

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO * HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

Toán học & Tuổi trẻ

3
2004

SỐ 321 - NĂM THỨ 41 - TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG

DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ



Trường
THPT
chuyên
Nguyễn
Tất Thành
Yên Bái





Nhà giáo Nguyễn Văn Thiêm sinh ngày 15.9.1924 tại thành phố Thanh Hóa. Từ 1955 là giáo viên toán trường THPT Chu Văn An, Hà Nội. Từ năm 1961 là chuyên viên Viện Khoa học Giáo dục. Ông xác định báo Toán học và Tuổi trẻ là đất dụng võ để góp phần giới thiệu những

thông tin mới về toán học cho các bạn trẻ yêu toán từ nguồn các tạp chí nước ngoài đồng thời coi viết bài cho Toán học và Tuổi trẻ là một hình thức thể dục trí tuệ cần thiết, đi đôi với luyện tập thể chất để sống khỏe cả về vật chất, tinh thần, hòa nhịp cùng xã hội ngày càng phát triển.



PHỎNG ĐOÁN KEPLER VÀ ĐỀ ÁN FLYSPECK

Chồng các hình cầu bằng nhau thành đồng sao cho thể tích đồng bé nhất là điều đơn giản về mặt trực giác. Còn có được một chứng minh chặt chẽ lại là chuyện khó, thách đố các nhà toán học.

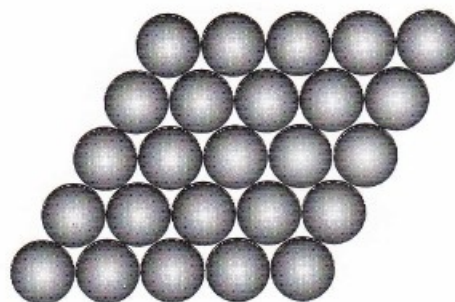
Sau định lí về tô một bản đồ bằng 4 màu được chứng minh một phần nhờ có máy điện toán, nay bài giải phỏng đoán Kepler cũng đi theo con đường như vậy.



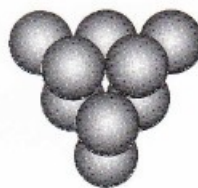
JOHANNES KEPLER

Năm 1609, nhà thiên văn lớn Đức, Johannes Kepler (Giô-han Kê-ple) thường trao đổi thư từ với người Anh Thomas Harriot, giải thích các khối cầu rần, mà Kepler gọi là "tiểu cầu", được sắp xếp như thế nào với nhau trong một phần không gian. Kepler kết luận

rằng sự phân bố compact (compact : chen chúc, chặt ních), nghĩa là chiếm ít không gian nhất, là cách phân bố sao cho mỗi khối cầu có mười hai khối cầu khác bao quanh. Muốn chồng thành đồng, lúc đầu người ta tạo ra một tập hợp hình cầu chứa trong một mặt phẳng, trong đó mỗi hình cầu có 6 hình cầu khác bao quanh mà các tâm tạo thành một hình lục giác đều (hình 1). Trên những tam giác tạo thành như vậy, người ta xếp những hình cầu mới để tạo thành một lớp thứ hai giống hoàn toàn lớp thứ nhất. Bằng cách làm lại thao tác trên lớp thứ hai này, người ta tạo ra cái mà người ta gọi là một đồng compact



Hình 1.



Nhìn trên xuống



Nhìn ngang

Hình 2.

(hình 2), đồng này có thể có hai dạng tùy theo lớp thứ ba có xếp chạm lên lớp thứ nhất hay không. Trong tinh thể học, người ta nói đồng lục giác compact (như tinh thể magiê hoặc kẽm) và đồng lập phương có các mặt đồng trục (nhôm hoặc đồng). Theo Kepler, vấn đề được hiểu là "Không có một cách sắp xếp nào khác cho phép chồng đồng nhiều tiểu cầu hơn trong cùng một hình chứa". Về trực giác, điều khẳng định của Kepler không làm ai nghi ngờ khi thử vài lần. Nhưng sự tin chắc tự trong lòng không có thể là chứng cứ. Vì vậy các nhà toán học dần vào công việc chứng minh chặt chẽ. Nhiều luận chứng sai lầm đã được đưa ra. Lời phát biểu của Kepler

(Xem tiếp trang 2)



Chuyên PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỈ về HỆ PHƯƠNG TRÌNH HỮU TỈ

TRẦN VĂN HINH

(GV THCS Nam Giang, Nam Trực, Nam Định)

Với mỗi phương trình (PT) vô tỉ có thể có nhiều cách giải khác nhau. Một số phương trình nếu nâng lên lũy thừa để làm mất căn thức thì thường dẫn đến một PT bậc cao rất khó tìm nghiệm. Trong bài viết này trình bày cách giải một số phương trình vô tỉ nhờ việc đặt các ẩn phụ để chuyển PT vô tỉ về hệ phương trình hữu tỉ. Chú ý rằng việc đầu tiên giải PT vô tỉ là tìm tập xác định (TXĐ).

Bài 1. Giải phương trình :

$$\sqrt{25-x^2} - \sqrt{10-x^2} = 3 \quad (1)$$

Lời giải. TXĐ : $-\sqrt{10} \leq x \leq \sqrt{10}$

Đặt : $\sqrt{25-x^2} = a$ và $\sqrt{10-x^2} = b$ ($a, b \geq 0$)

Theo PT (1) có $a - b = 3$

Nếu bình phương mỗi căn thức rồi lấy hiệu để khử ẩn thì ta được PT mới đối với hai ẩn phụ

$$a^2 - b^2 = (\sqrt{25-x^2})^2 - (\sqrt{10-x^2})^2 = 15$$

Việc giải PT (1) chuyển về giải hệ PT hữu tỉ

$$\text{sau } \begin{cases} a-b=3 \\ a^2-b^2=15 \end{cases} \quad (2)$$

Giải hệ này ta được $a = 4, b = 1$.

Từ đây suy ra $x_1 = 3, x_2 = -3$.

Bài toán trên nếu giải bằng cách bình phương hai vế sau khi đặt các điều kiện thì lời giải khá khó khăn vì ta gặp phải PT bậc 4 không quy về được bậc 2.

Cách đặt hai ẩn phụ dẫn đến việc phát hiện ra phương trình mới (2) mà kết hợp với PT (1) sau khi đặt ẩn phụ thì việc giải hệ PT mới không phức tạp.

Bài 3. Giải phương trình :

$$\sqrt[3]{1+\sqrt{x}} + \sqrt[3]{1-\sqrt{x}} = 2 \quad (3)$$

Lời giải. TXĐ : $x \geq 0$.

Đặt $\sqrt[3]{1+\sqrt{x}} = a$ và $\sqrt[3]{1-\sqrt{x}} = b$.

Theo PT (3) thì $a + b = 2$.

Nhưng ta lại có PT mới liên hệ giữa hai ẩn phụ là $a^3 + b^3 = (\sqrt[3]{1+\sqrt{x}})^3 + (\sqrt[3]{1-\sqrt{x}})^3 = 2$.

Việc giải PT (3) chuyển về giải hệ PT

$$\begin{cases} a+b=2 \\ a^3+b^3=2. \end{cases}$$

Giải hệ PT này được $a = b = 1$.

Từ đó suy ra $\sqrt{x} = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Bài 4. Giải phương trình :

$$\sqrt[4]{97-x} + \sqrt[4]{x} = 5 \quad (4)$$

Lời giải. TXĐ : $0 \leq x \leq 97$.

Đặt $\sqrt[4]{97-x} = a$ và $\sqrt[4]{x} = b$ ($a, b \geq 0$)

Theo PT (4) thì : $a + b = 5$.

Mà ta lại có :

$$a^4 + b^4 = (\sqrt[4]{97-x})^4 + (\sqrt[4]{x})^4 = 97$$

Ta chuyển về giải hệ PT $\begin{cases} a+b=5 \\ a^4+b^4=97. \end{cases}$

Giải hệ PT này được $a = 3, b = 2$ và $a = 2, b = 3$.

Từ đó suy ra $x_1 = 81, x_2 = 16$.

Đặc biệt hơn nữa nếu gặp phương trình vô tỉ chứa các căn thức có bậc khác nhau thì cách giải trên khi áp dụng sẽ tỏ ra càng hiệu quả hơn như ở bài tập dưới đây.

Bài 5. Giải phương trình :

$$\sqrt[3]{2-x} + \sqrt{x-1} = 1.$$

Lời giải. TXĐ : $x \geq 1$.

Đặt $\sqrt[3]{2-x} = a$ và $\sqrt{x-1} = b$ ($b \geq 0$)

Theo phương trình đã cho thì $a + b = 1$.

Nhưng ta lại thấy :

$$a^3 + b^2 = (\sqrt[3]{2-x})^3 + (\sqrt{x-1})^2 = 1$$

Chuyển về giải hệ PT $\begin{cases} a+b=1 \\ a^3+b^2=1. \end{cases}$

Giải hệ PT này được các nghiệm là :

$$\begin{cases} a=0 \\ b=1, \end{cases} \begin{cases} a=1 \\ b=0, \end{cases} \begin{cases} a=-2 \\ b=3 \end{cases}$$

Từ đó có các nghiệm là : $x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = 10$.

Từ các bài toán trên chắc hẳn các bạn cũng đã phần nào hình dung được những bài toán tổng quát tương ứng và cách giải chúng. Bạn hãy luyện tập giải các phương trình sau dựa vào phương pháp giải trên.

1) $\sqrt{10-2x} - \sqrt{2x+3} = 1$

2) $\sqrt{48-x^3} + \sqrt{35-x^3} = 13$

3) $\sqrt[5]{32-x^2} - \sqrt[5]{1-x^2} = 4$

4) $\sqrt[3]{x-1} + 3 = \sqrt[4]{82-x}$

5) $\sqrt{x} + \sqrt[4]{20-x} = 4$

6) $x + \sqrt{17-x^2} + x\sqrt{17-x^2} = 9$

7) $x^3 + 1 = 2\sqrt[3]{2x-1}$

Đọc lại cho đúng

Trong THPT số 320 (2/2004) ở trang 1 cột trái dòng 5 dưới lên có in sót mấy chữ, xin đọc lại như sau : "... mà với n lẻ thì $x_1'' - 1 < S_n = x_1'' + x_2'' < x_1''$ nên $[x_1''] = S_n$ ".

Thành thật xin lỗi tác giả và bạn đọc.

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

BÀI SỐ 66

Problem. Prove that there are no positive integers a, b, c such that $a^2 + b^2 + c^2 = a^2b^2$.

Solution. Considering the equation modulo 4, we can see that it is impossible for there to be exactly one, two or three odd numbers in the set $\{a, b, c\}$. Hence all three integers a, b, c must be even. We may write $a = 2a_1, b = 2b_1, c = 2c_1$ for some integers a_1, b_1, c_1 , whence

$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 4a_1^2b_1^2.$$

By the same argument we can see that a_1, b_1, c_1 also have to be all even, so $a_1 = 2a_2, b_1 = 2b_2, c_1 = 2c_2$ for some integers a_2, b_2, c_2 . We can continue the argument to show that these new numbers are even, and so on. But this can not continue indefinitely. Consequently, there are no positive solutions.

Từ mới:

consider	= xét (động từ)
equation	= phương trình
modulo	= đồng dư
impossible	= không thể xảy ra được (tính từ)
set	= tập hợp
whence	= từ đó, do đó (phó từ)
argument	= lý lẽ
continue	= tiếp tục (động từ)
indefinitely	= vô hạn (phó từ)
consequently	= do đó, vì vậy (phó từ)

NGÔ VIỆT TRUNG

PHÔNG ĐOÁN KEPLER... (Tiếp bài 2)

Có thể là phỏng đoán toán học cổ nhất cho đến nay chưa giải được. Trong những năm 90 thế kỷ trước, Thomas Hale, ở trường đại học Pittsburg (Mỹ) đã công bố một loạt công trình về vấn đề trên và vừa đạt đỉnh cao nhất bằng một bài báo 250 trang, đăng trên tạp chí nổi tiếng Annals of Mathematics (Niên san toán học), trong đó công bố phỏng đoán Kepler đã được chứng minh, nhờ sự trợ giúp của máy điện toán. Nói đúng hơn, chứng cứ có giá trị "tối 99%", (theo các từ của tạp chí dùng).

Thomas Hales không bằng lòng với sự đánh giá "về đại thể là xác thực" của cộng đồng các nhà toán học : để bảo đảm rằng chứng cứ của mình không có một thiếu sót nào, T. Hales đã tung ra đề án Flyspeck (vết loang bay), nhằm cho một "chứng cứ dứt khoát" về phỏng đoán Kepler, nghĩa là chứng minh dựa trên sự phát triển logic chắc chắn, khó đọc, nhưng không thể bác được, để bảo đảm dứt khoát giá trị của những kết luận của mình.

Để thực hiện tốt đề án của mình, T. Hales đã kêu gọi các nhà toán học và các nhà lập trình hợp tác. Có thể phải mất khoảng 20 năm nữa mới hoàn thành việc kiểm chứng đó, với sự hỗ trợ của nhiều người sẵn sàng tìm kiếm một chân lý khá hiển nhiên về mặt trực giác.

Johannes Kepler sinh ngày 27.12.1571 ở Württemberg (Württemberg) thuộc nước Đức và mất ngày 15.11.1630 ở Regensburg (Ratisbonne) cũng ở Đức. Ông dạy toán và đạo đức ở trường Trung học tại Graz từ 1594. Năm 1595 công bố sách viết về các hành tinh và nổi tiếng với 3 định luật về quỹ đạo các hành tinh. Từ 1960 ông làm Trợ lý Giám đốc, về sau làm Giám đốc Đài thiên văn Benatek gần Pra-ha.

Ông còn có một số phát minh trong lĩnh vực toán học như nghiên cứu về đa diện hình sao đều, thể tích các thùng chứa rượu... Trong đời tu ông gặp nhiều bất hạnh.

NGUYỄN VĂN THIÊM
(theo *La Recherche* 5.2003)

ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 CHUYÊN TOÁN - TIN TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI 2003

MÔN TOÁN – VÒNG 1

(Thời gian làm bài : 150 phút)

Câu 1. (1 điểm) :

Chứng minh rằng biểu thức sau có giá trị không phụ thuộc vào x :

$$A = \sqrt{x} + \frac{\sqrt[3]{2-\sqrt{3}} \cdot \sqrt[6]{7+4\sqrt{3}} - x}{\sqrt[4]{9-4\sqrt{5}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{5}} + \sqrt{x}}$$

Câu 2. (2 điểm) :

Với mỗi số nguyên dương n , đặt $P_n = 1.2.3...n$. Chứng minh rằng :

$$1) 1 + 1.P_1 + 2.P_2 + 3.P_3 + ... + n.P_n = P_{n+1}$$

$$2) \frac{1}{P_2} + \frac{2}{P_3} + \frac{3}{P_4} + ... + \frac{n-1}{P_n} < 1$$

Câu 3. (2 điểm) :

Tìm các số nguyên dương n sao cho hai số $x = 2n + 2003$ và $y = 3n + 2005$ đều là những số chính phương.

Câu 4. (2 điểm) :

Xét phương trình ẩn x :

$$(2x^2 - 4x + a + 5)(x^2 - 2x + a)(|x-1| - a - 1) = 0$$

1. Giải phương trình ứng với $a = -1$.

2. Tìm tất cả các giá trị của tham số a để phương trình đã cho có đúng ba nghiệm phân biệt.

Câu 5. (3 điểm) :

Qua một điểm M tùy ý đã cho trên đáy lớn AB của hình thang $ABCD$ ta kẻ các đường thẳng song song với hai đường chéo AC và BD . Các đường thẳng song song này cắt hai cạnh BC và AD lần lượt tại E và F . Đoạn EF cắt AC và BD tại I và J tương ứng.

1) Chứng minh rằng nếu H là trung điểm của đoạn IJ thì H cũng là trung điểm của đoạn EF .

2) Trong trường hợp $AB = 2CD$, hãy chỉ ra vị trí của một điểm M trên AB sao cho $EJ = FI$.

MÔN TOÁN – VÒNG 2

(Thời gian làm bài : 150 phút)

Câu 6. (2 điểm) :

Tính giá trị biểu thức

$$P = \frac{(2003^2 \cdot 2013 + 31 \cdot 2004 - 1)(2003 \cdot 2008 + 4)}{2004 \cdot 2005 \cdot 2006 \cdot 2007 \cdot 2008}$$

Câu 7. (2 điểm) :

Cho ba số x_1, x_2, x_3 khác 0, thỏa mãn điều kiện :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = a \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 0 \\ x_1x_2x_3 = b \end{cases}$$

Xét dấu tích $a.b$.

Câu 8. (2 điểm) :

Giải phương trình

$$(ax^2 + bx + c)(cx^2 + bx + a) = 0$$

trong đó a, b, c là những số nguyên đã cho (a, c

$\neq 0$), biết rằng $x = (\sqrt{2} + 1)^2$ là một nghiệm của phương trình này.

Câu 9. (2 điểm) :

Cho a, b, c là ba số dương khác nhau đôi một. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{(a-x)(a-y)}{a(a-b)(a-c)} + \frac{(b-x)(b-y)}{b(b-c)(b-a)} + \frac{(c-x)(c-y)}{c(c-a)(c-b)}$$

trong đó x, y là hai số dương thay đổi luôn có tổng bằng 1.

Câu 10. (2 điểm) :

Cho A là một điểm cố định trên đường tròn (C) tâm O , bán kính 1. Giả sử M là đỉnh góc vuông của một tam giác vuông ABM với cạnh huyền AB là một dây cung của đường tròn (C) .

1) Chứng minh rằng $OM \leq \sqrt{2}$.

2) Hãy nói rõ cách dựng các đỉnh góc vuông của các tam giác vuông ABM có cạnh huyền AB là một dây của đường tròn (C) và $OM = \sqrt{2}$.

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI TOÁN THCS TP HỒ CHÍ MINH

NĂM HỌC 2003-2004

(Thời gian làm bài : 150 phút)

I. PHẦN BẮT BUỘC :

Bài 1. (4 điểm)

Giải các phương trình và hệ phương trình sau đây :

a) $\sqrt{2x-3} + \sqrt{5-2x} = 3x^2 - 12x + 14$

b) $\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y} = 4 \\ x+y=7. \end{cases}$

Bài 2. (4 điểm). a) Cho $xy = 1$ và $x > y$.

Chứng minh : $\frac{x^2+y^2}{x-y} \geq 2\sqrt{2}$.

b) Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác thỏa mãn $a+b+c = 2$. Chứng minh

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2abc < 2.$$

Bài 3. (4 điểm). Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp trong đường tròn tâm O , đường kính AI . Gọi E là trung điểm của AB và K là trung điểm của OI . Chứng minh tứ giác $AEKC$ nội tiếp được đường tròn.

Bài 4. (4 điểm). Cho nửa đường tròn tâm O , đường kính $AB = 2R$ và M là một điểm thuộc nửa đường tròn (khác A và B). Tiếp tuyến của (O) tại M cắt các tiếp tuyến tại A và B của đường tròn (O) lần lượt tại các điểm C và D .

Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng diện tích của hai tam giác ACM và BDM .

II. PHẦN CHỌN :

Học sinh chọn một trong hai bài sau đây:

Bài 5a. (4 điểm)

a) Xác định m để phương trình :

$$2x^2 + 2mx + m^2 - 2 = 0 \text{ có hai nghiệm.}$$

b) Gọi hai nghiệm là x_1, x_2 , tìm giá trị lớn nhất của biểu thức :

$$A = |2x_1x_2 + x_1 + x_2 - 4|$$

Bài 5b. (4 điểm) (chương trình THCS thí điểm).

Cho biểu thức :

$$P = \left[1 - \frac{x-3\sqrt{x}}{x-9} \right] : \left[\frac{\sqrt{x}-3}{2-\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}-2}{3+\sqrt{x}} - \frac{9-x}{x+\sqrt{x}-6} \right]$$

($x \geq 0, x \neq 9, x \neq 4$)

a) Thu gọn biểu thức P .

b) Tìm các giá trị của x để $P = 1$.



HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ TỰ ÔN THI SỐ 1

(Tiếp theo số báo tháng 2-2004)

Câu III. 1) Không mất tính tổng quát giả sử

$$A \geq B \geq C \Rightarrow \begin{cases} \sin A \geq \sin B \geq \sin C > 0 \\ \cos A \leq \cos B \leq \cos C \end{cases}$$

$$\text{Do } 4 \sin \frac{A-B}{2} \cdot \sin \frac{B-C}{2} \cdot \sin \frac{C-A}{2}$$

$= \sin(C-B) + \sin(B-A) + \sin(A-C)$ nên sử dụng $\sin(x+y) + \sin(x-y)$ thì về phải ở giả thiết bài toán là :

$$2(\sin B \cos A + \sin A \cos C + \sin C \cos B)$$

Giả thiết đã cho trở thành :

$$\sin A(\cos A - \cos C) + \sin B(\cos B - \cos A) + \sin C(\cos C - \cos B) = 0 \quad (1)$$

$$\text{Vì } \begin{cases} \cos C - \cos B \geq 0 \\ \cos B - \cos A \geq 0 \end{cases} \text{ nên}$$

$$\begin{aligned} & \sin A(\cos A - \cos C) + \sin B(\cos B - \cos A) + \\ & + \sin C(\cos C - \cos B) \\ & \leq \sin A(\cos A - \cos C) + \sin A(\cos B - \cos A) + \\ & + \sin A(\cos C - \cos B) = 0 \quad (2) \end{aligned}$$

Từ (1), (2) suy ra $\cos A = \cos B = \cos C$ hay ΔABC đều (đpcm).

$$2) \text{ ĐK } \cos \frac{y}{2} \neq 0 \Leftrightarrow y \neq (2k+1)\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Nhân theo từng vế các PT của hệ ta được

$$3 \left(\tan^2 \frac{y}{2} - 4 \sin^2 x \right) = 12 \sin(y-x) \sin(y+x)$$

$$\Leftrightarrow \tan^2 \frac{y}{2} - 4 \sin^2 x = 2(1 - 2 \sin^2 x - \cos 2y)$$

$$\Leftrightarrow \tan^2 \frac{y}{2} = 4 \sin^2 y \quad (1)$$

Đặt $t = \tan^2 \frac{y}{2} \geq 0$ thì (1) trở thành $t = \frac{16t}{(1+t)^2}$.

PT này có các nghiệm $t = 0, t = 3$.

• Nếu $\tan \frac{y}{2} = 0$ thì hệ đã cho có nghiệm $(x, y) = (l\pi, 2k\pi) (k, l \in \mathbb{Z})$

• Nếu $\tan \frac{y}{2} = \sqrt{3}$ thì hệ đã cho có nghiệm $(x, y) = \left(\alpha + 2l\pi, \frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right)$; trong đó $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ và $\cos \alpha = 1/7, \sin \alpha = -4\sqrt{3}/7$.

• Nếu $\tan \frac{y}{2} = -\sqrt{3}$ thì hệ đã cho có nghiệm $(x, y) = \left(-\alpha + 2l\pi, -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right)$, trong đó $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, $\cos \alpha = 1/7, \sin \alpha = -4\sqrt{3}/7$.

Câu IV. Giả sử $A_i \left(x_i, \frac{a}{x_i}\right) (x_i \neq 0); i = 1, 2, \dots, 6$ khi đó $\overline{A_1 A_2} = \left(x_2 - x_1, \frac{a}{x_2} - \frac{a}{x_1}\right)$,

$$\overline{A_4 A_5} = \left(x_5 - x_4, \frac{a}{x_5} - \frac{a}{x_4}\right)$$

$$\text{Ta có } A_1 A_2 \parallel A_4 A_5 \Leftrightarrow \frac{x_5 - x_4}{x_2 - x_1} = \frac{\frac{a}{x_5} - \frac{a}{x_4}}{\frac{a}{x_2} - \frac{a}{x_1}}$$

$$\Leftrightarrow x_1 x_2 = x_4 x_5 \quad (1)$$

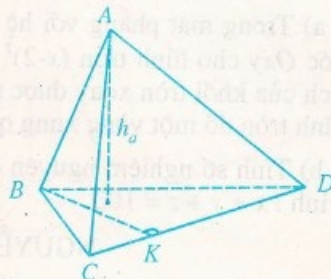
$$\text{Tương tự } A_2 A_3 \parallel A_5 A_6 \Leftrightarrow x_2 x_3 = x_5 x_6 \quad (2)$$

$$A_3 A_4 \parallel A_1 A_6 \Leftrightarrow x_3 x_4 = x_1 x_6 \quad (3)$$

Từ (1), (2) (3) có $A_1 A_2 \parallel A_4 A_5; A_2 A_3 \parallel A_5 A_6$ khi $x_4 x_5 x_2 x_3 = x_1 x_2 x_5 x_6 \Leftrightarrow x_3 x_4 = x_1 x_6$ hay $A_3 A_4 \parallel A_1 A_6$ (đpcm).

2) Giả sử h_a ,

h_b, h_c, h_d là độ dài các đường cao của tứ diện kẻ từ các đỉnh A, B, C, D; V là thể tích tứ diện ABCD. Dựng $BK \perp CD$ thì:



$$V = \frac{1}{3} h_a \cdot dt(BCD) = \frac{1}{6} h_a \cdot CD \cdot BK \geq \frac{1}{6} h_a \cdot h_c \cdot h_d \quad (1)$$

Tương tự

$$V \geq \frac{1}{6} h_b \cdot h_c \cdot h_d \quad (2)$$

$$V \geq \frac{1}{6} h_c \cdot h_d \cdot h_a \quad (3)$$

$$V \geq \frac{1}{6} h_d \cdot h_a \cdot h_b \quad (4)$$

Từ (1), (2), (3), (4) suy ra $V^4 > \frac{1}{6^4} (h_a h_b h_c h_d)^3$

(các đẳng thức ở (1), (2), (3), (4) không xảy ra đồng thời) hay:

$$V > \frac{1}{6} \sqrt[4]{(h_a h_b h_c h_d)^3} \quad (5)$$

Mặt khác:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} + \frac{1}{h_d} \geq \frac{4}{\sqrt[4]{h_a h_b h_c h_d}} \text{ hay } h_a h_b h_c h_d \geq 4^4 \cdot r^4 \quad (6)$$

Từ (5), (6) suy ra $V > \frac{1}{6} (4r)^3 = \frac{32}{3} r^3$ (đpcm).

Câu V. 1) Tính $I = \int_0^x \frac{t^2 \cdot e^t}{(t+2)^2} dt$. Sử dụng PP

tích phân từng phần, đặt $u = t^2 \cdot e^t, \frac{dt}{(t+2)^2} = dv$

$$\Rightarrow du = t \cdot e^t (t+2) dt; v = -\frac{1}{t+2}$$

Do đó

$$\begin{aligned} I &= uv \Big|_0^x - \int_0^x v \cdot du = -\frac{x^2 \cdot e^x}{x+2} + \int_0^x t \cdot e^t dt \\ &= -\frac{x^2 \cdot e^x}{x+2} + (te^t - e^t) \Big|_0^x \\ &= e^x \left(x - 1 - \frac{x^2}{x+2} \right) + 1. \end{aligned}$$

Từ giả thiết bài ra ta có $e^x \left(x - 1 - \frac{x^2}{x+2} \right) = 0$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x+2) - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

2) Phân tích số 4 thành tổng các số nguyên dương ta được các khả năng $4 = 3 + 1 = 2 + 2 = 2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1$.

Xảy ra 5 khả năng sau:

Khả năng 1. Số tự nhiên có 1 chữ số 4, 2003 chữ số 0. Do chữ số đầu tiên bên trái khác 0 nên nó phải là 4, các chữ số còn lại là chữ số 0. Trong khả năng này có 1 số cần tìm.

Khả năng 2. Số tự nhiên có 1 chữ số 3 và 1 chữ số 1, 2002 chữ số 0.

- Nếu chữ số 3 đứng đầu (bên trái) thì chữ số 1 đứng ở một trong 2003 vị trí còn lại, suy ra có $C_{2003}^1 = 2003$ số thỏa mãn điều kiện trên.

- Tương tự nếu chữ số 1 đứng đầu (bên trái) ta cũng có $C_{2003}^1 = 2003$ số thỏa mãn.

Khả năng 3. Số tự nhiên có 2 chữ số 2 và 2002 chữ số 0 thì chữ số đầu tiên bên trái phải là số 2, chữ số 2 còn lại có thể đứng ở một trong 2003 vị trí còn lại. Vậy có C_{2003}^1 số cần tìm.

Khả năng 4. Số tự nhiên có 1 chữ số 2, 2 chữ số 1 và 2001 chữ số 0.

- Nếu chữ số 2 đứng đầu (bên trái) của số cần tìm, thì hai chữ số 1 có thể đứng ở hai trong 2003 vị trí còn lại. Suy ra có $C_{2003}^2 = 2005003$ số cần tìm.

- Nếu chữ số 1 đứng đầu thì chữ số 2 và chữ số 1 có thể đứng ở hai trong 2003 vị trí còn lại suy ra có $A_{2003}^2 = 4010006$ số thỏa mãn.

Khả năng 5. Số tự nhiên có 4 chữ số 1 và 2000 chữ số 0. Chữ số đầu tiên phải là chữ số 1 nên 3 chữ số 1 còn lại có thể đứng ở ba trong 2003 vị trí. Suy ra có $C_{2003}^3 = 1337337001$ số thỏa mãn.

Theo nguyên lí cộng, suy ra có

$$1 + C_{2003}^1 + C_{2003}^1 + C_{2003}^1 + C_{2003}^2 + A_{2003}^2 + C_{2003}^3 = 1343358020 \text{ số thỏa mãn bài ra.}$$

ĐẶNG VŨ HÀ

ĐỀ TỰ ÔN THI SỐ 3

(Thời gian làm bài : 180 phút)

Câu I. (2,5 điểm).

Cho hàm số

$$y = x^3 - (4m+1)x^2 + (7m+1)x - 3m - 1$$

a) Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số với $m = -1$.

b) Tìm m để hàm số có cực trị đồng thời các giá trị cực đại, cực tiểu của hàm số trái dấu nhau.

c) Tìm m để đồ thị của hàm số tiếp xúc với trục hoành.

Câu II. (2 điểm). a) Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x - y = e^x - e^y \\ \log_2^2 + 3\log_{1/2} y + 2 = 0 \end{cases}$$

b) Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm :

$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 1 \\ x^2 - 3xy + 2y^2 = m \end{cases}$$

Câu III. (2 điểm).

a) Biết rằng tam giác ABC có cả ba góc cùng là nghiệm của phương trình

$$2\sin 2x + \tan x = 2\sqrt{3}.$$

Chứng minh rằng tam giác ABC đều.

b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $Q = \sin^2 A + \sin^2 B + 2\sin^2 C$, trong đó

A, B, C là ba góc của một tam giác bất kì.

Câu IV. (2 điểm).

a) Cho hypebol có phương trình $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$ (H)

Giả sử (d) là một tiếp tuyến thay đổi và F là một tiêu điểm của (H). Kẻ FM vuông góc với (d). Chứng minh rằng điểm M luôn nằm trên một đường tròn cố định.

b) Cho hình chóp $SABC$ có $SA = 2BC$, góc $\widehat{BAC} = 60^\circ$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy ABC . Kẻ AM, AN lần lượt vuông góc với SB, SC .

Tính góc phẳng nhị diện tạo bởi hai mặt phẳng (AMN) và (ABC).

Câu V. (1,5 điểm)

a) Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ vuông góc Oxy cho hình tròn $(x-2)^2 + y^2 \leq 1$. Tính thể tích của khối tròn xoay được tạo thành khi quay hình tròn đó một vòng xung quanh trục Oy .

b) Tính số nghiệm nguyên dương của phương trình : $x + y + z = 100$.

NGUYỄN ANH DŨNG
(Hà Nội)

VỀ MỘT BÀI TOÁN TÍNH TỔNG

TRẦN MẠNH HUNG

(GV CDSP Tp. Hồ Chí Minh)

Đề thi tuyển sinh Đại học năm 2003, môn Toán khối B (câu V) có bài toán :

Cho n là số nguyên dương. Tính tổng :

$$A = C_n^0 + \frac{2^2-1}{2}C_n^1 + \frac{2^3-1}{3}C_n^2 + \dots + \frac{2^{n+1}-1}{n+1}C_n^n$$

Bài này đã được giải như sau (theo đáp án của Bộ GD và ĐT). Trước hết khai triển

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1x + C_n^2x^2 + \dots + C_n^nx^n$$

Sau đó lấy tính phân hai vế trên [1, 2] được

$$\begin{aligned} \frac{1}{n+1}(1+x)^{n+1} &= \left(C_n^0x + C_n^1\frac{x^2}{2} + \dots + C_n^n\frac{x^{n+1}}{n+1} \right) \\ \Rightarrow C_n^0 + C_n^1\left(\frac{2^2-1}{2}\right) + \dots + C_n^n\left(\frac{2^{n+1}-1}{n+1}\right) &= \\ = \frac{3^{n+1}-2^{n+1}}{n+1} \end{aligned}$$

Cách giải này cũng tương tự cách giải câu IVa, đề 86 trong quyển *Bộ đề thi tuyển sinh vào các trường Đại học, Cao đẳng và Trung học chuyên nghiệp* trước đây. Sau đây xin nêu một cách giải khác cho bài toán trên, sử dụng công thức $\left(\frac{n+1}{k+1}\right) \cdot C_n^k = C_{n+1}^{k+1}$ (trong đó n là số nguyên dương, k là số nguyên không âm, $k \leq n$).

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{n+1} \left[(n+1)C_n^0 + (2^2-1)\frac{(n+1)C_n^1}{2} + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + (2^{n+1}-1)\frac{(n+1)C_n^n}{n+1} \right] \\ &= \frac{1}{n+1} \left[(2-1)C_{n+1}^1 + (2^2-1)C_{n+1}^2 + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + (2^{n+1}-1)C_{n+1}^{n+1} \right] \\ &= \frac{1}{n+1} \left[2C_{n+1}^1 + 2^2C_{n+1}^2 + \dots + 2^{n+1}C_{n+1}^{n+1} - \right. \\ &\quad \left. - (C_{n+1}^1 + C_{n+1}^2 + \dots + C_{n+1}^{n+1}) \right] \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{n+1} \left[(2+1)^{n+1} - 1 - (2^{n+1}-1) \right] = \frac{3^{n+1}-2^{n+1}}{n+1}$$

Cách giải này có một số ưu điểm sau :

1) Đây là cách tính trực tiếp chỉ dùng kiến thức cơ bản của giải tích tổ hợp, không phải dùng đến các kiến thức về tích phân.

2) Việc nhân và chia tổng A với $n+1$ do một lẽ tự nhiên là mỗi số hạng trong A có mẫu số là $(k+1)$, biểu thức C_n^k có mẫu số là :

$k! = 1.2 \dots k$ và $(n-k)! = ((n+1)-(k+1))!$ nên khi nhân mỗi số hạng trong tổng A với $n+1$ sẽ xuất hiện biểu thức C_{n+1}^{k+1} . Đây là suy nghĩ thường gặp trong quá trình tìm lời giải bài toán.

3) Đề thi hiện nay có mục tiêu là phân loại học sinh, phát huy tính sáng tạo, không rập khuôn, không theo lối mòn trong khi giải toán. Cách giải trên phần nào đáp ứng được mục tiêu đó. Hơn nữa từ cách giải trên cũng có thể đề ra các bài toán khác, chẳng hạn

1. Tính tổng :

$$(a-1)C_n^0 + \frac{a^2-1}{2}C_n^1 + \frac{a^3-1}{3}C_n^2 + \dots + \frac{a^{n+1}-1}{n+1}C_n^n$$

2. Tính :

$$\begin{aligned} (a-b)C_n^0 + \frac{a^2-b^2}{2}C_n^1 + \frac{a^3-b^3}{3}C_n^2 + \dots \\ + \frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{n+1}C_n^n \end{aligned}$$

GIẢI BÀI KÌ TRƯỚC (Tiếp trang 24)

Phương trình này có 2 nghiệm : $\Delta d = 1\text{cm}$ và $\Delta d = 13\text{cm}$ (nghiệm này bị loại, vì theo (3) thì $\Delta d < e = 2\text{cm}$). Thay $\Delta d = 1\text{cm}$ và $e = 2\text{cm}$ vào (3) tìm được $n = 2$.

Nhận xét. Các bạn có lời giải gọn và đúng :

Đồng Nai : Hoàng Văn Hùng, 12 Lí, THPT chuyên Lương Thế Vinh, Biên Hòa ; **Bắc Ninh :** Lê Minh Huy, Võ Văn Hiệp, 12 Lí, THPT ch. Bắc Ninh ; **Bắc Giang :** Dương Trung Hiếu, 11B, THPT NK Ngô Sĩ Liên ; **Đà Nẵng :** Nguyễn Thị Mỹ Hạnh, 11A2, THPT ch. Lê Quý Đôn ; **Phú Thọ :** Vũ Đình Quang, 11BCL, THPT ch. Hùng Vương, Việt Trì ; **Vĩnh Phúc :** Phạm Quang Chiến, 12A1, Trần Đức Phú, 12A3, THPT ch. Vĩnh Phúc ; **Quảng Bình :** Hoàng Tiến Hưng, 12T, THPT ch. Quảng Bình ; **Đà Lạt :** Nguyễn Chí Linh, 11A, THPT Phan Bội Châu, Krông Năng ; **Quảng Ngãi :** Nguyễn Tuấn Duy, 11 Lí, THPT ch. Lê Khiết ; **Hưng Yên :** Nguyễn Hoàng Huy, 11 Lí, THPT ch. Hưng Yên ; **Bình Định :** Đặng Nguyễn Châu, 11 Lí, THPT chuyên Lê Quý Đôn ; **Nghe An :** Nguyễn Bá Hùng, A3K31, Thái Bá Sơn, K30A3, THPT Phan Bội Châu, Vinh.

MAI ANH



ƯỚC LƯỢNG và SAI SỐ

VŨ KIM THỦY

Trong kĩ thuật cũng như trong đời sống hàng ngày ta thường phải đo hoặc tính độ dài, diện tích, thể tích của nhiều hình, nhiều vật. Tùy dụng cụ đo, yêu cầu của công việc, cách đọc kết quả hay do cách làm tròn mà ta có các kết quả khác nhau. Tuy nhiên, người ta vẫn công nhận có một giá trị thực của mỗi vật. Ví dụ kích thước của một tờ tạp chí là $19 \times 27\text{cm}$, một viên gạch lát nền là $30 \times 30\text{cm}$.

Còn sai số chính là hiệu giữa giá trị thực và giá trị đo được hoặc ngược lại (Sai số luôn là số dương).

Phần trăm của sai số (so với giá trị thực) được tính bằng : $\frac{\text{sai số}}{\text{giá trị thực}} \times 100\%$.

1) Ước lượng diện tích của hình bao bởi một đồ thị đơn giản.

Có hai phương pháp chính dùng để ước lượng.

α) Phương pháp đếm số hình vuông

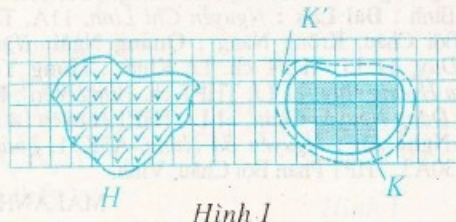
• Cách 1.

i) Đặt hình cần ước lượng diện tích vào lưới hình vuông.

ii) Đếm số hình vuông đơn vị nguyên vẹn bên trong đường biên. (Diện tích của mỗi hình vuông đã biết)

iii) Cộng với số hình lớn hơn một nửa hình vuông nằm trong đường biên, từ đó suy ra kết quả.

Ví dụ : Diện tích của hình H (h.1) bằng 24 diện tích hình vuông.



Hình 1

• Cách 2.

i) Đếm số hình vuông nguyên vẹn trong đường biên (chẳng hạn hình K, đường liền)

ii) Đếm số hình vuông nguyên vẹn trong hình K' (đường chấm chấm, gồm cả các ô có đỉnh đến hình, không nằm trọn vẹn trong K).

iii) Tính trung bình cộng diện tích của hai kết quả trên.

Đĩ nhiên số hình vuông phải phù hợp, không quá ít, quá nhiều.

β) Phương pháp tính tổng các hình thang

Chia diện tích cần tính dưới đường cong $y = f(x)$ thành n hình kiểu hình thang cùng chiều cao là h (h.2)

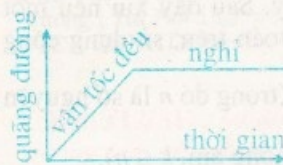
Để tính diện tích hình OABC ta tính tổng diện tích các hình thang :

$$= \frac{1}{2} h [(y_0 + y_n) + 2(y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1})]$$

$$= \frac{1}{2} (\text{chiều cao chung}) [(\text{tổng của hai tung độ đầu mút}) + 2(\text{tổng của các tung độ còn lại})].$$

Còn nhiều bài tập có sự liên quan đến các đồ thị và ước lượng.

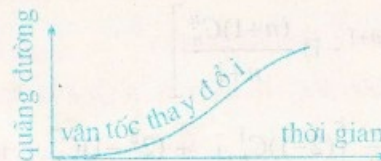
2) Đồ thị Quỹ đạo – Thời gian



Hình 3a

i) Hệ số góc của đồ thị quỹ đạo – thời gian là vận tốc chuyển động của vật thể.

ii) Đường thẳng biểu thị chuyển động với vận tốc đều (h. 3a)



Hình 3b

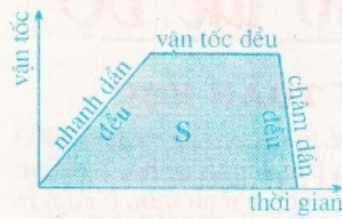
iii) Đường cong biểu thị chuyển động có vận tốc thay đổi (h.3b).

iv) Đường thẳng song song với trục thời gian biểu thị trạng thái nghỉ của vật (h. 3a).

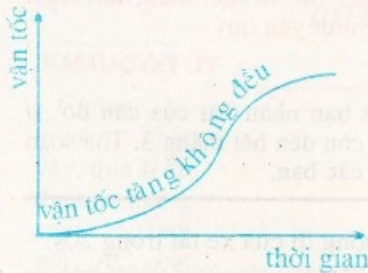
v) Vận tốc trung bình = $\frac{\text{Tổng quãng đường}}{\text{Thời gian}}$

3) Đồ thị Vận tốc – Thời gian

Khác với bài toán trên, đồ thị này có trục tung biểu thị vận tốc.



Hình 4a



Hình 4b

i) Hệ số góc của đồ thị vận tốc – thời gian là gia tốc của chuyển động của vật thể.

ii) Đường thẳng biểu diễn chuyển động có gia tốc đều (h. 4a).

iii) Đường cong biểu thị chuyển động có gia tốc thay đổi (h. 4b).

iv) Đường thẳng song song với trục thời gian biểu thị chuyển động có vận tốc đều (h. 4a).

v) Diện tích nằm dưới đồ thị và được giới hạn bởi trục hoành biểu diễn tổng quãng đường đã đi trong thời gian đã cho (S trong h. 4a).

4. Các bài tập áp dụng

Bài 1. Hình vẽ biểu thị một miếng bìa hình chữ nhật dài 17cm rộng 8cm. Cắt từ 4 góc của hình chữ nhật hình vuông cạnh x để gấp tấm bìa còn lại thành hình hộp chữ nhật không có nắp.

i) Chứng tỏ rằng thể tích của hình hộp là

$$V = 2x(17 - 2x)(4 - x)\text{cm}^3$$

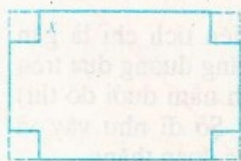
ii) Sử dụng 4cm để biểu diễn 1 đơn vị trên trục hoành và 2cm để biểu diễn 20 cm đơn vị trên trục tung.

Hãy vẽ đồ thị của hàm $y = 2x(17 - 2x)(4 - x)$ với x trong khoảng $0 \leq x \leq 4$.

iii) Sử dụng đồ thị để ước lượng thể tích của hộp có chiều cao 2,3cm.

iv) Sử dụng đồ thị để ước lượng thể tích lớn nhất có thể của hộp.

v) Sử dụng đồ thị để ước lượng thể tích của hộp có chiều dài 15,2cm.



Hình 5

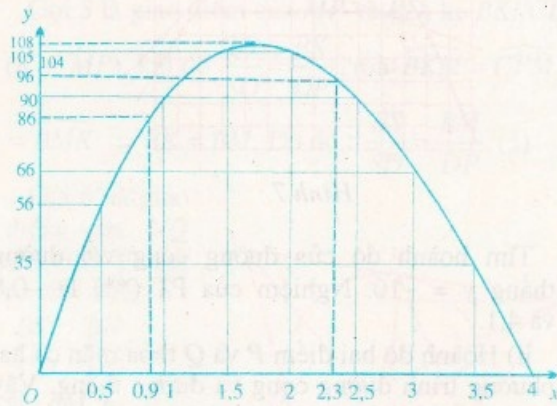
Hướng dẫn giải.

i) Bạn đọc tự làm

ii)

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
y	0	56	90	105	104	90	66	35	0

Câu này chú ý chỉ vẽ ứng với x từ 0 đến 4. Xem hình 6. (Do khuôn khổ tờ báo, hình vẽ đã thu nhỏ lại. Khi làm bài bạn cần vẽ đúng tỉ lệ đề yêu cầu).



Hình 6

iii) Từ đồ thị ta có $V = 96\text{cm}^3$ khi $x = 2,3$.

iv) Từ đồ thị ta ước lượng thể tích hộp lớn nhất có thể là 108cm^3 .

v) Chiều dài hộp là 15,2 thì chiều rộng hình vuông là $x = \frac{17 - 15,2}{2} = 0,9$.

Từ đồ thị thể tích hộp ứng với chiều dài 15,2 là 86cm^3 . Bạn thử kiểm tra sai số của việc ước lượng trong trường hợp này (so với kết quả mà bạn tính đúng bằng phương pháp khác).

Bài 2. Hình 7 biểu diễn đồ thị của $y = 3 + 13x - 4x^2$ và $y = 4x - 9$ ứng với $-2 \leq x \leq 5$. Giao điểm của chúng là P và Q .

i) Ước lượng nghiệm của hai phương trình sau đúng đến một chữ số thập phân.

$$3 + 13x - 4x^2 = 0 \quad (*)$$

$$3 + 13x - 4x^2 = -10 \quad (**)$$

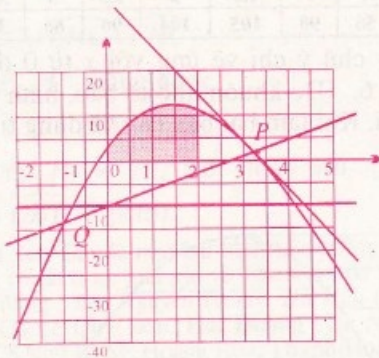
ii) Viết phương trình ẩn x mà hoành độ các điểm P và Q là nghiệm của nó.

iii) Tìm hệ số góc của đồ thị $y = 3 + 13x - 4x^2$ tại điểm P bằng cách vẽ tiếp tuyến với đồ thị.

iv) Ước lượng diện tích giữa đồ thị $y = 3 + 13x - 4x^2$ và trục hoành, các đường thẳng $x = 0$ và $x = 2$.

Hướng dẫn giải.

i) Tìm giao điểm của đường cong với trục hoành. Nghiệm của PT (*) là 3,5 và -0,2.



Hình 7

Tìm hoành độ của đường cong với đường thẳng $y = -10$. Nghiệm của PT (**) là -0,8 và 4,1.

ii) Hoành độ hai điểm P và Q thỏa mãn cả hai phương trình đường cong và đường thẳng. Vậy phương trình cần viết là $3 + 13x - 4x^2 = 4x - 9$ hay $4x^2 - 9x - 12 = 0$.

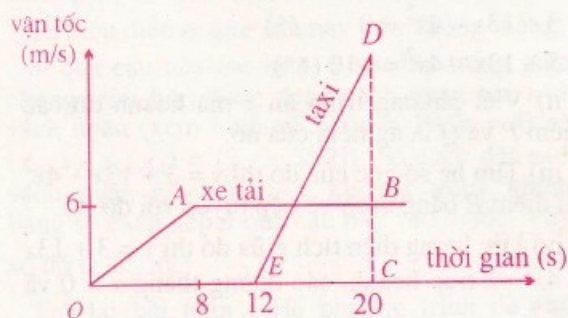
iii) Kẻ tiếp tuyến qua P , cắt trục tung tại khoảng giá trị 47, cắt trục hoành tại điểm 3,6. Góc tạo với chiều dương trục hoành là góc tù nên hệ số góc có dấu âm. Kết quả -13 là hệ số góc cần tìm.

iv) Phần nằm giữa đồ thị $y = 3 + 13x - 4x^2$ và trục hoành, đường $x = 0$ và $x = 2$ khoảng 8 hình vuông.

Diện tích hình vuông là $5 \times 0,5 = 2,5$. Nên diện tích phải tìm là 20 đơn vị diện tích.

Bài 3. Một xe tải nhỏ từ trạng thái nghỉ chuyển động nhanh dần đều sau 8s thì đạt đến vận tốc 6m/s. Sau đó nó chuyển động với vận tốc đều.

i) Tìm gia tốc của xe tải trong 8s đầu tiên.



Hình 8



VỀ CÂY TOÁN HỌC

Cây toán học bắt rễ từ cuộc sống đã hơn 5000 năm. Nó có hai cành ban đầu là Số học và Hình học. Từ đó đẻ ra các cành nhánh mới. Người ta cho rằng một nhà toán học am hiểu nhất cũng chỉ nắm được 5% các vấn đề của toán học đương đại. Nào mời các họa sĩ hãy vẽ cây toán học. Cây nhiều cành tức là bạn càng am hiểu nhiều về môn học mình yêu quý.

VŨ ĐÔ QUAN

Nhấn bản : Thời hạn nhận bài của câu đố Ai biết nhiều hơn vẫn còn đến hết tháng 3. Tòa soạn chờ các bài viết của các bạn.

ii) Tìm quãng đường đi của xe tải trong 20s.

iii) Một xe taxi bắt đầu từ cùng vị trí của xe tải, nhưng xuất phát sau 12s và chạy nhanh dần đều cho đến khi đuổi kịp xe tải.

Biết rằng khi taxi đuổi kịp thì xe tải đã đi được 20s. Tính vận tốc xe taxi tại thời điểm đó.

Hướng dẫn giải.

i) Gia tốc của xe tải trong 8s đầu là

$$\frac{6}{8} = 0,75 \left(\frac{m}{s^2} \right)$$

ii) Quãng đường xe tải đi trong 20s bằng số chỉ diện tích hình thang

$$OABC = \frac{[(20-8)+20] \times 6}{2} = 96(m)$$

iii) Khi xe taxi đuổi kịp xe tải thì diện tích hình thang $OABC$ bằng diện tích tam giác DEC (vì hai quãng đường bằng nhau). Quãng đường (diện tích) xe taxi đi được là 96m, thời gian đi là $20 - 12 = 8s$. Vậy vận tốc taxi lúc đó là :

$$DC = \frac{96 \times 2}{8} = 24 \left(\frac{m}{s} \right) \text{ (tính chiều cao của}$$

hình tam giác)

Khác với ví dụ ở bài 2, diện tích chỉ là gần đúng, ở bài này, việc tính quãng đường dựa trên đồ thị (mà cụ thể là diện tích nằm dưới đồ thị) cho một kết quả chính xác. Sở dĩ như vậy vì hình trong bài này bao bởi các đoạn thẳng.



PHƯƠNG TRÌNH CẮT TUYẾN CỦA ĐƯỜNG CONG

(Tiếp theo số báo 320 tháng 2-2004)

PHẠM QUỐC PHONG
(GV THPT Hồng Lĩnh, Hà Tĩnh)

Ví dụ 3. Cho họ đường cong $(\mathcal{C}_m)$ với m là tham số :

$$y = 5mx^2 - m(x + 13) + \frac{13x - 25}{x^2 - x + 1} \quad (1)$$

Tìm PT đường thẳng luôn cắt họ $(\mathcal{C}_m)$ tại hai điểm cố định.

Lời giải. Tập xác định là R vì $x^2 - x + 1 > 0$ với mọi $x \in R$.

Viết lại (1) dưới dạng

$$y = m(5x^2 - x - 13) + \frac{13x - 25}{x^2 - x + 1}$$

Tọa độ các điểm cố định là nghiệm của hệ PT

$$(*) \begin{cases} y = \frac{13x - 25}{x^2 - x + 1} & (2) \\ 5x^2 - x - 13 = 0 & (3) \end{cases}$$

PT hoành độ (3) có hai nghiệm phân biệt (do $\Delta < 0$) nên họ $(\mathcal{C}_m)$ có 2 điểm cố định.

PT hệ quả của hệ PT (*) là

$$y = \frac{13x - 25}{x^2 - x + 1} + \frac{P(x)(5x^2 - x - 13)}{x^2 - x + 1}$$

$$\text{hay } y = \frac{13x - 25 + P(x)(5x^2 - x - 13)}{x^2 - x + 1}$$

Để vế phải của y có dạng nhị thức bậc nhất ta đặt $P(x) = ax + b$ rồi chia tử thức cho mẫu thức được :

$$5ax^3 + (-a + 5b)x^2 + (-13a - b + 13)x - 13b - 25 = (x^2 - x + 1)(5ax + 4a + 5b) + (-14a + 4b + 13)x - 4a - 18b - 25$$

Cho đa thức dư bằng 0, nghĩa là giải hệ PT

$$\begin{cases} -14a + 4b + 13 = 0 \\ -4a - 18b - 25 = 0 \end{cases}$$

được $a = 1/2, b = -3/2$, thay vào đa thức thương

$$\text{được } y = \frac{5}{x} - \frac{11}{2}, \text{ đó là PT đường thẳng cắt họ}$$

$(\mathcal{C}_m)$ tại hai điểm cố định.

$$\text{Ví dụ 4. Cho hàm số } f(x) = \frac{x^2 + x + m}{x^2 - 1}$$

Viết PT đường thẳng nối các điểm cực đại, cực tiểu của nó.

Lời giải. Hàm số xác định với mọi $x \neq \pm 1$.

$$f'(x) = \frac{-x^2 - 2(m+1)x - 1}{(x^2 - 1)^2}$$

$$\text{Đặt } h(x) = x^2 + 2(m+1)x + 1.$$

Hàm số có cực đại, cực tiểu $\Leftrightarrow$ PT $f'(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác ± 1 .

$\Leftrightarrow h(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác ± 1 .

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_h > 0 \\ h(\pm 1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \neq m < 0 \\ m > 2 \end{cases} \quad (1)$$

Tọa độ hai điểm cực trị là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} y = f(x) \\ f'(x) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ h(x) = 0 \end{cases} \quad (*)$$

PT hệ quả

$y = f(x) + Q(x)h(x)$ của hệ PT (*) có dạng

$$y = \frac{x^2 + x + m + (ax + b)(x^2 + 2(m+1)x + 1)}{x^2 - 1}$$

Cần chọn a, b để tử thức chia hết cho mẫu thức. Ta có

$$ax^3 + (2a + 2am + b + 1)x^2 + (a + 2bm + b + 1)x + b + m = (x^2 - 1)(ax + 2a + 2am + b + 1) + (2a + 2bm + 2b + 1)x + 2a + 2am + 2b + m + 1.$$

Cho đa thức dư bằng 0, nghĩa là giải hệ PT

$$\begin{cases} 2a + 2bm + 2b + 1 = 0 \\ 2a + 2am + 2b + m + 1 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

ta được $2a = 2b - 1$ thay vào (2) được $b(m+2) = 0$. Vì $m+2 \neq 0$ theo (1) nên $b = 0 \Rightarrow a = -1/2$,

thay vào đa thức dư được $y = -\frac{1}{2}x - m$, đó là PT

đường thẳng nối điểm cực đại và điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đã cho.

Cát số và cát tuyến của Hypebol

Bài toán : Tìm PT đường thẳng (T) cắt hypebol (H) : $y = \frac{ax^2+bx+c}{px+q}$ tại hai điểm có hoành độ thỏa mãn PT $a'x^2 + b'x + c' = 0$, trong đó a, a' đều khác 0.

Lời giải. Đặt $f(x) = ax^2 + bx + c$;

$g(x) = a'x^2 + b'x + c'$ thì $\Delta g > 0$ theo giả thiết.

Cũng giả sử rằng $f(-q/p) \neq 0$ và $g(-q/p) \neq 0$ vì hypebol (H) không xác định tại $x = -q/p$.

Tọa độ giao điểm của (T) và (H) là nghiệm

$$\text{của hệ } \begin{cases} y = \frac{f(x)}{px+q} \\ g(x) = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Tọa độ giao điểm là nghiệm của PT hệ quả :

$$\frac{f(x) - \theta g(x)}{px+q}$$

Nếu chọn $\theta = \frac{f(-q/p)}{g(-q/p)} = \frac{aq^2 - bpq + cp^2}{a'q^2 - b'pq + c'p^2}$ thì sau khi biến đổi (dành cho bạn đọc) $f(x) - \theta g(x)$ chia hết cho $px + q$, do đó $y = \frac{f(x) - \theta g(x)}{px+q}$ chính là phương trình đường thẳng cần tìm.

Ta gọi số $\theta = \frac{f(-q/p)}{g(-q/p)}$ là **cát số** của hypebol (H) tại $g(x) = 0$.

Ví dụ 5. Viết phương trình đường thẳng đi qua các điểm cực đại, cực tiểu của hàm số

$$y = \frac{x^2 + mx - 8}{x - m}$$

Lời giải. Hàm số xác định với mọi $x \neq m$.

$$\text{Có } y' = \frac{x^2 - 2mx - m^2 + 8}{(x-m)^2}$$

Điều kiện để có cực trị : $y = 0$ có 2 nghiệm phân biệt khác $m \Leftrightarrow \Delta m > 2$.

Tọa độ các điểm cực trị là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} y = \frac{x^2 + mx - 8}{x - m} \\ x^2 - 2mx - m^2 + 8 = 0 \end{cases} \quad (*)$$

$$\text{Đặt } f(x) = x^2 + mx - 8 \text{ và } g(x) = x^2 - 2mx - m^2 + 8$$

Tính được cát số $\theta = \frac{f(m)}{g(m)} = -1$. Tọa độ các

điểm cực trị là nghiệm của PT hệ quả của hệ (*):

$$y = \frac{(x^2 + mx - 8) + 1 \cdot (x^2 - 2mx - m^2 + 8)}{x - m}$$

$$\Leftrightarrow y = 2x + m.$$

Đây là PT đường thẳng cần tìm.

Chú ý. Trong trường hợp cát tuyến là đường thẳng qua các điểm cực trị, ta còn có công thức

$$y = \frac{u'}{u}.$$

Bạn cần nhớ rằng khi sử dụng công thức này phải trình bày chứng minh. Chỉ nên dùng nó để kiểm tra kết quả thì tốt hơn.

Ví dụ 6. Cho hypebol (H) :

$$y = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$$

Gọi (d) là đường thẳng đi qua 2 điểm phân biệt A và B thuộc (H) mà tại đó tiếp tuyến của (H) song song với nhau.

1) Chứng tỏ cát số θ của (H) không phụ thuộc vào vị trí tiếp điểm A và B.

2) Viết phương trình đường thẳng (d).

3) Viết phương trình đường thẳng nối các điểm cực đại, cực tiểu của (H).

Lời giải.

Hàm số xác định với mọi $x \neq -1$.

$$\text{Có } y' = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}; y' = k \Leftrightarrow \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} = k.$$

$$\Rightarrow (1-k)x^2 + 2(1-k)x - k = 0$$

1) Gọi k là hệ số góc của tiếp tuyến tại A, B. Từ giả thiết suy ra tọa độ A, B là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} y = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1} \\ y' = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1} \\ x^2 + 2x + (x+1)^2 = 0 \end{cases} \quad (1) \quad (2)$$

$$\text{Đặt } f(x) = x^2 + 2x + 2;$$

$$g(x) = (1-k)x^2 + 2(1-k)x - k$$

Hai điểm A, B tồn tại $\Leftrightarrow$ PT (2) có 2 nghiệm phân biệt khác -1.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta g > 0 \\ g(-1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow k < 1.$$

Thấy rằng $\theta = \frac{f(-1)}{g(-1)} = -1$ (const) (dpcm).

$$2) y = \frac{(x^2 + 2x + 2) + 1[(1-k)x^2 + 2(1-k)x - k]}{x+1}$$

$$\Rightarrow y = (2-k)(x+1) \quad (3)$$

Vậy (3) là PT đường thẳng cần tìm.

3) Khi $k = 0$ có $y' = 0 \Rightarrow A, B$ trở thành điểm cực đại, cực tiểu của ($\mathcal{H}$) và PT (3) có dạng $y = 2(x+1)$. Đó chính là PT đường thẳng đi qua các điểm cực đại, cực tiểu của hypebol ($\mathcal{H}$).

Chú ý. Ta có công thức $y = \frac{f(x) - \theta \cdot g(x)}{px+q}$ để

viết phương trình cát tuyến của hypebol. Chỉ cần tính cát số là có ngay **phương trình cát tuyến** cần tìm. Nói riêng PT đường thẳng nối các điểm cực đại, cực tiểu của đường hypebol là trường hợp đặc biệt của PT cát tuyến khi trong hệ đặc trưng PT $g(x) = 0 \Leftrightarrow y' = 0$. Hi vọng công thức trên giúp bạn bớt đi các phép toán không cần thiết, trình bày ngắn gọn lời giải bài toán.

BÀI TẬP ĐỀ NGHỊ

Bài 1. Chứng minh các hàm số sau có 3 điểm uốn thẳng hàng

$$1) y = \frac{2x+1}{x^2+x+1} \quad 2) y = \frac{x+1}{x^2+1}$$

Bài 2. Viết PT đường thẳng qua các điểm cố định của họ đường cong

$$(\mathcal{C}_m) : y = x^3 + mx^2 - 9x - 9m.$$

Bài 3. Gọi A, B là các tiếp điểm kẻ từ

$$M(3; -3) \text{ tới elip } (\mathcal{E}) : \frac{x^2}{14} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

1) Tính độ dài đường cao kẻ từ M của $\triangle ABC$.

2) Viết PT đường tròn tâm O tiếp xúc với đường thẳng AB .

Bài 4. Cho đường cong

$$(\mathcal{C}) : y = \frac{x-15}{9(x^3+x^2+1)}$$

Viết PT đường thẳng cắt ($\mathcal{C}$) tại các điểm có hoành độ thỏa mãn PT $x^2 - x - 7 = 0$.

Bài 5. Giả sử đồ thị hàm số $y = \frac{x+m}{x^2+1}$ có ba điểm uốn.

Viết PT các đường thẳng nối các điểm uốn ấy.

PROBLEMS IN THIS ISSUE

(Tiếp trang 15)

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/321. (for 6th grade)

Write the number 2003^{2004} as a sum of positive integers. What is the remainder of the division by 3 of the sum of the cubes of these integers?

T2/321. (for 7th grade). Simplify the expression

$$\frac{(a-2)(a-1002)}{a(a-b)(a-c)} + \frac{(b-2)(b-1002)}{b(b-a)(b-c)} + \frac{(c-2)(c-1002)}{c(c-a)(c-b)}$$

where a, b, c are distinct numbers, $abc \neq 0$.

T3/321. Prove that

$$1) \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq \frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}$$

$$2) \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{d^2} + \frac{d^2}{a^2} \geq \frac{a+b+c+d}{\sqrt[4]{abcd}}$$

where a, b, c, d are positive numbers.

T4/321. Find a necessary and sufficient condition on the number m so that the following system of equations has a unique solution :

$$\begin{cases} x^2 = (2+m)y^3 - 3y^2 + my \\ y^2 = (2+m)z^3 - 3z^2 + mz \\ z^2 = (2+m)x^3 - 3x^2 + mx \end{cases}$$

T5/321. Let $ABCD$ be a trapezoid inscribed in a circle with radius $R = 3\text{cm}$ such that $BC = 2\text{cm}$, $AD = 4\text{cm}$. Let M be the point on side AB such that $MB = 3MA$. Let N be the midpoint of CD . The line MN cuts AC at P . Calculate the area of the quadrilateral $APND$.

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/321. Let be given three positive integers m, n, p such that $n+1$ is divisible by m . Find a formula to calculate the number of p -uples of positive integers $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ satisfying the conditions : the sum $x_1 + x_2 + \dots + x_p$ is divisible by m and $x_1, x_2, \dots, x_p$ are not greater than n .

T7/321. a, b are arbitrary positive numbers such that the equation $x^3 - ax^2 + bx - a = 0$ has three roots greater than 1. Determine a, b so that the

expression $\frac{b^n - 3^n}{a^n}$ attains its least value and find this value.

T8/321. The incircle of triangle ABC touches the sides BC, CA, AB respectively at D, E, F .

Prove that $\frac{DE}{\sqrt{BC \cdot CA}} + \frac{EF}{\sqrt{CA \cdot AB}} + \frac{FD}{\sqrt{AB \cdot BC}} \leq \frac{3}{2}$



CÁC LỚP TRUNG HỌC CƠ SỞ

Bài T1/321. (Lớp 6). Viết số 2003^{2004} thành tổng các số nguyên dương. Đem tổng các lập phương tất cả các số hạng đó chia cho 3 thì được dư là bao nhiêu?

NGUYỄN ĐỨC THUY
(SV K28B Toán Tin ĐHSP Hà Nội 2, Vĩnh Phúc)

Bài T2/321. (Lớp 7). Đơn giản biểu thức

$$\frac{(a-2)(a-1002)}{a(a-b)(a-c)} + \frac{(b-2)(b-1002)}{b(b-a)(b-c)} + \frac{(c-2)(c-1002)}{c(c-a)(c-b)}$$
 trong đó các số a, b, c đều khác nhau và khác 0.

ĐÀM VĂN NHÌ
(GV khoa Toán, ĐHSP Hà Nội)

Bài T3/321. Chứng minh rằng

$$1) \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq \frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}$$

$$2) \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{d^2} + \frac{d^2}{a^2} \geq \frac{a+b+c+d}{\sqrt[4]{abcd}}$$

trong đó a, b, c, d là các số dương.

LÊ THANH HÀ
(SV K44 khai thác ĐH Mở - Địa chất, Quảng Ninh)

Bài T4/321. Tìm điều kiện cần và đủ của m để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} x^2 = (2+m)y^3 - 3y^2 + my \\ y^2 = (2+m)z^3 - 3z^2 + mz \\ z^2 = (2+m)x^3 - 3x^2 + mx \end{cases}$$

PHẠM HOÀNG HÀ
(SV K49 khoa Toán - Tin, ĐHSP Hà Nội)

Bài T5/321. Cho hình thang $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn bán kính $R = 3\text{cm}$ với $BC = 2\text{cm}$ và $AD = 4\text{cm}$. Lấy điểm M trên cạnh AB sao cho $MB = 3MA$. Gọi N là trung điểm của cạnh CD . Đường thẳng MN cắt AC tại điểm P . Tính diện tích tứ giác $APND$.

NGUYỄN ĐỂ
(Hải Phòng)

CÁC LỚP TRUNG HỌC PHỔ THÔNG

Bài T6/321. Cho ba số nguyên dương m, n, p sao cho $n+1$ chia hết cho m . Hãy tìm công thức tính số các bộ $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ gồm p số nguyên dương sao cho tổng $x_1 + x_2 + \dots + x_p$ chia hết cho m , trong đó mỗi số $x_1, x_2, \dots, x_p$ đều không lớn hơn n .

TRẦN VIỆT ANH
(SV K51 CLC khoa Toán Tin, ĐHSP Hà Nội)

Bài T7/321. Giả sử với hai số dương a, b thì phương trình $x^3 - ax^2 + bx - a = 0$ có ba nghiệm lớn hơn 1. Xác định giá trị a, b để biểu thức $\frac{b^n - 3^n}{a^n}$ đạt giá trị nhỏ nhất và tìm giá trị đó.

TRIỆU VĂN HẢI
(SV A3 K46 khoa Toán Tin, ĐHKHTN Hà Nội)

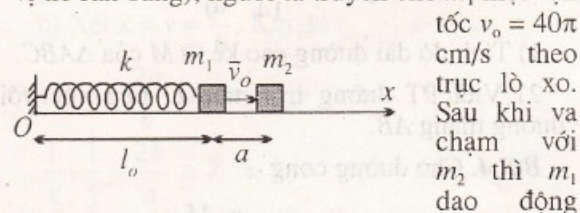
Bài T8/321. Đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB tương ứng tại D, E, F . Chứng minh rằng:

$$\frac{DE}{\sqrt{BC \cdot CA}} + \frac{EF}{\sqrt{CA \cdot AB}} + \frac{FD}{\sqrt{AB \cdot BC}} \leq \frac{3}{2}$$

ĐỖ MẠNH HÀ
(GV THCS Yên Bình, Vĩnh Tường, Vĩnh Phúc)

CÁC ĐỀ VẬT LÝ

Bài L1/321. Một khúc gỗ nhỏ khối lượng $m_1 = 100\text{g}$ gắn vào một lò xo không khối lượng, có chiều dài tự nhiên $l_0 = 40\text{cm}$, độ cứng $k = 100\text{N/m}$, một đầu lò xo gắn vào tường. Vật nhỏ khác khối lượng $m_2 = 400\text{g}$ đặt trên cùng một mặt phẳng nằm ngang với m_1 dọc theo trục lò xo và cách m_1 một đoạn $a = 2\text{cm}$. Hai vật có thể chuyển động không ma sát trên mặt phẳng nằm ngang. Tại thời điểm $t = 0$ (lúc m_1 đang ở vị trí cân bằng), người ta truyền cho m_1 một vận



tốc $v_0 = 40\pi$ cm/s theo trục lò xo. Sau khi va chạm với m_2 thì m_1 dao động

điều hòa với biên độ $A = \sqrt{7}$ cm. Chọn trục tọa độ Ox như hình vẽ. Hãy viết phương trình chuyển động của các vật. Lấy $\pi^2 = 10$.

NGUYỄN MINH TUẤN
(GV THPT Yên Thành II, Nghệ An)

Bài L2/321. Hệ thấu kính đồng trục O_1, O_2 có thấu kính phân kì O_1 và thấu kính hội tụ O_2 với $f_2 = 6\text{cm}$. Trước O_1 , trên trục chính của hệ có một điểm sáng S cách O_1 một đoạn 10cm . Sau O_2 đặt

CUỘC THI GIẢI TOÁN KỶ NIỆM 40 NĂM TẠP CHÍ THPT

Cuộc thi giải toán đặc biệt kỷ niệm 40 năm Tạp chí THPT sẽ đăng đề thi từ số báo 321 (3.2004) đến số 325 (7.2004). Các bạn THCS có thể giải bài THPT. Thời hạn nhận bài là 2 tháng tính từ cuối tháng của số báo có đăng đề. Mỗi bài giải viết trên một tờ giấy riêng và ghi rõ họ tên, trường lớp (có thể chung phong bì). Ngoài phong bì ghi:

Bài dự thi giải toán 40 năm THPT, có dán tem. Bài giải sẽ đăng lần lượt trên các báo từ số 325 (7.2004) đến 329 (11.2004). Kết quả cuộc thi được công bố trên số 330 (12.2004) và trao giải vào Lễ kỷ niệm 40 năm THPT. Có giải thưởng tập thể dành cho trường có nhiều học sinh tham gia. Rất mong đồng đạo bạn đọc tham gia cuộc thi này.

THPT

CÁC LỚP THCS

Bài T1/THCS. Viết 2004 số tự nhiên từ 1 đến 2004 theo một thứ tự nào đó được dãy số $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_{2003}, a_{2004}$. Tìm giá trị lớn nhất của tổng $P = \sqrt{a_1 + a_2} + \sqrt{a_3 + a_4} + \dots + \sqrt{a_{2003} + a_{2004}}$ khi thay đổi thứ tự của dãy số.

NGUYỄN ANH DŨNG
(Hà Nội)

Bài T2/THCS. Cho tứ giác lồi ABCD với $AC = BD$ và AC vuông góc với BD . Về phía ngoài tứ giác dựng các tam giác đều ABX, BCY, CDZ, DAT . Chứng minh rằng $XZ = YT$ và XZ vuông góc với YT .

NGUYỄN MINH HÀ
(GV PTCTT ĐHSPT Hà Nội)

CÁC LỚP THPT

Bài T1/THPT. Dãy số (a_n) ($n = 1, 2, 3, \dots$) được xác định bởi $a_1 = \frac{1}{2^{1965}}, a_n = \frac{-1}{2^{1964+n}}$ với $n = 2, 3, \dots, 40$.

Chứng minh rằng với mọi số thực $b_1, b_2, \dots, b_{40}$ thì bất đẳng thức sau đúng

$$\sum_{i,j=1}^{40} a_i a_j |b_i - b_j| \leq 0$$

NGUYỄN MINH ĐỨC
(Viện Công nghệ Thông tin)

Bài T2/THPT. Tìm tất cả các hàm $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ thỏa mãn điều kiện $f\left(\frac{f(x)}{y}\right) = y \cdot f(y) \cdot f(f(x))$ với mọi số thực dương x, y .

NGUYỄN TRỌNG TUẤN
(GV THPT Hùng Vương, Pleiku, Gia Lai)

CONTEST ON THE 40th ANNIVERSARY OF THE JOURNAL

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/THCS. Write 2004 natural numbers from 1 to 2004 in an arbitrary order to get a sequence $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_{2003}, a_{2004}$ and calculate the sum $P = \sqrt{a_1 + a_2} + \sqrt{a_3 + a_4} + \dots + \sqrt{a_{2003} + a_{2004}}$

Find the greatest value of P for all these sequences.

T2/THCS. Let ABCD be a convex quadrilateral such that $AC = BD$ and AC is perpendicular to BD . Construct at the outside of the quadrilateral the equilateral triangles ABX, BCY, CDZ, DAT . Prove that $XZ = YT$ and XZ is perpendicular to YT .

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T1/THPT. The sequence of numbers (a_n) ($n = 1, 2, 3, \dots$) is defined by $a_1 = \frac{1}{2^{1965}}, a_n = \frac{-1}{2^{1964+n}}$ for $n = 2, 3, \dots, 40$.

Prove that $\sum_{i,j=1}^{40} a_i a_j |b_i - b_j| \leq 0$ for arbitrary given real numbers $b_1, b_2, \dots, b_{40}$.

T2/THPT. Find all function $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ satisfying the condition $f\left(\frac{f(x)}{y}\right) = y \cdot f(y) \cdot f(f(x))$ for all positive numbers x, y .

màn E vuông góc trục chính cách O_1 một đoạn 15cm. Giữ S, O_1 , màn E cố định, di chuyển O_2 dọc theo trục chính người ta thấy ở hai vị trí của nó cách nhau một đoạn $l = 6$ cm thì vệt sáng trên màn đều có đường kính bằng

1/3 đường kính rìa của O_2 (nếu dịch màn ra xa kích thước vệt sáng giảm).

Hãy tính tiêu cự f_1 của thấu kính O_1 ?

NGUYỄN VĂN HẠNH
(GV THPT Phan Bội Châu, Vinh, Nghệ An)
(Xem tiếp trang 13)



Bài T1/317. (Lớp 6). Tính các tổng sau :

1) $A = 1.2 + 2.3 + \dots + n(n+1) + \dots + 98.99$

2) $B = 1.99 + 2.98 + \dots + n(100-n) + \dots + 98.2 + 99.1$

Lời giải. 1) Ta có

$$A = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 98.99$$

Nhân cả hai vế của đẳng thức trên với 3 :

$$\begin{aligned} 3A &= 1.2.3 + 2.3.3 + 3.4.3 + \dots + 98.99.3 \\ &= 1.2.(3-0) + 2.3.(4-1) + 3.4.(5-2) + \dots + 98.99.(100-97) \\ &= 1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \dots + 97.98.99 + 98.99.100 - (0.1.2 + 1.2.3 + 2.3.4 + \dots + 96.97.98 + 97.98.99) = 98.99.100 \end{aligned}$$

$$\text{Ta được } A = 323400$$

2) Ta có

$$B = 1.99 + 2.98 + 3.97 + \dots + 98.2 + 99.1$$

$$\begin{aligned} B &= 1.99 + 2.(99-1) + 3.(99-2) + 98.(99-97) + 99.(99-98) \\ &= 1.99 + 2.99 + 3.99 + \dots + 98.99 + 99.99 - (1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + 97.98 + 98.99) \\ &= 99.(1+2+3+\dots+98+99) - A \\ &= 99 \cdot \frac{99 \cdot 100}{2} - A = 490050 - 323400 \end{aligned}$$

$$\text{Ta được } B = 166650.$$

Nhận xét. 1. Một số bạn đã chứng minh các bài toán tổng quát sau :

$$1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

$$\begin{aligned} 1.n + 2.(n-1) + 3.(n-2) + \dots + (n-1).2 + n.1 &= \\ = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} \end{aligned}$$

2. Các bạn sau đây có bài giải tốt :

Nghệ An : Tăng Văn Bình, Hoàng Thị Lệ Quyên, Võ Văn Công, Nguyễn Thị Thủy An, Hoàng Trung Đức, 6B, THCS Lí Nhật Quang, Đỗ Lương, Hồ Tuấn Dũng, Cao Thị Thanh Tâm, Hồ Thị Ngọc Anh, Hồ Thị Chi, Nguyễn Thị Nhật Lệ, 6B, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu ; **Phú Thọ :** Phùng Quang Hưng, 6I, THCS Văn Lang, Việt Trì, Ninh Thanh Tùng, 6A1, Tạ Hồng Hà, 6A3, THCS Lâm Thao, Trần Thị Hằng, 6G, THCS Chu Văn An, Thanh Sơn ; **Vĩnh Phúc :** Nguyễn Công Thành, 6D,

THCS Vĩnh Yên, Tx. Vĩnh Yên ; **Thái Bình :** Bùi Trường Giang, 5E, TH Lê Hồng Phong, Tx. Thái Bình, Đinh Thị Thắm, 6A, THCS Thái Phương, Hưng Hà ; **Nam Định :** Nguyễn Lâm Phúc, 6A4, THCS Trần Đăng Ninh, Tp. Nam Định ; **Thanh Hóa :** Nguyễn Huy Linh, 6B, THCS Yên Bái, Yên Định ; **Hà Nội :** Trần Ngọc Việt Hoài, 6A, THCS Đông Anh ; **Hà Tây :** Trần Mai Linh, 6B, THCS Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hòa.

NGUYỄN ANH DŨNG

Bài T2/317. (Lớp 7). Tìm tất cả các cặp số hữu tỉ x, y sao cho hai số $x + y$ và $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ đều là số nguyên.

Lời giải. Do $x, y \in \mathbb{Q}$; $x, y \neq 0$, nên đặt $x = \frac{a}{b}, y = \frac{c}{d}$ trong đó $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$; $a, c \neq 0$; $b, d > 0$; $(a, b) = (c, d) = 1$.

$$\begin{aligned} \bullet \forall x + y &= \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} \in \mathbb{Z} \\ \Rightarrow (ad+bc) : bd \\ \Rightarrow \begin{cases} (ad+bc) : b \\ (ad+bc) : d \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} ad : b \\ bc : d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d : b \\ b : d \end{cases} \quad \forall (a, b) = (c, d) = 1 \text{ nên } b = d \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \bullet \text{ Lại có } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} &= \frac{b}{a} + \frac{d}{c} = \frac{bc+ad}{ac} \in \mathbb{Z} \\ \Rightarrow (bc+ad) : ac &\Rightarrow \begin{cases} (bc+ad) : a \\ (bc+ad) : c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} bc : a \\ ad : c \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Do } (a, b) = (c, d) = 1 \text{ nên } \begin{cases} c : a \\ a : c \end{cases} \Rightarrow a = \pm c \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } \frac{a}{b} = \pm \frac{c}{d} \text{ hay } x = \pm y.$$

$$\text{a) Nếu } x = -y \text{ thì } x + y = 0, \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 0.$$

$$\text{b) Xét } x = y = \frac{a}{b}. \text{ Khi đó}$$

$$x + y = \frac{2a}{b} \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2 : b \Rightarrow b \in \{1, 2\}.$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2b}{a} \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2 : a \Rightarrow a \in \{\pm 1, \pm 2\}$$

$$\text{Suy ra } x = y = \frac{a}{b} \in \left\{ \pm 1, \pm 2, \pm \frac{1}{2} \right\}$$

Thử lại thấy các cặp số (x, y) tương ứng thỏa mãn yêu cầu bài toán. Vậy các cặp số (x, y) cần tìm là $(1, 1)$; $(-1, -1)$; $(2, 2)$; $(-2, -2)$; $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$; $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ và các cặp số dạng $(t, -t)$ với $t \in \mathbb{Q}, t \neq 0$.

Nhận xét. 1) Bài toán này không khó nhưng một số bạn giải sai hoặc thiếu đáp số, có bạn viết thiếu chính xác " $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \in \mathbb{Z} \Rightarrow (x+y) : xy$ " (quan hệ chia hết chỉ xét trên tập số nguyên mà x, y là số hữu tỉ).

2. Các bạn sau đây có lời giải tốt

Vinh Phúc : Nguyễn Thị Thu Hà, 7A1, THCS Lâm Thao, Trấn Bá Trung, 7A, Nguyễn Thị Hồng Nguyên, 7B, THCS Yên Lạc ; **Hà Tây :** Trần Ngọc Thủy, 7B, THCS Nguyễn Thương Hiền, Ứng Hòa ; **Nghệ An :** Trần Trung Kiên, 7B, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu, Phan Thanh Minh, 7A, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu ; **Quảng Ngãi :** Nguyễn Tấn Hưng, 7A, THCS Tịnh Châu, huyện Sơn Tịnh.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

Bài T3/317. Tìm số dư khi chia số $13376^{2003!}$ cho số 2000, trong đó $n!$ là tích của n số tự nhiên liên tiếp từ 1 đến n .

Lời giải. (Dựa theo bạn Lê Ngọc Tuấn, 9B, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoàng Hóa, Thanh Hóa).

Giả sử A và B là hai số tự nhiên đều có tận cùng là 376 thì

$$\begin{aligned} A.B &= (1000a + 376)(1000b + 376) \\ &= 376000(a+b) + 10^6 ab + 376^2 = 2000t + 1376 \end{aligned}$$

với các số tự nhiên a, b, t , nghĩa là tích $A.B$ chia cho 2000 có dư là 1376.

Với $k > 1$ khi chia số 13376^k cho 2000 (thực hiện $k-1$ lần phép nhân hai số đều có tận cùng 376 rồi chia cho 2000) thì được dư là 1376. Để bài ứng với $k = 2003!$

Nhận xét. 1) Nhiều bạn có nhận xét là trong đề bài có thể thay 13376 bằng số tự nhiên nào đó có tận cùng là 376 và số mũ là số nguyên dương lớn hơn 1. Một số bạn tìm số dư trong phép chia cho 125 và 16 nên lời giải dài. Một số bạn chứng minh bằng quy nạp theo số mũ.

2) Ngoài bạn Tuấn, các bạn sau có lời giải đúng và gọn :

Phú Thọ : Lê Thị Kim Dung, 7E, Nguyễn Bảo Trung, Hoàng Quỳnh Trang, 9E, THCS Văn Lang, Tp. Việt Trì ; **Ta Hồng Sơn, Không Ngọc Trọng, 8A3, THCS Lâm Thao, Lâm Thao ; Lương Đức Hoàng, THCS Giấy Phong Châu, Phú Ninh, Nguyễn Ngọc Thanh, THCS Phong Châu, Tx. Phú Thọ ; Vinh Phúc :** Nguyễn Hoài Nam, 9D, THCS Liên Bảo, Nguyễn Xuân Thọ, 9B, THCS Vĩnh Yên, Tx. Vĩnh Yên, Nguyễn Đức Tâm, 8E, THCS Cao Minh, Tx. Phúc Yên, Nguyễn Hữu Kiên, 9A, THCS Yên Lạc ; **Bắc Ninh:** Nguyễn Đức Toàn, 9C, THCS Yên Phong ; **Hải Dương :** Đỗ Tùng Anh, 7A, THCS Nguyễn Trãi, Nam Sách, Hoàng Đình Phương, 9/3, THCS Lê Quý Đôn, Tp. Hải Dương ; **Hải Phòng :** Phạm Thanh Huyền, 9A, THCS Nguyễn Bình Khiêm, Vĩnh Bảo ; **Hà Tây :** Trần Ngọc Thủy, 7B, THCS Nguyễn Thương Hiền, Ứng Hòa ; **Hà Nội :** Đỗ Ngọc Hà, 9H, THCS Thành Công, Ba Đình ; **Nam Định :** Trần Quang Huy, 9A1, THCS Phùng Chí Kiên, Tp. Nam Định ; **Thanh Hóa :** Chu Thị Hạnh, Lê Hữu Tuấn, Lê Viết Tuấn, 9B, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoàng Hóa, Nguyễn Lưu Bách, 8C, Lê Trung Thành, 8B, THCS Lê Hữu Lập, Hậu Lộc ; **Nghệ An :**

Nguyễn Hoài Anh, Mai Văn Minh, 8G, THCS Đăng Thái Mai, Vinh, Trần Thị Hải Vân, 8A, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu, Võ Quang Vinh, 8D, THCS Thái Hòa 2, Nghĩa Đàn, Lê Ngọc Thạch, 9A, Nguyễn Tư Diễm, 9B, THCS Lý Nhật Quang ; **Đak Lak:** Võ Văn Tuấn, THCS Buôn Hồ, Krông-Buk ; **Bình Định :** Bùi Bảo Khang, 7A1, THPT An Nhơn 2 ; **Phú Yên :** Phan Thành Việt, 9D, THCS Lương Thế Vinh, Nguyễn Ngọc Tâm Quyên, 9E, THCS Hùng Vương, Tx. Tuy Hòa ; **Khánh Hòa:** Đỗ Phú Thịnh, 9/12, THCS Thái Nguyên, Nha Trang ; **Bà Rịa - Vũng Tàu :** Ngô Minh Đức, 9/3, THCS Nguyễn An Ninh, Tp. Vũng Tàu ; **An Giang :** Võ Thành Lộc, 9A17, THCS Nguyễn Trãi, Tp. Long Xuyên.

VIỆT HẢI

Bài T4/317. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2+2b^2+3} + \frac{1}{b^2+2c^2+3} + \frac{1}{c^2+2a^2+3} \leq \frac{1}{2}$$

trong đó các số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $abc = 1$. Đẳng thức xảy ra khi nào ?

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có $a^2 + b^2 \geq 2ab$ và $b^2 + 1 \geq 2b$. Suy ra $a^2 + 2b^2 + 3 \geq 2(ab+b+1)$ và ta có

$$\frac{1}{a^2+2b^2+3} \leq \frac{1}{2(ab+b+1)}$$

Tương tự

$$\frac{1}{b^2+2c^2+3} \leq \frac{1}{2(bc+c+1)} ;$$

$$\frac{1}{c^2+2a^2+3} \leq \frac{1}{2(ac+a+1)}$$

Đặt vế trái của BĐT cần chứng minh là A , ta có

$$\begin{aligned} A &\leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{ab+b+1} + \frac{1}{bc+c+1} + \frac{1}{ac+a+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{ab+b+1} + \frac{ab}{b+1+ab} + \frac{b}{1+ab+b} \right) \quad (\text{vì } abc = 1) \\ &= \frac{1}{2} \frac{ab+b+1}{ab+b+1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Nhận xét. Hầu hết các bạn dùng bất đẳng thức Cô-si và giải đúng. Một số có tổng quát hóa hay. Lưu ý rằng khi giả thiết $a \geq b \geq c > 0$ thì các kết quả thu được không còn là tương tự nữa, chính điều đó dẫn đến một số sai lầm trong chứng minh.

Các bạn sau có lời giải đơn giản, đúng và ngắn gọn :

Thừa Thiên - Huế : Lê Hữu Diễm Khuê, 9¹ Nguyễn Tri Phương, Tp. Huế ; **Bình Định :** Lê Văn Hải, 9A2, THCS Cát Hanh ; **Vinh Phúc :** Nguyễn Kim Thuật, 9A, THCS Yên Lạc, Trần Tấn Phong, 8A, THCS Lập Thạch ; **Quảng Ngãi :** Đỗ Tiến Vũ, 9¹, THCS Châu Ổ ; **Hưng Yên :** Bùi Thanh Huyền, 9A3, THCS Chu Mạnh Trinh ; **Nghệ An :** Lê Đình Toàn, 9B, Nguyễn Thanh Tuấn, 9A, THCS Lý Nhật Quang, Võ Đình Hùng, 9B, THCS Bạch

Liệu, Võ Quang Vinh, 8D, THCS Thái Hòa 2 ; **Hòa Bình** : Trương Hồng Phúc, 9A1, THCS Sông Đà ; **Thanh Hóa** : Lê Quang Trưởng, 9D, THCS Lê Quý Đôn, **Phú Thọ** : Lương Đức Hoàng, 9A, THCS Giầy Phong Châu, Phù Ninh, Nguyễn Mạnh Cường, 8A3, THCS Lâm Thao ; **Tp. Hồ Chí Minh** : Lê Đức Lợi, 8¹, THCS Hồng Bàng.

PHAN DOÃN THOẠI

Bài T5/317. Cho các số thực a, b, c, x, y, z thỏa mãn các điều kiện : $ax^{2003} = by^{2003} = cz^{2003}$ và $xy + yz + zx = xyz \neq 0$.

Chứng minh rằng :

$$\sqrt[2003]{ax^{2002} + by^{2002} + cz^{2002}} = \sqrt[2003]{a} + \sqrt[2003]{b} + \sqrt[2003]{c}$$

Lời giải. (Của bạn Nguyễn Bá Tuấn Anh, 9E, THCS Lê Quý Đôn, Bim Sơn, **Thanh Hóa**).

Ta xét bài toán tổng quát hơn :

Cho các số thực $a_1, a_2, \dots, a_n, x_1, x_2, \dots, x_n$ thỏa mãn : $a_1 x_1^{2k+1} = a_2 x_2^{2k+1} = \dots = a_n x_n^{2k+1}$ và $x_2 x_3 \dots x_n + x_1 x_3 \dots x_n + \dots + x_1 x_2 \dots x_{n-1} = x_1 x_2 \dots x_n \neq 0$, trong đó $k, n \in \mathbb{N}^*$. (*)

Chứng minh rằng :

$$\sqrt[2k+1]{a_1 x_1^{2k} + a_2 x_2^{2k} + \dots + a_n x_n^{2k}} = \sqrt[2k+1]{a_1} + \sqrt[2k+1]{a_2} + \dots + \sqrt[2k+1]{a_n}$$

Chứng minh : Từ (*) suy ra

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} = 1.$$

$$\text{Đặt } a_1 x_1^{2k+1} = a_2 x_2^{2k+1} = \dots = a_n x_n^{2k+1} = q.$$

Khi đó :

$$\sqrt[2k+1]{a_1 x_1^{2k} + a_2 x_2^{2k} + \dots + a_n x_n^{2k}} = \sqrt[2k+1]{q \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \right)} = \sqrt[2k+1]{q} \quad (1)$$

$$\sqrt[2k+1]{a_1} + \sqrt[2k+1]{a_2} + \dots + \sqrt[2k+1]{a_n} = \sqrt[2k+1]{q} \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \right) = \sqrt[2k+1]{q} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh.

Nhận xét. Đề bài đã cho ứng với trường hợp : $n = 3, k = 1001$.

2) Rất đông các bạn tham gia giải bài toán này và hầu hết đều giải đúng. Các bạn có những bài toán mở rộng tốt là :

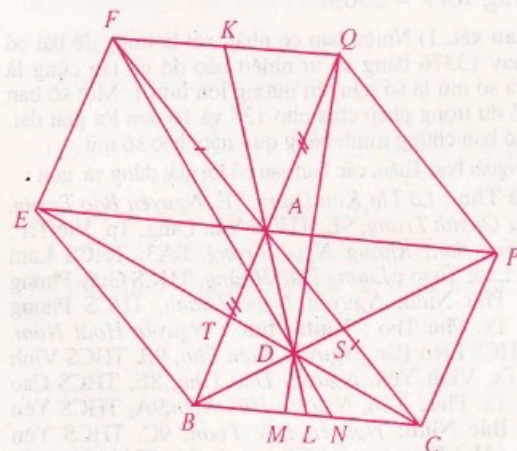
Phú Thọ : Lương Đức Hoàng, 9A, THCS Giầy Phong Châu, Phù Ninh ; **Hải Dương** : Hoàng Đình Phương,

Đào Ngọc Hưng, 9₁₃, THCS Lê Quý Đôn, Tp. Hải Dương, **Trần Ngọc Quý**, 9A, THCS Tráng Liệt, Bình Giang ; **Hòa Bình** : Nguyễn Hữu Dũng, 9A1, THCS thị trấn Bo, Kim Bôi ; **Thanh Hóa** : Lê Trung Thành, 9B, THCS Lê Hữu Lập ; **Nghệ An** : Lê Ngọc Thạch, Trường Việt Đức, 9A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, **Hoàng Trọng Quang**, 9B, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu ; **Hà Tĩnh** : Lê Thu Thủy, 8A1, THCS Bình An, Can Lộc, **Vương Bằng Việt**, 711, THCS Nam Hà, Tx. Hà Tĩnh ; **Bình Định** : Lý Viễn Trường, A4, THCS Ngô Mây, Phù Cát, **Trần Như Ngọc**, 27 Đinh Công Tráng, Tp. Nguyễn Văn Cừ, Tp. Quy Nhơn ; **Quảng Ngãi** : Hồ Ngọc Phước, 9A, THCS Nguyễn Trãi, Mộ Đức ; **Tiền Giang** : Phạm Bá Thọ, 9A4, THPT Nguyễn Đình Chiểu, Tp. Mỹ Tho.

TRẦN HỮU NAM

Bài T6/317. Cho $\triangle ABC$. Dựng ra phía ngoài tam giác đó các hình bình hành $ABEF$ và $ACPQ$ sao cho $AF = AC, AQ = AB$ và F, A, C thẳng hàng, Q, A, B thẳng hàng. Gọi D là giao điểm của BP và CE . Các đường thẳng QD và FD cắt BC lần lượt tại M và N . Tính tỉ số $MN : BC$.

Lời giải. Dễ thấy $APCB$ và $ACBE$ đều là các hình bình hành. Do đó BS, CT là đường trung tuyến của $\triangle ABC$. Suy ra AL là trung tuyến của $\triangle ABC$. Nên $DL = \frac{1}{2}DA$. Mặt khác $\triangle QAF = \triangle BAC$ và $KL \parallel QC$ nên K là trung điểm của FQ và $BC = FQ$. Ta có $DL = \frac{1}{5}DK$.



$$\text{Do } \triangle QDK \sim \triangle MDL \text{ nên } \frac{QD}{MD} = \frac{DK}{DL} = 5.$$

$$\text{Mặt khác } \triangle QDF \sim \triangle MDN \text{ nên } \frac{QF}{MN} = \frac{QD}{MD} = 5.$$

$$\text{Do vậy } MN = \frac{1}{5}QF = \frac{1}{5}BC \text{ hay } MN:BC = 1:5.$$

Nhận xét. Đề bài bị thiếu một dữ kiện, xin sửa lại như trên. Thành thật xin lỗi tác giả và độc giả. Có hai bạn sửa lại đề và làm theo dữ kiện mới là Q , A , B thẳng hàng, F , A , C thẳng hàng dù không nói rõ như vậy.

VŨ KIM THỦY

Bài T7/317. Tứ giác $ABCD$ có $AB > BC$ và ngoại tiếp đường tròn tâm O . Gọi E , F là giao điểm của BD với đường tròn. Đường thẳng qua O vuông góc với AC tại H . Chứng minh rằng $\widehat{BHE} = \widehat{DHF}$.

Lời giải. (Theo bạn Lại Nguyễn Thanh, 9/3, THCS Lê Quý Đôn, Hải Dương)

Để giải bài toán này ta cần hai bổ đề sau:

• **Bổ đề 1.** Cho $\triangle ABC$ và hai điểm M , N trên cạnh BC sao cho: $\frac{BM \cdot BN}{CM \cdot CN} = \frac{AB^2}{AC^2}$, lúc đó

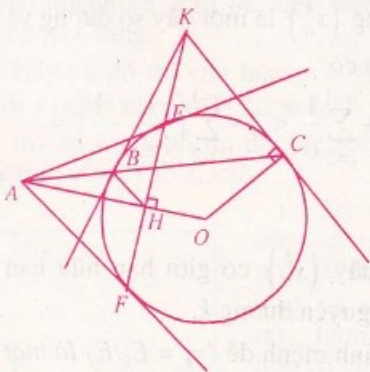
$$\widehat{BAM} = \widehat{CAN}$$

Chứng minh. Thật vậy, qua B kẻ đường thẳng song song với AC cắt AM , AN lần lượt tại E , F . Theo định lý

Ta-let có: $\frac{BE}{AC} = \frac{BM}{CM}$; $\frac{BF}{AC} = \frac{BN}{CN}$, suy ra:

$\frac{BE \cdot BF}{AC^2} = \frac{BM \cdot BN}{CM \cdot CN} = \frac{AB^2}{AC^2} \Rightarrow \frac{BE}{AB} = \frac{AB}{BF}$. Từ đó $\triangle EAB \sim \triangle AFB \Rightarrow \widehat{BFA} = \widehat{BAE}$, mà $\widehat{BFA} = \widehat{CAF}$, vậy $\widehat{BAM} = \widehat{CAN}$ (đpcm).

• **Bổ đề 2.** Cho điểm A nằm ngoài đường tròn (O) , cát tuyến ABC . Các tiếp tuyến với đường tròn (O) tại B , C cắt nhau tại K ; AE , AF là các tiếp tuyến kẻ từ A đến (O) , (E , F là các tiếp điểm) khi đó 3 điểm K , E , F thẳng hàng.



Hình 1

Chứng minh. Dựng $KH \perp OA$ ($H \in OA$). Vì tứ giác $BHOC$ nội tiếp đường tròn đường kính OK , suy ra

$AH \cdot OA = AB \cdot AC = AF^2$ (1). Gọi H' là giao điểm của EF với OA thì $AH' \cdot OA = AF^2$ (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow H \equiv H'$, nghĩa là K , E , F thẳng hàng (đpcm).

Trở lại bài toán, giả sử $AB > BC$; M , N , P , Q lần lượt là các tiếp điểm của đường tròn (O) với các cạnh AB , BC , CD , DA . Lấy D' đối xứng với D qua AC , BD' cắt AC tại H' . Mục tiêu chính của ta là chứng minh $H \equiv H'$ (với $OH \perp AC$).

Gọi S là giao điểm của MP và BD , kẻ $BK \parallel CD$ ($K \in MP$), khi đó $\frac{BS}{SD} = \frac{BK}{DP}$, mà $\widehat{BKM} = \widehat{CPM}$
 $\Rightarrow \widehat{BMK} \Rightarrow BK = BM$. Do đó: $\frac{BS}{SD} = \frac{BM}{DP}$ (3)

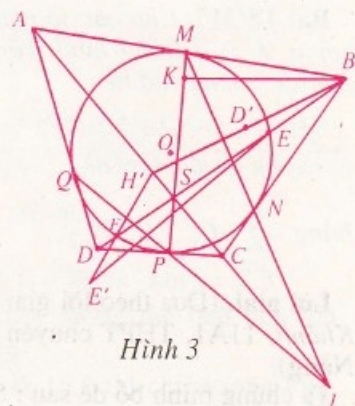
Gọi S' là giao điểm của NQ với BD . Tương tự như trên có: $\frac{BS'}{S'D} = \frac{BN}{DQ}$, vì $BM = BN$, $DP = DQ$ nên từ (3) có $\frac{BS}{SD} = \frac{BS'}{S'D} \Rightarrow S \equiv S'$ hay BD , MP , NQ đồng quy tại S .

Chứng minh tương tự AC , MP , NQ cũng đồng quy tại S . Từ cách dựng điểm H' thì $H'C$ là tia phân giác góc $\widehat{BH'D} \Rightarrow \frac{BH'}{DH'} = \frac{BS}{SD} = \frac{BM}{DP}$ (theo (3))

Mặt khác: $BE \cdot BF = BM^2$, $DE \cdot DF = DP^2 \Rightarrow \frac{BH'^2}{DH'^2} = \frac{BE \cdot BF}{DE \cdot DF}$, xét $\triangle H'BD$ theo bổ đề 1 có $\widehat{BHE} = \widehat{DHF}$ (4) và từ đó: $\widehat{FH'C} = \widehat{EH'C}$ (5)

Gọi I , I' theo thứ tự là giao điểm của MN , PQ với AC . Áp dụng định lý Mê-nê-la-uyt thuận cho $\triangle ABC$ với cát tuyến (MNI) ; $\triangle ADC$ với cát tuyến (PQI') thì được: $\frac{AM \cdot BN \cdot CI}{BM \cdot CN \cdot AI} = \frac{AQ \cdot DP \cdot CI'}{DQ \cdot CP \cdot AI'} = 1$. Suy ra $\frac{CI}{AI} = \frac{CI'}{AI'} \Rightarrow I \equiv I'$, nghĩa là MN , AC , PQ đồng quy tại I . Giả sử tiếp tuyến với (O) tại E và F cắt nhau tại I'' , theo bổ đề 2 có $I'' \in MN$, $I'' \in PQ \Rightarrow I'' \equiv I$.

Tứ giác $HEIF$ nội tiếp đường tròn đường kính



Hình 2

$OI \Rightarrow \widehat{EHC} = \widehat{FHC}$ (6). Gọi E' là điểm đối xứng của E qua AC . Từ (5), (6) suy ra :

$$\begin{cases} \widehat{E'H'C} = \widehat{EH'C} = \widehat{FHC} \\ \widehat{E'HC} = \widehat{EHC} = \widehat{FHC} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F, E', H' \text{ thẳng hàng} \\ F, E', H \text{ thẳng hàng} \end{cases}$$

Suy ra $H \equiv H'$, kết hợp với (4) được $\widehat{BHE} = \widehat{DHF}$ (dpcm).

Nhận xét. Đây là một bài hình học phẳng tương đối khó nên có rất ít lời giải gửi về Tòa soạn. Ba bạn sau có lời giải đúng : *Lại Nguyễn Thanh, Hà Hữu Cao Trinh, 9/3, THCS Lê Quý Đôn, Hải Dương ; Lê Ngọc Tuấn, 9B, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoàng Hóa, Thanh Hóa.*

HỒ QUANG VINH

Bài T8/317. Cho các số nguyên dương m, n, k với $n > m$. Chứng minh rằng số các nghiệm nguyên dương của hệ

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_n = y_1 + y_2 + \dots + y_m + 1 \\ x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq nk \end{cases}$$

bằng $\sum_{i=0}^{n(k-1)} C_{n-1+i}^{n-1} \cdot C_{n-2+i}^{m-1}$

Lời giải. (Dựa theo lời giải của bạn Đỗ Quốc Khánh, 11A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Đà Nẵng).

Ta chứng minh bổ đề sau : Số nghiệm nguyên dương của phương trình $x_1 + x_2 + \dots + x_n = a$ (ở đó $a \geq n$) là C_{a-1}^{n-1}

Thật vậy ta xét n cái hộp (khác nhau) $A_1, A_2, \dots, A_n$ và a quả cầu giống nhau. Mỗi nghiệm



nguyên dương $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ tương ứng với một sự phân bố a quả cầu này vào n hộp trên, trong đó hộp A_i chứa x_i ($i = 1, \dots, n$) quả cầu.

Ta biểu diễn m quả cầu này trên đường thẳng, m quả cầu này tạo ra $a-1$ khoảng trống giữa chúng. Hai hộp được ngăn cách nhau bởi $n-1$ vách ngăn (xem hình vẽ với $a = 10, n = 4$) và $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2, 3, 3, 2)$. Số cách đặt $n-1$ vách ngăn này vào $a-1$ khoảng trống chính bằng số cách xếp a quả cầu này vào n hộp. Vậy số đó là C_{a-1}^{n-1} .

Trở lại bài toán : Hệ phương trình đã cho tương đương với hệ

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_n = a & (1) \\ y_1 + y_2 + \dots + y_m = a-1 & (2) \\ a \in \{n, n+1, \dots, nk\} \end{cases}$$

với mỗi $a \in \{n, n+1, \dots, nk\}$ số nghiệm nguyên dương của (1) là C_{a-1}^{n-1} , của (2) là C_{a-2}^{m-1} và của hệ là $C_{a-1}^{n-1} C_{a-2}^{m-1}$

Vậy số nghiệm nguyên dương của hệ đã cho là $\sum_{a=n}^{nk} C_{a-1}^{n-1} C_{a-2}^{m-1} = \sum_{i=0}^{nk-n} C_{n-1+i}^{n-1} C_{n-2+i}^{m-1}$

Nhận xét. 1) Nhiều bạn chứng minh bổ đề trên bằng phương pháp quy nạp.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt : **Đông Tháp :** Lê Quang Trường, 12T, Cao Lãnh ; **Vĩnh Phúc :** Nguyễn Hùng Cường, 10A1, THPT ch.Vĩnh Phúc ; **Hà Nội :** Lê Hùng Việt Bảo, 12 Toán, ĐHKHTN Hà Nội ; **Quảng Trị :** Lê Thị Phương Thảo, 11 Toán, THPT Lê Quý Đôn ; **Tp. HCM :** Nguyễn Anh Cường, 10T, ĐHKHTN Tp. HCM ; **Hà Nội :** Phạm Nhật Minh, 11A1, PTCT - ĐHKHTN Hà Nội ; **Hải Phòng :** Nguyễn Huy Hoàng, 10, THPT Trần Phú ; **Phú Thọ :** Bùi Tuấn Anh, 10, THPT Hùng Vương ; **Hưng Yên :** Lương Xuân Bách, 11 chuyên Hưng Yên.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T9/317. Với mỗi số nguyên dương k , xét dãy số (x_n^k) ($n = 1, 2, \dots$) được xác định bởi :

$$x_1^k = 1, x_n^k = \sum_{i=1}^n \frac{i^k}{i!} \text{ với } n = 2, 3, \dots$$

1) Chứng minh rằng dãy số (x_n^k) ($n = 1, 2, \dots$) có giới hạn hữu hạn với mỗi số nguyên dương k .

2) Đặt $E_k = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^k$. Chứng minh rằng : $y_k = E_k / E_1$ là số nguyên dương với mỗi số nguyên dương k .

Lời giải. (Của đa số các bạn)

a) Nhận xét rằng (x_n^k) là một dãy số dương và đơn điệu tăng. Ta có

$$x_n^1 = \sum_{i=1}^n \frac{i}{i!} = 2 + \sum_{i=2}^{n-1} \frac{1}{i!} < 2 + \sum_{i=2}^{n-1} \left(\frac{1}{i-1} - \frac{1}{i} \right) = 3 - \frac{1}{n-1} < 3.$$

Từ đó suy ra dãy (x_n^k) có giới hạn hữu hạn ứng với mỗi số nguyên dương k .

b) Ta chứng minh mệnh đề " $y_k = E_k / E_1$ là một số nguyên dương ứng với mỗi số nguyên dương

k'' bằng quy nạp. Thật vậy, với $k = 1$ thì $y_1 = 1$. Giả sử mệnh đề đúng với mọi số nguyên dương k với $k < h \in \mathbb{N}$ cho trước ($h > 2$). Khi đó ta có:

$$\begin{aligned} x_n^h &= \sum_{i=1}^n \frac{i^h}{i!} = 1 + \sum_{i=2}^n \frac{i^{h-1}}{(i-1)!} = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(i+1)^{h-1}}{i!} \\ &= 1 + \sum_{i=1}^{h-1} C_{h-1}^j \sum_{i=1}^{n-1} \frac{i^j}{i!} = 1 + \sum_{i=1}^{h-1} \frac{1}{i!} + \sum_{i=1}^{h-1} C_{h-1}^j \sum_{i=1}^{n-1} \frac{i^j}{i!} \\ &= x_n^1 + \sum_{i=1}^{h-1} C_{h-1}^j x_{n-1}^j. \end{aligned}$$

Chuyển qua giới hạn khi $n \rightarrow \infty$, ta thu được hệ thức $E_h = E_1 + \sum_{i=1}^{h-1} C_{h-1}^j E_j$ hay $y_h = y_1 + \sum_{i=1}^{h-1} C_{h-1}^j y_i$.

Từ đây, theo giả thiết quy nạp, ta thu được dpcm.

Nhận xét. Một số bạn sử dụng công thức khai triển A-bel để chứng minh đồng thời cả hai khẳng định.

Các bạn sau đây có lời giải đúng:

Tp. HCM: Cao Hoàng Tân, 12A6, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa; **Đà Nẵng:** Đỗ Quốc Khanh, Trương Minh Tiến, 11A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Hải Phòng:** Đinh Khang, Bùi Ngọc Khôi, Lương Phú Khánh, 10T, THPT NK Trần Phú; **Quảng Trị:** Trần Quang Nguyên, Lê Tiến Triển, Lê Phương Thảo, 11T, THPT ch. Lê Quý Đôn; **Hưng Yên:** Lương Xuân Bách, 11T, THPT chuyên Hưng Yên; **Ninh Bình:** Đỗ Hoàng Huy, 12T, THPT Lương Văn Tụy; **Nghe An:** Nguyễn Ngọc Cường, Nguyễn Đức Minh, 12T, THPT Phan Bội Châu; **Bắc Giang:** Nguyễn Tuyết Mai, 12A, THPT NK Ngô Sĩ Liên; **Hòa Bình:** Lưu Như Hòa, 11T, THPT Hoàng Văn Thụ; **Phú Thọ:** Triệu Ngọc Anh Khôi, 12T, THPT ch. Hùng Vương; **Thanh Hóa:** Trần Văn Thiện, 12C5, THPT Như Thanh, Trần Mạnh Tuấn, 11T, THPT Lam Sơn; **Hà Nội:** Nguyễn Văn Võ, 11A1, Lê Hùng Việt Bảo, 12A, ĐHKHTN, Nguyễn Minh Phương, 11A2, THPT Sóc Sơn, Nguyễn Lệnh Quân, 11A1, ĐHSPh Hà Nội.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T10/317. Cho $a_1, a_2, \dots, a_n$ là các số thực khác 0 và $u_1, u_2, \dots, u_n$ là các số thực dương, sao cho $u_1 < u_2 < \dots < u_n$, và $f(x) =$

$$\sum_{i=1}^n a_i \cos(u_i x), \text{ với } x \in \mathbb{R}, \text{ là hàm số tuần hoàn.}$$

Chứng minh rằng u_i / u_1 là số hữu tỉ với mỗi $i = 2, 3, \dots, n$.

Lời giải. (Của các bạn Lê Tiến Triển, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Quảng Trị, Lê Hùng Việt Bảo, 12T, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội).

Trước hết, từ định nghĩa của đạo hàm, ta có nhận xét $f(x+T) = f(x) (\forall x \in \mathbb{R}) \Rightarrow f'(x+T) = f'(x) (\forall x \in \mathbb{R}) \Rightarrow f''(x+T) = f''(x) (\forall x \in \mathbb{R})$.

Ta chứng minh bài toán bằng quy nạp theo $n = 2, 3, 4, \dots$

$$\text{Với } n = 2, f(x) = a_1 \cos(u_1 x) + a_2 \cos(u_2 x)$$

$$f''(x) = -a_1 u_1^2 \cos(u_1 x) - a_2 u_2^2 \cos(u_2 x)$$

Do đó nếu T là chu kỳ của hàm số $f(x)$ thì T cũng là chu kỳ của các hàm số $u_1^2 \cdot f(x) + f''(x)$, $u_2^2 \cdot f(x) + f''(x)$. Mặt khác

$$u_1^2 f(x) + f''(x) = a_2 (u_1^2 - u_2^2) \cos(u_2 x)$$

là hàm số tuần hoàn có chu kỳ cơ sở là $\frac{2\pi}{u_2}$,

$u_2^2 \cdot f(x) + f''(x) = a_1 (u_2^2 - u_1^2) \cos(u_1 x)$ là hàm số tuần hoàn có chu kỳ cơ sở là $\frac{2\pi}{u_1}$. Suy ra

$$\frac{T \cdot u_2}{2\pi}, \frac{T \cdot u_1}{2\pi} \text{ là các số nguyên dương. Hệ quả là}$$

$$\frac{u_2}{u_1} \in \mathbb{Q}.$$

Giả sử bài toán đã đúng với $n = k \geq 2$, ta chứng minh bài toán đúng với $n = k+1$,

$$f(x) = \sum_{i=1}^{k+1} a_i \cos(u_i x). \text{ Ta có}$$

$$u_{k+1}^2 \cdot f(x) + f''(x) = \sum_{i=1}^k a_i (u_{k+1}^2 - u_i^2) \cos(u_i x)$$

là hàm số tuần hoàn với $a_i (u_{k+1}^2 - u_i^2) \neq 0 (\forall i = 1, 2, \dots, k)$. Do đó theo giả thiết quy nạp ta suy

$$\text{ra } \frac{u_i}{u_1} \in \mathbb{Q} (\forall i = 2, 3, \dots, k). \text{ Nếu ta xét hàm số}$$

$$\text{tuần hoàn } u_1^2 f(x) + f''(x) = \sum_{i=2}^{k+1} a_i (u_1^2 - u_i^2) \cos(u_i x)$$

$$\text{thì ta lại có } \frac{u_i}{u_2} \in \mathbb{Q} (\forall i = 3, 4, \dots, k+1).$$

Từ đó ta có kết luận $\frac{u_i}{u_1} \in \mathbb{Q} (\forall i = 2, 3, \dots, k+1)$ (dpcm).

Nhận xét. Đây là một kết quả hay của hàm số lượng giác. Tòa soạn nhận được lời giải của hơn 20 bạn học sinh. Một số bạn giải chưa hoàn chỉnh, ví dụ kết luận

$$\sum_{i=1}^n b_i \sin(u_i x) = 0 (\forall x \in \mathbb{R}) \Rightarrow b_1 = b_2 = \dots = b_n = 0 \text{ mà}$$

không chứng minh gì (!) hoặc chứng minh bằng quy nạp nhưng "quên" chứng minh trường hợp $n = 2$!

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T11/317. Cho đa giác lồi $A_1 A_2 \dots A_n$ với $n \geq 3$ và M là điểm nằm trong đa giác. Gọi $\alpha_i = \widehat{MA_i A_{i+1}}$ ($i = 1, 2, \dots, n$, coi A_{n+1} trùng với A_1).

Chứng minh rằng $\min_{1 \leq i \leq n} \{\alpha_i\} \leq \frac{(n-2)\pi}{2n}$

Lời giải. (Của bạn **Trương Minh Tiến**, 11A1, THPT ch. Lê Quý Đôn, Đà Nẵng)

Gọi D_i ($i = 1, 2, \dots, n$) là chân đường phân giác xuất phát từ đỉnh M của tam giác $MA_i A_{i+1}$

($A_{n+1} \equiv A_1$). Đặt $\beta_i = \frac{1}{2} \widehat{A_i M A_{i+1}}$ với $\beta_i \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Theo công thức tính độ dài đường phân giác, theo bất đẳng thức Cô-si cho hai số, n số và chú ý rằng hàm cosin lồi trong khoảng $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, ta có:

$$\begin{aligned} \prod_{1 \leq i \leq n} \frac{MD_i}{MA_i} &= \frac{\prod_{1 \leq i \leq n} MD_i}{\prod_{1 \leq i \leq n} MA_i} \\ &= \frac{\prod_{1 \leq i \leq n} \frac{2MA_i \cdot MA_{i+1} \cos \beta_i}{MA_i + MA_{i+1}}}{\prod_{1 \leq i \leq n} MA_i} \\ &= \prod_{1 \leq i \leq n} \frac{2MA_i \cos \beta_i}{MA_i + MA_{i+1}} \leq \prod_{1 \leq i \leq n} \frac{2MA_i \cos \beta_i}{2\sqrt{MA_i \cdot MA_{i+1}}} \\ &= \prod_{1 \leq i \leq n} \cos \beta_i \leq \left(\frac{\sum_{1 \leq i \leq n} \cos \beta_i}{n} \right)^n \\ &\leq \cos^n \left(\frac{\sum_{1 \leq i \leq n} \cos \beta_i}{n} \right) = \cos^n \frac{\pi}{n}. \end{aligned}$$

Vậy: Tồn tại $i_0 \in \{1, 2, \dots, n\}$ sao cho:

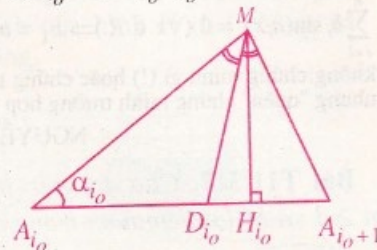
$$\frac{MD_{i_0}}{MA_{i_0}} \leq \cos \frac{\pi}{n} < 1 \quad (1) \text{ (h. 1)}$$

Trong tam giác $MA_{i_0} A_{i_0+1}$, ta thấy:

$$MD_{i_0} < MA_{i_0} \Rightarrow \alpha_{i_0} < \widehat{MD_{i_0} A_{i_0}}$$

$$\Rightarrow \alpha_{i_0} < \frac{\pi}{2} \quad (2)$$

Gọi H_{i_0} là hình chiếu của M trên $A_{i_0} A_{i_0+1}$, ta thấy



Hình 1

$$\sin \alpha_{i_0} = \frac{MH_{i_0}}{MA_{i_0}} \leq \frac{MD_{i_0}}{MA_{i_0}} \leq \cos \frac{\pi}{n} \quad (\text{theo (1)})$$

$$\Rightarrow \sin \alpha_{i_0} \leq \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n} \right) = \sin \frac{(n-2)\pi}{2n} \quad (3)$$

Theo (2), $\alpha_{i_0} < \frac{\pi}{2}$. Dễ thấy: $\frac{(n-2)\pi}{2n} < \frac{\pi}{2}$.

Từ (3), với nhận xét trên, ta có:

$$\alpha_{i_0} \leq \frac{(n-2)\pi}{2n} \Rightarrow \min_{1 \leq i \leq n} \{\alpha_i\} \leq \frac{(n-2)\pi}{2n}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow A_1 A_2 \dots A_n$ là đa giác đều và M là tâm của đa giác.

Nhận xét. 1) Đây là bài toán hay và khó. Nó là sự mở rộng bài toán số 5 trong kì thi vô địch toán quốc tế lần thứ 32, tổ chức tại Thụy Điển, tháng 7 năm 1991.

2) Có 32 bạn giải sai. Các sai lầm chủ yếu là:

+ Không chỉ ra sự tồn tại của i_0 sao cho $\alpha_{i_0} < \pi/2$.

+ Hàm sin đồng biến trong khoảng $(0, \pi)$

+ Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho những số âm.

3) Bạn **Nguyễn Lệnh Quân**, 11A1, ĐHSPT Hà Nội đã đề xuất một lời giải đúng khác thông qua nhận xét sau đây. "Nếu đa giác n cạnh có chu vi a thì diện tích của nó

$$\text{không lớn hơn } \frac{a^2}{4n \cot \frac{\pi}{2n}}"$$

4) Các bạn sau sau có lời giải tốt: **Hưng Yên**: Lương Xuân Bách, 11T, THPT chuyên Hưng Yên; **Nghệ An**: Nguyễn Việt Khôi, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu; **Hải Phòng**: Bùi Tuấn Anh, 11T, THPT NK Trần Phú; **Phú Thọ**: Đinh Đức Thành, 11A1, THPT chuyên Hùng Vương; **Hà Nội**: Bùi Nghĩa Ngọc, Phan Văn Nguyên, PTCT, ĐHKHTN Hà Nội.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài T12/317. Tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC vuông góc với nhau từng đôi một. Đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F . Gọi α, β, γ là số đo các góc nhị diện cạnh BC, CA, AB tương ứng của tứ diện đó. Chứng minh rằng:

$$1) V_{ODEF} = \frac{1}{3} OA \cdot OB \cdot OC \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2}$$

trong đó kí hiệu A, B, C là các góc của $\triangle ABC$.

$$2) \tan \alpha \tan \beta \tan \gamma \geq 2\sqrt{2}$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Lời giải. 1) Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC , r là bán kính đường tròn đó.

Đặt $OA = a, OB = b, OC = c; BC = x, CA = y, AB = z$. Áp dụng định lí Ptô-lê-mê vào các tứ giác nội tiếp $AEIF, BFID$ và $CDIE$ ta được:

$$IA \cdot EF = IE \cdot AF + IF \cdot AE = 2r(p-x) \quad (1)$$

trong đó $2p = x + y + z$.

Tương tự, ta có : $IB.FD = 2r(p-y)$ (2)

và $IC.DE = 2r(p-z)$ (3)

Từ (1), (2) và (3) ta được :

$$\begin{aligned} IA.IB.IC &= \frac{8r^3(p-x)(p-y)(p-z)}{EF.FD.DE} = \\ &= \frac{8r^3 p(p-x)(p-y)(p-z)}{4pr \left(\frac{EF.ED.DE}{4r} \right)} \\ &= \frac{2r^3 S^2(ABC)}{S(ABC).S(DEF)} = \frac{2r^3 S(ABC)}{S(DEF)} \end{aligned}$$

Suy ra :

$$\frac{S(DEF)}{S(ABC)} = \frac{2r^3}{IA.IB.IC} = 2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

Từ đó ta được :

$$\frac{V(ODEF)}{V(OABC)} = 2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

Vì $V(OABC) = \frac{1}{6} abc$ nên ta được hệ thức cần

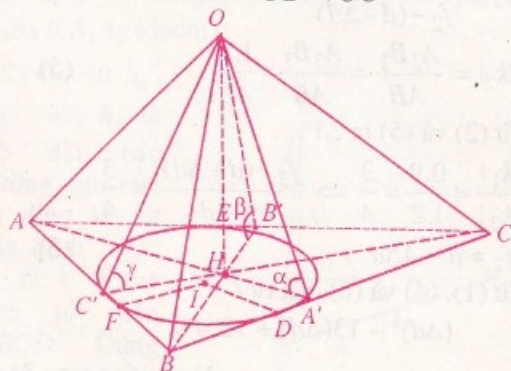
$$\text{tìm : } V(ODEF) = \frac{1}{3} abc \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}.$$

2) Gọi H là chân đường cao hạ từ đỉnh O xuống mặt phẳng (ABC) . Để chứng minh được H là trực tâm tam giác ABC và H nằm trong tam giác ABC (vì ABC là tam giác nhọn). $AH \perp BC$ tại A' , $BH \perp CA$ tại B' , $CH \perp AB$ tại C' . Thế thì : $\widehat{OA'H} = \alpha$, $\widehat{OB'H} = \beta$, $\widehat{OC'H} = \gamma$ trong đó α , β , γ là số đo các nhị diện cạnh BC , CA , AB .

Áp dụng ĐL Pi-ta-go và BĐT Cô-si ta có

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{OA}{OA'}, \operatorname{tg} \beta = \frac{OB}{OB'}, \operatorname{tg} \gamma = \frac{OC}{OC'} ;$$

$$OA^2 = \frac{OB^2 \cdot OC^2}{BC^2} = \frac{OB^2 \cdot OC^2}{OB^2 + OC^2}$$



Tương tự với OB^2 , OC^2 .

Từ đó suy ra :

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \operatorname{tg}^2 \beta \cdot \operatorname{tg}^2 \gamma &= \frac{OA^2 \cdot OB^2 \cdot OC^2}{OA'^2 \cdot OB'^2 \cdot OC'^2} \\ &= \frac{(OB^2 + OC^2)(OC^2 + OA^2)(OA^2 + OB^2)}{OA^2 \cdot OB^2 \cdot OC^2} \geq 2^3. \end{aligned}$$

Và do đó được : $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma \geq 2\sqrt{2}$.

Dấu đẳng thức đạt được khi và chỉ khi $OA = OB = OC$, tức là $OABC$ là một chóp tam giác đều có góc tam diện vuông tại O , hay $OABC$ là một tứ diện vuông cân.

Nhận xét. 1) Các bạn tham gia giải bài toán này khá đông. Tuy nhiên, đa số các bạn cho lời giải phần 1) khá dài vì sử dụng khá nhiều hệ thức lượng giác liên quan đến các yếu tố trong hình tam giác.

2) Các bạn sau đây có lời giải tương đối gọn gàng :

Hà Nội : Nguyễn Trường Giang, 10A1, ĐHKHTN – ĐHQG Hà Nội; **Bắc Ninh :** Nguyễn Bá Chuyên, 12A1, THPT Quế Võ 1, Bắc Ninh ; **Hải Dương :** Vũ Việt Doanh, 9C5, THCS Nhị Chiểu, Kinh Môn, Nguyễn Thị Mai, 11T, THPT ch. Nguyễn Trãi ; **Hưng Yên :** Lưu Xuân Bách, 11 Toán, THPT chuyên Hưng Yên ; **Hải Phòng :** Nguyễn Huy Hoàng, 10 Toán, THPT NK Trần Phú ; **Nam Định :** Phạm Tường Linh, 11A1, THPT Tống Văn Trân, Ý Yên ; **Thanh Hóa :** Lưu Đức Minh, 11K2, Nguyễn Tuấn Dương, 10T, THPT Lam Sơn, Trần Văn Thiện, 12C5, THPT Như Thanh ; **Nghệ An :** Đinh Văn Giáo, K42B2, THPT chuyên Toán – Tin, ĐH Vinh, Phan Đình Phúc, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, Vinh ; **Quảng Trị :** Trương Song Hào, 12 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Nguyễn Trác Việt, 12A1, THPT Tx. Quảng Trị ; **Đà Nẵng :** Thái Thanh Hải, 11A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Tp. Đà Nẵng ; **Lâm Đồng :** Huỳnh Quang Hữu, 11 Toán, THPT chuyên Thăng Long ; **Tp. HCM :** Cao Hoàng Tân, 12A6, THPT chuyên Trần Đại Nghĩa ; **Đồng Tháp :** Lữ Thiện Nhân, 10T, THPT Sa Đéc, Trần Thế Vinh, 11T, THPT Tx. Cao Lãnh.

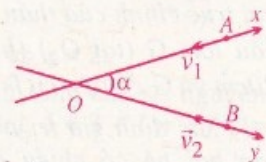
NGUYỄN ĐĂNG PHÁT

Bài L1/317. Hai vật A và B chuyển động thẳng đều trên hai đường thẳng hợp với nhau một góc $\alpha = 30^\circ$ về phía giao điểm O , với các

vận tốc tương ứng là v_1 và $v_2 = \frac{v_1}{\sqrt{3}}$. Khi

khoảng cách giữa hai vật là nhỏ nhất thì vật A cách O một đoạn $d_1 = 30\sqrt{3}$ (m). Hỏi lúc đó vật B cách O bao nhiêu ?

Lời giải. Chọn các trục tọa độ Ox và Oy như trên hình vẽ. Kí hiệu x_0 và y_0 là tọa độ vị trí ban đầu của A và B . Phương trình chuyển động của A và



B là $x = x_0 - v_1 t$; $y = y_0 - v_2 t$ (1)

Khoảng cách giữa hai vật ở thời điểm t là:

$$\begin{aligned} d^2 &= x^2 + y^2 - 2xy \cos \alpha = \\ &= (v_1^2 + v_2^2 - \sqrt{3} v_1 v_2) t^2 - \\ &- [2(x_0 v_1 + y_0 v_2) - \sqrt{3}(x_0 v_2 + y_0 v_1)] t + \\ &+ x_0^2 + y_0^2 - \sqrt{3} x_0 y_0. \end{aligned}$$

Khoảng cách d đạt cực tiểu khi

$$t = t_m = \frac{\sqrt{3}(x_0 \sqrt{3} - y_0)}{2v_1} \quad (2)$$

(vì $v_2 = \frac{v_1}{\sqrt{3}}$). Khi đó vật A và vật B cách O là:

$x_m = x_0 - v_1 t_m$ và $y_m = y_0 - v_2 t_m$ (3). Theo đề bài $x_m = d_1 = 30\sqrt{3}$ (m). Do đó từ (2) và (3) tìm được $y_m = x_m \sqrt{3} = 90$ (m): vật B cách O là 90m.

Nhận xét. Các bạn có lời giải gọn và đúng:

Khánh Hòa: Nguyễn Ngọc Kỳ Nam, 10 Lí, THPT ch. Lê Quý Đôn, Nha Trang; **Quảng Nam:** Nguyễn Thế Tài Lâm, 11/2, THPT Quế Sơn; **Phú Yên:** Nguyễn Hữu Điện, 12C1, THPT Lê Hồng Phong, Tuy Hòa; **Hà Tây:** Lê Đức Hải, 11L2, THPT ch. Nguyễn Huệ, Hà Đông; **Hòa Bình:** Đào Tuấn Tú, 11CL1, THPT ch. Hoàng Văn Thụ; **Ninh Bình:** Vũ Thị Ngọc Ánh, 12A3, THPT Yên Khánh A; **Bình Định:** Trần Quốc Thành, 11 Lí, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Quy Nhơn; **Thanh Hóa:** Nguyễn Huy Hiệu, 10F, THPT Lam Sơn; **Quảng Ngãi:** Trần Anh Đức, 11B1, THPT chuyên Lê Khiết; **Quảng Bình:** Phạm Vũ Đức, THPT chuyên Quảng Bình; **Hải Phòng:** Phạm Tuấn Hiệp, 10 Lí, THPT NK Trần Phú; **Hà Tĩnh:** Nguyễn Văn Dũng, 10 Lí, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Hưng Yên:** Nguyễn Hoàng Duy, 11 Lí, THPT chuyên Hưng Yên; **Bắc Giang:** Dương Trung Hiếu, Hồ Năng Tân, 11B, THPT NK Ngô Sĩ Liên; **Bắc Ninh:** Nguyễn Văn Ngọc, 10 Lí, Lê Minh Huy, 12 Lí, Vũ Văn Thò, 12 Lí, THPT chuyên Bắc Ninh; **Tp. Hồ Chí Minh:** Lê Quốc Khánh, 11 Lí, PTNK, ĐHQG Tp. HCM; **Đắk Lắk:** Nguyễn Chí Linh, 11A1, THPT Phan Bội Châu, Krông Năng; **Vĩnh Long:** Trương Huỳnh Quốc Khánh, 11 Lí, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm; **Nghệ An:** Phan Thanh Hiền, 10 Lí, K32, THPT Phan Bội Châu, Vinh; **Hà Nam:** Lương Tuấn Long, 10 Lí, THPT chuyên Hà Nam; **Phú Thọ:** Nguyễn Quang Huy, 10 Lí, THPT chuyên Hùng Vương; **Vĩnh Phúc:** Nguyễn Ngọc Hùng, 10A3, Cao Việt Trường, 11A3, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hải Dương:** Lê Hoàng Dũng, 10 Lí, THPT ch. Nguyễn Trãi.

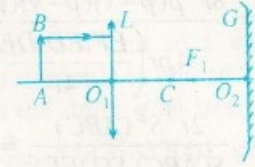
MAI ANH

Bài L2/317. Đặt một vật sáng AB vuông góc với trục chính của thấu kính L (tại O_1) và gương cầu lõm G (tại O_2) (h. vẽ). L có tiêu cự $f_1 = 20$ cm và G có tiêu cự $f_2 = 12$ cm.

1) Xác định giá trị $a = O_1 O_2$ để ảnh của AB tạo bởi hệ có chiều cao không đổi khi dịch chuyển AB dọc theo trục chính của hệ.

2) Bỏ thấu kính L đi thì thu được ảnh rõ nét của AB cao 0,9 cm trên một màn E. Sau đó đặt một bản hai mặt song song trong suốt có độ dày $e = 2$ cm vào thế chỗ của thấu kính, thì phải dịch chuyển màn E ra xa hệ thêm một đoạn $b = 13$ cm mới thu được ảnh rõ nét của AB cao 1,2 cm. Tính chiết suất n của chất làm bản mặt song song.

Lời giải. 1) Khi dịch chuyển AB dọc theo trục chính của quang hệ, thì tia tới từ B song song với trục chính tới quang hệ luôn không đổi. Do đó, để ảnh của AB tạo bởi quang hệ có chiều cao không đổi thì tia ló khỏi quang hệ của tia tới nói trên phải song song với trục chính. Như vậy có thể có 2 trường hợp:



– Đỉnh gương O_2 trùng với tiêu điểm F_1 của L. Khi đó $a = f_1 = 20$ (cm);

– Quang tâm C của gương G trùng với tiêu điểm F_1 của L. Khi đó: $a = f_1 + 2f_2 = 44$ (cm).

2) Khi chưa đặt bản mặt song song, sơ đồ tạo ảnh:

$$AB \xrightarrow{\frac{G}{dd}} A'B'. \text{ Ta có } d' = \frac{df_2}{d - f_2} \quad (1);$$

$$k_1 = \frac{f_2}{f_2 - d}; |k_1| = \frac{A'B'}{AB} = \frac{0,9}{AB} \quad (2).$$

Khi đặt bản mặt song song, sơ đồ tạo ảnh:

$$AB \xrightarrow{BM} A_1 B_1 \xrightarrow{(d-\Delta d)} A_2 B_2 \xrightarrow{(d'+b-\Delta d)} A_3 B_3$$

Với Δd là độ dịch chuyển so với vật của ảnh tạo bởi bản mặt song song $\Delta d = e \left(1 - \frac{1}{n} \right)$ (3)

$$\text{Ta có: } d' + b - \Delta d = \frac{(d - \Delta d)f_2}{(d - \Delta d) - f_2} \quad (4)$$

$$\text{và } k_2 = \frac{f_2}{f_2 - (d - \Delta d)},$$

$$|k_2| = \frac{A_2 B_2}{AB} = \frac{A_3 B_3}{AB} = \frac{1,2}{AB} \quad (5)$$

Từ (2) và (5) ta có:

$$\begin{aligned} \frac{|k_1|}{|k_2|} &= \frac{0,9}{1,2} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{f_2 - (d + \Delta d)}{f_2 - d} = \frac{3}{4} \\ \Rightarrow f_2 &= d - 4\Delta d \end{aligned} \quad (6)$$

Từ (1), (4) và (6), rút ra:

$$(\Delta d)^2 - 13(\Delta d) + 12 = 0.$$

(Xem tiếp trang 7)

NHÌN BÀI TOÁN VỚI CÁC GIẢ THIẾT KHÁC NHAU

(Tiếp bài 3)

$$\operatorname{tg}(BA, d_1) = \operatorname{tg}(d_1, BC) \text{ có } \frac{k_1 - k}{1 + k_1 k} = \frac{k - k_2}{1 + k_2 k}$$

Ta tìm được k_2 và tương tự tìm được hệ số góc k_3 của đường thẳng CA . Ở đây có điều gì đó hơi lạ ! Thật vậy thấy ngay bài toán có vô số nghiệm hình vì ứng với mỗi giá trị tùy chọn của k_1 sẽ có một tam giác thỏa mãn đề bài. Lần này bạn thật sự hài lòng.

Nhưng nếu giả thiết về d_1, d_2 lại thay đổi, chẳng hạn là hai đường cao, hai đường trung tuyến, hai đường trung trực của hai cạnh thì sao ? Chúng tôi tin là bạn sẽ giải quyết được, tuy nhiên cũng xin giới thiệu để các bạn tự đối chiếu với cách thiết lập PT đường thẳng chứa các cạnh của ΔABC trên mặt phẳng tọa độ Oxy trong một số trường hợp dưới đây.

Trường hợp 1. Biết tọa độ A và PT hai đường cao không qua A .

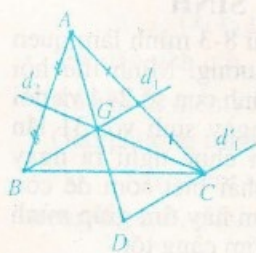
- Lập PT đường thẳng AC qua A và vuông góc với d_1 .
- Lập PT đường thẳng AB qua A và vuông góc với d_2 .
- Tìm tọa độ B, C suy ra PT đường thẳng BC .

Trường hợp 2. Biết tọa độ B , PT đường cao d_1 qua B và PT đường cao d_2 (qua C).

- Lập PT đường thẳng Δ chứa cạnh BA (Δ qua B và vuông góc với d_2).
- Chọn điểm A bất kỳ trên Δ ($A \neq B$), lập PT đường thẳng AC vuông góc với d_1 , cho đường này cắt d_2 để tìm tọa độ C .

Bài toán có vô số nghiệm hình vì ứng với mỗi $A \in \Delta$ sẽ có một tam giác thỏa mãn.

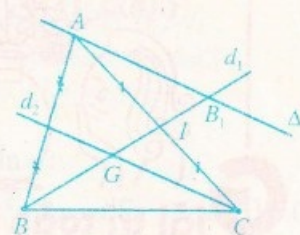
Trường hợp 3. Biết tọa độ A , PT hai trung tuyến d_1, d_2 (lần lượt qua B , qua C) (h. 2).



Hình 2

- Tìm tọa độ trọng tâm G của ΔABC (d_1 cắt d_2 tại G).
- Tìm tọa độ điểm D đối xứng với A qua G .
- Lập PT đường thẳng d_1 qua D và song song với d_1 .
- Tìm tọa độ C là giao điểm của d_1 và d_2 . Tọa độ B cũng được xác định tương tự.

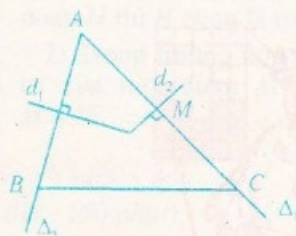
Trường hợp 4. Biết tọa độ B và PT hai đường trung tuyến d_1, d_2 (lần lượt qua B , qua C) (h.3).



Hình 3

- Tìm tọa độ trọng tâm G của ΔABC
 - Tìm tọa độ điểm B_1 đối xứng với B qua G .
 - Lập PT đường thẳng Δ_1 qua B_1 và song song với d_2 .
 - Tìm tọa độ I , trung điểm của GB_1
 - Chọn một điểm A thích hợp trên Δ_1 , tìm tọa độ C (C đối xứng với A qua I)
- Bài toán có vô số nghiệm hình.

Trường hợp 5. Biết tọa độ A ; PT hai đường trung trực d_1, d_2 (của AB và của AC) (h.4)



Hình 4

- Lập PT đường thẳng Δ_1 qua A và vuông góc với d_2 .
- Tìm tọa độ giao điểm M của Δ_1 và d_2
- Tìm tọa độ điểm C đối xứng với A qua M . Tương tự. Tìm được tọa độ B .

Trường hợp 6. Biết tọa độ B và PT hai đường trung trực (của AB và của AC).

Ta chỉ cần tìm tọa độ điểm A đối xứng với B qua d_1 , rồi tìm tọa độ C đối xứng với A qua d_2 .

Có vẻ như các vấn đề đã được giải quyết bởi vì hình như chúng ta đã xét đủ các trường hợp có liên quan đến các đường đặc biệt trong tam giác. Nhưng chưa !

1) Chúng ta chưa xét bài toán với giả thiết cho biết PT hai đường phân giác ngoài (chắc là lí thú lắm đây !)

2) Khi xét bài toán biết tọa độ B , PT đường phân giác trong d_1 qua B , PT phân giác trong d_2 chúng ta đã gọi k_1 là hệ số góc của đường thẳng BA , từ đó tìm được lời giải. Nhưng xét đường thẳng có hệ số góc là đã đương nhiên coi nó là đường ngang hoặc xiên. Nếu nó lại là đường thẳng đứng có dạng $x = m$ thì sao ?

Mong được tiếp tục trao đổi với các bạn.

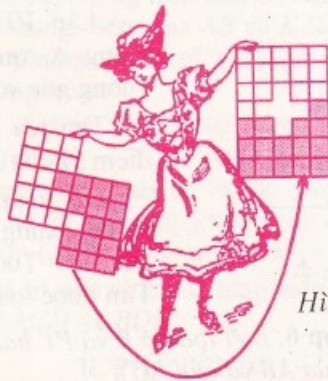


Giải đáp bài :

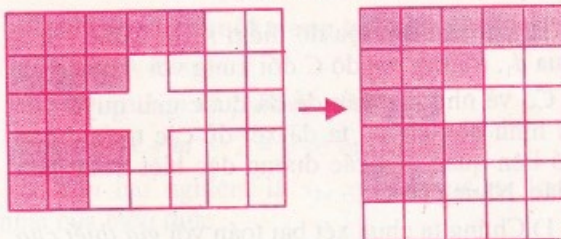
CÔ GÁI THỤY SĨ ĐỒ BẠN

(THTT số 318, tháng 12 năm 2003)

Tòa soạn nhận được khá nhiều lời giải cho bài toán này. Tất cả các bạn đều đưa ra cách cắt ghép đúng theo yêu cầu. Dưới đây là đáp án của bài *Cô gái Thụy Sĩ đồ bạn* thể hiện qua hai hình vẽ (hình 1 thể hiện yêu cầu thứ nhất, hình 2 thể hiện yêu cầu thứ hai của cô gái).



Hình 1



Hình 2

Các bạn sau được nhận tặng phẩm kì này :

Nguyễn Tuấn Linh, 10 Toán, THPT Nguyễn Tất Thành, Yên Bái ; Dương Trung Hiếu, 11B, THPT NK Ngô Sĩ Liên, Bắc Giang ; Nguyễn Thị Thu Huyền, 11A Sinh, ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội ; Nguyễn Ngọc Hà, 7/3, THCS Lê Quý Đôn, Tp. Hải Dương ; Trần Văn Ngọc Tân, 9³, THCS Phan Thúc Điện, Điện Thọ, Điện Bàn, Quảng Nam.

HỒNG QUANG

BẠN ĐỌC TÌM TÔI

X hỏi ? Y, Z trả lời.

Mục **Bạn đọc tìm tôi** nhận được rất nhiều các bài viết và đề, câu hỏi của bạn đọc, nhất là các bạn học sinh. Để nhiều bạn có thể tham gia trên báo, chúng tôi sẽ lần lượt nêu các câu hỏi của các bạn. Mời các bạn ở khắp mọi miền đất nước gửi câu trả lời về (bạn nhớ ghi số của câu hỏi). Chúng tôi sẽ chọn đăng các câu trả lời kèm tên, địa chỉ các bạn. Một câu hỏi có thể đăng nhiều câu trả lời nếu hay. Các câu hỏi kì này là :

1.(3.04). Một cuốn sách có bài "Chứng minh rằng biểu thức

$$A = x^5 + 3x^4y - 5x^3y^2 - 15x^2y^3 + 4xy^4 + 12y^5$$

nhận mọi giá trị khác 33"

và đã giải :

$$A = (x + 3y)(x - y)(x + y)(x - 2y)(x + 2y)$$

$$\text{Vì } 33 = (-3)(11)(1)(-1) = 3(-11)(-1)(1)$$

Nên $A \neq 33$..."

Xin cho ý kiến về bài này ?

(Một bạn không ghi tên)

2.(3.04). Bất đẳng thức $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$ với $x \geq 0, y \geq 0$ gọi là gì, mang tên ai ?

(Nhiều bạn hỏi).

3.(3.04). Giải phương trình $x^2 - 3x + 2 = 0$

Giải : PT trên tương đương với

$$(x - 1)(x - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Có hai cách trả lời :

Vậy phương trình có hai nghiệm :

$$x = 1 \text{ và } x = 2 \quad (1)$$

$$x = 1 \text{ hoặc } x = 2 \quad (2)$$

Nên chọn cách nào ?

(Trần Thị H, Diên Hồng, Diên Châu, Nghệ An)

THTT

TÌM NGÀY SINH

Vào ngày Quốc tế Phụ nữ 8-3 mình làm quen với một bạn gái rất dễ thương. Mình thử hỏi ngày sinh, nàng viết cho mình con số 244 và nói "Đây là tổng của 12 lần ngày sinh với 31 lần tháng sinh của em". Mình chưa nghĩ ra ngay nên rất bồn chồn vì cần phải biết sớm để còn tặng hoa cho nàng. Các bạn hãy tìm giúp mình ngày sinh của cô ấy càng sớm càng tốt.

BÙI CÔNG THỨC

(Kho Thành phẩm - Công ty Mabuchi KCN Biên Hòa 2 - Đồng Nai)



Giải đáp bài : PHÂN VÂN

(THIT số 318, tháng 12 năm 2003)

Nhận xét rằng với hai hàm $y = f(x)$ và $y = g(x)$ xác định trên R thì từ $\min_{x \in R} f(x) \geq \max_{x \in R} g(x) \Rightarrow$

$f(x) \geq g(x) (\forall x \in R)$ là đúng (nghĩa là $f(x_0) \geq g(x_0)$ với mọi giá trị xác định x_0 thuộc R), nhưng điều ngược lại chưa chắc đúng. Đây là nguyên nhân chính dẫn đến sai lầm. Có thể đưa ra phản ví dụ sau :

Với hai hàm $f(x) = \sin x$; $g(x) = -\sqrt{2} + \cos x$ xác định trên R , ta có : $f(x) \geq g(x) (\forall x \in R)$, nhưng $\min_{x \in R} f(x) = -1 < \max_{x \in R} g(x) = 1 - \sqrt{2}$. Như

vậy ta thấy rằng ĐK $m \geq 1 + \sqrt{2}$ ở lời giải đã đăng chỉ là ĐK đủ mà chưa là ĐK cần. Vì vậy kết quả trên chưa phải là tập tất cả các giá trị của tham số m để bất phương trình đã cho nghiệm đúng với mọi x .

Giải lại bài toán : Xét hàm $f(x) = \sin x + \cos x - \sin 2x = \frac{5}{4} - \left(\sin x + \cos x - \frac{1}{2} \right)^2 \leq \frac{5}{4}$.

Tồn tại x_0 để $\sin x_0 + \cos x_0 = \frac{1}{2}$.

Suy ra $\max_{x \in R} f(x) = \frac{5}{4}$. Vậy để BPT đã cho nghiệm đúng với mọi $x \in R$ thì ĐK cần và đủ là $m \geq \max_{x \in R} f(x)$, hay $m \geq \frac{5}{4}$.

Rất nhiều bạn đã chỉ đúng chỗ sai của lời giải bài toán và hầu hết các bạn đều giải lại bằng PP đạo hàm : tìm giá trị lớn nhất của hàm $f(x) = \sin x + \cos x - \sin 2x$ trên R , hay hàm $f(t) = t^2 + t + 1$ trên $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ để suy ra kết quả đúng là $m \geq \frac{5}{4}$. Sau đây là các bạn có đáp án tốt hơn cả:

Nguyễn Minh Thập, 10A1 Toán, ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội, Đỗ Xuân Chi, 11A4, THPT Xuân Đình, Từ Liêm, Hà Nội ; Nguyễn Văn Ngọc, 10 Lí, THPT chuyên Bắc Ninh, Bắc Ninh; Nguyễn Tiến Dũng, 10A1, THPT Thanh Hà, Hải Dương ; Nguyễn Hoàng Minh, 10A1, THPT Lê Quý Đôn, Tp. Quy Nhơn, Bình Định.

NGỌC HIỀN

PHẢI CHĂNG LÀ ... ĐÚNG !

Bài toán : Cho a, b là hai số dương và x, y, z là các số dương tùy ý. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$M = \frac{x^2}{(ay+bz)(az+by)} + \frac{y^2}{(az+bx)(ax+bz)} + \frac{z^2}{(ax+by)(ay+bx)}$$

Một bạn học sinh đã giải như sau :

Để dàng chứng minh được :

$$(ay+bz)^2 \leq (a^2+b^2)(y^2+z^2)$$

$$\text{Tương tự } (az+by)^2 \leq (a^2+b^2)(z^2+y^2)$$

$$\text{Vậy } \frac{x^2}{(ay+bz)(az+by)} \geq \frac{x^2}{(a^2+b^2)(y^2+z^2)}$$

Tương tự

$$\frac{y^2}{(az+bx)(ax+bz)} \geq \frac{y^2}{(a^2+b^2)(z^2+x^2)}$$

$$\frac{z^2}{(ax+by)(ay+bx)} \geq \frac{z^2}{(a^2+b^2)(x^2+y^2)}$$

Do đó

$$M \geq \frac{1}{a^2+b^2} \left(\frac{x^2}{y^2+z^2} + \frac{y^2}{z^2+x^2} + \frac{z^2}{x^2+y^2} \right)$$

Mặt khác ta chứng minh được :

$$\frac{x^2}{y^2+z^2} + \frac{y^2}{z^2+x^2} + \frac{z^2}{x^2+y^2} \geq \frac{3}{2}$$

$$\text{Suy ra } M \geq \frac{3}{2(a^2+b^2)}$$

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của M là $\frac{3}{2(a^2+b^2)}$

Cách trình bày trên phải chăng là ... đúng !
Bạn giải bài toán này như thế nào ?

NGUYỄN ĐỨC TẤN
(Tp. Hồ Chí Minh)

Toán học và Tuổi trẻ

Mathematics and Youth

NĂM THỨ 41

Số 321 (3-2004)

Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội

ĐT - Fax : 04.5144272

Email : toanhocvt@yahoo.com

TRONG SỐ NÀY

- 1 **Dành cho Trung học Cơ sở – For Lower Secondary Schools**
Trần Văn Hình – Chuyển phương trình vô tỉ về hệ phương trình hữu tỉ
- 2 **Tiếng Anh qua các bài toán - English through Math Problems**
Ngô Việt Trung – Bài số 66
- 3 **Đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên Toán Tin trường ĐHSP Hà Nội năm 2003**
- 4 **Đề thi học sinh giỏi toán THCS Tp. Hồ Chí Minh năm học 2003 - 2004**
- 4 **Chuẩn bị thi vào Đại học – University Entrance Preparation**
Đặng Vũ Hà – Hướng dẫn giải đề tự ôn thi số 1 (tiếp theo kì trước)
Nguyễn Anh Dũng – Đề tự ôn thi số 3
- 7 ***Trần Mạnh Hưng* – Về một bài toán tính tổng**
- 8 **Tính toán cách nào? - How to Calculate?**
Vũ Kim Thủy – Ước lượng và sai số
Câu lạc bộ – Math Club
Vẽ cây toán học
- 11 **Phương pháp giải toán – Math Problem Solving**
Phạm Quốc Phong – Phương trình cát tuyến của đường cong (tiếp theo kì trước)
- 14 **Đề ra kì này – Problems in This Issue**
T1/321, ..., T8/321, L1, L2/321.
- 15 **Cuộc thi giải toán kỉ niệm 40 năm THPT**
- 16 **Giải bài kì trước – Solutions to Previous Problems.** Giải các bài của số 317.
- 26 **Giải trí toán học - Math Recreation**
Bạn đọc tìm tòi - Reader's Contribution
- 27 **Sai lầm ở đâu - Where's the Mistake ?**

Bìa 1 : Các thầy Hiệu trưởng Đoàn Xuân Cảnh và Phó Hiệu trưởng Lê Trường Sơn tiễn Đoàn cán bộ và học sinh trường THPT Nguyễn Tất Thành đi dự hội trại tại Sing-ga-po

Bìa 2 : Từ kho tàng Toán học – From Math Treasure
Phỏng đoán Kepler và đốm ánh sáng

Bìa 3 : Diễn đàn dạy học toán – Math Teaching Forum
Bài toán với các giả thiết khác nhau

Tổng biên tập :
NGUYỄN CẢNH TOÀN

Chịu trách nhiệm xuất bản :
Chủ tịch HĐQT kiêm Tổng Giám đốc NXB Giáo dục
NGÔ TRẦN ÁI
Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập NXB Giáo dục
VŨ DƯƠNG THUY

Trưởng ban biên tập : NGUYỄN VIỆT HẢI

Biên tập : VŨ KIM THUY, HỒ QUANG VINH.

Trị sự : VŨ ANH THU

Trình bày : NGUYỄN THỊ OANH.

Đại diện phía Nam : TRẦN CHÍ HIẾU, 231 Nguyễn Văn Cừ, Q. 5, Tp. Hồ Chí Minh.

ĐT : 08.8309049

ĐÓN ĐỌC THPT SỐ 322 (4/2004)

- Cuộc thi giải toán đặc biệt kỉ niệm 40 năm THPT (các đề tiếp theo)
- Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT Chu Văn An và Hà Nội - Amsterdam 2003
- Hướng dẫn giải đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT CTT ĐHSP Hà Nội
- Một hàm số liên quan đến hệ tam phân
- Phía sau trang sử về mật mã khóa công khai
- Đề tự ôn thi ĐH, CĐ số 4. Hướng dẫn giải đề tự ôn thi số 2.

Mời các bạn đặt mua TẬP 5 NĂM TẬP CHÍ TOÁN HỌC TUỔI TRẺ theo địa chỉ : Trung tâm Phát hành sách tham khảo NXB Giáo dục, 187B Giảng Võ, Hà Nội, ĐT: (04)5141253 hoặc liên hệ trực tiếp với Tòa soạn tạp chí THPT, 187B Giảng Võ, Hà Nội, ĐT : (04)5144272.

THPT



PGS. TS Bùi Quang Trường sinh ngày 28.11.1953 tại quận Hoàn Kiếm, Hà Nội, giảng viên trường ĐH Xây dựng. Khi còn là học sinh đã 3 lần được nhận giải thưởng của Bác Hồ, 2 lần được nhận giải thưởng của tạp chí THPT. Là người say mê nghiên cứu toán học sơ cấp,

đặc biệt là phương trình vô định và lý thuyết số, ông đã in 7 cuốn sách về toán, 11 bài trên THPT. Ông coi việc học toán và giải toán là niềm vui, sự giải trí, là nhân tố góp phần tạo nên con người điềm tĩnh, sáng suốt, trẻ trung, coi THPT là tài liệu gối đầu giường và là nguồn cảm hứng vô tận.



NHÌN BÀI TOÁN VỚI CÁC GIẢ THIẾT KHÁC NHAU

BÙI QUANG TRƯỜNG

Bạn có những cách nào để tìm tọa độ điểm M đối xứng với điểm $A(3, 4)$ qua đường thẳng (d) :

$-2x + 5y + 7 = 0$ trên mặt phẳng tọa độ Oxy ? Chắc là không khó, chỉ cần viết phương trình (PT) đường thẳng Δ qua A , vuông góc với d :

$$(\Delta): \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 4 + 5t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Cho hai đường thẳng này cắt nhau ta tìm được $t = -\frac{21}{29}$, nghĩa là tọa độ giao điểm của d và Δ

là $I\left(4\frac{13}{29}, \frac{11}{29}\right)$. Từ đó tìm được tọa độ điểm M

nhờ công thức
$$\begin{cases} x_M = 2x_I - x_A \\ y_M = 2y_I - y_A \end{cases}$$

Bạn cũng có thể lấy $I(x_0, y_0)$ trên d , tức là: $y_0 = \frac{-7 + 2x_0}{5}$, khai thác tính chất: vectơ $\overline{AI}$

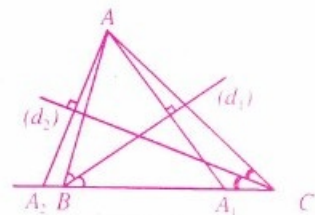
cùng phương với vectơ pháp tuyến của đường thẳng d để tìm ra tọa độ điểm I , từ đó suy ra tọa độ của M .

Bạn có thể áp dụng các cách trên để giải bài toán sau:

Viết PT ba đường thẳng chứa các cạnh của một tam giác biết tọa độ một đỉnh là $(-4, 1)$ và PT hai đường phân giác trong là $x + y - 6 = 0$ (d_1) và $-x + 2y + 1 = 0$ (d_2)

Giả sử ABC là tam giác cần tìm với $A(-4, 1)$. Để thử được các đường thẳng d_1, d_2 đều không đi qua A . Ta hãy vẽ

phác ΔABC (h. 1). Đây rồi, nếu lấy các điểm A_1, A_2 đối xứng với A lần lượt qua các đường thẳng d_1, d_2 thì các điểm A_1, A_2 nằm trên đường thẳng BC . Bài toán đã có



Hình 1

hướng giải quyết nhờ dựa vào tính chất của đường phân giác: hai cạnh của một góc đối xứng với nhau qua đường phân giác của góc đó. Ta tìm được tọa độ của B, C rồi viết PT của AB, AC .

Chắc bạn rất phấn khởi vì đã giải được một bài toán. Nhưng từ cách giải này có thể giải được bài toán tương tự khi thay đổi giả thiết hay không? Nếu điểm đã cho nằm trên một đường phân giác d_1 hoặc d_2 thì sao? Chẳng hạn biết điểm B có tọa độ $(3, 3)$ thuộc đường thẳng d_1 . Bạn lại có thể đau đầu đấy vì cách làm trên không thể áp dụng cho trường hợp này. Bị bài toán mới ám ảnh, nhưng bạn vẫn có thể bám vào tính chất của đường phân giác và chợt thấy rằng: nếu gọi k_1, k_2, k lần lượt là hệ số góc của đường thẳng BA, BC, d_1 thì từ

(Xem tiếp trang 25)



TRƯỜNG THPT CHUYÊN NGUYỄN TẮT THÀNH, YÊN BÁI

Trường THPT chuyên Nguyễn Tất Thành tỉnh Yên Bái được thành lập từ ngày 15-10-1989. Lúc mới thành lập trường mang tên là THPT chuyên Hoàng Liên Sơn có 4 lớp với gần một trăm học sinh. Đến nay trường có 15 lớp với 442 học sinh, trong đó có 135 học sinh ở các huyện ngoài thành phố Yên Bái. Nhà trường phấn đấu thực hiện tốt việc giáo dục đào tạo đạt chất lượng cao trên nền phát triển toàn diện.

Từ năm học 1989-1990 đến năm học 2002-2003 trường đã hoàn thành xuất sắc nhiệm vụ được giao : học sinh tốt nghiệp 100%, thi vào đại học và cao đẳng đỗ ngay từ năm đầu trên 90%, nhiều năm tỉ lệ vào đại học là 100%. Trong 14 năm học qua trường có 186 học sinh đoạt giải học sinh giỏi quốc gia bằng B với 1 giải nhất, 28 giải nhì, 79 giải ba. Nhiều học sinh của trường vào đại học tiếp tục phát huy năng lực học tập nghiên cứu, đã được tuyển chọn đi du học ở Nhật, Pháp, Đức, Nga, Ô-xtrây-li-a, Cu Ba, Hàn Quốc, Trung Quốc...

Có nhiều học sinh được chọn vào học các lớp cử nhân tài năng của Đại học Bách khoa Hà Nội, Đại học Quốc gia Hà Nội.



Tổ giáo viên Toán Tin

Không chỉ học tập tốt học sinh của trường còn tích cực tham gia các hoạt động xã hội, văn nghệ, thể thao ở địa phương và các sân chơi của tuổi trẻ cả nước như *Đường lên đỉnh Olympia*.

Nhà trường có một đội ngũ các thầy giáo, cô giáo, cán bộ nhân viên nhiệt tình và có trách nhiệm. Tính đến nay đã có 2 nhà giáo ưu tú, 2 chiến sĩ thi đua và 23 giáo viên giỏi cấp tỉnh.

Cùng với việc cử cán bộ giáo viên đi học các lớp dài hạn, các lớp tập huấn do Bộ Giáo dục và Đào tạo mở, nhà trường còn chú trọng việc tự học, tự đọc, tự bồi dưỡng. Trường có 10 thạc sĩ và một số đang là nghiên cứu sinh. Mỗi giáo viên tự chọn cho mình một loại tạp chí như : Toán học và Tuổi trẻ, Văn học và Tuổi trẻ, ... làm tài liệu nghiên cứu, bồi dưỡng. Tổ chức việc viết chuyên đề cho Báo học tập của trường, tham gia Câu lạc bộ các hoạt động ngoại khóa... Thầy giáo và học sinh tích cực tham gia viết bài, giải bài trên các tạp chí trung ương và địa phương.

Ngôi trường ở một tỉnh miền núi còn nhiều khó khăn. Chặng đường 10 năm đi qua chưa dài nhưng những gì đạt được đã hứa hẹn một kết quả tốt hơn trong bước đường sắp tới.

ISSN : 0866-8035

Chỉ số : 12884

Mã số : 8BT23M4

Chế bản tại Tòa soạn

In tại Nhà máy in Diên Hồng, 187B phố Giảng Võ

In xong và nộp lưu chiểu tháng 3 năm 2004

Giá : 3400 đồng

Ba nghìn bốn trăm đồng