

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO * HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

Toán học & Tuổi trẻ

5
2004

SỐ 323 - NĂM THỨ 41 - TẬP CHÍ RA HÀNG THÁNG

DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ



Chào Mừng
NGÀY NHÀ GIÁO VIỆT NAM 20.11
Kính Chúc
CÁC THẦY - CÔ GIÁO MẠNH KHỎE HẠNH PHÚC

▲ Đội tuyển toán TP Hải Phòng
chụp ảnh với lãnh đạo TP, Sở
GD-ĐT và BGH trường Trần Phú



Ban giám hiệu trường
THPT Trần Phú ▲



TẶNG SÁCH VÀ HỌC BỔNG CỦA NXB GIÁO DỤC CHO HỌC SINH CÁC TỈNH ĐIỆN BIÊN, SƠN LA, LAI CHÂU

Thiết thực kỷ niệm 50 năm chiến thắng lịch sử Điện Biên Phủ, cùng cả nước hướng về Điện Biên, vừa qua, Nhà xuất bản Giáo dục – Bộ Giáo dục và Đào tạo đã trao tặng thư viện trường Trung học phổ thông Phan Đình Giót – TP.Điện Biên Phủ gần 2.000 bản sách trị giá 30 triệu đồng và một số thiết bị thư viện, máy vi tính, máy in trị giá 20 triệu đồng.

Nhà xuất bản Giáo dục đã trao 40 suất học bổng, mỗi suất trị giá 500.000đ cho những học sinh nghèo vượt khó, đạt thành tích cao trong học tập của 3 tỉnh Điện Biên, Lai Châu, Sơn La.

Cũng trong dịp này, Công đoàn NXBGD đã tặng 5 triệu đồng cho công đoàn trường Tiểu học xã Chín Thầu, huyện Mường Nhé, tỉnh Điện Biên. Đoàn TNCS HCM NXB Giáo dục tặng Quỹ Tài năng trẻ của Tỉnh đoàn Điện Biên 5 triệu đồng.

Đây là những học bổng đầu tiên chuẩn bị cho việc thành lập Quỹ học bổng Nhà xuất bản Giáo dục để trực tiếp góp phần phát triển ngành giáo dục.

Đến nay, chương trình tặng sách cho thư viện các trường học trong cả nước của Nhà xuất bản Giáo dục đã thực hiện tại nhiều trường Tiểu học, THCS, THPT của các quận Tây Hồ, huyện Đông Anh (Hà Nội); huyện Củ Chi, Nhà Bè, quận 7, quận 9 (TP.HCM), huyện Côn Đảo (Bà Rịa – Vũng Tàu), các tỉnh Quảng Ninh; Nam Định; Hải Dương; Nghệ An; Hà Tĩnh; Thái Bình; Bình Phước; ...

NXB GIÁO DỤC TIẾP TỤC CHUYỂN ĐỔI MỘT SỐ ĐƠN VỊ THÀNH VIÊN THÀNH CÔNG TY CỔ PHẦN

Thực hiện Quyết định số 102/QĐ - TTg ngày 21.5.2003 của Thủ tướng Chính phủ về việc phê duyệt đề án thí điểm chuyển NXB Giáo dục sang tổ chức và hoạt động theo mô hình Công ty mẹ - Công ty con, NXB Giáo dục đã tiến hành cổ phần hóa một số đơn vị thành viên.

Cuối năm 2003, theo Quyết định của Bộ Giáo dục – Đào tạo, hai nhà in thuộc NXB Giáo dục đã được cổ phần hóa, trở thành *Công ty cổ phần in SGK Hòa Phát tại TP. Đà Nẵng* (HPTPC) và *Công ty cổ phần in SGK tại TP. Hồ Chí Minh* (HCMTPC).

Đầu năm 2004, Ban đổi mới doanh nghiệp NXB Giáo dục đã tiếp tục nghiên cứu trình Bộ Giáo dục và Đào tạo phê duyệt phương án cổ phần hóa thêm 5 đơn vị trực thuộc trên cơ sở các đơn vị cũ:

- Ngày 30.3.2004, *Công ty cổ phần Sách Giáo dục tại TP. Đà Nẵng* (DAEBSCO) đã làm lễ khai trương.

- Ngày 5.4.2004, đã làm lễ khai trương *Công ty cổ phần in SGK tại TP. Hà Nội* (HAPCO).

- Ngày 6.4.2004, *Công ty cổ phần in SGK Điện Hồng* (DIPCO) đã chính thức ra mắt.

- Ngày 8.4.2004, *Công ty cổ phần Sách Giáo dục tại TP. Hồ Chí Minh* (SAEBSCO) đã chính thức khai trương.

- *Công ty cổ phần Sách Giáo dục tại Hà Nội* (HAEBSCO) đã ra mắt vào ngày 13.4.2004.



Trong thời gian tới, NXB Giáo dục sẽ tiếp tục nghiên cứu tổ chức cổ phần hóa và kết nạp thêm một số đơn vị thành viên nhằm củng cố và phát triển tính hiệu quả của cả hệ thống xuất bản - in và phát hành sách giáo khoa trong toàn quốc.

Bài và ảnh :
BẠCH KIM

Đại diện NXB Giáo dục, Ông Nguyễn Xuân Hòa, Phó Tổng Giám đốc trao quà tặng và học bổng cho học sinh



TRUNG HỌC CƠ SỞ

Bài toán tìm chữ số của một số viết trong hệ thập phân thường gặp từ cuối cấp tiểu học đến cấp trung học và có tác dụng lớn trong việc rèn luyện tư duy cho học sinh. Việc lựa chọn cách giải tùy thuộc vào giả thiết của từng bài toán và kiến thức của từng lớp.

Dưới đây xin trình bày một số cách giải đối với các bài toán dạng này với quy ước: các chữ khác nhau chỉ các chữ số khác nhau, chữ số viết ở đầu bên trái là khác 0.

Loại 1. Lần lượt tính từng chữ số bằng cách xét chữ số tận cùng của một tích có chứa chữ số cần tìm.

Ví dụ 1. Tìm số $\overline{abcd}$ biết rằng

$$\overline{abcd} + \overline{bcd} + \overline{cd} + d = 4574$$

Lời giải. Viết giả thiết trong dạng:

$$1000a + 200b + 30c + 4d = 4574 \quad (1)$$

Xét hàng đơn vị thấy tích $4d$ có tận cùng là 4, suy ra d bằng 1 hoặc 6.

- Nếu $d = 1$ thay vào (1) được

$$100a + 20b + 3c = 457$$

Xét hàng đơn vị thấy tích $3c$ có tận cùng là 7, suy ra $c = 9$. Thay vào đẳng thức trên được $10a + 2b = 43$.

Vế trái chẵn còn vế phải lẻ nên phương trình này vô nghiệm.

- Nếu $d = 6$ thay vào (1) được

$$100a + 20b + 3c = 455 \quad (2)$$

Tích $3c$ có tận cùng là 5 nên $c = 5$, thay vào (2) được $10a + 2b = 44$ (3)

Tích $2b$ có tận cùng là 4 suy ra b bằng 2 hoặc 7.

Thay vào đẳng thức (3) được hai nghiệm $\overline{abcd}$ là 4256 và 3756.

Ví dụ 2. Tìm số $\overline{abcd}$ biết $\overline{abc} \times c = \overline{dac}$

Lời giải. Từ giả thiết có

$$100ac + 10bc + c^2 = 100d + 10a + c \quad (1)$$

CÁCH TÌM CÁC CHỮ SỐ CỦA MỘT SỐ

TẠ PHẠM HẢI

(GV THCS thị trấn Hưng Hà, Thái Bình)

Vì c^2 có tận cùng là c (khác 0) nên c chỉ có thể là 1, 5, 6.

- Nếu $c = 1$ thì $\overline{abc} = \overline{dac} \Rightarrow$ vô nghiệm vì a, b, d khác nhau.

- Nếu $c = 5$ thay vào (1) được:

$$50a + 5b + 2 = 10d + a \quad (2)$$

suy ra $a = 1$. Thay vào (2) được $50 + 5b + 1 = 10d$. Lúc đó tích $5b$ có tận cùng là 9 $\Rightarrow$ vô nghiệm.

- Nếu $c = 6$ thay vào (1) được $60a + 6b + 3 = 10d + a$, suy ra $a = 1$. Lúc đó tích $6b$ (< 30) có tận cùng là 8 $\Rightarrow b$ chỉ có thể là 3.

Đáp số $\overline{abcd} = 1368$.

Chú ý rằng để xét chữ số tận cùng được thuận lợi, ta luôn tách ra các số chẵn chục, chẳng hạn ở (2) của lời giải ví dụ 2 nếu viết $49a + 5b + 2 = 10d$ sẽ khó tìm hướng giải hơn.

Loại 2. Sử dụng tính chất chia hết.

Ví dụ 3. Tìm các chữ số a, b, c sao cho

$$\overline{abbc} = \overline{ab} \cdot \overline{ac} \cdot 7.$$

Lời giải. Từ giả thiết viết được

$$100 \cdot \overline{ab} + \overline{bc} = \overline{ab} \cdot \overline{ac} \cdot 7$$

$$\Leftrightarrow \overline{bc} = \overline{ab}(7 \cdot \overline{ac} - 100) \quad (1)$$

Từ (1) ta thấy $\overline{bc}$ chia hết cho $\overline{ab}$ và thương $k = 7 \cdot \overline{ac} - 100 \leq 9$ suy ra $a = 1$. Ta có $7c = 30 + k \leq 39$ nên $c = 5, k = 5$. Thay vào (1) được $10b + 5 = (10 + b) \cdot 5 \Rightarrow 5b = 45 \Rightarrow b = 9$.

Đáp số: $1995 = 19 \cdot 15 \cdot 7$

Ví dụ 4. Tìm các chữ số a, b, c sao cho

$$\frac{1}{\overline{ab} \cdot \overline{bc}} + \frac{1}{\overline{bc} \cdot \overline{ca}} + \frac{1}{\overline{ca} \cdot \overline{ab}} = \frac{11}{3321}.$$

Lời giải. Quy đồng mẫu số được

$$81 \cdot 41(\overline{ca} + \overline{ab} + \overline{bc}) = 11 \cdot \overline{ca} \cdot \overline{ab} \cdot \overline{bc} \quad (1)$$

Do 41 là số nguyên tố và là ước của vế phải (1) nên 41 phải là ước của một trong ba số $\overline{ca}, \overline{ab}, \overline{bc}$, chẳng hạn $\overline{ca}$: 41. Xét 2 trường hợp:

• $\overline{ca} = 41$ hay $c = 4, a = 1$. Thay vào (1) được: $81(41 + \overline{1b} + \overline{b4}) = 11 \cdot \overline{1b} \cdot \overline{b4}$ (2)

Ta thấy 81 là ước số của $\overline{1b} \cdot \overline{b4}$ mà $\overline{1b}$ không thể chia hết cho 27 nên $\overline{b4}$ phải chia hết cho 9, suy ra $b = 5$. Thay vào (2) thỏa mãn. Lập luận tương tự khi $\overline{ab} : 41$ hoặc $\overline{bc} : 41$.

• $\overline{ca} = 82$ hay $c = 8, a = 2$. Thay vào (1) được $81(82 + \overline{2b} + \overline{b8}) = 22 \cdot \overline{2b} \cdot \overline{b8}$ (3)

Vế phải của (3) chẵn nên ở vế trái b phải chẵn. Từ 81 là ước số của $\overline{2b} \cdot \overline{b8}$ mà $\overline{2b}$ không thể chia hết cho 81 nên $\overline{b8}$ phải chia hết cho 3. Vì b chẵn nên chỉ có thể $b = 4$, nhưng lúc đó 24.48 không chia hết cho 81.

Bài toán có nghiệm (a, b, c) là $(1, 5, 4)$; $(5, 4, 1)$; $(4, 1, 5)$.

Loại 3. Ước lượng giá trị của biểu thức nào đó chứa các chữ số để giảm bớt các trường hợp cần xét.

Ví dụ 5. Tìm số $\overline{abcd}$ sao cho

$$\overline{abcd} + \overline{abc} + \overline{ab} + a = 4321.$$

Lời giải. Từ giả thiết viết được :

$$1111a + 111b + 11c + d = 4321 \quad (1)$$

Vì b, c, d đều nhỏ hơn 10 nên $3091 < 1111a < 4321 \Rightarrow a = 3$. Thay vào (1) được

$$111b + 11c + d = 988 \quad (2)$$

Lập luận tương tự có

$$868 < 111b < 988 \Rightarrow b = 8. \text{ Thay vào (2) được } 11c + d = 100 \text{ mà } 90 < 11c < 100 \Rightarrow c = 9 \text{ và } d = 1.$$

Vậy $\overline{abcd} = 3891$.

Ví dụ 6. Tìm các chữ số x, y, z biết rằng

$$\overline{x\dots x} - \overline{y\dots y} = \overline{z\dots z}^2$$

trong đó các số $\overline{x\dots x}, \overline{y\dots y}, \overline{z\dots z}$ được viết bởi $2n$ chữ số x, n chữ số y, n chữ số z .

Lời giải. Đặt $t = \overline{1\dots 1} = \frac{10^n - 1}{9}$ được viết bởi

n chữ số 1. Từ giả thiết ta có :

$$x.t.10^n + x.t - y.t = z^2.t^2$$

$$\Rightarrow x.10^n + x - y = z^2.t$$

$$\Rightarrow 9x.10^n + 9x - 9y = z^2(10^n - 1)$$

$$\Rightarrow 9(2x - y) = (10^n - 1)(z^2 - 9x) \quad (1)$$

Do $9|2x - y| < 180$ nên số ở vế phải có ít hơn 4 chữ số, suy ra $n \leq 2$.

• Nếu $n = 1$, từ (1) có $2x - y = z^2 - 9x$
 $\Leftrightarrow 11x = z^2 + y$ (2)

Cho z bằng 1, 2, ..., 9 thay vào (2) được các nghiệm (x, y, z) là $(1, 7, 2)$; $(1, 2, 3)$; $(2, 6, 4)$; $(3, 8, 5)$; $(4, 8, 6)$; $(5, 6, 7)$; $(6, 2, 8)$; $(8, 7, 9)$.

• Nếu $n = 2$ từ (1) có $2x - y = 11(z^2 - 9x) \Leftrightarrow 101x = 11z^2 + y$ (3)

Cho z bằng 1, 2, ..., 9 thay vào (3) được các nghiệm (x, y, z) là $(1, 2, 3)$; $(4, 8, 6)$.

Thử lại đúng. Bài toán có 10 nghiệm như trên.

Loại 4. Giải phương trình bậc hai nếu giả thiết có biểu thức chứa bình phương của các chữ số.

Ví dụ 7. Tìm số $\overline{abc}$ biết rằng

$$\overline{abc} = 11(a^2 + b^2 + c^2)$$

Lời giải. Biến đổi điều kiện đề bài thành

$$99a + 11b + (a + c - b) = 11(a^2 + b^2 + c^2) \quad (1)$$

Từ đó phải có $a + c - b$ chia hết cho 11. Do $-8 < a + c - b < 18$ nên xét 2 trường hợp.

• Nếu $a + c - b = 0$ hay $b = a + c$. Thay vào (1) được $10a + c = 2a^2 + 2c^2 + 2ac$ (2)

Ta thấy c phải chẵn, $c = 2d \leq 8$. Thay vào (2) được $5a + d = a^2 + 4d^2 + 2ad$ (3)

$$\Leftrightarrow 4a + d = a(a - 1) + 4d^2 + 2ad$$

Từ đó ta thấy d phải chẵn mà $d \leq 4$. Thay d lần lượt bằng 0, 2, 4 vào (3) và giải phương trình bậc hai ẩn a ta được chỉ một nghiệm nguyên ứng với $d = c = 0, a = 5, b = 5$.

• Nếu $a + c - b = 11$ hay $b = a + c - 11$. Thay vào (1) được

$$2a^2 + 2ac - 32a + 2c^2 = 23c - 131 \quad (4)$$

Từ (4) ta thấy c phải lẻ, $c = 2n + 1 \leq 9$. Thay vào (4) được

$$a^2 - 15a + 2an + 4n^2 - 19n + 55 = 0 \quad (5)$$

Thay n lần lượt bằng 0, 1, 2, 3, 4 vào (5) và giải phương trình ẩn a ta được chỉ một nghiệm ứng với $n = 1, c = 3, a = 8, b = 0$.

Bài toán có hai nghiệm $\overline{abc}$ là 550 và 803.

Để giải bài toán tìm các chữ số của một số thông thường phải phối hợp nhiều cách kể trên một cách khéo léo để hạn chế đến mức ít nhất việc xét các trường hợp xảy ra. Mong được các bạn trao đổi thêm về các loại bài khác.

(Xem tiếp trang 11)

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 TRƯỜNG THPT CHU VĂN AN & THPT HÀ NỘI - AMSTERDAM NĂM HỌC 2003 - 2004

(Đề thi đã đăng trên THPT số 322, tháng 4 năm 2004)

NGÀY THI THỨ NHẤT

Bài 1. 1) ĐK $x > 0$ và $x \neq 1$. Ta có

$$P = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}{x+\sqrt{x}+1} - 2\sqrt{x}-1+2(\sqrt{x}+1)$$

$$= x - \sqrt{x} + 1.$$

2) $P = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \Rightarrow \min P = \frac{3}{4}$ đạt được
khi $x = 1/4$.

3) $Q = \frac{2\sqrt{x}}{P} = \frac{2}{\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} - 1} = \frac{2}{M}.$

Để ý rằng với $x > 0$ và $x \neq 1$ ta có

$$M = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} - 1 > 1 \text{ (theo BĐT Cô-si), suy ra}$$

$$0 < Q < 2. \text{ Vì } Q \text{ nguyên nên } Q = 1 \Rightarrow x = \frac{7+3\sqrt{5}}{2}.$$

Thử lại đúng.

Bài 2. 1) PT đường thẳng $(d): y = kx - 1$.

PT hoành độ giao điểm của (P) và (d) là:
 $x^2 + kx - 1 = 0$. PT này có $\Delta > 0$ nên có 2
nghiệm phân biệt $\Rightarrow$ đpcm.

2) Ta có $x_1, x_2 = -1$, từ đó $|x_1 - x_2| = \left|x_1 + \frac{1}{x_1}\right|$.

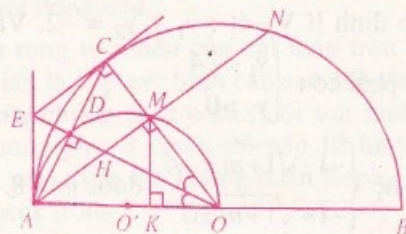
Nhận xét rằng x_1 và $\frac{1}{x_1}$ cùng dấu nên

$$\left|x_1 + \frac{1}{x_1}\right| = |x_1| + \left|\frac{1}{x_1}\right| \geq 2.$$

3) PT đường thẳng OA là $y = -x_1x$; PT đường
thẳng OB là $y = -x_2x$. Nhưng $(-x_1)(-x_2) = -1$ vì
thế ΔOAB vuông tại O .

Bài 3. 1) Ta có ΔOAC cân tại O có $OD \perp AC$,
suy ra $\widehat{MOD} = \widehat{DOA} \Rightarrow DM = AD$ hay ΔDAM
cân tại D .

2) Dễ thấy $\Delta AOE = \Delta COE$ (c.g.c) $\Rightarrow$
 $\widehat{EAO} = \widehat{ECO} = 90^\circ$ hay $EA \perp AB$. Nói cách
khác EA là tiếp tuyến chung của đường tròn (O)
và đường tròn (O') .



3) Giả sử AM cắt đường tròn (O) tại N' , để ý
rằng $\widehat{AOC} = 2\widehat{AN'C} \Rightarrow \widehat{COH} = \widehat{CN'H}$ dẫn
đến tứ giác $CHON'$ nội tiếp được trong một
đường tròn, từ đó dễ thấy $N' \equiv N \Rightarrow A, M, N$
thẳng hàng.

4) Kẻ $MK \perp AO$. Từ giả thiết $EM \parallel AB$, ta suy
ra ΔMEO cân tại M và tứ giác $AEMK$ là hình
chữ nhật. Đặt $ME = MO = x$. Ta có $MO^2 = AO^2$
 $- AM^2 = AO^2 - AO \cdot AK = AO^2 - AO \cdot ME$. Vậy
 $x^2 = a^2 - ax$. Giải ra được $x = \frac{1}{2}a(\sqrt{5}-1)$.

NGÀY THI THỨ HAI

Bài 4. Nếu đặt $a = 3k + r$ với $r = 0, 1, 2$ thì ta
thấy a^2 chia cho 3 dư 0 hoặc dư 1.

Tương tự b^2 chia cho 3 dư 0 hoặc dư 1. Từ đó
 $(a^2 + b^2) : 3 \Rightarrow a^2$ và b^2 đều chia hết cho 3, suy
ra $a : 3$ và $b : 3$.

Bài 5. 1) ĐK $x \neq 0$ và $x \neq -1$.

PT đã cho tương đương với

$$\frac{(x+1)^2 + x^2}{x^2(x+1)^2} - 15 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x^2(x+1)^2} + \frac{2x^2 + 2x}{x^2(x+1)^2} - 15 = 0.$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{x(x+1)}\right)^2 + \frac{2}{x(x+1)} - 15 = 0.$$

Đặt $\frac{1}{x(x+1)} = y$ (*) PT đã cho trở thành $y^2 + 2y - 15 = 0$, giải ra được $y = 3, y = -5$. Vậy PT đã cho có 4 nghiệm: $\frac{-3 \pm \sqrt{21}}{6}, \frac{-5 \pm \sqrt{5}}{10}$.

2) PT $\left(\frac{1}{x}\right)^2 + \left(\frac{1}{x+1}\right)^2 = m$ có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ PT: $y^2 + 2y - m = 0$ (2) có 2 nghiệm phân biệt thỏa mãn $\begin{cases} y > 0 \\ y < -4 \end{cases}$ (giải từ (*))

Theo định lý Vi-ét: $y_1 + y_2 = -2$. Vậy bước PT (2) phải có: $\begin{cases} y_1 < -4 \\ y_2 > 0 \end{cases}$.

Giải hệ $\begin{cases} -1 - \sqrt{1+m} < -4 \\ -1 + \sqrt{1+m} > 0 \end{cases}$ được $m > 8$.

Thử lại thấy $m > 8$ là các giá trị cần tìm.

Bài 6. Ta có

$$P = (x+y)^3 - 3xy(x+y) + 2xy = 2003^3 - 6007xy.$$

Vì $(x-y)^2 = (x+y)^2 - 4xy = 2003^2 - 4xy$ nên xy tăng (giảm) khi $|x-y|$ giảm (tăng).

Với giả thiết x, y là các số nguyên dương, ta thấy ngay:

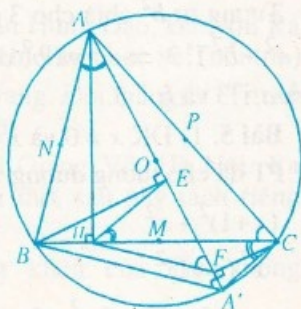
$P_{\min} = 2003^3 - 6007 \cdot 1001 \cdot 1002$ đạt được khi (x, y) bằng $(1001, 1002)$ hoặc $(1002, 1001)$

$P_{\max} = 2003^3 - 6007 \cdot 1 \cdot 2002$ đạt được khi (x, y) bằng $(1, 2002)$ hoặc $(2002, 1)$.

Bài 7. 1) Do tứ giác $ABHE$ nội tiếp nên $\widehat{EHC} = \widehat{BAA'}$, mà $\widehat{BAA'} = \widehat{BCA'} \Rightarrow \widehat{EHC} = \widehat{HCA'}$ do đó $HE \parallel CA'$, mặt khác $A'C \perp AC \Rightarrow HE \perp AC$.

2) Tứ giác $AHFC$ nội tiếp suy ra $\widehat{EFH} = \widehat{ACB}$ (1).
Tứ giác $ABHE$ nội tiếp suy ra $\widehat{HEF} = \widehat{ABC}$ (2).
Từ (1), (2) suy ra $\triangle HEF \sim \triangle ABC$.

3) Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, AB, CA . Vì $MN \parallel AC, HE \perp AC$ nên $MN \perp HE$, mà N cách đều bốn điểm A, B, H, E suy ra MN



là đường trung trực của đoạn HE . Chứng minh tương tự MP là đường trung trực của HF . Vậy M là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle HEF \Rightarrow$ đpcm.

Bài 8. Nối các điểm tạo thành các tam giác đôi một chỉ chung nhiều nhất một cạnh, phủ vừa kín tứ giác. Tổng các góc trong của các tam giác bằng tổng các góc trong của tứ giác cộng với 4 lần 360° nên bằng $360^\circ + 4 \cdot 360^\circ = 10 \cdot 180^\circ$. Vậy có 10 tam giác mà tổng diện tích là 1 nên tồn tại tam giác có diện tích không vượt quá $1/10$.

Tổng quát: Ở miền trong đa giác lồi n -cạnh ($n \geq 3$) có diện tích bằng 1 lấy n điểm, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Khi đó tồn tại một tam giác có 3 đỉnh lấy từ $2n$ đỉnh đã cho có diện tích không vượt quá $\frac{1}{3n-2}$.

VŨ QUỐC LƯƠNG

PROBLEMS IN THIS ISSUE

(Tiếp trang 15)

T4/323. Prove that

$$\frac{a}{\sqrt[3]{b^3+c^3}} + \frac{b}{\sqrt[3]{c^3+a^3}} + \frac{c}{\sqrt[3]{a^3+b^3}} < 2\sqrt[3]{4}.$$

where a, b, c are the lengths of the sides of a triangle.

T5/323. Let $ABCD$ be a given convex quadrilateral. On the lines BC, AD , take respectively the points E, F so that $AE \parallel CD, CF \parallel AB$. Prove that the quadrilateral $ABCD$ circumscribes about a circle when and only when the quadrilateral $AECF$ circumscribes about a circle.

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/323. Prove that

$$a^{\log_b c} + b^{\log_c a} + c^{\log_a b} \geq 3\sqrt[3]{abc}$$

where a, b, c are numbers greater than 1.

T7/323. Prove that for every acute triangle ABC , we have:

$$\frac{1}{3}(\cos 3A + \cos 3B) + \cos A + \cos B + \cos C \geq \frac{5}{6}.$$

T8/323. In space, let be given a fixed line d and a fixed point A not lying on d . A right angle xMy moves so that its side Mx passes through A and its side My cuts orthogonally d . Find the locus of M .



Giới thiệu phần HÌNH HỌC KHÔNG GIAN trong SGK TOÁN 8

(Tiếp theo số trước)

TRƯỜNG CÔNG THÀNH
(NXB Giáo dục)

III. Về bài tập

• Trong Sách giáo khoa cũng như sách bài tập, có các loại bài tập sau đây, giáo viên cần cân nhắc để lựa chọn một cách đa dạng, vừa đủ loại và ấn định thời gian để học sinh làm các bài tập đó.

1. Bài tập nhận dạng và đọc hình : Là trọng tâm của chương

2. Bài tập vẽ và nhận xét hình để hình thành các khái niệm cơ bản của hình học không gian (đối tượng và các quan hệ cơ bản).

3. Bài tập thực hành và tính toán về diện tích và thể tích.

4. Bài tập về tính thể tích bằng cách đếm hình hộp lập phương đơn vị xếp thành lớp... "đong", khi hình thành khái niệm về thể tích.

5. Vẽ, cắt, ghép hình, cách kí hiệu (hình hộp chữ nhật, các cạnh, các mặt của chúng, đường thẳng, mặt phẳng, quan hệ liên thuộc, quan hệ song song, quan hệ vuông góc).

6. Bài tập liên quan đến thực tế và trí tưởng tượng không gian.

7. Bài tập trắc nghiệm.

8. Bài tập phản thí dụ, quy nạp kể cả việc tổng quát hóa

9. Bài tập sử dụng cho việc học nhóm.

10. Bài tập mở.

- Về số lượng bài tập chúng tôi cho là vừa đủ, đa dạng, giáo viên nên phân loại và lựa chọn. Tuy nhiên, việc ra nhiều bài tập là không nên, nên phân loại bài tập theo nhóm bài.

Điều quan trọng là phải tuân thủ cho bằng được các bước giải toán. Chẳng hạn xem ví dụ dưới đây :

- Đa diện được xem như "một hình không gian có nhiều mặt" : Lăng trụ, hình chóp là những đa diện. Có một mối quan hệ đặc biệt giữa số đỉnh, số mặt, và số cạnh của đa diện: "Số đỉnh cộng số mặt trừ số cạnh thì bằng 2".

• Các bước nên tiến hành như sau :

1. **Tìm hiểu bài toán** : Khi đọc đề toán, hãy tự suy nghĩ

Tìm hiểu thật kĩ những thông tin mà bài toán nêu ra.

- Ta đã biết những gì đã học về các hình (Với một đa diện, ta biết được số đỉnh, số mặt, số cạnh).

- Người ta yêu cầu tìm điều gì ?

(Mối quan hệ giữa số đỉnh, số mặt, số cạnh, của một đa diện).

2. **Lập kế hoạch giải toán** (chọn phương pháp giải)

Lập một bảng để thu nhập thông tin. Chưa điền số.

Hình	Số đỉnh	Số mặt	Số cạnh	Đỉnh + mặt
	8	6	12	14
	5	5	8	10
	6	5	9	11

3. **Thực hiện lời giải**

- Điền số đỉnh, số mặt, số cạnh vào mỗi ô còn trống trong bảng nói trên.

- So sánh kết quả ở cột cuối (phía phải) với cột ghi "số cạnh"

- Phát biểu mối liên hệ : "Số đỉnh cộng số mặt trừ đi số cạnh thì bằng 2".

4. **Kiểm tra lời giải và kết luận**

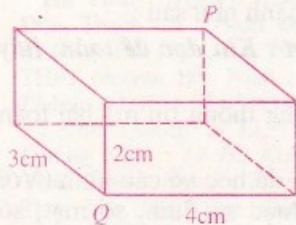
Mô tả quan hệ dưới dạng công thức

$$D + M - C = 2$$

- Liệu bạn đọc có phát hiện ra công thức Euler ở trên ? Hãy kiểm nghiệm công thức này với hình tám mặt đều, hình 12 mặt đều, hình 20 mặt đều rồi thử chứng minh cho trường hợp với các đa diện đều như là Euler đã thực hiện vào năm 1755 !

• Cuối cùng chúng tôi lưu ý các học sinh hai bài tập : bài 18 trang 105 và bài 58 trang 130 - SGK Toán 8.

Về bài 18. Đố. Các kích thước của một hình hộp chữ nhật là 4cm, 2cm và 3cm. Một con kiến bò theo mặt của hình hộp đó từ Q đến P.

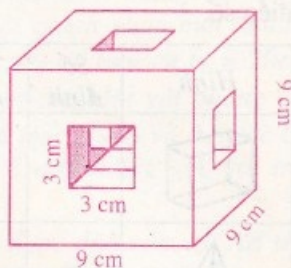


a) Hỏi con kiến bò theo đường nào là ngắn nhất ?

b) Độ dài ngắn nhất là bao nhiêu xentimét ?

Thực ra đây là một trường hợp riêng, dễ nhất trong nhiều trường hợp có được từ một bài toán tổng quát : *Bài toán con kiến của Sierpinsky* mang tên một nhà toán học lớn người Ba Lan Sierpinsky (1882-1969).

Về bài 58. Có một khối gỗ hình lập phương cạnh 9 cm. Người ta đục ba "lỗ vuông" xuyên thủng khối gỗ như hình bên.



a) Tìm thể tích của khối gỗ còn lại.

b) Tìm tổng diện tích của tất cả các mặt (ngoài lẫn trong) của khối gỗ.

Bài toán không khó ! Đúng vậy. Cái khó của bài toán ẩn tàng phía sau nó. Không phải ngẫu nhiên mà một quốc gia có nền toán học phát triển như Hoa Kỳ lại chọn bài tập này cho một bài thi vô địch liên bang ? (bài số 16 - khóa thi năm 1982). Đằng sau bài toán này là những khái niệm hết sức quan trọng của hình học Fractal : Hình trên cho ta mô hình của *Tám bọt Menger* do Nhà toán học Đức Karl Menger đề xuất vào năm 1979 - sự mở rộng của khái niệm *Tám thấm Sierpinsky*.

Về sự mở rộng và đào sâu hai bài toán này, chúng tôi sẽ giới thiệu vào một dịp khác.



HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ TỰ ÔN THI SỐ 3

(Đề đã đăng trên THPT số 320,
tháng 3 năm 2004)

Câu I. a) Bạn đọc tự giải.

b) Ta có $y = (x-1)(x^2 - 4mx + 3m + 1)$

Đặt $f(x) = x^2 - 4mx + 3m + 1$

Hàm số y có cực trị và $y_{CT} \cdot y_{CD} < 0$ khi và chỉ khi PT $y = 0$ có 3 nghiệm phân biệt hay PT $x^2 - 4mx + 3m + 1 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt khác 1.

$$\begin{cases} \Delta' = 4m^2 - 3m - 1 > 0 \\ f(1) = -m + 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -\frac{1}{4} \\ m > 1 \text{ với } m \neq 2 \end{cases}$$

c) Đồ thị hàm số tiếp xúc với trục hoành khi và chỉ khi hệ PT sau có nghiệm

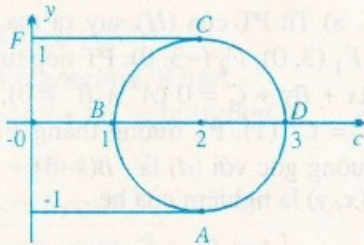
$$\begin{cases} y=0 \\ y'=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)f(x)=0 \\ f(x)+(x-1)f'(x)=0 \end{cases} \quad (1) \quad (2)$$

Xét PT (1), nếu $x = 1$ thì từ (2) được $f(1) = 0 \Rightarrow m = 2$.

Nếu $x \neq 1 \Rightarrow f(x) = 0$ thì từ (2) có $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 2m$, thay vào PT $f(x) = 0$ ta được $-4m^2 + 3m + 1 = 0 \Rightarrow m = 1, m = -1/4$. Vậy đồ thị hàm số tiếp xúc với trục hoành khi $m = 2, m = 1, m = -1/4$.

Câu II. a) ĐK $x > 0, y > 0$.

Gọi các PT trong hệ lần lượt là (1), (2). Từ PT (1) có $x - e^x = y - e^y$ (3). Xét hàm $f(t) = t - e^t$ ($t > 0$). Ta có $f'(t) = 1 - e^t < 0$ khi $t > 0$, suy ra hàm $f(t)$ nghịch biến trên $(0, +\infty)$. Từ (3) có $f(x) = f(y)$ với $x > 0, y > 0 \Rightarrow x = y$. Thay vào (2) ta được $\log_2^2 x - 3\log_2 x + 2 = 0 \Rightarrow x = 2, x = 4$. Thử lại đúng.



$$\begin{aligned} \text{Tính } V &= V_{AEFCDA} - V_{AEFCBA} = \\ &= \pi \int_{-1}^1 \left[(2 + \sqrt{1-y^2})^2 - (2 - \sqrt{1-y^2})^2 \right] dy \\ &= 8\pi \int_{-1}^1 \sqrt{1-y^2} \cdot dy. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Đặt } y &= \sin t \text{ với } -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2} \text{ và } dy = \cos t \cdot dt \text{ thì} \\ V &= 8\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t \, dt = 4\pi \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} \\ &= 4\pi^2 \text{ (đơn vị thể tích).} \end{aligned}$$

b) Xem lời giải bài toán tổng quát ở bài T8/317 (THTT số 321, tháng 3 năm 2004).

Đáp số : Số nghiệm nguyên dương của PT $x + y + z = 100$ là $C_{99}^2 = 4851$.

NGUYỄN ANH DŨNG

CÂU LẠC BỘ (Tiếp trang 26) VIỆT NAM VÀ IMO

Năm 2004 này Việt Nam kỉ niệm một sự kiện liên quan đến các bạn trẻ yêu toán.

Bạn hãy gửi một bài viết tham dự Câu lạc bộ bằng cách trả lời các câu hỏi sau nhé.

1. Kì thi Toán Quốc tế lần đầu tiên diễn ra vào năm nào, tại đâu và bao nhiêu nước tham gia?

2. Đoàn Việt Nam dự thi Toán Quốc tế lần đầu tiên vào năm nào? Kết quả ra sao?

3. Việt Nam đã giành được tất cả bao nhiêu Huy chương cho đến năm 2003? Bao nhiêu Huy chương Vàng, bao nhiêu Huy chương Bạc, bao nhiêu Huy chương Đồng?

4. Kể tên những học sinh Việt Nam được 2 Huy chương Vàng toán Quốc tế.

Kết quả các bạn được nhận quà tặng sẽ đăng vào số báo tháng 7.2004. Chờ bài dự thi của các bạn.

CLB

ĐỀ TỰ ÔN THI SỐ 5 (Thời gian làm bài : 180 phút)

Câu I. (2 điểm)

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số

$$y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$$

2) Giả sử A và B là hai điểm trên đồ thị của hàm số có hoành độ tương ứng là x_1, x_2 thỏa mãn hệ thức $x_1 + x_2 = 2$. Chứng minh rằng các tiếp tuyến với đồ thị tại các điểm A và B song song với nhau.

Câu II. (2 điểm)

1) Giải phương trình :

$$3x^2 - 2x^3 = \log_2(x^2 + 1) - \log_2 x$$

2) Giải và biện luận phương trình :

$$\sqrt{a-x} + \sqrt{a+x} = 4 \quad (a \text{ là tham số})$$

Câu III. (2 điểm)

1) Giải phương trình :

$$4\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x = \cos 6x$$

2) Tam giác ABC có các góc thỏa mãn

$$2\sin A + 3\sin B + 4\sin C = 5\cos \frac{A}{2} + 3\cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2}.$$

Chứng minh rằng ΔABC đều.

Câu IV. (2 điểm)

Trên mặt phẳng tọa độ Oxy cho elip (E) có phương trình $x^2 + 4y^2 = 4$.

Giả sử (t) là một tiếp tuyến bất kì của (E) mà không song song với Oy. Gọi M, N là các giao điểm của (t) với các tiếp tuyến của (E) tương ứng tại các đỉnh $A_1(-2, 0); A_2(2, 0)$.

1) Chứng minh rằng $\overline{A_1M} \cdot \overline{A_2N} = 1$.

2) Chứng minh rằng khi tiếp tuyến (t) thay đổi thì đường tròn đường kính MN luôn đi qua hai điểm cố định.

Câu V. (2 điểm)

1) Tìm họ nguyên hàm của hàm số

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^4 - 3x^2 + 1}$$

2) Chứng minh rằng với mọi n nguyên dương ta luôn có :

$$1^2 \cdot C_n^1 + 2^2 \cdot C_n^2 + \dots + n^2 \cdot C_n^n = n(n+1)2^{n-2}$$

PHẠM HÙNG

(GV PTCTT-ĐHKHTN Hà Nội)

THÔNG TIN TOÁN HỌC

GIẢI THƯỞNG ABEL NĂM 2004

NGÔ VIỆT TRUNG

(Viện Toán học)

Giải thưởng Abel được thành lập năm 2001 nhằm đóng vai trò như một giải Nobel cho Toán học (xem THPT số 4, năm 2002). Viện Hàn lâm Khoa học và Văn học Na Uy là cơ quan đứng ra tổ chức việc xét duyệt và trao giải thưởng, bắt đầu từ năm 2003. Giải thưởng Abel năm 2003 đã được trao cho nhà toán học Pháp Jean Pierre Serre (xem THPT số 311, tháng 5 năm 2003).

Vừa qua Viện Hàn lâm Khoa học và Văn học Na Uy đã công bố giải thưởng Abel năm 2004 được trao cho hai nhà toán học Michael F. Atiyah (Anh) và Isadore M. Singer (Mỹ) về "sự phát hiện và chứng minh định lý chỉ số đã liên hệ các chuyên ngành tô pô, hình học và giải tích với nhau và vai trò nổi bật của họ trong việc bắc những chiếc cầu nối liên toán học và vật lý lý thuyết".

Chúng ta thường mô tả các hiện tượng tự nhiên qua những đại lượng biến đổi theo thời gian và không gian. Sự biến thiên của những đại lượng này thường được mô tả qua các công thức toán học, cụ thể hơn là một hệ phương trình vi phân. Việc tìm nghiệm của một hệ phương trình như vậy thường rất khó. Tuy nhiên người ta có thể thu được thông tin về các nghiệm thông qua việc lấy số nghiệm trừ đi số điều kiện giới hạn hệ phương trình. Hiệu này được gọi là *chỉ số giải tích* của hệ phương trình. Năm 1960, nhà toán học Nga I. M. Gelfand đã phỏng đoán rằng chỉ số giải tích có mối liên quan chặt chẽ với hình dạng của không gian cơ sở. Năm 1963, Atiyah và Singer đã phát hiện và chứng minh được công thức tính chỉ số giải tích qua tô pô của không gian cơ sở. Công thức này được gọi là *định lý chỉ số Atiyah-Singer*.

Định lý chỉ số Atiyah-Singer là một công cụ hiệu quả để kết nối những vấn đề giải tích, hình học và tô pô với nhau. Vì vậy, nó có vô số ứng dụng trong toán học và sau đó trong vật lý lý thuyết. Ngày nay, định lý chỉ số đã trở thành một công cụ không thể thiếu được của cả toán học và vật lý. Atiyah và Singer đã phần nào không biết mệt mỏi để giải thích quan điểm vật lý cho các nhà toán học và giới thiệu các công cụ toán học hiện đại cho các nhà vật lý lý thuyết. Những nỗ lực của họ đã góp phần làm thay đổi diện mạo của toán học và vật lý lý thuyết.

Michael F. Atiyah sinh năm 1929 tại London. Ông bảo vệ luận án tiến sĩ tại Đại học Cambridge. Chuyên ngành chính của ông là hình học đại số và tô pô. Atiyah là giáo sư của các trường đại học Cambridge, Oxford, và Viện nghiên cứu cao cấp Princeton. Ông là người sáng lập và là Viện trưởng đầu tiên của Viện các khoa học toán học Isaac Newton ở Cambridge. Ông đã được trao nhiều giải thưởng cao quý như giải thưởng Fields (1966). Năm 1962 ông được bầu làm viện sĩ Viện Hàn lâm Hoàng gia Anh khi mới 32 tuổi và là Chủ tịch viện này những năm 1990-1995. Ông được nữ hoàng Anh phong tước quý tộc năm 1983.

Isadore M. Singer sinh năm 1924 tại Detroit. Ông bảo vệ luận án tiến sĩ tại Đại học Chicago. Chuyên ngành chính của ông là giải tích. Singer là giáo sư của Đại học công nghệ Massachusetts (MIT). Ông đã được trao Huân chương quốc gia về khoa học của Hoa Kỳ (1983) và là viện sĩ Viện Hàn lâm Khoa học và Nghệ thuật Hoa Kỳ và Viện Hàn lâm Khoa học quốc gia Hoa Kỳ.

ĐÓNG TẬP THPT CẢ NĂM 2004

Đáp ứng nhu cầu của độc giả, từ năm 2004 tòa soạn THPT sẽ phát hành các quyển đóng tập bìa cứng cả năm **Toán học và Tuổi trẻ**. Để sơ bộ nắm được số lượng, đề nghị các Công ty phát hành sách và thiết bị giáo dục, các Sở, Phòng Giáo dục đào tạo và các trường gửi phiếu đặt về địa chỉ:

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRÉ
187B GIẢNG VÕ, HÀ NỘI

Các cá nhân muốn mua lẻ có thể gửi trực tiếp tiền về địa chỉ trên. Cuối tháng 12 sau khi có đủ 12 số chúng tôi sẽ đóng tập gửi tới các bạn (52.000 đồng/cuốn).

Trân trọng cảm ơn.

THPT



ĐÁNH GIÁ CẬN ĐỂ GIẢI MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

HÀ CHÍ ĐẠT

(GV CDSP Kỹ thuật Nam Định)

Một số phương trình (PT) lượng giác nếu sử dụng phương pháp đánh giá cận sẽ tìm được

ng nghiệm nhanh gọn và dễ dàng hơn so với các phương pháp biến đổi thông thường khác. Ngoài ra phương pháp đánh giá cận nhiều khi rất hiệu quả nếu PT lượng giác vô nghiệm.

I. Nội dung phương pháp đánh giá cận

Giả sử ta dùng các phép biến đổi tương đương để đưa PT lượng giác đã cho về dạng :

$$f(\sin x, \cos x) = \varphi(\sin x, \cos x) \quad (1)$$

và tìm được các cận trên và cận dưới của hàm f và φ với mọi x như sau :

$$\begin{cases} f(\sin x, \cos x) \leq \alpha \\ \varphi(\sin x, \cos x) \geq \beta \end{cases} \quad (2)$$

Có thể xảy ra một trong ba trường hợp sau đây:

1) Nếu $\alpha = \beta$

Khi đó việc giải PT (1) tương đương với việc giải hệ :

$$\begin{cases} f(\sin x, \cos x) = \alpha \\ \varphi(\sin x, \cos x) = \alpha \end{cases} \quad (3)$$

2) Nếu $\alpha < \beta$

Khi đó từ hệ (2) ta có $\varphi(\sin x, \cos x) \geq \beta > \alpha \geq f(\sin x, \cos x)$. Suy ra PT (1) vô nghiệm.

3) Nếu $\alpha > \beta$

Khi đó phương pháp đánh giá cận có thể không còn hiệu lực nữa, ta phải tìm cách giải khác.

II. Một số bài toán minh họa

Ví dụ 1. Giải phương trình

$$\sin^2 x (1 + \sin^2 x) = \cos x (1 - \cos x)$$

Lời giải. Biến đổi PT đã cho về dạng :

$$1 + \sin^4 x = \cos x.$$

Xét vế trái $1 + \sin^4 x \geq 1$, vế phải $\cos x \leq 1$.

PT này tương đương với hệ :

$$\begin{cases} 1 + \sin^4 x = 1 \\ \cos x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = 1 \end{cases}$$

Nghiệm PT là : $x = 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) Thử lại đúng.

Ví dụ 2. Giải phương trình $\sin^3 x + \cos^3 x = 1$.

Lời giải. Biến đổi PT về dạng

$$\sin^3 x + \cos^3 x = \sin^2 x + \cos^2 x. \text{ Suy ra :}$$

$$\sin^2 x (\sin x - 1) = \cos^2 x (1 - \cos x) \quad (1)$$

Do $\sin x \leq 1$; $\cos x \leq 1$, nên $\sin^2 x (\sin x - 1) \leq 0$ và $\cos^2 x (1 - \cos x) \geq 0$ PT (1) tương đương với hệ :

$$\begin{cases} \sin^2 x (\sin x - 1) = 0 \\ \cos^2 x (1 - \cos x) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} \sin^2 x (\sin x - 1) = 0 \\ \cos^2 x (1 - \cos x) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

+ Nếu $\sin x = 0$ thì $\cos x \neq 0$, từ (3) có $\cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

+ Nếu $\cos x = 0$ thì $\sin x \neq 0$, từ (2) có $\sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2m\pi$ ($m \in \mathbb{Z}$). Thử lại đúng.

Ví dụ 3. Giải phương trình

$$\sin x + \frac{1}{\sin x} = 2^{\cos x} \quad (4)$$

Lời giải. Điều kiện $\sin x \neq 0$. Ta có

$$\left| \sin x + \frac{1}{\sin x} \right| \geq 2.$$

Mặt khác $0 < 2^{\cos x} \leq 2$ nên PT (4) tương đương với hệ :

$$\begin{cases} \sin x + \frac{1}{\sin x} = 2 \\ 2^{\cos x} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\sin x - 1)^2 = 0 \\ \cos x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \\ \cos x = 1 \end{cases}$$

Vậy PT (4) vô nghiệm.

Ví dụ 4. Giải phương trình :

$$x^6 + \cos^5 x = 0$$

Lời giải. Ta có $x^6 = -\cos^5 x$ (5)

Vì $-1 \leq -\cos^5 x \leq 1$, nên để phương trình có nghiệm thì điều kiện cần cho (5) là : $0 \leq x^6 \leq 1$

$$\Rightarrow -1 \leq x \leq 1 \Rightarrow -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos x > 0$$

$\Rightarrow -\cos^5 x < 0$ nhưng $x^6 \geq 0$ nên từ (5) suy ra phương trình vô nghiệm.

Ví dụ 5. Giải phương trình :

$$\cotg 2x + \cotg 3x + \frac{1}{\sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x} = 0 \quad (6)$$

Lời giải. Điều kiện $\sin x \neq 0, \sin 2x \neq 0, \sin 3x \neq 0$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$\frac{\cos 2x \cdot \sin 3x + \cos 3x \cdot \sin 2x}{\sin 2x \cdot \sin 3x} + \frac{1}{\sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x} = 0$$

$$\text{Hay } \frac{\sin x \cdot \sin 5x + 1}{\sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x} = 0 \Rightarrow \sin x \cdot \sin 5x = -1 \quad (7)$$

Ta có $|\sin x \cdot \sin 5x| \leq 1$, nên PT (7) tương đương với hệ :

$$\begin{cases} \sin x = 1 \\ \sin 5x = -1 \end{cases} \quad (8) \text{ hoặc } \begin{cases} \sin x = -1 \\ \sin 5x = 1 \end{cases} \quad (9)$$

Giải hệ (8) ta được $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ và

$$x = \frac{1}{5} \left(-\frac{\pi}{2} + 2h\pi \right) \text{ với } k, h \in \mathbb{Z}. \text{ Từ đó}$$

$\frac{\pi}{2} + 2k\pi = \frac{-\pi}{10} + \frac{2h\pi}{5} \Rightarrow 2(h - 5k) = 3$. PT này vô nghiệm nguyên. Lập luận tương tự thì hệ (9) cũng vô nghiệm. Vậy PT (6) vô nghiệm.

Bây giờ xin bạn đọc thử sử dụng phương pháp đánh giá cận để giải các PT sau :

- 1) $\sin^5 x + \cos^5 x = 1$ 2) $\sin 7x + \cos 2x + 2 = 0$
- 3) $\sin^4 x + \cos^2 2x = 2$ 4) $\sin 4x \cdot \cos 16x = 1$.

CÁCH TÌM CÁC CHỮ SỐ...

(Tiếp trang 2)

BÀI TẬP

1) Tìm số $\overline{xy}$ biết $\overline{xyxy} = \overline{xx}^2 + \overline{yy}^2$

2) Tìm số $\overline{xy}$ biết $\overline{xx}^y = \overline{xyyx}$

3) Tìm số $\overline{abcdef}$ biết

$$\overline{abcdef} = a(1000 \cdot \overline{cc}^2 - \overline{cc})$$

4) Tìm số $\overline{xyz}$ biết $2 \cdot \overline{xyz} = 3 \cdot x! \cdot y! \cdot z!$

Thư từ bạn muôn nơi

😊 "Chính báo Toán đã dạy cho em thái độ làm việc cẩn thận, nghiêm túc khi xem xét một vấn đề ; và nhờ vào cách trình bày súc tích, chặt chẽ ở các bài toán trên TH&TT mà em đã học tập dễ dàng hơn nhiều khi vào Đại học, đặc biệt là những môn đòi hỏi cao trong logic".

(TRẦN ANH TUẤN, 12A Toán,
ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội)

😊 "Em lại có các bản phôi-tô báo từ những năm 1992 cơ bởi vì chúng em mượn báo từ thầy giáo dạy toán của bọn em. Vì chúng em nằm trong đội tuyển thi học sinh giỏi tỉnh nên thầy thường khuyên bọn em nên đặt mua báo Toán học và Tuổi trẻ để tham khảo. Quả thực em thấy các trang mục của báo bây giờ phong phú đa dạng và cũng có phần khó hơn những số báo trước đây".

(NGUYỄN THU HẰNG, Phú Thọ)

😊 "Sau khi đọc THPT được một thời gian, em thấy kiến thức về môn toán của mình tăng lên rất nhiều. Em thấy báo rất hay, bổ ích.

Em xin gửi lời cảm ơn các thầy cô đã xây dựng được những trang báo thành công và lí thú cho các bạn trẻ yêu toán chúng em".

(PHẠM HỒNG TÂM, 9H,
THCS Hàn Thuyên, Tp. Nam Định).

😊 "Có được một bài in trên tờ tạp chí Toán học dành cho học sinh phổ thông đây uy tín, có bề dày 40 năm này là một việc hết sức khó khăn nhưng cũng rất vinh dự, ngay cả đối với các thầy, cô giáo đang giảng dạy toán học ở trường phổ thông".

(NGÔ VĂN ĐANG, Học sinh 3NB-14,
Phú Thọ)

😊 "Nhưng để được như hôm nay cháu biết ơn tạp chí rất nhiều, những năm học phổ thông cháu đã học tập và rèn luyện qua tạp chí một cách say mê, có thể nói tạp chí như một người thầy, một người bạn gần gũi đối với cháu.

Những kiến thức bổ ích của tạp chí đã giúp cháu học Toán tốt hơn và kết quả là cháu đã đạt giải quốc gia, được vào thẳng ĐH Bách Khoa Hà Nội. Ở môi trường mới này cháu lại được gặp các bạn cũng là độc giả và đã từng có tên trên tạp chí, chúng cháu luôn cùng nhau kể lại những kỉ niệm về tạp chí mà không ai có thể quên được".

(VŨ HỮU PHƯƠNG, BK51, K48
ĐHBK Hà Nội)

CHUỖI VÀ ỨNG DỤNG ĐỂ NGHIÊN CỨU DÃY SỐ (Tiếp bài 3)

Vậy $f(x) =$

$$\begin{aligned} &= \frac{-x}{x^2+x-1} = \frac{-x}{\left(x+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x+\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x} - \frac{1}{1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}x} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(1 + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)x + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 x^2 + \dots \right) - \right. \\ &\quad \left. \left(1 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)x + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^2 x^2 + \dots \right) \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right] x^n. \end{aligned}$$

Qua so sánh các hệ số của chuỗi trên và $f(x)$,

ta có
$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

với mọi $n = 0, 1, 2, \dots$

b) Chúng ta xét dãy $a_1 = 1, a_2 = 1, a_n = 1.a_{n-1} + 2.a_{n-2} + \dots + (n-1)a_1$ với $n = 3, 4, \dots$

Tìm công thức cho a_n .

Xét chuỗi $f(x) = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$

Ta có

$$\begin{aligned} f(x).(x+2x^2+3x^3+\dots) &= \\ = a_1x^2 + (1.a_2+2.a_1)x^3 + \dots &= f(x) - x. \end{aligned}$$

Lấy đạo hàm của $\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+\dots$

được
$$\frac{1}{(x-1)^2} = 1+2x+3x^2+\dots$$

Khi đó $\frac{x}{(x-1)^2} = x+2x^2+3x^3+\dots$, ta nhận được

$$f(x) = \frac{-x}{-1+\frac{x}{(x-1)^2}} = x + \frac{x^2}{x^2-3x+1}$$

$$\begin{aligned} &= x + \frac{x^2}{\left(x-\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)} \\ &= x + \frac{x^2}{\sqrt{5}} \left(\frac{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}{1-\frac{3+\sqrt{5}}{2}x} - \frac{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}{1-\frac{3-\sqrt{5}}{2}x} \right) \\ &= x + \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} \right) - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} \right) \right] x^2 + \\ &\quad + \left[\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} \right)^2 - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} \right)^2 \right] x^3 + \dots \end{aligned}$$

Qua so sánh các hệ số của chuỗi trên và $f(x)$, ta có

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} \right)^{n-1} \right] \text{ với } n = 2, 3, \dots$$

c) Bây giờ ta chuyển sang xét dãy số Catalan được cho bởi $a_0 = 1, a_1 = 1, a_n = a_0a_{n-1} + a_1a_{n-2} + \dots + a_{n-1}a_0$ với $n \geq 2$.

Tìm công thức tường minh cho a_n .

Xét chuỗi $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$

Khi đó $f^2(x) = f(x).f(x)$

$$\begin{aligned} &= a_0^2 + (a_0a_1 + a_1a_0)x + (a_0a_2 + a_1a_1 + a_2a_0)x^2 + \dots \\ &= a_1 + a_2x + a_3x^2 + \dots = \frac{f(x)-1}{x}. \end{aligned}$$

Vậy $xf^2(x) = f(x) - 1$ hay $xf^2(x) - f(x) + 1 = 0$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}$$

Do $(\sqrt{1-4x})^{(n)} = \left[(1-4x)^{1/2} \right]^{(n)}$, nên

$$\begin{aligned} \sqrt{1-4x} &= 1 + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{1!}(-4x) + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}(-4x)^2 + \\ &+ \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}(-4x)^3 + \dots \end{aligned}$$

ĐẠI HỘI ĐẠI BIỂU TOÀN QUỐC LẦN THỨ V HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

Ngày 10 tháng 4 năm 2004, Hội Toán học Việt Nam đã tiến hành Đại hội đại biểu toàn quốc lần thứ V tại Hà Nội. Tham dự đại hội có 160 đại biểu đến từ hơn 20 trường Đại học, Cao đẳng và các Viện nghiên cứu, từ Hà Nội, Thành phố Hồ Chí Minh cho đến Cần Thơ, Lâm Đồng.... Các đại biểu tham dự đại hội đại diện cho hơn 700 hội viên, trong đó có các nhà toán học lão thành như Hoàng Tuy, Đặng Đình Áng..., các nhà toán học đang là nòng cốt của các trường đại học và viện nghiên cứu, các nhà toán học trẻ.

Đại hội vui mừng nhận thấy rằng, cùng với đà phát triển của kinh tế đất nước, được sự quan tâm nhiều hơn của Đảng, Nhà nước và xã hội, nền toán học Việt Nam trong mấy năm qua đã dần dần thoát khỏi nguy cơ suy thoái, bước vào giai đoạn phục hồi. Nhiều học sinh, sinh viên trẻ tài năng đã chọn toán học làm nghề nghiệp tương lai của mình. Trong 5 năm vừa qua, cộng đồng toán học Việt Nam đã thu được nhiều thành tựu đáng khích lệ: 444 bài báo khoa học đã được công bố, trong đó 246 bài trên các tạp chí quốc tế xuất bản ở nước ngoài, 198 bài trên các tạp chí quốc tế và quốc gia xuất bản trong nước (trong đó có hai tạp chí quan trọng là Vietnam Journal of Math. và Acta Math. Vietnamica), nhiều công trình nghiên cứu toán học đã gắn liền với một số nhiệm vụ cấp bách của kinh tế, xã hội và an ninh quốc phòng.

Đại hội đã bầu ra Ban chấp hành nhiệm kỳ 2004-2009 gồm các nhà toán học sau:

GS. TSKH Phạm Thế Long (Chủ tịch Hội, Học viện KTQS), PGS.TSKH Lê Tuấn Hoa (Phó CT kiêm Tổng Thư ký Hội, Viện TH), GS.TS Nguyễn Hữu Anh (Phó CT Hội, ĐHKHTN - ĐHQG TP. HCM), GS.TS Nguyễn Quý Hỷ (Phó CT Hội, ĐHKHTN - ĐHQG HN), GS.TSKH Hà Huy Khoái (Phó CT Hội, Viện TH), GS.TSKH

Lê Ngọc Lăng (Phó CT Hội, ĐH Mỏ ĐC), GS.TSKH Nguyễn Văn Mậu (Phó CT Hội, ĐHKHTN - ĐHQG HN), PGS.TSKH Lê Mậu Hải (Phó TTK Hội, ĐHSP HN), PGS.TS Tống Đình Quỳ (Phó TTK Hội, ĐHBK HN), GS.TSKH Nguyễn Hữu Việt Hưng (ĐHKHTN - ĐHQG HN), GS.TSKH Phan Quốc Khánh (ĐH Quốc tế, ĐHQG TP. HCM), PGS.TS Lê Hải Khôi (Viện CNTT), GS.TSKH Trần Văn Nhung (Thứ trưởng Bộ GD & ĐT), GS.TSKH Lê Hùng Sơn (ĐHBK HN), GS.TSKH Nguyễn Khoa Sơn (Viện KH & CN VN), TS Nguyễn Thái Sơn (ĐHSP TP. HCM), PGS.TS Lê Văn Thuyết (ĐH Huế), GS.TSKH Nguyễn Duy Tiến (ĐHKHTN - ĐHQG HN).

Trong Đại hội lần này, Hội Toán học Việt Nam đã tiến hành trao Giải thưởng Lê Văn Thiêm 2003 và Giải thưởng Viện Toán học Việt Nam 2003.

GIẢI THƯỞNG VIỆN TOÁN HỌC VIỆT NAM 2003

Giải thưởng Viện Toán học Việt Nam là giải thưởng do Viện Toán học trao tặng (2 năm một lần) cho một hoặc hai nhà toán học trong toàn quốc có các đóng góp xuất sắc trong nghiên cứu toán học, tuổi đời không quá 40 tính đến thời điểm xét thưởng.

Giải thưởng Viện Toán học VN năm 2003 được trao cho TS Phùng Hồ Hải. Anh sinh năm 1970, đoạt giải Ba cuộc thi Olympic Toán Quốc tế lần thứ 27 tại Ba Lan năm 1986, tốt nghiệp Đại học Tổng hợp Mat-xcơ-va (LB Nga) năm 1992, bảo vệ học vị TS tại Đại học Mu-nich (CHLB Đức) năm 1996, hiện công tác tại Viện Toán học, đã công bố 14 công trình nghiên cứu có giá trị về Đại số Hopf, đại số lượng tử và lý thuyết phạm trù trên các tạp chí toán học có uy tín cao của thế giới.

☛ Vì các hệ số của $f(x)$ đều là số nguyên dương nên

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x} = \\ &= \frac{1}{2x} \left[2x + \frac{1}{2!2^2} 4^2 x^2 + \frac{1.3}{3!2^3} 4^3 x^3 + \dots \right] \\ &= 1 + \frac{2x}{2!} + \frac{1.3}{3!} 2^2 x^2 + \frac{1.3.5}{4!} 2^3 x^3 + \dots + \end{aligned}$$

$$+ \frac{1.3.5 \dots (2n-3)}{n!} 2^{n-1} x^{n-1} + \dots$$

Qua so sánh các hệ số của chuỗi trên và $f(x)$, ta có

$$a_n = \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{(n+1)!} 2^n = \frac{1}{n+1} C_{2n}^n.$$

với mọi $n = 1, 2, \dots$

(Kì sau đăng tiếp)



CÁC LỚP TRUNG HỌC CƠ SỞ

Bài T1/323. (Lớp 6). So sánh $\frac{1}{16}$ với tổng A gồm 11 số hạng sau :

$$A = \frac{1}{5^2} + \frac{2}{5^3} + \dots + \frac{n}{5^{n+1}} + \dots + \frac{11}{5^{12}}.$$

TRẦN VĂN HINH
(GV THCS Nam Giang, Nam Trực, Nam Định)

Bài T2/323. (Lớp 7). Chứng minh rằng

$$\frac{a}{2a+b+c} + \frac{b}{2b+c+a} + \frac{c}{2c+a+b} \geq \frac{3}{4}.$$

trong đó a, b, c là các số nguyên dương.

VŨ ANH NAM
(GV THCS Từ Liêm, Lâm Hà, Lâm Đồng)

Bài T3/323. Tìm phân nguyên của tổng A gồm 50 số hạng :

$$A = \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$$

NGUYỄN CÔNG CHUẨN
(SV K14 A2 Toán, ĐH Vinh)

Bài T4/323. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sqrt[3]{b^3+c^3}} + \frac{b}{\sqrt[3]{c^3+a^3}} + \frac{c}{\sqrt[3]{a^3+b^3}} < 2\sqrt[3]{4}.$$

trong đó a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác.

NGÔ QUANG VÂN
(GV THPT Quỳnh Lưu 4, Nghệ An)

Bài T5/323. Cho tứ giác lồi $ABCD$. Trên các đường thẳng BC, AD lấy các điểm E, F theo thứ tự sao cho $AE \parallel CD, CF \parallel AB$. Chứng minh rằng tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp khi và chỉ khi tứ giác $AECF$ ngoại tiếp.

NGUYỄN ĐỨC THUẬN
(SV CNTT 1 ĐH KHTN Hà Nội)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/323. Chứng minh rằng

$$a^{\log_b c} + b^{\log_c a} + c^{\log_a b} \geq 3\sqrt[3]{abc}$$

trong đó a, b, c là các số lớn hơn 1.

TRIỆU VĂN HUNG
(GV THPT Triệu Quang Phục, Hưng Yên)

Bài T7/323. Chứng minh rằng với tam giác nhọn ABC ta có

$$\frac{1}{3}(\cos 3A + \cos 3B) + \cos A + \cos B + \cos C \geq \frac{5}{6}.$$

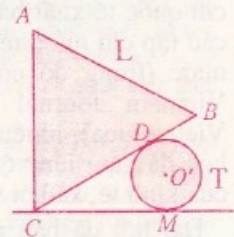
ĐOÀN THẾ PHIẾT
(GV THPT Lê Hồng Phong, Nam Định)

Bài T8/323. Trong không gian cho một đường thẳng d cố định và một điểm A cố định không thuộc d . Một góc vuông xMy có cạnh Mx luôn đi qua điểm A còn cạnh My luôn cắt và vuông góc với d . Tìm quỹ tích của điểm M .

ĐÀO TAM
(GV khoa Toán ĐH Vinh)

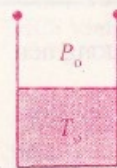
CÁC ĐỀ VẬT LÝ

Bài L1/323. Khối lăng trụ L với khối lượng $m_1 = 10\text{kg}$ có thiết diện thẳng là tam giác đều ABC . Khối trụ T có khối lượng là $m_2 = 5\text{kg}$. Các vật được kê như hình vẽ (cạnh AC thẳng đứng). Hệ số ma sát giữa vật L với sàn, vật T với sàn đều bằng k_1 . Hệ số ma sát giữa vật L với vật T là k_2 . Cho $CD = (2/3)CB$. Tìm k_1, k_2 và áp lực ở mọi chỗ tiếp xúc.



PHẠM HÙNG QUYẾT
(GV Hà Nội)

Bài L2/323. Một ống hình trụ thẳng đứng có thể tích V . Ở phía dưới một pittông nhẹ có một lượng khí heli ở nhiệt độ T_0 . Pittông nằm ở vị trí cân bằng chia ống thành hai nửa bằng nhau (xem hình vẽ). Ở phía trên có làm hai vấu để pittông không bật ra khỏi ống. Người ta đun nóng khí từ từ đến khi nhiệt độ khí heli là $3T_0$. Hỏi khí heli đã nhận được một nhiệt lượng là bao nhiêu? Bỏ qua ma sát giữa pittông và thành ống. Áp suất khí quyển bên ngoài là P_0 .



NGUYỄN XUÂN QUANG
(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

CUỘC THI GIẢI TOÁN KỶ NIỆM 40 NĂM TẠP CHÍ THTT

Đề thi đăng từ số báo 321 (3.2004) đến 325 (7.2004). Thời hạn nhận bài là 2 tháng từ khi đăng đề. Bài giải đăng từ số báo 325 (7.2004) đến 329 (11.2004). Có giải thưởng tập thể dành cho trường có nhiều bạn tham gia.

THTT

CÁC LỚP THCS

Bài T5/THCS. Giải phương trình

$$x + \sqrt{5 + \sqrt{x-1}} = 6$$

NGUYỄN HỮU HIỆP
(GV THPT Nguyễn Bình Khiêm,
Vĩnh Bảo, Hải Phòng)

Bài T6/THCS. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{a^3}{b^2} + \frac{b^3}{c^2} + \frac{c^3}{a^2} + 27 \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \right)$$

trong a, b, c là các số dương thỏa mãn
 $a + b + c \leq 3$.

TRẦN HỒNG SƠN
(GV THPT BC Thái Thụy, Thái Bình)

CÁC LỚP THPT

Bài T5/THPT. Dãy số (u_n) ($n = 1, 2, 3, \dots$) thỏa mãn các điều kiện sau với mọi $n = 1, 2, 3, \dots$:

$$1) u_n = u_{n+2004} ; 2) \sum_{i=1}^{2n} u_i \leq 0 ; 3) \sum_{i=1}^{2n-1} u_i \geq 0$$

Chứng minh rằng $|u_{2003}| \geq |u_{2004}|$

ĐẶNG THANH HẢI
(GV Học viện PKKQ Sơn Tây, Hà Tây)

Bài T6/THPT. Cho đa giác đều n cạnh $A_1A_2\dots A_n$ nội tiếp đường tròn đơn vị. Chứng minh rằng với điểm M bất kì ta có (coi A_{n+1} trùng với A_1):

$$\sum_{i=1}^n MA_i \cdot MA_{i+1} \geq n.$$

ĐẶNG ĐÌNH KHÁNH
(SV KSCLC, K48, ĐHBK Hà Nội)

CONTEST ON THE 40th ANNIVERSARY OF THE JOURNAL

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T5/THCS. Solve the equation

$$x + \sqrt{5 + \sqrt{x-1}} = 6$$

T6/THCS. Find the least value of the expression

$$P = \frac{a^3}{b^2} + \frac{b^3}{c^2} + \frac{c^3}{a^2} + 27 \left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} \right)$$

where a, b, c are positive numbers satisfying the condition $a + b + c \leq 3$.

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T5/THPT. The sequence of numbers (u_n) ($n = 1, 2, 3, \dots$) satisfies the following conditions for every $n = 1, 2, 3, \dots$:

$$1) u_n = u_{n+2004} ; 2) \sum_{i=1}^{2n} u_i \leq 0 ; 3) \sum_{i=1}^{2n-1} u_i \geq 0.$$

Prove that $|u_{2003}| \geq |u_{2004}|$.

T6/THPT. Let $A_1A_2\dots A_n$ be a regular n -polygon inscribed in the unit circle. Prove that

$$\text{for every point } M, \sum_{i=1}^n MA_i \cdot MA_{i+1} \geq n.$$

(where $A_{n+1} = A_1$).

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/323. (for 6th grade). Compare $\frac{1}{16}$ with the following sum A of 11 numbers:

$$A = \frac{1}{5^2} + \frac{2}{5^3} + \dots + \frac{n}{5^{n+1}} + \dots + \frac{11}{5^{12}}.$$

T2/323. (for 7th grade). Prove that

$$\frac{a}{2a+b+c} + \frac{b}{2b+c+a} + \frac{c}{2c+a+b} \geq \frac{3}{4},$$

where a, b, c are positive integers.

T3/323. Consider the following sum A of 50 numbers:

$$A = \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$$

Find the greatest integer not exceeding A .

(Xem tiếp trang 4)



Bài T1/319. (Lớp 6). Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình sau :

$$3^x + 1 = (y + 1)^2$$

Lời giải. Biến đổi phương trình, ta được :
 $3^x = (y+1)^2 - 1 \Leftrightarrow 3^x = y(y+2)$ (1)

Vì 3^x là một số lẻ nên y và $y + 2$ là hai số lẻ liên tiếp, do đó $(y, y + 2) = 1$ (2)

Từ (1) suy ra y và $y + 2$ cùng là lũy thừa của

$$3, \text{ nghĩa là: } \begin{cases} y = 3^m & (3) \\ y + 2 = 3^n & (4) \end{cases}$$

với m, n là các số tự nhiên và $m + n = x$.

Thay (3) vào (4), ta được :

$$3^m + 2 = 3^n \Rightarrow m < n.$$

Nếu $m = 0$ thì từ (3) có $y = 1$. Thay vào (4) được $n = 1$. Do đó $x = m + n = 1$.

Nếu $m \geq 1$ thì $n > 1$. Từ (3), (4) suy ra y và $y + 2$ cùng chia hết cho 3, trái với (2). Vậy hệ có nghiệm nguyên dương duy nhất $(x, y) = (1, 1)$.

Nhận xét. Đây là một bài toán đơn giản nên hầu hết các bạn có lời giải đúng. Các bạn sau đây có bài giải tốt :

Thừa Thiên - Huế : Nguyễn Khoa Thi, 6², THCS Phú Thanh, Phú Vang ; **Nam Định :** Phạm Đình Hiếu, 6A, THCS Yên Thọ, Ý Yên, Nguyễn Lâm Phúc, 6A4, THCS Trần Đăng Ninh, Tp. Nam Định ; **Vĩnh Phúc :** Nguyễn Công Thành, 6D, THCS Vĩnh Yên, Tx. Vĩnh Yên, Nguyễn Quang Vinh, Khổng Thị Đức Hậu, Lê Diệu Linh, 6A, THCS Lập Thạch ; **Bình Định :** Nguyễn Trung Tín, 6A2, THCS Tăng Bạt Hổ, Hoài Nhơn ; **Thái Bình :** Bùi Hoàng Yến, 5A3, THPT Lý Tự Trọng, Tx. Thái Bình ; **Hà Tĩnh :** Võ Thị Hạnh, 6E, THCS Bình An, Can Lộc ; **Nghệ An :** Vũ Đức Hoàn, Trần Thị Thanh Bình, Trần Trường Giang, 6A, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu.

NGUYỄN ANH DŨNG

Bài T2/319. (Lớp 7). Tam giác ABC có $BC = 2AB$. Gọi M là trung điểm của BC và D là trung điểm của BM. Chứng minh rằng $AC = 2AD$.

Lời giải. (Của bạn Vũ Diệu Linh, 7B, THCS Phong Châu, TX. Phú Thọ)

Trên tia AD lấy

điểm E sao cho

$DE = AD$. Ta có

$\widehat{D_1} = \widehat{D_2}$ (đối đỉnh),

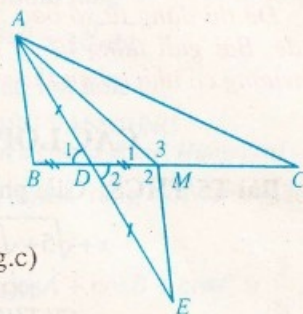
$AD = DE$,

$DB = DM$ (gt)

$\Rightarrow \triangle ADB = \triangle EDM$ (c.g.c)

$\Rightarrow AB = ME$

và $\widehat{B} = \widehat{M_2}$ (1)



Vì $AB = MC = \frac{1}{2}BC$ nên $ME = MC$ (2).

Lại có $\widehat{M_3} = \widehat{B} + \widehat{BAM}$ (mà $\widehat{B} = \widehat{M_2}$, $\widehat{BAM} = \widehat{M_1}$ ($\triangle BAM$ cân tại B) suy ra $\widehat{M_3} = \widehat{M_2} + \widehat{M_1} = \widehat{AME}$ (3).

Hai tam giác AME và AMC có cạnh AM chung, $\widehat{AME} = \widehat{AMC}$ (theo (3)), $ME = MC$ (theo (2)) do đó $\triangle AME = \triangle AMC$ (c.g.c), suy ra $AC = AE$ hay $AC = 2AD$.

Nhận xét. Đây là bài toán dễ, rất đông bạn tham gia giải và có lời giải đúng, giải bằng nhiều cách. Tuy nhiên, hầu hết các bạn sử dụng kiến thức về đường trung bình của tam giác (không có trong chương trình lớp 7 hiện hành).

Các bạn sau đây có lời giải tốt và chỉ sử dụng kiến thức của lớp 7.

Hà Nội : Nguyễn Thị Thanh Hà, 7I, THCS Lê Quý Đôn, Cầu Giấy, Trần Quốc Đạt, 7H1, THCS Trưng Vương, Hoàn Kiếm, Nguyễn Ngọc Hiếu, 7A, THCS Nguyễn Công Trứ, Ba Đình ; **Hải Phòng :** Vũ Thị Văn Anh, 7A1, THCS Hồng Bàng ; **Hà Tây :** Trịnh Đức Hoàng, 7B, THCS Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hòa, Nguyễn Trung Nghĩa, 7C, THCS Thạch Thất ; **Hải Dương :** Nguyễn Trung Kiên, Phan Ngọc Hiếu, Hoàng Bảo Trang, Đặng Quốc Việt, 7/3, THCS Lê Quý Đôn ; **Thái Bình :** Nguyễn Lâm Bình, 7A1, THCS An Mỹ, Quỳnh Phụ ; **Thanh Hóa :** Lê Thị Hạnh, 7A5, THCS Quang Trung, Tp. Thanh Hóa ; **Nghệ An :** Trần Văn Phúc, 7A, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu ; **Quảng Ngãi :** Trần Tấn Thanh, 7C, THCS Hành Phước, Nghĩa Hành ; **Thừa Thiên - Huế :** Nguyễn Công Hón, 7/1, THCS Vinh Thanh, Phú Vang.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

Bài T3/319. Tìm ước số nguyên tố p của số $2^{37} - 1 = 137\,438\,953\,471$, biết rằng $p < 300$.

Lời giải. Ta sẽ chứng minh Bỏ dễ sau :

Nếu $2^m - 1$ và $2^n - 1$ đều chia hết cho số nguyên tố p, mà n là số nguyên dương nhỏ nhất, thì m chia hết cho n.

Thật vậy, giả sử $m = nt + r$ với số nguyên dương t , $0 \leq r < n$ thì có $2^m - 1 = 2^{nt+r} - 1 = 2^r(2^{nt} - 1) + 2^r - 1$.

Vì $2^{nt} - 1$ chia hết cho $2^n - 1$, mà $2^n - 1$ chia hết cho p nên $2^{nt} - 1$ chia hết cho p , suy ra $2^r - 1$ chia hết cho p . Theo giả thiết và do $0 \leq r < n$ nên $r = 0$, suy ra $m = nt$ (đpcm).

• Áp dụng bổ đề lấy $m = 37$ thì $37 = nt$, mà 37 là số nguyên tố nên có $n = 37$.

• Áp dụng định lí Phéc-ma nhỏ có $2^{p-1} - 1$ chia hết cho p .

Theo bổ đề lấy $m = p - 1$ và $n = 37$ thì có $p - 1 = 37t$.

Vì p là số lẻ nên có $p = 74t + 1$ với số nguyên dương t .

Do $p < 300$ nên số nguyên tố p chỉ có thể là 149 hoặc 223.

Thử thấy số 149 không là ước của $2^{37} - 1$.

Vậy chỉ có một ước số nguyên tố $p < 300$ của $2^{37} - 1$ là $p = 223$.

Nhận xét. a) Một số bạn phân tích số $2^{37} - 1$ thành tích của 223 với một thừa số nữa, như thế chưa chứng minh được 223 là ước số nguyên tố duy nhất phải tìm. Một vài bạn không thử lại nên chưa loại trừ số 149.

b) Các bạn sau có lời giải tốt:

Phú Thọ: Trần Mạnh Chung, Nguyễn Văn Hào, Bùi Quang Dương, 9A, THCS Giã Phong Châu, Phù Ninh;
Vĩnh Phúc: Nguyễn Hữu Kiên, 9A, THCS Yên Lạc, Phạm Huy, 9C, THCS Tam Dương;
Bắc Giang: Trần Ngọc Thức, 9A, THCS Nguyễn Hồng, Tân Yên;
Hưng Yên: Bùi Thanh Huyền, 9A3, THCS Chu Mạnh Trinh, Văn Giang;
Thanh Hóa: Nguyễn Lưu Bách, 8C, THCS Lê Hữu Lập, Hậu Lộc, Hoàng Vũ Hạnh, 9B, THCS Trần Mai Ninh, TP. Thanh Hóa.

VIỆT HẢI

Bài T4/319. Giải phương trình sau với n là số nguyên dương đã cho:

$$(16x^{4n} + 1)(y^{4n} + 1)(z^{4n} + 1) = 32x^{2n}y^{2n}z^{2n}$$

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số không âm, ta có:

$$16x^{4n} + 1 \geq 2\sqrt{16x^{4n} \cdot 1} = 8x^{2n} \geq 0$$

$$y^{4n} + 1 \geq 2\sqrt{y^{4n} \cdot 1} = 2y^{2n} \geq 0$$

$$z^{4n} + 1 \geq 2\sqrt{z^{4n} \cdot 1} = 2z^{2n} \geq 0$$

Nhân theo từng vế các bất đẳng thức cùng chiều trên, ta được:

$$(16x^{4n} + 1)(y^{4n} + 1)(z^{4n} + 1) \geq 32x^{2n}y^{2n}z^{2n} \quad (2)$$

Đẳng thức xảy ra trong (2)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 16x^{4n} = 1 \\ y^{4n} = 1 \\ z^{4n} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \sqrt[n]{2} \\ y = \pm 1 \\ z = \pm 1 \end{cases}$$

Vậy phương trình (1) có 8 nghiệm (x, y, z) là

$$\left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}, 1, 1\right), \left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}, 1, -1\right), \left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}, -1, 1\right),$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}, -1, -1\right), \left(\frac{-1}{\sqrt[n]{2}}, 1, 1\right), \left(\frac{-1}{\sqrt[n]{2}}, -1, 1\right),$$

$$\left(\frac{-1}{\sqrt[n]{2}}, 1, -1\right), \left(\frac{-1}{\sqrt[n]{2}}, -1, -1\right).$$

Nhận xét. 1) Đây là bài toán dễ, thuộc dạng bài: giải phương trình bằng cách đánh giá bất đẳng thức. Có 230 bạn tham gia giải bài này, tuy nhiên có tới 70 bạn không ra đúng kết quả (mà phần lớn là thiếu nghiệm). Nguyên nhân chính là khi tìm căn bậc chẵn của một số dương, các bạn chỉ lấy một giá trị dương.

2) Một số bạn đã có nhận xét đúng:

– Bài toán đã cho là một mở rộng của bài toán T4/311.

– Với cách giải trên, bài toán có thể được mở rộng theo nhiều hướng, chẳng hạn: Giải phương trình:

$$(a_1^2 x_1^{2kn} + b_1^2)(a_2^2 x_2^{2kn} + b_2^2) \dots (a_n^2 x_n^{2kn} + b_n^2) = 2^n (a_1 a_2 \dots a_n) (b_1 b_2 \dots b_n) x_1^{kn} x_2^{kn} \dots x_n^{kn}$$

trong đó k, n là các số nguyên dương, a_i và b_i là các số dương ($i = 1, 2, \dots, n$).

3) Các bạn sau có lời giải tốt: **Hà Tây:** Trịnh Ngọc Tú, 9A3, THCS Ngô Sĩ Liên, Chương Mỹ, Nguyễn Mai Hoa, 9A, THCS Nguyễn Văn Huyền, Hoài Đức; **Phú Thọ:** Tạ Hồng Sơn, 8A3, THCS Lâm Thao; **Bắc Ninh:** Hoàng Văn Tuyển, 9A, THCS Lê Văn Thịnh, Gia Bình; **Nam Định:** Cao Mạnh Hùng, 8A, THCS Yên Định, Hải Hậu; **Thanh Hóa:** Đỗ Xuân Hợp, 9H, THCS Trần Mai Ninh, TP. Thanh Hóa; **Lê Quang Trường**, 9D, THCS Lê Quý Đôn, Bỉm Sơn; **Nghệ An:** Ngô Thành Vinh, 9B, THCS Diên Mỹ, Diên Châu; **Bạc Liêu:** Trần Mỹ Linh, 8/4, THCS Trần Huỳnh, TX. Bạc Liêu.

TRẦN HỮU NAM

Bài T5/319. Giả sử a, b, c là các số thực thỏa mãn $abc > 0$ và $|ab+bc+ca| = 2\sqrt{2004abc}$

Chứng minh rằng

$$(a+b-2004)(b+c-2004)(c+a-2004) \leq 0.$$

Lời giải. Bình phương hai vế của đẳng thức ở giả thiết ta có

$$2004 = \frac{(ab+bc+ca)^2}{4abc}$$

$$\text{Suy ra: } a+b-2004 = a+b - \frac{(ab+bc+ca)^2}{4abc} = -\frac{(ab-bc-ca)^2}{4abc} \leq 0$$

Tương tự:

$$b+c-2004 = -\frac{(bc-ca-ab)^2}{4abc} \leq 0$$

$$c+a-2004 = -\frac{(ca-ab-bc)^2}{4abc} \leq 0$$

Tích ba số âm là một số âm, do đó ta có bất đẳng thức cần chứng minh.

Nhận xét. 1) Trong lời giải trên số 2004 không có vai trò gì đặc biệt, do đó có thể thay bằng số thực $m > 0$ và ta thu được bài toán tổng quát hơn.

2) Để có đẳng thức, các số a, b, c phải là bộ ba số dạng: $t, 2004-t, \frac{t(2004-t)}{2004}$, với t là một số thực tùy ý.

3) Rất nhiều bạn có lời giải đúng. Xin nêu tên một số bạn lớp 7, lớp 8.

Nguyễn Thị Thu Hoài, 7C, THCS Tân Phú, Thanh Sơn, Phú Thọ; Nguyễn Thị Nga, 8B, THCS Uy Nỗ, Đông Anh, Hà Nội; Nguyễn Hữu Minh Hoàng, 8A3, THCS Phan Chu Trinh, Buôn Ma Thuột, Đắk Lắk; Võ Thái Thông, 8/4, THCS Ngô Gia Tự, Cam Nghĩa, Cam Ranh, Khánh Hòa; Đàm Thị Yến, 7A, THCS Yên Trường, Yên Định, Thanh Hóa; Vương Bằng Việt, 7/1, THCS Nam Hà, TX. Hà Tĩnh, Hà Tĩnh.

PHAN DOÀN THOẠI

Bài T6/319. Cho tam giác ABC có góc không nhọn với $AB = c, BC = a, CA = b$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$$

Lời giải. (Của đa số các bạn)

Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $C \geq 90^\circ$, khi đó $c^2 \geq a^2 + b^2 \geq 2ab \Rightarrow c \geq \sqrt{2ab}$ (1) (dấu đẳng thức xảy ra khi ΔABC vuông cân tại C).

Ta có:

$$\begin{aligned} P &= \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc} \\ &= \frac{2abc + a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b}{abc} \\ &= 2 + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{a+b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b}\right) \end{aligned}$$

Áp dụng BĐT Cô-si cho các số dương ta được:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2 \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{a+b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b} &\geq 3\sqrt[3]{\frac{(a+b)c}{ab}} \geq \\ &\geq 3\sqrt[3]{\frac{2\sqrt{ab} \cdot 2\sqrt{ab}}{ab}} = 3\sqrt{2} \quad (4) \text{ (theo (1))} \end{aligned}$$

Do đó từ (2) có $P \geq 4 + 3\sqrt{2}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi các đẳng thức ở (1), (3), (4) đồng thời xảy ra tức là:

$$a = b, c = 2\sqrt{ab}, \frac{a+b}{c} = \frac{c}{a} = \frac{c}{b} \Leftrightarrow \Delta ABC$$

vuông cân tại C.

Tóm lại giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$ là $4 + 3\sqrt{2}$, đạt được khi

ΔABC vuông cân.

Nhận xét. Một số bạn không để ý đến dữ kiện tam giác ABC không nhọn nên đưa ra kết quả thiếu chính xác: GTNN của biểu thức phải tìm là 8 (!). Các bạn sau có lời giải tốt:

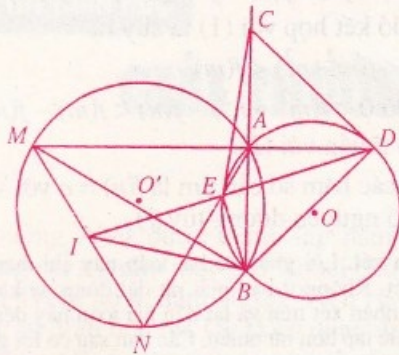
Phú Thọ: Lương Đức Hoàng, 9A, THCS Giấy Phong Châu, Phú Ninh; **Vĩnh Phúc:** Đỗ Hoàng Tùng, 8E, THCS Vĩnh Yên, Hoàng Thị Minh Huệ, 9C, THCS Tam Dương, Tam Dương; **Hà Tây:** Đặng Văn Thủy, Trịnh Ngọc Tú, 9A3, THCS Ngô Sĩ Liên, Chương Mỹ, **Hải Dương:** Phạm Văn Quỳnh, 9A1, THCS Nguyễn Trãi, Nam Sách; **Thái Bình:** Nguyễn Huy Thông, 9B, THCS Tấn Thuật, Kiến Xương; **Thanh Hóa:** Hoàng Đức Ý, 8E, THCS Trần Mai Ninh, Tp. Thanh Hóa, Lê Xuân Thống Nhất, Lê Ngọc Tuấn, Lê Hữu Tuấn, 9B, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoàng Hóa; **Nghệ An:** Lê Ngọc Thạch, Tăng Văn Thuận, 9A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, Nguyễn Tường Anh, 9B, THCS Bạch Liêu, Yên Thành; **Tp. Hồ Chí Minh:** Đỗ Tuấn Hoàng Anh, 9A¹⁴, trường Trần Đại Nghĩa.

HỒ QUANG VINH

Bài T7/319. Hai đường tròn tâm O bán kính R và tâm O' bán kính R' cắt nhau tại A và B. Từ điểm C trên tia đối của tia AB kẻ các tiếp tuyến CD và CE với đường tròn tâm O (D, E là các tiếp điểm và điểm E nằm trong đường tròn tâm O'). AD và AE cắt đường tròn tâm O' lần nữa lần lượt tại M và N. Chứng minh rằng đường thẳng DE cắt MN tại trung điểm của MN.

Lời giải. Đường thẳng DE cắt MN tại I. Do $\widehat{NMB} = \widehat{NAB} = \widehat{EDB}$ nên tứ giác MIBD nội tiếp được suy ra $\widehat{MBI} = \widehat{MDI} = \widehat{EBA}$. Nên $\Delta MIB \sim \Delta AEB$. Suy ra $\frac{MI}{IB} = \frac{AE}{EB}$ (1)

Từ $\Delta CAE \sim \Delta CEB, \Delta CAD \sim \Delta CDB$ và $CE = CD$ ta có $\frac{AE}{EB} = \frac{CE}{CB} = \frac{CD}{CB} = \frac{AD}{DB}$ (2).



Mặt khác tứ giác $MNBA$ nội tiếp nên $\widehat{INB} = \widehat{BAD}$, tứ giác $MIBD$ nội tiếp nên $\widehat{NIB} = \widehat{ADB}$. Do đó $\triangle INB \sim \triangle DAB$.

$$\text{Từ đó } \frac{IN}{IB} = \frac{DA}{DB} \quad (3)$$

So sánh (1), (2), (3) sẽ được $IN = IM$ tức DE cắt MN tại trung điểm của MN .

Nhận xét. Nhiều bạn phải dùng định lý Mê-nê-la-uyt, Pô-lơ-mê để giải bài này.

2. Các bạn giải ngắn gọn, đúng bài này gồm :

Hà Nam : *Nhữ Anh Tuấn, Nguyễn Mạnh An*, 9B, THCS Trần Phú ; **Vinh Phúc** : *Nguyễn Hữu Kiên*, 9A, THCS Yên Lạc ; **Nam Đình** : *Trần Quang Huy*, 9A1, THCS Phùng Chí Kiên ; **Hà Tĩnh** : *Bùi Hoàng Đan*, 8/4, THCS Lê Văn Thiêm, *Nguyễn Hạnh Dung*, 9/1, THCS Lê Văn Thiêm ; **Tiến Giang** : *Phạm Bá Thọ*, 9A4, THPT Nguyễn Đình Chiểu ; **Tp. Hồ Chí Minh** : *Đỗ Tuấn Hoàng Anh*, 9A14, Trần Đại Nghĩa.

VŨ KIM THỦY

Bài T8/319. Một tờ giấy kẻ ô vuông gồm m hàng n cột ($m + n \geq 3$). Tô màu k ô vuông sao cho một ô bất kỳ nếu không được tô màu thì có ít nhất một điểm chung với một ô được tô màu. Tìm giá trị nhỏ nhất của k .

Lời giải. Bắt đầu từ góc trên bên trái của tờ giấy, lần lượt đánh số các hàng từ 1 đến m và các cột từ 1 đến n . Kí hiệu (i, j) là ô nằm ở hàng i , cột j . Đặt $S = \{(i, j) \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n, i \equiv j \equiv 1 \pmod{3}\}$. Dễ thấy $|S| = \left\lfloor \frac{m+2}{3} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n+2}{3} \right\rfloor$.

$$\text{trong đó } [x] \text{ chỉ phần nguyên của } x.$$

Xét một cách tô màu thỏa mãn yêu cầu bài toán. Gọi X là tập hợp các ô được tô màu. Gọi S_1 là tập các ô của S được tô màu ($S_1 = X \cap S$) và S_0 là tập các ô của S không được tô màu. Với mỗi $a \in S_0$ có tương ứng với ô $f(a) \in X$ ở đó $f(a)$ và a có điểm chung.

Vì hai ô của S cách nhau ít nhất hai hàng hoặc hai cột nên ta có :

1) $f(a) \notin S_1$. Thật vậy nếu $f(a) \in S_1 \Rightarrow f(a) \in S$, $f(a)$ có điểm chung với $a \in S_0$. Mâu thuẫn. Do vậy $f(a) \in X \setminus S_1$.

2) Nếu $a \neq b$ với $a, b \in S_0$ thì $f(a) \neq f(b)$ (do hai ô của S không có điểm chung với cùng một ô).

Từ đó f là một đơn ánh từ S_0 vào $X \setminus S_1$.

Do đó : $|S_0| \leq |X \setminus S_1|$.

$$\text{Vậy } |X| = |S_1| + |X \setminus S_1| \geq |S_1| + |S_0| = |S| =$$

$$\left\lfloor \frac{m+2}{3} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n+2}{3} \right\rfloor.$$

Tiếp theo ta chỉ ra một cách tô màu

$$\left\lfloor \frac{m+2}{3} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n+2}{3} \right\rfloor \text{ ô thỏa mãn yêu cầu đề bài.}$$

Giả sử $m = 3p + r$, $n = 3q + s$ ($0 \leq r, s \leq 2$). Trước hết tô các ô $(3i+2, 3j+2)$ với $0 \leq i \leq p-1$, $0 \leq j \leq q-1$. Sau đó

Nếu $r > 0$, $s = 0$ tô các ô : $(m, 3j+2)$ với $0 \leq j \leq q-1$.

Nếu $s > 0$, tô các ô : $(3i+2, n)$ với $0 \leq i \leq p-1$ và ô (m, n) .

Rõ ràng cách tô này thỏa mãn yêu cầu đề bài

$$\text{và đã tô màu } \left\lfloor \frac{m+2}{3} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n+2}{3} \right\rfloor \text{ ô vuông.}$$

$$\text{Vậy giá trị nhỏ nhất của } k \text{ là } \left\lfloor \frac{m+2}{3} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n+2}{3} \right\rfloor$$

Nhận xét. Phần lớn các bạn tham gia giải bài này đều cho đáp số đúng nhưng lập luận còn chưa chặt chẽ, chỉ dựa vào trực giác. Bạn *Nguyễn Anh Tuấn*, 10 Toán, THPT NK Hải Dương có lời giải tương đối tốt hơn cả.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T9/319. Chứng minh rằng

$$x^2y + y^2z + z^2x \leq x^3 + y^3 + z^3 \leq$$

$$1 + \frac{1}{2}(x^4 + y^4 + z^4)$$

trong đó x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn điều kiện $x + y + z = 2$.

Lời giải.

Ta chứng minh

$$x^2y + y^2z + z^2x \leq x^3 + y^3 + z^3$$

Vì $x, y, z \geq 0$, nên theo bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân, ta có

$$3x^2y \leq x^3 + x^3 + y^3$$

$$3y^2z \leq y^3 + y^3 + z^3$$

$$3z^2x \leq z^3 + z^3 + x^3$$

$$\text{Suy ra } x^2y + y^2z + z^2x \leq x^3 + y^3 + z^3.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = \frac{2}{3}$.

Tiếp theo, ta chứng minh

$$x^3 + y^3 + z^3 \leq 1 + \frac{1}{2}(x^4 + y^4 + z^4) \quad (1)$$

$$\text{hay } 2(x^3 + y^3 + z^3) - (x^4 + y^4 + z^4) \leq 2 \quad (2)$$

Ta có

$$\begin{aligned} & 2(x^3 + y^3 + z^3) - (x^4 + y^4 + z^4) \\ &= x^3(2-x) + y^3(2-y) + z^3(2-z) \\ &= x^3(y+z) + y^3(z+x) + z^3(x+y) \\ &= xy(x^2+y^2) + yz(y^2+z^2) + zx(z^2+x^2) \\ &\leq (xy+yz+zx)(x^2+y^2+z^2) \\ &= \frac{1}{2} 2(xy+yz+zx)(x^2+y^2+z^2) \\ &\leq \frac{1}{2} \left[\frac{2(xy+yz+zx)+(x^2+y^2+z^2)}{2} \right]^2 \\ &= \frac{1}{2^3} (x+y+z)^4 = 2 \end{aligned}$$

Vậy (2) được chứng minh nên (1) đúng :

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi hai số bằng 1 và số còn lại bằng 0.

Nhận xét. Trên đây là cách giải của đa số các bạn. Một số bạn còn dùng cách khảo sát hàm số thông qua đạo hàm hoặc dùng các bất đẳng thức tương đương khác kiểu Bunhiacôski, tam thức bậc hai...

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T10/319. Tìm tất cả các hàm số $f: N^* \rightarrow N^*$ thỏa mãn điều kiện

$$2(f(m^2+n^2))^3 = f^2(m).f(n) + f^2(n).f(m) \quad (1)$$

với mọi m khác n .

Lời giải. (Của bạn Bùi Hữu Đức, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc)

Giả sử $f(n)$ là hàm số thỏa mãn điều kiện của bài toán. Ta sẽ chứng minh $f(n)$ là hàm hằng số (và chúng ta cũng thấy ngay : hàm số $f(n) = a$ với $a \in N^*, \forall n \in N^*$ thỏa mãn điều kiện của bài toán).

Giả sử tồn tại $m, n \in N^*$ mà $f(m) \neq f(n)$. Ta xét $m, n \in N^*$ mà $f(m) - f(n)$ là số nguyên dương nhỏ nhất. (2)

Vì $f(n) < f(m)$ nên

$$2f^3(n) < f^2(m)f(n) + f^2(n)f(m) < 2f^3(m)$$

Do đó kết hợp với (1) ta suy ra

$$f(n) < f(m^2+n^2) < f(m)$$

$$\text{Từ đó } 0 < f(m^2+n^2) - f(n) < f(m) - f(n).$$

Mâu thuẫn với (2).

Vậy các hàm số cần tìm là $f(n) = a$ với $\forall n \in N^*$ (a là số nguyên dương tùy ý).

Nhận xét. Lời giải của bài toán này chỉ dựa vào một nhận xét. Không ít bạn giải rất dài dòng, vì không phát hiện ra nhận xét trên và lại dẫn bài toán này đến một bài toán phức tạp hơn rất nhiều. Các bạn sau có lời giải tốt :

Hải Dương : Nguyễn Duy Mạnh, Nguyễn Anh Tuấn, 10T, THPT Nguyễn Trãi ; **Hà Nội :** Cao Thị Tình, 11A2, ĐHKHTN - ĐHQG ; **Quảng Ninh :** Nguyễn Đình Long, Hoàng Trung Hiếu, 10T, THPT Dân lập, Yên Hưng ; Vũ Ngọc Hải, 11T, THPT chuyên, TP. Hạ Long ; **Quảng Trị :** Lê Tiến Triển, 11T, THPT Lê Quý Đôn ; **Đà Nẵng :** Thái Thanh Hải, Đỗ Quốc Khánh, 11A1, THPT Lê Quý Đôn ; **TP Hồ Chí Minh :** Đỗ Hoàng Long, Nguyễn Tuấn Tú, 10T, THPT Lê Hồng Phong.

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T11/319. Gọi AD, BE, CF là các đường cao của một tam giác nhọn ABC . Các cặp đoạn thẳng AD và EF, BE và FD, CF và DE cắt nhau tại M, N, P theo thứ tự. Ký hiệu S là diện tích tam giác. Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{S_{ABC}} \leq \frac{S_{MNP}}{S_{DEF}} \leq \frac{1}{8\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C \cdot S_{ABC}}$$

Lời giải. Ta chứng minh một kết quả tổng quát hơn bất đẳng thức ở bên trái.

Bổ đề. Cho tam giác ABC , điểm P nằm trong tam giác. AP, BP, CP theo thứ tự cắt BC, CA, AB tại A_1, B_1, C_1 và AP, BP, CP theo thứ tự cắt B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 tại A_2, B_2, C_2 . Khi đó

$$S^2(A_1B_1C_1) \leq S(ABC) \cdot S(A_2B_2C_2)$$

Chứng minh bổ đề. Vì P nằm trong ΔABC nên tồn tại các số $\alpha, \beta, \gamma > 0$ sao cho

$$\alpha \overrightarrow{PA} + \beta \overrightarrow{PB} + \gamma \overrightarrow{PC} = \vec{0}$$

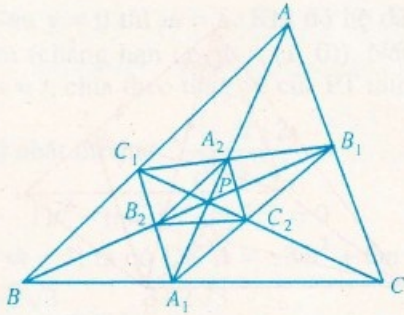
Nhờ phép chiếu vectơ phương BC xuống đường thẳng AA_1 (h. 1) ta có :

$$\alpha \overrightarrow{PA} + (\beta + \gamma) \overrightarrow{PA_1} = \vec{0} \quad (1) \Rightarrow \frac{PA_1}{PA} = \frac{\alpha}{\beta + \gamma}$$

$$\text{Tương tự } \frac{PB_1}{PB} = \frac{\beta}{\gamma + \alpha}, \quad \frac{PC_1}{PC} = \frac{\gamma}{\alpha + \beta}$$

Theo nhận xét trên :

$$\frac{S(P_1B_1C_1)}{S(ABC)} = \frac{S(PB_1C_1)}{S(PBC)} \cdot \frac{S(PBC)}{S(ABC)} =$$



Hình 1

$$\begin{aligned} &= \frac{PB_1}{PB} \cdot \frac{PC_1}{PC} \cdot \frac{PA_1}{PA} = \frac{\beta}{\gamma+\alpha} \cdot \frac{\gamma}{\alpha+\beta} \cdot \frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma} \\ &= \frac{\alpha\beta\gamma}{(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)(\alpha+\beta+\gamma)} \end{aligned}$$

Tương tự :

$$\frac{S(PC_1A_1)}{S(ABC)} = \frac{\alpha\beta\gamma}{(\beta+\gamma)(\beta+\alpha)(\alpha+\beta+\gamma)}$$

$$\frac{S(PA_1B_1)}{S(ABC)} = \frac{\alpha\beta\gamma}{(\gamma+\alpha)(\gamma+\beta)(\alpha+\beta+\gamma)}$$

Từ đó suy ra :

$$\begin{aligned} \frac{S(A_1B_1C_1)}{S(ABC)} &= \frac{S(PB_1C_1)}{S(ABC)} + \frac{S(PC_1A_1)}{S(ABC)} + \frac{S(PA_1B_1)}{S(ABC)} \\ &= \frac{2\alpha\beta\gamma}{(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta)} \quad (*) \end{aligned}$$

Tương tự như (1) :

$$\beta\overrightarrow{PB} + (\gamma+\alpha)\overrightarrow{PB_1} = \vec{0} \quad (2)$$

$$\gamma\overrightarrow{PC} + (\alpha+\beta)\overrightarrow{PC_1} = \vec{0} \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) và chú ý tới đẳng thức $\alpha\overrightarrow{PA} + \beta\overrightarrow{PB} + \gamma\overrightarrow{PC} = \vec{0}$ ta có :

$$(\beta+\gamma)\overrightarrow{PA_1} + (\gamma+\alpha)\overrightarrow{PB_1} + (\alpha+\beta)\overrightarrow{PC_1} = \vec{0}.$$

Áp dụng (*) cho tam giác $A_1B_1C_1$, ta được :

$$\frac{S(A_2B_2C_2)}{S(A_1B_1C_1)} = \frac{2(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)(\alpha+\beta)}{(2\alpha+\beta+\gamma)(2\beta+\gamma+\alpha)(2\gamma+\alpha+\beta)} \quad (**)$$

Từ (*) và (**) suy ra :

$$\begin{aligned} &\frac{S^2(A_1B_1C_1)}{S(ABC).S(A_2B_2C_2)} \\ &= \frac{\alpha(2\alpha+\beta+\gamma)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)} \cdot \frac{\beta(2\beta+\gamma+\alpha)}{(\beta+\gamma)(\beta+\alpha)} \cdot \frac{\gamma(2\gamma+\alpha+\beta)}{(\gamma+\alpha)(\gamma+\beta)} \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta} + \frac{\alpha}{\alpha+\gamma} \right) \left(\frac{\beta}{\beta+\gamma} + \frac{\beta}{\beta+\alpha} \right) \left(\frac{\gamma}{\gamma+\alpha} + \frac{\gamma}{\gamma+\beta} \right)$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho ba số :

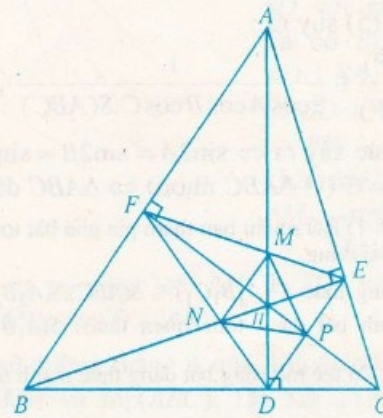
$$\begin{aligned} &\frac{S^2(A_1B_1C_1)}{S(ABC).S(A_2B_2C_2)} \leq \\ &\leq \frac{1}{27} \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta} + \frac{\alpha}{\alpha+\gamma} + \frac{\beta}{\beta+\gamma} + \frac{\beta}{\beta+\alpha} + \frac{\gamma}{\gamma+\alpha} + \frac{\gamma}{\gamma+\beta} \right)^3 = 1 \end{aligned}$$

Tóm lại :

$$S^2(A_1B_1C_1) \leq S(ABC).S(A_2B_2C_2).$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \alpha = \beta = \gamma$ hay M là trọng tâm ΔABC ; Bổ đề đã được chứng minh.

Trở lại bài toán của ta. Theo bổ đề với H là trực tâm ΔABC (h. 2) ta có :



Hình 2

$$S^2(DEF) \leq S(ABC).S(MNP)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{S(ABC)} \leq \frac{S(MNP)}{S^2(DEF)}.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow H$ là trọng tâm $\Delta ABC \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

Dưới đây kí hiệu $\Pi \sin A = \sin A \sin B \sin C$; $\Pi \cos A = \cos A \cos B \cos C$; $\Pi \tan A = \tan A \tan B \tan C$;

$\Pi(\tan B + \tan C) = (\tan B + \tan C)(\tan C + \tan A)(\tan A + \tan B)$ và các kí hiệu tương tự.

Chú ý đến kết quả quen thuộc :

$$\tan A \cdot \overrightarrow{HA} + \tan B \cdot \overrightarrow{HB} + \tan C \cdot \overrightarrow{HC} = \vec{0}$$

và theo (*), (**) ta có :

$$\begin{aligned} &\frac{S(MNP)}{S(DEF)} \cdot \frac{S(ABC)}{S(DEF)} = \\ &= \frac{2\Pi(\tan B + \tan C)}{\Pi(2\tan A + \tan B + \tan C)} \cdot \frac{\Pi(\tan B + \tan C)}{2\Pi \tan A} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\Pi(\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C)^2}{\Pi(\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C) \Pi \operatorname{tg} A} \\
 &(\text{vì } \operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C) \\
 &= \frac{\Pi \left(\frac{\sin A}{\cos B \cos C} \right)^2}{\Pi(1 + \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C) \Pi \operatorname{tg}^2 A} \\
 &= \frac{\Pi \sin^2 A}{\Pi \cos^4 A} = \frac{1}{\Pi \cos(B-C)} \quad (4)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\text{Ta có: } 8 \Pi \sin 2A \leq \Pi(\sin 2B + \sin 2C) \\
 &\Rightarrow 8 \Pi \sin A \Pi \cos A \leq \Pi \sin A \Pi \cos(B-C) \\
 &\Rightarrow \frac{1}{\Pi \cos(B-C)} \leq \frac{1}{8 \Pi \cos A} \quad (5)
 \end{aligned}$$

Từ (4), (5) suy ra:

$$\frac{S(MNP)}{S^2(DEF)} \leq \frac{1}{8 \cos A \cos B \cos C \cdot S(ABC)},$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \sin 2A = \sin 2B = \sin 2C$
 $\Leftrightarrow A = B = C$ (vì $\triangle ABC$ nhọn) $\Leftrightarrow \triangle ABC$ đều.

Nhận xét. 1) Rất nhiều bạn tham gia giải bài toán này, tất cả đều giải đúng.

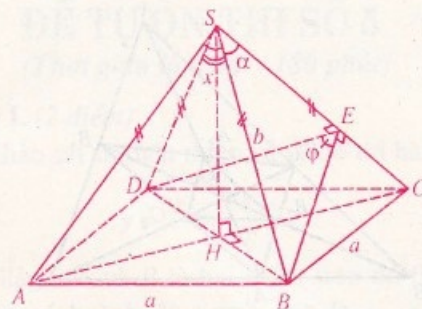
2) Bất đẳng thức $S^2(A_1 B_1 C_1) \leq S(ABC) \cdot S(A_2 B_2 C_2)$ là sự làm mạnh bất đẳng thức quen thuộc $S(A_1 B_1 C_1) \leq \frac{1}{4} S(ABC)$. Có thể mở rộng bất đẳng thức mạnh trên cho tứ diện.

3) Các bạn sau đây có lời giải tốt: **Vinh Phúc**: Lê Công Truyền, 10A1, THPT chuyên Vinh Phúc; **Hải Phòng**: Lương Phú Khánh, 10T, THPT NK Trần Phú; **Đà Nẵng**: Nguyễn Bá Duy Khoa, 10/2, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Quảng Trị**: Nguyễn Trác Việt, 12A1, THPT TX. Quảng Trị; **Bà Rịa - Vũng Tàu**: Phạm Thành Trung, 10T, THPT Lê Quý Đôn, TP. Vũng Tàu; **Phú Thọ**: Đinh Đức Thành, 11A1, THPT chuyên Hùng Vương, Việt Trì; **Hòa Bình**: Nguyễn Duy Hoàng, 11T, THPT chuyên Hoàng Văn Thụ; **Đồng Tháp**: Nguyễn Minh Trí, 10T, Nguyễn Duy Khiêm, 11T, THPT thị xã Sa Đéc; **Bình Định**: Huỳnh Tấn Sang, 10T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Quy Nhơn; **ĐHSP Hà Nội**: Nguyễn Lệnh Quân, 11A1, khối PTCT-Tin; **TP. Hồ Chí Minh**: Hoàng Cao Thân, 12A6, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài T12/319. Xét các hình chóp tứ giác đều $SABCD$ với góc phẳng ở đỉnh $\widehat{ASB} = \alpha$ ($0 < \alpha \leq 60^\circ$). Góc nhị diện cạnh bên bằng φ . Xác định α để biểu thức $P = \cos 3\varphi - 9 \cos \varphi$ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải. Vì chóp tứ giác đều cho là đều nên đáy $ABCD$ là một hình vuông và chân đường



cao SH là tâm của đáy, đồng thời mỗi đường chéo của mặt đáy vuông góc với mặt chéo đi qua đường chéo kia. Chẳng hạn, $BD \perp mp(SAC)$; do đó $BD \perp SC$. Dựng $BE \perp SC$ tại E thì mặt phẳng (BDE) vuông góc với SC và $\widehat{BED} = \varphi$ là góc phẳng nhị diện cạnh SC , đồng thời $BE = DE$ do $\triangle SBE = \triangle SED$ (c.g.c).

Gọi độ dài cạnh đáy và cạnh bên của hình chóp theo thứ tự là a và b , và đặt: $\widehat{ASC} = \widehat{BSD} = x$. Thế thì trong các tam giác SBD và SBC ta được (dịnh lý hàm số cosin):

$$2a^2 = BD^2 = 2b^2 - 2b^2 \cos x = 2b^2(1 - \cos x)$$

$$a^2 = BC^2 = 2b^2 - 2b^2 \cos \alpha = 2b^2(1 - \cos \alpha).$$

Từ các hệ thức trên suy ra:

$$\cos x = 2 \cos \alpha - 1 \quad (1)$$

Trong tam giác BDE cân ở E , góc ở đỉnh φ ta có:

$$\cos \varphi = \frac{2BE^2 - BD^2}{2BE^2} = \frac{\cos x - \cos^2 \alpha}{1 - \cos^2 \alpha} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta được:

$$\cos \varphi = \frac{\cos \alpha - 1}{\cos \alpha + 1}, \quad (0 < \alpha \leq 60^\circ) \quad (3)$$

Vì $0 < \alpha \leq 60^\circ$ nên $\frac{1}{2} \leq \cos \alpha < 1$. Đặt $\cos \alpha = t$

và $\cos \varphi = y$ thì $y = \frac{t-1}{t+1}$, trong đó $\frac{1}{2} \leq t < 1$.

Vì $y'(t) = \frac{2}{(t+1)^2} > 0$ nên y đồng biến trong

$\left[\frac{1}{2} \leq t < 1 \right)$, suy ra: $-\frac{1}{3} \leq \cos \varphi < 0$ với mọi $\alpha \in (0^\circ; 60^\circ]$.

Bây giờ xét biểu thức

$$P = \cos 3\varphi - 9 \cos \varphi = 4 \cos^3 \varphi - 12 \cos \varphi.$$

Xét $P(y) = 4y^3 - 12y$, trong đó $-\frac{1}{3} \leq y < 0$

Ta có : $P'(y) = 12y^2 - 12$.

Vì $P'(y) < 0$ với mọi $y \in \left[-\frac{1}{3}; 0\right)$ nên $P(y)$

nghịch biến trong nửa khoảng $\left[-\frac{1}{3}; 0\right)$. Ta suy

ra : P lớn nhất khi $y = -\frac{1}{3}$, tức là $\cos \varphi = -\frac{1}{3}$,

và do đó từ (3) suy ra khi $\cos \alpha = \frac{1}{2}$ hay $\alpha = 60^\circ$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là $P = P\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{104}{27}$.

Chú ý. Lúc này để ý thêm đến hệ thức (1) thiết lập ở trên, ta thấy rằng khi $\alpha = 60^\circ$ thì $\widehat{BSD} = \widehat{ASC} = x = 90^\circ$ và do đó, hình chóp tứ giác đều $SABCD$ nội tiếp mặt cầu tâm H bán kính $R = SH = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Ngoài ra, hình chóp tứ giác đều $SABCD$ lúc này là một nửa khối bát diện đều $K = S.ABCD.S'$ trong đó đỉnh thứ sáu S' đối xứng với S qua mp($ABCD$).

Nhận xét. 1) Bài toán này thuộc loại dễ, tìm cực trị một hàm số lượng giác, trong đó đối số φ là số đo góc nhị diện của hai mặt bên của một hình chóp tứ giác đều. Tuy nhiên, hầu hết lời giải chỉ chú ý đến việc tính độ lớn của φ theo góc phẳng α ở đỉnh mà không giải thích cách xác định góc phẳng nhị diện.

2) Đáng tiếc có 20 lời giải cho đáp số sai về giá trị lớn nhất của biểu thức P . Có bạn thì tính toán sai, đặc biệt kết luận sai lầm là hàm $P(\varphi)$ không có cực đại với $0 < \alpha < 60^\circ$.

3) Các bạn sau đây có lời giải đúng, và tương đối gọn gàng.

Hà Nội : Nguyễn Trường Giang, 10A1, Toán, ĐHKHTN – ĐHQG Hà Nội, Nguyễn Lệnh Quân, 11A1, PTCTT-ĐHSP Hà Nội ; **Hà Tây :** Lê Đức Hải, 11I2, THPT chuyên Nguyễn Huệ, Tx. Hà Đông ; **Vĩnh Phúc :** Nguyễn Thọ Khiêm, 11A10, THPT chuyên Vĩnh Phúc ; **Phú Thọ :** Lê Bá Long, 10 Toán, Triệu Anh Khôi, Đình Đức Thành, 11A1, THPT chuyên Hùng Vương, Tp. Việt Trì ; **Hải Phòng :** Lưu Ngân Hà, Lê Trung Sơn, 10T, THPT NK Trần Phú, Tp. Hải Phòng ; **Thanh Hóa :** Lưu Đức Minh, 11K2, THPT Lam Sơn, Đào Việt Dũng, 11A1, THPT Hậu Lộc I, Nguyễn Văn Long, 12A4I, THPT Lương Đức Bằng, Hoàng Hóa ; **Nghe An :** Nguyễn Ngọc Cường, 12A1, THPT Phan Bội Châu, Tp. Vinh ; **Quảng Trị :** Nguyễn Trắc Việt, Trương Song Hào, 12A1, Lê Tiến Triển, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Đỗ Quốc Khánh, 11A1, Phan Tuấn Anh, 12A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Tp. Đà Nẵng ; **Lâm Đồng :** Nguyễn Ngọc Duy, 12 Toán, THPT Thăng Long, Tp. Đà Lạt ; **Đồng Nai :** Nguyễn Thế Nam, 11 Toán, THPT chuyên Lương

Thế Vinh, Tp. Biên Hòa ; **Đồng Tháp :** Lê Quang Trường, 12 Toán, THPT Cao Lãnh ; **Vĩnh Long :** Nguyễn Phú Khải, 11T, THPT Nguyễn Bình Khiêm, Tx. Vĩnh Long ; **An Giang :** Trần Trọng Quốc Trường, THPT chuyên Thoại Ngọc Hầu, Tx. Long Xuyên.

NGUYỄN ĐĂNG PHÁT

Bài L1/319. Một lò xo có độ cứng $k=80(N/m)$.

Độ dài tự nhiên $l_0 = 20(cm)$, một đầu cố định tại J , đầu kia mắc vào một vật khối lượng $M = 200(g)$. Trên M đặt thêm vật có khối lượng $m = 600(g)$. Đặt hệ thống trên mặt phẳng nằm ngang nhẵn (hình vẽ). Ban đầu giữ vật M sao cho lò xo có độ dài $l_1 = 21cm$ rồi thả nhẹ nhàng thì hệ dao động điều hòa.



1) Hãy viết phương trình dao động của hệ.

2) Sau khi dao động được 1,5 chu kỳ thì người ta cắt đi vật m . Hãy viết phương trình dao động của vật còn lại. Mốc thời gian như cũ.

Lời giải. 1) Tần số góc của hệ $(M + m)$ dao động điều hòa :

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m+M}} = \sqrt{\frac{80}{0,8}} = 10 \text{ (rad/s)}.$$

$$\text{Chu kỳ dao động: } T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5} \approx 0,628(s)$$

Phương trình dao động: $x = A \sin(10t + \varphi)$ (cm), vận tốc $v = 10.A \cos(10t + \varphi)$. Tọa độ ban đầu của hệ : $x_0 = l_1 - l_0 = 1$ (cm), còn vận tốc ban đầu $v_0 = 0$.

$$\text{Thay } t = 0 \text{ được } \begin{cases} x = x_0 \\ v = v_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A \sin \varphi = 1 \text{ (cm)} \\ 10.A \cos \varphi = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow A = 1(\text{cm}) \text{ và } \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

Vậy phương trình dao động là :

$$x = \sin(10t + \pi/2) \text{ (cm)}$$

2) Sau khi dao động được 1,5 chu kỳ

$$(t = 1,5 \cdot \frac{\pi}{5} = 0,3\pi \text{ (s)}), \text{ vật ở vị trí } x_1 = -1(\text{cm})$$

và vận tốc bằng 0. Kể từ lúc này trở đi chỉ còn mình M dao động điều hòa, với tần số góc :

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{M}} = \sqrt{\frac{80}{0,2}} = 20 \text{ (rad/s)}.$$

Phương trình dao động : $x = A \sin(20t + \varphi)$ (cm), vận tốc : $v = 20.A \cos(20t + \varphi)$ (cm/s)

Thay $t = 1,5 \cdot \frac{\pi}{5} = 0,3\pi$ (s) được

$$\begin{cases} A \sin(6\pi + \varphi) = -1(\text{cm}) \\ 20 \cdot A \cos(6\pi + \varphi) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1(\text{cm}) \\ \varphi = -\frac{\pi}{2} - 6\pi \end{cases}$$

Vậy phương trình dao động là :

$$x = \sin\left(20t - \frac{13\pi}{2}\right) (\text{cm}), \text{ với } t > \frac{3\pi}{10} (\text{s}).$$

Nhận xét. Các bạn có lời giải đúng và đầy đủ :

Hà Tĩnh : Nguyễn Hữu Hùng, 12D, THPT Lê Quý Đôn, Thạch Hà ; **Nam Định :** Ngô Tiến Đạt, 12C5, THCS A Hải Hậu ; **Bắc Ninh :** Chu Thanh Bình, Lí 12, THPT chuyên Bắc Ninh ; **Nghệ An :** Nguyễn Mạnh Thành, A3, K31, THPT Phan Bội Châu, Vinh ; **Phú Thọ :** Vũ Đình Quang, 11 Lí, THPT chuyên Hùng Vương, ; **Quảng Ngãi :** Lê Hà Kiệt, 11A2, THPT Đức Phổ I ; **Thái Bình :** Nguyễn Trung Đông, 11A3, THPT Đông Thụy Anh, Thái Thụy ; **Bình Định :** Phạm Mạnh Hùng, 11 Lí, THPT chuyên Lê Quý Đôn ; **Hải Phòng :** Nguyễn Khánh Hà, 12 Toán, THPT NK Trần Phú ; **Yên Bái :** Phan Long Thành, 12E, THPT Trần Nhật Duật ; **Bắc Giang :** Dương Trung Hiếu, 11B, Hồ Năng Tân, 12B, THPT NK Ngô Sĩ Liên ; **Vĩnh Phúc :** Nguyễn Đăng Thành, 11A3, Phạm Quang Chiển, 12A1, THPT ch. Vĩnh Phúc.

MAI ANH

Bài L2/319. Hai thấu kính mỏng O_1 và O_2 cùng trục chính đặt cách nhau một khoảng $l = 32\text{cm}$. Thấu kính O_1 có tiêu cự $f_1 = 20\text{cm}$, O_2 có tiêu cự $f_2 = -10\text{cm}$. Một vật phẳng nhỏ AB đặt vuông góc với trục chính và ở trước O_1 . Một màn hứng ảnh E đặt vuông góc với trục chính và ở sau O_2 .

1) Để có thể hứng được ảnh của vật AB trên màn E , phải đặt vật trong khoảng nào ?

2) Người tìm được một vị trí đặt vật (để cho ảnh rõ trên màn) mà khi giữ vật và màn cố định, đổi chỗ hai thấu kính cho nhau (O_1 sang vị trí O_2 và O_2 sang vị trí O_1) thì ảnh các vật vẫn hiện rõ trên màn. Xác định vị trí của vật lúc đó.

3) Muốn ảnh của vật AB qua hệ là một ảnh có độ lớn không đổi và không phụ thuộc vào vị trí đặt vật, thì phải dịch chuyển O_2 một khoảng bao nhiêu, theo chiều nào so với vị trí ban đầu của nó (khi chưa đổi chỗ) ? Hãy cho biết bản chất của ảnh đó (thật hay ảo).

Lời giải. 1) Sơ đồ tạo ảnh :

$$AB \xrightarrow[d_1]{O_1} A_1B_1 \xrightarrow[d_2]{O_2} A_2B_2$$

$$\text{Ta có } d'_1 = \frac{20d_1}{d_1 - 20} ; d_2 = l - d'_1 = \frac{12d_1 - 640}{d_1 - 20} ;$$

$$d'_2 = \frac{10(640 - 12d_1)}{22d_1 - 840} \quad (1)$$

Để có ảnh thật, $d'_2 > 0$, suy ra $38,2 < d_1 \leq 53,3$ (cm).

2) Sơ đồ tạo ảnh

$$AB \xrightarrow{O_2} A'_1B'_1 \xrightarrow{O_1} A'_2B'_2$$

Theo nguyên lí về tính thuận nghịch của chiều truyền ánh sáng thì khi đặt vật AB tại vị trí của $A'_2B'_2$ ta sẽ có ảnh tại vị trí của AB , nghĩa là $d_1 = d'_2$ (2). Từ (1) và (2) tìm được $d_1 = 40\text{cm}$.

(3) Kí hiệu l_1 là khoảng cách giữa O_1 và O_2 , tính toán như ở câu 1, ta được :

$$d_2 = l_1 - d_1 = \frac{(l_1 - 20)d_1 - 20l_1}{d_1 - 20}$$

$$\text{và } d'_2 = \frac{10[20l_1 - (l_1 - 20)d_1]}{(l_1 - 10)d_1 - (20l_1 + 200)} \quad (3)$$

Từ đó

$$k = \frac{d'_1 d'_2}{d_1 d_2} = \frac{200}{(20l_1 + 200) + (10 - l_1)d_1} \quad (4)$$

Muốn cho độ lớn của ảnh không phụ thuộc vào vị trí đặt vật, theo (4) phải có : $l_1 = 10\text{cm}$.

Khi đó $d'_2 = \frac{-(d_1 + 20)}{4} < 0$; Ảnh là ảnh ảo.

Phải dịch chuyển O_2 một đoạn $l - l_1 = 22(\text{cm})$ lại gần O_1 .

Nhận xét. Các bạn có lời giải đúng và đầy đủ :

Thanh Hóa : Nguyễn Trọng Tuấn, 12C7, THPT Đào Duy Từ, Tp. Thanh Hóa ; **Hà Nội :** Bùi Phi Anh, 11 Lí, THPT Hà Nội - Amsterdam ; **Hà Tây :** Lê Đức Hải, 11 Lí 2, THPT chuyên Nguyễn Huệ ; **Hòa Bình :** Đoàn Tuấn Tú, 11 Lí 1, THPT chuyên Hoàng Văn Thụ ; **Bắc Giang :** Nguyễn Minh Tuấn, 12B, THPT NK Ngô Sĩ Liên ; **Phú Thọ :** Lê Hồng Trường, 12H, Lê Thị Ngọc Chung, 12A1, THPT chuyên Hùng Vương ; **Ninh Bình :** Đinh Xuân Khuê, 10 Lí, THPT Lương Văn Tụy ; **Quảng Ngãi :** Lê Hà Kiệt, 11A2, THPT Đức Phổ I ; **Nam Định :** Nguyễn Văn Đình, 12I, THPT Giao Thủy A ; **Hải Dương :** Phạm Thế Thịnh, 12A1, THPT Kinh Môn ; **Đắk Lắk :** Nguyễn Chí Linh, 11A, THPT Phan Bội Châu, Krông Năng ; **Thái Nguyên :** Phạm Hồng Nam, 11B6, PT Trung tâm Sông Công ; **Thái Bình :** Nguyễn Thanh Xuân, 10 Lí, THPT chuyên Thái Bình ; **Nghệ An :** Nguyễn Văn Khánh, Lê Văn Lương, 12C, THPT Nghĩa Đàn.

MAI ANH

X hỏi ? Y, Z trả lời.

HỎI - SỐ NÀY

1.(5.04). Trong một cuốn sách có một bài tập như sau :

"Cho các số 2141, 1345, 4620, 234. Trong các số đó :

...

c) Số nào chia hết cho cả 2 và 5 ?

d) Số nào không chia hết cho cả 2 và 5".

Có hai ý kiến như sau trả lời cho câu d :

1) 2141 vì 2141 không chia hết cho 2 và không chia hết cho 5.

2) Câu d) là phủ định của câu c) (đáp án câu c) là 4620) nên đáp án câu d) là 2141, 234, 1345.

Ý kiến nào là đúng ?

(Đặng Duy C, Bình Định)

2. (5.04). Trên thế giới có rất nhiều bài thơ, câu văn giúp trí nhớ về các con số biểu thị số π . (Số chữ cái của mỗi từ trong câu văn ứng với một chữ số trong cách viết số π theo thứ tự).

Bạn có tìm được những câu nào bằng tiếng nước ngoài và tiếng Việt giúp nhớ số π ?

(Một độc giả quận Đống Đa, Hà Nội)

BẠN CÓ BIẾT ?

Bài toán xếp tiền kim loại

Tiền đây là tiền kim loại hình tròn, dẹt, đồng chất, bằng nhau.

Bài toán đặt ra là : Làm sao sắp xếp những đồng tiền nằm cạnh nhau (trên mặt phẳng) để được nhiều đồng tiền nhất trên một diện tích cho trước. Câu trả lời là xếp 6 đồng tiền xung quanh một đồng tiền.

Sự mở rộng tự nhiên của bài toán trên trong không gian là xếp các hình cầu sao cho thể tích trống giữa chúng là ít nhất. Đối với hình cầu trong không gian 3 chiều thì xếp 12 hình cầu. Các bạn xem thêm bài Phỏng đoán Kepler và đề án Flyspeck trong THPT số 321 (3/2004).

Đối với không gian có số chiều lớn hơn thì bài toán chưa có đáp số, trừ không gian 8 chiều và 24 chiều, với cách sắp xếp rất "kì quái".

Hai nhà toán học Henry Cohn ở Đại học Washington và Noam Elkies ở Đại học Harvard vừa cải tiến đáng kể cách đánh giá việc xếp đồng tiền cho trường hợp không gian 8 chiều và 24 chiều.

Đối với không gian 8 chiều đã cải tiến đến độ chính xác 10^{-6} , còn đối với không gian 24 chiều đến 10^{-3} .

PHAN THANH QUANG

(Theo Recherche số 11/2003)

TỪ NGÀY 1.5.2004, PHÁT HÀNH SGK LỚP 3 MỚI

TỪ NGÀY 15.5.2004, PHÁT HÀNH SGK LỚP 8 MỚI

Bắt đầu từ ngày 1.5.2004 sẽ phát hành bộ sách giáo khoa lớp 3 mới gồm 6 cuốn : Tiếng Việt 3 - tập 1, Tiếng Việt 3 - tập 2, Toán 3, Tự nhiên - xã hội 3, Tập viết 3 - tập 1, Tập viết 3 - tập 2. Giá bộ sách lớp 3 là 38.700 đồng.

Bắt đầu từ ngày 15.5.2004 sẽ phát hành bộ sách giáo khoa lớp 8 mới gồm 13 cuốn : Ngữ văn 8 - tập 1, Ngữ văn 8 - tập 2, Địa lí 8, Lịch sử 8, Giáo dục công dân 8, Âm nhạc và Mĩ thuật 8, Toán 8 - tập 1, Toán 8 - tập 2, Vật lí 8, Sinh học 8, Công nghệ 8, Hóa học 8, Tiếng nước ngoài (Tiếng Anh 8, Tiếng Nga 8, Tiếng Pháp 8, Tiếng Trung Quốc 8).

Để phục vụ năm học 2004-2005 NXB Giáo dục đảm bảo đáp ứng đầy đủ, đồng bộ (sách học sinh và sách giáo viên), kịp thời trước ngày khai giảng.

(Phòng QLXB - NXBGD)



Giải đáp số 316

VỀ CÁC MỐC THỜI GIAN

Các cột mốc thời gian liên quan đến tạp chí Toán học và Tuổi trẻ đã nêu là :

1964 : Ra số đầu tiên 15.10.1964. Trụ sở tại 39 Trần Hưng Đạo, Hà Nội thuộc Ủy ban Khoa học và Kỹ thuật Nhà nước.

1968 : Ra hai tháng 1 kì.

1970 : Tổ chức cuộc thi giải toán đặc biệt chào mừng các ngày kỉ niệm lớn.

1975 : Trục thuộc Viện Khoa học Việt Nam. Trụ sở đặt báo 70 Trần Hưng Đạo, Hà Nội. Phát hành trên toàn quốc. Số lượng 15000 bản / kì.

1984 : Được tặng Huân chương Lao động hạng Nhì.

1985 : Đổi trình bày mẫngset

1992 : Trục thuộc Bộ Giáo dục và Đào tạo, do NXB Giáo dục quản lí. Trụ sở 81 Trần Hưng Đạo, Hà Nội. Có đại diện tại miền Nam.

1993 : Chuyển thành tạp chí, trở lại ra hàng tháng. Đổi mẫngset.

1994 : Tăng lên 20 trang, có bìa. Trụ sở 45B Hàng Chuối, Hà Nội.

1995 : Được tặng Huân chương Lao động hạng Nhì lần thứ hai.

1997 : Trụ sở 81 Trần Hưng Đạo, Hà Nội. Ra Tuyển tập 30 năm tạp chí Toán học và Tuổi trẻ.

1998 : Tăng lên 28 trang. Đổi mẫngset. Trụ sở 25 Hàn Thuyên, Hà Nội.

2000 : Trụ sở 187B Giảng Võ, Hà Nội. Ra phụ trương Toán Tuổi thơ, sau này tách riêng thành Tạp chí.

2002 : Nhận bằng khen của Thủ tướng Chính phủ.

2003 : Ra Tuyển tập 5 năm tạp chí Toán học và Tuổi trẻ.

BNH

(Xem tiếp trang 8)



Kết quả bài : TÌM NGÀY SINH

(THTT số 321, tháng 3 năm 2004)

(Dựa theo bạn Nguyễn Quốc Hùng, 4D, TH Tân Dân, Việt Trì, Phú Thọ)

Giả sử a, b lần lượt là ngày sinh, tháng sinh của cô gái ($1 \leq a \leq 31, 1 \leq b \leq 12$). Theo bài ra ta có phương trình : $12a + 31b = 244$ (1) hay $31b = 4(61 - 3a)$, suy ra $31b : 4$. Nhưng 31 là số lẻ nên $b : 4$. Từ (1) ta thấy $31b < 244$ nên $b < 8$. Vậy $b = 4$ và do đó $a = 10$.

Sinh nhật của cô gái ấy là ngày 10 tháng 4.

Bài này được rất nhiều bạn trên toàn quốc hưởng ứng (có hơn 700 bài gửi về tòa soạn). Tất cả các bạn đều cho kết quả đúng. Một số bạn còn giải bằng thơ khá vui, khá hóm hỉnh. Các bạn ít tuổi hơn cả tham gia giải đúng và gọn bài toán trên được nhận tặng phẩm kỉ này : Nguyễn Đức Minh, 7H, THCS Lê Quý Đôn, Cầu Giấy. Hoàng Mai Khanh, 8D, trường Hà Nội - Amsterdam, Dương Mạnh Tuấn, 8A, THCS Giảng Võ, Ba Đình, Hà Nội ; Ngô Thúy Hằng, 4D, TH Nguyễn Việt Xuân, Hà Đông, Hà Tây ; Nguyễn Mạnh Đức, 9A1, THCS Chu Văn An, Thanh Hà, Hải Dương ; Trần Thị Quỳnh Mai, 7D, THCS Đặng Thai Mai, Tp. Vinh, Nghệ An.

HỒNG QUANG

BIỂU THỨC CHỨA CÙNG MỘT CHỮ SỐ

Bạn hãy dùng đúng 10 chữ số giống nhau (từ 1 đến 9) với các phép tính cộng, trừ, nhân, chia, lũy thừa và dấu ngoặc nếu cần để viết biểu thức có giá trị là 2004.

Chẳng hạn với chữ số 1 ta viết được

$$(1+1)[(11-1)^{1+1} + 1 + 1] = 2004$$

NGUYỄN ĐỨC TRƯỜNG

(GV THCS Đa Tốn, Gia Lâm, Hà Nội)



Giải đáp bài :

PHẢI CHẴNG ... LÀ ĐÚNG ?

Trong lời giải bạn đó đã sử dụng khá nhiều bất đẳng thức (BĐT) nhưng chỉ xét dấu đẳng thức xảy ra ở BĐT

$$\frac{x^2}{y^2+z^2} + \frac{y^2}{x^2+z^2} + \frac{z^2}{y^2+x^2} \geq \frac{3}{2}$$

mà không xét dấu đẳng thức xảy ra ở các BĐT còn lại. Theo cách giải đó đẳng thức

$$M = \frac{3}{2(a^2+b^2)} \text{ xảy ra chỉ khi } x = y = z = a = b.$$

Nhưng theo giả thiết a, b là hai số dương tùy ý, nên với $a \neq b$ thì $M > \frac{3}{2(a^2+b^2)}$.

Có thể giải lại bài toán như sau :

Ta có :

$$\begin{aligned} (ay+bz)(az+by) &\leq \\ &\leq \frac{(ay+bz+az+by)^2}{4} = \frac{(a+b)^2(y+z)^2}{4} \\ &\leq \frac{(a+b)^2(y^2+z^2)}{2} \text{ suy ra :} \end{aligned}$$

$$\frac{x^2}{(ay+bz)(az+by)} \geq \frac{2x^2}{(a+b)^2(y^2+z^2)}$$

Tương tự cũng có :

$$\frac{y^2}{(az+bx)(ax+bz)} \geq \frac{2y^2}{(a+b)^2(x^2+z^2)}$$

$$\frac{z^2}{(ax+by)(ay+bx)} \geq \frac{2z^2}{(a+b)^2(x^2+y^2)}$$

Do đó :

$$M \geq \frac{2}{(a+b)^2} \left(\frac{x^2}{y^2+z^2} + \frac{y^2}{x^2+z^2} + \frac{z^2}{x^2+y^2} \right)$$

Mặt khác theo BĐT Na-sơ-bit :

$$\frac{x^2}{y^2+z^2} + \frac{y^2}{x^2+z^2} + \frac{z^2}{x^2+y^2} \geq \frac{3}{2}, \text{ suy ra } M \geq \frac{3}{(a+b)^2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$. Tóm

lại giá trị nhỏ nhất của M là $\frac{3}{(a+b)^2}$.

Các bạn sau có đáp án tốt, gửi bài về TS sớm hơn cả : Nguyễn Huy Khôi, 7D, THCS Đào Viên, Quế Võ, Bắc Ninh ; Nguyễn Văn Ngọc, 9A, THCS Lăng Công, Lập Thạch, Vĩnh Phúc ; Tăng Văn Vương, 9C, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu, Nghệ An ; Nguyễn Tý, 10CT, THPT Quốc học Huế, Huế ; Vũ Thị Thu Hương, 6², THCS Cam Nghĩa, Cam Ranh, Khánh Hòa.

NGỌC HIỂN

Ý BẠN THẾ NÀO ?

Một bạn đã thực hiện lời giải bài toán :

$$\text{Tìm } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2+3x+3} - \sqrt{x^2+x+1} \right)$$

như sau :

Ta có :

$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2+3x+3} - \sqrt{x^2+x+1} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+3x+3 - x^2 - x - 1}{\sqrt{x^2+3x+3} + \sqrt{x^2+x+1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+2}{\sqrt{x^2+3x+3} + \sqrt{x^2+x+1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \left(2 + \frac{2}{x} \right)}{\sqrt{x^2+3x+3} + \sqrt{x^2+x+1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{2}{x}}{\sqrt{1 + \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}} = 1. \end{aligned}$$

Ý bạn thế nào ? Có trao đổi gì thêm về lời giải trên không ?

HỒ CÔNG DŨNG
(GV THPT chuyên Trần Hưng Đạo,
Phan Thiết, Bình Thuận)

Toán học và Tuổi trẻ

Mathematics and Youth

NĂM THỨ 41

Số 323 (5-2004)

Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội

ĐT - Fax : 04.5144272

Email : toanhocvt@yahoo.com

TRONG SỐ NÀY

- 1** **Dành cho Trung học Cơ sở – For Lower Secondary Schools**

Tạ Phạm Hải – Cách tìm các chữ số của một số

- 3** **Hướng dẫn giải đề thi tuyển sinh vào lớp 10 trường THPT Chu Văn An & THPT Hà Nội - Amsterdam năm học 2003 – 2004**

- 5** **Diễn đàn dạy học toán – Math Teaching Forum**

Trương Công Thành – Giới thiệu phần hình học không gian trong sách giáo khoa Toán 8 (Tiếp theo số trước)

- 6** **Chuẩn bị thi vào Đại học – University Entrance Preparation**

Nguyễn Anh Dũng – Hướng dẫn giải đề tự ôn thi số 3
Phạm Hùng – Đề tự ôn thi số 5

- 9** **Ngô Việt Trung – Giải thưởng Abel năm 2004**

- 10** **Phương pháp giải toán – Math Problem Solving**

Hà Chí Đạt – Đánh giá cận để giải một số phương trình lượng giác

- 11** **Thư từ bạn muôn nơi**

- 14** **Đề ra kì này – Problems in This Issue**
T1/323, ..., T8/323, L1, L2/323.

- 15** **Cuộc thi giải toán kỉ niệm 40 năm THPT**

- 16** **Giải bài kì trước – Solutions to Previous Problems.** Giải các bài của số 319.

- 25** **X hỏi ? Y, Z trả lời**

Bạn có biết – Do you know ?

Phan Thanh Quang – Bài toán xếp tiền kim loại

- 26** **Câu lạc bộ – Math Club**

Giải trí toán học – Math Recreation

- 27** **Sai lầm ở đâu - Where's the Mistake ?**

Bìa 2 : Tin hoạt động của NXB Giáo dục

Bìa 3 : Giới thiệu về toán học cao cấp –

Introduction to Higher Mathematics

Đàm Văn Nhĩ – Chuỗi và ứng dụng để nghiên cứu dãy số

Bìa 4 : Giải thưởng Lê Văn Thiêm 2003

Tổng biên tập :

NGUYỄN CẢNH TOÀN

Chịu trách nhiệm xuất bản :

Chủ tịch HĐQT kiêm Tổng Giám đốc NXB Giáo dục

NGÔ TRẦN ÁI

Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập NXB Giáo dục

VŨ DƯƠNG THUY

Trưởng ban biên tập : NGUYỄN VIỆT HẢI

Trì sự : VŨ ANH THỨ

Biên tập : VŨ KIM THÙY, HỒ QUANG VINH.

Trình bày : NGUYỄN THỊ OANH.

Đại diện phía Nam : TRẦN CHÍ HIẾU, 231 Nguyễn Văn Cừ, Q. 5, Tp. Hồ Chí Minh.

ĐT : 08.8309049

ĐÓN ĐỌC THPT SỐ 324 (6/2004)

- Hình lập phương magic hoàn toàn bậc nhỏ nhất đã được xây dựng.
- Chứng minh đường thẳng đi qua một điểm cố định.
- Đường cong Hypôxiclôit Steiner và họ đường thẳng Simson của một tam giác.
- Hướng dẫn giải Đề tự ôn thi ĐH, CĐ số 4, số 5.
- Chuỗi và ứng dụng để nghiên cứu dãy số (tiếp)

Mời các bạn đặt mua THPT tại các cơ sở Bưu điện !

THPT



CHUỖI và ỨNG DỤNG để NGHIÊN CỨU DÃY SỐ

ĐÀM VĂN NHÌ

TS Đàm Văn Nhì
sinh ngày 18 tháng
3 năm 1952 tại
Kiến Xương, Thái
Bình. Sau khi tốt
nghiệp khối PT
chuyên toán ĐHSP
Hà Nội, học ĐH
Tổng hợp Toán tại
Halle CHDC Đức.
Từ 1976 dạy tại
ĐHSP Hà Nội 2.
Sau đó chuyển về
dạy tại CĐSP Thái
Bình và nay giảng
dạy tại khoa Toán - Tin ĐHSP Hà Nội. Bảo vệ
luận án Tiến sĩ năm 2001 tại Viện Toán học. Đã
có nhiều bài báo đăng ở trong nước và nước
ngoài. Vẫn yêu thích giải và sáng tác các bài
toán sơ cấp tạp chí THPT.



Bài báo này nhằm giới thiệu khái niệm chuỗi
và một số ứng dụng vào nghiên cứu dãy số.

1. Chuỗi và các phép toán :

Xét hai đa thức của biến x

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n = \sum_{i=0}^n a_i x^i$$

$$g(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n = \sum_{j=0}^n b_j x^j$$

trong đó a_i, b_j là các hệ số thực (không nhất
thiết khác 0).

Khi đó ta xác định các phép toán của đa thức
như sau :

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow a_i = b_i \text{ với mọi } i = 0, 1, \dots, n ;$$

$$f(x) + g(x) = \sum_{i=0}^n (a_i + b_i) x^i ;$$

$$\alpha f(x) = \sum_{i=0}^n (\alpha a_i) x^i ; \alpha \in \mathbb{R}.$$

$$f(x).g(x) = \sum_{i=0}^n \left(\sum_{p+q=i} a_p b_q \right) x^i ,$$

Thử hình dung, cho n tiến ra vô tận, ta nhận
được tổng $f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$. Mỗi tổng như vậy
được gọi là một chuỗi lũy thừa hình thức.

Xét hai chuỗi :

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \text{ và } g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i .$$

Ta định nghĩa các phép toán của các chuỗi
này tương tự như của đa thức :

$$f(x) = g(x) \text{ nếu } a_i = b_i \text{ với mọi } i \geq 0 ;$$

$$f(x) + g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (a_i + b_i) x^i ;$$

$$\alpha f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (\alpha a_i) x^i ; \alpha \in \mathbb{R}.$$

$$f(x).g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{p+q=i} a_p b_q \right) x^i .$$

Hơn nữa, mỗi hàm số $f(x)$ có đạo hàm mọi cấp
tại $x = a$ thì ta có sự biểu diễn sau với đạo hàm
cấp i của $f(x)$ kí hiệu là $f^{(i)}(x)$.

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (x-a)^i$$

$$\text{và } \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots \text{ với } |x| < 1.$$

2. Ứng dụng chuỗi vào nghiên cứu một số dãy số

a) Chúng ta bắt đầu bằng việc xét dãy
Fibonacci được cho như sau : $a_0 = 0, a_1 = 1,$
 $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, \forall n \geq 0.$

Tìm công thức tường minh cho a_n .

$$\text{Xét chuỗi } f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$$

$$\text{Khi đó } xf(x) = a_0x + a_1x^2 + a_2x^3 + \dots$$

$$x^2 f(x) = a_0x^2 + a_1x^3 + a_2x^4 + \dots$$

Trừ theo từng vế

$$\begin{aligned} f(x) - xf(x) - x^2 f(x) &= \\ &= a_0 + (a_1 - a_0)x + (a_2 - a_1 - a_0)x^2 + \dots + \\ &+ (a_{n+2} - a_{n+1} - a_n)x^{n+2} + \dots = 1.x \end{aligned}$$

(Xem tiếp trang 12)

GIẢI THƯỞNG LÊ VĂN THIÊM 2003

Hội đồng Giải thưởng Lê Văn Thiêm 2003 đã họp vào đầu tháng 4/2004 và nhất trí quyết định trao giải thưởng Lê Văn Thiêm 2003 cho các giáo viên và học sinh sau đây:

1. GIÁO VIÊN.

1. **Nguyễn Lương**, sinh năm 1959, giáo viên trường THPT Chuyên Nguyễn Du, Buôn Ma Thuột, Đắk Lắk.

Thành tích: Từ 1981 dạy CDSP, từ 1995 dạy tại các trường THPT Buôn Ma Thuột. Đã đào tạo nhiều học sinh giỏi: từ 1997 đến 2003 có 2 giải Nhất, 2 giải Nhì, 5 giải Ba và 3 giải Khuyến khích tại các kỳ thi chọn học sinh giỏi toán THPT toàn quốc. Đã được tặng nhiều bằng khen của Ủy ban nhân dân tỉnh Đắk Lắk về thành tích giảng dạy xuất sắc.

2. **Lê Sáng**, sinh năm 1952, giáo viên trường THPT Chuyên Lê Quý Đôn, Nha Trang, Khánh Hòa.

Thành tích: 25 năm tham gia giảng dạy và bồi dưỡng học sinh giỏi của tỉnh, có 3 học sinh đoạt giải Olympic toán Quốc tế (2 HCB, 1 HCD), nhiều học sinh đoạt giải tại các kỳ thi chọn HS giỏi toán THPT toàn quốc. Là tác giả 2 cuốn sách bồi dưỡng học sinh giỏi. Được tặng Huy chương vì sự nghiệp giáo dục và nhiều bằng khen của Sở GD-ĐT và Ủy ban nhân dân tỉnh Khánh Hòa.

2. HỌC SINH :

1. **Lê Hùng Việt Bảo**, lớp 11 A, Khối PT chuyên Toán-Tin ĐH KHTN, ĐHQG Hà Nội.

Thành tích: Giải Ba cuộc thi chọn học sinh giỏi toán THPT toàn quốc 2003, Huy chương Vàng (điểm tuyệt đối 42/42) tại Olympic toán Quốc tế Tokyo 2003.

2. **Nguyễn Trọng Cảnh**, lớp 12, Khối PT chuyên Toán-Tin ĐHSP Hà Nội.

Thành tích: Giải Ba cuộc thi chọn học sinh giỏi toán THPT toàn quốc 2003, Huy chương Vàng (điểm tuyệt đối 42/42) tại Olympic toán Quốc tế Tokyo 2003.

3. **Nguyễn Đăng Hợp**, lớp 11, Trường THPT Lê Hồng Phong, Nam Định.

Thành tích: giải Ba cuộc thi chọn học sinh giỏi toán THPT toàn quốc 2003, Huy chương Bạc tại Olympic toán Quốc tế Tokyo 2003. Hoàn cảnh gia đình có nhiều khó khăn.

4. **Nguyễn Minh Hải**, lớp 12 Trường THPT Chuyên, Phan Thiết, Bình Thuận.

Thành tích: Huy chương Bạc Olympic toán 30/4 các năm 2001, 2002. Giải Nhất cuộc thi chọn học sinh giỏi toán THPT toàn quốc 2003. Hoàn cảnh gia đình gặp nhiều khó khăn.



Thứ 3 từ trái sang :
Nhà giáo Nguyễn
Lương, Nguyễn Đăng
Hợp, Lê Hùng Việt
Bảo, Nguyễn Trọng
Cảnh, cùng các nhà
toán học.

ISSN : 0866-8035

Chỉ số : 12884

Mã số : 8BT25M4

Chế bản tại Tòa soạn

In tại Công ty CP in Diên Hồng, 187B phố Giảng Võ

In xong và nộp lưu chiểu tháng 5 năm 2004

Giá : 3400 đồng

Ba nghìn bốn trăm đồng