

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO * HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

Toán học & Tuổi trẻ

12
2003

SỐ 318 - NĂM THỨ 40 - TẬP CHÍ RA HÀNG THÁNG

DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ



Cô giáo và đội tuyển Toán 9 của trường Trần Cao Vân

- Những giả thuyết về số Mersenne
- Những sai lầm dễ mắc phải khi làm toán thi vào đại học
- Đề thi vào trường chuyên Lê Quý Đôn, Đà Nẵng.



TOÁN HỌC MUÔN MÀU

NỐI CHUỖI DÂY CHUYỀN

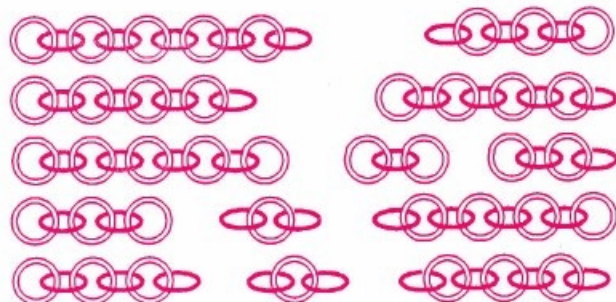
Một người thợ kim hoàn chuẩn bị nối 13 chuỗi dây chuyền vàng có sẵn (hình 1) thành một dây chuyền kín gồm 40 vòng (kín) lớn và 40 vòng (kín) nhỏ xen kẽ nhau. Biết rằng thời gian hàn làm hở 1 vòng (lớn hoặc nhỏ) là 1 phút, còn hợp nhất hai chuỗi bởi một vòng hở là 2 phút. Nếu người thợ hàn làm hở 1 vòng ở đầu mỗi chuỗi rồi nối với chuỗi khác thì mất tất cả:

$$1 \text{ (phút)} \times 13 + 2 \text{ (phút)} \times 13 = 39 \text{ (phút)}$$

Dành cho bạn đọc

1) Bạn hãy chỉ ra cách nối 13 chuỗi trên trong 33 phút.

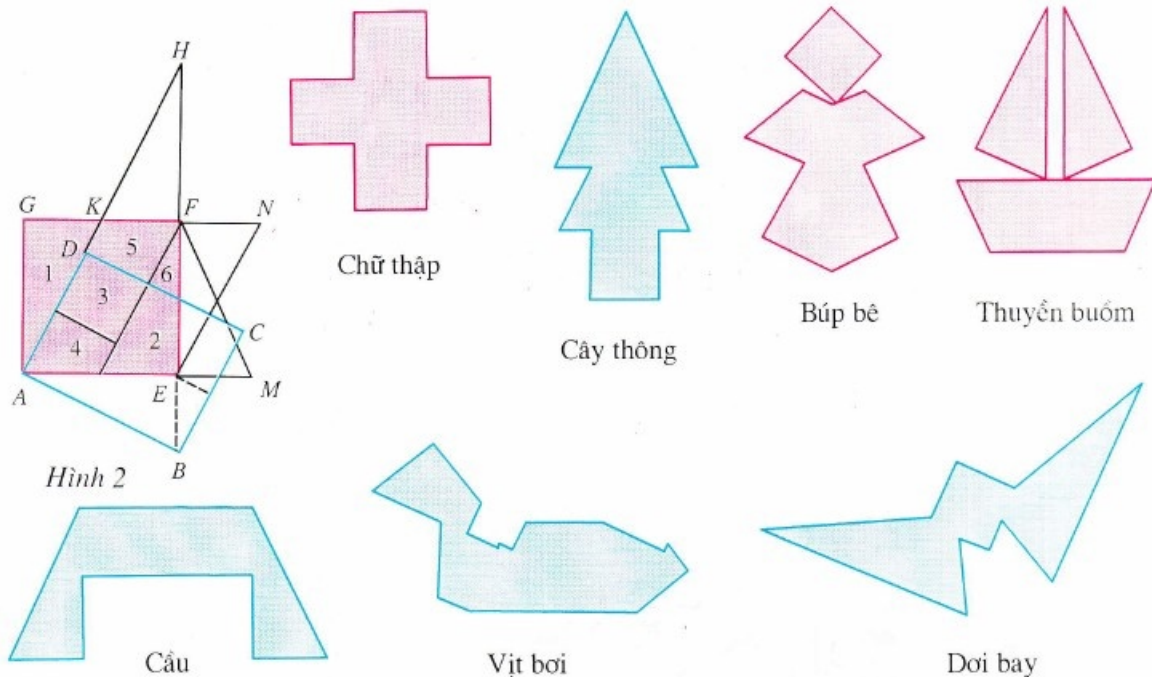
2) Thời gian ít nhất để nối 13 chuỗi trên là bao nhiêu ?



Giải đáp : XẾP HÌNH (THTT số 314 tháng 8/2003)

Từ hình chữ nhật $ABCD$ gồm 6 miếng bìa, nếu chuyển các miếng 1, 5, 6 ta được hình vuông $AEFG$ (hình 2). Từ hình vuông $AEFG$ nếu chuyển $\triangle AGK$ (miếng 1) thành $\triangle HFK$ thì được tam giác vuông AEH , nếu chuyển $\triangle AGK$ thành $\triangle AFN$ thì được hình bình hành $AKNE$, nếu chuyển $\triangle AGK$ thành $\triangle FEM$ thì được hình thang $AKFM$ (h. 2).

Xin giới thiệu một số hình khác để các bạn tự xếp hình.



Các bạn sau có nhiều hình đẹp được nhận tặng phẩm :

- 1) *Bùi Thanh Châm*, 11A4, THPT chuyên Hà Nam, Tx. Phủ Lý, **Hà Nam**.
- 2) *Hoàng Bảo Ngọc Linh*, tổ 2, T tr. An Dương, h. An Dương, **Hải Phòng**.
- 3) *Lê Thị Lan Hương*, 9A1, THCS Trần Mai Ninh, Tp. **Thanh Hóa**.
- 4) *Nguyễn Nam Thanh*, 12 chuyên Tin, THPT Lam Sơn, Tp. **Thanh Hóa**.
- 5) *Lê Nam Trường*, 10 Toán, THPT NK **Hà Tĩnh**.
- 6) *Võ Thái Thông*, 7/4, THCS Ngô Gia Tự, Cam Nghĩa, Cam Ranh, **Khánh Hòa**.
- 7) *Nguyễn Hoàng Phương Đông*, 10T1, THPT ch. Trần Hưng Đạo, Tp. Phan Thiết, **Bình Thuận**.

PHI PHI

Dành cho các bạn TRUNG HỌC CƠ SỞ



Trong khi học toán việc tìm tòi để tìm mối liên hệ giữa các hệ thức, bất đẳng thức rất cần thiết và thú vị, nó giúp ta củng cố kiến thức đã có, hệ thống hóa chúng, cho phép ghi nhớ sâu sắc để vận dụng vào giải toán, đồng thời tập cho ta làm quen với việc nghiên cứu toán học. Trong bài này ta thử tìm tòi về mối liên hệ giữa các cạnh và diện tích tam giác.

Cho tam giác ABC với $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ và $a+b+c = 2p$. Xuất phát từ công thức $2S = a.AH$, trong đó S , AH lần lượt là diện tích và

các góc $\widehat{ABC}$ và $\widehat{ACB}$ đều nhọn nên chân của đường cao AH nằm trong đoạn BC (h. 1). Áp dụng định lý Pi-ta-go (có thể $BH = 0$ hoặc $CH = 0$):

$$4S^2 = a^2.AH^2 = a^2(b^2 - CH^2) = a^2b^2 - a^2CH^2$$

$$\text{Mặt khác } BH^2 = AB^2 - AH^2 = AB^2 - (AC^2 - CH^2) = AB^2 - AC^2 + CH^2.$$

$$BH^2 = (BC - CH)^2 = BC^2 + CH^2 - 2BC.CH$$

Từ hai đẳng thức trên đối với BH^2 suy ra $c^2 - b^2 = a^2 - 2a.CH$ hay $4a^2.CH^2 = (a^2 + b^2 - c^2)^2$, thay vào hệ thức tính S được :

$$16S^2 = 4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2 \quad (3)$$

$$\text{hay } S = \frac{1}{4} \sqrt{4a^2b^2 - (a^2 + b^2 - c^2)^2}$$

Từ (3) có

$$16S^2 = (2ab + a^2 + b^2 - c^2)(2ab - a^2 - b^2 + c^2)$$

$$= ((a+b)^2 - c^2)(c^2 - (a-b)^2) \quad (3')$$

$$= (a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b)$$

$$= 2p.2(p-c).2(p-b).2(p-a)$$

TÌM MỐI LIÊN HỆ GIỮA CÁC BẤT ĐẲNG THỨC VỀ CẠNH VÀ DIỆN TÍCH TAM GIÁC

NGUYỄN VIỆT HẢI

đường cao của $\triangle ABC$, ta tìm các bất đẳng thức (BĐT) liên hệ giữa diện tích và các cạnh của tam giác.

Từ $2S = a.AH$ suy ra $2S \leq ab$ và $2S \leq ac$. Tương tự có $2S \leq bc$. Cộng theo từng vế ba bất đẳng thức trên và chú ý rằng dấu đẳng thức không xảy ra đồng thời nên có

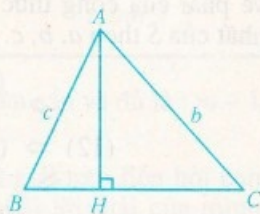
$$6S < ab+bc+ca \Rightarrow S < \frac{1}{6}(ab+bc+ca) \quad (1)$$

$$\text{Từ đó, áp dụng BĐT } ab+bc+ca \leq a^2+b^2+c^2 \quad (*)$$

$$\text{có } S < \frac{1}{6}(a^2+b^2+c^2) \quad (2)$$

Sự ước lượng trên của S theo a, b, c chưa thật tốt nên ta tìm cách khác dựa vào công thức Hê-rông.

Giả sử $\widehat{BAC}$ là góc lớn nhất của $\triangle ABC$ thì



Hình 1

Ta có công thức Hê-rông

$$S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$$

$$\text{hay } S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad (4)$$

Chú ý rằng các công thức (3) và (4) là tương đương. Từ công thức Hê-rông có nhiều cách tìm BĐT giữa S và a, b, c .

Cách 1. Áp dụng BĐT Cô-si cho 3 số được :

$$(p-a)(p-b)(p-c) \leq \left(\frac{p-a+p-b+p-c}{3} \right)^3$$

$$\Leftrightarrow p(p-a)(p-b)(p-c) \leq p^4/27$$

Áp dụng công thức Hê-rông ta có

$$S^2 \leq \frac{p^4}{27} \Leftrightarrow S \leq \frac{\sqrt{3}}{9} p^2 \Leftrightarrow 12\sqrt{3}S \leq$$

$$(a+b+c)^2 \text{ hay } S \leq \frac{\sqrt{3}}{36} (a+b+c)^2 \quad (5)$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \triangle ABC$ đều.

Khai triển vế phải của (5) rồi áp dụng BĐT (*) có $(a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2)$ nên $4\sqrt{3}S \leq a^2+b^2+c^2$ hay $S \leq \frac{\sqrt{3}}{12}(a^2+b^2+c^2)$ (6)

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

Cách 2. Biến đổi công thức (3') được

$$16S^2 = ((a+b)^2 - c^2)(c^2 - (a-b)^2) \\ = (a+b)^2 c^2 - c^4 + (a-b)^2 c^2 - (a-b)^2 c^2 \\ \Rightarrow 16S^2 = 2(a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2) - (a^4 + b^4 + c^4) \quad (7)$$

Từ BĐT (*) có $a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2 \leq a^4 + b^4 + c^4$ (***) nên từ (7) có

$$16S^2 \leq a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2 \\ \text{hay } S \leq \frac{1}{4} \sqrt{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2} \quad (8)$$

Từ (8) và (**) suy ra $16S^2 \leq a^4 + b^4 + c^4$

$$\text{hay } S \leq \frac{1}{4} \sqrt{a^4 + b^4 + c^4} \quad (9)$$

Cách 3. Từ BĐT (*) có

$$(xy)(yz) + (yz)(zx) + (zx)(xy) \leq (xy)^2 + (yz)^2 + (zx)^2 \\ \Leftrightarrow 3xyz(x+y+z) \leq (xy+yz+zx)^2$$

Đặt $x = p-a$, $y = p-b$, $z = p-c$ thì $x+y+z = p$ từ công thức Hê-rông và BĐT trên có:

$$4\sqrt{3}S = 4\sqrt{3xyz(x+y+z)} \leq 4(xy+yz+zx) \text{ mà} \\ 4(xy+yz+zx) = (2p-2a)(2p-2b) + \\ + (2p-2b)(2p-2c) + (2p-2c)(2p-2a) \\ = (b+c-a)(a+c-b) + (a+c-b)(a+b-c) + \\ + (a+b-c)(b+c-a) \\ = c^2 - (a-b)^2 + a^2 - (b-c)^2 + b^2 - (c-a)^2$$

Từ đó suy ra:

$$4\sqrt{3}S + (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \leq a^2 + b^2 + c^2 \quad (10)$$

$$\text{và } 4\sqrt{3}S \leq 2(ab+bc+ca) - (a^2 + b^2 + c^2) \quad (11)$$

Áp dụng BĐT (*) vào (11) dẫn đến

$$4\sqrt{3}S \leq ab+bc+ca \text{ hay } S \leq \frac{\sqrt{3}}{12}(ab+bc+ca) \quad (12)$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $xy = yz = zx$ $\Leftrightarrow x = y = z \Leftrightarrow a = b = c \Leftrightarrow \Delta ABC$ là đều.

Nếu áp dụng BĐT (*) thì từ (12) suy ra công thức (5), (6) và (8). Cũng dễ thấy từ (12) suy ra (1) và từ (6) suy ra (2). Từ (10) suy ra (6).

Áp dụng BĐT (**) thì từ công thức (8) suy ra (6) và từ (6) suy ra (9).

Ta có thể tóm tắt mối liên hệ giữa các bất đẳng thức về mối liên hệ giữa diện tích và các

ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 CHUYÊN TOÁN - TIN TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN, ĐÀ NẴNG

(Thời gian làm bài : 150 phút)

Bài 1: (2 điểm)

a) Thu gọn biểu thức:

$$P = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6} + \sqrt{8} + 4}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4}}$$

b) Tính giá trị của biểu thức: $Q = \frac{x-y}{x+y}$; biết $x^2 - 2y^2 = xy$ và $y \neq 0$, $x + y \neq 0$.

Bài 2. (2 điểm): Giải các phương trình sau:

$$\text{a) } 2\sqrt[3]{x^2} - 5\sqrt[3]{x} = 3; \quad \text{b) } x^3 - x^2 - x = \frac{1}{3}.$$

Bài 3. (2 điểm)

a) Tìm hai số tự nhiên a và b thỏa mãn:

$$a - b = \frac{a}{b}.$$

b) Cho hai số dương a , b và $a + b = 5$. Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng: $P = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

Bài 4. (1,5 điểm). Cho hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - 3y - 3 = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x - 2y - 9 = 0 \end{cases}$$

Gọi $(x_1; y_1)$ và $(x_2; y_2)$ là hai nghiệm của hệ phương trình trên. Hãy tính giá trị của biểu thức: $M = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$.

Bài 5. (2,5 điểm). Cho đường tròn tâm O và một dây AB của đường tròn đó. Các tiếp tuyến vẽ từ A và B của đường tròn cắt nhau tại C . Kẻ dây CD của đường tròn có đường kính OC (D khác A và B). CD cắt cung $\widehat{AB}$ của đường tròn (O) tại E (E nằm giữa C và D). Chứng minh:

$$\text{a) } \widehat{BED} = \widehat{DAE}; \quad \text{b) } DE^2 = DA \cdot DB.$$

cạnh của một tam giác trong sơ đồ sau, trong đó vế phải của công thức (12) là sự ước lượng tốt nhất của S theo a, b, c .

$$\begin{array}{l} (1) \Rightarrow (2) \\ \Rightarrow \uparrow \\ (12) \Rightarrow (5) \Rightarrow (6) \\ \Rightarrow \nearrow \downarrow \\ (8) \Rightarrow (9) \end{array}$$

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 CHUYÊN TOÁN TRƯỜNG THPT CHUYÊN LAM SƠN THANH HÓA NĂM 2003

(Đề thi đã đăng trên THPT số 317 tháng 11 năm 2003)

Bài I. a) Nhận xét rằng :

$$x^2 - \sqrt{x} = \sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1);$$

$$x^2 + \sqrt{x} = \sqrt{x}(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1); \text{ với giả thiết } 0 \leq x \leq 1 \text{ ta có } M = 1 - \sqrt{x}.$$

b) Giải PT: $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x-1} = \sqrt[3]{5x}$ (1)

Lập phương hai vế ta được :

$$2x + 3\sqrt[3]{x^2-1}(\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x-1}) = 5x \quad (2)$$

Thay (1) vào (2) được $\sqrt[3]{x^2-1} \cdot \sqrt[3]{5x} = x \Rightarrow 4x^3 - 5x = 0 \Rightarrow x = 0; x = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}.$

Thử lại ta thấy PT(1) có 3 nghiệm như trên.

Bài II. a) Từ $x^3 + 2y^2 - 4y + 3 = 0$
 $\Rightarrow x^3 = -1 - 2(y-1)^2 \leq -1$, suy ra $x \leq -1$ (1)

Từ $x^2 + x^2y^2 - 2y = 0$ có $x^2 = \frac{2y}{y^2+1} \leq 1$, suy ra $x^2 \leq 1$ hay $-1 \leq x \leq 1$ (2). Từ (1), (2) suy ra $x = -1$, do đó $y = 1$. Vậy : $Q = x^2 + y^2 = 2$.

b) Ta có : $A = u^2 + v^2 + \frac{1}{u^2} + \frac{1}{v^2} + 4 =$
 $= (u^2 + v^2) \left(1 + \frac{1}{u^2 v^2} \right) + 4.$

Theo BĐT Bu-nhi-a-cốp-xki :

$$1 = (u+v)^2 \leq 2(u^2 + v^2) \text{ hay } u^2 + v^2 \geq \frac{1}{2}. \text{ Mặt khác } (u+v)^2 \geq 4uv \text{ nên } \frac{1}{uv} \geq 4 \Rightarrow \frac{1}{u^2 v^2} \geq 16.$$

Do vậy $A \geq \frac{1}{2}(1+16) + 4 = \frac{25}{2}$. Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow u = v = \frac{1}{2}$. Do đó giá trị nhỏ nhất của A là 25/2, khi $u = v = 1/2$.

Bài III. Gọi x, y, z lần lượt là các đường cao ứng với các cạnh a, b, c của tam giác. Nhận xét rằng : đường cao của một tam giác luôn lớn hơn đường kính đường tròn nội tiếp tam giác đó, nghĩa là : $x > 2, y > 2, z > 2$. Vì x, y, z là các số nguyên dương nên : $x \geq 3, y \geq 3, z \geq 3 \Rightarrow$
 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$ (1)

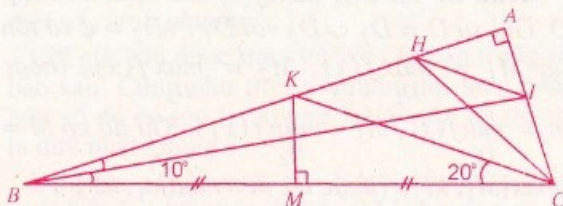
Mặt khác :

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{a}{ax} + \frac{b}{by} + \frac{c}{cz} = \frac{a+b+c}{2S_{ABC}} = \frac{1}{r} = 1 \quad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra $x = y = z = 3$ hay $\triangle ABC$ là tam giác đều.

Bài IV. Từ giả thiết suy ra $\widehat{HCB} = 40^\circ$. Dựng đường phân giác CK của $\widehat{HCB}$ thì $\widehat{HCK} = \widehat{BCK} = 20^\circ$. Trong tam giác vuông AHC có $\widehat{ACH} = 30^\circ$ nên $AH = CH/2$. Từ đó :
 $\frac{AH}{HK} = \frac{1}{2} \left(\frac{CH}{HK} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{BC}{BK} \right)$ (do CK là phân giác của góc $\widehat{HCB}$) (1)

Dựng $KM \perp BC$ tại M , lúc đó $\triangle BMK \sim \triangle BAC \Rightarrow \frac{BM}{BK} = \frac{AB}{AC}$ hay $\frac{BC}{2BK} = \frac{AB}{BC} = \frac{AH}{HK}$ (2) (theo (1)).



Do BI là phân giác của $\widehat{ABC}$ nên $\frac{IA}{IC} = \frac{AB}{BC}$ (3).

Từ (2), (3) suy ra : $\frac{IA}{IC} = \frac{AH}{HK} \Rightarrow CK \parallel IH$. Do đó $\widehat{CHI} = \widehat{HCK} = 20^\circ$.

Bài V. Lấy hai điểm phân biệt bất kì trên mặt phẳng, dựng đường tròn đường kính AB . Trên nửa đường tròn đó lấy 2003 điểm $A_1, A_2, \dots, A_{2003}$ khác nhau và khác B . Rõ ràng trong 2003 điểm đó không có 3 điểm nào thẳng hàng, nên với bất kì 3 điểm A_i, A_j, A_k (i, j, k khác nhau) đều tạo thành một tam giác.

Tam giác $A_i A_j A_k$ chắc chắn có 1 góc tù (vì góc nội tiếp chắn cung lớn hơn nửa đường tròn). Vậy luôn tồn tại 2003 điểm trên mặt phẳng thỏa mãn điều kiện bài toán.

LƯU XUÂN TÌNH

TÌM HIỂU SÂU THÊM TOÁN HỌC SƠ CẤP**Sử dụng phương pháp phân chia
ĐỂ GIẢI TOÁN VỀ CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ****ĐẶNG THANH HẢI**(GV Học viện Phòng không Không quân
Sơn Tây, Hà Tây)

Trong THPT số 298 (4/2002) đã trình bày một số phương pháp cơ bản để giải các bài toán về cực trị của hàm số. Bài viết này xin giới thiệu tiếp với các bạn một cách khác khá hiệu quả khi giải các bài toán về cực trị của hàm số, đó là phương pháp phân chia.

Có hai kiểu phân chia : theo tập xác định và theo hàm số.

1) Phân chia tập xác định của hàm số

Việc tìm cực trị của hàm $f(x)$ trên tập $D \subset \mathbb{R}$ nhiều khi rất khó khăn, chẳng hạn như tính chất của $f(x)$ thay đổi không có quy luật khi x biến thiên trên tập D , trong trường hợp này ta tìm cách phân chia tập xác định D thành các tập con rời nhau sao cho việc tìm cực trị của hàm trên mỗi tập con dễ dàng hơn. Trong bài này ta kí hiệu giá trị lớn nhất của $f(x)$ là $M = \max f(x)$ và giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ là $m = \min f(x)$ trên tập xác định tương ứng.

Mệnh đề 1 : Cho hàm $f(x)$ xác định trên tập D . Giả sử $D = D_1 \cup D_2$ với $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ và tồn tại $M_1 = \max_{D_1} f(x)$, $M_2 = \max_{D_2} f(x)$, (hoặc $m_1 = \min_{D_1} f(x)$, $m_2 = \min_{D_2} f(x)$). Khi đó có $M = \max\{M_1, M_2\}$ (hoặc có $m = \min\{m_1, m_2\}$).

Chứng minh :

Do $M_1 = \max_{D_1} f(x)$ thì $f(x) \leq M_1$ ($\forall x \in D_1$) và tồn tại $x_1 \in D_1$ để $f(x_1) = M_1$

Do $M_2 = \max_{D_2} f(x)$ thì $f(x) \leq M_2$ ($\forall x \in D_2$) và tồn tại $x_2 \in D_2$ để $f(x_2) = M_2$

• Nếu $M_1 \geq M_2$ thì $f(x) \leq M_1$ với mọi $x \in D$ hay $M = \max_{D} f(x) = M_1$ (1)

• Nếu $M_2 \geq M_1$ thì $f(x) \leq M_2$ với mọi $x \in D$ hay $M = \max_{D} f(x) = M_2$ (2)

Từ (1) và (2) thì $M = \max_{D} f(x) = \max\{M_1, M_2\}$.

Chú ý. a) Nếu tồn tại M_1 và M_2 thì tồn tại M và $M = \max\{M_1, M_2\}$, còn nếu không tồn tại M_1 (hoặc M_2) thì không tồn tại M .

b) Mệnh đề 1 vẫn đúng khi phân chia tập D thành nhiều tập con hoặc xét hàm nhiều biến.

Trường hợp $m = \min_{D} f(x)$ thì chứng minh và kết luận tương tự.

2) Phân chia hàm $f(x)$ thành tổng các hàm đơn giản.

Khi tìm cực trị của hàm $f(x)$ trên tập $D \subset \mathbb{R}$ mà tính chất của hàm $f(x)$ thay đổi trên cả tập D và thay đổi cả trên các tập con của tập D thì không sử dụng được phương pháp trên, lúc đó ta tìm cách tách hàm $f(x)$ thành tổng các hàm đơn giản hơn sao cho dễ tìm cực trị của các hàm thành phần.

Mệnh đề 2. Giả sử $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ xác định trên cùng tập D và tồn tại $M = f(x_0) = \max_{D} f(x)$, $M_1 = f_1(x_1) = \max_{D} f_1(x)$, $M_2 = f_2(x_2) = \max_{D} f_2(x)$ (hoặc $m = f(x_3) = \min_{D} f(x)$, $m_1 = f_1(x_4) = \min_{D} f_1(x)$, $m_2 = f_2(x_5) = \min_{D} f_2(x)$). Khi đó $M \leq M_1 + M_2$ và nếu $x_1 = x_2$ thì $M = M_1 + M_2$. (hoặc $m \geq m_1 + m_2$ và nếu $x_4 = x_5$ thì $m = m_1 + m_2$).

Chứng minh : Theo giả thiết $f_1(x_0) \leq f_1(x_1) = M_1$ và $f_2(x_0) \leq f_2(x_2) = M_2$ nên $M = f(x_0) = f_1(x_0) + f_2(x_0) \leq M_1 + M_2$ (3)

Nếu $x_1 = x_2$ thì $M_1 + M_2 = f_1(x_1) + f_2(x_1) \leq \max_{D} f(x) = M$ (4). Từ (3), (4) có $M = M_1 + M_2$.

Chú ý. Điều kiện $x_1 = x_2$ (hoặc $x_4 = x_5$) chỉ là điều kiện đủ mà không phải là điều kiện cần. Chẳng hạn : hàm số $f(x) = -x^2 + 2x - 1$, $f_1(x) = -x^2$, $f_2(x) = 2x - 1$ cùng xác định trên tập $D = [-1, 2]$. Dễ thấy $M_1 = f_1(0) = 0$, $M_2 = f_2(2) = 3$ và $M = f(1) = 0 < M_1 + M_2 = 3$.

Có $m_1 = f_1(2) = -4$, $m_2 = f_2(-1) = -3$ và $m = f(-1) = -4 > m_1 + m_2 = -7$.

Sau đây là một số bài toán minh họa :

Bài toán 1. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $F(x, y) = x^{2002} \cdot y(4 - x - y)$, trong đó các số thực x, y thỏa mãn điều kiện: $x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 6$.

Lời giải. Gọi $D = \{x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 6\}$

$$D_1 = \{x \geq 0, y \geq 0, 4 \leq x + y \leq 6\}$$

$$D_2 = \{x \geq 0, y \geq 0, x + y < 4\}$$

thì $D = D_1 \cup D_2, D_1 \cap D_2 = \emptyset$.

• Với mọi cặp $(x, y) \in D_1$ ta có: $4 - x - y \leq 0$ và $x \geq 0, y \geq 0$, suy ra $F \leq 0$. Đẳng thức xảy ra chẳng hạn với cặp $(x, y) = (0, 4) \in D_1 \Rightarrow \max_{D_1} F = 0$ (1)

• Với mọi cặp $(x, y) \in D_2$ ta có $x \geq 0, y \geq 0, 4 - x - y > 0$. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho 2004 số không âm ta có:

$$\begin{aligned} F &= 2002^{2002} \underbrace{\left(\frac{x}{2002}\right) \dots \left(\frac{x}{2002}\right)}_{2002 \text{ lần}} y(4 - x - y) \leq \\ &\leq 2002^{2002} \left(\frac{2002 \cdot \frac{x}{2002} + y + 4 - x - y}{2004} \right)^{2004} \\ &= \frac{2002^{2002}}{501^{2004}}. \text{ Đẳng thức xảy ra } \Leftrightarrow \frac{x}{2002} = y = \\ 4 - x - y &\Leftrightarrow (x, y) = \left(\frac{2002}{501}, \frac{1}{501}\right) \in D_2 \\ \Rightarrow \max_{D_2} F &= \frac{2002^{2002}}{501^{2004}} \end{aligned} \quad (2)$$

Từ (1), (2) và theo Mệnh đề 1 có:

$$\max_D F = \frac{2002^{2002}}{501^{2004}} \text{ khi } x = \frac{2002}{501}, y = \frac{1}{501}.$$

Bài toán 2. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = |x - 2001| + |x - 2002|$ trên R .

Lời giải. Gọi $D_1 = [2002, +\infty)$,

$D_2 = (2001, 2002), D_3 = (-\infty, 2001]$ thì

$R = D_1 \cup D_2 \cup D_3$ với $D_1 \cap D_2 = \emptyset, D_2 \cap D_3 = \emptyset, D_3 \cap D_1 = \emptyset$.

• Với $x \in D_1$ thì $f(x) = x - 2001 + x - 2002 = 2x - 4003, \min_{D_1} f(x) = 1$ khi $x = 2002$ (1)

• Với $x \in D_2$ thì $f(x) = x - 2001 + 2002 - x = 1, \min_{D_2} f(x) = 1$ với $\forall x \in (2001, 2002)$ (2)

• Với $x \in D_3$ thì $f(x) = 2001 - x + 2002 - x = 4003 - 2x, \min_{D_3} f(x) = 1$ khi $x = 2001$ (3)

Từ (1) (2) (3) và theo Mệnh đề 1 có $\min_R f(x) = 1$ với $x \in [2001, 2002]$.

Bài toán 3. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x(y+z) + z(x+y)$, trong đó các số thực x, y, z thỏa mãn điều kiện $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

(Đề thi chọn đội tuyển tỉnh Hà Tây dự thi học sinh giỏi quốc gia năm 2002).

Lời giải. Gọi $D = \{x, y, z \in R : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}, A_1 = xy + yz + zx, A_2 = zx$ thì $A = A_1 + A_2$.

• Hiển nhiên ta có: $(x+y+z)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2A_1 \geq 0 \Rightarrow A_1 \geq -\frac{1}{2}$ (1)

$$\text{Đẳng thức xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases} \quad (2)$$

• Áp dụng BĐT Cô-si cho 2 số không âm ta có: $|A_2| = |z||x| \leq \frac{1}{2}(|z|^2 + |x|^2) = \frac{1}{2}(1 - y^2) \leq \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq A_2 \leq \frac{1}{2} \Rightarrow A_2 \geq -\frac{1}{2}$ (3)

$$\text{Đẳng thức xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=-z \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases} \quad (4)$$

• Tồn tại (x, y, z) đồng thời thỏa mãn (2) và (4) là: $(x, y, z) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \in D$

$$\Rightarrow \min_D A_1 = -\frac{1}{2}, \min_D A_2 = -\frac{1}{2}.$$

Theo Mệnh đề 2 ta có:

$$\min_D A = \min_D A_1 + \min_D A_2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1.$$

Bài toán 4. Chứng minh rằng

$$\begin{aligned} &\frac{8}{(x_1 + x_2)(y_1 + y_2) - (z_1 + z_2)^2} \\ &\leq \frac{1}{x_1 y_1 - z_1^2} + \frac{1}{x_2 y_2 - z_2^2}, \text{ trong đó các số thực: } \\ &x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2 \text{ thỏa mãn các điều kiện} \\ &x_1 > 0, x_2 > 0, x_1 y_1 - z_1^2 > 0, x_2 y_2 - z_2^2 > 0. \end{aligned}$$

(Đề thi Toán Quốc tế 1969)

Lời giải. Đặt $f_1(x) = x_1x^2 - 2z_1x + y_1$,
 $f_2(x) = x_2x^2 - 2z_2x + y_2$ thì
 $f(x) = f_1(x) + f_2(x) = (x_1 + x_2)x^2 - 2(z_1 + z_2)x + (y_1 + y_2) \quad (x \in R)$.

Do $f(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$ là các hàm đa thức bậc 2 với hệ số của x^2 là dương (theo giả thiết) nên dễ

thấy $\min_R f_1(x) = f_1\left(\frac{z_1}{x_1}\right)$, $\min_R f_2(x) = f_2\left(\frac{z_2}{x_2}\right)$,

$$\min_R f(x) = f\left(\frac{z_1 + z_2}{x_1 + x_2}\right).$$

Áp dụng Mệnh đề 2 ta có :

$$\begin{aligned} \min_R f(x) &\geq \min_R f_1(x) + \min_R f_2(x) \\ \Leftrightarrow f\left(\frac{z_1 + z_2}{x_1 + x_2}\right) &\geq f_1\left(\frac{z_1}{x_1}\right) + f_2\left(\frac{z_2}{x_2}\right) \Leftrightarrow \\ \frac{(x_1 + x_2)(y_1 + y_2) - (z_1 + z_2)^2}{x_1 + x_2} &\geq \frac{x_1y_1 - z_1^2}{x_1} + \frac{x_2y_2 - z_2^2}{x_2} \quad (1) \end{aligned}$$

(vế phải dương theo giả thiết).

Áp dụng BĐT Cô-si cho hai số dương ta có :

$$\begin{aligned} (x_1 + x_2) \left(\frac{x_1y_1 - z_1^2}{x_1} + \frac{x_2y_2 - z_2^2}{x_2} \right) &\geq \\ \geq 4\sqrt{x_1x_2} \sqrt{\frac{(x_1y_1 - z_1^2)(x_2y_2 - z_2^2)}{x_1x_2}} &= \\ = 4\sqrt{(x_1y_1 - z_1^2)(x_2y_2 - z_2^2)} \quad (2) \end{aligned}$$

Từ (1) và (2) có

$$\begin{aligned} \frac{8}{(x_1 + x_2)(y_1 + y_2) - (z_1 + z_2)^2} &\leq \frac{2}{\sqrt{x_1y_1 - z_1^2} \cdot \sqrt{x_2y_2 - z_2^2}} \\ &\leq \frac{1}{x_1y_1 - z_1^2} + \frac{1}{x_2y_2 - z_2^2} \quad (\text{dpcm}). \end{aligned}$$

(BĐT cuối cùng suy ra từ $\frac{2}{\sqrt{a}\sqrt{b}} \leq \frac{a+b}{ab}$).

Để kết thúc mời các bạn giải các bài toán sau:

Bài toán 5. Cho các số thực $a_i \in [-1, 1]$ ($i = 1, 2, \dots, 2002$) thỏa mãn điều kiện : $a_1 + a_2 + \dots + a_{2002} = 1999$. Hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $A = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{2002}^2$.

Bài toán 6. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số sau trên R :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{3}{\sqrt{2}} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{4}{\sin^2 2x}.$$

BẠN CÓ BIẾT ?

NHỮNG GIẢ THUYẾT LIÊN QUAN TỚI SỐ MERSENNE

Nhà toán học Mec-xen (Mersenne) là người đầu tiên nghiên cứu những số có dạng :

$$M_p = 2^p - 1 \text{ với } p \text{ là số nguyên tố.}$$

Trước kia, nhiều người nghĩ rằng các số Mersenne M_p đều là số nguyên tố, nhưng thực ra không phải như vậy. Năm 1536 Hudalricus Regius chỉ ra rằng $M_{11} = 2^{11} - 1 = 2047 = 23 \times 89$ là hợp số. Năm 1640 Fermat chỉ ra M_{23} , M_{37} là hợp số. Euler năm 1738 chỉ ra số M_{29} cũng là hợp số. Như vậy trong các số Mersenne có những số là nguyên tố, có những số là hợp số.

Liên quan tới số Mersenne là số hoàn chỉnh (số hoàn thiện). Số tự nhiên N được gọi là số hoàn chỉnh nếu như nó bằng tổng tất cả các ước dương của N mà nhỏ hơn N . Thí dụ $6 = 1 + 2 + 3$ và $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$ đều là số hoàn chỉnh. Euler đã chứng minh được rằng : số N là hoàn chỉnh chẵn khi và chỉ khi N có dạng $2^{p-1}(2^p - 1)$ với $2^p - 1$ là số nguyên tố.

Số nguyên tố lớn nhất được biết cho tới nay là số $2^{13466917} - 1$ (tính tới 6/2003), đó là số nguyên tố Mersenne thứ 39 được tìm thấy vào tháng 11/2001. Số này có tất cả 4053946 chữ số. Người tìm ra số nguyên tố lớn nhất này là một sinh viên Canada 20 tuổi tên là Michael Cameron. Michael Cameron đã sử dụng phần mềm tìm số nguyên tố có tên là Prime 95.exe (bản nâng cấp Ver.22) do George Woltman, Kurowski viết chạy trên máy tính 800 MHz AMD T-Bird trong 45 ngày (không liên tục). Tác giả bài viết này, hiện đang có bản mới nhất của phần mềm prime 95.exe (bản ver.23).

Một giải thưởng trị giá 100.000 USD cho người đầu tiên tìm được số nguyên tố có ít nhất 10.000.000 chữ số và một giải thưởng trị giá 250 000 USD cho người đầu tiên tìm được số nguyên tố có ít nhất 1.000.000.000 chữ số (những ai quan tâm tới giải thưởng trên hoặc phần mềm prime 95.exe có thể liên hệ với tác giả bài báo này theo hộp thư :

tahongquang12345@yahoo.com.

hoặc điện thoại 0903717790 - Tạ Hồng Quảng.

Sau đây là bảng tất cả các số nguyên tố Mersenne $M_p = 2^p - 1$ được biết cho tới giữa năm 2003 :

$\frac{S}{T}$	Chỉ số p	Số chữ số của M_p	Năm phát hiện	Người tìm ra
1	2	1	---	---
2	3	1	---	---
3	5	2	---	---
4	7	3	---	---
5	13	4	1456	Vô danh
6	17	6	1588	Cataldi
7	19	6	1588	Cataldi
8	31	10	1772	Euler
9	61	19	1883	Pervushin
10	89	27	1911	Powers
11	107	33	1914	Powers
12	127	39	1876	Lucas
13	521	157	1952	Robinson
14	607	183	1952	Robinson
15	1279	386	1952	Robinson
16	2203	644	1952	Robinson
17	2281	687	1952	Robinson
18	3217	969	1957	Riesel
19	4253	1281	1961	Hurwits
20	4423	1332	1961	Hurwits
21	9689	2917	1963	Gillies
22	9941	2993	1963	Gillies
23	11213	3376	1963	Gillies
24	19937	6002	1971	Tuckerman
25	21701	6533	1978	Noll & Nickel
26	23209	6987	1979	Noll
27	44497	13395	1979	Nelson & Slowinski
28	86243	25962	1982	Slowinski
29	110503	33265	1988	Colquitt & Welsh
30	132049	39751	1983	Slowinski
31	216091	65050	1985	Slowinski
32	756839	227832	1992	Slowinski & Gage
33	859433	258716	1994	Slowinski & Gage
34	1257787	378632	1996	Slowinski & Gage
35	1398269	420921	1996	Armengaud, Woltman
36	2976221	895932	1997	Spence, Woltman, ... (GIMPS)
37	3021377	909526	1988	Clarkson, Woltman, Kurowski
38	6972593	2098960	1999	Hajratwala, Woltman, Kurowski, ... (GIMPS, PrimeNet)
39	13466917	4053946	2001	Cameron, Woltman, Kurowski

Sau đây là một số bài toán hóc búa liên quan tới số Mersenne mà vẫn chưa có ai giải quyết được (cho tới giữa năm 2003).

1) Tồn tại hay không số hoàn chỉnh lẻ?

Người ta đã chứng minh được rằng nếu tồn tại số hoàn chỉnh lẻ thì số đó phải có ít nhất 300 chữ số.

2) Phải chăng tồn tại vô hạn số nguyên tố Mersenne?

Điều này tương đương với tồn tại vô hạn số hoàn chỉnh chẵn.

3) Phải chăng tồn tại vô hạn hợp số Mersenne?

4) Giả sử p là số lẻ. Nếu hai trong số các khẳng định sau đúng thì khẳng định thứ ba cũng đúng?:

1. $p = 2^k + 1$ hoặc $p = 4^k + 1$ (kí hiệu $+/-$ có nghĩa là $+$ hoặc $-$).

2. $2^p - 1$ là số nguyên tố Mersenne;

3. $(2^p + 1)/3$ là số nguyên tố.

5) Mọi số Mersenne đều không có ước chính phương khác 1?

6) Dãy số

$C_0 = 2, C_1 = 2^{C_0} - 1, C_2 = 2^{C_1} - 1, C_3 = 2^{C_2} - 1, \dots$ đều là các số nguyên tố?

Ta có $C_0 = 2, C_1 = 3, C_2 = 7, C_3 = 127$ đều là số nguyên tố. Người ta cũng kiểm tra được C_4 là số nguyên tố còn từ C_5 trở lên cho tới nay vẫn không kiểm tra được.

7) Có vô hạn số nguyên tố Mersenne kép?

Giả sử M_q là số nguyên tố Mersenne, $M_q = 2^q - 1$ với q là số nguyên tố, khi đó số $N = 2^{M_q} - 1$ được gọi là số Mersenne kép và ta kí hiệu $N = MM_q$. Nếu MM_q cũng là số nguyên tố thì MM_q được gọi là số nguyên tố Mersenne kép. Các số sau đây là số nguyên tố Mersenne kép:

$$MM_2 = 2^3 - 1 = 7,$$

$$MM_3 = 2^7 - 1 = 127,$$

$$MM_5 = 2^{31} - 1 = 2147483647,$$

$$MM_7 = 2^{127} - 1.$$

Tuy nhiên các số tiếp theo $MM_{13}, MM_{17}, MM_{19}, MM_{31}$ đều là hợp số. Nhà tin học Tony Forber đang xây dựng một chương trình để kiểm tra các số Mersenne kép tiếp theo có phải là số nguyên tố hay không. Nếu bạn muốn ...

(Xem tiếp trang 20)

CHUẨN BỊ THI VÀO ĐẠI HỌC

NHỮNG SAI LẦM DỄ MẮC PHẢI KHI LÀM TOÁN THI VÀO ĐẠI HỌC NĂM 2003

(Tiếp theo kì trước)

BÙI QUANG TRƯỜNG
(ĐH Xây dựng Hà Nội)

VII. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số

Đề khối B và khối D có các bài khá hay thuộc loại này.

7.1. Đề : Tìm giá trị lớn nhất (GTLN) và giá trị nhỏ nhất (GTNN) của hàm số : $y = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$ trên đoạn $[-1, 2]$ (khối D)

Phân tích. Lời giải chính tắc cho bài toán này là tính đạo hàm y' . Cho $y' = 0$ tìm được điểm tới hạn có hoành độ $x = 1$. So sánh $y(1)$, $y(-1)$, $y(2)$ suy ra $\max y = y(1) = \sqrt{2}$; $\min y = y(-1) = 0$.

Cũng có thể giải bằng phương pháp tìm miền giá trị của hàm y (sau khi đã nhận xét : với $x \geq -1$ thì $y \geq 0$) để PT ẩn x có nghiệm. Lưu ý rằng cách giải này rất đơn giản, dễ hiểu, không cần tính đạo hàm, nhưng phải chú ý là GTLN, GTNN phải xảy ra tại các giá trị x thuộc vào khoảng đang xét.

Ở dạng toán này cần phải cảnh giác với các hàm số phân thức ! Trong bài trên, $\sqrt{x^2+1} > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ và hàm số liên tục trong $[-1, 2]$ mới có thể giải như vậy. Nếu chẳng hạn phải tìm GTLN, GTNN của hàm số $y = \frac{x+1}{\sqrt{x^2-\frac{1}{4}}}$ trên

$[-1, 2]$ thì cần phải lập bảng biến thiên vì hàm số không liên tục trong đoạn đang xét. Nhiều thí sinh đã vấp trước dạng toán này trong các kì thi vào Đại học khi giải như trên.

7.2. Đề : Tìm GTLN, GTNN của hàm số $y = x + \sqrt{4-x^2}$ (khối B).

Phân tích : Một số thí sinh đã đưa ra lời giải "rất gọn" như sau : Coi y là tham số, có $\sqrt{4-x^2} = y - x$ nên $4 - x^2 = y^2 - 2xy + x^2 \Leftrightarrow 2x^2 - 2yx + y^2 - 4 = 0$. Để tồn tại x phải có

$$\Delta' = y^2 - 2(y^2 - 4) \geq 0 \Leftrightarrow -2\sqrt{2} \leq y \leq 2\sqrt{2}. \text{ Từ đó } \max y = 2\sqrt{2}; \min y = -2\sqrt{2} \text{ (??)}$$

Lời giải nêu trên có ba thiếu sót :

Thứ nhất, khi tìm GTLN, GTNN của hàm số y đã không tìm tập xác định của hàm số đó. Tập xác định của hàm số này là $[-2, 2]$.

Thứ hai, không chỉ ra những giá trị của x để hàm y đạt GTLN, GTNN. Một số thí sinh cho rằng $y = \pm 2\sqrt{2}$ xảy ra khi và chỉ khi $\Delta' = 0$ hay $x = \frac{y}{2}$. Suy ra $\max y = 2\sqrt{2}$ khi $x = \sqrt{2}$ (thuộc

tập xác định $[-2, 2]$) ; $\min y = -2\sqrt{2}$ khi $x = -\sqrt{2}$ (cũng thuộc tập xác định đang xét). Đây là thiếu sót thứ 3 dẫn tới sai lầm. Phép biến đổi từ $\sqrt{4-x^2} = y - x$ đến $4 - x^2 = y^2 - 2yx + x^2$ đã thiếu ĐK $y - x \geq 0$ hay $y \geq x$. Giá trị $y(-\sqrt{2}) = -2\sqrt{2}$ không thỏa mãn ĐK này.

Vậy $y(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$ là GTLN, còn $y(-2) = -2$ là GTNN. Như vậy, việc xem y là tham số rồi xét ĐK để PT bậc hai (ẩn x) có nghiệm không chắc cho kết quả đúng. Lời giải đúng cho việc tìm cực trị của hàm có những điểm không xác định là tìm chính xác miền xác định của hàm y , sau đó sử dụng công cụ đạo hàm để tìm các điểm tới hạn, so sánh cực trị với giá trị hàm tại các điểm đầu mút.

VIII. Tích phân.

Đề : Tính $I = \int_0^2 x^2 - x |dx|$ (khối D)

Phân tích : Có thí sinh nhầm là

$$I = \int_0^2 x^2 - x |dx| = \left| \int_0^2 (x^2 - x) dx \right| \text{ (??) hoặc } I = \int_0^2 x^2 - x |dx| = \int_0^2 (|x^2| - |x|) dx \text{ (??)}$$

ĐẠI HỘI HỘI TOÁN HỌC HÀ NỘI

NHIỆM KÌ 2003-2008

Ngày 7.12.2003 tại Hội trường Trường Bồi dưỡng Cán bộ Giáo dục Hà Nội đã diễn ra Đại hội đại biểu Hội Toán học Hà Nội lần thứ IV.

Thứ trưởng Bộ Giáo dục và Đào tạo GS TSKH Trần Văn Nhung, Chủ tịch Hội Toán học Hà Nội khóa III đã phát biểu chào mừng và khai mạc đại hội. TS Đinh Sỹ Đại thay mặt Ban chấp hành khóa III đọc báo cáo của Đại hội. GS Nguyễn Năng An, Chủ tịch Liên hiệp các Hội khoa học và Kỹ thuật Hà Nội đã phát biểu ý kiến. Tiếp đó các đại biểu thuộc các đơn vị, các khối trường, sở, viện, doanh nghiệp, báo chí đã trao đổi về các hoạt động của Hội. Đại hội đã bầu ra Ban chấp hành mới của Hội Toán học Hà Nội nhiệm kỳ IV gồm 15 người:

- GS. TSKH. Nguyễn Văn Mậu
- PGS. TS. Bùi Quang Diệu
- TS. Đinh Sỹ Đại
- ThS. Nguyễn Hữu Độ
- ThS. Đỗ Doãn Hải
- CN. Thẩm Ngọc Khuê
- TS. Nguyễn Vũ Lương
- GS. TSKH. Lê Hùng Sơn
- ThS. Đoàn Phan Tê
- GS. TSKH. Đỗ Đức Thái
- NGUT. Hoàng Trọng Thái
- GS. TSKH. Phan Đình Thanh
- PGS. TS. Tôn Thân
- CN. Lê Vĩnh Thọ
- ThS. Vũ Kim Thủy

PV

☛ Khi lấy tích phân của hàm giá trị tuyệt đối, cần xét dấu của hàm để bỏ được dấu giá trị tuyệt đối. Các thao tác là: *Tìm nghiệm – tách cận – khử dấu giá trị tuyệt đối*. Cụ thể như sau:

$f(x) = x^2 - x = x(x - 1) \geq 0$ khi $x \leq 0$ hoặc $x \geq 1$ và $f(x) < 0$ khi $0 < x < 1$. Từ đó

$$I = \int_0^1 x^2 - x \, dx + \int_1^2 x^2 - x \, dx$$

$$= \int_0^1 -(x^2 - x) \, dx + \int_1^2 (x^2 - x) \, dx = 1.$$

Trên đây là một số sai lầm ở một số dạng toán trong kì thi tuyển sinh vào Đại học năm 2003 mà một số thí sinh gặp phải. Chúc các bạn đạt nguyện vọng trong kì thi sắp tới.

THƯ TỪ BẠN MUỐN NƠI

"... Toán học & Tuổi trẻ để lại cho đời tư liệu tham khảo quý báu. Dù có bao nhiêu năm tháng đi nữa các thế hệ sau luôn nâng niu, lưu giữ từng tờ báo một..."

HUỲNH DUY THỦY

(GV THPT Tăng Bạt Hổ, Hoài Nhơn, Bình Định)

"... Đọc báo cháu mới hiểu kiến thức của mình còn quá ít so với các bạn ở các thành phố, tỉnh khác. Và chính điều đó, cháu phải học, phải đọc và tìm hiểu nhiều hơn về Toán qua các tài liệu, sách tham khảo và đặc biệt là Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ. Cảm ơn những tác giả, những nhà giáo, nhà toán học đã cho cháu những bài toán hay và khó, cho cháu thêm nhiều kiến thức mới mẻ..."

NGUYỄN TIẾN LÂM

(Lớp 9/7, THCS Chu Văn An, Q. Thanh Khê, Tp. Đà Nẵng).

"... Lần đầu tiên được ngồi trên ghế giảng đường, em cũng có một số khó khăn nhất định về phương pháp học tập, kinh nghiệm học tập... Xin thầy (cô) chỉ bảo cho em để việc học của em ngày càng đạt được kết quả như mong muốn. Đồng thời em cũng rất muốn chia sẻ việc học của mình cho thầy (cô)..."

HÀ CÁT MINH

(203 Lô 1, cư xá Thanh Đa, P. 27, Q. Bình Thạnh, Tp. Hồ Chí Minh).

"... Riêng tôi được đọc TH&TT, tôi như có được một người thầy tận tâm bên cạnh luôn luôn giúp đỡ tôi mở mang kiến thức và tìm thấy vẻ đẹp của toán học. Càng đọc TH&TT tôi càng khám phục các nhà toán học không chỉ ở tài năng mà còn ở tinh thần học tập sáng tạo không ngừng. Lần này tôi viết thư trước hết là thể hiện sự ngưỡng mộ và lòng biết ơn tới toàn thể hội đồng biên tập vì những gì mà TH&TT đã mang lại cho độc giả nói chung và bản thân tôi nói riêng..."

THÁI MINH TUẤN

(GV THCS Thạch Đà, Mê Linh, Vĩnh Phúc)

"... Các thầy cô nên tăng cường các chuyên mục như "Lịch sử toán học", "Đố vui", hay là "Giao lưu giữa các bạn yêu quý Tạp chí"... Các thầy cô cũng có thể thêm vào nội dung báo chuyên mục về các phương pháp toán, hay quan hệ giữa toán và vật lý được không ?..."

NGUYỄN NHẬT MINH

(12E, THPT Đoàn Hùng, Phú Thọ)



ĐỀ RA KÌ NÀY

CÁC LỚP TRUNG HỌC CƠ SỞ

Bài T1/318. (Lớp 6). Tổng các chữ số của một số chính phương có thể bằng một trong các số sau không :

a) 2003 ; b) 2004 ; c) 2007 ?

NGÔ VĂN BÌNH

(SV K40, E4, khoa Toán ĐH Vinh, Nghệ An)

Bài T2/318. (Lớp 7). Cho tam giác ABC có $AB = AC$, $\widehat{BAC} = 90^\circ$ và M là trung điểm của BC . Trên tia BC lấy điểm D với D khác B, M . Kẻ BK vuông góc với AD tại K . Chứng minh rằng KM là phân giác trong hoặc phân giác ngoài của $\triangle BKD$ tại đỉnh K .

PHAN THẾ HẢI

(GV THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu, Nghệ An)

Bài T3/318. Chứng minh rằng nếu số $2n$ là tổng của hai số chính phương (lớn hơn 1) phân biệt thì $n^2 + 2n$ viết được thành tổng của bốn số chính phương (lớn hơn 1) phân biệt.

ĐẬU THỊ HOÀNG OANH

(GV THCS Mai Hùng, Quỳnh Lưu, Nghệ An)

Bài T4/318. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x^2(y+z)^2 = (3x^2+x+1)y^2z^2 \\ y^2(z+x)^2 = (4y^2+y+1)z^2x^2 \\ z^2(x+y)^2 = (5z^2+z+1)x^2y^2 \end{cases}$$

NGUYỄN ĐỂ
(Hải Phòng)

Bài T5/318. Chứng minh bất đẳng thức

$$(1+a^{n+1})(1+b^{n+1})(1+c^{n+1}) \geq$$

$$\geq (1+ab^n)(1+bc^n)(1+ca^n)$$

trong đó a, b, c là các số dương và n là số nguyên dương ($n \leq 4$).

PHẠM XUÂN TRINH

(GV THCS Trúc Hùng, Trúc Ninh, Nam Định)

Bài T6/318. Cho hình thang $ABCD$ với $AB \parallel CD$ và $AB \perp BD$. Hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại G . Trên đường thẳng CE vuông góc với AC lấy điểm E sao cho $CE = AG$ và đoạn thẳng GE không cắt đường thẳng CD . Trên tia

DC lấy điểm F sao cho $DF = GB$. Chứng minh rằng GF vuông góc với EF .

ĐOÀN QUỐC VIỆT

(GV THCS Vĩnh Phong, Vĩnh Bảo, Hải Phòng)

Bài T7/318. Hai đường tròn tâm O bán kính R và tâm O' bán kính R' ($R > R'$) tiếp xúc với nhau tại điểm A . Tia Ax của góc vuông $\angle Axy$ cắt đường tròn tâm O lần nữa tại B và tia Ay cắt đường tròn tâm O' lần nữa tại C . Gọi H là hình chiếu của A trên BC . Chứng minh rằng khi góc vuông $\angle Axy$ quay quanh điểm A thì điểm H chạy trên một đường tròn.

TRẦN THỊ MAI LÂM

(GV THCS Minh Tân, Kiến Xương, Thái Bình)

CÁC LỚP TRUNG HỌC PHỔ THÔNG

Bài T8/318. Tìm tất cả các số nguyên dương k sao cho phương trình $x^3+y^3+z^3 = kx^2y^2z^2$ có nghiệm nguyên dương và giải các phương trình đó.

NGUYỄN QUANG MINH

(GV THPT Krông Buk, Đắk Lắk)

Bài T9/318. Chứng minh rằng dãy số sau có giới hạn khi n tăng lên vô hạn và tìm giới hạn đó:

$$s_n = \sum_{k=1}^n k \sin \frac{k}{n^3} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

ĐỖ VĂN THU

(SV K26G khoa Toán Tin, ĐHSP Hà Nội II, Xuân Hòa)

Bài T10/318. Tìm tất cả các hàm $f: R \rightarrow R$ thỏa mãn điều kiện :

$$f(x) = \max_{y \in R} \{xy^{2003} + yx^{2003} - f(y)\} \text{ với mọi } x \in R$$

BÙI THẾ HÙNG

(SV K34B khoa Toán, ĐHSP Thái Nguyên)

Bài T11/318. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp trong một đường tròn sao cho đường tròn đường kính CD cắt các đoạn thẳng AC, AD, BC, BD lần lượt tại A_1, A_2, B_1, B_2 và đường tròn đường kính AB cắt các đoạn thẳng CA, CB, DA, DB lần lượt tại C_1, C_2, D_1, D_2 . Chứng minh rằng tồn tại một đường tròn tiếp xúc với bốn đường thẳng A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 và D_1D_2 .

TRẦN VIỆT HÙNG

(Sóc Trăng)

Bài T12/318. Trong không gian xét 4 tia Pa, Pb, Pc, Pd , trong đó không có 3 tia nào đồng phẳng sao cho

$$\widehat{aPb} = \widehat{cPd}, \widehat{bPc} = \widehat{dPa}, \widehat{cPa} = \widehat{bPd}$$

1) Chứng minh sự tồn tại bốn tia như thế.

2) Gọi $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ theo thứ tự là các góc tạo bởi các tia Pa, Pb, Pc, Pd với một tia thứ năm Pt nào đó cho trước. Tìm tập hợp những tia Px sao cho : $\cos \widehat{aPx} + \cos \widehat{bPx} + \cos \widehat{cPx} + \cos \widehat{dPx} = \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma + \cos \delta$.

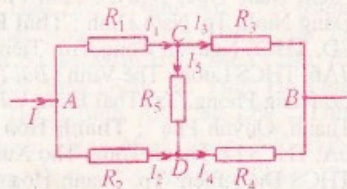
NGUYỄN VĂN THÔNG

(GV THPT chuyên Lê Quý Đôn, Đà Nẵng)

CÁC ĐỀ VẬT LÝ

Bài L1/318.

Cho một mạch cầu điện trở như sơ đồ bên. Cho biết : $R_1 = 8\Omega$, $R_2 = 14\Omega$, $R_3 = 15,2\Omega$, $R_4 = 3\Omega$ và $R_5 = 10\Omega$. Hãy tìm I_1, I_2, I_3, I_4 và I_5 khi :

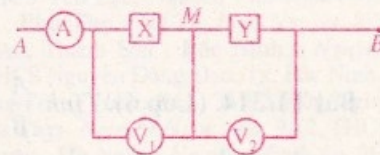


a) $I = 3,4A$; b) $U_{AB} = 74V$.

NGUYỄN QUANG HẬU
(Hà Nội)

Bài L2/318. Cho hai hộp đen X, Y mắc nối tiếp, mỗi hộp chỉ chứa một trong ba phần tử : R, L (điện trở không đáng kể), C . Khi mắc hai điểm A, M vào hai cực của một nguồn điện một chiều thì $I_A = 2(A)$, $U_{V1} = 60(V)$. Khi mắc hai điểm A, B vào hai cực của một nguồn điện xoay chiều tần số 50 (Hz) thì $I_A = 1(A)$, $U_{V1} = 60(V)$, $U_{V2} = 80(V)$ và u_{AM} lệch pha u_{MB} là 120° . Hỏi X, Y chứa phần tử nào ? Tìm các giá trị của chúng.

CHU VĂN BIÊN
(ĐH Hồng Đức, Thanh Hóa)



PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/318. (for 6th grade).

Can the sum of the digits of a perfect square be equal to one of the following numbers :

a) 2003 ; b) 2004 ; c) 2007 ?

T2/318. (for 7th grade)

Let ABC be a triangle with $AB = AC$, $\widehat{BAC} = 90^\circ$ and M be the midpoint of BC . D is a point on the ray BC (D distinct from B, M). Draw the line BK perpendicular to AD at K . Prove that KM is the interior or exterior angled bisector of $\angle BKD$ issued from the vertex K .

T3/318. Prove that if $2n$ is the sum of two perfect squares (greater than 1) then $n^2 + 2n$ can be written as the sum of four distinct perfect squares (greater than 1).

T4/318. Solve the system of equations :

$$\begin{cases} x^2(y+z)^2 = (3x^2+x+1)y^2z^2 \\ y^2(z+x)^2 = (4y^2+y+1)z^2x^2 \\ z^2(x+y)^2 = (5z^2+z+1)x^2y^2 \end{cases}$$

T5/318. Prove the inequality

$$(1+a^{n+1})(1+b^{n+1})(1+c^{n+1}) \geq (1+ab^n)(1+bc^n)(1+ca^n)$$

where a, b, c are positive numbers and n is a positive integer, $n \leq 4$.

T6/318. Let be given a trapezoid $ABCD$ with $AB \parallel CD$ and $AB \perp BD$. The diagonals AC and BD intersect at G . On the line CE perpendicular to AC , take the point E so that $CE = AG$ and the line CD does not cut the segment GE . On the ray DC , take the point F such that $DF = GB$. Prove that GF is perpendicular to EF .

T7/318. The circle with center O , radius R is tangent to the circle with center O' , radius R' ($R > R'$) at the point A . The ray Ax of a right angle xAy cuts the circle with center O again at B and the ray Ay cuts the circle with center O' again at C . Let H be the projection of A on BC . Prove that when the right angle xAy rotates around the point A , the point H moves on a circle.

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T8/318. Find all positive integers k so that the equation $x^3 + y^3 + z^3 = kx^2y^2z^2$ has positive integral solution and solve this equation.

T9/318. Prove that the sequence of numbers

$$s_n = \sum_{k=1}^n k \sin \frac{k}{n^3} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

has finite limit and find this limit.

(Xem tiếp trang 22)



Bài T1/314. (Lớp 6). Tính $\frac{A}{B}$ biết

$$A = \frac{1}{2.32} + \frac{1}{3.33} + \dots + \frac{1}{n(n+30)} + \dots + \frac{1}{1973.2003}$$

$$B = \frac{1}{2.1974} + \frac{1}{3.1975} + \dots + \frac{1}{n(n+1972)} + \dots + \frac{1}{31.2003}$$

Lời giải. Với các số nguyên dương n, k ta có

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+k} = \frac{n+k}{n(n+k)} - \frac{n}{n(n+k)} = \frac{k}{n(n+k)} \quad (1)$$

Áp dụng (1) với $k = 30$ ta tính được

$$\begin{aligned} 30A &= \frac{30}{2(2+30)} + \frac{30}{3(3+30)} + \dots + \frac{30}{1973(1973+30)} \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{32}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{33}\right) + \dots + \left(\frac{1}{1973} - \frac{1}{2003}\right) \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{31}\right) - \left(\frac{1}{1974} + \frac{1}{1975} + \dots + \frac{1}{2003}\right) \quad (2) \end{aligned}$$

Áp dụng (1) với $k = 1972$ ta tính được

$$\begin{aligned} 1972B &= \frac{1972}{2(2+1972)} + \frac{1972}{3(3+1972)} + \dots + \frac{1972}{31(31+1972)} \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1974}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{1975}\right) + \dots + \left(\frac{1}{31} - \frac{1}{2003}\right) \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{31}\right) - \left(\frac{1}{1974} + \frac{1}{1975} + \dots + \frac{1}{2003}\right) \quad (3) \end{aligned}$$

Từ (2) và (3) có $30A = 1972B$ hay

$$\frac{A}{B} = \frac{1972}{30} = \frac{986}{15}$$

Nhận xét. Các bạn đều biết sử dụng hệ thức (1) để giải bài này. Một số bạn đã khái quát hóa bài toán trên khi đặt $a = 2, b = 30, c = 1972, a + b + c - 1 = 2003$. Các bạn sau có lời giải đúng, trình bày tốt.

Thái Nguyên : Võ Tiến Tú, 6A, THCS Đỗ Cận, Phố Yên ; **Phú Thọ :** Tạ Thị Kim Phượng, 6A1, Nguyễn Thị Thu Hà, 7A1, THCS Lâm Thao ; **Vĩnh Phúc :** Nguyễn Hải Long, 6D, THCS Vĩnh Yên ; **Hòa Bình :** Nguyễn Anh Quỳnh, 6A, THCS Đà Bắc ; **Hà Tây :** Nguyễn Thị

Như Trang, 7A, THCS Sơn Đông, Hoài Đức ; **Hà Nội :** Nguyễn Ngọc Hiếu, 7A, THCS Nguyễn Công Trứ, Ba Đình ; **Bắc Giang :** Phạm Thị Hiền, 6H, THCS Trần Phú, Tx. Bắc Giang ; **Hưng Yên :** Võ Thị Diệu Linh, 6A, THCS Đức Hợp, Kim Động ; **Hải Dương :** Mạc Trường Minh, 6B, THCS Minh Tân, Kinh Môn, Phạm Thị Văn Anh, 5A, TH Thanh Hồng, Thanh Hà ; **Hải Phòng :** Nguyễn Trung Hiếu, 6A7, THCS Ngũ Lão, Thủy Nguyên, Nguyễn Quang Huy Khánh, 6A, THCS Kỹ thuật, Nguyễn Quốc Đạt, 7B9, THCS Lạc Viên Tp. Hải Phòng ; **Nam Định :** Nguyễn Xuân Diệu, 6B, THCS Yên Dương, Ý Yên, Nguyễn Văn Đức, 6D, THCS Nguyễn Hiền, Nam Trực, Nguyễn Lâm Phúc, 6A4, THCS Trần Đăng Ninh, Tp. Nam Định ; **Thái Bình :** Tô Đình Công, 7D, THCS Nguyễn Công Trứ, Tiền Hải, Mai Tuấn Anh, 7A6, THCS Lương Thế Vinh ; **Bùi Trường Giang,** 5E, TH Lê Hồng Phong, Tx. Thái Bình, Vũ Thị Lan, 5A, TH An Thanh, Quỳnh Phú ; **Thanh Hóa :** Nguyễn Văn Tùng, 6A, THCS Lê Thánh Tông, Thọ Xuân, Lê Trám Anh, 6D, THCS Điện Biên, Tp. Thanh Hóa ; **Nghệ An :** Đinh Bá Duyệt, Trần Thị Thanh Bình, 6A, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu ; **Hà Tĩnh :** Vương Bằng Việt, 6/1, THCS Nam Hà, Trần Thanh Hải, 7/2, THCS Lê Văn Thiêm, Tx. Hà Tĩnh ; **Thừa Thiên - Huế :** Nguyễn Thiên Nhân, 6/1, THCS Nguyễn Tri Phương, Nguyễn Đăng Minh Thảo, 7/10, THCS Thống Nhất, Huế ; **Quảng Nam :** Nguyễn Thiên Nhật Hồng, 6/2, THCS Trần Cao Vân, Duy Xuyên ; **Quảng Ngãi :** Bùi Lê Trọng Phước, 7B2, THCS Nguyễn Nghiêm ; **Gia Lai :** Nguyễn Thị Phúc, 4A, TH Kim Đồng, Tr. K Bang, **Đak Lak :** Đào Thị Phương Vi, 6A2, THCS Nguyễn Chí Thanh, Tp. Buôn Ma Thuột ; **Bình Định :** Nguyễn Duy Hoàng Việt, 7A6, Trần Thị Quỳnh Giao, 6A3, THCS Ngô Mây, Phù Cát ; **Khánh Hòa :** Nguyễn Anh Thảo, 7/14, THCS Thái Nguyên, Nha Trang ; **Tp. Hồ Chí Minh :** Tăng Bửu Vinh, 6, THCS Chu Văn An, Q. 11.

VÂN KHANH

Bài T2/314. (Lớp 7). Tìm giá trị của biểu thức $S = x^4 + y^4 + z^4$ biết $x + y + z = 0$ và $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Lời giải. Từ giả thiết $x + y + z = 0$, suy ra $(x+y+z)^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) = 0$, mà $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (1) nên $xy + yz + zx = -\frac{1}{2}$.

Bình phương hai vế của đẳng thức này ta được :

$$\begin{aligned} x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + 2xyz(x + y + z) &= \frac{1}{4} \\ \Rightarrow x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 &= \frac{1}{4} \quad (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Từ đó } S &= x^4 + y^4 + z^4 \\ &= (x^2 + y^2 + z^2)^2 - 2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) \\ &= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad (\text{theo (1) và (2)}). \end{aligned}$$

$$\text{Tóm lại } S = \frac{1}{2}.$$

Nhận xét. Các bạn sau đưa ra được nhiều cách đồng thời có lời giải gọn hơn cả :

Vĩnh Phúc : Ngô Thị Bích Phượng, 7A, THCS Yên Lạc, Yên Lạc, Nguyễn Thị Thu Dung, 7A, THCS Quang Sơn, Lập Thạch ; **Hà Nội :** Lê Minh Đức, 7H1, THCS Trung Vương, Nguyễn Ngọc Hiếu, 6A, THCS Nguyễn Công Trứ, Nguyễn Đức Minh, 7H, THCS Lê Quý Đôn, Lê Thủy Linh, 7H1, THCS Marie Curie ; **Hải Phòng :** Trần Văn Anh, 7A1, THCS Hồng Bàng ; **Hà Tây :** Lê Hồng Thuận, 7B, THCS Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hòa ; **Thái Bình :** Bùi Trường Giang, 5E, TH Lê Hồng Phong, P. Lê Hồng Phong ; **Thanh Hóa :** Dương Ngọc Ánh, 7A, THCS Lê Hữu Lập, Hậu Lộc ; **Nghệ An :** Võ Quang Vinh, 7D, THCS Thái Hòa 2, Nghĩa Đàn, Trần Thị Thanh Bình, 6A, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu, Bùi Lê Trà Linh, 6A, THCS Hưng Dũng, Tp. Vinh ; **Hà Tĩnh :** Võ Thu Hạnh, 6E, THCS Bình An, Can Lộc ; **Thừa Thiên - Huế :** Nguyễn Đăng Minh Thảo, 7¹⁰, THCS Thống Nhất ; **Quảng Ngãi :** Võ Thị Ánh Thủy, 7A, THCS Hành Trung, Nghĩa Hành ; **Bình Định :** Bùi Bảo Khang, 7A1, THPT số 2 An Nhơn, Nguyễn Hoàng Việt, 7A6, THCS Ngô Mây, Phù Cát ; **Khánh Hòa :** Nguyễn Ngọc Phước, 7/14, THCS Thái Nguyên, Tp. Nha Trang ; **Đắk Lắk :** Võ Văn Tuấn, 7A5, THCS Buôn Hồ, Phan Duy Bá Hoành, 7D, THCS Tân Lợi, Tp. Buôn Ma Thuột.

NGUYỄN PHÚC

Bài T3/314. Chứng minh rằng với số nguyên bất kỳ $n > 1$ luôn có

$$\frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}} < \sqrt{2}$$

Lời giải. (Của bạn Dương Bảo Nhân, 9,THCS Đại Hòa, Quảng Trị). Với $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 2$, ta có :

$$\begin{aligned} \frac{1}{(k+1)\sqrt{k}} &= \sqrt{k} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \\ &= \sqrt{k} \left(\frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right) \\ &= \left(1 + \sqrt{\frac{k}{k+1}} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right) < 2 \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} \right) \end{aligned}$$

Do đó :

$$\begin{aligned} \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}} &< \\ &< 2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) \\ &= 2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) < \sqrt{2} \quad (\text{đpcm}). \end{aligned}$$

Nhận xét. 1) Cũng với cách giải trên bạn Nhân đã đề xuất và giải đúng bài toán khái quát hóa sau : Cho trước số nguyên $p \geq 2$, khi đó với mỗi số nguyên dương bất kỳ

$n \geq p$ ta có bất đẳng thức : $\sum_{k=p}^n \frac{1}{(k+1)\sqrt[p]{k}} < \sqrt[p]{p^{p-1}}$.

2) Đây là một bài toán thuộc dạng cơ bản, do đó có rất đông các bạn tham gia giải. Sau đây là danh sách các bạn có lời giải gọn nhất :

Hà Nội : Bùi Thành Chung, 9E, THCS Quỳnh Mai, Mai Tiến Long, 9H, THCS Tô Hoàng, Q. Hai Bà Trưng, Nguyễn Hồng Chinh, 9A8, THCS Ngọc Lâm, Gia Lâm ; **Hải Phòng :** Phạm Thu Hằng, 8A, THCS Nguyễn Bình Khiêm, Vĩnh Bảo ; **Bắc Giang :** Nguyễn Phi Yến, 8A, THCS Ngô Sĩ Liên, Tx. Bắc Giang ; **Vĩnh Phúc :** Đại Thị Ánh, 7A, THCS Yên Lạc, Nguyễn Văn Ngọc, 9A, THCS Lập Thạch ; **Phú Thọ :** Đỗ Thị Bích Nguyệt, 8D, THCS Chu Văn An, Thanh Sơn ; **Bắc Ninh :** Nguyễn Tùng Lâm, 9A, THCS Nguyễn Đăng Đạo, Tx. Bắc Ninh ; **Hòa Bình :** Lương Trung Hiếu, 8A5, THCS Hữu Nghị, Tx. Hòa Bình ; **Hà Tây :** Nguyễn Ngọc Anh, 9A2, THCS Trần Phú, Phú Xuyên ; **Hà Nam :** Nguyễn Mạnh An, 9B, THCS Trần Phú, Tx. Phù Lý ; **Thái Bình :** Phạm Phương Thanh, 7A4, THCS TT. huyện Hưng Hà ; **Thanh Hóa :** Lê Anh Tú, 8B, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoàng Hóa, Bùi Phương Dung, 9A, THCS Hoàng Trung, Vũ Thị Thủy, 9A, THCS Chu Văn An, Nga Sơn, Lê Việt Hưng, 7A3, THCS Quang Trung ; **Nghệ An :** Vũ Ngọc Mai, Hoàng Nguyễn Phương Mai, 7A, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu, Lê Ngọc Thạch, 9A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, Nguyễn Trường Anh, 9B, THCS Bạch Liêu, Yên Thành ; **Hà Tĩnh :** Vương Quang Hùng, 9/1, THCS Lê Văn Thiêm, Tx. Hà Tĩnh ; **Phú Yên :** Phan Thanh Tú Uyên, 9A, THCS Lương Thế Vinh, Tx. Tuy Hòa ; **Quảng Ngãi :** Hoàng Nguyễn Khang, 9/1, THCS TT. Châu Ổ, Bình Sơn ; **Bình Định :** Lê Trần Tiểu My, 8A2, THCS Tây Sơn, Tp. Quy Nhơn ; **Bình Thuận :** Đặng Quốc Tùng, 9¹, THPT. Hòa Đa, Tuy Phong ; **Ninh Thuận :** Lâm Nguyễn Minh Triều, 9¹, THCS Trần Hưng Đạo, Tx. Phan Rang - Tháp Chàm.

HỒ QUANG VINH

Bài T4/314. Giải phương trình

$$x^2 - 2x + 3 = \sqrt{2x^2 - x} + \sqrt{1 + 3x - 3x^2} \quad (1)$$

Lời giải. Để PT (1) có nghĩa, ta phải có :

$$\begin{cases} 2x^2 - x \geq 0 \\ 1 + 3x - 3x^2 \geq 0 \end{cases} \quad (2)$$

Vế trái của PT(1) là $x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2 \geq 2$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Đẳng thức xảy ra khi $x = 1$ (3). Theo BĐT Bu-nhi-a-côp-xki với mọi x thỏa mãn (2) thì vế phải của PT (1) thỏa mãn BDT sau :

$$\begin{aligned} &\sqrt{2x^2 - x} + \sqrt{1 + 3x - 3x^2} \\ &\leq \sqrt{(1^2 + 1^2)(2x^2 - x + 1 + 3x - 3x^2)} \\ &= \sqrt{2 + 4x - 2x^2} = \sqrt{4 - 2(x-1)^2} \leq 2 \quad (4) \end{aligned}$$

Đẳng thức ở (4) xảy ra chỉ khi

$$2x^2 - x = 1 + 3x - 3x^2 \quad (5)$$

Để đẳng thức xảy ra ở (1) thì cả vế trái và vế phải của PT (1) đều phải bằng 2, nên phải có

$x = 1$ theo (3). Thử lại thấy $x = 1$ thỏa mãn (5) và PT(1). Vậy PT (1) có một nghiệm duy nhất $x = 1$.

Nhận xét. Khả năng bạn giải bài toán này và hầu hết đều tìm đúng nghiệm $x = 1$. Tuy vậy vẫn có bạn kết luận sai là phương trình vô nghiệm hoặc là có vô số nghiệm. Một số bạn không đặt điều kiện để căn thức không âm, mặc dù ta không cần phải giải chứng trong trường hợp bài toán này. Việc thử lại nghiệm là cần thiết, vì phương pháp giải của chúng ta không dùng biến đổi tương đương. Các bạn sau đây có lời giải *chính xác, đầy đủ* (có nêu điều kiện cần có nghĩa và có thử lại nghiệm) và ngắn gọn:

Nghệ An: Trương Thị Thùy Linh, THCS Bến Thủy, Tp. Vinh, Trần Lê Thăng, 9B, THCS Đặng Thai Mai, Tp. Vinh, Phạm Thái Khánh Kiệt, 8A, THCS Nghĩa Quang, Nghĩa Dân, Trần Hưng Quân, 8D, THCS Trường Thi Vinh, Trịnh Văn Nam, 9C, Cao Xuân Sáng, 9A, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu, Trần Văn Toàn, 9B, THCS Bạch Liêu, Yên Thành; **Thanh Hóa:** Lê Việt Hưng, 7A3, THCS Quang Trung, Hoàng Ngọc Dương, 9B, THCS Nhữ Bá Sĩ, Hoàng Hóa, Lê Trung Thành, 8B, THCS Lê Hữu Lập, Hậu Lộc; **Vĩnh Phúc:** Trần Tấn Phong, 8A, THCS Lập Thạch, Nguyễn Thị Vy, 9D, THCS Vĩnh Tường; **Hải Dương:** Lại Nguyễn Thanh, 9/3, THCS Lê Quý Đôn, Nguyễn Tiến Dũng, 9A1, THCS Chu Văn An, Thanh Hà, **Khánh Hòa:** Nguyễn Thị Hoàng Oanh, 8, THCS Đinh Tiên Hoàng, Ninh Hòa, Đỗ Phú Thịnh, 9¹², THCS Thái Nguyên, Nha Trang, **Đắc Lắc:** Phan Duy Khánh, 9⁴⁷, THCS Trần Hưng Đạo, Buôn Ma Thuột, **Gia Lai:** Nguyễn Tài Đại, 7A, THCS Nguyễn Bình Khiêm, KBang, **Quảng Trị:** Lê Hải Ánh, 9A, THCS Triệu Phước, Triệu Phong.

VŨ ĐÌNH HÒA

Bài T5/314. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\frac{a}{1+b-a} + \frac{b}{1+c-b} + \frac{c}{1+a-c}$ trong đó a, b, c là các số dương thỏa mãn $a + b + c = 1$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} \text{Đặt } A &= \frac{a}{1+b-a} + \frac{b}{1+c-b} + \frac{c}{1+a-c} \\ &= \frac{a}{2b+c} + \frac{b}{2c+a} + \frac{c}{2a+b} \\ \text{Áp dụng BĐT Bu-nhi-a-côp-xki, ta có:} \\ &\left(\frac{a}{2b+c} + \frac{b}{2c+a} + \frac{c}{2a+b} \right) \times \\ &\times [a(2b+c) + b(2c+a) + c(2a+b)] \geq (a+b+c)^2 \\ \Leftrightarrow A &\geq \frac{(a+b+c)^2}{3(ab+bc+ca)} \geq \frac{3(ab+bc+ca)}{3(ab+bc+ca)} = 1 \\ A = 1 &\Leftrightarrow \begin{cases} 2b+c=2c+a=2a+b \\ a=b=c \\ a+b+c=1 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Vậy min $A = 1$ khi $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Nhận xét. 1) Đây là bài toán dễ, có nhiều bạn tham gia giải. Hầu hết các bạn đều giải đúng với những cách giải khác nhau: Sử dụng BDT Bu-nhi-a-côp-xki hay BDT Cô-si.... Một số bạn đã giải bài toán tổng quát hơn:

Bài toán: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$\frac{a_1}{k+a_2-a_1} + \frac{a_2}{k+a_3-a_2} + \dots + \frac{a_n}{k+a_1-a_n}$$

trong đó $a_1, a_2, \dots, a_n$ là các số dương thỏa mãn $a_1 + a_2 + \dots + a_n = k$.

2) Các bạn có lời giải tốt bài toán này là:

Hải Dương: Vũ Đình Quý, Vũ Đình Quyền, 9B, THCS Nguyễn Trãi, Nam Sách; **Nguyễn Tiến Dũng,** 9A1, THCS Chu Văn An, Thanh Hà; **Hà Nội:** Phạm Quỳnh Trang, 9A, THCS Amsterdam, Bùi Thành Chung, 9E, THCS Quỳnh Mai, Hai Bà Trưng; **Nam Định:** Doãn Thị Duyên, 9A2, THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên; **Nguyễn Quang Tuyền,** 9C, THCS Đào Sư Tích, Cổ Lễ; **Phú Thọ:** Trần Mạnh Trung, 9A, THCS Giầy Phong Châu, Phù Ninh; **Vĩnh Phúc:** Đoàn Mạnh Hùng, 9A, THCS Yên Lạc; Yên Lạc; **Nghệ An:** Trịnh Văn Nam, 9C, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu, Nguyễn Thanh Tuấn, 8A, THCS Lí Nhật Quang, Đô Lương; **Trần Lê Thăng,** 9B, THCS Đặng Thai Mai, Vinh; **Đậu Thế Linh,** 9A, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu; **Thanh Hóa:** Lê Quang Trường, 9A, THCS Lê Quý Đôn, Bim Sơn; **Lê Xuân Thống Nhất,** 9B, THCS Nhữ Bá Sĩ, Hoàng Hóa, Lê Trung Thành, 8B, THCS Lê Hữu Lập, Hậu Lộc; **Hà Tĩnh:** Võ Quang Sáng, khối 4, Nam Hồng, Hồng Lĩnh; **Thừa Thiên - Huế:** Lê Hữu Diễm Khuê, 9¹, THCS Nguyễn Tri Phương, Tp. Huế; **Tp. Hồ Chí Minh:** Lê Đức Lợi, 8¹, THCS Hồng Bàng, Q. 5.

TRẦN HỮU NAM

Bài T6/314. Đường tròn tâm I bán kính r nội tiếp tam giác ABC . Một tiếp tuyến của đường tròn tâm I cắt đường tròn ngoại tiếp ΔABC tại M và N . Chứng minh rằng $MN > 2r$.

Lời giải. (Của bạn Nguyễn Phi Yến, 8A, THCS Ngô Sĩ Liên, Bắc Giang).

Gọi (O, R) là đường tròn ngoại tiếp ΔABC , đặt $OI = d$. Theo hệ thức Ô-lơ ta có $d^2 = R^2 - 2Rr$.

Hạ $OH \perp MN$,

$IK \perp MN$ (H, K

$\in MN$) ta có H

là trung điểm

của MN và $IK =$

r . Do đó

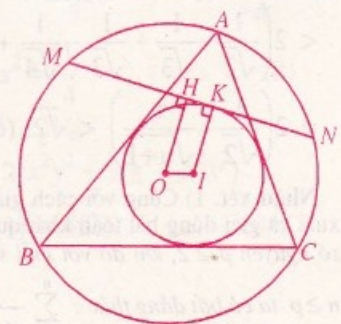
$MN^2 = 4MH^2 =$

$4(OM^2 - OH^2) =$

$4(R^2 - OH^2)$ mà

$OH \leq OK \leq$

$OI + IK = d + r$



nên $MN^2 \geq 4[R^2 - (d+r)^2] = 4[R^2 - (R^2 - 2Rr) - 2dr - r^2] = 4r(2R - 2d - r)$.

Vì (O, R) chứa (I, r) nên $OI < R - r$ hay $R - d > r \Rightarrow 2R - 2d > 2r$, do đó $MN^2 > 4r^2$. Vậy $MN > 2r$.

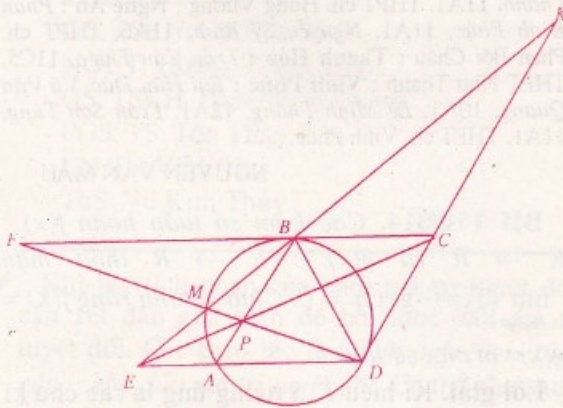
Nhận xét. Bài này có ít bạn tham gia giải, tất cả đều sử dụng hệ thức Ô-le. Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Vinh Phúc: Phạm Huy, 9C, THCS Tam Dương, Nguyễn Hoài Nam, 9D, THCS Liên Bảo, Tx. Vinh Yên;
Hải Dương: Phạm Trường Xuân, Hà Hữu Cao Trình, Lại Nguyễn Thanh, 9/3, THCS Lê Quý Đôn, Nguyễn Tiến Dũng, 9A1, THCS Chu Văn An, Thanh Hà;
Nghe An: Nguyễn Thị Hoài An, 9G, THCS Đặng Thai Mai, Tp. Vinh;
Quảng Trị: Dương Bảo Nhân, 9, THCS Đại Hòa.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

Bài T7/314. Cho hình thoi $ABCD$ có $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Lấy điểm P trên đường thẳng AB (P khác A, B). Các đường thẳng CP và DA cắt nhau tại E . Các đường thẳng DP và BE cắt nhau tại M . Tìm quỹ tích những điểm M khi P di chuyển trên đường thẳng AB .

Lời giải. Xét khi M thuộc cung BD chứa A (Trường hợp M thuộc cung BD không chứa A chứng minh tương tự chỉ khác $\widehat{MBA} + \widehat{MDA} = 180^\circ$).



Phân thuận. Gọi F là giao điểm của DM và BC . Vì $BC \parallel AD$ nên $\frac{AB}{AE} = \frac{BC}{AE} = \frac{PB}{PA} = \frac{BF}{AD} = \frac{BF}{BD}$

Mặt khác $\widehat{FBD} = \widehat{BAE} = 120^\circ$.

Do vậy $\triangle FBD \sim \triangle BAE$. Suy ra $\widehat{EBA} = \widehat{DFB} \Leftrightarrow \widehat{MBA} = \widehat{MDA}$. Như vậy 4 điểm M, A, B, D đồng viên. Vậy M thuộc đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABD$.

Phân đảo. Lấy điểm M bất kì thuộc đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABD$ ($M \neq A, B$ và D). Các đường thẳng BM và AD cắt nhau tại E , các đường thẳng CE và AB cắt nhau tại P . Ta sẽ chứng minh M, P, D thẳng hàng. Gọi K là giao của EB và DC . Ta có $\frac{AB}{DK} = \frac{EA}{ED} = \frac{AP}{CD}$. Do đó

$\frac{AP}{AD} = \frac{BD}{DK}$. Mà $\widehat{PAD} = \widehat{BDK}$. Nên $\triangle APD \sim \triangle DBK$. Do đó $\widehat{ADP} = \widehat{DKB}$. Mà $\widehat{DKB} = \widehat{ABE}$. Suy ra $\widehat{ADP} = \widehat{ABM}$ (1)

Mặt khác $\widehat{ABM} = \widehat{ADM}$ (2). (Vì M, A, B, D đồng viên). Từ (1) và (2) ta có M, P, D thẳng hàng.

Kết luận: Khi P di chuyển trên đường thẳng AB thì quỹ tích M là đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABD$ trừ 3 điểm A, B, D .

Nhận xét. 1. Nếu $P \equiv A$ thì $M \equiv A$ và $P \equiv B$ thì $M \equiv B$. Tuy nhiên đề bài đã hạn chế chỉ xét $P \neq A, P \neq B$.

2. Một bạn hiểu nhầm đề bài là P không thuộc đoạn AB .

3. Các bạn giải tốt bài này: **Vinh Phúc:** Đỗ Hoàng Tùng, 7E, THCS Vinh Yên; **Hải Dương:** Hà Hữu Cao Trình, 9/3, THCS Lê Quý Đôn, Hải Dương; **Nam Định:** Trần Ngọc Tân, Phan Thị Thanh Thủy, 9A6, THCS Trần Đăng Ninh; **Thanh Hóa:** Nguyễn Lưu Bách, 8C, THCS Lê Hữu Lập, Hậu Lộc; **Khánh Hòa:** Đỗ Phú Thịnh, 9¹², THCS Thái Nguyên, Nha Trang.

VŨ KIM THỦY

Bài T8/314. Cho số nguyên $k \geq 2$. Chứng minh rằng $(k^{2003})!$ chia hết cho

$$(k!)(1 + k + k^2 + \dots + k^{2002})$$

trong đó kí hiệu $n! = 1.2.3 \dots n$

Lời giải. Ta giải bài toán tổng quát thay 2003 bởi một số $n \geq 2$.

$$\text{Ta có } (k^n)! = (k^n - 2)!(k^n - 1)k^n : (k^n - 2)!(k^n - 1) \quad (1)$$

Vì $k \geq 2, n \geq 2$ nên $k^n - 2 \geq k$.

Vậy $(k^n - 2)!(k^n - 1) : k!(k^n - 1)$ (2) mà $(k^n - 1) : (1 + k + \dots + k^{n-1})$ (3). Từ (1) (2) (3) suy ra đpcm.

Nhận xét: Đây là một bài toán đơn giản như nhiều bạn đã bình luận. Có rất nhiều bạn tham gia giải tốt bài này như: **Trần Quốc Hoàn**, 11, THPT Nguyễn Trãi, **Hải Dương:** Nguyễn Tuấn Anh, 10A10, chuyên **Vinh Phúc:** Hoàng Đức Ý, 7E, THCS Trần Mai Ninh, **Thanh Hóa:**

Trần Hồng Yến, 10A, THCS Chu Văn An, Lạng Sơn, Trần Anh Nguyên, 9¹ THCS Nguyễn Tri Phương, Tp. Huế; Trương Phúc Thoại, 11 Toán, THPT chuyên Quảng Bình, Trịnh Văn Nam, 9C, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu, Nghệ An, Cao Quyết Thắng, 8A, THCS Phong Châu, Phú Thọ; Trương Đình Trường, 12 Toán, THPT NK Hàn Thuyên, Bắc Ninh; Trần Thanh Tùng, 11 Toán, THPT Nguyễn Huệ, Hà Tây.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T9/314. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $x^3 + y^3 + (9 - x - y)^3$ trong đó cặp số nguyên dương x, y thỏa mãn các điều kiện $y \leq x \leq 5, x + y \leq 8$ và $y + \frac{x+1}{2} \geq 5$.

Lời giải. Ta giải bài toán tổng quát sau:

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$P = x^3 + y^3 + (k - x - y)^3$, trong đó cặp số nguyên dương x, y thỏa mãn điều kiện:

$\frac{k-m}{2} \leq y \leq x \leq m, x + y \leq n, 2y + x \geq k$, với m, n, k là các số nguyên cho trước thỏa mãn: $m < n < k < 2m$ và $m + k < 2n$.

Xét hàm số $f(x) = x^3 + y^3 + (k - x - y)^3$
 $= 3(k - y)x^2 - 3(k - y)^2x + (k - y)^3 + y^3$ với
 $x \in \left[\frac{k-m}{2}, m \right]$

Coi y là tham số, ta có:

$$f'(x) = 6(k - y)x - 3(k - y)^2 = 3(k - y)(2x + y - k).$$

Từ giả thiết $x \geq y$ và $2y + x \geq k$ suy ra $2x + y \geq 2y + x \geq k$.

Hơn nữa, vì $y < k$ nên $f'(x) \geq 0$ và $f(x)$ đồng biến trên $\left[\frac{k-m}{2}, m \right]$. Do đó

$$f(x) \leq f(m) = 3m^2(k - y) - 3(k - y)^2m + (k - y)^3 + y^3 \\ = 3(k - m)y^2 - 3(k - m)^2y + m^3 + (k - m)^3 = g(y).$$

Bài toán đưa về tìm $\max g(y)$ với $\frac{k-m}{2} \leq y \leq m$

và $y \leq n - m$, tức là $\frac{k-m}{2} \leq y \leq n - m$. Lại có

$$g'(y) = 6(k - m)y - 3(k - m)^2 = \\ = 3(k - m)[(2y - (k - m))] \geq 0$$

nên $g(y)$ đồng biến trên $\left[\frac{k-m}{2}, n - m \right]$. Suy ra

$$g(y) \leq g(n - m) = \\ = 3(k - m)(n - m)^2 - 3(k - m)^2(n - m) + m^3 + (k - m)^3 \\ = m^3 + (n - m)^3 + (k - n)^3.$$

Vậy $P_{\max} = m^3 + (n - m)^3 + (k - n)^3$ khi và chỉ khi $x = m, y = n - m$.

Trở lại với bài toán ban đầu ứng với $m = 5, n = 8, k = 9$, ta thấy biểu thức đạt giá trị lớn nhất bằng $5^3 + 3^3 + 1^3 = 153 \Leftrightarrow x = 5, y = 3$.

Nhận xét. 1. Đa số các bạn đều làm theo cách hạn chế miền giá trị của x, y rồi thay vào biểu thức, so sánh các giá trị thu được rồi lấy giá trị lớn nhất. Một số bạn dùng phương pháp hình học để tìm nghiệm.

2. Lời giải trên là của bạn Phạm Xuân Khoa, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, Vinh, Nghệ An. Sau đây là một số bạn có lời giải tốt:

Hà Nội: Nguyễn Tuấn Dũng, 12A3, THPT Lê Quý Đôn, Nguyễn Ngọc Oanh, 9A2, THCS Trần Phú, Nguyễn Xuân Quán, 11A3, THPT Nguyễn Tất Thành, Lê Ngọc Thuần, 10A2 Toán, Phan Kim Hùng & Nguyễn Trường Thọ, 11A Toán, Nguyễn Thanh Hùng, 12B Toán, ĐHKHTN Hà Nội; **Hải Dương:** Nguyễn Duy Trung, Nguyễn Tiến Hưng, Trần Quốc Hoàn, Nguyễn Thị Mai, Phạm Văn Dương, 11 Toán, THPT chuyên Nguyễn Trãi, Tp. Hải Dương, Lê Đình Duy, 11 Toán, THPT Nguyễn Trãi; **Hải Phòng:** Phạm Huy Hoàng, 10 Toán, THPT NK Trần Phú, Đoàn Nhật Trường, 11B2, THPT Ngô Quyền; **Bình Định:** Lê Bá Khanh, Đặng Quang Sáng, Nguyễn Phúc Thọ, 11 Toán, THPT Lê Quý Đôn, Nguyễn Yên Vũ, 10A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Đồng Nai:** Tạ Quang Hiến, Phan Đình Tùng, 11 Toán, Lê Phương, 12 Toán, THPT Lương Thế Vinh; **Đà Nẵng:** Đỗ Quốc Khánh, 11A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Nguyễn Văn Vinh, 12A1, THPT ch. Lê Quý Đôn; **Phú Thọ:** Lê Quang Nghĩa, 9E, THCS Văn Lang, Việt Trì, Đinh Đức Thành, 11A1, THPT ch. Hùng Vương; **Nghệ An:** Phan Đình Phúc, 11A1, Nguyễn Sỹ Bình, 11A6, THPT ch. Phan Bội Châu; **Thanh Hóa:** Trần Văn Thiện, 11C5, THPT Như Thanh; **Vĩnh Phúc:** Bùi Hữu Đức, Vũ Văn Quang, 10A1, Lê Minh Thắng, 12A1, Trần Sơn Tùng, 11A1, THPT ch. Vĩnh Phúc.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T10/314. Các hàm số tuần hoàn $f(x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ và $g(x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x)) = 0$. Chứng minh rằng $f(x) = g(x)$ với mọi số thực x .

Lời giải. Kí hiệu T, S tương ứng là các chu kì nào đó của các hàm số $f(x), g(x)$. Chú ý với mọi $x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$ ta có

$$(f(x + nT + nS) - g(x + nT + nS)) - \\ - (f(x + nS) - g(x + nS)) + (g(x + nT) - f(x + nT)) \\ = g(x) - f(x).$$

Cố định $x \in \mathbb{R}$, cho số nguyên dương n dần đến $+\infty$, từ giả thiết ta suy ra về trái của đẳng thức trên dần tới 0. Bởi vậy $f(x) = g(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

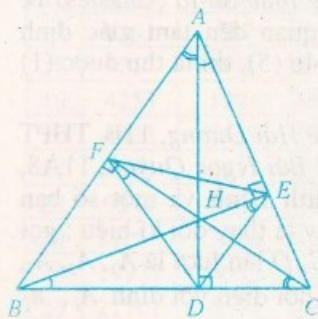
Nhận xét. Đây là một tính chất hay của hàm số tuần hoàn. Trong số hơn 50 bạn gửi lời giải đến Tòa soạn có 4 bạn giải theo cách trên. Hầu hết các bạn còn lại chứng minh T cũng là chu kỳ của hàm số $g(x)$ và do đó hàm số $f(x) - g(x)$ tuần hoàn chu kỳ T , từ đó suy ra $f(x) = g(x) (\forall x \in \mathbb{R})$. Một số ít bạn giải sai do chưa nắm vững kiến thức của giải tích, chứng minh bài toán theo cách phức tạp (chứng minh $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$ với mọi $\varepsilon > 0$). Các bạn sau có lời giải tốt:

Bắc Ninh: Lê Xuân Thắng, 11A1, THPT Yên Phong I;
Hà Nội: Đỗ Hoàng Khiêm, 11A1, PTCT-Tin, ĐHSP I;
Hải Dương: Trần Quốc Hoàn, 11T, THPT Nguyễn Trãi;
Thanh Hóa: Trần Văn Thiện, 11C5, THPT Như Thanh;
Nghe An: Lưu Viên Tú, 11A1, PTCT-Tin, ĐH Vinh; ...

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T11/314. Gọi AD, BE, CF là các đường cao của tam giác nhọn ABC . Gọi R và r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và nội tiếp tam giác DEF . Chứng minh rằng:

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 + \frac{r}{R}$$



Lời giải. (Của bạn Lê Hùng Việt Bảo, 12A, Toán, ĐHKH Tự nhiên, ĐHQG Hà Nội).

Vì tam giác ABC nhọn nên D, E, F theo thứ tự thuộc các đoạn BC, CA, AB và $\widehat{EDF} = 180^\circ - 2\hat{A}$; $\widehat{FED} = 180^\circ - 2\hat{B}$; $\widehat{DFE} = 180^\circ - 2\hat{C}$, hơn thế, đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF chính là đường tròn O -le của tam giác ABC (1)

Từ (1) suy ra bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF bằng $R/2$ (2)

Chú ý: Trong tam giác ABC bất kì, với R, r là bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp, ta có:

$$\frac{r}{R} = 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \quad (3)$$

$$2(1 + \cos A \cos B \cos C) = \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \quad (4)$$

Từ (1), (2) và (3) ta có:

$$\frac{r}{R/2} = 4 \sin \frac{180^\circ - 2A}{2} \sin \frac{180^\circ - 2B}{2} \sin \frac{180^\circ - 2C}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{r}{R} = 2 \cos A \cos B \cos C$$

$$\Rightarrow 2 + \frac{r}{R} = 2(1 + \cos A \cos B \cos C)$$

$$\Rightarrow 2 + \frac{r}{R} = \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \text{ theo } (4)$$

Nhận xét. 1) Bài toán này dễ, rất nhiều bạn tham gia giải và đều giải đúng, tuy nhiên, nhiều bạn giải quá dài.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

An Giang: Trần Trọng Quốc Trường, 12T, THPT chuyên Thoại Ngọc Hầu, Long Xuyên; **Hà Tây:** Nguyễn Ngọc Anh, 9A2, THCS Trần Phú, Phú Xuyên; **Hòa Bình:** Lưu Như Hòa, 11 Toán, THPT chuyên Hoàng Văn Thu, Tx. Hòa Bình; **Bình Định:** Bùi Ngọc Quỳnh, 11A8, THPT An Nhơn I, Bình Định; **Hải Phòng:** Phạm Thanh Huệ, 11A3, THPT Thái Phiên, Bùi Quỳnh Mai, 11T, THPT Trần Phú, Tp. Hải Phòng; **Đà Nẵng:** Võ Thanh Hải, 11A1, Phạm Hoài Nam, 12A1, THPT Lê Quý Đôn, Tp. Đà Nẵng; **Thanh Hóa:** Nguyễn Tuấn Dương, 10T, THPT Lam Sơn, Tp. Thanh Hóa.

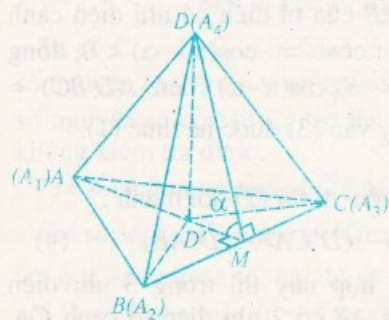
NGUYỄN MINH HÀ

Bài T12/314. Gọi S_A, S_B, S_C, S_D lần lượt là diện tích các mặt đối diện với các đỉnh A, B, C, D của tứ diện $ABCD$. Kí hiệu độ lớn các góc nhị diện cạnh $BC, DA; AC, BD; AB, CD$ theo thứ tự là $\alpha, \alpha'; \beta, \beta'; \gamma, \gamma'$. Chứng minh hệ thức:

$$S_A^2 + S_B^2 + S_C^2 + S_D^2 = 2T \quad (*) \text{ với}$$

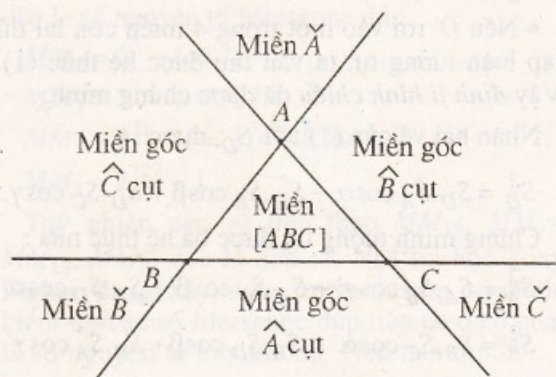
$$T = S_A \cdot S_D \cos \alpha + S_B \cdot S_D \cos \beta + S_C \cdot S_D \cos \gamma + S_B \cdot S_C \cos \alpha' + S_A \cdot S_C \cos \beta' + S_A \cdot S_B \cos \gamma'$$

Lời giải. Cách 1. (Dựa theo Nguyễn Bá Thành, 11 Toán, THPT ch. Nguyễn Trãi, Hải Dương và một số bạn khác).



Hình 1

- Trước hết ta chứng minh hệ thức sau đây, gọi là định lý hình chiếu trong tứ diện (tương tự định lý hình chiếu trong tam giác):



Hình 2

$$a = b \cos C + c \cos B, \dots):$$

$$S_D = S_A \cdot \cos \alpha + S_B \cdot \cos \beta + S_C \cdot \cos \gamma, \quad (1)$$

và 3 hệ thức nữa tương tự.

Thật vậy, gọi D' là chân đường cao hạ từ D xuống mặt đối diện BCD (h. 1). Thế thì D' có thể thuộc vào một trong 7 miền của mặt phẳng được chia bởi ba đường thẳng BC , CA và AB không đồng quy (h. 2): Miền tam giác $[ABC]$ (kể cả biên), miền góc $\widehat{BAC}$ (không kể miền $[ABC]$ nhưng có biên) được gọi vắn tắt là *miền góc $\widehat{A}$ cắt*, miền góc đối đỉnh của góc $\widehat{BAC}$ được gọi là *miền $\widehat{A}$* . Bốn miền còn lại được gọi tương tự.

• Nếu $D' \in$ miền $[ABC]$ thì ta có:

$$S_D = s(D'BC) + s(D'CA) + s(D'AB) \quad (2)$$

trong đó $s(XYZ)$ kí hiệu diện tích ΔXYZ . Trong trường hợp này thì cả ba nhị diện cạnh BA , CA và AB đều nhọn, và do đó từ (2) ta thu ngay được (1).

• Nếu $D' \in$ miền góc $\widehat{A}$ cắt thì (2) đổi thành:

$$S_D = -s(D'BC) + s(D'CA) + s(D'AB) \quad (3)$$

Trong trường hợp này thì trong 3 nhị diện cạnh BC , CA , AB của tứ diện có nhị diện cạnh BC là tù, do đó: $\cos \alpha = -\cos(\pi - \alpha) < 0$, đồng thời $s(D'BC) = S_A \cos(\pi - \alpha)$ nên $s(D'BC) = -S_A \cos \alpha$. Thay vào (3) được hệ thức (1).

• Nếu $D' \in$ miền $\widehat{A}$ thì (2) đổi thành:

$$S_D = s(D'BC) - s(D'CA) - s(D'AB) \quad (4)$$

Trong trường hợp này thì trong 3 nhị diện cạnh BC , CA và AB có 2 nhị diện tù cạnh CA , AB , do đó: $\cos \beta < 0$, $\cos \gamma < 0$. Thay vào (4) ta cũng thu được hệ thức (1).

• Nếu D' rơi vào một trong 4 miền còn lại thì lập luận tương tự, ta vẫn thu được hệ thức (1). Vậy định lí hình chiếu đã được chứng minh.

Nhân hai vế của (1) với S_D được:

$$S_D^2 = S_D \cdot S_A \cos \alpha + S_D \cdot S_B \cos \beta + S_D \cdot S_C \cos \gamma$$

Chứng minh tương tự, được ba hệ thức nữa:

$$S_A^2 = S_A \cdot S_B \cos \gamma' + S_A \cdot S_C \cos \beta' + S_A \cdot S_D \cos \alpha$$

$$S_B^2 = S_B \cdot S_C \cos \alpha' + S_B \cdot S_D \cos \beta + S_B \cdot S_A \cos \gamma'$$

$$S_C^2 = S_C \cdot S_D \cos \gamma + S_C \cdot S_A \cos \beta' + S_C \cdot S_B \cos \alpha'$$

Cuối cùng, cộng theo từng vế bốn đẳng thức vừa nêu trên ta thu được hệ thức (*) cần tìm.

Chú thích: Nếu ta đưa vào khái niệm *diện tích đại số của tam giác định hướng* và kí hiệu $\overline{XYZ}$ là diện tích đại số của tam giác XYZ thì $\overline{XYZ} = \pm s(XYZ)$, lấy dấu + hay - tùy theo tam giác XYZ định hướng thuận hay nghịch, $\overline{XYZ} = 0$ khi và chỉ khi X, Y, Z thẳng hàng. Nếu tam giác ABC định hướng thuận (ngược chiều kim đồng hồ) như hình 2 thì $\overline{D'BC} = \pm s(D'BC)$, dấu + hay - tùy theo D' cùng phía hay khác phía với A đối với đường thẳng BC . Lập luận tương tự đối với $\overline{D'CA}$ và $\overline{D'AB}$. Cuối cùng, ta nghiệm thấy hệ thức sau đây là đúng dù cho D' thuộc miền nào trong 7 miền nói trên:

$$\overline{ABC} = \overline{D'BC} + \overline{D'CA} + \overline{D'AB} \quad (5)$$

với mọi D' thuộc $mp(ABC)$

Hệ thức (5) gọi là *hệ thức Sa-lơ* (Chasles) về *diện tích đại số* liên quan đến tam giác định hướng. Với hệ thức Sa-lơ (5), thì ta thu được (1) ngay tức khắc.

Cách 2. (Dựa theo Lê Hải Dương, 11B, THPT Hải Lăng, Quảng Trị, Bùi Ngọc Quỳnh, 11A8, THPT An Nhơn 1, Bình Định và một số bạn khác). Để tiện trình bày ta thay đổi kí hiệu: gọi tên lại các đỉnh A, B, C, D lần lượt là A_1, A_2, A_3, A_4 ; S_i là diện tích mặt đối diện với đỉnh A_i , $\vec{n}_i$ là vectơ pháp tuyến đơn vị ngoài của mặt đối diện đỉnh A_i (tức mặt có diện tích S_i). Để có được hình ảnh trực quan của $\vec{n}_i$, ta có thể chọn $\vec{n}_i$ như sau. Mặt cầu nội tiếp tứ diện $A_1A_2A_3A_4$ tâm I bán kính $r = 1$ (đv dài) tiếp xúc với mặt có diện tích S_i ở A'_i . Thế thì $\overrightarrow{IA'_i} = \vec{n}_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$). Theo định lí "con nhím" trong tứ diện, ta có hệ thức vectơ sau:

$$\sum_{i=1}^4 S_i \overrightarrow{IA'_i} = \sum_{i=1}^4 S_i \vec{n}_i = \vec{0} \quad (6)$$

Từ (6) ta được:

$$\left(\sum_{i=1}^4 S_i \vec{n}_i \right)^2 = 0, \text{ hay viết cụ thể là:}$$

$$S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + S_4^2 + 2[S_1 S_2 \cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) + S_1 S_3 \cos(\vec{n}_1, \vec{n}_3) + S_1 S_4 \cos(\vec{n}_1, \vec{n}_4) + S_2 S_3 \cos(\vec{n}_2, \vec{n}_3) + S_2 S_4 \cos(\vec{n}_2, \vec{n}_4) + S_3 S_4 \cos(\vec{n}_3, \vec{n}_4)] = 0 \quad (7)$$

Nhưng $(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \pi - \gamma'$, $(\vec{n}_1, \vec{n}_3) = \pi - \beta'$,
 $(\vec{n}_1, \vec{n}_4) = \pi - \alpha$, $(\vec{n}_2, \vec{n}_3) = \pi - \alpha'$, $(\vec{n}_2, \vec{n}_4) =$
 $\pi - \beta$, và $(\vec{n}_3, \vec{n}_4) = \pi - \gamma$.

Sau cùng, thay vào (7) và trở lại kí hiệu cũ ban đầu thì ta thu được hệ thức (*) cần tìm.

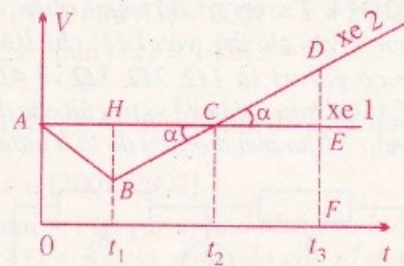
Nhận xét. 1) Số các bạn tham gia giải bài này khá đông. Có thể chia ra ba nhóm lời giải. Nhóm lời giải 1 chứng minh hoặc sử dụng ngay công thức hình chiếu (1). Nhóm lời giải sử dụng định lí "con nhím" theo hướng lời giải 2. Nhóm lời giải còn lại thì sử dụng định lí cosin trong góc tam diện, công thức diện tích tam giác nhưng tính toán quá dài dòng.

2) Tuy nhiên, công thức hình chiếu (1) không đưa vào SGK, các bạn cần chứng minh cẩn thận. Đây là một thử thách rèn luyện tư duy toán học chính xác, chặt chẽ. Đa số các bạn chỉ vẽ như hình 1, mặc nhiên ngộ nhận D' chỉ thuộc miền tam giác $[ABC]$. Một số bạn chỉ xét 2 trường hợp mà D' có thể xảy ra hoặc viết "cũng chứng minh tương tự, ta vẫn thu được (1)" !!! Các trường hợp này không thể nói "tương tự" vì hệ thức đã thay đổi.

3) Ngoài các bạn có tên ở trên, các bạn sau đây có lời giải tốt, khá gọn gàng và chặt chẽ : **Hà Nội** : Lê Hùng Việt Bảo, 12A Toán, Nguyễn Trường Thọ, 11A1, ĐHKHTN - ĐHQGHN ; **Bắc Giang** : Nguyễn Tuyết Mai, 12A, THPT NK Ngô Sĩ Liên ; **Vĩnh Phúc** : Hà Đình Thiệu, 10A1, Trần Bắc, 12A1, THPT ch. Vĩnh Phúc ; **Phú Thọ** : Nguyễn Quang Huy, 10 Toán, THPT ch. Hùng Vương, Việt Trì ; **Lạng Sơn** : Trần Hồng Yến, 10A, Nguyễn Trọng Đại, 11A, THPT Chu Văn An ; **Hải Dương** : Nguyễn Phấn Chiến, 11A1, THPT Kinh Môn, Hải Dương ; **Hưng Yên** : Lương Xuân Bách, 11 toán, THPT chuyên Hưng Yên ; **Hải Phòng** : Bùi Quỳnh Mai, 11 Toán, THPT Trần Phú ; **Hòa Bình** : Lưu Như Hòa, 11 Toán, THPT Hoàng Văn Thụ ; **Thanh Hóa** : Trịnh Thành Kiên, 10T, Nguyễn Trọng Hòa, Trần Mạnh Tuấn, 11 Toán, Mai Thế Hùng, 12T1, THPT Lam Sơn ; **Nghệ An** : Nguyễn Đức Minh, Phạm Xuân Khoa, 11A1, THPT chuyên Phan Bội Châu, Tp. Vinh ; **Quảng Trị** : Lê Tiến Triển, 11 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn, ; **Thừa Thiên - Huế** : Lê Viết Ân, 10⁹, THPT Quốc học, TT-Huế ; **Đà Nẵng** : Đỗ Quốc Khánh, 11A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Tp. ĐN ; **Bình Định** : Lê Thanh Bình, Đào Thanh Sự, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Tp. Quy Nhơn ; **Tp. Hồ Chí Minh** : Nguyễn Quốc Ngân, 11T, Nguyễn Hữu Tân, 12T, PTNK-ĐHQG Tp.HCM ; **Đồng Nai** : Lê Phương, 12 Toán 1, THPT ch. Lương Thế Vinh, Tp. Biên Hòa ; **Bạc Liêu** : Phạm Hùng Anh, 10T, THPT ch. Bạc Liêu.

NGUYỄN ĐĂNG PHÁT

Bài L1/314. Hình vẽ biểu thị sự phụ thuộc vào thời gian của vận tốc hai xe chuyển động trên cùng một đường thẳng và cùng vị trí ban đầu với t_1, t_2 là những thời điểm đã biết. Hỏi sau khoảng thời gian bao lâu tính từ khi 2 xe bắt đầu chuyển động thì chúng gặp nhau.



Lời giải. Ta giải bài toán dựa theo ý nghĩa hình học của đồ thị vận tốc thời gian. Gọi t_3 là thời điểm hai xe gặp nhau (đĩ nhiên xe 1 có đồ thị là đường ACE, còn xe 2 là đường ABCD). Khi hai xe gặp nhau quãng đường đi được cũng bằng nhau. Vì vậy số đo diện tích hình AEFO bằng số đo diện tích hình ABCDFO. Từ đồ thị suy ra số đo diện tích tam giác ABC bằng số đo diện tích tam giác CED. Hay

$$\frac{t_2[(t_2 - t_1)\text{tg}\alpha]}{2} = (t_3 - t_2) \frac{[(t_3 - t_2)\text{tg}\alpha]}{2}$$

$$\Rightarrow t_2(t_2 - t_1) = (t_3 - t_2)^2. \text{ Từ đó tìm được (vì } t_3 > t_2):$$

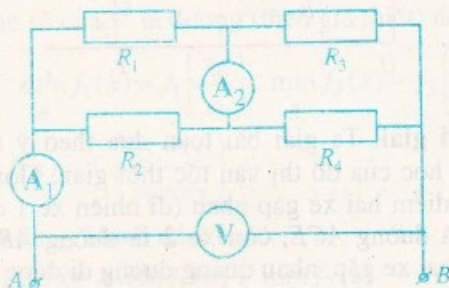
$$t_3 = t_2 + \sqrt{t_2(t_2 - t_1)}.$$

Nhận xét. Các bạn có lời giải đầy đủ và gọn :

Hà Nội : Trịnh Thái Duy, 10 Lí, THPT Hà Nội - Amsterdam ; **Thừa Thiên - Huế** : Trần Trung Kiên, 11 Lí, QH. Huế ; **Vĩnh Long** : Võ Minh Tâm, 12T1, THPT ch. Nguyễn Bình Khiêm ; **Tp. Hồ Chí Minh** : Lê Quốc Khánh, 11 Lí, PTNK ĐHQG Tp. HCM ; **Thanh Hóa** : Nguyễn Trọng Hòa, 11T, THPT Lam Sơn ; **Đắk Lắk** : Nguyễn Chí Linh, 11A, THPT Phan Bội Châu, Krông Năng ; **Hải Phòng** : Bùi Phương Hoa, 11T, THPT NK Trần Phú ; **Hà Tĩnh** : Hoàng Nguyễn Việt Cường, 12 Lí K7, THPT ch. Hà Tĩnh ; **Hà Tây** : Lê Đức Hải, 11L2, THPT ch. Nguyễn Huệ, Hà Đông ; **Hòa Bình** : Nguyễn Thị Kim Oanh, 10 chuyên Lí, THPT ch. Hoàng Văn Thụ ; **Hải Dương** : Nguyễn Tiến Dũng, 10A1, THPT Thanh Hà ; **Nam Định** : Vũ Ngọc Linh, 11 Toán 2, THPT Lê Hồng Phong ; **Bắc Ninh** : Vũ Công Thành, Vũ Tuấn Linh, Chu Thanh Bình, 12 Lí, THPT ch. Bắc Ninh ; **Vĩnh Phúc** : Nguyễn Ngọc Hưng, 10A3, Nguyễn Thị Phương Dung, 11A3, Lại Anh Thái, 12A3, THPT ch. Vĩnh Phúc ; **Bắc Giang** : Dương Trung Hiếu, 10 Lí, THPT NK Ngô Sĩ Liên ; **Nghệ An** : Thái Bá Sơn, K30A3, THPT Phan Bội Châu, Vinh, Nguyễn Duy Hùng, 12A9, THPT Phan Đăng Lưu, Yên Thành, Đặng Ngọc Huy, 11A, THPT Anh Sơn 1, Anh Sơn ; **Phú Thọ** : Nguyễn Ngọc Thạch, 10B, THPT ch. Hùng Vương, Trần Việt Hùng, 12E, THPT Đoàn Hùng ; **Đà Nẵng** : Trương Minh Tiến, 11A1, Nguyễn Lê Thành Lạc, 11A2, THPT ch. Lê Quý Đôn ; **Quảng Ngãi** : Thới Ngọc Trần Quốc, Trần Thị Phương Thảo A, 10A5, THPT ch. Lê Kiệt ; **Bình Định** : Lê Văn Thông, Phạm Nguyễn Tuấn Vũ, 12 Lí, THPT ch. Lê Quý Đôn, Quy Nhơn.

MAI ANH

Bài L2/314. Trong sơ đồ mạch điện ở hình bên, ampe kế A_2 chỉ 2A, vôn kế V chỉ 10V. Các điện trở có giá trị là 1Ω , 2Ω , 3Ω và 4Ω . Hỏi ampe kế A_1 chỉ bao nhiêu và vị trí của các điện trở như thế nào? Cho biết dụng cụ đo là lí tưởng.



Lời giải. Kí hiệu R_1, R_2, R_3, R_4 là các vị trí của các điện trở trong mạch. Ta có :

$$R_{AB} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}$$

Cường độ dòng điện qua các điện trở R_1 và R_3 là :

$$I_1 = \frac{U_{AB}}{R_{AB}} \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} ; I_3 = \frac{U_{AB}}{R_{AB}} \cdot \frac{R_4}{R_3 + R_4}$$

Số chỉ ampe kế A_2 là : $I_{A_2} = |I_1 - I_3| =$

$$\frac{U_{AB}}{R_{AB}} \left| \frac{R_2}{R_1 + R_2} - \frac{R_4}{R_3 + R_4} \right| \quad (1). \text{ Theo đề bài}$$

$U_{AB} = 10(V)$, $I_{A_2} = 2(A)$. Thay số vào (1), ta có :

$$10|R_2 R_3 - R_1 R_4| = 2(R_1 R_2 R_3 + R_2 R_3 R_4 + R_1 R_2 R_4 + R_1 R_3 R_4) \quad (2)$$

Ta nhận thấy :

$R_1 R_2 R_3 + R_2 R_3 R_4 + R_1 R_2 R_4 + R_1 R_3 R_4 = 50$ không phụ thuộc vào cách chọn các giá trị 1Ω , 2Ω , 3Ω , 4Ω cho R_1, R_2, R_3, R_4 . Do đó từ (2) ta có : $|R_2 R_3 - R_1 R_4| = 10$ (3). Từ (3) ta thấy có 8 cặp giá trị của (R_1, R_2, R_3, R_4) tương ứng với hai số chỉ

$I = \frac{U_{AB}}{R_{AB}}$ của ampe kế A_1 là $I_{A_1} = 5(A)$ và

$I_{A_1} = 4,8(A)$. Cụ thể là, có 4 cặp giá trị của (R_1, R_2, R_3, R_4) cho ta $I_{A_1} = 5(A)$ như sau : $\{1, 3, 4, 2\}$; $\{3, 1, 2, 4\}$; $\{2, 4, 3, 1\}$; $\{4, 2, 1, 3\}$. Có 4 cặp giá trị của (R_1, R_2, R_3, R_4) cho ta $I_{A_1} = 4,8(A)$ như sau : $\{2, 3, 4, 1\}$; $\{1, 4, 3, 2\}$; $\{4, 1, 2, 3\}$; và $\{3, 2, 1, 4\}$.

Nhận xét. Các bạn có lời giải gọn :

Tiền Giang : Trần Thị Mỹ Phương, 11 Lí, THPT chuyên Tiền Giang, Mỹ Tho ; **Tp. Hồ Chí Minh :** Trần Vĩnh Sơn, 11L, PTNK, ĐHQG Tp. HCM ; **Nam Định :** Vũ Ngọc Linh, 11 Toán 2, THPT Lê Hồng Phong ; **Hải Dương :** Lê Hoàng Dũng, 10 Lí, THPT ch. Nguyễn Trãi ; **Ninh Bình :** Vũ Thị Ngọc Ánh, 12A3, THPT Yên Khánh A ; **Thanh Hóa :** Bùi Văn Trung, 10F, THPT Lam Sơn ; **Đắk Lắk :** Võ Thành Lâm, 10C1, THPT Ngô Gia Tự, Đa Kao ; **Quảng Ngãi :** Trần Thanh Tuấn, 11B1, THPT số 2 Mộ Đức ; **Hà Tây :** Kiều Tuấn Việt, 11 L2, THPT Nguyễn Huệ, Hà Đông ; **Bắc Ninh :** Chu Thanh Bình, 12 Lí, THPT ch. Bắc Ninh ; **Phú Yên :** Võ Xuân Quốc, 11T, THPT Lương Văn Chánh ; **Hà Tĩnh :** Vương Quang Hùng, 9/1, THCS Lê Văn Thiêm, Tx. Hà Tĩnh ; **Hòa Bình :** Vũ Tuyết Nhung, 11 Lí 1, THPT ch. Hòa Bình ; **Thừa Thiên - Huế :** Lê Bấy, 10CT, THPT Quốc học Huế ; **Đà Nẵng :** Đinh Văn Tuấn, 11A2, THPT ch. Lê Quý Đôn ; **Bắc Giang :** Dương Trung Hiếu, 10 Lí, THPT NK Ngõ Liên ; **Hải Phòng :** Hoàng Thanh Long và Phạm Tuấn Hiệp, 10Lí, THPT NK Trần Phú ; **Hà Nội :** Phạm Việt Đức, 11A Lí và Ngô Tuấn Đạt, 10A1, THPT chuyên Lý, ĐHKHTN- ĐHQGHN ; **Phú Thọ :** Vũ Đình Quang, 11B, Lê Thị Ngọc Chung, 11A1, THPT ch. Hùng Vương ; **Bình Định :** Cao Sĩ Đức, 11L, Nguyễn Phúc Thọ, 11T, THPT ch. Lê Quý Đôn ; **Nghệ An :** Lê Minh Hiếu, 11G, THPT Nghĩa Đàn ; **Vĩnh Phúc :** Nguyễn Đăng Thành, Nguyễn Thị Tuyết Nhung, 11A3, THPT ch. Vĩnh Phúc.

MAI ANH

NHỮNG GIẢ THUYẾT... (Tiếp trang 7)

...tham gia vào dự án này có thể truy cập vào trang web tại địa chỉ sau :

<http://www.utm.edu/research/primes/merenne/> để tìm hiểu.

Các bạn có thể xem thêm bài *Bí mật của những số hoàn thiện và thân mật* (Tuyển tập 30 năm tạp chí Toán học và Tuổi trẻ, trang 266).

Ma-ranh Mec-xen (Marin Mersenne, 8/9/1588 - 1/9/1648) là nhà triết học, toán học và vật lí người Pháp. Ông giảng dạy triết học tại Chủng viện ở Nevers (1614 - 1619), rồi tại Chủng viện Annonciades ở Paris (từ 1620). Nhóm các nhà khoa học, trong đó Mersenne là đầu mối liên lạc, về sau là nòng cốt của Viện Hàn lâm khoa học Paris (1660). Ông nghiên cứu về dao động của quả lắc và âm nhạc. Trong tác phẩm *Suy nghĩ về toán - lí* (1644) ông đã trình bày chứng minh một số giả thuyết của Fermat và F.de Bessie về số nguyên tố, số hoàn chỉnh. Một miệng núi lửa ở phần nhìn thấy của Mặt trăng đã được đặt tên là Mersenne.

TẠ HỒNG QUẢNG
(Công ty Chế biến và Kinh doanh các sản phẩm khí, Vũng Tàu)

DIỄN ĐÀN DẠY HỌC TOÁN**PHƯƠNG PHÁP TƯƠNG TỰ HÓA VÀ TỔNG QUÁT HÓA**

PHAN DOÃN THOẠI

(NXB Giáo dục)

Từ một bài toán hay ta có thể đề xuất một bài toán với nội dung tương tự hoặc giải bằng một phương pháp tương tự, một cách làm như thế được gọi là *phương pháp tương tự hóa*.

Ta cũng có thể từ một bài toán trong trường hợp riêng mà dẫn tới một bài toán chung cho nhiều trường hợp, một cách làm như thế gọi là *phương pháp tổng quát hóa*.

Tương tự hóa và tổng quát hóa được các nhà toán học thường xuyên sử dụng, nhờ đó mà chúng ta có được một nền toán học đồ sộ và phong phú. Trong bài này, chúng ta sẽ bắt đầu từ một bài toán lí thú của Đi-ô-phăng và bằng phương pháp tương tự hóa, tổng quát hóa dẫn tới một số bài toán của Phéc-ma và Ô-le. Tiếp theo là những bài toán mới xuất hiện và những bài toán mà bạn đọc tự đề xuất..

1. Từ bài toán của Đi-ô-phăng

Đi-ô-phăng, nhà toán học Hi-lạp (thế kỉ III), đã viết nhiều sách về số học. Trong sách *Số học* quyển thứ tư của ông, có bài toán sau :

Bài toán 1. *Tìm bốn số hữu tỉ sao cho tích của hai số bất kì trong chúng cộng thêm với 1 là bình phương một số hữu tỉ.*

Đi-ô-phăng đã giải bài toán đó như sau.

Gọi a_1, a_2, a_3 là bốn số (hữu tỉ) phải tìm. Ta đặt $a_1 a_2 + 1 = (x+1)^2$ khi đó ta có $a_1 a_2 = (x+1)^2 - 1 = x(x+2)$.

Ta chọn $a_1 = x, a_2 = x+2$.

Bằng cách chọn $a_1 a_3 + 1 = (2x+1)^2$ ta được $a_1 a_3 = x(4x+4)$ và chú ý rằng $a_1 = x$, ta suy ra $a_3 = 4x+4$.

Ta lại chọn $a_1 a_4 + 1 = (3x+1)^2$ và chú ý rằng $a_1 = x$, ta suy ra $a_4 = 9x+6$.

Vì $a_2 a_3 + 1 = 4x^2 + 12x + 9 = (2x+3)^2$

$a_3 a_4 + 1 = 36x^2 + 60x + 25 = (6x+5)^2$

nên vấn đề còn lại là tìm x sao cho

$a_2 a_4 + 1 = 9x^2 + 24x + 13$

là bình phương của một số hữu tỉ. Để làm điều đó ta đặt $9x^2 + 24x + 13 = (3x-4)^2$, và sau khi

giải phương trình này ta được $x = \frac{1}{16}$. Vậy bốn số

cần tìm là $a_1 = \frac{1}{16}, a_2 = \frac{33}{16}, a_3 = \frac{68}{16}, a_4 = \frac{105}{16}$.

Nhận xét. Trong phép giải trên ta đã chọn các bình phương lần lượt là $(x+1)^2, (2x+1)^2$ và cuối cùng lại chọn x sao cho $a_1 a_4 = (3x-4)^2$. Có vẻ như phép chọn này không phải là duy nhất? Bạn đọc có cách chọn khác hay không?

2. Đến bài toán tương tự của Phéc-ma

Phéc-ma, nhà toán học người Pháp (1601 – 1665), tác giả của nhiều định lí số học nổi tiếng. Khi nghiên cứu bài toán của Đi-ô-phăng, Phéc-ma đã đề xuất một bài toán tương tự như sau :

Bài toán 2. *Tìm bốn số nguyên sao cho tích của hai số bất kì trong chúng cộng thêm với 1 là một số chính phương.*

Lời giải xin được trao đổi với các bạn trong số báo sau. Cũng như trên ta muốn tìm hiểu xem bốn số đó có tồn tại không? Nếu tồn tại thì có là duy nhất không?

Bạn đọc có đề xuất gì về một bài toán tổng quát hơn hai bài toán đã nêu? Mong rằng sẽ có nhiều ý kiến trao đổi bởi tác giả nghĩ rằng chúng ta mới khởi đầu một vấn đề mà trong số báo sau sẽ trình bày tiếp.

THÔNG BÁO

Được phép của Cục Báo chí Bộ Văn hóa – Thông tin, sau một thời gian chuẩn bị, từ tháng 1 năm 2004 tức số 319, tạp chí Toán học và Tuổi trẻ sẽ tăng thêm 4 trang thành 28 trang ruột. Với dung lượng lớn hơn về diện tích, tạp chí sẽ có điều kiện để tăng số lượng bài về *Toán học và Đời sống, Lịch sử Toán học, Bạn đọc tìm tòi, Phương pháp giải toán...* Chúng tôi mong nhận được nhiều bài của các bạn viết về các đề tài này.

Giá bán lẻ mỗi số *Toán học và Tuổi trẻ* từ 1/2004 là 3400 đ (Ba nghìn bốn trăm đồng).

Các bạn có thể đặt mua Tạp chí trước cho cả năm tại các Bưu điện trong cả nước.

Cảm ơn các bạn.

THTT

PROBLEM IN THIS ISSUE

(Tiếp trang 11)

T10/318. Find all functions $f: R \rightarrow R$ satisfying the condition

$$f(x) = \max_{y \in R} \{xy^{2003} + yx^{2003} - f(y)\} \text{ for all } x \in R.$$

T11/318. Let $ABCD$ be an inscribable quadrilateral such that the circle with diameter CD cuts the segments AC , AD , BC , BD respectively at A_1 , A_2 , B_1 , B_2 and the circle with diameter AB cuts the segments CA , CB , DA , DB respectively at C_1 , C_2 , D_1 , D_2 . Prove that there exists a circle touching the four lines A_1A_2 , B_1B_2 , C_1C_2 , D_1D_2 .

T12/318. In space, consider four rays Pa , Pb , Pc , Pd so that no three of them are coplanar and $\widehat{aPb} = \widehat{cPd}$, $\widehat{bPc} = \widehat{dPa}$, $\widehat{cPa} = \widehat{bPd}$

i) Prove that there exist such four rays.

ii) Let α , β , γ , δ be respectively the angles formed by the rays Pa , Pb , Pc , Pd with a fifth given ray Pt . Find the set of all rays Px such that

$$\cos \widehat{aPx} + \cos \widehat{bPx} + \cos \widehat{cPx} + \cos \widehat{dPx} = \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma + \cos \delta.$$

PHÁT HÀNH TIẾP

TUYỂN TẬP 5 NĂM TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Tháng 9 năm 2003 *Tuyển tập 5 năm tạp chí Toán học và Tuổi trẻ* đã phát hành và được bạn đọc nồng nhiệt đón nhận. Nhiều bạn không đặt mua được ở Bưu điện đã liên hệ trực tiếp với tòa soạn để có được quyển sách mình yêu thích. Toàn bộ số sách đã được phát hành hết. Sau đó nhiều bạn đọc và một số đơn vị lại tiếp tục đề nghị được đặt mua. Để đáp ứng yêu cầu của độc giả, tòa soạn đã đưa in bổ sung *Tuyển tập 5 năm tạp chí Toán học và Tuổi trẻ*, phát hành vào tháng 12.2003 và đầu học kỳ II năm học này. Các địa phương có nhu cầu mua đề nghị gửi phiếu đặt theo địa chỉ:

Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ
187B, Giảng Võ, Hà Nội
ĐT&FAX: (04)5144272

Các bạn có nhu cầu mua lẻ hãy tìm mua tại các Công ty Sách và Thiết bị trường học, Bưu điện, các cửa hàng sách.

THTT

Kết quả : SUÔN SẼ ?

Vì bỏ qua một bước quan trọng là tìm điều kiện của a để hệ PT đã cho

có nghiệm nên lời giải đưa đến

kết quả không đúng : xy đạt giá trị nhỏ nhất (GTNN) khi $a=1$ (?). Một sai lầm nghiêm trọng!

Hầu hết các bạn đã chỉ ra được với $a=1$ hệ ban đầu vô nghiệm, đồng thời tìm được điều

kiện của a để hệ có nghiệm là : $2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \leq a \leq$

$2 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ (*) (dựa vào điều kiện có nghiệm của

PT : $2x^2 - 2(2a-1)x + (3a^2 - 6a + 4) = 0$, sau khi thế PT (1) vào PT (2) của hệ). Có thể giải lại bài toán như sau :

Từ PT (1), (2) có $xy = \frac{3}{2}a^2 - 3a + 2 = f(a)$. Đồ thị của hàm $f(a)$ là đường parabol có hoành độ

đỉnh $a_0 = 1 \notin \left[2 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right]$ theo ĐK (*).

Từ đó xy đạt GTNN khi : $a = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}$, lúc đó

$$GTNN(xy) = \frac{11 - 6\sqrt{2}}{4} \text{ (khi } x = y = \frac{3 - \sqrt{2}}{2} \text{)}.$$

Các bạn sau có lời bình tốt hơn cả và gửi bài đến Tòa soạn sớm :

Đinh Hồng Việt, GV THPT DL Hồ Xuân Hương, Hà Nội ; *Nguyễn Mạnh Hùng*, GV Trung tâm GDTX Ba Vì, Hà Tây, *Võ Ngọc Lân*, GV Toán, THPT Lê Viết Thuật, Tp. Vinh, *Võ Quang Sáng*, 10A, khối PTCTT ĐH Vinh, Nghệ An ; *Lê Thừa Thành*, GV Toán THPT BC Nguyễn Hiền, Tp. Đà Nẵng.

NGỌC HIỂN

PHÂN VÂN ?

Trong một giờ học toán, thầy giáo ra cho lớp tôi một đề toán "Tìm các giá trị của m để bất phương trình sau nghiệm đúng với mọi x :

$$\sin x + \cos x \leq m + \sin 2x \quad (1)$$

Suy nghĩ một lát bạn tôi tìm ra một lời giải như sau :

$$\text{Ta có } \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \leq \sqrt{2}. \text{ Mặt}$$

khác vì $-1 \leq \sin 2x \leq 1$ nên $m + \sin 2x \geq m - 1$. Từ đó thấy rằng để bất phương trình (1) nghiệm



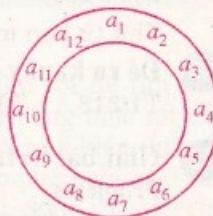


Giải đáp bài :

SẮP XẾP SỐ THEO VÒNG TRÒN

Dựa theo bạn **Hoàng Minh Đức**, 10T, THPT NK Hà Tĩnh, Hà Tĩnh.

Giả sử cách sắp xếp số như hình bên thỏa mãn yêu cầu bài toán. Theo giả thiết có :



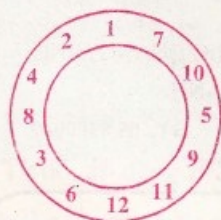
$$\begin{cases} a_1^2 \equiv a_2 a_{12} \pmod{13} \\ a_2^2 \equiv a_1 a_3 \pmod{13} \Rightarrow a_2 a_{12} \equiv a_3 a_{11} \pmod{13} \\ a_{12}^2 \equiv a_1 a_{11} \pmod{13} \end{cases}$$

Tương tự ta có $a_1^2 \equiv a_2 a_{12} \equiv a_3 a_{11} \equiv a_4 a_{10} \equiv a_5 a_9 \equiv a_6 a_8 \equiv a_7^2 \pmod{13}$

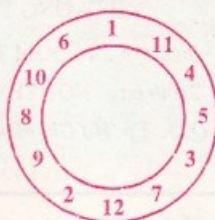
Vậy : $a_1^2 - a_7^2 \equiv 0 \pmod{13}$, suy ra $a_1 + a_7 \equiv 0 \pmod{13} \Rightarrow a_1 + a_7 = 13$. Lập luận tương tự sẽ có : $a_i + a_{i+6} = 13$ ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$).

Xếp số 1 vào một vị trí bất kì, giả sử $a_1 = 1$, lúc đó $a_7 = 12$. Trong biểu thức $b^2 - ac$, với $b=1$, ta có các cặp (a, c) thỏa mãn đề bài là $(2, 7)$, $(3, 9)$, $(4, 10)$, $(5, 8)$, $(6, 11)$. Cũng từ giả thiết :

$a_i + a_{i+6} = 13$ nên có thể giả sử $a_4 = 5$, $a_{10} = 8$. Lại có : $a_2^2 \equiv a_1 a_3 \pmod{13}$ và $a_3^2 \equiv a_2 a_4 \pmod{13}$ suy ra $a_1 a_4 \equiv a_2 a_3 \pmod{13}$ (1). Nhận thấy



Hình 1



Hình 2

$a_1 a_4 \equiv 5 \pmod{13}$ nên cặp (a_2, a_3) có thể là $(2, 9)$; $(3, 6)$; $(11, 4)$; $(7, 10)$. Với hai cặp $(11, 4)$ và $(7, 10)$ có 2 cách xếp như hình 1, 2. (hai hình coi là một nghiệm nếu hình này quay quanh tâm được hình kia).

Lấy đối xứng qua trục thẳng đứng của hình 1 và hình 2 ta được 2 nghiệm nữa.

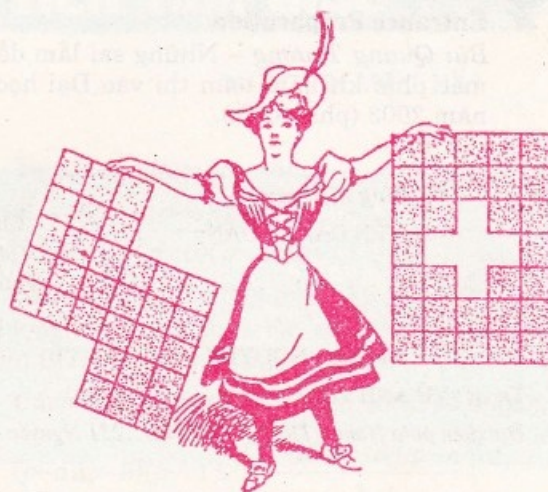
Với 2 cặp $(2, 9)$ và $(3, 6)$ ta có 4 nghiệm nữa.

Nhận xét. Các bạn sau cũng có lời giải đúng và gọn : **Đình Văn Thanh**, 10T2, THPT Hà Nội - Amsterdam, Hà Nội ; **Văn Đình Lâm**, 10T, THPT ch. Nguyễn Tất Thành, Yên Bái ; **Nguyễn Quang Huy**, 10A10, THPT ch. Vĩnh Phúc, Vĩnh Phúc ; **Lưu Như Hòa**, 11 Toán, THPT Hoàng Văn Thụ, Hòa Bình ; **Nguyễn Trung Thảo**, 10A3, THPT ch. Lương Thế Vinh, Biên Hòa, Đồng Nai.

HỒNG QUANG

CÔ GÁI THUY SĨ ĐỒ BẠN

Cô gái Thụy Sĩ này muốn nhờ bạn cắt miếng bìa bên tay phải của cô thành hai phần, sao cho có thể ghép lại thành hình lá cờ Thụy Sĩ ở bên tay trái (hình chữ thập màu trắng ở giữa là chỗ khuyết). Lưu ý rằng vết cắt phải theo các cạnh của các ô vuông trên miếng bìa. Tiếp theo, cô gái còn muốn nhờ các bạn cắt lá cờ bên tay trái thành hai phần, sao cho có thể ghép lại thành một hình chữ nhật kích thước 5×6 . Bạn có thể thực hiện nhanh yêu cầu của cô gái đó không ?



NGUYỄN HỒNG HÀ
(Hà Nội)

đúng với mọi x thì điều kiện cần và đủ là : $m - 1 \geq \sqrt{2} \Leftrightarrow m \geq 1 + \sqrt{2}$.

Thầy giáo xem xong lời giải trên liền hỏi bạn tôi : Em có phân vân gì với lời giải của mình không? Bạn tôi băn khoăn quá nhưng chưa tìm

thấy điều bất hợp lí. Các bạn hãy cùng tôi gạt bỏ nỗi băn khoăn của bạn tôi nhé !

TRẦN ĐĂNG QUÂN
(SV lớp B2, K47, khoa Vật lý,
ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội)

Toán học và Tuổi trẻ

Mathematics and Youth

NĂM THỨ 40

Số 318 (12-2003)

Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội

ĐT - Fax : 04.5144272

Email : toanhocvt@yahoo.com

TRONG SỐ NÀY

- 1 **Dành cho Trung học Cơ sở – For Lower Secondary Schools**
Nguyễn Việt Hải – Tìm mối liên hệ giữa các bất đẳng thức về cạnh và diện tích tam giác.
- 2 **Đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên toán – tin trường THPT chuyên Lê Quý Đôn, Đà Nẵng.**
- 3 **Hướng dẫn giải Đề thi tuyển sinh lớp 10 chuyên toán trường THPT chuyên Lam Sơn, Thanh Hóa năm 2003.**
- 4 **Tìm hiểu sâu thêm Toán học sơ cấp – Advanced Elementary Mathematics**
Đặng Thanh Hải – Sử dụng phương pháp phân chia để giải toán về cực trị của hàm số
- 6 **Bạn có biết ? – Do You Know ?**
Tạ Hồng Quảng – Những giả thuyết liên quan tới số Mersenne
- 8 **Chuẩn bị thi vào Đại học – University Entrance Preparation**
Bùi Quang Trường – Những sai lầm dễ mắc phải khi làm toán thi vào Đại học năm 2003 (phần cuối).
- 9 **Đại hội Hội Toán học Hà Nội nhiệm kì 2003-2008**
Thư từ bạn muôn nơi
- 10 **Đề ra kì này – Problems in this Issue**
T1/318, ..., T12/318, L1, L2/318.
- 12 **Giải bài kì trước – Solutions to Previous Problems**
Giải các bài của số 314.
- 20 **Diễn đàn dạy học toán – Math Teaching Forum**
Phan Doãn Thoại – Phương pháp tương tự hóa và tổng quát hóa
- 22 **Sai lầm ở đâu ? – Where's the Mistake ?**
- 23 **Giải trí toán học – Math Recreation**

Bìa 2 : Toán học muôn màu – Multifarious Mathematics – Nối chuỗi dây chuyền

Bìa 3: Câu lạc bộ – Math Club

Bìa 4 : Trường THCS Trần Cao Vân – Thừa Thiên Huế

Tổng biên tập :
NGUYỄN CẢNH TOÀN

Trưởng ban biên tập : NGUYỄN VIỆT HẢI.

Trì sự : VŨ ANH THƯ.

Đại diện phía Nam : TRẦN CHÍ HIẾU, 231 Nguyễn Văn Cừ, Q. 5, Tp. Hồ Chí Minh.

Chịu trách nhiệm xuất bản :

Chủ tịch HĐQT kiêm Tổng Giám đốc NXB Giáo dục :

NGÔ TRẦN ÁI

Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập NXB Giáo dục :

VŨ DƯƠNG THUY

Biên tập : VŨ KIM THỦY, HỒ QUANG VINH

Trình bày : NGUYỄN THỊ OANH

ĐT : 08.8309049

ĐÓN ĐỌC THPT SỐ 319 (1/2004)

- Phòng đoán Poincaré đã được chứng minh.
 - Tìm điều kiện của tham số để hệ phương trình có nghiệm.
 - Phương pháp tương tự hóa và tổng quát hóa (tiếp theo).
 - Đề thi tuyển sinh lớp 10 PTCTT ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội 2003.
 - Hướng dẫn giải đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT chuyên Lê Quý Đôn, Đà Nẵng.
- Các bạn nhớ đặt mua THPT cả năm 2004 tại các cơ sở Bưu điện.

THPT



Giải đáp : CỔ ĐỘNG VIÊN SEAGAMES 22

Rất vui vì dù thời hạn gửi bài chỉ có chưa đầy một tháng nhưng đã có nhiều bạn tham gia dự thi. Đáp án là :

1. Có 11 nước tham dự SEAGAMES 22 : Brunây, Campuchia, Đông Timo, Indônêxia, Malaysia, Myanmar, Lào, Philippin, Singapo, Thái Lan, Việt Nam.

2. Tất cả có 32 môn thi đấu: Điền kinh, Thể thao dưới nước, Bắn cung, Cầu lông, Bóng rổ, Billiards - Snooker, Thể hình, Quyền anh, Canoeng, Cờ vua, Xe đạp, Đấu kiếm, Lặn, Bóng đá, Thể dục, Bóng ném, Judo, Karatedo, Pencak Silat, Bì sắt, Đua thuyền, Cầu mây, Bắn súng, Đá cầu chính, Bóng bàn, Taekwondo, Quần vợt, Đua thuyền truyền thống, Bóng chuyền, Cử tạ, Vật, Wushu (gồm 442 nội dung).

3. Ba môn thi lần đầu tiên được tổ chức : cờ vua, đá cầu chính, lặn.

4. SEA Games 22 được tổ chức tại các tỉnh thành : Hà Nội, Tp. Hồ Chí Minh, Nam Định, Hải Phòng, Hải Dương, Bắc Ninh, Phú Thọ, Vĩnh Phúc, Hà Tây, Hòa Bình, Ninh Bình.

5. Ba địa phương tổ chức nhiều môn thi đấu nhất : Hà Nội, Tp. Hồ Chí Minh, Nam Định.

6. Môn bóng đá nam được tổ chức ở Hà Nội (sân Quốc gia Mỹ Đình, sân Hà Nội) Tp Hồ Chí Minh (sân Thống Nhất), Nam Định (sân Thiên Trường).

Môn bóng đá nữ được tổ chức ở Hải Phòng (sân Lạch Tray), Nam Định (sân Thiên Trường).

7. Các tỉnh thành cùng tổ chức một môn :

- Bóng đá nam : Hà Nội, Tp. Hồ Chí Minh, Nam Định.

- Bóng đá nữ : Hải Phòng, Nam Định.

- Bóng chuyền : Bóng chuyền trong nhà : Nam Định, Ninh Bình. Bóng chuyền bãi biển : Nam Định. Xe đạp : Hà Nội, Bắc Ninh, Hòa Bình.

Nhận xét. Đa số các bạn trả lời đúng các câu số 1, 2, 5, tuy nhiên kể cụ thể câu 2 thì một số bạn chưa đúng tất cả các môn. Câu 4 nhiều bạn thiếu Phú Thọ (Bóng ném), Bắc Ninh (Xe đạp) là hai địa phương được bổ sung sau. Đa số trả lời Phú Thọ là địa điểm dự bị. Câu 6 nhiều bạn thiếu Nam Định môn bóng đá nam. Câu 7 nhiều bạn thiếu Bắc Ninh. Một số bạn hiểu sai chữ "cùng" đã kể các tỉnh *chỉ* tổ chức 1 môn (!).

Các cổ động viên được nhận quà lần này là : **Hoàng Văn Ban**, Lâm Trường Vinh Hào, Hùng An, Bắc Quang, **Hà Giang** ; **Trung Hiếu**, 11B, THPT NK Ngô Sĩ Liên, **Bắc Giang**; **Nguyễn Đức Thắng**, tổ Đồng Tụ, thị trấn Vĩnh Lộc, huyện Chiêm Hóa, **Tuyên Quang** ; **Nguyễn Khắc Sáu**, khu 8, Giáp Lai, Thanh Sơn, **Phú Thọ** ; **Nguyễn Đại Á**, 12A1, THPT Ngô gia Tự, Lập Thạch, **Vĩnh Phúc** ; **Nguyễn Thị Ngọc Anh**, 10 Toán Tin 1, chuyên Lê Hồng Phong, **Nam Định** ; **Phạm Cường Thịnh**, 12B Lý ĐHKHTN-ĐHQG Hà Nội ; **Đặng Đình Nhất**, 11 Lý, THPT chuyên Lê Khiết, **Quảng Ngãi** ; **Trần Thị Nguyệt**, lớp 7/5, THCS Lý Tự Trọng, Đại Thắng, Đại Lộc, **Quảng Nam**.

BÍNH NAM HÀ

MỪNG XUÂN GIÁP THÂN

Năm 2004 này **Toán học và Tuổi trẻ** tròn 40 năm kể từ ngày ra mắt bạn đọc số đầu tiên. Câu lạc bộ của chúng ta vốn là một mục ngoài toán của những bạn trẻ yêu toán. Kì này bạn tổ chức đồ bạn làm thơ nhân dịp xuân mới sắp về. Đề bài và tứ thơ do các bạn chọn. Nhưng các câu phải bắt đầu lần lượt bằng các từ **BỐN MUỖI NĂM VÌ BẠN TRẺ YÊU TOÁN**. Tất cả chỉ gồm 8 câu thôi nhé. Nào mời các bạn. Giải sẽ trao trong dịp Xuân Giáp Thân.

VKT



TRƯỜNG THCS TRẦN CAO VÂN, THỪA THIÊN - HUẾ



Hiệu trưởng Lê Thị Bê

Trường THCS Trần Cao Vân đóng trên địa bàn phường Thuận Hòa với diện tích 4200m² gồm 26 phòng học, phòng chức năng. Trường có 30 lớp và 1385 học sinh, 58 cán bộ giáo viên. Trường THCS Trần Cao Vân là một trường trọng điểm của thành phố Huế, tỉnh Thừa Thiên - Huế.

Sáu năm liên tục trường đạt giải nhất toàn đoàn về học sinh giỏi cấp thành phố, trong đó có nhiều giải nhất đồng đội như môn Tiếng Anh, Vật lí, Toán, Lịch sử...

Hàng năm số học sinh của trường đỗ tốt nghiệp THCS đạt tỉ lệ cao trong thành phố; số học sinh giỏi và khá đạt tỉ lệ từ 65 đến 70%.

Đội ngũ thầy cô giáo với lòng yêu nghề, say sưa chuyên môn đã góp phần đưa thành tích của trường ngày một nâng cao. Nhiều thầy cô giáo đạt danh hiệu giáo viên giỏi cấp thành phố, cấp tỉnh. Từ năm 1986 đến nay trường liên tục được UBND tỉnh công nhận *trường tiên tiến xuất sắc của tỉnh*. Năm học 1993 - 1994 và năm học 1994 - 1995 trường đều được Bộ Giáo dục và Đào tạo tặng bằng khen. Đặc biệt năm học 2002 - 2003 trường Trần Cao Vân là một trong ba trường THCS thuộc Phòng Giáo dục thành phố Huế được công nhận trường tiên tiến xuất sắc của tỉnh và được Bộ Giáo dục và Đào tạo tặng bằng khen.

Được sự quan tâm của chính quyền địa phương, UBND thành phố Huế, Phòng Giáo dục thành phố Huế, Sở Giáo dục - Đào tạo Thừa Thiên - Huế, Hội cha mẹ học sinh, trường THCS Trần Cao Vân ngày càng đổi mới và hoàn thiện về cơ sở vật chất, chất lượng giáo dục ngày một nâng cao xứng đáng với lòng tin cậy của các cấp lãnh đạo, các thế hệ học sinh và các bậc phụ huynh.



Hội đồng sư phạm nhà trường

ISSN : 0866-8035

Chỉ số : 12884

Mã số : 8BT20M3

Chế bản tại Tòa soạn

In tại Nhà máy in Diên Hồng, 187B phố Giảng Võ

In xong và nộp lưu chiểu tháng 12 năm 2003

Giá : 3000đ

Ba nghìn đồng