ăn mất ngủ từ 500 năm nay : bí ẩn của toán học Inca (Inca : thuộc dòng vua Inca ở Pê-ru, trước lúc bị Tây Ban Nha xâm chiếm).

Nicolino De Pasquale (N.D. Pa-xca-lơ) là người Italia, 54 tuổi, đeo kính, tóc bạc, có vợ và hai con, có bằng kỹ sư hàng không, dạy ở trường trung học và đại học, sống ở Pescara (trên bờ biển Adriatique), không uống rượu, không hút thuốc, thích quanh quẩn ở nhà, ưa lao động.

Điều kì lạ trong việc này là De Pasquale đã khám phá ra điều bí mật đó mà không biết gì về Inca, không biết có điều bí mật đó, cả những mưu toan lâu đời của các nhà khoa học muốn hiểu rõ những máy (làm) tính bí hiểm, gọi là yupana, mà những người Tây Ban Nha, thế kỉ XVI, đi chinh phục châu Mỹ, đã ám chỉ đến.

Những yupana đó là những khối đá cỡ 30 x 20 centimet, để lộ nhiều khoang chạm khắc ở phần trên, trong các khoang đó có nhiều hạt trắng, xếp đặt có vẻ ngẫu nhiên. Một trong những yupana đó đã được trưng bày ở Palazzo Strozzi ở Florence, cho đến tận ngày 22.02.04, trong chương trình triển lãm những tài sản nghệ thuật của Pê-ru thời cổ. Chính Antonio Aimi, người phụ trách triển lãm, đã thông báo công khai sự giải được điều bí ẩn này. Đây không phải là một sự tình cờ vì chính ông ta có ý tưởng tập hợp kĩ sư giải mã các yupana.

Aimi giải thích rằng điều bí ẩn không phải cái gì khác mà là kết quả của một sự hiểu lầm do nhiều nguồn đều tin rằng người Inca tính toán theo hệ thập phân như chúng ta. Thực tế, Nicolino De Pasquale đã khám phá ra rằng họ đếm theo một hệ tứ thập phân (hệ cơ số 40) và đã chứng minh điều đó bằng cách sử dụng hai mẫu vật yupana bằng gỗ. Đơn giản nhất là 5 hoặc 6 dãy, mỗi dãy có 4 chậu đặt chồng lên nhau. Máy (làm) tính của người Inca hoạt động từ phải sang trái, xuất phát từ chậu thứ nhất ở dưới (theo một hình vẽ cổ, đây là chậu đơn vị, do đó chứa một viên bi có giá trị là 1). Chậu tiếp theo chứa hai viên bi, mỗi viên có giá trị là 2, chậu thứ ba chứa ba viên bi, mỗi viên có giá trị là 3, chậu thứ tư chứa năm viên bi, mỗi viên có giá trị là 5. Như vậy tổng số sẽ là $1 + 4 + 9 + 25 = 39$. Chậu bên phải của dãy trên có giá trị là 40, chậu bên cạnh có giá trị là 80, và cứ thế mãi. Nói cách khác, đây là một cấp số nhân. Cấp số này tái tạo một cách kì lạ, hiện tượng nhân các tế bào. Tuy nhiên có đặc điểm là không có số 0 và cùng một số có thể được viết theo nhiều cách khác nhau.

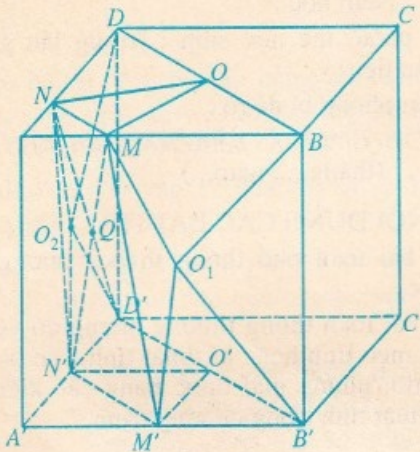


Hình vẽ của G. Poma de Ayala (Khoảng năm 1587). Lịch sử vương quốc Inca : hệ thống kế toán bằng những dây mảnh có nút (quipu). Thư viện nhà bảo tàng Lima, Pérou.

CUỘC THI KỶ NIỆM 40 NĂM...

(Tiếp trang 21)

Bài T8/THPT. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Một mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu nội tiếp hình lập phương tại Q và cắt các cạnh $AB, AD, A'B', A'D'$ của hình lập phương theo thứ tự tại M, N, M', N' . Chứng minh rằng $\widehat{MQN} + \widehat{M'QN'} = 90^\circ$.



Lời giải. Gọi O, O', O_1, O_2 là tâm của các hình vuông $ABCD, A'B'C'D', ABB'A', ADD'A'$. Để thấy O, O', O_1, O_2 là các tiếp điểm của mặt cầu nội tiếp hình lập phương với các mặt $(ABCD); (A'B'C'D'); (ABB'A'); (ADD'A')$. Từ đó suy ra

$$\begin{aligned} 2(\widehat{MQN} + \widehat{M'QN'}) &= (\widehat{MQN} + \widehat{M'QN'}) + (\widehat{MQN} + \widehat{M'QN'}) \\ &= [360^\circ - (\widehat{MQM'} + \widehat{NQN'})] + (\widehat{MON} + \widehat{M'O'N'}) \\ &= [360^\circ - (\widehat{MQM'} + \widehat{NQN'})] + [180^\circ - (\widehat{MOB} + \widehat{NOD})] + [180^\circ - (\widehat{M'O'B'} + \widehat{N'O'D'})] \\ &= 720^\circ - (\widehat{MO_1M'} + \widehat{NO_2N'}) - (\widehat{MO_1B} + \widehat{NO_2D}) - (\widehat{M'O_1B'} + \widehat{N'O_2D'}) \\ &= 720^\circ - (\widehat{MO_1M'} + \widehat{MO_1B} + \widehat{M'O_1B'}) - (\widehat{NO_2N'} + \widehat{NO_2D} + \widehat{N'O_2D'}) \\ &= 720^\circ - (360^\circ - \widehat{BO_1B'}) - (360^\circ - \widehat{DO_2D'}) \\ &= \widehat{BO_1B} + \widehat{DO_2D'} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ. \end{aligned}$$

Suy ra $\widehat{MQN} + \widehat{M'QN'} = 90^\circ$.

Nhân xét. Một số bạn chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho O là tâm của hình lập phương; Ox, Oy, Oz cùng phương với các vectơ $\overrightarrow{D'C'}, \overrightarrow{DD'}, \overrightarrow{A'D'}$, chứng minh được $\cos^2 \widehat{MQN} + \cos^2 \widehat{M'QN'} = 1$ từ đó suy ra kết quả. Lời giải theo hướng này cũng tương đối gọn.

NGUYỄN MINH HÀ

Phương pháp trên vẫn sử dụng được trong các tình huống tính toán, De Pasquale đều đưa ra được lời giải thích. Như vậy De Pasquale đã vượt qua các nhà nghiên cứu và các nhà nhân loại học của phương Tây. Đã có sự hoài nghi đến mức trong hơn hai năm, sự khám phá đó không được ai chú ý.

Nhưng De Pasquale đã đi đến khám phá như thế nào? Xin hãy cùng đọc những dòng ghi chép của ông về vấn đề này: "Ngày Noel, tôi nhận được một quà tặng là một quyển sách nói về những bí ẩn toán học, tôi liếc qua giữa hai cuộc nói chuyện ở nhà bà chị tôi ở Rome. Tôi thấy một *yupana* mà một người Tây Ban Nha vẽ ở thế kỷ XVI. Tôi suy nghĩ một chút rồi lấy một mảnh giấy và một cái bút chì và tôi làm vài phép tính. Mất bao lâu? Khoảng 40 phút. Tôi hoàn thành thắng lợi trước năm mới. Tôi lấy làm tiếc nếu đã quấy rầy người khác. Nhưng các phép tính là đúng, tôi cầu mong gì ở đây?"

NGUYỄN VĂN THIÊM

(theo bài của Toscana Oggi
trong Courier International 03.03.04)

ĐỌC LẠI CHO ĐÚNG

1) Trên THPT số 327 tháng 9 năm 2004 trong lời giải bài T6/THPT, trang 22, cột trái dòng 10, 11, 12 dưới lên đã biến đổi nhầm, xin sửa lại như sau:

$$\begin{aligned} &\dots \sum_{i=1}^n (1 + \overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{OA_i}) (1 + \overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{OA_{i+1}}) \\ &= n + MO^2 \cdot \sum_{i=1}^n \cos \left(\alpha + \frac{2(i-1)\pi}{n} \right) \cdot \cos \left(\alpha + \frac{2i\pi}{n} \right) \\ &= n + n \cdot \frac{MO^2}{2} \cdot \cos \frac{2\pi}{n} + \frac{MO^2}{2} \cdot \sum_{i=1}^n \cos \left(2\alpha + \frac{2(2i-1)\pi}{n} \right) = \\ &= n + n \cdot \frac{MO^2}{2} \cos \frac{2\pi}{n} \quad (1) \quad (\text{với } \alpha = (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OA_1})) \end{aligned}$$

2) Trong lời giải bài T2/322 THPT số 326 tháng 8 năm 2004 trang 14, cột phải dòng 17, 18 dưới lên có sự nhầm lẫn, xin sửa lại như sau:

Trên tia AM lấy $AD = 2 \cdot AM$. Ta có $\triangle ABM = \triangle DCM$ (cg) nên $AB = CD$ và $\widehat{BAM} = \widehat{CDM}$. Trong $\triangle ACD$ có $CD < AC$ nên $\widehat{CAD} < \widehat{CDA}$. Từ đó $\widehat{CAM} < \widehat{BAM}$. Vì $AB < AC$ thì $\widehat{ACM} < \widehat{ABM}$. Suy ra $\widehat{CAM} + \widehat{ACM} < \widehat{BAM} + \widehat{ABM}$ nên $\widehat{AMB} < \widehat{AMC}$.

Thành thật xin lỗi tác giả và bạn đọc.

THHT

TỔ CHỨC CUỘC THI GIẢI TOÁN TRÊN MÁY TÍNH KHOA HỌC SHARP QUA TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

**CÔNG TY CP XNK LÊ MINH - NHÀ PHÂN PHỐI CÁC SẢN PHẨM SHARP
HÂN HẠNH TÀI TRỢ CUỘC THI NÀY**

I. MỤC ĐÍCH CUỘC THI

• Cuộc thi giải toán trên máy tính bỏ túi nhằm động viên, tạo điều kiện và mở rộng phong trào rèn luyện kỹ năng tính toán cho học sinh, một trong những yêu cầu của nội dung giáo dục toán học trong trường phổ thông.

• Cuộc thi yêu cầu giải toán thực hành trên máy tính bỏ túi, đòi hỏi việc vận dụng toán học để thiết lập một dãy liên tiếp các bước tính toán hợp lý trên máy tính qua hình thức gửi thư. Điều này cũng góp phần phát hiện các học sinh có năng khiếu về thực hành kỹ năng tính toán.

• Cuộc thi tạo mối liên hệ giữa học sinh, giáo viên các vùng miền và để nhiều học sinh đọc và học toán qua báo Toán học và Tuổi trẻ.

II. THỂ LỆ CUỘC THI

1. Cứ hai tháng một lần, đề thi được đăng trên tạp chí Toán học và Tuổi trẻ. Có 5 bài dành cho Trung học Cơ sở và 5 bài dành cho Trung học Phổ thông. Thời gian nhận bài dự thi là trong 1 tháng tính từ ngày ra báo, không tính thêm điểm cho bài đến sớm. Đề thi bắt đầu đăng từ 11.2004.

2. Trường có từ 10 thí sinh tham gia trở lên và có xác nhận của Ban Giám hiệu thì được tham gia tính giải đồng đội.

3. Các máy tính khoa học phù hợp đều có thể được dùng. Khuyến khích sử dụng các máy SHARP EL-506W, EL-509W, EL-509WM đối với THPT và máy EL-500M đối với THCS.

III. ĐỐI TƯỢNG DỰ THI

1. Mọi học sinh đang học trong các trường THCS, THPT đều được tham gia.

2. Bài dự thi phải ghi đầy đủ (phía trên của tờ giấy) các thông tin sau :

Họ và tên : (Chữ in hoa)

Ngày tháng năm sinh :

Giới tính :

Nơi sinh :

Quê quán :

Học sinh lớp :

Trường (huyện, tỉnh) :

Năm học :

Bản photô thẻ học sinh : (trong lần gửi bài giải đầu tiên).

Ngoài phong bì để rõ :

DỰ THI GIẢI TOÁN BẰNG MÁY TÍNH BỎ TÚI
(tháng ..., năm...)

IV. NỘI DUNG CÁC BÀI THI

Các bài toán phổ thông thuộc chương trình cấp học

Các bài toán thông thường nhưng có yêu cầu cao về mẹo tính hoặc kỹ thuật tính, các bài toán dạng mới nhưng giải được bằng các kiến thức và kỹ thuật tính trong chương trình.

V. GIẢI THƯỞNG CUỘC THI

Sau hai tháng, kết quả được công bố trên tạp chí Toán học và Tuổi trẻ. Một số bài làm tốt sẽ được tặng thưởng. Tặng phẩm là các sản phẩm kỹ thuật tiên tiến của hãng SHARP.

Cuối năm học tính điểm qua các lần thi và trao giải cả năm học của cuộc thi.

• Giải thưởng cả năm học :

Giải nhất (5 giải): Mỗi giải trị giá 500.000 đồng.

Giải nhì (10 giải) : Mỗi giải trị giá 400.000 đồng.

Giải ba (15 giải) : Mỗi giải trị giá 300.000 đồng.

• Số lượng giải tập thể tùy thuộc chất lượng bài thi và số lượng HS dự thi của trường.

• Số giải cá nhân mỗi tỉnh, thành :

giải nhất ≤ 1 , giải nhất + giải nhì ≤ 3 ,
giải nhất + giải nhì + giải ba ≤ 7 , bằng khen
cho các thí sinh được điểm cao nhưng không
được giải.

VI. TỔ CHỨC CUỘC THI

Tạp chí THPT và các nhà toán học, chuyên viên thuộc Vụ Giáo dục Trung học, Viện Toán học, Viện Chiến lược và Chương trình Giáo dục sẽ ra đề và chấm thi.

Tạp chí THPT cấp giấy chứng nhận cho bạn đọc đoạt giải.

Công ty cổ phần xuất nhập khẩu Lê Minh, nhà phân phối độc quyền các sản phẩm SHARP hân hạnh tài trợ cho cuộc thi này.

KẾT QUẢ CUỘC THI OLYMPIC TOÁN SINGAPORE 2004 MỞ RỘNG CỦA HỌC SINH VIỆT NAM

VŨ KIM THỦY

Ngày 17 tháng 9 năm 2004 Hội Toán học Singapore đã công bố kết quả cuộc thi Olympic toán Singapore ngày 3.6.2004 (xem THPT số 326 tháng 8 năm 2004). Ngoài học sinh Singapore, có 296 thí sinh từ 25 trường của 5 nước Malaysia, Ấn Độ, Indônêxia, Thái Lan và Việt Nam tham gia ở độ tuổi Junior, 346 thí sinh từ 27 trường của 5 nước trên tham gia ở độ tuổi Senior.

Cuộc thi tại Việt Nam do Hội Toán học Hà Nội đăng cai tổ chức và học sinh Hà Nội dự thi. Mỗi đề thi có 10 câu trắc nghiệm và 25 câu phải viết lời giải bằng tiếng Anh, không được dùng máy tính.

Điểm bình quân của tất cả 5 nước là 6,8 ; điểm bình quân của Việt Nam là 11,2 (mỗi câu đúng tính là 1 điểm) ở độ tuổi Junior. Giải đúng 16 câu trở lên được Giải Vàng, từ 12 đến 15 câu

được Giải Bạc, từ 10 đến 11 câu được Giải Đồng và 9 câu đúng được Giải Khuyến khích (chiếm tỉ lệ tương ứng 1,4% ; 6,4% ; 10,8% và 61%).

Ở độ tuổi Senior điểm bình quân của tất cả các nước là 6,8 ; của Việt Nam là 17,4. Giải đúng từ 22 câu trở lên được Giải Vàng, 16 đến 21 câu được Giải Bạc, 13 đến 15 câu được Giải Đồng, 12 câu đúng được Giải Khuyến khích (chiếm tỉ lệ tương ứng 5,5% ; 17,1% ; 6,5% ; 5,2%)

Kết quả Việt Nam được 2 Giải Vàng, 3 Giải Bạc, 1 Giải Đồng ở độ tuổi Junior trên tổng số 9 học sinh dự thi ; 2 Giải Vàng, 6 Giải Bạc, 5 Giải Đồng, 2 Giải Khuyến khích ở độ tuổi Senior trên tổng số 20 học sinh dự thi.

Cụ thể như sau :

Junior Section (sinh sau 1.1.1990)

TT	Họ và tên	Trường	Số câu đúng	Giải
1	Phan Đức Toàn	Hà Nội - Amsterdam	22	Vàng
2	Nguyễn Thụy Hưng	Lê Quý Đôn	16	Vàng
3	Cao Ngọc Bảo Long	Giảng Võ	14	Bạc
4	Nguyễn Trần Bách	Trung Vương	14	Bạc
5	Đào Ánh Dương	Ngô Sĩ Liên	13	Bạc
6	Bạch Thế Phong	Hà Nội - Amsterdam	11	Đồng

Senior Section (sinh sau 1.1.1988)

1	Huỳnh Trung Anh	Hà Nội - Amsterdam	27	Vàng
2	Đỗ Bá Khoa	Hà Nội - Amsterdam	24	Vàng
3	Lê Trung Hiếu	Hà Nội - Amsterdam	20	Bạc
4	Trần Thị Minh Phương	Hà Nội - Amsterdam	19	Bạc
5	Nguyễn Huyền Anh	Hà Nội - Amsterdam	18	Bạc
6	Vương Nhật Linh	Trung Vương	18	Bạc
7	Nguyễn Thị Hồng Hạnh	THPT Chu Văn An	16	Bạc
8	Nguyễn Thị Ngọc	Hà Nội - Amsterdam	16	Bạc
9	Trịnh Thị Hồng Phương	THPT Chu Văn An	15	Đồng
10	Uông Tùng Lâm	Hà Nội - Amsterdam	15	Đồng
11	Lê Bá Cường	THPT Chu Văn An	14	Đồng
12	Hoàng Thị Phương Thảo	Hà Nội - Amsterdam	13	Đồng
13	Phạm Quỳnh Trang	Hà Nội - Amsterdam	13	Đồng
14	Trần Đặng Thu Hằng	Nguyễn Trường Tộ	12	Khuyến khích
15	Trịnh Thị Hải Sâm	Hà Nội - Amsterdam	12	Khuyến khích



Giải đáp :

HIỂU BIẾT VỀ THỦ ĐÔ - CÁC CON SỐ VÀ MẢNH BÌA

Hà Nội là kinh đô nước Việt từ năm **1010**
Toàn thành phố Hà Nội rộng **923 km²**
Có **5** huyện
Có **9** quận
Có **233** phường, xã, thị trấn
Dân số thành phố **2930600** (người)
Dân số nội thành **1800000** (người)
Số phố của khu phố cổ bảo tồn : **58** phố
Chiều dài sông Hồng phần qua Hà Nội là **30km**.
Hồ Tây rộng **466** ha (**4,66km²**)
Núi cao nhất (Chân Chim, huyện Sóc Sơn)
là **462m**
Tỉnh lỵ xa nhất cách Hà Nội **2080km** (Cà Mau)
Tỉnh lỵ gần nhất cách Hà Nội **11km** (Hà Đông, tỉnh Hà Tây)



Kết quả bài :

GIẢI PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC KHÔNG KHÓ !

(THTT số 324, tháng 6 năm 2004)

Nguyên nhân chính dẫn đến sai lầm là bạn đó
đã không xét trường hợp $\cos \frac{x}{2} = 0$ trước khi
đặt ẩn phụ $t = \tan \frac{x}{2}$ và do đó dẫn đến làm mất

Năm ra đời trường đại học đầu tiên **1075** (Quốc Tử Giám)

Nhận xét. Ít bạn tham gia làm bài này. Có lẽ do chưa chắc chắn lắm về câu trả lời nên không gửi.

Bạn **Nguyễn Chung**, học lớp 12A1, THPT Triệu Sơn II, Triệu Sơn, **Thanh Hóa** giải rất tốt câu này.

Các bạn khác có lời giải đúng : **Trần Quốc Toàn**, 12A2, THPT Nguyễn Văn Trỗi, Can Lộc, **Hà Tĩnh**, **Nguyễn Duy Hưng**, 9H, THCS Lê Quý Đôn, **Hoàng Duy Hưng**, 12A2, THPT Dương Xá, Gia Lâm, **Dương Thị Bình Minh**, 10A3, THPT Yên Hòa, Hà Nội ; **Đỗ Phương Thúy**, 11B1, THPT Lê Quý Đôn, **Điện Biên**; **Phạm Văn Minh**, GV trường THPT Cẩm Thủy II, **Thanh Hóa**.

VŨ ĐO QUAN

QUÁ KHỨ VÀ TƯƠNG LAI

Bạn đang có trong tay số báo 328, tròn 40 năm sau ngày ra số 1 Toán học và Tuổi trẻ 15.10.1964. Mười năm nữa Toán học và Tuổi trẻ tròn 50 tuổi.

1. Bạn biết những gì về tờ báo số 1 tháng 10 năm 1964 (có những bài thuộc chuyên mục gì, hình thức và số trang, ...)

2. Bạn hình dung, tưởng tượng đến 10.2014 tờ Toán học và Tuổi trẻ sẽ như thế nào ? (bao nhiêu trang, có những chuyên mục nào ? hình thức ra sao ? ...)

3. Bạn hãy viết một bức thư ngắn (một trang khổ A4) gửi cho bạn trẻ đọc tạp chí THTT năm 2014.

Số báo 330 tháng 12.2004 sẽ đăng giải đáp và tên các bạn được quà tặng.

BÍNH NAM HÀ

một họ nghiệm của PT đã cho. Ta phải xét hai trường hợp

a) Với $\cos \frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) ta thấy đây là một họ nghiệm của PT.

b) Với $\cos \frac{x}{2} \neq 0$, giải như cách đã trình bày, cuối cùng ta kết luận PT ban đầu có hai họ nghiệm : $x = \pi + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) ;

$$x = 2\alpha + 2m\pi \quad (m \in \mathbb{Z}) \quad \left(\text{với } \tan \alpha = \frac{1}{2} \right)$$

Nhận xét. Nhiều bạn đã chỉ đúng chỗ thiếu sót trong lời giải của bạn học sinh đó, đồng thời đưa thêm một số cách giải khác gọn hơn cho bài toán. Năm bạn sau có đáp án tốt hơn cả : **Nguyễn Văn Ngọc**, 10 Lí, THPT chuyên Bắc Ninh, **Bắc Ninh** ; **Bùi Phi Anh**, 11 Lí, THPT Hà Nội - Amsterdam, **Hà Nội** ; **Trịnh Quốc Bảo**, 11A4, THPT Hồng Quang, TP. Hải Dương, **Hải Dương** ; **Nguyễn Đức Toàn**, 10T, THPT Hà Huy Tập, TP Vinh, **Nghệ An** ; **Hà Xuân Thiên Hương**, 10T, THPT Lương Thế Vinh, **Đồng Nai**.

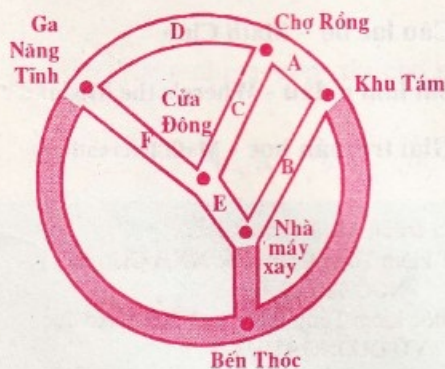
NGỌC HIỂN



Giải đáp :

CÙNG RA GA

Bài toán hỏi hai bạn có bao nhiêu cách cùng đi, yêu cầu của bài toán là điểm bắt đầu được tính từ nhà Tùng ở khu Tám. Vì không quay lại nhà Nam nên các đoạn đường Khu Tám - Bến Thóc, Bến Thóc - Nhà máy xay, Bến Thóc - Ga Năng Tĩnh đều không được đi. Vì không lặp lại bất cứ đoạn đường nào nên tất cả chỉ có 4 cách hai bạn cùng đi từ nhà Tùng ra ga như sau :



- Khu Tám $\rightarrow A \rightarrow D \rightarrow Ga$
- Khu Tám $\rightarrow A \rightarrow C \rightarrow F \rightarrow Ga$

AI ĐÚNG AI SAI ?

Hai bạn A, B học lớp 7 cùng giải bài toán dưới đây :

Tìm các số x, y thỏa mãn dãy tỉ số sau :

$$\frac{5x+3}{9} = \frac{3y-8}{5} = \frac{5x+9y-21}{8x}$$

Bạn A sử dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau xét phân số bên trái và phân số bên phải được :

$$\frac{3y-8}{5} = \frac{5x+9y-21-(5x+3)}{8x-9} = \frac{9y-24}{8x-9}$$

từ đó có $8x-9=15$ nên $x=3$, thay vào đẳng

thức ở đề bài được $\frac{18}{9} = \frac{3y-8}{5}$, suy ra $y=6$.

- Khu Tám $\rightarrow B \rightarrow E \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow Ga$

- Khu Tám $\rightarrow B \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow Ga$

Nhận xét.

1. Đa số các bạn không đọc kỹ đầu bài, lại tính số cách đi từ Bến Thóc nên có nhiều cách hơn (!). Có bạn "tìm ra" tới 22 cách.

2. Các bạn có lời giải đúng bài này :

Bác Ninh : Nguyễn Mạnh Nhất, 10A1, THPT Thuận Thành 1 ; **Hải Dương :** Phạm Thế Thịnh, Đội 5, Tổng Buồng, Thái Thịnh, Kinh Môn ; **Hà Nội :** Trịnh Trọng Thanh, 10A, chuyên Lý, ĐHKHTN ; **Hà Nam :** Nguyễn Kim Chi, số 2, ngõ 8, Quy Lưu, TX Phú Lý ; **Nam Định :** Trần Thu Trang, 12C, THPT Lương Thế Vinh, Vụ Bản ; **Thanh Hóa :** Trương Mỹ Hạnh, 9C, THCS Lê Hữu Lập, Hậu Lộc ; **Nghe An :** Ngô Đức Công, 12A, THPT Thanh Chương 1 ; **Quảng Ngãi :** Đặng Đình Nhất, 12 Lý, THPT chuyên Lê Khiết.

VŨ THỦY

BÍ QUYẾT THẮNG CUỘC

Hai bạn Mão và Dẫn cùng tham gia trò chơi toán học sau :

Trên bảng có viết sẵn hai đa thức biến x là

$$P(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$$

$$\text{và } Q(x) = x + g.$$

Mỗi người đến lượt mình chỉ được thay một trong các chữ a, b, c, d, e, f, g bởi một số tùy thích. Khi đã thay hết các chữ a, b, c, d, e, f, g bởi các số, nếu đa thức $P(x)$ chia hết cho đa thức $Q(x)$ thì người đi cuối cùng thắng cuộc, còn nếu đa thức $P(x)$ không chia hết cho đa thức $Q(x)$ thì người đi cuối cùng thua cuộc. Mão là người đi trước.

Bạn hãy giúp Mão một bí quyết đơn giản để Mão chắc chắn thắng cuộc trong trò chơi này.

NGUYỄN ĐỨC TẤN,
(TP Hồ Chí Minh)

Bạn B cũng sử dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau biến đổi

$$\frac{5x+3}{9} = \frac{9y-24}{15} = \frac{5x+3+9y-24}{9+15} = \frac{5x+9y-21}{8x}$$

Lấy tử trừ tử và mẫu trừ mẫu của hai phân số đầu bên phải được dãy tỉ số $\frac{5x+3}{9} = \frac{9y-24}{15} = 0$,

$$\text{suy ra } x = -\frac{3}{5} \text{ và } y = \frac{8}{3}.$$

Hai bạn đều cho rằng mình làm không sai và tranh luận mãi chưa thôi. Bạn có thể làm trọng tài phân xử giúp không ?

VÂN KHANH
(Hà Nội)

Toán học và Tuổi trẻ

Mathematics and Youth

NĂM THỨ 41

Số 328 (10-2004)

Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội

ĐT - Fax : 04.5144272

Email : toanhocvt@yahoo.com

TRONG SỐ NÀY

- 1 **Dành cho Trung học Cơ sở – For Lower Secondary Schools**
Trần Quang Vinh – Một bất đẳng thức có nhiều ứng dụng
- 3 **Hướng dẫn giải đề thi tốt nghiệp THCS và xét tuyển vào trường THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP Đà Nẵng năm 2004**
- 4 **Đề thi tuyển sinh lớp 10 hệ THPT chuyên trường ĐHKHTN-ĐHQG Hà Nội năm 2004**
- 5 **Tìm hiểu sâu thêm toán học sơ cấp - Advanced Elementary Mathematics**
Trần Tuyết Thanh – Một bài toán về phân hoạch một tập hợp
- 7 **Thư từ bạn muôn nơi**
- 8 **Kết quả cuộc thi giải Toán và Vật lý trên tạp chí Toán học và Tuổi trẻ năm học 2003-2004**
- 10 **Tính toán cách nào ? How to Calculate ?**
Phạm Đăng Long - Một thuật toán khai triển nhanh tam thức Newton
- 12 **Đề ra kì này – Problems in This Issue**
T1/328, ..., T12/328, L1, L2/328.
- 14 **Giải bài kì trước – Solutions to Previous Problems.**
Giải các bài của số 324 và Cuộc thi kỉ niệm 40 năm THPT.
- 22 **Lịch sử toán học - History of Math**
Nguyễn Văn Thiêm – Bí mật của toán học Inca đã được khám phá
- 24 **Tổ chức cuộc thi giải toán trên máy tính khoa học SHARP qua tạp chí Toán học và Tuổi trẻ**
- 25 **Vũ Kim Thủy – Kết quả cuộc thi Olympic Toán Singapore 2004 mở rộng của học sinh Việt Nam**
- 26 **Câu lạc bộ – Math Club**
Sai lầm ở đâu - Where's the Mistake ?
- 27 **Giải trí toán học - Math Recreation**

Tổng biên tập :
NGUYỄN CẢNH TOÀN

Chịu trách nhiệm xuất bản :
Chủ tịch HĐQT kiêm Tổng Giám đốc NXB Giáo dục
NGÔ TRẦN ÁI
Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập NXB Giáo dục
VŨ DƯƠNG THỤY

Trưởng ban biên tập : NGUYỄN VIỆT HẢI

Thư kí Tòa soạn : VŨ KIM THỦY.

Biên tập : HỒ QUANG VINH.

Trị sự, Chế bản : VŨ ANH THỦY - NGUYỄN THỊ OANH.

Đại diện phía Nam : TRẦN CHÍ HIẾU, 231 Nguyễn Văn Cừ, Q. 5, Tp. Hồ Chí Minh.

ĐT : 08.8309049

ĐÓN ĐỌC THPT SỐ 329 (11/2004)

- Danh sách các bạn đoạt giải Cuộc thi Kỉ niệm 40 năm tạp chí Toán học và Tuổi trẻ và lời giải tiếp các bài cho THCS và THPT
- Thể lệ và đề thi giải toán trên máy tính bỏ túi SHARP
- Toán học cho thế kỉ XXI
- Hướng dẫn giải đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT chuyên ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội 2004
- Sử dụng khai triển nhị thức Newton để chứng minh bất đẳng thức

THTT

ISSN : 0866-8035

Chế bản tại Tòa soạn

Chỉ số : 12884

In tại Công ty CP in Diên Hồng, 187B Giảng Võ

Mã số : 8BT30M4

In xong và nộp lưu chiểu tháng 10 năm 2004

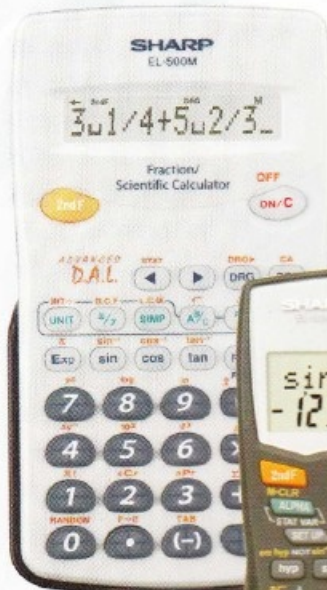
Giá : 3500 đồng

Ba nghìn năm trăm đồng

SHARP
SHARP CORPORATION OSAKA, JAPAN

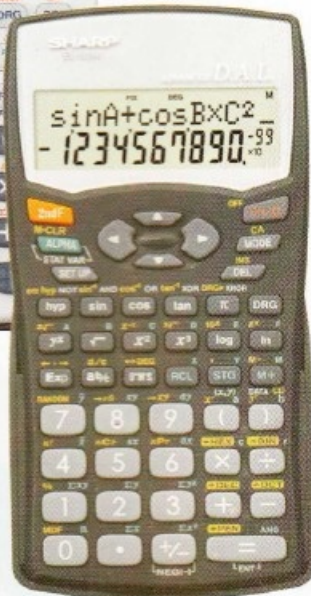
MAY TÍNH KHOA HỌC

CHẤT LƯỢNG, HIỆU QUẢ, TIẾT KIỆM HƠN
VỚI NHỮNG TÍNH NĂNG **VƯỢT TRỘI**



EL - 500M

- Có 131 chức năng.
- Màn hình hiển thị 11 số (Kết quả hiển thị 10+2 số).
- Chuyển đổi giữa phân số và số thập phân.
- Tính toán trên hỗn số, phân số và số thập phân.
- Tính phần trăm, lũy thừa, căn thức, thống kê.
- Tính Logarit, lượng giác, tổ hợp, chỉnh hợp.
- Thích hợp nhất cho học sinh cấp II.



EL - 509W

- Có 272 chức năng.
- Màn hình 2 dòng (Dòng trên hiển thị 12 số, dòng dưới hiển thị 10+2 số).
- Thích hợp nhất cho học sinh cấp III.
- Đầy đủ các chức năng của máy EL-500M.

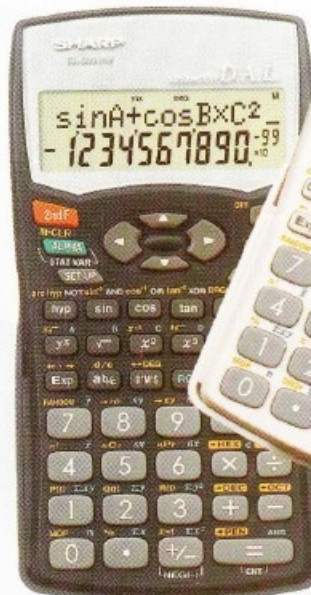
Bổ xung các chức năng sau:

- Giải phương trình hồi quy.
- Tính toán có sử dụng ô nhớ.
- Tính số ngẫu nhiên.
- Tính đạo hàm, tích phân, thống kê.



EL - 9900

- Màn hình hiển thị được 132 x 64 điểm ảnh.
- Có 827 chức năng.
- Khả năng lưu trữ 64 KB.
- Có đầy đủ các chức năng của máy EL-9400.
- Có chức năng vẽ đồ thị.
- Bàn phím với 2 chế độ (chuyên sâu & cơ bản).
- Thích hợp cho nghiên cứu và giảng dạy.



EL - 509WM

- Màn hình 2 dòng (Dòng trên hiển thị 12 số, dòng dưới hiển thị 10+2 số).
- Thích hợp nhất cho học sinh cấp III.
- Đầy đủ các chức năng của máy EL-509W.

Bổ xung các chức năng sau:

- Giải phương trình bậc I, II, III.
- Giải phương trình hồi quy.
- Tính toán có sử dụng ô nhớ.
- Tính số ngẫu nhiên.
- Tính đạo hàm, tích phân, thống kê.



ZQ - P10

- Màn hình hiển thị 12 cột & 3 dòng.
- Khả năng lưu trữ 96 KB tương đương 1,500 tên và số điện thoại.



EL - 506W

- Màn hình 2 dòng (Dòng trên hiển thị 12 số, dòng dưới hiển thị 10+2 số).
- Có đầy đủ chức năng của EL-509W.
- Bổ xung các chức năng sau:**
- Giải phương trình bậc I, II, III.
- Giải hệ phương trình bậc I với 2 và 3 ẩn.
- Tính toán với số phức, ma trận, vector, trong dạng đại số và lượng giác.
- Thích hợp nhất cho SV Đại học.



- Toàn bộ máy tính SHARP chính hiệu đều được dán tem chống hàng giả. Tem do Trung tâm kỹ thuật tài liệu nghiệp vụ - Bộ Công An phát hành.
- Máy tính SHARP chính hiệu được bảo hành 1 năm.

Đơn vị Nhập khẩu & Phân phối duy nhất tại Việt Nam



CÔNG TY CỔ PHẦN XUẤT NHẬP KHẨU LÊ MINH
LEMINH IMPORT EXPORTATION JOINT STOCK COMPANY

VĂN PHÒNG TẠI HÀ NỘI

111A - Thụy Khuê - Quận Tây Hồ, Hà Nội
ĐT: 84.4.8474577 - Fax: 84.4.8474592
E-mail: limexhn@hn.vnn.vn

VĂN PHÒNG TẠI HỒ CHÍ MINH

164 Đường Cộng Hoà, P12, Quận Tân Bình, HCM
ĐT: 84.8.8116417 - Fax: 84.8.8424237
E-mail: limexhcm@hcm.vnn.vn

40 NĂM TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ



Với bạn đọc Vĩnh Long.



Với bạn đọc Thừa Thiên - Huế.



Với bạn đọc Hải Phòng.