

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC



TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

9 2004
SỐ 327

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG - NĂM THỨ 41
DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ
Trụ sở: 187 B Giảng Võ, Hà Nội. ĐT-Fax: (04) 5144272
Email: toanhocct@yahoo.com



KỶ NIỆM **50** NĂM GIẢI PHÓNG THỦ ĐÔ
MỪNG NĂM HỌC MỚI 2004 - 2005





TS. TRẦN ĐÌNH VIỆN sinh ngày 13.05.1936 tại xã Xuân Lâm, huyện Nam Đàn, tỉnh Nghệ An, tốt nghiệp ĐHSP Hà Nội 8.1957, về dạy toán tại trường cấp 3 Huỳnh Thúc Kháng, Nghệ An và sau đó tại trường Sư phạm Trung cấp Nghệ An. Từ 1962 đến 1998 là cán bộ giảng dạy khoa Toán trường ĐHSP Vinh, có thời gian làm Phó Chủ nhiệm khoa Toán. Năm 1970 ông bảo vệ luận án Tiến sĩ chuyên ngành Hình học tại Ba Lan. Từ 1990-1994 làm chuyên gia giáo dục tại ĐHBK Laghouat (Algérie). Đến với bạn yêu toán trẻ tuổi khi mình đã xấp xỉ tuổi "cổ lai hy" ông cảm thấy như được trẻ lại. Ông có nhiều bài viết trên THPT về các đường cong và mặt cong.

ĐƯỜNG HÌNH TIM

TRẦN ĐÌNH VIỆN

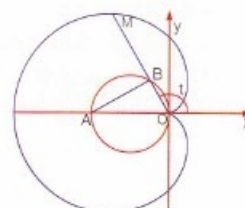
1. Định nghĩa. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đề các vuông góc Oxy , $\mathcal{C}$ là đường tròn đường kính $OA = 2r$. Với mỗi điểm B thuộc $\mathcal{C}$, lấy điểm M trên đường thẳng OB sao cho $OM = 2r - 2rcost$ với t là số đo góc (tính theo rad) của góc $(Ox; OB)$. Khi cho điểm B chạy trên $\mathcal{C}$ điểm M chuyển động vạch nên một đường cong có dạng hình tim, được gọi là đường hình tim hay đường Các-đi-ô-it (Cardioid).

Chú ý. Định nghĩa khác về đường hình tim như sau : Quỹ đạo của điểm M gắn trên đường tròn $\mathcal{C}'$ bán kính r khi $\mathcal{C}'$ lăn không trượt ở phía ngoài đường tròn cố định $\mathcal{C}$ có cùng bán kính r , gọi là đường Các-đi-ô-it. Đó là trường hợp đặc biệt của đường Ê-pi-xy-clô-it khi hai đường tròn $\mathcal{C}$ và $\mathcal{C}'$ có cùng bán kính r . (Xem THPT số 316 – tháng 10/2003 bài "Đường cong Ê-pi-xy-clô-it").

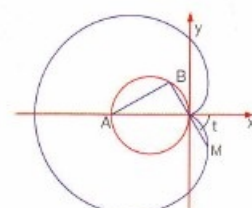
2. Phương trình của đường hình tim

Giả sử $(x; y)$ là tọa độ của điểm động M đối với hệ tọa độ Oxy . Theo định nghĩa có :

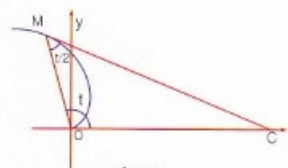
$$\begin{cases} x = OM \cos t \\ y = OM \sin t \end{cases} \text{ mà } OM = 2r(1 - \cos t) \text{ nên phương trình của đường hình tim theo tham số } t \text{ là :}$$



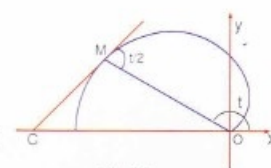
Hình 1a



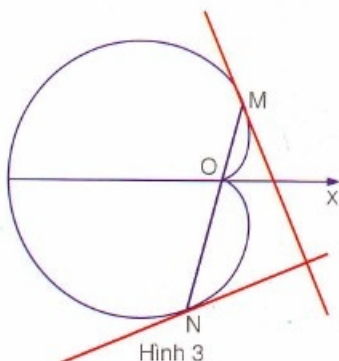
Hình 1b



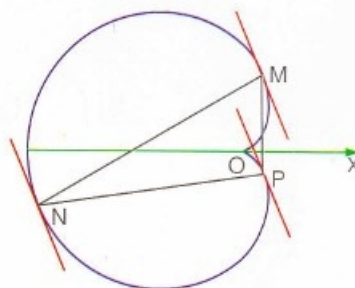
Hình 2a



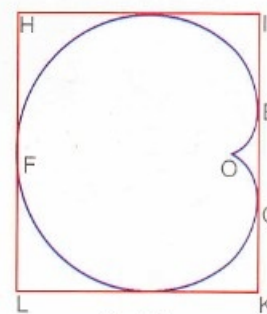
Hình 2b



Hình 3



Hình 4



Hình 5

(Xem tiếp trang 27)



TRUNG HỌC CƠ SỞ

Tìm lời giải cho một bài toán bằng nhiều cách khác nhau, khai thác sâu hơn các kết quả, chúng ta có thể tìm được thêm được các bài toán mới khá phong phú, đồng thời giúp cho học sinh phát triển tư duy toán học.

Bài toán 1. (Bài toán gốc). Cho các số dương a, b, c với $a \geq b \geq c$. Chứng minh rằng :

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \leq \frac{c}{b} + \frac{b}{a} + \frac{a}{c} \quad (1)$$

Viết cách khác :

$$\frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b} \geq 0 \quad (2)$$

Giải. Cách 1. Quy đồng mẫu số của (1) ta có :

$$(1) \Leftrightarrow b^2c + c^2a + a^2b \geq b^2a + c^2b + a^2c$$

$$\Leftrightarrow c^2(a-b) + a^2(b-c) + b^2(c-b+a-a) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)(c^2 - b^2) + (b-c)(a^2 - b^2) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)(c-b)(c+b) + (b-c)(a-b)(a+b) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)(b-c)(a-c) \geq 0 \quad (3)$$

Với $a \geq b \geq c$ nên (3) đúng, do đó (1) đúng.

Cách 2: Quy đồng mẫu số của (2) ta có

$$(2) \Leftrightarrow (a-b)ab + (b-c)bc + (c-b+b-a)ac \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a(a-b)(b-c) + c(b-c)(b-a) \geq 0 \Leftrightarrow (3) \text{ đúng.}$$

Cách 3: Với $a \geq b \geq c > 0$, đặt $x = \frac{a}{b}$, $y = \frac{b}{c}$

thì $xy = \frac{a}{c}$, ta có $x \geq 1$ và $y \geq 1$. Biến đổi như sau :

$$(1) \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + xy \geq x + y + \frac{1}{xy}$$

$$\Leftrightarrow xy - x - y \geq \frac{1}{xy} - \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(y-1) \geq \left(1 - \frac{1}{x}\right)\left(1 - \frac{1}{y}\right) \quad (4)$$

THIẾT LẬP BẤT ĐẲNG THỨC MỚI TỪ BẤT ĐẲNG THỨC GỐC

ĐẶNG PHÚC THANH

(GV THPT BC Phan Bội Châu, Plei Ku, Gia Lai)

$$\text{Ta có : } x - 1 \geq 1 - \frac{1}{x} \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}}$$

(BĐT Cô-si). Tương tự $y - 1 \geq 1 - \frac{1}{y}$.

Vậy (4) đúng nên BĐT (1) được chứng minh.

Xây dựng bài toán mới:

Dựa vào điều kiện của bài toán gốc, ta có thể xây dựng bài toán mới tương tự như sau :

Bài toán 2. Với $a \geq b \geq c > 0$, chứng minh rằng :

$$\frac{a-b}{a+b} + \frac{b-c}{b+c} + \frac{c-a}{c+a} \geq 0 \quad (5)$$

Hướng dẫn giải. Dễ dàng thấy rằng : $a \geq b \geq c > 0$ suy ra $a+b \geq a+c \geq b+c > 0$. Sử dụng (2) với ba tổng số này và biến đổi ta có ngay BĐT (5) cần chứng minh.

Thêm một điều kiện nữa vào giả thiết, ta có thể phát biểu bài toán 2 như sau :

Bài toán 3. Với $a \geq b \geq c > 0$ và $a+b+c = s$, chứng minh rằng :

$$\frac{a-b}{s-c} + \frac{b-c}{s-a} + \frac{c-a}{s-b} \geq 0$$

Nếu biến đổi điều kiện đã cho ở giả thiết bài toán trong dạng khác ta có bài toán mới nữa :

Bài toán 4. Với $a, b \in (0; 1]$; chứng minh rằng :

$$\frac{1-ab}{a+b} + \frac{a+b-2}{1+ab} + \frac{(1-a)(1-b)}{2} \geq 0$$

Hướng dẫn giải. Trước hết xét các mẫu số của BĐT cần chứng minh ta thấy $2 \geq 1+ab \geq a+b > 0$ (vì giả thiết $a, b \in (0; 1]$), sau đó áp dụng BĐT (2) ta có được BĐT cần chứng minh.

Dựa vào giả thiết là các số thực a, b, c thỏa mãn điều kiện $a \geq b \geq c > 0$, nếu xét một tam giác ABC có ba cạnh là a, b, c thì ta có thể thiết lập một số bài toán tương tự dưới đây :

Bài toán 5. Cho tam giác ABC với ba cạnh $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$ thỏa mãn $a \geq b \geq c$, chứng minh rằng :

$$\frac{\sin A - \sin B}{\sin C} + \frac{\sin B - \sin C}{\sin A} + \frac{\sin C - \sin A}{\sin B} \geq 0$$

Hướng dẫn giải. Vì trong $\triangle ABC$ có tính chất $a \geq b \geq c$ thì $A \geq B \geq C$, và ta dễ dàng chứng minh được $\sin A \geq \sin B \geq \sin C$. Áp dụng BĐT (2) vào ba số $\sin A, \sin B, \sin C$ ta được BĐT cần chứng minh.

Trong một tam giác ABC , từ các mối liên hệ giữa các cạnh với độ dài đường cao, đường trung tuyến, đường phân giác và với các BĐT về cạnh trong tam giác ta tìm được các kết quả sau đây:

Bài toán 6: Cho tam giác ABC với ba cạnh $a = BC, b = CA, c = AB$ thỏa mãn $a \geq b \geq c$. Gọi $h_a, h_b, h_c, m_a, m_b, m_c$ lần lượt là chiều cao, độ dài các đường trung tuyến xuất phát từ các đỉnh A, B, C của $\triangle ABC$. Chứng minh rằng:

$$1) \frac{a-b}{a+b-c} + \frac{b-c}{c+b-a} + \frac{c-a}{a+c-b} \geq 0 \quad (6)$$

$$2) \frac{h_c - h_b}{h_c} + \frac{h_b - h_a}{h_c} + \frac{h_a - h_b}{h_b} \geq 0 \quad (7)$$

$$3) \frac{m_c - m_b}{m_a} + \frac{m_b - m_a}{m_c} + \frac{m_a - m_c}{m_b} \geq 0 \quad (8)$$

Hướng dẫn giải. 1) Với $a \geq b \geq c$ trong $\triangle ABC$ ta có BĐT $a+b-c \geq a+c-b \geq b+c-a > 0$, áp dụng (2) vào ba số $a+b-c, a+c-b, b+c-a$ ta có ngay BĐT (6) cần chứng minh.

2) Với $a \geq b \geq c$ mà ta có $2S_{\triangle ABC} = a.h_a = b.h_b = c.h_c$ nên $h_c \geq h_b \geq h_a > 0$. Do đó áp dụng BĐT (2) cho ba số h_c, h_b, h_a ta có kết quả.

3) Áp dụng công thức đường trung tuyến trong tam giác ABC :

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}, m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}$$

$$m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2a^2 - c^2}.$$

Theo giả thiết ta có $a \geq b \geq c$ suy ra $m_c \geq m_b \geq m_a > 0$, do đó áp dụng BĐT (2) cho ba số m_c, m_b, m_a ta có kết quả.

Dựa vào tính đơn điệu của hàm số, ta có thể thiết lập nhiều bài toán tương tự, sau đây là một trong các bài toán có dạng đó:

Bài toán 7. Cho $a \geq b \geq c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{c}} + \frac{\sqrt{b}-\sqrt{c}}{\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{c}-\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \geq 0.$$

Hướng dẫn giải. $\sqrt{x}$ là hàm số tăng trên $(0; +\infty)$, nên khi cho $a \geq b \geq c > 0$ thì ta có

HỘI NGHỊ TOÁN HỌC QUỐC TẾ CÁC XU HƯỚNG HIỆN ĐẠI ỨNG DỤNG TOÁN HỌC DỰA TRÊN PHƯƠNG TRÌNH ĐẠO HÀM RIÊNG VÀ GIẢI TÍCH PHỨC

Từ ngày 25.8.2004 đến 27.8.2004 tại trường Đại học Bách khoa Hà Nội đã diễn ra Hội nghị do Trường Đại học Bách khoa Hà Nội, Viện Toán học, Trường Đại học Khoa học Tự nhiên và Viện Công nghệ Thông tin đồng tổ chức. Gần 200 đại biểu đã đến dự, trong đó có 25 đại biểu từ các nước và lãnh thổ Iran, Thổ Nhĩ Kỳ, CHLB Đức, Nhật Bản, Trung Quốc, Hồng Kông, Bỉ, Bồ Đào Nha, LB Nga, Ô-xtrây-li-a. Gần 40 báo cáo đã được trình bày trong các phiên toàn thể và tại các tiểu ban. Đáng chú ý là có nhiều nhà toán học trẻ tham dự hội nghị và đọc báo cáo. Ngôn ngữ dùng trong Hội nghị là tiếng Anh không có phiên dịch.

VKT

$\sqrt{a} \geq \sqrt{b} \geq \sqrt{c}$. Áp dụng BĐT (2) cho ba số $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$ ta có BĐT cần tìm.

Các bài toán sau đây được giới thiệu như là các bài tập để luyện tập:

Bài 1. Cho $\triangle ABC$ với ba cạnh $a = BC, b = CA, c = AB$ thỏa mãn $a \geq b \geq c$. Gọi l_a, l_b, l_c lần lượt là độ dài các đường phân giác xuất phát từ các đỉnh A, B, C của $\triangle ABC$. Chứng minh rằng:

$$\frac{l_c - l_b}{l_a} + \frac{l_a - l_c}{l_b} + \frac{l_b - l_a}{l_c} \geq 0$$

Bài 2. Với $a, b \in (0; 1]$, chứng minh rằng:

$$\frac{ab}{a+b} + \frac{1}{1+ab} - \frac{ab+2}{1+a+b} \leq 0$$

Bài 3. Cho $\triangle ABC$ có ba góc nhọn, ba cạnh $a = BC, b = CA, c = AB$ thỏa mãn $a \geq b \geq c$. Chứng minh rằng:

$$\frac{BtgA}{AtgB} + \frac{CtgB}{BtgC} + \frac{AtgC}{CtgA} \leq \frac{AtgB}{BtgA} + \frac{CtgA}{AtgC} + \frac{BtgC}{CtgB}$$

Như vậy từ một bài toán thật đơn giản về BĐT, chỉ cần chịu khó khai thác giả thiết và kết luận thì chúng ta có thể rút ra được một số bài toán mới thật thú vị.

Mặt khác lưu ý rằng khá nhiều bất đẳng thức có cùng một dạng, nếu khéo léo đặt ẩn phụ đưa được về một BĐT gốc quen biết thì ta không phải chứng minh BĐT đó bằng cách trực tiếp dài dòng mà chỉ cần áp dụng BĐT gốc là chứng minh được một cách nhanh gọn.

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN LỚP 9 TỈNH THỪA THIÊN - HUẾ NĂM HỌC 2003 - 2004

(Đề thi đã đăng trên THPT số 326, tháng 8 năm 2004)

VÒNG 1

Bài 1. a) Từ đồng nhất thức

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2(xy + yz + zx) \text{ suy ra } xy + yz + zx = 11.$$

Ta thấy y và $x + z$ là nghiệm PT $t^2 - 6t + 5 = 0$,

$$\text{từ đó } \begin{cases} y=5 \\ x+z=1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} y=1 \\ x+z=5 \end{cases}$$

• Thế $y = 5$ và $x + z = 1$ vào hệ PT ta thấy hệ trên vô nghiệm.

• Thế $y = 1$ và $x + z = 5$ vào hệ PT ta thấy hệ đã cho có hai nghiệm (x, y, z) là $(2, 1, 3)$ và $(3, 1, 2)$.

$$\text{b) Ta có } 8x^2 + y^2 + \frac{1}{4x^2} = 4 \Leftrightarrow$$

$$\left(4x^2 + \frac{1}{4x^2} - 2\right) + (4x^2 + y^2 + 4xy) - 4xy - 2 = 0$$

$$\text{Vậy } 4xy = \left(2x - \frac{1}{2x}\right)^2 + (2x + y)^2 - 2 \geq -2.$$

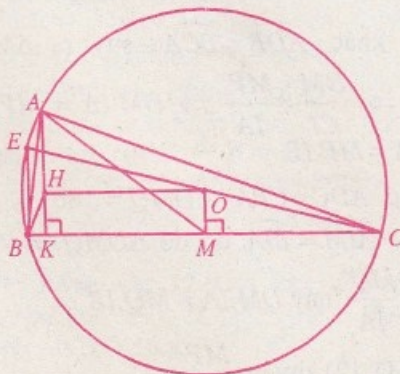
$$\text{Đẳng thức xảy ra khi } \begin{cases} 2x - \frac{1}{2x} = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{1}{2} \\ y = -2x \end{cases}$$

Tóm lại xy đạt giá trị nhỏ nhất là $\left(-\frac{1}{2}\right)$ khi

$$(x, y) \text{ bằng } \left(\frac{1}{2}, -1\right) \text{ hoặc } \left(-\frac{1}{2}, 1\right).$$

Bài 2. Xét 2 trường hợp :

TH1. ΔABC nhọn (hình 1)



Hình 1

Kẻ đường kính CE thì $EB = 2MO$, mà $EB \perp BC$, $AH \perp BC$, $AE \perp AC$, $BH \perp AC$ nên tứ giác $AEBH$ là hình bình hành suy ra $AH = EB = 2MO$ (1). Từ (1) và giả thiết $MO = HK$ có (do

$$\Delta ABC \text{ nhọn}) AK = AH + HK = 3MO = \frac{3}{4}KM \quad (2)$$

Trong tam giác vuông AKM có $AK^2 + KM^2 = AM^2$. Từ đó và (2) có

$$AK^2 + \frac{16}{9}AK^2 = 30^2 \Rightarrow AK = 18(\text{cm}) \quad (3)$$

Từ đó và (2) tính được $HK = OM = 6(\text{cm})$ và $AH = EB = 12(\text{cm})$.

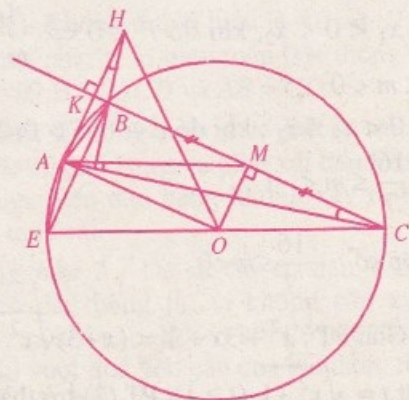
Nhận thấy tứ giác $OMKH$ là hình chữ nhật nên ΔAHO vuông tại H . Từ đó $AO^2 = AH^2 + HO^2 = AH^2 + KM^2 = 12^2 + 24^2 = 12^2 \cdot 5$.

Trong tam giác vuông EBC có $BC^2 + EB^2 = EC^2$ hay $BC^2 + AH^2 = 4AO^2 \Rightarrow BC^2 + 12^2 = 12^2 \cdot 5 \Rightarrow BC = 12\sqrt{19}$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra

$$S_{ABC} = \frac{AK \cdot BC}{2} = 108\sqrt{19} (\text{cm}^2)$$

TH2. Tam giác ABC có góc B tù (hoặc C tù) (hình 2).



Hình 2

Chứng minh tương tự như trên có $AHBE$ là hình bình hành suy ra $AH = EB = 2MO$ (1). Từ (1) và $MO = HK$ có (do $\hat{B} > 90^\circ$) $AK = AH - HK = MO$. Từ đó và $AK \parallel MO$ suy ra tứ giác

AOMK là hình chữ nhật nên $AO \perp OM$ và $AO = KM = 4MO$.

Trong tam giác vuông AOM có $AO^2 + MO^2 = AM^2$ hay $16MO^2 + MO^2 = 30^2 \Rightarrow AK = MO = \frac{30\sqrt{17}}{17}$ (cm) (5) và $OA = \frac{120}{\sqrt{17}}$ (cm).

Trong tam giác vuông EBC có $BC^2 + EB^2 = EC^2 \Rightarrow BC^2 + \left(\frac{60}{\sqrt{17}}\right)^2 = \left(\frac{240}{\sqrt{17}}\right)^2 \Rightarrow BC = \frac{60\sqrt{15}}{17}$ (cm) (6).

Từ (5), (6) suy ra $S_{ABC} = \frac{AK \cdot BC}{2} = \frac{900\sqrt{15}}{17}$ (cm²)

Như vậy bài toán có hai đáp số như trên.

Các bạn cũng có thể nhận thấy ngay với giả thiết $OM = HK = \frac{1}{4}KM$ thì góc A không thể là góc tù hoặc vuông và góc B (hoặc C) không thể vuông.

Bài 3. a) Khi $m = -1$, PT trở thành $3x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{3} > 0$. Khi $m \neq -1$ thì PT

$(m+1)x^2 - 3mx + 4m = 0$ (1) là PT bậc hai.

Gọi $S = \frac{3m}{m+1}$, $P = \frac{4m}{m+1}$ là tổng và tích các nghiệm x_1, x_2 của PT (1).

PT (1) có nghiệm dương trong các trường hợp sau

*) $0 = x_1 < x_2$ khi đó $\Delta > 0$, $P = 0$, $S > 0$. Suy ra hệ vô nghiệm.

*) $x_1 < 0 < x_2$, khi đó $P < 0 \Leftrightarrow \frac{4m}{m+1} < 0 \Leftrightarrow -1 < m < 0$

*) $0 < x_1 \leq x_2$; khi đó $\Delta \geq 0$, $S > 0$, $P > 0$ suy ra $-\frac{16}{7} \leq m < -1$.

Đáp số: $-\frac{16}{7} \leq m < 0$.

b) Giải PT: $x^2 + 3x + 1 = (x+3)\sqrt{x^2+1}$ (2)

Đặt $t = \sqrt{x^2+1}$ ($t \geq 1$). PT (2) trở thành

$$t^2 - (x+3)t + 3x = 0 \quad (3)$$

Ta có $\Delta = (x+3)^2 - 12x = (x-3)^2 \geq 0$ nên PT (3) có 2 nghiệm $t = x$; $t = 3$. Với $t = x$ thì $\sqrt{x^2+1} = x$, PT này vô nghiệm.

Với $t = 3$ thì $\sqrt{x^2+1} = 3$, giải ra được $x = \pm 2\sqrt{2}$.

VÒNG 2.

Bài 4. a) ĐK: $x^2 \geq \sqrt{3}$ (*)

Nhân với lượng liên hợp của từng mẫu số PT đã cho trở thành

$$(x^2 - \sqrt{3})(x + \sqrt{x^2 - \sqrt{3}}) - (x^2 + \sqrt{3})(x - \sqrt{x^2 + \sqrt{3}}) = \sqrt{3} \cdot x$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x^2 - \sqrt{3})^3} + \sqrt{(x^2 + \sqrt{3})^3} = 3\sqrt{3}x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ (x^2 - \sqrt{3})^3 + (x^2 + \sqrt{3})^3 + 2\sqrt{(x^4 - 3)^3} = 27x^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 2\sqrt{(x^4 - 3)^3} = x^2(9 - 2x^4) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x > 0; x^2(9 - 2x^4) \geq 0 \\ 4(x^4 - 3)^3 = x^4(9 - 2x^4)^2 \end{cases}$$

Giải hệ này và đối chiếu với ĐK ban đầu ta được $x = \sqrt{2}$. Thử lại ta thấy $x = \sqrt{2}$ là nghiệm của PT đã cho.

$$\begin{aligned} \text{b) Xét hiệu } & \frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} - \frac{2}{1+ab} \\ &= \left(\frac{1}{1+a^2} - \frac{1}{1+ab} \right) + \left(\frac{1}{1+b^2} - \frac{1}{1+ab} \right) = \\ &= \frac{ab-a^2}{(1+a^2)(1+ab)} + \frac{ab-b^2}{(1+b^2)(1+ab)} \\ &= \frac{a(b-a)(1+b^2)+b(a-b)(1+a^2)}{(1+a^2)(1+b^2)(1+ab)} \\ &= \frac{(b-a)(a+ab^2-b-a^2b)}{(1+a^2)(1+b^2)(1+ab)} = \\ &= \frac{(b-a)^2(ab-1)}{(1+a^2)(1+b^2)(1+ab)} \geq 0 \quad (\text{vì } a \geq 1, b \geq 1). \end{aligned}$$

Bài 5. (h. 3). Ta có $\widehat{DMP} = \widehat{AMQ} = \widehat{AIC}$

Mặt khác $\widehat{ADB} = \widehat{BCA}$, suy ra $\triangle MDP \sim$

$$\triangle ICA \Rightarrow \frac{DM}{CI} = \frac{MP}{IA} \Rightarrow DM \cdot IA = MP \cdot IC \text{ hay } DM \cdot IA = MP \cdot IB \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } & \widehat{ADC} = \widehat{CBA}; \widehat{DMQ} = 180^\circ - \widehat{AMQ} = \\ & 180^\circ - \widehat{AIM} = \widehat{BIA} \text{ do đó } \triangle DMQ \sim \triangle BIA \Rightarrow \\ & \frac{DM}{BI} = \frac{MQ}{IA} \text{ hay } DM \cdot IA = MQ \cdot IB \quad (2) \end{aligned}$$

Từ (1), (2) suy ra $\frac{MP}{MQ} = 1$.

ĐỀ THI TỐT NGHIỆP THCS VÀ XÉT TUYỂN VÀO TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN, TP ĐÀ NẴNG NĂM 2004

(Thời gian làm bài : 120 phút)

A. LÝ THUYẾT (2 điểm). Thí sinh chọn một trong hai đề sau :

Đề 1 : Phát biểu định nghĩa hai hệ phương trình tương đương.

Áp dụng : Giải thích tại sao hai hệ phương trình sau là tương đương :

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=3 \end{cases} \quad \text{và} \quad \begin{cases} x+y=1 \\ y-x=-3 \end{cases}$$

Đề 2 : Viết công thức tính thể tích một hình chóp.

Áp dụng : Cho hình chóp tứ giác đều $SABCD$, đáy $ABCD$ là hình vuông, tâm là điểm O , cạnh $AB = 8\text{cm}$, đường cao $SO = 12\text{cm}$. Tính thể tích hình chóp $SABCD$.

B. BÀI TOÁN BẮT BUỘC (8 điểm)

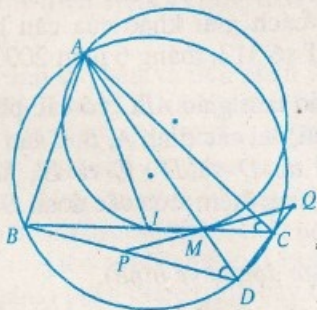
Bài 1. (1,5 điểm).

a) Cho biết : $A = 9+3\sqrt{7}$ và $B = 9-3\sqrt{7}$.
Hãy so sánh $A+B$ và $A.B$.

b) Tính giá trị của biểu thức :

$$M = \left(\frac{1}{3-\sqrt{5}} - \frac{1}{3+\sqrt{5}} \right) : \frac{5-\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}$$

Bài 2. (2 điểm).



Hình 3

Bài 6. a) Giải PT $\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x+8} = -x^3 + 1$ (1)

Nhận thấy $x=0$ là một nghiệm của PT (1).

Nếu $x < 0$, vế phải của PT lớn hơn 1, còn vế trái PT nhỏ hơn 1 nên PT (1) không có nghiệm.

Nếu $x > 0$, vế phải PT (1) nhỏ hơn 1, vế trái PT lớn hơn 1 nên PT (1) không có nghiệm. Vậy $x=0$ là nghiệm duy nhất của PT (1).

b) Tìm các số nguyên dương x, y, z thỏa mãn

a) Giải phương trình : $x^4 - 24x^2 - 25 = 0$.

b) Giải hệ phương trình : $\begin{cases} 2x-y=2 \\ 9x+8y=34 \end{cases}$

Bài 3. (1,5 điểm).

Cho phương trình : $x^2 - 2mx + (m-1)^3 = 0$ (1)

(x là ẩn số, m là tham số)

a) Giải phương trình (1) khi $m = -1$.

b) Định m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt, trong đó một nghiệm bằng bình phương của nghiệm còn lại.

Bài 4. (3 điểm).

Cho tam giác ABC có các góc đều nhọn, $\hat{A} = 45^\circ$. Vẽ các đường cao BD và CE của tam giác ABC . Gọi H là giao điểm của BD và CE .

a) Chứng minh tứ giác $ADHE$ nội tiếp được trong một đường tròn.

b) Chứng minh : $HD = DC$.

c) Tính tỉ số : $\frac{DE}{BC}$.

d) Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Chứng minh OA vuông góc với DE .

$$2(y+z) = x(yz-1) \quad (2)$$

• Với $x=1$, PT (2) có dạng $2(y+z) = yz-1$
 $\Leftrightarrow (y-2)(z-2) = 5$.

Ta có nghiệm (x, y, z) là $(1, 3, 7), (1, 7, 3)$

Giả sử $y \leq z$. Với $x \geq 2$ ta có

$$2(y+z) \geq 2(yz-1) \Rightarrow yz - y - z - 1 \leq 0 \Rightarrow (y-1)(z-1) \leq 2 \quad (3)$$

• Nếu $y=1$, PT (2) có dạng

$$2(1+z) = x(z-1) \Leftrightarrow (x-2)(z-1) = 4.$$

Ta được các nghiệm (x, y, z) là $(3, 1, 5), (4, 1, 3), (6, 1, 2)$

• Nếu $y \neq 1 \Rightarrow z \neq 1$ từ (3) phải có $y=2$, PT (2) có dạng $2(2+z) = x(2z-1) \Leftrightarrow (2z-1)(x-1) = 5$, PT này có nghiệm $(x, y, z) = (2, 2, 3)$. Tương tự xét $z < y$ thì PT đã cho có tất cả 10 nghiệm là $(x, y, z) = \{(1, 3, 7), (1, 7, 3), (3, 1, 5), (4, 1, 3), (6, 1, 2), (2, 2, 3), (3, 5, 1), (4, 3, 1), (6, 2, 1), (2, 3, 2)\}$.

Hướng dẫn giải : LÊ ĐÌNH CHÂU
(Sở GD-ĐT Thừa Thiên - Huế)



VÀI ỨNG DỤNG CỦA PHƯƠNG TÍCH CỦA MỘT ĐIỂM ĐỐI VỚI MỘT ĐƯỜNG TRÒN

TRẦN VĂN XUÂN
(GV Trường CĐSP Bạc Liêu)

Khái niệm phương tích của một điểm đối với một đường tròn cũng như khái niệm trục đẳng phương của hai đường tròn đã được nêu trong sách giáo khoa Hình học lớp 10. Ở bài báo này chúng tôi nêu thêm một số ứng dụng có liên quan tới các khái niệm đó.

I) Chứng minh 3 điểm thẳng hàng

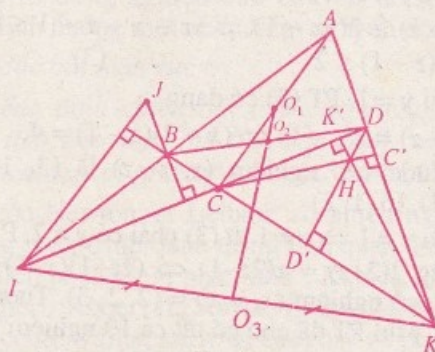
Để chứng minh 3 điểm thẳng hàng ta có thể chứng minh chúng có cùng phương tích đối với hai đường tròn hoặc chúng là tâm của các đường tròn đôi một nhận một đường thẳng duy nhất làm trục đẳng phương.

Ví dụ 1. Cho tứ giác $ABCD$ có các cạnh AB và CD cắt nhau tại I , AD và BC cắt nhau tại K .

a) Chứng minh trục tâm của các tam giác AID , ABK , BCI , CDK thẳng hàng.

b) Chứng minh trung điểm của các đoạn thẳng AC , BD , IK thẳng hàng.

Lời giải. a) Kí hiệu (X, YZ) là đường tròn tâm X bán kính YZ .



Hình 1

Gọi O_1, O_2 lần lượt là trung điểm của AC, BD . Các đường cao của $\triangle CDK$ lần lượt là CC', DD', KK' và H là trực tâm (hình 1). Ta có

$$\mathcal{P}H/(O_1, O_1A) = \overline{HC} \cdot \overline{HC'}; \mathcal{P}H/(O_2, O_2B) = \overline{HD} \cdot \overline{HD'}. \text{ Xét đường tròn đường kính } CD \text{ có } \overline{HC} \cdot \overline{HC'} = \overline{HD} \cdot \overline{HD'} \text{ do đó } H \text{ thuộc trục đẳng phương của hai đường tròn } (O_1, O_1A); (O_2, O_2B).$$

Chứng minh tương tự trục tâm các tam giác AID , ABK , BCI cũng có cùng phương tích đối với hai đường tròn (O_1, O_1A) và (O_2, O_2B) . Ta có điều cần chứng minh.

b) Gọi O_3 là trung điểm IK , ta cũng chứng minh được $\mathcal{P}H/(O_2, O_2B) = \mathcal{P}H/(O_3, O_3K)$.

Xét trục tâm J của $\triangle BCI$, khi đó $\mathcal{P}J/(O_1, O_1A) = \mathcal{P}J/(O_2, O_2B) = \mathcal{P}J/(O_3, O_3K)$, suy ra ba đường tròn này đôi một nhận đường thẳng HJ làm trục đẳng phương, vì vậy O_1, O_2, O_3 thẳng hàng. Ta còn thấy rằng $HJ \perp O_1O_3$ (Các bạn có thể xem thêm một số cách giải khác của câu b) ở bài T7/308, THIT số 312, tháng 6 năm 2003).

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC có các phân giác (trong và ngoài) tại các đỉnh A, B, C lần lượt cắt các cạnh đối tại D và D', E và E', K và K' . Chứng minh trung điểm của các đoạn DD', EE', KK' thẳng hàng.

Lời giải. (Bạn đọc tự vẽ hình).

Gọi O_1, O_2, O_3 theo thứ tự là trung điểm DD', EE', KK' . Giả sử (O, R) là đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$, bán kính R . Vì $\triangle O_1BA \sim \triangle O_1AC$ nên $O_1B \cdot O_1C = O_1A^2 = O_1D^2$, từ đó

$$\mathcal{P}O_1/(O, R) = \overline{O_1B} \cdot \overline{O_1C} = O_1D^2 = O_1O^2 - R^2 \text{ nhưng } \mathcal{P}O_1/(O_1, O_1D) = O_1O^2 - O_1D^2. \text{ Suy ra:}$$

$$\mathcal{P}O_1/(O_1, O_1D) = R^2$$

$$\text{Chứng minh tương tự } \mathcal{P}O_2/(O_2, O_2E) = \mathcal{P}O_3/(O_3, O_3K) = R^2.$$

Mặt khác nếu gọi H là trực tâm $\triangle DEK$, tương tự như ví dụ 1 ta chứng minh được :

$$\mathcal{PH}/(O_1, O_1D) = \mathcal{PH}/(O_2, O_2E) = \mathcal{PH}/(O_3, O_3K)$$

Vậy ba đường tròn (O_1) , (O_2) , (O_3) đôi một nhận đường thẳng OH làm trục đẳng phương nên O_1, O_2, O_3 thẳng hàng.

Ví dụ 3: Cho tứ giác lồi $ABCD$. Qua đỉnh D của tứ giác kẻ các đường thẳng $a \perp DA$, $b \perp DB$, $c \perp DC$. Các đường thẳng a, b, c này theo thứ tự cắt các đường thẳng BC, CA, AB tại A', B', C' . Chứng minh A', B', C' thẳng hàng.

Lời giải. (Bạn đọc tự vẽ hình)

Gọi trung điểm của AA', BB', CC' lần lượt là O_1, O_2, O_3 thế thì $\mathcal{PD}/(O_1, O_1A) = \mathcal{PD}/(O_2, O_2B) = \mathcal{PD}/(O_3, O_3C) = 0$.

Mặt khác nếu gọi H là trực tâm $\triangle ABC$ thì tương tự ví dụ 1 có $\mathcal{PH}/(O_1, O_1A) = \mathcal{PH}/(O_2, O_2B) = \mathcal{PH}/(O_3, O_3C)$. Từ đó O_1, O_2, O_3 thẳng hàng.

Gọi P, Q, R lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB . Sử dụng định lý Mê-nê-la-uyt cho $\triangle PQR$ và ba điểm thẳng hàng O_1, O_2, O_3 ta có :

$$\frac{\overline{O_1Q}}{\overline{O_1R}} \cdot \frac{\overline{O_2R}}{\overline{O_2P}} \cdot \frac{\overline{O_3P}}{\overline{O_3Q}} = 1. \text{ Nhưng } \frac{\overline{O_1Q}}{\overline{O_1R}} = \frac{\overline{A'C}}{\overline{A'B}};$$

$$\frac{\overline{O_2R}}{\overline{O_2P}} = \frac{\overline{B'A}}{\overline{B'C}}; \frac{\overline{O_3P}}{\overline{O_3Q}} = \frac{\overline{C'B}}{\overline{C'A}}.$$

Áp dụng định lý Mê-nê-la-uyt đảo cho $\triangle ABC$ ta có A', B', C' thẳng hàng.

II. Chứng minh ba đường thẳng đồng quy :

Ta chứng minh ba đường thẳng đó là các trục đẳng phương của từng cặp hai đường tròn có tâm không thẳng hàng.

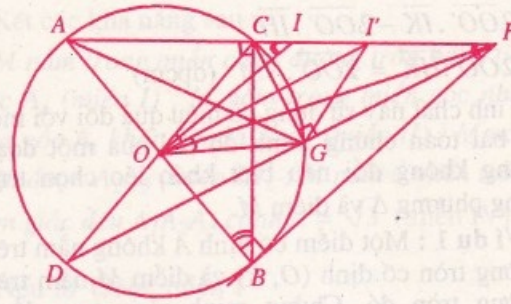
Ví dụ 1. Cho đường tròn tâm O và hai đường kính AB, CD . Tiếp tuyến với (O) tại B cắt AC tại P , PD cắt đường tròn (O) lần nữa tại G . Chứng minh AG, BC, PO đồng quy.

Lời giải. (Hình 2). Gọi I là trung điểm PA , I' là trung điểm PC . Ta thấy bốn điểm O, B, C, I nằm trên đường tròn (ω) đường kính BI . Mặt khác $\widehat{GAI'} = \widehat{CDG} = \widehat{COI'} = \widehat{GOI'}$ (do $OC = OG, I'C = I'G$) suy ra bốn điểm O, A, G, I' nằm trên đường tròn (ω') . Thế thì :

$$\mathcal{PO}/(\omega) = \mathcal{PO}/(\omega') = 0$$

$$\text{Hơn nữa } \mathcal{PP}/(\omega) = \overline{PI} \cdot \overline{PC} = \overline{PA} \cdot \overline{PI'} = \mathcal{PP}/(\omega')$$

Suy ra OP là trục đẳng phương của (ω) và (ω') .



Hình 2

Nhưng AG là trục đẳng phương của (O) và (ω') , BC là trục đẳng phương của (O) và (ω) . Vậy AG, BC, PO đồng quy.

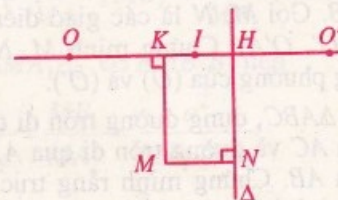
Ví dụ 2. Cho $\triangle ABC$ và đường thẳng d , gọi A', B', C' lần lượt là hình chiếu của A, B, C trên d . Gọi d_1, d_2, d_3 lần lượt là các đường thẳng đi qua A', B', C' và vuông góc với BC, CA, AB . Chứng minh d_1, d_2, d_3 đồng quy.

Lời giải. (Bạn đọc tự vẽ hình)

Gọi O_1, O_2, O_3 lần lượt là trung điểm của BC, CA, AB . Ta có $O_1B' = O_1C'$; $O_2C' = O_2A'$; $O_3A' = O_3B' \Rightarrow (O_1, O_1C')$ cắt (O_2, O_2C') tại C' . Ta có d_3 là trục đẳng phương của (O_1, O_1C') và (O_2, O_2C') . Tương tự d_2 là trục đẳng phương của (O_3, O_3B') và (O_1, O_1B') ; d_1 là trục đẳng phương của (O_2, O_2A') và (O_3, O_3A') . Vậy chúng đồng quy.

III. Ứng dụng của hiệu phương tích của một điểm đối với 2 đường tròn

Tính chất. Cho hai đường tròn (O, R) và (O', R') có trục đẳng phương là Δ . Khi đó với điểm M tùy ý ta có $\mathcal{PM}/(O) - \mathcal{PM}/(O') = 2\overline{OO'} \cdot \overline{NM}$, trong đó N là hình chiếu của M lên Δ .



Hình 3

Chứng minh. (hình 3). Gọi I là trung điểm OO' ; K là hình chiếu của M trên OO' ; H là giao điểm của Δ và OO' ta có :

$$\mathcal{PM}/(O, R) - \mathcal{PM}/(O', R') = (MO^2 - MO'^2) - (R^2 - R'^2) = OK^2 - O'K^2 - (OH^2 - O'H^2)$$

$$= 2\overline{OO'} \cdot \overline{IK} - 2\overline{OO'} \cdot \overline{IH}$$

$$= 2\overline{OO'} \cdot \overline{HK} = 2\overline{OO'} \cdot \overline{NM} \quad (\text{đpcm})$$

Tính chất này sử dụng có hiệu quả đối với một số bài toán chứng minh độ dài của một đoạn thẳng không đổi nếu biết khéo léo chọn trục đẳng phương Δ và điểm M .

Ví dụ 1 : Một điểm cố định A không nằm trên đường tròn cố định (O, R) và điểm M nằm trên đường tròn đó. Chứng minh rằng trục đẳng phương của hai đường tròn (O, R) và (M, MA) luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định khi điểm M chạy trên (O, R) .

Lời giải. (Bạn đọc tự vẽ hình).

Gọi Δ là trục đẳng phương của (O, R) và (M, MA) ; A' là hình chiếu của A trên Δ thì $\mathcal{PO}/(O, R) - \mathcal{PO}/(M, MA) = 2\overline{OM} \cdot \overline{A'A} \Rightarrow AO^2 - R^2 = 2 \cdot \overline{OM} \cdot \overline{A'A} = |AO^2 - R^2| = 2 \cdot R \cdot A'A \Rightarrow A'A = \frac{|AO^2 - R^2|}{2R}$ (không đổi), A cố định, vậy Δ tiếp xúc với đường tròn $(A, A'A)$.

Ví dụ 2. Cho hai đường tròn cố định $(O), (O')$. Tiếp tuyến của (O) tại điểm M nào đó trên (O) cắt (O') tại A, B . Gọi ω là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle OAB$. Chứng minh $\omega O'$ không đổi khi điểm M chạy trên đường tròn (O) .

Lời giải. (Bạn đọc tự vẽ hình)

Gọi R là bán kính đường tròn (O) .

Rõ ràng AB là trục đẳng phương của (ω) và (O') do đó $\mathcal{PO}/(O') - \mathcal{PO}/(\omega) = 2\overline{O'\omega} \cdot \overline{MO} \Rightarrow |\mathcal{PO}/(O')| = 2 \cdot O\omega \cdot R \Rightarrow O'\omega = \frac{|\mathcal{PO}/(O')|}{2R}$ không đổi.

Để kết thúc xin đề nghị một số bài tập :

Bài 1. Cho hai điểm cố định A, B . Hai đường tròn thay đổi $(O), (O')$ theo thứ tự tiếp xúc với AB tại A và B . Gọi M, N là các giao điểm của (O, OB) và $(O', O'A)$. Chứng minh M, N nằm trên trục đẳng phương của (O) và (O') .

Bài 2. Cho $\triangle ABC$, dựng đường tròn đi qua A, B có tâm trên AC và đường tròn đi qua A, C có tâm nằm trên AB . Chứng minh rằng trục đẳng phương của hai đường tròn ấy đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.

Bài 3. Cho hai đường tròn cố định $(A, R), (B, R')$ với $R' > R$ tiếp xúc trong với nhau tại I . Gọi d là tiếp tuyến chung của hai đường tròn đó tại I . Xét điểm M thuộc nửa mặt phẳng chứa A, B có bờ là d , H là hình chiếu của M trên d sao cho $MA^2 = AB \cdot MH$. Tìm quỹ tích điểm M .

HỘI THI TIN HỌC TRẺ KHÔNG CHUYÊN TOÀN QUỐC LẦN THỨ X - 2004

Vào các ngày từ 15 đến 18/8/2004 Hội thi Tin học trẻ không chuyên toàn quốc lần thứ X do Trung ương Đoàn TNCS Hồ Chí Minh, Bộ Khoa học và Công nghệ, Bộ Giáo dục và Đào tạo, Bộ Bưu chính - Viễn thông, Bộ Tài chính, Đài Truyền hình Việt Nam, Hội Tin học Việt Nam phối hợp tổ chức đã diễn ra tại Thủ đô Hà Nội.

Hội thi năm nay có 210 thí sinh của 55 tỉnh, thành, ngành tham gia, trong đó có 66 thí sinh Tiểu học (bảng A), 66 thí sinh Trung học cơ sở (bảng B), 69 thí sinh Trung học phổ thông (bảng C); 9 thí sinh dự thi phần mềm sáng tạo khối chuyên (bảng E). Tổng số phần mềm sáng tạo khối không chuyên (bảng D) và khối chuyên (bảng E) là 41 (phần mềm).

Tối ngày 18/8/2004 tại Hội trường Ba Đình, Ban chỉ đạo Hội thi đã trao 104 giải thưởng cho các thí sinh đoạt giải: Hoàng Trần Kiên (Hà Nội) đoạt giải nhất bảng A, Phạm Tuấn Vũ (TP Hồ Chí Minh) nhất bảng B, Trần Lê Hùng (Kon Tum) nhất bảng C. Ba giải nhất phần mềm sáng tạo bảng B được trao cho các thí sinh: Trần Quang Thiện, Phan Hoàng Huy (Đà Nẵng), Lê Xuân Tiến (TP. Hồ Chí Minh). Giải thưởng phần mềm sáng tạo khối chuyên (bảng E) được trao cho hai thí sinh: Nguyễn Bá Sơn (khối PTCTT-ĐHSP Hà Nội), Nguyễn Đặng Việt Anh (THPT Amsterdam - Hà Nội). Giải đồng đội thuộc về đội Lâm Đồng. Nguyễn Mai Chi (lớp 4, TH Nguyễn Huệ, Hưng Yên) được nhận phần thưởng thí sinh trẻ tuổi nhất đạt giải. Cuộc thi có 6 thí sinh là người thuộc các dân tộc thiểu số.

Như vậy trong 10 năm qua, Hội thi Tin học trẻ không chuyên toàn quốc đã có bước phát triển nhanh chóng cả bề rộng và chiều sâu, góp phần tích cực hỗ trợ, cổ vũ các em học sinh ở các địa phương thi đua học tập, ứng dụng kiến thức công nghệ thông tin vào sản xuất và đời sống; đồng thời phát hiện những tài năng tin học trẻ, góp phần tạo nguồn nhân lực công nghệ thông tin cho nước nhà.

QUANG PHÚC

KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA

MÔN TOÁN LỚP 12 THPT NĂM 2004

NGUYỄN KHẮC MINH

(Cục Khảo thí và Kiểm định CLGD – Bộ GD&ĐT)

Kì thi chọn học sinh giỏi quốc gia môn Toán lớp 12 THPT năm 2004 được tiến hành trong hai ngày, 11 và 12 / 03 / 2004. Tham dự kì thi có 539 thí sinh, gồm 250 thí sinh dự thi ở Bảng A và 289 thí sinh dự thi ở Bảng B. Theo Quy chế hiện hành, trong mỗi ngày thi các thí sinh làm bài thi trong thời gian 180 phút.

Theo đánh giá của Tổ chấm thi môn Toán thuộc Hội đồng chấm thi chọn học sinh giỏi Quốc gia lớp 12 THPT năm 2004, đề thi đảm

bảo tính chính xác khoa học, bám sát chương trình môn Toán THPT hiện hành và Hướng dẫn bồi dưỡng học sinh khá, giỏi Toán của Bộ GD&ĐT, phân loại được trình độ học sinh dự thi.

Về chất lượng bài làm của học sinh dự thi, Tổ chấm thi nhận thấy một số thí sinh ở Bảng B tỏ ra chưa nắm vững các kiến thức cơ bản đã được trình bày trong SGK hiện hành.

Dưới đây là Đề thi và Kết quả của kì thi.

I. ĐỀ THI

BẢNG A

Ngày thi thứ nhất, 11 / 3 / 2004

Bài 1: Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x^3 + x(y-z)^2 = 2 \\ y^3 + y(z-x)^2 = 30 \\ z^3 + z(x-y)^2 = 16. \end{cases}$$

Bài 2: Trong mặt phẳng, cho tam giác ABC . Gọi D là giao điểm của cạnh AB và đường phân giác trong của $\angle ACB$.

Xét một đường tròn (O) đi qua hai điểm C, D và không tiếp xúc với các đường thẳng BC, CA . Đường tròn này cắt lại các đường thẳng BC và CA tương ứng tại M và N .

1/ Chứng minh rằng có một đường tròn (S) tiếp xúc với đường thẳng DM tại M và tiếp xúc với đường thẳng DN tại N .

2/ Đường tròn (S) cắt lại các đường thẳng BC và CA tương ứng tại P và Q . Chứng minh rằng các đoạn thẳng MP và NQ có độ dài không đổi, khi đường tròn (O) thay đổi.

(X) Kí hiệu đường tròn tâm X .

Bài 3: Cho A là tập hợp gồm 16 số nguyên dương đầu tiên. Hãy tìm số nguyên dương k nhỏ nhất có tính chất: trong mỗi tập con có k phần tử của tập hợp A đều tồn tại hai số phân biệt a và b sao cho $a^2 + b^2$ là một số nguyên tố.

Ngày thi thứ hai, 12 / 3 / 2004

Bài 4: Xét dãy số thực (x_n) , $n = 1, 2, 3, \dots$, xác định bởi: $x_1 = 1$ và

$$x_{n+1} = \frac{(2 + \cos 2\alpha)x_n + \cos^2 \alpha}{(2 - 2\cos 2\alpha)x_n + 2 - \cos 2\alpha}$$

với mọi $n = 1, 2, 3, \dots$,

trong đó α là một tham số thực.

Hãy xác định tất cả các giá trị của α để dãy số (y_n) , với

$$y_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2x_k + 1}, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

có giới hạn hữu hạn khi $n \rightarrow +\infty$. Hãy tìm giới hạn của dãy số (y_n) trong các trường hợp đó.

Bài 5: Xét các số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện:

$$(x + y + z)^3 = 32xyz.$$

Hãy tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{x^4 + y^4 + z^4}{(x + y + z)^4}.$$

Bài 6: Với mỗi số nguyên dương n , kí hiệu $S(n)$ là tổng tất cả các chữ số trong biểu diễn thập phân của n .

Xét các số nguyên dương m là bội của 2003. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của $S(m)$.

BẢNG B

Ngày thi thứ nhất, 11 / 3 / 2004

Bài 1: Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x^3 + 3xy^2 = -49 \\ x^2 - 8xy + y^2 = 8y - 17x. \end{cases}$$

Bài 2: Trong mặt phẳng, cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) và có trục tâm H . Trên cung BC không chứa điểm A của đường tròn (O) , lấy một điểm P sao cho P không trùng

với B và C . Lấy điểm D sao cho $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{PC}$ và gọi K là trục tâm của tam giác ACD . Gọi E và F tương ứng là hình chiếu vuông góc của K trên các đường thẳng BC và AB . Chứng minh rằng đường thẳng EF đi qua trung điểm của đoạn thẳng HK .

((O) kí hiệu đường tròn tâm O).

Bài 3: Cho số nguyên $n \geq 2$. Chứng minh rằng với mỗi số nguyên k mà

$2n-3 \leq k \leq \frac{n(n-1)}{2}$, đều tồn tại n số thực đôi một khác nhau $a_1, a_2, \dots, a_n$ sao cho trong tất cả

các số có dạng $a_i + a_j$, với $1 \leq i < j \leq n$, có đúng k số đôi một khác nhau.

Ngày thi thứ hai, 12 / 3 / 2004

Bài 4: Là Bài 4 của Bảng A.

Bài 5: Xét các số thực dương x, y, z thỏa mãn hệ điều kiện sau:

$$\begin{cases} x+y+z = 4 \\ xyz = 2. \end{cases}$$

Hãy tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = x^4 + y^4 + z^4.$$

Bài 6: Hãy tìm tất cả các bộ ba số nguyên dương (x, y, z) thỏa mãn hệ thức:

$$(x+y)(1+xy) = 2^z.$$

II. KẾT QUẢ

Trong kì thi năm nay, đạt từ 20 điểm trở lên có 145 thí sinh ở Bảng A và 27 thí sinh ở Bảng B. Đặc biệt, thí sinh *Lê Hùng Việt Bảo*, lớp 12 Khối THPT chuyên Toán - Tin học, trường ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội, đã đạt điểm tối đa của kì thi.

Căn cứ kết quả thi và Quy chế hiện hành, Bộ GD & ĐT đã quyết định trao:

- 128 giải, gồm 07 giải Nhất, 14 giải Nhì, 53 giải Ba và 54 giải Khuyến khích, cho 128 học sinh đạt từ 21,5 điểm trở lên ở Bảng A;

- 27 giải, gồm 01 giải Nhất, 06 giải Ba và 20 giải Khuyến khích, cho 27 học sinh đạt từ 20 điểm trở lên ở Bảng B.

Kết quả cụ thể như sau:

BẢNG A

• Giải Nhất:

- *Lê Hùng Việt Bảo* (40 điểm), h/s lớp 12 Khối THPT chuyên Toán - Tin học, trường ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội;

- *Nguyễn Đăng Hợp* (38 điểm), h/s lớp 12 trường THPT Lê Hồng Phong, Tp. Nam Định;

- *Nguyễn Minh Trường* (37 điểm), h/s lớp 12 trường THPTNK Trần Phú, Tp. Hải Phòng;

- *Trần Thị Thu Hương* (36,5 điểm), h/s lớp 12 trường THPT Lê Hồng Phong, Tp. Nam Định;

- *Nguyễn Tiến Việt* (36,5 điểm), h/s lớp 12 trường THPT Lê Quý Đôn, Tp. Nha Trang, tỉnh Khánh Hòa;

- *Nguyễn Đăng Khoa* (35,5 điểm), h/s lớp 12 trường PTNK - ĐHQG Tp. Hồ Chí Minh;

- *Phạm Kim Hùng* (35 điểm), h/s lớp 11 Khối THPT chuyên Toán - Tin học, trường ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội.

• Giải Nhì:

Phạm Thái Sơn (12 THPT Chuyên, Bắc Ninh); *Trương Minh Tiến* (11 THPT Lê Quý Đôn, Đà Nẵng); *Nguyễn Đức Tâm* (11 Khối THPT chuyên

Toán - Tin học, ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội); *Nguyễn Kim Sơn* (12 Khối THPT chuyên Toán - Tin học, ĐHSP Hà Nội); *Trần Đức Anh* (11 THPT Hà Nội - Amsterdam, Hà Nội); *Lê Minh Quang* (12 THPT Chuyên, Hà Tĩnh); *Trần Quốc Hoàn* (11 THPT Nguyễn Trãi, Hải Dương); *Trần Xuân Dũng* (11 THPTNK Trần Phú, Hải Phòng); *Nguyễn Tuấn Anh*, *Bùi Hoàng Giang*, *Trần Trung Kiên*, *Lương Hữu Long* (12 THPT Lê Hồng Phong, Nam Định); *Nguyễn Minh Hải* (12 THPT Lương Văn Tụy, Ninh Bình); *Lê Thanh Tùng* (12 THPT chuyên Hùng Vương, Phú Thọ).

• Giải Ba:

Vũ Huy Hùng, *Nguyễn Tuyết Mai* (12 THPTNK Ngô Sĩ Liên, Bắc Giang); *Nguyễn Đức Trung*, *Lê Hữu Tuyên* (12 THPT Chuyên, THPT Gia Bình 2, Bắc Ninh); *Đỗ Quốc Khánh*, *Nguyễn Văn Vinh* (11, 12 THPT Lê Quý Đôn, Đà Nẵng); *Vũ Tuấn Đạt*, *Nguyễn Duy Hiếu*, *Lê Thái Sơn*, *Dương Minh Sơn* (11, 12 Khối THPT chuyên Toán - Tin học, ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội); *Lê Đăng Khoa* (11 PTNK, ĐHQG Tp. Hồ Chí Minh); *Nguyễn Nguyên Hùng*, *Phạm Việt Hùng*, *Đỗ Hoàng Khiêm*, *Hứa Khắc Nam*, *Nguyễn Đức Phương*, *Nguyễn Đức Thịnh* (11, 12 Khối THPT chuyên Toán - Tin học, ĐHSP Hà Nội); *Trần Văn Dũng*, *Nguyễn Quang Huy*, *Trần Mạnh Kế*, *Hoàng Chí Linh* (11, 12 Khối THPT chuyên Toán - Tin học, ĐH Vinh); *Quách Văn Chương* (12 THPT Lương Thế Vinh, Đồng Nai); *Trần Thanh Hưng*, *Phạm Hoàng Lê*, *Trần Minh Tú* (11, 12 THPT Hà Nội - Amsterdam, Hà Nội); *Nguyễn Tuấn Anh*, *Lê Bảo Khánh* (12 THPT Nguyễn Huệ, Hà Tây); *Trần Việt Ngai*, *Hồ Đức An*, *Hoàng Xuân Tùng* (11, 12 THPT Chuyên, Hà Tĩnh); *Phạm Huy Hoàng*, *Lê Đình Huy*, *Nguyễn Văn Quyền* (11, 12 THPT Nguyễn Trãi, Hải Dương); *Lê Hải Yến* (12 THPTNK Trần Phú, Hải Phòng); *Lê Nữ Huyền Trang* (11 THPT Lê Quý Đôn, Khánh Hòa);

Nguyễn Thành Trung, Phạm Đức Tuệ (11, 12 THPT Lê Hồng Phong, **Nam Định**); Trần Huy Hoàng, Nguyễn Thị Nhung, Nguyễn Thị Nhã Phương, Phan Hoàng Phương (12 THPT Phan Bội Châu, **Nghệ An**); Đỗ Hoàng Huy (12 THPT Lương Văn Tụy, **Ninh Bình**); Lê Đức Anh (12 THPT Chuyên, **Quảng Bình**); Phạm Việt Dũng, Nguyễn Tuấn Hùng, Ngô Xuân Tùng, Lê Vĩ (12 THPT Chuyên, **Thái Bình**); Nguyễn Hà Phương (12 THPT Chuyên, **Thái Nguyên**); Nguyễn Minh Thế, Lê Đức Tâm, Lữ Thị Thu Trang, Trần Mạnh Tuấn (11, 12 THPT Lam Sơn, **Thanh Hóa**).

• **Giải Khuyến Khích:**

La Văn Thịnh (12 THPT Hiệp Hòa 2, **Bắc Giang**); Chu Đức Đạo, Nguyễn Văn Tuấn, Nguyễn Quốc Khánh, Vũ Văn Sơn (11, 12 THPT Chuyên, **Bắc Ninh**); Thái Thanh Hải, Dương Đạt Nguyễn, Phan Anh Tuấn (11, 12 THPT Lê Quý Đôn, **Đà Nẵng**); Nguyễn Trường Thọ, Phạm Tiến Dũng (11, 12 Khối THPT chuyên Toán - Tin học, ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội); Trần Minh Hoàng (11 PTNK, ĐHQG TP. Hồ Chí Minh); Nguyễn Đức Duy, An Như Hưng, Nguyễn Lệnh Quân (11 Khối THPT chuyên Toán - Tin học, ĐHSP Hà Nội); Nguyễn Việt Dũng, Đậu Minh Hoàng, Lê Minh Hoàng (11, 12 Khối THPT Chuyên Toán - Tin học, ĐH Vinh); Nguyễn Hoàng Minh Dũng (12 THPT Lương Thế Vinh, **Đông Nai**); Nguyễn Hồng Dương, Vũ Đức Quý, Mai Chí Thọ (12 THPT Chuyên, **Hà Nam**); Trần Đức Anh, Phạm Hồng Phong, Đinh Nho Tâm (12 THPT Hà Nội - Amsterdam, **Hà Nội**); Trác Văn Kỳ, Đặng Văn Trường (12 THPT Chuyên, **Hà Tĩnh**); Nguyễn Thị Thanh Hằng, Bùi Đức Thành, Lương Đức Trọng (12 THPT Nguyễn Trãi, **Hải Dương**); Phạm Huy Tiến, Trần Thị Hồng Trang (12 THPTNK Trần Phú, **Hải Phòng**); Hoàng Hà, Phùng Văn Trang (12 THPT Chuyên, **Hưng Yên**); Ngô Sĩ Tú (11 THPT Lê Quý Đôn, **Khánh Hòa**); Vũ Minh Triều (12 THPT Phan Bội Châu, **Nghệ An**); Lương Thị Kiều Oanh (11

THPT Lương Văn Tụy, **Ninh Bình**); Trần Trọng Nam, Tạ Bảo Trung, Lê Việt Hà, Hoàng Vũ Hải, Nguyễn Thị Thùy Nhung (11, 12 THPT chuyên Hùng Vương, **Phú Thọ**); Phạm Ngọc Sơn (12 THPT Chuyên, **Thái Bình**); Vũ Thành Nhân, Bùi Tiến Sơn, Lưu Xuân Văn (12 THPT Chuyên, **Thái Nguyên**); Lê Đỗ Tuấn Khanh, Lê Nguyễn Minh Khoa (12, 11 THPT Lê Hồng Phong, **TP. Hồ Chí Minh**); Tôn Thất Tú (12 Quốc học, **Thừa Thiên - Huế**); Trần Bắc, Bùi Hữu Đức, Nguyễn Hoàng, Khổng Đức Kiên, Lê Minh Thắng, Bùi Văn Vũ (12 THPT Chuyên, **Vĩnh Phúc**).

BẢNG B

• **Giải Nhất:** Nguyễn Tiến Dũng (35,5 điểm), h/s lớp 12 THPT Bến Tre, **Tỉnh Bến Tre**.

• **Giải Nhì:** Không có.

• **Giải Ba:** Phan Thanh Tấn (11 THPT Lê Quý Đôn, **Bình Định**); Nguyễn Thành Nhân (12 THPT Bến Tre, **Bến Tre**); Tôn Anh Kiệt (12 THPT Kon Tum, **Kon Tum**); Trần Minh, Hồ Sĩ Sáng (12 THPT Hải Lăng, THPT Chuyên, **Quảng Trị**); Phạm Quang Vinh (12 THPT Chuyên, **Tiền Giang**).

• **Giải Khuyến Khích:** Lương Hồng Dũng, Nguyễn Duy Thành (12 THPT Lê Quý Đôn, **Bà Rịa - Vũng Tàu**); Đinh Bá Tuấn (12 THPT Nguyễn Du, **Đắk Lắk**); Đặng Phùng Hưng, Hoàng Hà Hưng, Nguyễn Hà Thuật, Bùi Lê Vũ (11, 12 THPT Hoàng Văn Thụ, **Hòa Bình**); Nguyễn Thị Ngọc Thơ (12 THPT Chuyên, **Kon Tum**); Nguyễn Ngọc Duy (12 THPT Thăng Long, **Lâm Đồng**); Nguyễn Ngọc Tùng (12 THPT Lương Văn Chánh, **Phú Yên**); Phạm Việt Huy, Nguyễn Bình Thành, Nguyễn Bảo Trân (12 THPT Lê Khiết, THPT Mộ Đức 2, **Quảng Ngãi**); Trần Quang Nguyễn, Hoàng Tiến Trung, Nguyễn Văn Việt, Nguyễn Kim Vĩ, Nguyễn Trác Việt (11, 12 THPT Lê Quý Đôn, THPT Thị xã Quảng Trị, **Quảng Trị**); Lê Nguyễn Phương Thi (11 THPT Chuyên, **Tiền Giang**); Đào Thu Hà (12 THPT Nguyễn Tất Thành, **Yên Bái**).

GIẢI TRÍ TOÁN HỌC (Tiếp trang 26)

Ta cũng có $289 = 17^2 = 15^2 + 8^2 = 12^2 + 9^2 + 8^2 = 16^2 + 5^2 + 2^2 + 2^2 = 12^2 + 8^2 + 8^2 + 4^2 + 1^2 = 12^2 + 9^2 + 4^2 + 4^2 + 4^2 + 4^2 = \dots$

Các bạn điền tiếp nhé!

Như vậy số ngày nghỉ và cũng là số ngày của một năm có thể là 169 hoặc 289...

4. Giá bán lẻ mặt hàng E

Gọi e là giá một đơn vị mặt hàng E mà Paul đã mua. Gọi $s(n)$ là tổng các chữ số của n (viết trong hệ thập phân). Theo giả thiết có

$$s(e^3) = e \quad (2)$$

Gọi k là số chữ số của e thì e^3 có không quá $3k$ chữ số. Nếu $k > 2$ thì $e \geq 10^{k-1} > 27k = 3k \times 9 \geq s(e^3)$. (Chứng minh bằng quy nạp).

Do đó $k \leq 2$ và $e = s(e^3) \leq 27 \times 2 = 54$. Các giá trị thích hợp của e là 1, 8, 17, 18, 26, 27 qua phép thử trực tiếp.

Vậy E có thể có một trong các giá trị trên.

Nhận xét. 1) Nhiều bạn giải sai câu 3 vì cho rằng $x^2 = 2y^2$ với x là giá tiền mặt hàng mua ngày thứ nhất còn y là giá tiền mặt hàng mua ngày thứ hai.

2) Các bạn được quà tặng lần này:

Nguyễn Khắc Dũng, 11A2, PTCTT, ĐHSP Hà Nội, Hàn Ngọc Đức, K47, A2 Toán Tin, ĐHKHTN Hà Nội, Vũ Văn Tú, thôn Ngọc Quan, Lâm Thao, Lương Tài, **Bắc Ninh**, Trần Vũ Minh Trang, Lê Thị Ngọc Anh, 10, THPT Lê Quý Đôn, **TP. HCM**, Trần Minh Hòa, 12A3, THPT Phan Châu Trinh, **Đà Nẵng**, (K161/12 Thanh Thủy, **Đà Nẵng**), Hoàng Thị Lý, 9B, THCS Trần Quốc Toàn, **Đông Hà, Quảng Trị** (khóm 4, phường 3, **Đông Hà, Quảng Trị**).

BÍNH NAM HÀ



CÁC LỚP THCS

Bài T1/327. (Lớp 6). Bạn Sáu viết 7 số khác nhau, mỗi số gồm 7 chữ số phân biệt từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Hỏi bạn Sáu có thể viết được dạng thức sao cho tổng các lũy thừa bậc 7 của một vài số (phân biệt) trong 7 số này bằng tổng các lũy thừa bậc 7 của tất cả các số (phân biệt) còn lại?

NGUYỄN XUÂN BÌNH
(NXB Giáo dục)

Bài T2/327. (Lớp 7). Chứng minh rằng

$$\frac{1}{65} < \frac{1}{5^3} + \frac{1}{6^3} + \dots + \frac{1}{n^3} + \dots + \frac{1}{2004^3} < \frac{1}{40}$$

trong đó tổng gồm 2000 số hạng.

NGUYỄN PHƯỚC
(GV THCS Kim Long, Huế, Thừa Thiên - Huế)

Bài T3/327. Tìm mọi số nguyên x sao cho $x^3 - 2x^2 + 7x - 7$ chia hết cho $x^2 + 3$

HỒ BÁ HIẾU
(GV THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu, Nghệ An)

Bài T4/327. Giải phương trình

$$4x^2 - 4x - 10 = \sqrt{8x^2 - 6x - 10}$$

PHẠM THỊ VIỆT THÁI
(GV THPT Hồng Lĩnh, Hà Tĩnh)

Bài T5/327. Chứng minh rằng

$$\left(1 + \frac{1}{a^3}\right) \left(1 + \frac{1}{b^3}\right) \left(1 + \frac{1}{c^3}\right) \geq \frac{729}{512}$$

trong đó a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 6$.

ĐỖ NGỌC ÁNH
(SV DH34 Học viện Quân y, Hà Đông, Hà Tây)

Bài T6/327. Hai đường tròn tâm O_1 bán kính R_1 và tâm O_2 bán kính R_2 cắt nhau tại hai điểm

A, B . Tiếp tuyến với đường tròn (O_1) tại A cắt đường tròn (O_2) tại C . Tiếp tuyến với đường tròn (O_2) tại A cắt đường tròn (O_1) tại D . Gọi M là giao điểm của hai đường thẳng AB và CD . Gọi N là trung điểm của CD . Chứng minh rằng

$$\widehat{CAM} = \widehat{DAN} \text{ và } \frac{MC}{MD} = \frac{R_2^2}{R_1^2}.$$

NGUYỄN THU DUNG
(SV Kinh tế 28E ĐH Luật, Hà Nội)

Bài T7/327. Tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn bán kính R và ngoại tiếp đường tròn bán kính r . Chứng minh rằng $R \geq r\sqrt{2}$.

HOÀNG TRỌNG HẢO
(SV K49 Toán, ĐHSPT Hà Nội)

CÁC LỚP THPT

Bài T8/327. Hai dãy số (x_n) và (y_n) ($n = 1, 2, 3, \dots$) được xác định bởi: $x_1 = -1, y_1 = 1, x_{n+1} = -3x_n^2 - 2x_n y_n + 8y_n^2$,

$$y_{n+1} = 2x_n^2 + 3x_n y_n - 2y_n^2 \text{ với mọi } n = 1, 2, 3, \dots$$

Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho $x_p + y_p$ không chia hết cho p .

VŨ ĐÌNH THẾ
(SV BK32 K48, ĐH Bách Khoa, Hà Nội)

Bài T9/327. Các số thực dương a, b, c, d thỏa mãn $a \leq b \leq c \leq d$ và $bc \leq ad$. Chứng minh rằng

$$a^b \cdot b^c \cdot c^d \cdot d^a \geq a^d \cdot b^a \cdot c^b \cdot d^c$$

MAI HỮU KHÁNH
(SV K29, ĐH Kinh tế TP HCM)

Bài T10/327. Xét hàm số $f_n(x) = e^{-x} \cdot \sum_{m=0}^n \frac{x^m}{m!}$,

trong đó x là số thực dương và n là số nguyên dương.

1) Chứng minh rằng với mỗi số thực dương k với $0 < k < 1$ và mỗi số nguyên dương n thì phương trình $f_n(x) = k$ có nghiệm duy nhất.

2) Gọi α_n là nghiệm của phương trình trên.

$$\text{Tìm } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\alpha_n}.$$

BÙI VĂN VIỆN
(GV THPT chuyên Trần Đại Nghĩa, TP HCM)

Bài T11/327. Cho tam giác ABC với $BC = a, CA = b, AB = c$ nội tiếp đường tròn bán kính R .

Gọi l_a, l_b, l_c là độ dài ba đường phân giác và r_a, r_b, r_c là bán kính các đường tròn bàng tiếp tương ứng với các góc A, B, C . Chứng minh rằng :

$$\frac{l_a^2 \cdot l_b^2 \cdot l_c^2}{a^2 b^2 c^2} \leq \left(\frac{r_a + r_b + r_c}{6R} \right)^3$$

PHAN HOÀNG NINH
(GV THPT Lục Ngạn II, Bắc Giang)

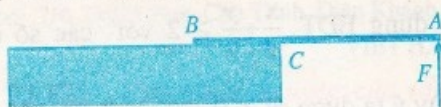
Bài T12/327. Cho tứ diện $A_1A_2A_3A_4$ ngoại tiếp mặt cầu tâm O . Gọi B_i là tiếp điểm của mặt cầu với mặt đối diện với đỉnh A_i ($i = 1, 2, 3, 4$). Chứng minh rằng trong các góc tạo bởi mỗi cặp cạnh OB_1, OB_2, OB_3, OB_4 thì tồn tại

một góc α có $\sin \alpha \leq \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

TRẦN VIỆT ANH
(SV K51 CLC Khoa Toán, DHSP Hà Nội)

CÁC ĐỀ VẬT LÝ

Bài L1/327. Một thanh đồng chất, tiết diện đều, chiều dài $AB = l$ có một phần BC nằm ngang trên bàn như hình vẽ.

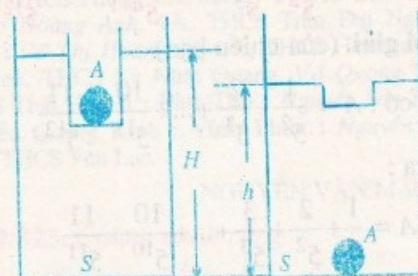


Để giữ được thanh ở vị trí cân bằng, cần phải tác dụng lực $\vec{F}$ theo phương thẳng đứng vào đầu

A của thanh với các giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của F thỏa mãn điều kiện $\frac{F_{\max}}{F_{\min}} = 1,25$. Hãy xác định phần chiều dài BC của thanh nằm trên bàn.

NGUYỄN XUÂN QUANG
(THPT chuyên Vĩnh Phúc)

Bài L2/327. Một cốc đựng một hòn sỏi A có khối lượng $m_A = 48\text{gam}$ và khối lượng riêng là $\rho_A = 2.10^3 \text{ kg/m}^3$. Thả cốc vào một bình đựng chất lỏng B có khối lượng riêng $\rho_B = 800 \text{ kg/m}^3$ thì thấy độ cao của chất lỏng trong bình là $H = 20\text{cm}$ (hình 1). Lấy hòn sỏi A ra khỏi cốc



Hình 1

Hình 2

rồi thả nó vào bình chất lỏng (hình 2) thì thấy độ cao của chất lỏng trong bình bây giờ là h . Hãy xác định h , biết rằng bình đựng chất lỏng có dạng hình trụ, với đáy có diện tích $S = 40\text{cm}^2$.

NGUYỄN QUANG HẬU
(Hà Nội)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/327. (for 6th grade).

Can my friend write 7 distinct 7-digit numbers so that :

i) for writing each number, he uses 7 distinct digits 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ;

ii) the sum of the 7th powers of some (distinct) numbers among them is equal to the sum of the 7th powers of the others ?

T2/327. (for 7th grade). Prove that

$$\frac{1}{65} < \frac{1}{5^3} + \frac{1}{6^3} + \dots + \frac{1}{n^3} + \dots + \frac{1}{2004^3} < \frac{1}{40}$$

(the sum consists of 2000 terms).

T3/327. Find all integers x such that

$$x^3 - 2x^2 + 7x - 7 \text{ is divisible by } x^2 + 3$$

T4/327. Solve the equation

$$4x^2 - 4x - 10 = \sqrt{8x^2 - 6x - 10}$$

T5/327. Prove that $\left(1 + \frac{1}{a^3}\right)\left(1 + \frac{1}{b^3}\right)\left(1 + \frac{1}{c^3}\right) \geq \frac{729}{512}$

where a, b, c are positive real numbers satisfying $a + b + c = 6$.

T6/327. The circle (O_1) with center O_1 , radius R_1 cuts the circle (O_2) with center O_2 , radius R_2 at the points A and B. The tangent to (O_1) at A cuts (O_2) at C. The tangent to (O_2) at A cuts (O_1) at D. Let M be the point of intersection of AB and CD, let N be the midpoint of CD. Prove

$$\text{that : } \widehat{CAM} = \widehat{DAN} \text{ and } \frac{MC}{MD} = \frac{R_2^2}{R_1^2}.$$

(Xem tiếp trang 22)



Bài T1/323. (Lớp 6). So sánh $\frac{1}{16}$ với tổng A gồm 11 số hạng sau :

$$A = \frac{1}{5^2} + \frac{2}{5^3} + \dots + \frac{n}{5^{n+1}} + \dots + \frac{11}{5^{12}}.$$

Lời giải. (của nhiều bạn)

$$\text{Ta có : } A = \frac{1}{5^2} + \frac{2}{5^3} + \dots + \frac{10}{5^{11}} + \frac{11}{5^{12}} \quad (1)$$

suy ra :

$$5A = \frac{1}{5} + \frac{2}{5^2} + \frac{3}{5^3} + \dots + \frac{10}{5^{10}} + \frac{11}{5^{11}} \quad (2)$$

Trừ theo từng vế (2) cho (1) được :

$$4A = \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \dots + \frac{1}{5^{11}} - \frac{11}{5^{12}}$$

$$\text{Tính } B = \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \dots + \frac{1}{5^{11}} \quad (3)$$

$$\text{Ta có } 5B = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{5^{10}} \quad (4)$$

Trừ theo từng vế (4) cho (3) được

$$4B = 1 - \frac{1}{5^{11}}. \text{ Do đó } B = \frac{1}{4} - \frac{1}{4.5^{11}}.$$

$$\text{Vậy } 4A = B - \frac{11}{5^{12}} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4.5^{11}} - \frac{11}{5^{12}} < \frac{1}{4}.$$

$$\text{Suy ra } A < \frac{1}{16}.$$

Nhận xét. 1) Cũng với cách làm trên, một số bạn đã chứng minh bài toán tổng quát. "Với a, n là hai số nguyên dương, $a > 1$, thì

$$A = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} + \dots + \frac{n}{a^{n+1}} < \frac{1}{(a-1)^2}$$

2) Các bạn có lời giải tốt là : **Phú Thọ :** Phạm Thị Mai Phương, 5C, TH Hùng Vương, TX. Phú Thọ ; **Nam Định :** Vũ Thị Thủy, 6A, THCS Nam Hải, Nam Trực ; **Nghệ An :** Phạm Lê Nhật Hoàng, 6A, THCS Đặng Thai Mai, TP Vinh, **Trần Thị Thanh Bình,** 6A, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu ; **Hà Tĩnh :** Vương Bằng Việt, 7₁, THCS

Nam Hà, TX. Hà Tĩnh ; **Gia Lai :** Nguyễn Hằng Phú, 5A, TH Kim Đồng, Kbang ; **Khánh Hòa :** Vũ Duy Ngọc Tân, 6¹¹, THCS Phan Chu Trinh, TT. Diên Khánh; **Bình Định :** Phan Thị Phương Ly, 6A2, THCS Ngô Mây, Phù Cát.

TRẦN HỮU NAM

Bài T2/323. (Lớp 7). Chứng minh rằng

$$\frac{a}{2a+b+c} + \frac{b}{2b+c+a} + \frac{c}{2c+a+b} \leq \frac{3}{4}.$$

trong đó a, b, c là các số dương.

Lời giải. Đặt $x = 2a+b+c$, $y = 2b+c+a$, $z = 2c+a+b$ thì $x+y+z = 4(a+b+c) = 4(x-a) = 4(y-b) = 4(z-c)$ suy ra $3x - (y+z) = 4a$, $3y - (y+z) = 4b$, $3z - (x+y) = 4c$.

$$\text{Từ đó với } T = \frac{a}{2a+b+c} + \frac{b}{2b+c+a} + \frac{c}{2c+a+b},$$

ta có

$$4T = \frac{3x - (y+z)}{x} + \frac{3y - (z+x)}{y} + \frac{3z - (x+y)}{z}$$

$$= 9 - \left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y} \right) - \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z} \right) - \left(\frac{z}{y} + \frac{y}{z} \right)$$

Áp dụng BĐT $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$ với các số dương

$$x, y \text{ tùy ý ta được } 4T \leq 9 - 6 \Rightarrow T \leq \frac{3}{4} \text{ (đpcm).}$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z \Leftrightarrow a = b = c$.

Nhận xét. 1) Nhiều bạn giải bài trên bằng cách sử

dụng BĐT $(x+y+z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \geq 9$ rồi thay x, y, z

bởi a, b, c như cách đặt trên sau đó khai triển và rút gọn. Có thể chứng minh BĐT này bằng cách khai triển, rút gọn hoặc sử dụng BĐT Cô-si cho 3 số dương x, y, z và

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}.$$

2) Nhiều bạn đã chỉ ra rằng : không yêu cầu các số a, b, c phải nguyên và chiều của bất đẳng thức phải là $T \leq 3/4$ như đã sửa ở đề bài lần này. Một số bạn giả sử $a \geq b \geq c$ là sai vì vai trò a, b, c ở đây chỉ là hoán vị vòng quanh nên không thể sắp thứ tự tùy ý.

3) Bạn **Lê Thị Hạnh,** 7A5, THCS Quang Trung, TP Thanh Hóa đã giải bài toán tổng quát (sử dụng cách giải đã trình bày) : Chứng minh rằng

$$\frac{a_1}{ka_1 + a_2 + \dots + a_n} + \frac{a_2}{ka_2 + a_3 + \dots + a_n + a_1} + \dots$$

$$+ \frac{a_n}{ka_n + a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}} \leq \frac{n}{n+k-1}$$

trong đó k, n là các số nguyên ($n \geq 1, k \geq 2$) và a_i ($i = 1, 2, \dots, n$) là các số dương.

4) Ngoài bạn Hạnh, các bạn sau có lời giải tốt:

Phú Thọ: Nguyễn Thùy Dung, 7A1, THCS Lâm Thao; **Vinh Phúc:** Lương Hoàng Khánh Linh, 7C, THCS Vinh Tường, Đại Thị Ánh, 7A, THCS Yên Lạc, Hà Nội; **Nguyễn Ngọc Hiếu,** 7A, THCS Nguyễn Công Trứ, **Nguyễn Quang Lộc,** 7A1, THCS Chu Văn An, Ba Đình, **Lê Minh Đức,** 7H1, THCS Trưng Vương, Hoàn Kiếm; **Hà Tây:** Nguyễn Văn Quang, 7D, THCS Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hòa; **Hòa Bình:** Kiều Minh Thành, 7A1, THCS TTtr Bo, Kim Bôi; **Bắc Ninh:** Nguyễn Thị Dung B, 7A, THCS Lê Văn Thịnh, Gia Bình; **Bắc Giang:** Trịnh Thị Nga, 7A, THCS Lãng Sơn, Yên Dũng; **Nam Định:** Vũ Bích Ngọc, 7A, THCS Nam Hải, Nam Trực; **Hải Dương:** Vũ Minh Tuấn, 7A, THCS Chu Văn An, Sao Đỏ, Chí Linh, **Ngô Thị Hà,** 6A, THCS Hoàng Sơn, Kinh Môn; **Hải Phòng:** Vũ Hồng Anh, 7C2, THCS Trần Phú, Lê Chân; **Thanh Hóa:** Nguyễn Thị Tâm Phương, 7A, THCS Nguyễn Chí Chích, Đông Sơn, **Vũ Hồng Phúc,** 7C, THCS Tây Đô, Vĩnh Lộc, **Nguyễn Trần Hiền,** 7C, THCS Lê Hữu Lập, Hậu Lộc; **Nghe An:** Tăng Văn Bình, 6B, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Hà Tĩnh:** Vương Bằng Việt, 7/2, THCS Nam Hà, TX. Hà Tĩnh; **Đắk Lắk:** Võ Văn Tuấn, 7A5, THCS Buôn Hồ, Krông Buk; **Bình Định:** Bùi Bảo Khang, 7A1, THCS An Nhơn 2, An Nhơn, **Trương Thị Ngọc Hiếu,** 7A2, **Trần Thị Quỳnh Giao,** 7A3, **Nguyễn Duy Hoàng Việt,** 7A6, THCS Ngô Mây, Phù Cát; **Khánh Hòa:** Trần Hiếu Hoài, 7/4, THCS Phan Chu Trinh, Diên Khánh.

VIỆT HẢI

Bài T3/323. Tìm phân nguyên của tổng A gồm 50 số hạng:

$$A = \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$$

Lời giải. Dễ thấy

$$1 > \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} > \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} > \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} > \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{5}} > \dots (1)$$

Do đó

$$2A > \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{101}-\sqrt{100}}$$

$$= (\sqrt{2}-1) + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + \dots + (\sqrt{100}-\sqrt{99}) + (\sqrt{101}-\sqrt{100}) = \sqrt{101}-1 > 9$$

Suy ra $A > 4,5$

Tương tự, sử dụng (1), ta có

$$2A <$$

$$< 1 + \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$$

$$= 1 + (\sqrt{2}-1) + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + \dots + (\sqrt{100}-\sqrt{99}) = \sqrt{100} = 10$$

Suy ra $A < 5$.

Từ (2) và (3) ta thu được $4,5 < A < 5$ hay phần nguyên của A bằng 4.

Nhận xét. Đây là một bài toán loại dễ nên có số lượng lớn các bài giải gửi tới tòa soạn. Những bạn có tên sau đây có lời giải tốt:

Bac Liêu: Trần Mỹ Linh, THCS Trần Huỳnh; **Đắk Lắk:** Tôn Thất Nhật Trường, 9A5, THCS Phan Chu Trinh; **Đồng Tháp:** Tường Phúc Lâm, 9A1, THCS Sa Đéc; **Hà Tây:** Nguyễn Mai Hoa, THCS Nguyễn Văn Huyền, **Nguyễn Văn Quang,** 7D, THCS Nguyễn Thượng Hiền; **Hải Dương:** Vũ Đình Quyển, 9B, THCS Nguyễn Trãi; **Hải Phòng:** Vũ Hồng Anh, 7C2, THCS Trần Phú; **Nam Định:** Phạm Quốc Doanh, 9A4, THCS Lê Quý Đôn, **Phạm Tiến Đạt,** 8B, THCS Trần Huy Liệu, **Trần Quang Huy,** 9A1, THCS Phùng Chí Kiên; **TP Hồ Chí Minh:** Đào Ngọc Hoàng Anh, 9A, THCS Trần Đại Nghĩa; **Nghe An:** Võ Thị Hoàng Nga, 6, THCS Hermann, **Lê Ngọc Thạch,** THCS Lý Nhật Quang, **Võ Quang Vinh,** 8D, THCS Thái Hòa II; **Phú Thọ:** Nguyễn Sơn Tùng, 8B, **Nguyễn Quang Kính;** **Vinh Phúc:** Nguyễn Hữu Kiên, 9A, THCS Yên Lạc.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T4/323. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sqrt[3]{b^3+c^3}} + \frac{b}{\sqrt[3]{c^3+a^3}} + \frac{c}{\sqrt[3]{a^3+b^3}} < 2\sqrt[3]{4}.$$

trong đó a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Lời giải. Ta có $b^3 + c^3 \geq \frac{1}{4}(b+c)^3$. Thật vậy,

sử dụng hằng đẳng thức, ta dễ dàng thấy rằng bất đẳng thức này tương đương với bất đẳng thức đúng $(b-c)^2(b+c) \geq 0$. Tương tự, ta có

$$c^3 + a^3 \geq \frac{1}{4}(c+a)^3 \text{ và } a^3 + b^3 \geq \frac{1}{4}(a+b)^3. \text{ Gọi } A$$

là vế trái của BĐT cần chứng minh, ta suy ra

$$A \leq \sqrt[3]{4} \left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \right)$$

Trong một tam giác, tổng hai cạnh lớn hơn cạnh còn lại, do đó ta có

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = \frac{2a}{2(b+c)} + \frac{2b}{2(c+a)} + \frac{2c}{2(a+b)} \leq \frac{2a}{b+c+a} + \frac{2b}{c+a+b} + \frac{2c}{a+b+c} = 2$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Nhận xét. Tòa soạn nhận được rất nhiều bài giải, trừ hai bài còn tất cả có lời giải đúng. Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Vinh Phúc: Hoàng Tùng Bách, 9E, THCS Xuân Hòa, TX Phúc Yên; **Đại Thị Ánh,** 7A, **Nguyễn Hải Long,**

Nguyễn Hữu Kiên, 9A, Đào Trung Hiếu, 8A, THCS Yên Lạc, Vũ Thị Hà, Nguyễn Văn Ngọc, 9A, THCS Lập Thạch, Nguyễn Xuân Thọ, 9B, Nguyễn Sơn Tùng, 9C, THCS Vinh Yên; Nguyễn Ngọc Đại, 9C, THCS Vinh Tường; **Thanh Hóa**: Lê Thị Mai Anh, 7D, Hoàng Thu Hiền, Lê Viết Tuấn, Lê Hữu Tuấn, 9B, Cao Anh Tuấn, 8A, THCS Nhữ-Bá Sỹ, Hoàng Hóa; Bùi Phong Quang, Dương Anh Tuấn, La Thị Kiều Oanh, La Tiến Thành, 9A, THCS Lê Hữu Lập, Hậu Lộc, Lê Hữu Hoàn, 9K, THCS Lý Tự Trọng TP Thanh Hóa, Trịnh Huy Giang, Doãn Thanh, La Tiến Nam, 9A, THCS Nguyễn Chí, Đông Sơn, Lê Thị Hạnh, 7A5, THCS Quang Trung, TP. Thanh Hóa; **Thái Bình**: Nguyễn Thị Mỹ, Đặng Văn Tình, 9B, THCS Thanh Nê, Kiến Xương, Hà Minh Tuấn, 9A THCS Thái Phúc, Thái Thụy; **TP. Hồ Chí Minh**: Đào Ngọc Hoàng Anh, Đỗ Tuấn Hoàng Anh, 9A, THCS Trần Đại Nghĩa, Mạc Quế Vinh, 8/1, THCS Hồng Bàng, Quận 5; Hà Tây: Nguyễn Văn Quang, 7D, THCS Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hòa, Trịnh Ngọc Tú, 9A3, THCS Ngô Sĩ Liên, Phú Quốc Tuấn, 8D, THCS Thạch Thất; **Nam Định**: Trần Quang Huy, 9A1 THCS Phùng Chí Kiên, Đinh Quang Huy, 9A6, THCS Trần Đăng Ninh, TP. Nam Định, Nguyễn Đức Hiệp, Phạm Quốc Doanh, 9A4, THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên; **Phú Thọ**: Lương Đức Hoàng, Nguyễn Văn Hảo, 9A, THCS Giấy Phong Châu, Nguyễn Tiến Thanh, 8C, Nguyễn Sơn Tùng, 8B, THCS Nguyễn Quang Bích, Tam Nông; **Hải Dương**: Phạm Thùy Dung, 8A, THCS Đại Đức, Kim Thành; Vũ Đình Quý, 9B, THCS Nguyễn Trãi, Nam Sách, Vũ Thị Quỳnh Hoa, 9C, THCS Chu Văn An, Chí Linh; **Gia Lai**: Nguyễn Tài Đại, 8A, THCS Nguyễn Bình Khiêm, Kbang; **Khánh Hòa**: Nguyễn Thanh Lâm, 8¹, THPT Hùng Vương, Ninh Hòa; **Bắc Giang**: Thân Ngọc Thúc, 9A, THCS Nguyễn Hồng, Tân Yên; **Đà Nẵng**: Nguyễn Như Quốc Trung, 8¹ THCS Lý Thường Kiệt; **Nghệ An**: Đặng Anh Tuấn, 8D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, Nguyễn Đăng Cường, 9A, THCS Quán Hành, Nghi Lộc; **Vĩnh Long**: Dương Công Định, 9/1, THCS Nguyễn Bình Khiêm; **Hà Nam**: Nguyễn Mạnh An, 9B, THCS Trần Phú, TX. Phú Lễ; **Hà Tĩnh**: Vương Bằng Việt, 7¹ THCS Nam Hà, TX. Hà Tĩnh; **Đắk Lắk**: Võ Văn Tuấn, 7A5, THCS Buôn Hồ, Krông Buk, Phan Duy Khánh, 9A7, THCS Trần Hưng Đạo, TP. Buôn Ma Thuột; **Thừa Thiên - Huế**: Nguyễn Vũ Thanh Long, 8/1, THCS Chu Văn An, TP Huế.

PHAN DOẢN THOẠI

Bài T5/323. Cho tứ giác lồi $ABCD$. Trên các đường thẳng BC , AD lấy các điểm E , F theo thứ tự sao cho $AE \parallel CD$, $CF \parallel AB$. Chứng minh rằng tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp khi và chỉ khi tứ giác $AECF$ ngoại tiếp.

Lời giải. Trước hết ta chứng minh Bổ đề sau.

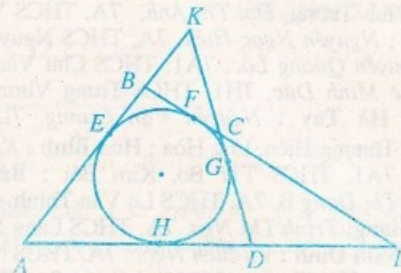
Tứ giác $ABCD$ có các cạnh đối AB và CD kéo dài cắt nhau tại K , các cạnh BC và AD kéo dài cắt nhau tại L . Khi đó các điều kiện sau là tương đương:

- Tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp.
- $BK + BL = DK + DL$.

c) $AK + CL = AL + CK$.

• Chứng minh a) $\Rightarrow$ b).

Giả sử có đường tròn tiếp xúc với các cạnh của tứ giác tại E, F, G, H (h. 1). Ta có



Hình 1

$$\begin{aligned} BK + BL &= (KE - BE) + (BF + FL) = (KG - BF) + (BF + HL) = KG + HD + DL \\ &= KG + DL + DG = DK + DL. \end{aligned}$$

• b $\Rightarrow$ a) Giả sử có $BK + BL = DK + DL$ (1). Vẽ đường tròn (O) nội tiếp $\triangle AKD$. Từ L vẽ tiếp tuyến với (O) , cắt AK tại B' . Theo chứng minh trên ta có $B'K + B'L = DK + DL$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra:

$$|BK - B'K| = |B'L - BL| \Rightarrow BB' = |B'L - BL| \Rightarrow B \equiv B'.$$

Chứng tỏ tứ giác $ABCD$ nội tiếp.

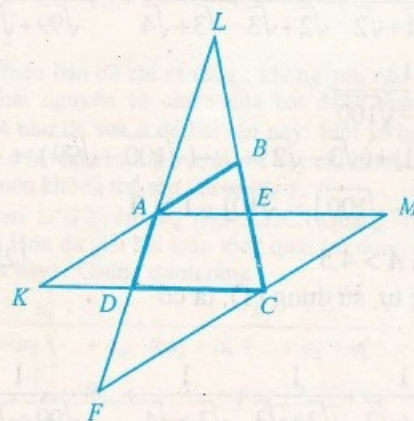
• Tương tự ta chứng minh được a) $\Leftrightarrow$ c).

Trở lại bài toán của chúng ta.

– Nếu $ABCD$ có một hoặc cả hai cặp cạnh đối song song: Kiểm tra trực tiếp, dễ dàng thấy rằng $ABCD$ ngoại tiếp khi và chỉ khi $AECF$ ngoại tiếp.

– Xét trường hợp $ABCD$ có các cặp cạnh đối không song song. Giả sử AB cắt CD tại K , AD cắt BC tại L , AE cắt CF tại M (h. 2).

Ta có $ABCD$ ngoại tiếp



Hình 2

$$\Leftrightarrow AK+CL = AL+CK ((a) \Leftrightarrow c))$$

$$\Leftrightarrow CM+CL = AL+AM (AMCK \text{ là hình bình hành})$$

$\Leftrightarrow AECF$ ngoại tiếp (áp dụng bổ đề đối với tứ giác $AECF$, $a) \Leftrightarrow b)$).

Nhận xét: 1) Đây là bài toán tương đối khó, rất ít bạn tham gia giải. Một số bạn còn nhầm lẫn điều kiện của tứ giác ngoại tiếp với điều kiện của tứ giác nội tiếp.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Vinh Phúc: Nguyễn Xuân Thọ, 9B, THCS Vinh Yên, TX Vinh Yên; **Nam Định:** Phạm Thị Huệ, 9A2, THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên; **Hải Dương:** Vũ Thị Quỳnh Hoa, 9C, THCS Chu Văn An, Chí Linh; **Thanh Hóa:** Trịnh Huy Giang, 9A, THCS Nguyễn Chí Chích, Đông Sơn; **Nghệ An:** Nguyễn Đăng Cường, 9A, THCS Quán Hành, Nghi Lộc; **Đặng Tuấn Anh,** 8D, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Đắc Lắc:** Võ Văn Tuấn, 7A3, THCS Buôn Hồ, Krông Buk.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

Bài T6/323. Chứng minh rằng

$$a^{\log_b c} + b^{\log_c a} + c^{\log_a b} \geq 3\sqrt[3]{abc} \quad (1)$$

trong đó a, b, c là các số lớn hơn 1.

Lời giải. Từ giả thiết a, b, c lớn hơn 1 suy ra $\log_b c > 0, \log_c b > 0$. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương ta nhận được

$$a^{\log_b c} + b^{\log_c a} = a^{\log_b c} + b^{\log_c b \cdot \log_b a} =$$

$$= a^{\log_b c} + a^{\log_c b} \geq 2 \cdot a^{\frac{\log_b c + \log_c b}{2}} \geq$$

$$\geq 2 \cdot a^{\sqrt{\log_b c \cdot \log_c b}} = 2a.$$

Tương tự

$$b^{\log_c a} + c^{\log_a b} \geq 2b, \quad c^{\log_a b} + a^{\log_b c} \geq 2c$$

Cộng theo từng vế ba bất đẳng thức trên ta có

$$a^{\log_b c} + b^{\log_c a} + c^{\log_a b} \geq a + b + c \quad (2)$$

Dùng bất đẳng thức Cô-si cho ba số dương a, b, c được

$$a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc} \quad (3)$$

Từ hai BĐT (2), (3) suy ra BĐT (1). Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Nhận xét. Đây là bài toán cơ bản, đơn giản. Tòa soạn nhận được lời giải của hơn 200 bạn, hầu hết các bạn giải theo cách giải trên. Các bạn sau có lời giải tốt:

Hà Tây: Lê Tiến, 10B2, THPT Sơn Tây; **Hà Nội:** Huỳnh Trung Anh, 10T1, THPT Hà Nội - Amsterdam, Nguyễn Hồng Hiền, Nguyễn Thị Ngọc, 10A1, PTCT, ĐHKHTN - ĐHQG; **Hưng Yên:** Vũ Thị Thanh Xuân, 10T, THPT chuyên; **Hải Dương:** Hoàng Văn Hùng, 10A1, THPT Kinh Môn, Phạm Hoàng Thái, 10K, THPT Kim Thành; **Nam Định:** Nguyễn Văn Đình, 10I, THPT Giao Thủy; **Nghệ An:** Nguyễn Đình Phương, 10G, THPT Nghĩa Đàn; **Quảng Nam:** Ngô Trần Thành,

10A1, THPT Sào Nam; **Phú Yên:** Nguyễn Quốc Hưng, 10A3, THPT DL Duy Tân; **Đồng Tháp:** Bùi Kiệt, Lữ Thiên Nhân, 10T, THPT Sa Đéc; **Cà Mau:** Châu Ngọc Huy, 10A1, THPT Đầm Dơi; **Thừa Thiên - Huế:** Nguyễn Thị Bích Liên, Phan Lê Anh Minh, 10T, THPT Quốc học Huế.

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T7/323. Chứng minh rằng với tam giác nhọn ABC ta có

$$\frac{1}{3}(\cos 3A + \cos 3B) + \cos A + \cos B + \cos C \geq \frac{5}{6}$$

Lời giải. (Của bạn Trần Văn Thiện, 12C5, THPT Như Thanh, Thanh Hóa).

Vì $\triangle ABC$ nhọn nên $\cos A, \cos B, \cos C$ dương.

Áp dụng BĐT Cô-si cho ba số dương ta có:

$$\frac{4}{3}\cos^3 A + \frac{1}{12} = \frac{2}{3}\cos^3 A + \frac{2}{3}\cos^3 A + \frac{1}{12} \geq$$

$$3\sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\cos^3 A\right)^2 \frac{1}{12}} = \cos^2 A$$

Tương tự, ta có:

$$\frac{4}{3}\cos^3 B + \frac{1}{12} \geq \cos^2 B$$

$$\text{Vậy, } \frac{4}{3}(\cos^3 A + \cos^3 B) + \frac{1}{6} \geq \cos^2 A + \cos^2 B \quad (1)$$

Mặt khác, $\cos C > 0$; $\cos(A - B) \leq 1$

Suy ra: $\cos C \geq \cos C \cos(A - B)$

$$= -\cos(A+B)\cos(A-B) = -\frac{1}{2}(\cos 2A + \cos 2B)$$

$$= -\frac{1}{2}(2\cos^2 A + 2\cos^2 B - 2)$$

$$= -\cos^2 A - \cos^2 B + 1 \quad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra:

$$\frac{4}{3}(\cos^3 A + \cos^3 B) + \cos C \geq \frac{5}{6}$$

Chú ý rằng: $4\cos^3 A = \cos 3A + 3\cos A$;

$$4\cos^3 B = \cos 3B + 3\cos B.$$

Ta có:

$$\frac{1}{3}(\cos 3A + \cos 3B) + \cos A + \cos B + \cos C \geq \frac{5}{6}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \frac{2}{3}\cos^3 A = \frac{1}{12} \\ \frac{2}{3}\cos^3 B = \frac{1}{12} \\ \cos(A-B) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos A = \frac{1}{2} \\ \cos B = \frac{1}{2} \\ A = B \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow A = B = 60^\circ \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ đều.}$$

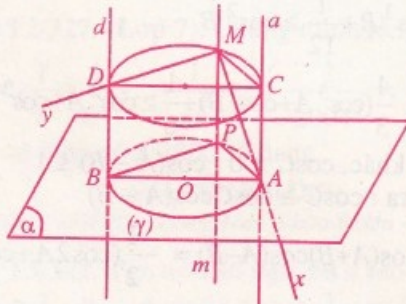
Nhận xét. 1) Đây là bài toán dễ, rất nhiều bạn tham gia giải. Tuy nhiên, để chứng minh bất thức $\frac{4}{3}\cos^3 A + \frac{1}{12} \geq \cos^2 A$, khá nhiều bạn đã dùng biện pháp khảo sát hàm số.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Hưng Yên: Bài Quang Huy, 10T, THPT chuyên Hưng Yên; **Nghe An:** Trần Duy Hải, 11G, THPT Nghĩa Đàn, Nguyễn Lê Phước, 10A2, khối PTCT, ĐH Vinh; **Hải Phòng:** Đoàn Nhật Trường, 11B2, THPT Ngô Quyền, TP Hải Phòng; **Hải Dương:** Nguyễn Anh Tuấn, 10T, THPT Nguyễn Trãi, TP Hải Dương; **Nam Định:** Nguyễn Văn Đình, 12T, THPT Giao Thủy; **Bạc Liêu:** Phạm Hùng Anh, số 11, đường Hòa Bình, TX Bạc Liêu; **Vĩnh Phúc:** Nguyễn Ngọc Huy, 11A1, THPT Lê Xoay, Vĩnh Tường; **Bắc Giang:** Thân Ngọc Thành, 11A, THPT NK Ngô Sĩ Liên, TX Bắc Giang; **Hà Nội:** Đặng Bảo Đức, 10A1, PTCT, ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài T8/323. Trong không gian cho một đường thẳng d cố định và một điểm A cố định không thuộc d . Một góc vuông xMy có cạnh Mx luôn



đi qua điểm A còn cạnh My luôn cắt và vuông góc với d . Tìm quỹ tích của điểm M .

Lời giải. Vì điểm A và đường thẳng d ($A \notin d$) cố định nên mặt phẳng (α) đi qua A vuông góc với d cũng cố định. Gọi B là giao điểm của (α) và d , My cắt d tại D và P là hình chiếu (vuông góc) của điểm M trên (α) . Thế thì $MPBD$ là hình thang vuông nên $MD \perp d \Leftrightarrow PB \parallel MD$. Và do đó, theo định lý ba đường vuông góc: $MA \perp MD \Leftrightarrow MA \perp PB \Leftrightarrow PA \perp PB \Leftrightarrow P$ thuộc đường tròn (γ) đường kính AB trong mặt phẳng $(\alpha) \Leftrightarrow$ đường thẳng MP là đường sinh của mặt trụ tròn xoay $\mathcal{T}$ nhận (γ) làm đường tròn chuẩn và đường thẳng d là một đường sinh thẳng của nó. Tóm lại, với các điểm A, B, D, P xác định như trên ta đi đến kết luận:

$$\begin{cases} Mx \perp My \\ A \in Mx, My \perp d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} PA \perp PB \\ MP \perp \alpha, \alpha \perp d \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ Quỹ tích của P là $(\gamma) \subset \alpha \Leftrightarrow$ Quỹ tích của điểm M là $\mathcal{T}$.

Nhận xét. 1) Trong lời giải trên ta đã chứng minh gộp hai phần thuận và đảo mà không cần tách bạch, chứng minh riêng rẽ mỗi phần đó. Cơ sở của việc chứng minh gộp hai phần thuận và đảo của bài toán quỹ tích trên đây là ở chỗ toàn bộ chứng minh của ta *mấu chốt* chỉ sử dụng định lý ba đường vuông góc mà định lý này bao gồm cả thuận và đảo.

Tất cả các lời giải bài toán trên đây gửi đến tòa soạn đều thực hiện đầy đủ hai phần chứng minh thuận, đảo. Điều đó không có gì là sai cả, tuy nhiên lời giải của các bạn vì thế mà không gọn.

Chúng ta cần hiểu định lý hình học được sử dụng một phần cho chứng minh phần thuận, và một phần cho chứng minh phần đảo của bài toán quỹ tích (khi chúng ta chứng minh tách bạch hai phần thuận và đảo). Các định lý khác được sử dụng đến là chung cho cả hai phần chứng minh thuận và đảo. Vì thế mà ta nói *điều mấu chốt* trong chứng minh chỉ có duy nhất một định lý được sử dụng đến bao gồm cả hai điều kiện cần và đủ.

2) Hầu hết các bạn vẽ hình thiếu trực quan, không gọi được hình ảnh của quỹ tích là một mặt trụ tròn xoay, thậm chí không vẽ mặt phẳng (α) đi qua A vuông góc với d chứa đường tròn chuẩn (γ) . Một số bạn sử dụng phương pháp tọa độ. Đáng tiếc, một số bạn đã cho lời giải sai: quỹ tích của điểm M là một đường thẳng, là hai đường thẳng, thậm chí có bạn kết luận rằng $\{M\}$ là một mặt cầu!

Bạn **La Văn Thịnh**, 12A1, THPT Hiệp Hòa II, Bắc Giang có nhận xét đúng rằng bài toán trên đây là bài số 6 của Đề thi chọn học sinh giỏi toán Quốc gia năm 1975. Tòa soạn cũng đã biết điều này.

NGUYỄN ĐĂNG PHÁT

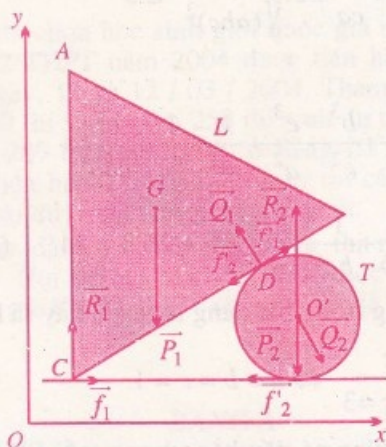
Bài L1/323. Khối lăng trụ L với khối lượng $m_1 = 10\text{kg}$ có thiết diện thẳng là tam giác đều ABC . Khối trụ T có khối lượng là $m_2 = 5\text{kg}$. Các vật được kê như hình vẽ (cạnh AC thẳng đứng). Hệ số ma sát giữa vật L với sàn, vật T với sàn đều bằng k_1 . Hệ số ma sát giữa vật L với vật T là k_2 . Cho $CD = (2/3)CB$. Tìm k_1, k_2 và áp lực ở mọi chỗ tiếp xúc.

Lời giải. L chịu tác dụng của 5 lực: trọng lực $\vec{P}_1$ ($P_1 = m_1g$), các phản lực $\vec{R}_1$ (của sàn), $\vec{Q}_1$ của (T) , các lực ma sát $\vec{f}_1$ (tại C) và $\vec{f}'_1$ (tại D) chống lại sự trượt của L sang trái). T chịu tác dụng của 5 lực: trọng lực $\vec{P}_2$ ($P_2 = m_2g$), phản lực $\vec{R}_2$ (của sàn), $\vec{Q}_2$ (của L), các lực ma sát $\vec{f}_2$ (tại M) và $\vec{f}'_2$ (tại D). Áp dụng điều kiện cân bằng cho khối lăng trụ L , chiếu phương trình tổng các lực lên hai trục Ox, Oy và xét phương trình mômen lực đối với C , ta có:

$$100 = R_1 + 0,866Q_1 + 0,5k_2Q_1 \quad (1)$$

$$k_1R_2 + 0,866k_2Q_1 = 0,5Q_1 \quad (2)$$

$$\text{và } P_1 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{3} - Q_1 \cdot \frac{2}{3}a = 0 \quad (3)$$



Tương tự với khối trụ T , ta có :

$$R_2 = 87,5 + 21,7k_2 \quad (4); \quad 21,7 = k_1R_2 + 37,5k_2 \quad (5)$$

$$f_2R - f_1R = 0 \quad (6).$$

Từ (1), (2), (3), (4), (5) và (6) tìm được :

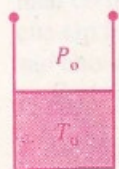
$$k_1 = 0,123; k_2 = 0,267; N_C = R_1 = 56,7 \text{ (N)}; \\ N_D = Q_1 = Q_2 = 43,3 \text{ (N)} \text{ và } N_M = R_2 = 93,3 \text{ (N)}.$$

Nhận xét. Các bạn có lời giải gọn và đúng :

Bắc Ninh : Chu Thanh Bình, Lí 12, Trần Văn Hòa, 11 Lí, THPT chuyên Bắc Ninh ; **Bắc Giang :** Phạm Thế Mạnh, 11N, THPT NK Ngô Sĩ Liên ; **Thái Nguyên :** Chu Tuấn Anh, 11 Lí, THPT chuyên Thái Nguyên ; **Quảng Ngãi :** Lê Hà Kiệt, 11A2, THPT Đức Phổ I, Đức Phổ ; **Thanh Hóa :** Nguyễn Như Hoàng, 11C6, THPT Bim Sơn.

MAI ANH

Bài L2/323. Một ống hình trụ thẳng đứng có thể tích V . Ở phía dưới một pittông nhẹ có một lượng khí hêli ở nhiệt độ T_0 . Pittông nằm ở vị trí cân bằng chia ống thành hai nửa bằng nhau (xem hình vẽ). Ở phía trên có làm hai vấu để pittông không bật ra khỏi ống. Người ta đun nóng khí từ từ đến khi nhiệt độ khí hêli là $3T_0$. Hỏi khí hêli đã nhận được một nhiệt lượng là bao nhiêu ? Bỏ qua ma sát giữa pittông và thành ống. Áp suất khí quyển bên ngoài là P_0 .



Lời giải. Khi pittông ở vị trí cân bằng chia ống làm 2 phần bằng nhau, nên khí có các thông số là $\frac{V}{2}, T_0, p_0 \Rightarrow$ số mol khí hêli là :

$$n = \frac{p_0 V}{2RT_0} \text{ mol.}$$

Trong giai đoạn đầu khi pittông chưa chạm vào vấu, thì biến đổi đẳng áp. Khi bắt đầu chạm vào vấu, khí có nhiệt độ : $T_1 = \frac{V}{V/2} T_0 = 2T_0$.

Trong quá trình này, nhiệt lượng truyền cho khí làm giãn nở sinh công và làm tăng nội năng của khí.

Theo nguyên lí I nhiệt động lực học :

$$Q = Q + \Delta U = p_0 \frac{V}{2} + nC_v T_0.$$

$$\text{Vì hêli là khí đơn nguyên tử nên } C_v = \frac{3R}{2} \Rightarrow$$

$$Q_1 = \frac{p_0 V}{2} + \frac{p_0 V}{2RT_0} \frac{3R}{2} T_0 = \frac{p_0 V}{2} + \frac{3p_0 V}{4} = \frac{5}{4} p_0 V$$

Tiếp theo, khi pittông đã chạm vào vấu, bị vấu giữ lại, làm cho thể tích khí không thay đổi. Trong quá trình này, khí không sinh công nên nhiệt lượng truyền cho khí chuyển thành nội năng của khí.

$$Q_2 = nC_v T_0 = \frac{p_0 V}{2RT_0} \frac{3}{2} RT_0 = \frac{3}{4} p_0 V$$

Vậy nhiệt lượng tổng cộng mà khí nhận được trong toàn bộ quá trình là :

$$Q = Q_1 + Q_2 = 2p_0 V.$$

Nhận xét. Các bạn có lời giải đúng và gọn :

Bắc Ninh : Đỗ Hồng Hạnh, Nguyễn Minh Cường, Nguyễn Thị Nguyệt Hằng, Phạm Tiến Dũng, Trần Văn Hòa, 11 Lí, THPT chuyên Bắc Ninh ; **Vĩnh Phúc :** Ngô Việt Cường, Nguyễn Duy Long, 10A3, Lê Sơn, Hoàng Thị Hồng Hạnh, 11A3, THPT chuyên Vĩnh Phúc ; **Hải Phòng :** Phạm Tuấn Hiệp, 10 Lí, THPT NK Trần Phú ; **Quảng Trị :** Lê Thanh Trí Nhân, 10 Lí, THPT chuyên Lê Quý Đôn ; **TP. Hồ Chí Minh :** Hoàng Nguyễn Anh Tuấn, 11 Lí, PTNK, ĐHQG TP. HCM ; **Hà Nội :** Bùi Phi Anh, 11 Lí 1, THPT Hà Nội - Amsterdam ; Nguyễn Tiến Hùng, 10B chuyên Lí, ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội ; **Nghệ An :** Nguyễn Bùi Thiên, K32 A5, THPT chuyên Phan Bội Châu, Lê Văn Hiến, 10A2, THPT Nghi Lộc I ; **Thanh Hóa :** Lưu Đức Minh, 11 K2, THPT Lam Sơn ; **Quảng Ngãi :** Phạm Nhân Thọ, 11B1, THPT Trần Quốc Tuấn, TX Quảng Ngãi ; **Khánh Hòa :** Nguyễn Ngọc Kỳ Nam, 10 Lí, THPT Lê Quý Đôn ; **Hà Tĩnh :** Nguyễn Văn Dũng, Lí khóa 9, THPT chuyên Hà Tĩnh ; **Đắk Lắk :** Nguyễn Thành Nội, 11T, THPT Nguyễn Du, Tp. Buôn Ma Thuột ; **Tiền Giang :** Nguyễn Vĩnh Phúc, 11A18, THPT Chợ Gạo.

MAI ANH

CUỘC THI KỈ NIỆM 40 NĂM TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Bài T5/THCS. Giải phương trình

$$x + \sqrt{5 + \sqrt{x-1}} = 6$$

Lời giải. Điều kiện để phương trình có nghĩa :
 $1 \leq x \leq 6$ (1). Đặt $y = \sqrt{x-1}$, $y \geq 0$ (2) thì
 phương trình trở thành : $y^2 + \sqrt{5+y} = 5$ (3)

$$y^4 - 10y^2 - y + 20 = 0$$

$$(y^2 + y - 4)(y^2 - y - 5) = 0$$

Giải ra có

$$y_1 = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2}; \quad y_2 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2};$$

$$y_3 = \frac{1 + \sqrt{21}}{2}; \quad y_4 = \frac{1 - \sqrt{21}}{2}.$$

Loại y_1 và y_4 vì trái điều kiện (2).

Thay y_2, y_3 vào (2) được :

$$x_1 = \frac{11 - \sqrt{17}}{2}; \quad x_2 = \frac{13 + \sqrt{21}}{2}.$$

Loại x_2 vì trái điều kiện (1).

Thử lại thấy x_1 đúng. Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{11 - \sqrt{17}}{2}$.

Nhận xét. 1) Có thể biến đổi từ (3) bằng cách sau :

$$\text{Đặt } u = \sqrt{5+y} \geq 0. \text{ Từ đó và (3) có } \begin{cases} u^2 - y = 5 \\ y^2 + u = 5 \end{cases}$$

Suy ra $y^2 + y - u^2 - u = 0$. PT này có hai nghiệm $y = u$ và $y = -u - 1 < 0$ trái với (2). Suy ra $y^2 - y - 5 = 0$. Giải ra được y_1, y_2 như trên.

2) Nhiều bạn giải bài này quá dài.

VŨ KIM THỦY

Bài T6/THCS. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{a^3}{b^2} + \frac{b^3}{c^2} + \frac{c^3}{a^2} + 27 \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \right)$$

trong a, b, c là các số dương thỏa mãn

$$a + b + c \leq 3.$$

Lời giải. Từ giả thiết và áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta được

$$3 \geq a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc} \Rightarrow \sqrt[3]{abc} \leq 1 \Rightarrow abc \leq 1 \quad (1)$$

Do đó :

$$\frac{a^3}{b^2} + \frac{b^3}{c^2} + \frac{c^3}{a^2} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \geq 6 \sqrt[6]{\frac{1}{abc}} \geq 6 \quad (2)$$

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \geq 3 \cdot 3 \sqrt[3]{\frac{1}{(abc)^2}} \geq 3 \quad (3)$$

Ta được

$$P = \left(\frac{a^3}{b^2} + \frac{b^3}{c^2} + \frac{c^3}{a^2} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \right) + 26 \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \right) \geq 6 + 26 \cdot 3 = 84 \quad (4)$$

Dấu bằng trong bất đẳng thức (1) xảy ra khi :

$$\begin{cases} a=b=c \\ a+b+c=3 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=1.$$

Khi đó cũng có dấu bằng trong mỗi BĐT (2), (3), (4).

Vậy $\min P = 84$ và giá trị đó đạt được khi $a = b = c = 1$.

Nhận xét. Sau khi chứng minh bất đẳng thức $abc \leq 1$, một số bạn đã áp dụng BĐT Cô-si cho 84 số gồm $\frac{a^3}{b^2}$,

$$\frac{b^3}{c^2}, \frac{c^3}{a^2}, 27 \text{ số } \frac{1}{ab}, 27 \text{ số } \frac{1}{bc} \text{ và } 27 \text{ số } \frac{1}{ca}.$$

Từ đó được BĐT đẳng thức $P \geq 84$.

NGUYỄN ANH DŨNG

Bài T5/THPT. Dãy số (u_n) ($n = 1, 2, 3, \dots$) thỏa mãn các điều kiện sau với mọi $n = 1, 2, 3, \dots$:

$$1) u_n = u_{n+2004}; \quad 2) \sum_{i=1}^{2n} u_i \leq 0; \quad 3) \sum_{i=1}^{2n-1} u_i \geq 0$$

Chứng minh rằng $|u_{2003}| \geq |u_{2004}|$.

$$\text{Lời giải. } S_k = \sum_{i=1}^k u_i, \quad k = 1, 2, \dots$$

Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Ta có :

$$\begin{cases} u_{2n} = S_{2n} - S_{2n-1} \leq 0 \\ u_{2n-1} = S_{2n-1} - S_{2n-2} \geq 0 \end{cases}$$

(Do $S_{2n} \leq 0, S_{2n-1} \geq 0$ với mọi $n = 1, 2, \dots$)

$$\text{theo GT)} \Rightarrow \begin{cases} u_{2004} \leq 0 \\ u_{2003} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow |u_{2003}| \geq |u_{2004}|$$

$$\Leftrightarrow u_{2003} + u_{2004} \geq 0.$$

Mặt khác ta có : $0 \leq S_{2004, n+1} = nS_{2004} + u_1$

(Do $u_n = u_{n+2004}$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ theo GT)

$$\Rightarrow -\frac{u_1}{n} \leq S_{2004} \leq 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{u_1}{n} \right) \leq S_{2004} \leq 0$$

$$\Rightarrow S_{2004} = 0 \text{ (do } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-u_1}{n} = 0) \Rightarrow u_{2003} + u_{2004}$$

$$= S_{2004} - S_{2002} = -S_{2002} \geq 0 \text{ (đpcm).}$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra } \Leftrightarrow S_{2002} = 0$$

Nhận xét. Phân đông các bạn không chỉ ra đẳng thức xảy ra khi nào.

ĐẶNG THANH HẢI

Bài T6/THPT. Cho đa giác đều n cạnh $A_1A_2 \dots A_n$ nội tiếp đường tròn đơn vị. Chứng minh rằng với điểm M bất kì ta có (coi A_{n+1} trùng với A_1) : $\sum_{i=1}^n MA_i \cdot MA_{i+1} \geq n$.

Lời giải. Trường hợp 1. $n = 3$.

Bổ đề : Giả sử M là một điểm bất kì nằm trong mặt phẳng chứa tam giác ABC ($BC = a$, $AC = b$, $AB = c$). Khi đó ta có bất đẳng thức

$$a \cdot MA^2 + b \cdot MB^2 + c \cdot MC^2 \geq abc$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi M trùng với tâm I đường tròn nội tiếp ΔABC .

$$\text{Thật vậy, từ } (\overline{aMA} + \overline{bMB} + \overline{cMC})^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow a^2 MA^2 + b^2 MB^2 + c^2 MC^2 + 2ab \overline{MA} \cdot \overline{MB} +$$

$$+ 2ac \overline{MA} \cdot \overline{MC} + 2bc \overline{MB} \cdot \overline{MC} \geq 0$$

$$\Rightarrow a^2 MA^2 + b^2 MB^2 + c^2 MC^2 + ab(MA^2 + MB^2 - AB^2) + ac(MA^2 + MC^2 - AC^2) + bc(MB^2 + MC^2 - BC^2) \geq 0$$

$$\Rightarrow (a+b+c)(aMA^2 + bMB^2 + cMC^2) \geq abc(a+b+c) \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\overline{aMA} + \overline{bMB} + \overline{cMC} = \vec{0} \Leftrightarrow (a+b+c) \overline{MI} + a \overline{IA} + b \overline{IB} + c \overline{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow (a+b+c) \overline{MI} = \vec{0}$$

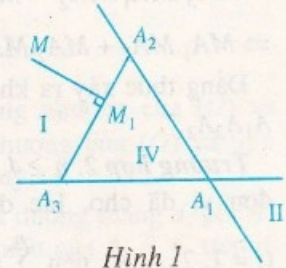
$$\Leftrightarrow M \text{ trùng với } I.$$

Trở lại bài toán, đặt $f(M) = MA_1 \cdot MA_2 + MA_1 \cdot MA_3 + MA_2 \cdot MA_3$. Ta chứng minh $f(M) \geq 3$.

Xét các khả năng sau :

M nằm trong miền chứa đường tròn bàng tiếp góc A_1 (miền I) ; M nằm trong miền góc nhọn của góc A_1 không chứa A_2A_3 (miền II) ; M nằm trên đoạn A_2A_3 (miền III) ; M nằm ở miền trong tam giác đều $A_1A_2A_3$ cạnh $a = \sqrt{3}$ (miền IV).

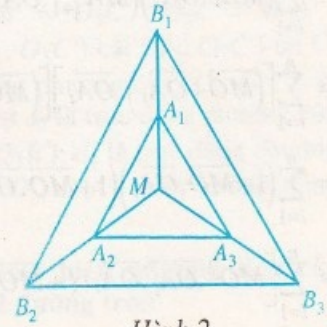
Nếu M thuộc miền I thì ta có $f(M) > f(M_1)$ (M_1 là hình chiếu của M lên A_2A_3). Nếu M thuộc miền II thì $f(M) > f(A_1) = 3$. Nếu M thuộc miền III, đặt $MA_2 = x$ thì theo định lý hàm số cosin



Hình 1

$f(M) = x(a-x) + a\sqrt{a^2+x^2-ax} \geq a^2$ (do $0 \leq x \leq a$) hay $f(M) \geq (\sqrt{3})^2 = 3$. Đẳng thức xảy ra khi $x = 0$ hoặc $x = a$, hay M trùng với A_2 hoặc M trùng với A_3 .

Nếu M thuộc miền IV (hình 2), trên các tia MA_1 , MA_2 , MA_3 lần lượt lấy các điểm B_1 , B_2 , B_3 sao cho



Hình 2

$$MA_1 \cdot MB_1 = MA_2 \cdot MB_2 = MA_3 \cdot MB_3 = a^2.$$

Lúc đó

$$MB_1 = \frac{a^2}{MA_1}, MB_2 = \frac{a^2}{MA_2}, MB_3 = \frac{a^2}{MA_3}.$$

Do $\Delta MA_1A_2 \sim \Delta MB_2B_1$ nên

$$\frac{B_1B_2}{A_1A_2} = \frac{MB_1}{MA_2} = \frac{a^2}{MA_1 \cdot MA_2}$$

$$\Rightarrow B_1B_2 = \frac{a^3}{MA_1 \cdot MA_2}; \text{ tương tự}$$

$$B_2B_3 = \frac{a^3}{MA_2 \cdot MA_3}; B_3B_1 = \frac{a^3}{MA_3 \cdot MA_1}$$

Sử dụng bổ đề trên cho $\Delta B_1B_2B_3$ và điểm M ta được :

$$\begin{aligned}
 & B_2 B_3 . MB_1^2 + B_3 B_1 . MB_2^2 + B_1 B_2 . MB_3^2 \\
 & \geq B_2 B_3 . B_3 B_1 . B_1 B_2 \text{ hay} \\
 & \frac{a^7}{MA_1^2 . MA_2 . MA_3} + \frac{a^7}{MA_2^2 . MA_3 . MA_1} \\
 & + \frac{a^7}{MA_3^2 . MA_1 . MA_2} \geq \frac{a^9}{MA_1^2 . MA_2^2 . MA_3^2} \\
 & \Rightarrow MA_1 . MA_2 + MA_2 . MA_3 + MA_3 . MA_1 \geq a^2 = 3. \\
 & \text{Đẳng thức xảy ra khi } M \text{ là tâm tam giác đều } A_1 A_2 A_3.
 \end{aligned}$$

Trường hợp 2. $n \geq 4$. Gọi O là tâm đường tròn đơn vị đã cho, lúc đó vì $OA_i = OA_{i+1} = 1$

$$\begin{aligned}
 (i = 1, 2, \dots, n), \text{ nên } \sum_{i=1}^n MA_i . MA_{i+1} &= \\
 &= \sum_{i=1}^n (MA_i . OA_i)(MA_{i+1} . OA_{i+1}) \geq \\
 &\geq \sum_{i=1}^n (\overline{MA_i} . \overline{OA_i})(\overline{MA_{i+1}} . \overline{OA_{i+1}}) \\
 &= \sum_{i=1}^n [(\overline{MO} + \overline{OA_i}) . \overline{OA_i}][(\overline{MO} + \overline{OA_{i+1}}) . \overline{OA_{i+1}}] \\
 &= \sum_{i=1}^n (1 + \overline{MO} . \overline{OA_i})(1 + \overline{MO} . \overline{OA_{i+1}}) = \\
 &= \sum_{i=1}^n [MO^2 . \overline{OA_i} . \overline{OA_{i+1}} + \overline{MO}(\overline{OA_i} + \overline{OA_{i+1}}) + 1] \\
 &= n + 2\overline{MO} \sum_{i=1}^n \overline{OA_i} + \sum_{i=1}^n MO^2 . \cos A_i \overline{OA_{i+1}} \\
 &= n + n . MO^2 \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) \quad (1) \quad (\text{vì } \sum_{i=1}^n \overline{OA_i} = \vec{0}) \\
 &\text{Do } n \geq 4 \Rightarrow \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) \geq 0.
 \end{aligned}$$

Từ (1) suy ra $\sum_{i=1}^n MA_i . MA_{i+1} \geq n$. Đẳng thức xảy ra khi M trùng với điểm O . Bài toán được chứng minh hoàn toàn.

Nhận xét. Một số bạn sử dụng công cụ *số phức* hoặc tính chất của *tích ngoài* hai vectơ trong hình học phẳng để giải bài toán này. Tuy nhiên các công cụ đó là quá mạnh, chưa cần thiết.

HỒ QUANG VINH

PROBLEMS ... (Tiếp trang 13)

T7/327. The quadrilateral $ABCD$ is inscribed in a circle with radius R and circumscribes about a circle with radius r . Prove that $R \geq r\sqrt{2}$.

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T8/327. The sequences (x_n) and (y_n) ($n = 1, 2, 3, \dots$) are defined by: $x_1 = -1, y_1 = 1, x_{n+1} = -3x_n^2 - 2x_n y_n + 8y_n^2, y_{n+1} = 2x_n^2 + 3x_n y_n - 2y_n^2$ for all $n = 1, 2, 3, \dots$

Find all prime numbers p such that $x_p + y_p$ is not divisible by p .

T9/327. The positive real numbers a, b, c, d satisfy the conditions $a \leq b \leq c \leq d$ and $bc \leq ad$. Prove that $a^b . b^c . c^d . d^a \geq a^d . b^a . c^b . d^c$

T10/327. For each positive integer n , consider the function $f_n(x) = e^{-x} . \sum_{m=0}^n \frac{x^m}{m!}$, defined on the set of positive real numbers.

i) Prove that for every positive real numbers k with $0 < k < 1$ and for every positive integer n , the equation $f_n(x) = k$ has a unique root.

ii) Let α_n be the above mentioned root. Find $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\alpha_n}$.

T11/327. Let be given a triangle ABC with $BC = a, CA = b, AB = c$ and with circumradius R . Let l_a, l_b, l_c be respectively the measure of the angled bisector of the angle A, B, C and let r_a, r_b, r_c be respectively the radius of the escribed circle in the angle A, B, C . Prove that

$$\frac{l_a^2 . l_b^2 . l_c^2}{a^2 b^2 c^2} \leq \left(\frac{r_a + r_b + r_c}{6R} \right)^3$$

T12/327. Let $A_1 A_2 A_3 A_4$ be a tetrahedron, circumscribing about a sphere with center O . Let B_i be the touching point of the sphere with the face opposite to the vertex A_i ($i = 1, 2, 3, 4$). Prove that among the angles formed by a pair of distinct rays OB_1, OB_2, OB_3, OB_4 there exists an angle α

with $\sin \alpha \leq \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Đọc lại cho đúng

Trong THPT số 326 tháng 8.2004 ở mục Đề ra kì này đề bài T2/326 đã in nhầm đoạn *Các số nguyên dương*, xin sửa lại là *Các số dương*. Bài tập 4 trang 2 in thiếu: biết $\widehat{AOD} = 132^\circ$. Thành thật xin lỗi bạn đọc.

THTT



NGUỒN GỐC PHÁT SINH PHÉP TÍNH VI PHẦN VÀ TÍCH PHẦN

NGUYỄN PHÚ LỘC

(Khoa Sư phạm, Đại học Cần Thơ)

Môn Giải tích ở nhà trường phổ thông Việt Nam nghiên cứu những tính chất của các hàm số trong sự kết hợp với quá trình giới hạn (hàm số liên tục, đạo hàm, tích phân). Phép tính vi phân và tích phân chỉ là phần mở đầu của một ngành toán học tổng quát hơn của toán học là "Giải tích" (Analysis).

1. Tính diện tích và thể tích trong thời cổ Hy Lạp

Phép tính vi phân và tích phân hình thành vào thế kỉ XVII, thời kì tám điểm của "Cuộc cách mạng khoa học". Tuy nhiên, nhiều thành tựu về các phép tính này đã được phát hiện trước đó. Một điều đáng chú ý là về mặt lịch sử phép tính tích phân có trước phép tính vi phân nhưng trong các giáo trình của giải tích hiện nay thì phép tính vi phân được trình bày trước phép tính tích phân. Một trong những công trình được xem là tiền thân của phép tính tích phân là các nghịch lí của Zéno (thế kỉ thứ năm trước công nguyên) nêu lên khả năng của việc phân chia thời gian và không gian nhỏ vô hạn. Ví dụ, Zéno đã "lập luận":

Nếu một vật thể chuyển động từ A đến B thì trước khi đến B nó đi qua trung điểm B_1 của AB. Bây giờ để đi chuyển tới B_1 nó đầu tiên phải đến trung điểm B_2 của AB_1 . Cứ tiếp tục lập luận như thế thì vật thể ấy phải đi vượt qua một số vô hạn

khoảng cách và vì thế vật thể không thể chuyển động được đến đích.

Một công trình có tầm quan trọng vào bậc nhất là *phương pháp vét kiệt* (Method of Exhaustion) của Eudoxus vào thế kỉ thứ tư trước Công nguyên được Archimedes (thế kỉ thứ ba trước Công nguyên) áp dụng tính diện tích các cung Parabol, diện tích và thể tích hình cầu. Phương pháp vét kiệt thừa nhận tính chia hết vô hạn của một đại lượng và nhận tiên đề sau đây làm cơ sở:

Nếu từ bất kì một đại lượng nào và bỏ đi một phần không nhỏ hơn một nửa của nó, rồi từ chỗ còn lại bỏ đi một phần không nhỏ hơn một nửa của phần còn lại ấy và cứ tiếp tục như thế, thì cuối cùng sẽ còn lại một đại lượng nhỏ hơn bất kì đại lượng nào được ấn định trước cùng loại.

Một số nhà nghiên cứu xem Eudoxus cũng là nhà phát minh ra phép tính tích phân. Một thành tựu quan trọng khác là *Phương pháp của Archimedes*, mới được tìm thấy vào năm 1906, trong đó Archimedes đã dùng khái niệm các yếu tố (elements) của một hình (đường thẳng được tạo thành bởi các điểm, một hình phẳng tạo bởi các đường thẳng, một hình khối được tạo bởi các mặt phẳng) để phát hiện nhiều kết quả quan trọng. Người ta tin rằng phép tính vi - tích phân ắt hẳn được phát minh sớm hơn nếu công trình này của Archimedes đã được biết rộng rãi. Chỉ có một công trình có thể được xem là mang tư tưởng của phép tính vi phân là phương pháp tìm tiếp tuyến của đường xoắn ốc của Archimedes.

2. Bài toán tìm quãng đường khi vận tốc thay đổi.

Người Hy Lạp cổ đã không phát hiện được mối liên hệ cơ bản giữa bài toán diện tích và bài toán tiếp tuyến. Mối quan hệ này vẫn không được khám phá trước thế kỉ XVII. Trong thế kỉ XIV nhiều học giả quan tâm đến bài toán: nếu một vật thể di chuyển với vận tốc thay đổi, nó sẽ đi được một khoảng cách là bao nhiêu trong một thời gian cho trước. Một trong những người dẫn đầu tìm câu trả lời cho các câu hỏi như trên là Nicole Oresme (1323-1382), một giám mục ở Lisieux. Ví dụ như khi nghiên cứu khoảng cách dịch chuyển của một chất điểm với vận tốc thay đổi, Oresme dùng những điểm trên một đoạn thẳng nằm ngang để biểu diễn các thời điểm của chuyển động và ở mỗi điểm này ông dựng một đoạn thẳng đứng với độ dài biểu diễn vận tốc

của chất điểm ở thời điểm tương ứng ; đó là một trong những ví dụ sớm nhất về "đồ thị của hàm số" trong lịch sử toán học.

3. Sự ra đời của đại số kí hiệu và hình học giải tích

Sự phát triển của phép tính vi - tích phân được tiến triển nhờ vào nhiều thành tựu khác trong lĩnh vực toán học là *đại số kí hiệu* (xuất hiện trong nhiều thế kỉ trước thế kỉ XVII, và đạt đến đỉnh cao nhờ các công trình của Descartes trong thế kỉ thứ XVII), khái niệm hàm số (phát sinh chỉ trong thế kỉ XVII từ công trình nghiên cứu về chuyển động của Galileo), và hình học giải tích (Descartes và Fermat) gắn mỗi phương trình đại số tương ứng với một đường cong và nhờ đó có nhiều loại đường cong (đồ thị của hàm số) mới xuất hiện.

4. Vận dụng phép tính vi - tích phân trong thế kỉ XVII

Theo nhiều nhà nghiên cứu, phép tính vi - tích phân được sáng tạo là nhằm giải quyết nhiều vấn đề khoa học ở thế kỉ thứ XVII.

1. *Việc nghiên cứu chuyển động.* Cho khoảng cách dịch chuyển của một chất điểm là một hàm số của thời gian, tìm vận tốc và gia tốc ở một thời điểm bất kì (nghĩa là cho $s(t)$, tìm $v(t)$ và $a(t)$) ; và, ngược lại, cho trước công thức biểu diễn gia tốc của một chất điểm là một hàm số của thời gian, tìm vận tốc và khoảng cách dịch chuyển.

2. *Tìm tiếp tuyến (hay pháp tuyến) của một đường cong tại một điểm cho trước.* Điều này quan trọng không những cho bài toán trong hình học thuần túy, mà cũng quan trọng trong quang học để xác định góc nào mà tia sáng qua thấu kính, và trong nghiên cứu chuyển động nhằm xác định hướng một chất điểm chuyển động.

3. *Các bài toán cực trị*

4. *Xác định chiều dài của các đường cong, diện tích các mặt, thể tích các khối, và trọng khối (centers of gravity) của các vật thể khối.*

Trước Newton và Leibniz có nhiều người có những công trình quan trọng liên quan đến phép tính tích phân và vi phân như : Kepler, Galileo, Cavalieri, Roberval, Stevin, Fermat, Descartes, Torricelli, Wallis, Barrow, Gregory và Huygens. Dưới đây là những tóm tắt một số ý tưởng về công trình có ý nghĩa đối với phép tính vi - tích phân của một số nhà toán học kể trên. Kepler (1571-1630), trong công trình *Hình học không gian của các thùng rượu vang* (The Solid

Geometry of Wine Barrels (1615), đã tính được diện tích xấp xỉ của các vật thể tròn xoay. Galileo (1564-1643), giống như Oresme trước đó, đã nhận biết rằng diện tích phần giới hạn bởi trục hoành (thời gian) và đường cong (tốc độ) biểu diễn quãng đường đi được. Cavalieri, một học trò của Galileo, dùng nguyên lí cơ bản sau đây để tìm thể tích các khối :

Nếu hai vật thể có cùng chiều cao mà diện tích của hai thiết diện bất kì song song với các đáy và có cùng khoảng cách đối với các đáy luôn có cùng tỉ số, thì thể tích của hai vật thể đó cũng bằng tỉ số này.

Wallis (1616-1703), trong công trình "Arithmetica Infinitorum" (1655) chỉ ra sự hiệu quả của việc ra đời môn hình học giải tích. Ông đã tìm diện tích phần dưới đường cong bằng các phương pháp có nhiều tính chất giải tích hơn hình học. Ông áp dụng phương pháp phân chia nhỏ vô hạn để tính được nhiều bài toán về cầu phươg và nhiều kết quả hữu ích khác.

Phương pháp tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm đa thức của Fermat thì tương đương (gần giống) với phương pháp hiện đại của chúng ta là tìm đạo hàm của một hàm số rồi cho đạo hàm bằng không. Fermat thường được người ta xem như là một trong số những người đầu tiên phát minh ra phép tính vi phân.

Fermat, Roberval, Torricelli và Cavalieri đã đạt được độc lập với nhau về việc tìm diện tích phần dưới đường cong của hàm số lũy thừa bậc n . Tuy nhiên, họ chưa biết dùng nguyên hàm để tính những diện tích như vậy.

5. Newton và Leibniz

Mặc dù có nhiều nhà toán học dần dần tiếp cận tới phép tính vi - tích phân, nhưng Newton (người phát triển môn phép tính vi - tích phân trong 1655 - 1666) và Leibniz (với công trình được thực hiện độc lập trong 1673 - 1676) được xem là những nhà phát minh ra môn phép tính vi - tích phân. Vấn đề đặt ra là tại sao điều này không được hoàn thành sớm hơn bởi những người khác ? Sau đây là những lí do mà Frederick Richkey, một nhà lịch sử giải tích ở Bowling Green University, đưa ra :

1. *Sự mã hóa và hợp nhất (codification and unification) của các phương pháp.* Những công trình sớm hơn gần như là một tập hợp các công cụ thông minh được áp dụng vào đa thức. Newton và Leibniz phát hiện ra rằng các phương pháp này có tính tổng quát và chúng có thể được áp dụng cho nhiều loại toán khác nhau

bằng cách biểu diễn một hàm số không phải chỉ là đa thức mà như là một chuỗi vô hạn.

2. *Sự phát triển của thuật toán và kí hiệu.* Cả Newton và Leibniz đều phát triển những giải thuật tổng quát nhờ vào đó mà các phương pháp của họ có thể được áp dụng. Leibniz đặc biệt giỏi khi đưa ra những kí hiệu rất hiệu quả. Kí hiệu dy/dx cho đạo hàm và $\int$ cho tích phân đều là của Leibniz.

3. *Sự thấu hiểu định lí cơ bản.* Nhận biết phép tính vi phân và phép tính tích phân là hai quá trình ngược nhau và khai thác đủ điều kiện này thành nền tảng đối với phép tính vi - tích phân.

4. *Ý thức được việc sáng tạo ra một ngành toán học mới.* Cả Newton và Leibniz đều nhận thức được rằng họ đang phát triển một phương pháp mới và có tính tổng quát hết sức quan trọng.

Phép tính vi - tích phân được xem là một trong những phát minh vĩ đại trong lịch sử toán học. Các cuộc tranh luận về quyền phát minh các phép tính này diễn ra khá ồn ào, gay gắt. Phần lớn các học giả cho rằng Newton có những phát hiện trước Leibniz, Leibniz đã thực hiện những khám phá của mình độc lập với Newton, và Leibniz đã xuất bản công trình trước Newton. Các nhà toán học và lịch sử toán học đều công nhận hai ông là hai nhà phát minh ra phép tính vi - tích phân.

TÁI BẢN CUỐN SÁCH ĐƯỢC NHIỀU NGƯỜI ƯA THÍCH

Luôn là cuốn sách được các thầy, cô, học sinh và bạn yêu toán tìm đọc, tìm mua, mỗi khi tái bản từ 1997 đến nay.

Sách tập hợp nhiều bài viết hay và để toán trên báo THPT suốt 3 thập kỉ.

Là tài liệu mới đối với thế hệ bạn đọc lần đầu đến với THPT.

Sách đã có mặt trên thị trường.

Bạn có thể mua sách tại các Công ty sách và Thiết bị trường học các tỉnh, các hiệu sách lớn, hoặc đặt mua tại các Bưu điện trung tâm huyện, quận, tỉnh, thành phố trong cả nước. Bạn cũng có thể liên hệ trực tiếp với tòa soạn.

Đó là *Tuyển tập 30 năm Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ*. Sách dày 508 trang, khổ 19×27 cm. Giá bán : 46.000 đồng.

THPT



HỎI - SỐ NÀY

1.(9.04). **Bài toán :** Tìm m để phương trình bậc hai với tham số m có nghiệm duy nhất thỏa mãn $x > 1$...

Lời giải 1 : Phương trình bậc hai có thể có hai nghiệm, trong đó chỉ có một nghiệm $x > 1$ nên...

Lời giải 2 : Phương trình bậc hai có nghiệm duy nhất và nghiệm đó thỏa mãn $x > 1$ nên ...

Ý kiến bạn thế nào ?

(Một số bạn ở THPT Anh Sơn 1, Nghệ An)

2.(9.04). Tìm các phương trình bậc hai có tổng hai nghiệm là 7 và tích hai nghiệm là 14 thì câu trả lời là $x^2 - 7x - 14 = 0$ hay $cx^2 - 7cx - 14c = 0$ (với $c \neq 0$) ?

(Phạm Thanh H., Lam Sơn, TT Vĩnh Bảo, Hải Phòng).

TRẢ LỜI - NHỮNG SỐ TRƯỚC

1. (6.04). Không thể kí hiệu là $AB \parallel CD$ được. Đây không phải là kí hiệu toán học thông dụng. Ta phải viết là $AB \parallel CD$ và $AB = CD$.

2. (6.04). **Trường hợp 1 :** Đề ra trong bất đẳng thức có dấu bằng, ta phải xét dấu bằng xảy ra khi nào. Nếu dấu bằng không xảy ra thì bài làm của ta là sai.

Trường hợp 2 : Đề ra chỉ có dấu $<$ hoặc $>$ không có dấu bằng thì ta không cần xét dấu bằng xảy ra khi nào. Bởi vì khi đó nếu dấu bằng xảy ra thì vượt quá yêu cầu của bất đẳng thức.

(Nguyễn Minh Lộc (?))

Bạn đã hài lòng với những câu trả lời trên chưa ? Nếu chưa bạn có thể gửi câu trả lời khác về tòa soạn.

THỦY VŨ



Rõ ràng ở lượt 2 Nam chỉ có thể đi như trên. Sau lượt 2 này Hà đi xong sẽ thắng.

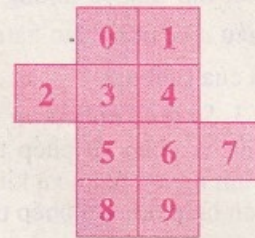
Nhận xét. Giải tốt bài này có các bạn : Đào Đức Trung, 8A3, THCS Giấy Phong Châu, Phù Ninh, Phú Thọ, Lê Hoàng Mai, 12A1, THPT Gang thép, Thái Nguyên, Nguyễn Anh Tuấn, 11 Toán, THPT Nguyễn Trãi, Hà Nội, Nguyễn Khắc Dũng, 11A2, PTCTT ĐHSB Hà Nội, Bùi Ngọc Hà, 12A1, THPT Tống Văn Trân, Ý Yên, Nam Định, Nguyễn Xuân Đạt, 9A6, THCS Văn Đồn, Q. 4, TP. Hồ Chí Minh.

VŨ ĐỒ QUAN

Giải đáp : NGANG VÀ DỌC

Đánh số các ô như hình vẽ. Các ô 3, 4, 5, 6 gọi là các ô trung tâm. Nam đi quân có 2 ô dọc nên chỉ có thể đặt vào các vị trí 03, 14, 35, 46, 58 và 69. Hà đi sau cần chiếm các ô trung tâm và giành chiến thắng theo chiến lược sau :

Vị trí đặt quân			
Lượt thứ nhất		Lượt thứ hai	
Nam	Hà	Nam	Hà
03	56	14	89
14	56	03	89
35	67	14	89
46	23	58	01
58	34	69	01
69	34	58	01



Giải đáp : NGHỈ HÈ TRÊN HÀNH TINH SỐ NGUYÊN (INTÉGRA)

Theo giả thiết nếu mỗi gói có x đơn vị mặt hàng thì giá một mặt hàng là x (F) theo tiền Fermat, suy ra mỗi gói giá $x^2(F)$ và mỗi hộp có x gói nên giá mỗi hộp là $x^3(F)$.

1. Mua hàng khi xuống cầu thang

Gọi a, b tương ứng là giá một đơn vị mặt hàng A, B trên tầng 2, m, n là giá ở tầng 1. Thế thì $a^2 + b^2 = 3(m^2 + n^2)$ (1)

Vì $a^2 + b^2$ chia hết cho 3 thì a và b đều chia hết cho 3, tức $a = 3x, b = 3y$. Khi đó (1) trở thành $m^2 + n^2 = 3(x^2 + y^2)$

Cứ như thế a, b, m, n phải chia hết cho 3^k với mọi $k = 1, 2, \dots$ Điều này vô lí vì 3^k không thể lớn hơn a, b, m, n . Vậy Yvan nói không đúng.

2. Mua hàng giảm giá liên tục

Gọi c là giá một đơn vị mặt hàng C . Tổng số tiền mua 3 hộp ngày sau là

$$(c-1)^3 + (c-2)^3 + (c-3)^3 = 3c^3 - 18c^2 + 42c - 36$$

Số tiền mua hộp trong ngày trước là c^3 . Do đó

$$c^3 = 3c^3 - 18c^2 + 42c - 36$$

$$2c^3 - 18c^2 + 42c - 36 = 0$$

$$2(c-6)(c^2 - 3c + 3) = 0$$

$$c = 6 \text{ là thích hợp.}$$

Vậy số tiền Michel trả một ngày là $c^3 = 216$ Fermat.

3. Mua hàng quá hăng

Gọi số ngày nghỉ của người đó là N . Ngày thứ nhất mua một gói giá $N = a_1^2$ (Fermat), ngày thứ hai mua hai gói giá $N = a_2^2 + a_3^2$ (F), ngày thứ ba mua ba gói giá $N = a_4^2 + a_5^2 + a_6^2$ (F).

Ta phải tìm số $N = a_1^2$ biểu diễn được thành tổng của hai, ba bốn, ... các số chính phương. Giải phương trình Pitago $a_1^2 = a_2^2 + a_3^2$ ta được các hệ số nhỏ nhất rồi tăng dần là $5^2 = 4^2 + 3^2$, $10^2 = 8^2 + 6^2$, $13^2 = 12^2 + 5^2$, $17^2 = 15^2 + 8^2$, ... Xét các số dạng $5k+r$ với r bằng 0, 1, 2, -1, -2 thì r^2 bằng 0, 1, 4 nên trong phương trình $a_1^2 = a_4^2 + a_5^2 + a_6^2$ nếu a_1 chia hết cho 5 thì phải có ít nhất một số trong ba số a_4, a_5, a_6 chia hết cho 5, lúc đó các PT $5^2 - 5^2 = a_5^2 + a_6^2$ và $10^2 - 5^2 = a_5^2 + a_6^2$ đều vô nghiệm, nghĩa là các số $5^2, 10^2$ không biểu diễn được thành tổng 3 số chính phương.

Ta thấy $169 = 13^2 = 12^2 + 5^2 = 12^2 + 4^2 + 3^2 = 10^2 + 7^2 + 4^2 + 2^2 = 10^2 + 6^2 + 5^2 + 2^2 + 2^2 = 10^2 + 6^2 + 4^2 + 3^2 + 2^2 + 2^2 = 10^2 + 7^2 + 4^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 = \dots$

(Xem tiếp trang 11)

ĐƯỜNG HÌNH TIM (Tiếp bài 2)

$$\begin{cases} x = 2r(1 - \cos t) \cos t \\ y = 2r(1 - \cos t) \sin t \end{cases} \quad (1)$$

• Khi B trùng với gốc O thì M trùng với gốc O .

• Với $t = \frac{\pi}{2}$ và $t = \frac{3\pi}{2}$ thì $\cos t = 0$ nên $OM = 2r$ ta có $M_1(0, 2r)$ và $M_2(0, -2r)$

• Với $t \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$ thì $\cos t < 0$ nên $OM = 2r + OA \cos \widehat{BOA} = 2r + OB$ (h. 1a)

• Với $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ thì $\cos t > 0$ nên $OM = 2r - OA \cos \widehat{BOA} = 2r - OB$ (h. 1b).

Từ (1) tính được phương trình của đường hình tim theo hệ tọa độ Đề-các vuông góc nói trên là:

$$(x^2 + y^2 + 2rx)^2 = 4r^2(x^2 + y^2)$$

Chú ý rằng nếu lấy trục Oy đi qua tâm đường tròn cố định $\mathcal{C}$ thì phương trình đường hình tim có dạng khác (xem THPT số 316 tháng 10/2003).

3. Một số tính chất của đường hình tim

Từ phương trình (1) suy ra :

a) Chu kỳ của chuyển động là 2π . Từ đó ta chỉ cần xét sự chuyển động của điểm $M(t)$ với $t \in [0; 2\pi]$

b) Đường hình tim có một trục đối xứng (trục hoành) do đó chỉ cần xét với $t \in [0; \pi]$ rồi lấy đối xứng.

c) Tại các điểm ứng với t bằng $\pi, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$ là $E(-4r; 0), D\left(\frac{r}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}r\right), F\left(\frac{r}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}r\right)$ thì tiếp tuyến song song với trục tung.

Tại các điểm $M(t)$ khác trên đường hình tim, hệ số góc của tiếp tuyến là

$$m(t) = \tan \frac{3t}{2} \quad (2)$$

Thực vậy, từ (1) ta có các biểu thức đạo hàm của hàm số $x(t)$ và $y(t)$ với t thuộc $[0, \pi]$ là

$$\begin{cases} x'(t) = (\sin 2t - \sin t)2r = 4r \cos \frac{3t}{2} \sin \frac{t}{2} \\ y'(t) = (\cos t - \cos 2t)2r = 4r \sin \frac{3t}{2} \sin \frac{t}{2} \end{cases} \quad (3)$$

Áp dụng công thức $y'_x = y'_t \cdot t'_x = y'_t \cdot \frac{1}{x'_t}$, từ

(3) suy ra (2). Với t thuộc $[\pi, 2\pi]$ công thức (2) vẫn đúng.

d) Góc nhọn tạo bởi tiếp tuyến Mz của đường hình tim tại $M(t)$ với đường thẳng OM bằng một nửa góc $\widehat{xOM}$.

Ở hình 2a : $\widehat{OMC} = \frac{1}{2} \widehat{xOM} = \frac{1}{2}t$

Ở hình 2b : $\widehat{OMz} = \frac{1}{2} \widehat{xOM} = \frac{1}{2}t$

e) Tiếp tuyến tại các điểm M, N (cùng nằm trên đường thẳng đi qua O) vuông góc với nhau (xem hình 3)

f) Với mỗi điểm $M(t)$ trên đường hình tim, luôn có hai điểm $N\left(t + \frac{2\pi}{3}\right), P\left(t - \frac{2\pi}{3}\right)$ (h. 4) có tính chất :

• Tiếp tuyến tại M, N, P song song với nhau.

• Diện tích tam giác MNP là một số không đổi (không phụ thuộc vào t).

$$S_{MNP} = \frac{9\sqrt{3}r^2}{4}$$

g) Đường hình tim là đường cong khép kín, nội tiếp trong hình chữ nhật $HIKL$ (h. 5) có chiều ngang (song song với trục hoành) là $4,5r$; chiều đứng (song song với trục tung) là $3\sqrt{3}r$ và $S_{HIKL} = \frac{27\sqrt{3}r^2}{2} = 6.S_{MNP}$

Các bạn có thể tham khảo thêm về đường hình tim trong Giáo trình Toán - tập 7 của Jean Marie Monier (bản dịch tiếng Việt) - NXB Giáo dục - 1999.

Tạp chí TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ Mathematics and Youth Magazine

NĂM THỨ 41

Số 327 (9-2004)

Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội

ĐT - Fax : 04.5144272

Email : toanhocvt@yahoo.com

TRONG SỐ NÀY

- 1 **Dành cho Trung học Cơ sở – For Lower Secondary Schools**
Đặng Phúc Thanh – Thiết lập BDT mới từ BDT gốc.
- 3 **Hướng dẫn giải đề thi chọn học sinh giỏi toán lớp 9 tỉnh Thừa Thiên - Huế năm học 2003 – 2004**
- 5 **Đề thi tốt nghiệp THCS và xét tuyển vào trường THPT chuyên Lê Quý Đôn, TP Đà Nẵng năm 2004.**
- 6 **Phương pháp giải toán – Math Problem Solving**
Trần Văn Xuân – Vài ứng dụng của phương tích của một điểm đối với một đường tròn
- 8 **Hội thi tin học trẻ không chuyên toàn quốc lần thứ X – 2004**
- 9 ***Nguyễn Khắc Minh* – Kì thi chọn học sinh giỏi Quốc gia môn Toán lớp 12 THPT năm 2004**
- 12 **Đề ra kì này – Problems in This Issue**
T1/327, ..., T12/327, L1, L2/327.
- 14 **Giải bài kì trước – Solutions to Previous Problems.**
Giải các bài của số 323 và Cuộc thi kỉ niệm 40 năm THPT.
- 23 **Lịch sử toán học – History of Math**
Nguyễn Phú Lộc – Nguồn gốc phát sinh phép tính vi phân và tích phân
- 25 **X hỏi ? Y, Z trả lời**
- 26 **Giải trí toán học – Math Recreation**

Ảnh bìa 1. Chiều Hồ Gươm (Lê Quang Châu),
Chùa Một Cột (xây dựng từ 1049).

Bìa 2: Đường hình tim

Bìa 4: Toán học muôn màu - Multifarious Mathematics
Tô màu đa giác

Tổng biên tập :
NGUYỄN CẢNH TOÀN

Chịu trách nhiệm xuất bản :
Chủ tịch HĐQT kiêm Tổng Giám đốc NXB Giáo dục
NGÔ TRẦN ÁI
Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập NXB Giáo dục
VŨ DƯƠNG THỤY

Trưởng ban biên tập : NGUYỄN VIỆT HẢI.

Thư kí Tòa soạn : VŨ KIM THỦY.

Biên tập : HỒ QUANG VINH.

Trị sự, Chế bản : VŨ ANH THƯ – NGUYỄN THỊ OANH.

Đại diện phía Nam : TRẦN CHÍ HIẾU, 231 Nguyễn Văn Cừ, Q. 5, Tp. Hồ Chí Minh.

ĐT : 08.8309049

ĐÓN ĐỌC THPT SỐ 328 (10/2004)

- Bí mật của toán học Inca đã được khám phá
- Một bài toán phân hoạch một tập hợp.
- Một thuật toán khai triển nhanh tam thức Newton
- Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên toán trường ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội 2004.
- Hướng dẫn giải đề thi tốt nghiệp THCS và xét tuyển vào trường THPT Lê Quý Đôn, Đà Nẵng 2004.
- Tổng kết Cuộc thi giải Toán và Vật lí trên THPT năm học 2003-2004.
và các chuyên mục vui Câu lạc bộ, Giải trí toán học, Sai lầm ở đâu...

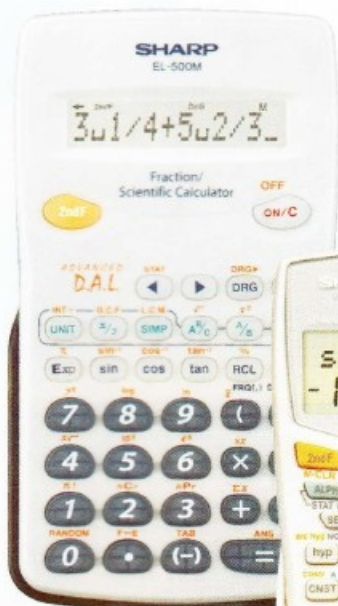
Mời các bạn đặt mua THPT tại các cơ sở Bưu điện !

THPT

SHARP
SHARP CORPORATION OSAKA, JAPAN

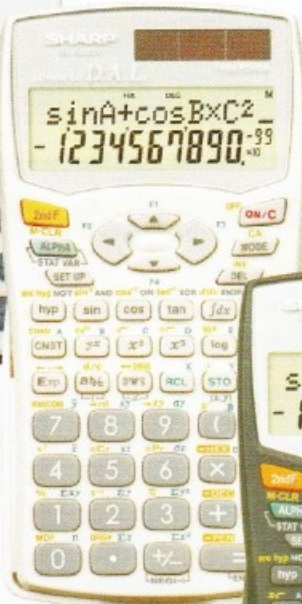
MÁY TÍNH KHOA HỌC

SẢN PHẨM **C** HÍNH HIỆU **H** HÀNG ĐẦU THẾ GIỚI
HẤT LƯỢNG **H** HÀNH 1 NĂM



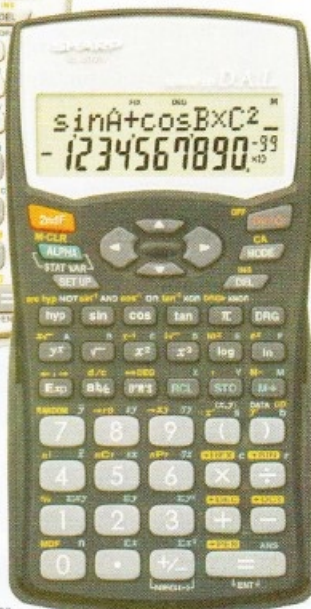
EL - 500M

- Có 131 chức năng.
- Màn hình hiển thị 11 số (Kết quả hiển thị 10+2 số).
- Chuyển đổi giữa phân số và số thập phân.
- Tính toán trên hỗn số, phân số và số thập phân.
- Tính phần trăm, lũy thừa, căn thức, thống kê.
- Tính Logarit, lượng giác, tổ hợp, chỉnh hợp.
- Thích hợp nhất cho học sinh cấp II.



EL - 506W

- Có 469 chức năng.
- Màn hình 2 dòng (Dòng trên hiển thị 12 số, dòng dưới hiển thị 10+2 số).
- Có đầy đủ chức năng của EL-509W.
- Bổ sung các chức năng sau:**
- Giải phương trình bậc I, II, III.
- Giải hệ phương trình bậc I với 2 và 3 ẩn.
- Tính toán với số phức, ma trận, vector, trong dạng đại số và lượng giác.
- Thích hợp nhất cho SV Đại học.



EL - 509W

- Có 272 chức năng.
- Màn hình 2 dòng (Dòng trên hiển thị 12 số, dòng dưới hiển thị 10+2 số).
- Thích hợp nhất cho học sinh cấp III.



PW - E300

TỪ ĐIỂN ĐIỆN TỬ:

- Từ điển Anh ngữ Oxford (335.000 từ).
- Từ điển Anh ngữ chuyên ngành của New Oxford (600.000 từ).



PW - E500

TỪ ĐIỂN ĐIỆN TỬ:

- Từ điển Anh ngữ Oxford (335.000 từ).
- Từ điển Anh ngữ chuyên ngành của New Oxford (600.000 từ).
- Từ điển trích dẫn của Oxford (20.000 từ).



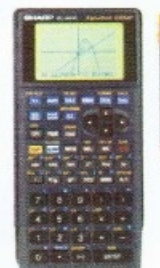
EL - 9900

- Màn hình hiển thị được 132 x 64 điểm ảnh.
- Có 827 chức năng.
- Khả năng lưu trữ 64 KB.
- Có đầy đủ các chức năng của máy EL-9400.
- Có chức năng vẽ đồ thị.
- Bàn phím với 2 chế độ (chuyên sâu & cơ bản).
- Thích hợp cho nghiên cứu và giảng dạy.



EL - 9400

- Màn hình hiển thị được 132 x 64 điểm ảnh.
- Có 801 chức năng.
- Khả năng lưu trữ 32 KB.
- Tính thống kê nâng cao.
- Giải phương trình.
- Giải hệ phương trình tuyến tính.
- Giải phương trình vi phân.
- Sử dụng được bút cảm ứng.
- Kết nối được với máy vi tính.
- Có chức năng vẽ đồ thị.
- Thích hợp cho nghiên cứu và giảng dạy.



- Toàn bộ máy tính **SHARP** chính hiệu đều được dán tem chống hàng giả. Tem do Trung tâm kỹ thuật tài liệu nghiệp vụ - Bộ Công An phát hành.
- Máy tính **SHARP** chính hiệu được bảo hành 1 năm.

Đơn vị Nhập khẩu & Phân phối duy nhất tại Việt Nam



CÔNG TY CỔ PHẦN XUẤT NHẬP KHẨU LÊ MINH
LEMINH IMPORT EXPORTATION JOINT STOCK COMPANY

VĂN PHÒNG TẠI HÀ NỘI

111A - Thụy Khuê - Quận Tây Hồ, Hà Nội
ĐT: 84.4.8474577 - Fax: 84.4.8474592
E-mail: limexhn@hn.vnn.vn

VĂN PHÒNG TẠI HỒ CHÍ MINH

164 Đường Cộng Hòa, P.12, Quận Tân Bình, HCM
ĐT: 84.8.8116417 - Fax: 84.8.8424237
E-mail: limexhcm@hcm.vnn.vn

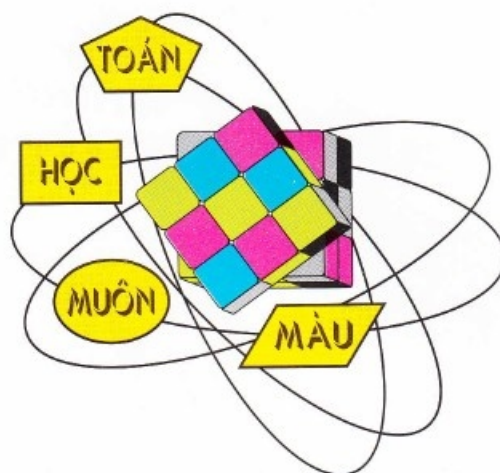


TÔ MÀU ĐA GIÁC

Một hình đa giác (biểu thị gần đúng một bản đồ hoặc một hình vẽ...) bao giờ cũng phân chia được thành các tam giác hoặc được ghép lại từ các tam giác sao cho chúng không chồm lên nhau và không có chỗ trống bị bao kín xung quanh bởi các tam giác.



Ta gọi là *phép tô màu chuẩn* nếu mỗi tam giác được tô bởi một màu sao cho hai tam giác bất kì trên hình có một cạnh hoặc một phần cạnh chung thì có hai màu khác nhau (không tính đỉnh chung). Chẳng hạn hình chiếc bình được lắp ghép từ các tam giác được tô màu chuẩn bằng hai màu như ở hình bên.



DÀNH CHO BẠN ĐỌC

1) Cần ít nhất bao nhiêu màu để tô màu chuẩn một hình đa giác tạo bởi các tam giác đều (kích thước tam giác có thể khác nhau)?

2) Cần ít nhất bao nhiêu màu để tô màu chuẩn một hình đa giác tạo bởi các tam giác vuông cân (kích thước tam giác có thể khác nhau)?

PHI PHI

CÙNG SÁNG TÁC BIỂU TƯỢNG TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Hướng tới kỉ niệm 40 năm *Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ* (Mathematics and Youth Magazine) Tòa soạn tổ chức chọn biểu tượng (lôgô) của THTT. Mời các bạn tham gia sáng tác biểu tượng cho Tạp chí THTT.

Yêu cầu :

- Có hình vẽ toán và chữ tiếng Việt hoặc tiếng Anh thể hiện tên tạp chí (có thể viết tắt THTT, MYM). Hình nên đơn giản.

- Càng ít màu càng tốt.
- Có thể in trên báo và làm huy hiệu.
- Không có con số 40. Không có dấu hiệu cá nhân trên biểu tượng

Hình thức thể hiện :

Trên một tờ giấy A4 không có dòng kẻ :

- Một hình trong khuôn khổ 4×4 cm

- Một hình nhỏ trong khuôn khổ không quá 2×2 cm.

- Có bản thuyết minh nội dung không quá 200 chữ.

- Ghi đầy đủ họ tên, tuổi, giới tính, nghề nghiệp, địa chỉ của người vẽ ở phía dưới.

Thời gian nhận bản thảo:

Chậm nhất 30.9.2004 (theo dấu *bưu điện*)

Ngoài phong bì để rõ :

SÁNG TÁC BIỂU TƯỢNG THTT

Tất cả các hình vẽ đẹp đều được quà tặng của tòa soạn. Hình được chọn sẽ có giải thưởng và công bố tên tác giả. Mong các bạn xa gần hưởng ứng. Trân trọng cảm ơn.

TC THTT (MYM)

ISSN : 0866-8035

Chỉ số : 12884

Mã số : 8BT29M4

Chế bản tại Tòa soạn

In tại Công ty CP in Diên Hồng, 187B Giảng Võ

In xong và nộp lưu chiểu tháng 9 năm 2004

Giá : 3500 đồng

Ba nghìn năm trăm đồng