

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO * HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

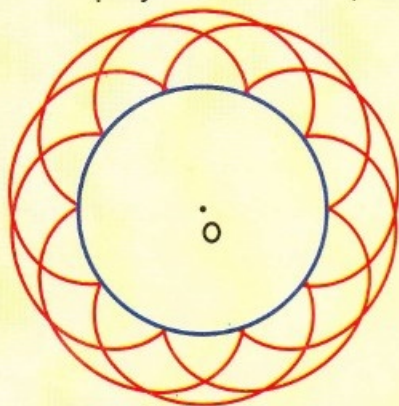
Toán học & Tuổi trẻ

10
2003

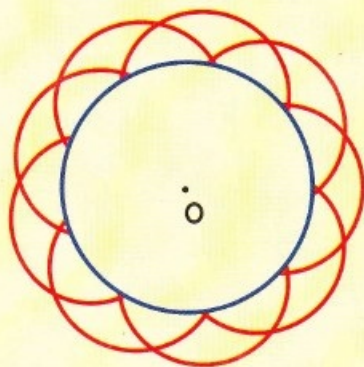
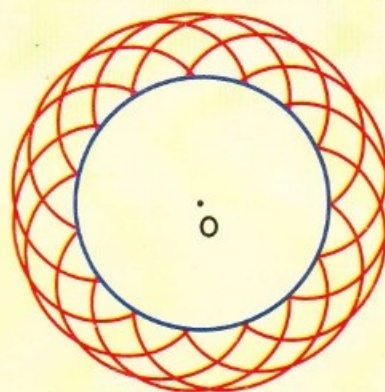
SỐ 316 - NĂM THỨ 40 - TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG

DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ

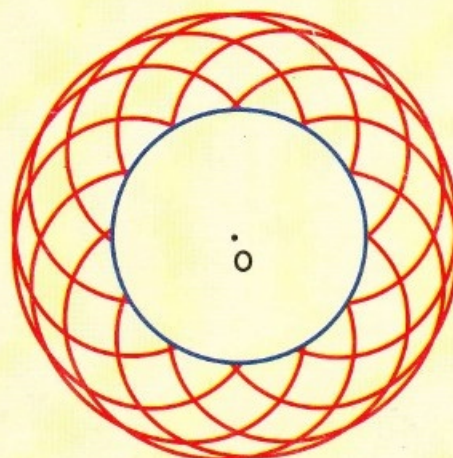
Hình 6: Epixycloit với $k = 3,33$



Hình 8: Epixycloit với $k = 3,75$



Hình 7: Epixycloit với $k = 4,5$



Hình 9: Epixycloit với $k = 2,4$



▲ TÀI SAO PHƯƠNG TRÌNH BẬC 5 KHÔNG GIẢI ĐƯỢC

■ NHỮNG SAI LẦM DỄ MẮC PHẢI KHI LÀM TOÁN THI VÀO ĐẠI HỌC

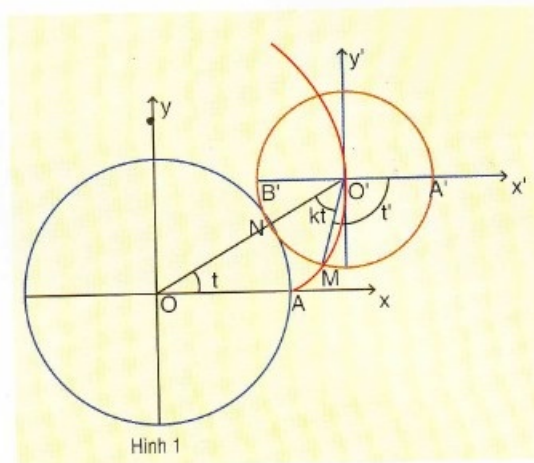
● KẾT QUẢ CUỘC THI AI THÔNG MINH NHANH TRÍ.

ĐƯỜNG CONG Ê-PI-XY-CLÔ-IT

TRẦN ĐÌNH VIÊN
(Hà Nội)

1) **Định nghĩa.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đề-các vuông góc Oxy cho đường tròn cố định $\mathcal{C}$ tâm O , bán kính $OA = a$. Xét đường tròn $\mathcal{C}'$ tâm O' , bán kính $O'A' = b$ tiếp xúc ngoài với đường tròn $\mathcal{C}$ và một điểm M xác định trên đường tròn $\mathcal{C}'$. Khi cho đường tròn $\mathcal{C}'$ lăn không trượt trên đường tròn $\mathcal{C}$ (mà $\mathcal{C}'$ luôn tiếp xúc ngoài với $\mathcal{C}$) thì quỹ đạo (đường đi) của điểm M vạch nên một đường cong, gọi là đường Ê-pi-xy-clô-it.

2) **Phương trình.** Giả sử tại thời điểm ban đầu đường tròn $\mathcal{C}'$ tiếp xúc với đường tròn $\mathcal{C}$ tại điểm $A(a, 0)$ và M trùng với A . Cho đường tròn $\mathcal{C}'$ lăn không trượt trên đường tròn $\mathcal{C}$ đến vị trí có tiếp điểm N thuộc OO' . Lúc đó góc $(OA, ON) = t$ (radian). (tính cả số vòng quay). Tại vị trí này lập hệ trục tọa độ $O'x'y'$ sao cho $\overrightarrow{O'x'} \uparrow \uparrow \overrightarrow{Ox}$ và $\overrightarrow{O'y'} \uparrow \uparrow \overrightarrow{Oy}$. Đường tròn $\mathcal{C}'$ cắt tia $O'x'$ tại A' và cắt tia đối của $O'x'$ tại B' (hình 1). Đặt góc $(O'N, O'M) = u$ (radian) và góc $(O'M, O'A') = v$ (radian).



Hình 1

Ta có $(O'B', O'N) + (O'N, O'M) + (O'M, O'A') = \pi + 2m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$. Vì $(OA, ON) = (O'B', O'N) + 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ nên $(OA, ON) + (O'N, O'M) + (O'M, O'A') = \pi + 2s\pi$, $s \in \mathbb{Z}$. (1)

Vì $\mathcal{C}'$ lăn không trượt trên $\mathcal{C}$ nên ta có độ dài $d(\widehat{MN})$ của cung $\widehat{MN}$ bằng độ dài $d(\widehat{AN})$ của cung $\widehat{AN}$ (tính cả số vòng quay của u, t), hay là $bu = d(\widehat{MN}) = d(\widehat{AN}) = at \Rightarrow u = \frac{a}{b}t$. Đặt $k = \frac{a}{b}$ được $u = kt$ (2).

Từ (1) và (2) tính được $-v = (1+k)t - \pi - 2s\pi$ (3)

Ta có: $\overrightarrow{OO'} = ((a+b)\cos t; (a+b)\sin t)$

Từ (3) có $\overrightarrow{O'M} = (b\cos(-v); b\sin(-v)) = (-b\cos(1+k)t; -b\sin(1+k)t)$

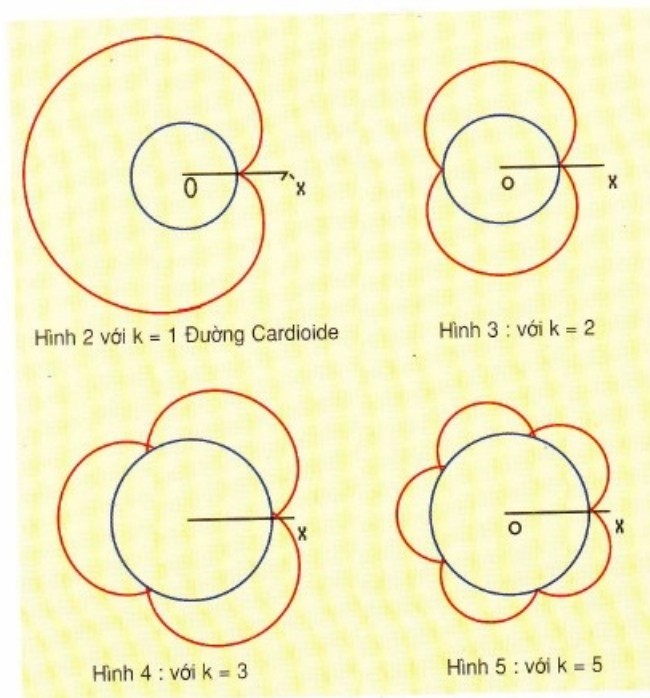
Gọi (x, y) là tọa độ của M trong hệ tọa độ Oxy thì $\overrightarrow{OM} = (x, y)$. Từ hệ thức véc-tơ $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$ suy ra được phương trình theo tham số t của đường cong Ê-pi-xy-clô-it là:

$$\begin{cases} x = (a+b)\cos t - b\cos(1+k)t \\ y = (a+b)\sin t - b\sin(1+k)t \end{cases} \quad (4)$$

với $t \in \mathbb{R}$

Khi vẽ đường cong $\mathcal{C}$ dựa vào hệ thức (4), ứng với mỗi giá trị của t ta xác định được tọa độ (x, y) của điểm M

(Xem tiếp trang 5)



Hình 2 với $k = 1$ Đường Cardioid

Hình 3 : với $k = 2$

Hình 4 : với $k = 3$

Hình 5 : với $k = 5$

Dành cho các bạn TRUNG HỌC CƠ SỞ



MỘT SỐ BÀI TOÁN VỀ TÍCH SỐ ĐO HAI ĐOẠN THẲNG

ĐẶNG VĂN BIỂU
(GV THCS Đông Dư, Gia Lâm, Hà Nội)

Đa số các học sinh thường lúng túng khi gặp các bài toán hình học yêu cầu chứng minh các hệ thức hình học bậc hai, hoặc tìm giá trị các biểu thức hình học bậc hai.

Bài viết này trình bày cách giải một số bài toán chứng minh một hệ thức hoặc tìm giá trị biểu thức hình học dạng $ab \pm cd$ dành cho học sinh lớp 8 khi chưa học đến đường tròn.

I. Các bài toán cơ bản

Để giải quyết bài toán dạng nêu trên ta thường dùng đến: định lý Pi-ta-go, định lý Ta-lét, định nghĩa và tính chất của hai tam giác đồng dạng.

Ngoài ra các bài toán cơ bản sau có thể giúp tìm ra phương hướng giải.

Bài toán 1. Cho tam giác ABC . Dựng góc $\widehat{ABD} = \widehat{ACB}$ với D trên tia AC thì $AC \cdot AD = AB^2$

Chứng minh.

(h.1) $\triangle ADB \sim \triangle ABC$

$$\text{nên } \frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AC}$$

$$\Rightarrow AC \cdot AD = AB^2.$$

Tương tự nếu

$\widehat{ACE} = \widehat{ABC}$ với E thuộc tia AB thì ta có $AB \cdot AE = AC^2$.

Bài toán 2. Cho tam giác ABC . Dựng góc $\widehat{ACD} = \widehat{ABE}$ với D trên tia AD và E trên tia AC thì $AB \cdot AD = AC \cdot AE$.

Chứng minh. (h. 2)

$\triangle ABE \sim \triangle ACD$ nên

$$\frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AD}$$

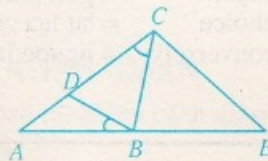
$$\Rightarrow AB \cdot AD = AC \cdot AE.$$

Hệ thức trên vẫn đúng nếu cho tam giác

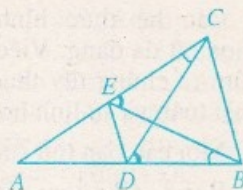
ADE và dựng góc $\widehat{AEB} = \widehat{ADC}$ như ở hình 2.

Trường hợp riêng của BT2 là BT3 sau (h. 3):

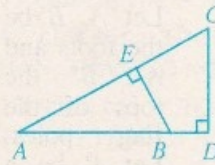
Bài toán 3. Nếu trên các cạnh của góc BAC kẻ $BE \perp AC$ và $CD \perp AB$ thì $AB \cdot AD = AC \cdot AE$.



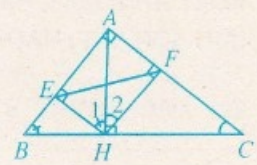
Hình 1



Hình 2



Hình 3



Hình 4

II. Các bài toán tìm biểu thức hình học dạng $ab \pm cd$

Ta sử dụng các bài toán cơ bản nêu trên để giải các bài toán phức tạp hơn có chứa biểu thức dạng $ab \pm cd$.

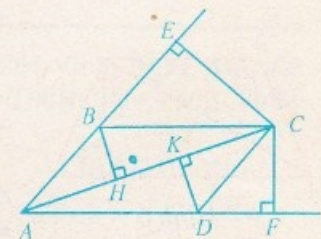
Bài toán 4. Cho tam giác ABC vuông ở A với đường cao AH . Gọi E, F lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ H đến AB, AC thì $AB \cdot AE + AC \cdot AF = 2EF^2$.

Chứng minh. Vì $\widehat{ABH} = \widehat{H_1}$ và $\widehat{ACH} = \widehat{H_2}$ (h. 4) nên áp dụng BT1 có $AB \cdot AE + AC \cdot AF = AH^2 + AH^2 = 2AH^2$. Vì $AEHF$ là hình chữ nhật nên $AH = EF$ suy ra đpcm.

Bài toán 5. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của C lên AB, AD . Chứng minh rằng $AB \cdot AE + AD \cdot AF = AC^2$

Chứng minh: Để vận dụng được BT3, kẻ $BH \perp AC$ và $DK \perp AC$ (h. 5), có $AB \cdot AE = AH \cdot AC$; $AD \cdot AF = AK \cdot AC$.

Cộng theo từng vế hai đẳng thức này và chú ý rằng $AH = CK$ ta có điều phải chứng minh.



Hình 5

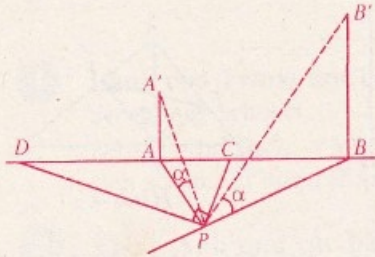
Bài toán 6. Cho hình thang cân $ABCD$ với $AD \parallel BC, AB = CD$. Chứng minh rằng: $AB^2 + AD \cdot BC = AC^2$

Chứng minh: Dựng góc $\widehat{ABE} = \widehat{ACB}$ (h. 6) với E thuộc AC để vận dụng được BT1. Ta có $AB^2 = AE \cdot AC$ (1). Dễ thấy $\widehat{B_1} = \widehat{C_1}$ và $\widehat{C_2} = \widehat{A_1}$...

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

BÀI SỐ 65

Problem. Two flag poles of different heights are situated a small distance apart from each other. Find all points on the ground where a man can look to the elevation of the flags at equal angles.



Solution.

Let A, B be the foots and A', B' the tops of the flag poles. Let P be a point on the ground from which a man can see AA'

and BB' at equal angles. That means $\angle APA' = \angle BPB'$.

Hence the rectangular triangles PAA' and PBB' are similar. It follows that $\frac{PA}{PB} = \frac{AA'}{BB'}$ is a constant.

If P does not lie on the line AB , we draw the bisectors of the internal angle and the external angle at the vertex P of the triangle APB . These bisectors meet the line AB in points C and D

$$\text{with } \frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB} = \frac{PA}{PB}$$

Therefore, C, D does not depend on the choice of P . On the other hand, we have $\angle CPD$

$= 90^\circ$. Hence P lies on the circle with diameter CD . Conversely, it is easy to check that

$$\frac{PA}{PB} = \frac{AA'}{BB'}$$

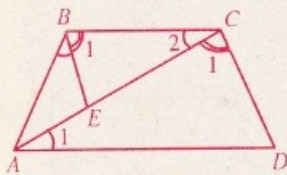
for all points P on this circle. From this it follows that the rectangular triangles PAA' and PBB' are similar. Hence $\angle APA' = \angle BPB'$.

Từ mới:

flag	= lá cờ
pole	= cột, que
different	= khác nhau (tính từ)
height	= độ cao
situate	= đặt ở vị trí (động từ)
apart	= riêng ra, xa ra (phó từ)
each other	= lẫn nhau
ground	= mặt đất, nền
elevation	= sự ngước lên, độ cao
top	= đỉnh, chóp
mean	= có nghĩa (động từ)
similar	= đồng dạng, tương tự
draw	= vẽ (động từ)
bisector	= đường phân giác
internal	= bên trong (tính từ)
external	= bên ngoài (tính từ)
depend	= phụ thuộc (động từ)
choice	= sự lựa chọn
conversely	= ngược lại (phó từ)

NGÔ VIỆT TRUNG

MỘT SỐ BÀI TOÁN...



Hình 6

...nên $\triangle CBE \sim \triangle ACD$

$$\Rightarrow \frac{CB}{CE} = \frac{AC}{AD}$$

$$\Rightarrow AD \cdot BC = AC \cdot CE \quad (2)$$

Từ (1) và (2) có

$$\begin{aligned} AB^2 + AD \cdot BC &= AC(AE + CE) \\ &= AC^2 \quad (\text{dpcm}). \end{aligned}$$

Bài toán 7. Cho tam giác ABC vuông ở C . Lấy điểm E trên đường cao CH . Kẻ $BD \perp AE$ tại D . Chứng minh rằng :

- $AE \cdot AD + BA \cdot BH = AB^2$
- $AE \cdot AD - HA \cdot HB = AH^2$

Chứng minh. Áp dụng BT3 có $AE \cdot AD = AH \cdot AB$ (3)

Từ (3) có

$$AE \cdot AD + BA \cdot BH = AB(AH + BH) = AB^2$$

Từ (3) cũng có

$$AE \cdot AD - HA \cdot HB = AH(AB - HB) = AH^2.$$

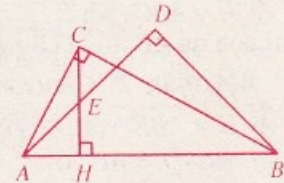
Các hệ thức hình học rất đa dạng. Việc tìm ra chúng tùy thuộc và điều kiện cụ thể của bài toán và sự linh hoạt, sáng tạo của người giải.

Mời các bạn thử sức với các bài tập sau :

Bài 1. Cho tam giác ABC với các đường cao BE, CF cắt nhau tại H . Chứng minh rằng :

$$BE \cdot BH + CF \cdot CH = BC^2.$$

Bài 2. Cho tam giác ABC vuông tại A với đường cao AH . Gọi HD, HE lần lượt là các đường cao của tam giác ABH, ACH . Chứng minh rằng : $AH^3 = AD \cdot AE \cdot BC$.



Hình 7

GIỚI THIỆU VỀ TOÁN HỌC CAO CẤP

TẠI SAO PHƯƠNG TRÌNH BẬC 5 KHÔNG GIẢI ĐƯỢC ?

PHÙNG HỒ HẢI

(Viện Toán học)

Chúng ta đều biết phương trình bậc không quá 4 đều có thể giải được bằng căn thức tuy nhiên phương trình bậc 5 không phải luôn giải được bằng căn thức. Điều này đã được N. Abel, một nhà toán học Na Uy chứng minh đầu thế kỉ XIX. Sau đó một thời gian ngắn E. Galois, một nhà toán học Pháp đã đưa ra một phương pháp mới không những giải quyết trọn vẹn tính không giải được bằng căn thức của các phương trình bậc 5 tổng quát mà còn đưa ra một tiêu chuẩn cho biết khi nào một phương trình đa thức tổng quát giải được bằng căn thức.

Những ý tưởng của Galois vẫn còn được dùng đến tận ngày nay trong những lĩnh vực sâu sắc nhất của toán học.

Mục đích của bài viết này là giới thiệu cho các bạn học sinh phổ thông lí thuyết Galois trong việc giải phương trình đại số. Vì khuôn khổ bài báo nên nhiều mệnh đề được phát biểu dưới dạng bài tập.

1. Thế nào là giải phương trình đại số

Giải một phương trình đại số bằng căn thức là tìm cách biểu diễn các nghiệm của phương trình đó bằng một biểu thức đại số chỉ chứa các phép toán cộng, trừ, nhân, chia và khai căn của các hệ số của phương trình đó.

Trong lịch sử của toán học, việc giải phương trình luôn là động lực của sự phát triển. Đầu tiên cần phải nói đến số vô tỉ. Xét phương trình $x^2 - 2 = 0$. Nghiệm của phương trình này là $\sqrt{2}$. Ta biết $\sqrt{2}$ là một số vô tỉ. Tiếp theo ta xét phương trình $x^2 + 1 = 0$. Phương trình này không có nghiệm thực. Trong một thời gian dài người ta chỉ dừng ở đó. Tuy nhiên đến thế kỉ XVI khi giải phương trình bậc 3, người ta phát hiện ra rằng trong nhiều trường hợp nghiệm thực của phương trình này biểu diễn được trong dạng biểu thức mà dưới dấu căn bậc 2 có số âm. Từ đó người ta nghĩ đến việc coi $\sqrt{-1}$ là số, gọi nó là số ảo (tiếng Anh "imaginary - tưởng

tượng"). Từ số ảo ta xây dựng các số phức. Thông thường tập các số phức được kí hiệu là $\mathbb{C}$ và được gọi là *trường số phức*. Thuật ngữ *trường số* dùng để chỉ một tập hợp số T mà trên đó khi thực hiện các phép toán cộng, trừ, nhân, chia thì kết quả lại là số thuộc T .

Các ví dụ quen thuộc về trường số là trường số thực, kí hiệu là $\mathbb{R}$, trường số hữu tỉ, kí hiệu là $\mathbb{Q}$. Ta có thể xây dựng các ví dụ khác về trường số như sau. Xét tập hợp tất cả các số thực dạng $a+b\sqrt{2}$. Dễ dàng kiểm tra rằng tổng, hiệu, tích, thương (với mẫu số khác 0) của các số có dạng như vậy lại là những số có dạng như vậy.

Ta kết luận rằng tập hợp $\{a+b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ là một trường, kí hiệu là $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$. Tương tự ta có thể thay 2 bằng bất kì số không chính phương nào. Hơn thế nữa ta có thể thay các số dương bằng các số âm, chẳng hạn ta có trường số $\mathbb{Q}[\sqrt{-1}]$.

Bài tập 1. Chứng minh rằng mỗi trường số chứa tập số tự nhiên luôn chứa trong nó tập các số hữu tỉ. Nói cách khác, tập các số hữu tỉ là trường số bé nhất (chứa tập số tự nhiên).

Quay lại với phương trình $x^2 - 2 = 0$. Phương trình này không có nghiệm trong trường số hữu tỉ nhưng có nghiệm trong trường số $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.

Tương tự, phương trình $x^2 + 1$ không có nghiệm trong $\mathbb{R}$ nhưng có nghiệm trong $\mathbb{C}$. Vậy bằng cách mở rộng một trường số ta có thể làm cho một đa thức với các hệ số thuộc trường đó có nghiệm. Cuối thế kỉ XVIII K. Gauss đã chứng minh được rằng mọi đa thức đều có nghiệm trong trường số phức.

Tuy nhiên để một phương trình có nghiệm ta không nhất thiết phải mở rộng tới tận trường số phức. Xét phương trình $x^5 - 4x + 2 = 0$. Dễ thấy phương trình này có 3 nghiệm thực và 2 nghiệm phức là hai số phức liên hợp. Bằng cách tương tự như trên ta có thể mở rộng trường $\mathbb{Q}$ bởi một nghiệm α nào đó của phương trình $x^5 - 4x + 2 = 0$ và kí hiệu nó là $\mathbb{Q}[\alpha]$. Phát biểu một cách chính xác, $\mathbb{Q}[\alpha]$ được định nghĩa là trường số nhỏ nhất trong $\mathbb{C}$ chứa $\mathbb{Q}$ và α . Một phần tử của $\mathbb{Q}[\alpha]$ được biểu diễn bằng một biểu thức đại số chỉ chứa các phép toán cộng, trừ, nhân, chia của α và các số hữu tỉ. Nói cách khác, chúng là các phân thức đại số với hệ số hữu tỉ theo α .

Bài tập 2. Chứng minh rằng $\mathbb{Q}[\alpha]$ với α là nghiệm của $x^5 - 4x + 2 = 0$ là tập hợp các số có dạng $a_1 + a_2\alpha + \dots + a_5\alpha^4$ trong đó $a_1, \dots, a_5 \in \mathbb{Q}$.

Nói cách khác, các phân tử của $\mathbb{Q}[\alpha]$ là các đa thức theo α với hệ số hữu tỉ.

Trường phân rã. Ta biết rằng đa thức $x^5 - 4x + 2$ có 1 nghiệm α trong trường $K_1 = \mathbb{Q}[\alpha]$. Như vậy ta có thể chia $x^5 - 4x + 2$ cho $x - \alpha$ và thu được một đa thức bậc 4 mà hệ số của nó là các số thuộc K_1 . Ta lặp lại quá trình như trên và sau nhiều nhất là 4 bước ta thu được các trường $K_4 \supseteq K_3 \supseteq K_2 \supseteq K_1 \supset \mathbb{Q}$ mà trong K_4 đa thức $x^5 - 4x + 2$ có đủ 5 nghiệm. Ngoài ra từ cách xây dựng ta thấy một phân tử của K_4 là các đa thức theo các biến là các nghiệm của đa thức $x^5 - 4x + 2$. Vậy K_4 là trường nhỏ nhất chứa các nghiệm của đa thức $P(x) = x^5 - 4x + 2$. K_4 được gọi là *mở rộng phân rã* của $\mathbb{Q}$ bởi đa thức $P(x)$ với hệ số hữu tỉ.

2. Nhóm các tự đẳng cấu của trường

Cho K và L là hai trường số. Một ánh xạ f từ K vào L được gọi là một **đồng cấu trường** nếu nó thỏa mãn $f(1) = 1$, $f(x + y) = f(x) + f(y)$ và $f(xy) = f(x)f(y)$. Để thấy ánh xạ đồng nhất luôn là một đồng cấu trường. Từ định nghĩa của đồng cấu trường, ta có $f(n) = n.f(1) = n$, từ đó $f(m/n) = m/n$. Vậy một đồng cấu của hai trường số chứa tập số tự nhiên luôn biến tập số hữu tỉ $\mathbb{Q}$ thành $\mathbb{Q}$.

Một đồng cấu của các trường số luôn là đơn ánh. Thật vậy, nếu $f: K \rightarrow L$ là một đồng cấu trường và $f(a) = f(b)$ với $a \neq b$, thì $f(a - b) = f(a) - f(b) = 0$ mà $a - b \neq 0$, nên $f(1) = f\left(\frac{1}{a-b}\right).f(a-b) = 0$ mâu thuẫn với định nghĩa của đồng cấu trường.

Đồng cấu trường $f: K \rightarrow K$ gọi là **tự đồng cấu trường**.

Một đồng cấu trường số đồng thời là một song ánh được gọi là **một đẳng cấu trường**. Khi đó, ánh xạ ngược cũng là một đẳng cấu trường (tại sao? bạn đọc tự chứng minh).

Ví dụ 1. • Ánh xạ $z \mapsto \bar{z}$ biến một số phức thành số liên hợp với nó là một tự đẳng cấu trường các số phức.

• Ánh xạ $a + b\sqrt{2} \mapsto a - b\sqrt{2}$ là một tự đẳng cấu của trường $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.

Hai ví dụ này là một trường hợp đặc biệt của bài tập dưới đây (dựa vào BT 1 để giải)

Bài tập 3. Cho $P(x)$ là một đa thức bất khả quy trên trường $\mathbb{Q}$. Giả sử α_1 và α_2 là 2 nghiệm khác nhau của $P(x)$. Chứng minh rằng tồn tại

duy nhất đồng cấu trường $\mathbb{Q}[\alpha_1] \rightarrow \mathbb{Q}[\alpha_2]$ biến $\alpha_1 \mapsto \alpha_2$ và đồng cấu này là một đẳng cấu.

Nhận xét. Bài tập trên cho phép ta xây dựng các đồng cấu trường không tầm thường. Bằng cách xét hai nghiệm phân biệt của đa thức bất khả quy $P(x)$ ta có một đồng cấu trường $\mathbb{Q}[\alpha_1] \rightarrow \mathbb{C}$, trong đó $\alpha_1 \mapsto \alpha_2$. Ta gọi đồng cấu này là một mở rộng của đồng cấu tầm thường nhúng trường $\mathbb{Q}$ vào trường $\mathbb{C}$.

Cấu trúc nhóm. Tập hợp các tự đẳng cấu của một trường có các tính chất sau đây: nếu g và f là hai đẳng cấu thì tích $g \circ f$ (thực hiện f rồi đến g) lại là một đẳng cấu, ánh xạ nghịch đảo của một tự đẳng cấu cũng là một tự đẳng cấu. Ta gọi một tập như vậy là một **nhóm**. Nhóm G các tự đẳng cấu của trường K được gọi là **nhóm Galois** của K trên $\mathbb{Q}$. Ta có thể mở rộng khái niệm này bằng cách thay $\mathbb{Q}$ bởi một trường bất kì.

Ví dụ 2. Trong các mở rộng ở ví dụ 1, các nhóm Galois tương ứng có 2 phần tử $G = \{e, f\}$, ánh xạ đồng nhất e và một ánh xạ f có tính chất bình phương của nó là ánh xạ đồng nhất, nghĩa là $f^2 = f \circ f = e$.

Bây giờ ta xét trường hợp K là một mở rộng phân rã của $\mathbb{Q}$ bởi đa thức $P(x)$ với hệ số hữu tỉ nhưng không có nghiệm hữu tỉ. Ta nhận thấy rằng các tự đồng cấu của K không làm thay đổi đa thức $P(x)$ vì các hệ số của đa thức này là các số hữu tỉ. Từ đó nếu f là một tự đồng cấu của K và α_1 là một nghiệm của $P(x)$ thì $\alpha_2 = f(\alpha_1)$ lại là một nghiệm của $P(x)$. Mặt khác, một đồng cấu trường luôn là một đơn ánh, vậy các tự đồng cấu của K sẽ hoán vị các nghiệm của đa thức $P(x)$. Ta đã biết rằng các phân tử của K là đa thức theo các biến là nghiệm của $P(x)$. Vậy, một tự đồng cấu của K là một đẳng cấu và được xác định một cách duy nhất bởi một hoán vị các nghiệm của $P(x)$.

Tuy nhiên không phải mọi hoán vị của các nghiệm của $P(x)$ đều cho một tự đẳng cấu của trường K . Ta nói nhóm G các tự đẳng cấu của K là một **nhóm con** của nhóm các hoán vị của các nghiệm của $P(x)$. Nói chung G có thể bằng hoặc thực sự nhỏ hơn nhóm các hoán vị của các nghiệm.

Nhóm Galois của một đa thức chứa tất cả những thông tin cần thiết về tính giải được của đa thức này. Trước hết ta hãy tìm hiểu một số thông tin về nhóm Galois.

Theo Bài tập 3 ta có thể coi đẳng cấu $\mathbb{Q}[\alpha_1] \rightarrow \mathbb{Q}[\alpha_2]$ như là một đồng cấu từ trường $\mathbb{Q}[\alpha_1]$ vào trường số phức $\mathbb{C}$. Dựa vào nhận

xét sau Bài tập 3 khi thay trường $\mathbb{Q}$ bởi trường $\mathbb{Q}[\alpha_1]$, ta có thể tiếp tục mở rộng đồng cấu đã có từ $\mathbb{Q}[\alpha_1] \rightarrow \mathbb{C}$ để cuối cùng thu được một đồng cấu từ trường phân rã K bởi $P(x)$ vào $\mathbb{C}$.

Định lý 1. Cho K là trường phân rã của $\mathbb{Q}$ bởi đa thức $P(x)$ với hệ số hữu tỉ. Gọi G là nhóm Galois bởi mở rộng này. Nếu $a \in K$ thỏa mãn $f(a) = a$ với mọi $f \in G$ thì a là số hữu tỉ.

Chứng minh. Để thấy mọi số hữu tỉ đều bất biến với các tự đẳng cấu của K . Ngược lại, xét $a \in K$ là một số vô tỉ, ta chứng minh rằng tồn tại một đẳng cấu của K không biến a thành a .

Theo giả thiết a biểu diễn được dưới dạng một đa thức theo các nghiệm của $P(x)$ và do đó là nghiệm của một đa thức bất khả quy $Q(x)$ bậc lớn hơn 1 với hệ số hữu tỉ. Giả sử b là một nghiệm khác của $Q(x)$. Khi đó ta có một đẳng cấu trường $\mathbb{Q}[a] \rightarrow \mathbb{Q}[b]$ biến a thành b . Theo lý luận ở trên đồng cấu này có thể mở rộng thành một đồng cấu từ K vào $\mathbb{C}$. Cũng theo trên, đồng cấu này có ảnh trùng với K , nghĩa là tồn tại một tự đẳng cấu của K biến a thành b mà $b \neq a$.

3. Thế nào là giải phương trình bằng căn thức

Nếu đa thức có hệ số hữu tỉ, ta cần biểu diễn nghiệm của nó qua các số hữu tỉ bằng 5 phép toán nói trên. Rõ ràng, ngoài phép toán lấy căn thức, các phép toán cộng, trừ, nhân, chia là đóng đối với một trường nghĩa là kết quả các phép toán trên các phần tử của trường lại là phần tử của trường (theo định nghĩa của trường).

Xét một trường số K . Phép lấy căn một phần tử của trường nói chung không đóng đối với trường đó. Ngoài ra giá trị của căn không được xác định duy nhất. Ví dụ căn bậc n của số 1 trên

trường số phức là n số phức mà ta sẽ kí hiệu là $\xi_0 = 1, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}$, lúc đó $\xi_i^n = 1$ với $i = 0, 1, \dots, n-1$.

Ta sẽ mở rộng $\mathbb{Q}$ thành một trường T mà trong đó số 1 có đầy đủ tất cả các căn ở bậc n . Lúc đó mở rộng T bởi căn bậc n (là α) của một phần tử a nào đó của T ($a = \alpha^n$) chứa tất cả các căn khác của a vì chứa $\alpha = \alpha \xi_0, \alpha \xi_1, \dots, \alpha \xi_{n-1}$.

Chú ý rằng mở rộng này nhỏ hơn $\mathbb{C}$ vì ta bắt đầu với $\mathbb{Q}$ chứ không phải với $\mathbb{R}$.

Cho một trường số K . Ta nói L là mở rộng căn (bậc n) của K nếu L nhận được bằng cách thêm vào K căn (bậc n) của một phần tử nào đó trong K . Một biểu thức đại số có chứa căn thức sẽ là thương của tổng các căn thức (với hệ số) mà trong mỗi căn thức lại là một biểu thức đại số có chứa căn thức khác. Như vậy nếu mở rộng căn liên tiếp $T = T_0 \subset T_1 \subset T_2 \subset \dots \subset T_n$ thì một biểu thức đại số có chứa căn thức của các phần tử thuộc trường T sẽ nằm trong một mở rộng T_i nào đó.

Như vậy ta có thể kết luận: một phương trình trên trường T giải được bằng căn thức nếu tồn tại một dãy liên tiếp các mở rộng căn của T là $T = T_0 \subset T_1 \subset T_2 \subset \dots \subset T_n$ sao cho T_n chứa mọi nghiệm của phương trình đó.

Ngoài ra ta luôn có thể bổ sung dãy mở rộng căn trên thành một dãy mở rộng căn mà trường cuối cùng là một mở rộng phân rã của T . Như vậy, nếu một đa thức hệ số hữu tỉ có trường phân rã không nằm trong bất kỳ một mở rộng căn nào của T thì nghiệm của đa thức đó không biểu diễn được bằng căn thức.

(Kỳ sau đăng tiếp)

ĐƯỜNG CONG... (Tiếp bài 2)

3. Một số dạng đường Ê-pi-xy-clô-it

Hình dạng của đường cong $\mathcal{E}$ phụ thuộc vào giá trị của tỉ số $k = a/b$. Xét một số đường cong $\mathcal{E}$ với $k \geq 1$.

a) Với $k = 1$, tức là $a = b$, đường cong $\mathcal{E}$ có PT $\begin{cases} x = 2a \cos t - a \cos 2t \\ y = 2a \sin t - a \sin 2t \end{cases}$ và giống hình trái tim, gọi là đường Các-đi-ô-it (hình 2).

b) Với $k = a/1 = a$ với $a > 1$ là số nguyên thì đường cong $\mathcal{E}$ có phương trình

$$\begin{cases} x = (a+1)\cos t - \cos(a+1)t \\ y = (a+1)\sin t - \sin(a+1)t \end{cases}$$

biểu thị a cánh hoa giống như nhau mà không giao nhau bao quanh đường tròn tâm O (hình 3 với $k = 2$, hình 4 với $k = 3$, hình 5 với $k = 5$).

c) Với $k = \frac{a}{b}$ với các số nguyên $a > b > 1$ thì đường cong $\mathcal{E}$ biểu thị a cánh hoa chẵn b cung tròn của đường tròn $\mathcal{C}$ được chia thành a cung tròn, các cánh hoa này giao nhau (ở bài 1: hình 6 với $k = 10/3$, hình 7 với $k = 9/2$, hình 8 với $k = 15/4$, hình 9 với $k = 12/5$).

CHUẨN BỊ THI VÀO ĐẠI HỌC

NHỮNG SAI LẦM DỄ MẮC PHẢI

KHI LÀM TOÁN THI VÀO ĐẠI HỌC NĂM 2003

BÙI QUANG TRƯỜNG
(ĐHXD Hà Nội)

Kì thi tuyển sinh vào Đại học và Cao đẳng năm 2003 đã khép lại. Người đạt điểm chuẩn đã được gọi nhập học, người chưa đủ điểm chuẩn nếu định thi tiếp lặng lẽ xem lại mình, cố gắng tìm ra những sai lầm để sửa chữa. Tôi viết bài này, hi vọng cùng các bạn tìm ra các thiếu sót khi giải các đề Toán khối A, B, D vào các trường Đại học năm nay.

I. Khảo sát hàm số và tìm điều kiện có nghiệm phương trình. Đây là những câu hỏi cơ bản, đơn giản nhưng vẫn có thí sinh mắc lỗi.

1.1. Đề : Tìm m để đường thẳng $y = mx + 2 - 2m$ cắt đồ thị của hàm số $y = \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2}$ tại hai điểm phân biệt.

Phân tích. Sai lầm mà một số thí sinh mắc phải ở đây là xét phương trình (PT) hoành độ giao điểm

$$\frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2} = mx + 2 - 2m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \\ (m-1)x^2 - 4(m-1)x + 4m - 8 = 0 \quad (1) \end{cases}$$

thiếu điều kiện (ĐK) hệ số của x^2 khác 0 ($m \neq 1$) hoặc thiếu ĐK $\Delta = 4(m-1) > 0$ để PT (1) có 2 nghiệm phân biệt. Trong bài toán khác, nếu đã sử dụng định lý đạo về dấu của tam thức bậc hai $af(\alpha) < 0$ thì đương nhiên đã có $\Delta > 0$ (nếu cứ nêu ĐK $\Delta > 0$ thì không sai nhưng thừa). Đối với đề thi cho khối A thí sinh cũng mắc sai lầm tương tự trên.

1.2. Đề : Tìm m để đồ thị hàm số : $y = x^3 - 3x^2 + m$ có hai điểm phân biệt đối xứng nhau qua gốc tọa độ.

Phân tích : Nếu $A(x_0, y_0)$ là một điểm thuộc đồ thị thì $y_0 = y(x_0)$. Điểm B đối xứng với A qua gốc tọa độ nên $B(-x_0, -y_0)$. Vì B thuộc đồ thị đã cho nên $-y_0 = y(-x_0)$. Do đó $-y(x_0) = y(-x_0)$

$$\Leftrightarrow -(x_0^3 - 3x_0^2 + m) = (-x_0)^3 - 3(-x_0)^2 + m$$

$$\Leftrightarrow m = 3x_0^2.$$

Một số thí sinh quên ĐK $x_0 \neq 0$ (vì A, B phân biệt) nên đưa ra đáp số $m \geq 0$ mà thực ra đáp số cần tìm là $m > 0$.

II. Phương trình lượng giác

Năm 2002 và năm nay các đề thi Toán khối A, B, D của Bộ GD và ĐT đều yêu cầu giải PT lượng giác. Sai lầm khi giải loại toán này là khá nhiều, chủ yếu là không đặt điều kiện để PT ban đầu có nghĩa, dẫn đến lấy nghiệm không thỏa mãn đề bài.

2.1. Đề : Giải PT :

$$\cot x - \tan x + 4\sin 2x = \frac{2}{\sin 2x} \quad (\text{khối B}) \quad (2)$$

Phân tích : ĐK : $\sin x \neq 0, \cos x \neq 0, \sin 2x \neq 0$
 $\Rightarrow x \neq k\pi/2 \quad (k \in \mathbb{Z})$

$$\text{Ta có (2)} \Leftrightarrow \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x \cos x} + 4\sin 2x = \frac{2}{\sin 2x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos 2x}{\sin 2x} + 2\sin 2x = \frac{1}{\sin 2x}$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x + 2\sin^2 2x = 1 \quad (\text{vì } \sin 2x \neq 0).$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 2x - \cos 2x - 1 = 0$$

PT này có 2 nghiệm : $\cos 2x = 1$ và $\cos 2x = -1/2$.

Một số thí sinh không loại bỏ $\cos 2x = 1$ (lúc đó $\sin 2x = 0$, trái ĐK). Còn lại $\cos 2x = -1/2 \Leftrightarrow x = \pm\pi/3 + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

Nếu giải cách khác : đặt $\tan x = t$ thì sau khi biến đổi được (2) $\Leftrightarrow 2t^2(t^2 - 3) = 0$. Sai lầm ở đây là không chú ý loại bỏ $t = \tan x = 0$ theo ĐK đã đặt. Đúng ra chỉ còn giải $\tan^2 x = 3 \Leftrightarrow x = \pm\pi/3 + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

2.2. Đề : Giải PT :

$$\sin^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \tan^2 x - \cos^2 \frac{x}{2} = 0 \quad (\text{khối D}) \quad (3)$$

Phân tích : ĐK : $\cos x \neq 0 \Rightarrow x \neq \pi/2 + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

Chú ý rằng

$$2\sin^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 1 - \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 1 - \sin x.$$

$$\text{Ta có (3)} \Leftrightarrow \frac{1 - \sin x}{2} \cdot \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{1 + \cos x}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x - \cos^2 x - (\sin^3 x + \cos^3 x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(\sin x - \cos x - 1 + \sin x \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(\cos x + 1)(\sin x - 1) = 0$$

Giải các PT : $\tan x = -1$, $\cos x = -1$, $\sin x = 1$ được các nghiệm $x = -\pi/4 + k\pi$, $x = \pi + 2k\pi$, $x = \pi/2 + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). Một số thí sinh không loại bỏ nghiệm $x = \pi/2 + 2k\pi$ (trái với ĐK đặt ra).

III. Phương trình, bất phương trình mũ và lôgarit. Mảng toán này chỉ có một bài cho khối D. Ở khối A và B : không có

$$\text{3.1. Đề: Giải PT: } 2^{x^2-x} - 2^{2+x-x^2} = 3 \text{ (khối D)}$$

Phân tích. Đặt ẩn phụ $t = 2^{x^2-x}$ thì (4) $\Leftrightarrow t - \frac{4}{t} = 3 \Leftrightarrow t^2 - 3t - 4 = 0$. PT này có 2 nghiệm $t_1 = 4$, $t_2 = -1$. Vì $t = 2^{x^2-x}$ luôn luôn dương nên nghiệm t_2 bị loại và (4) $\Leftrightarrow 2^{x^2-x} = 4 \Leftrightarrow x^2 - x = 2 \Leftrightarrow x_1 = 2$ và $x_2 = -1$.

Nhiều thí sinh cho rằng khi đặt ẩn phụ t thì cần phải đặt ĐK $t > 0$ vì t là hàm số mũ. Chú ý rằng mục đích của việc đặt điều kiện là để làm cho PT có nghĩa (và xác định duy nhất khi đặt ẩn phụ). Đặt ĐK $t > 0$ trong bài giải trên không phải là yêu cầu của việc giải toán, hơn nữa người giải tự ý đặt ĐK này sẽ dễ gây nhầm lẫn như trong bài toán có tham số sau đây :

BT. Tìm m để PT $2^{x^2-x} - 2^{2+x-x^2} = m$ (5) có nghiệm

$$\text{Ta thấy } x^2 - x = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \geq -\frac{1}{4} \text{ nên}$$

$$t = 2^{x^2-x} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}. \text{ Như vậy PT (5) tương đương}$$

$$\text{với PT } t - \frac{4}{t} = m \text{ với } t \geq \frac{1}{\sqrt{2}}. \text{ Rõ ràng bài toán}$$

$$\text{này khác với bài toán tìm } m \text{ để PT } t - \frac{4}{t} = m \text{ có}$$

nghiệm $t > 0$. Tóm lại trong bài toán có tham số khi đặt ẩn phụ thì ta phải tìm miền giá trị chính xác cho ẩn phụ đó.

IV. Hệ phương trình đại số

$$\text{4.1. Đề: Giải hệ PT } \begin{cases} x - \frac{1}{x} = y - \frac{1}{y} & (6) \\ 2y = x^3 + 1 \end{cases} \text{ (khối A)}$$

Phân tích: Sai lầm trước hết là cho rằng (6)

$$\Leftrightarrow x = y \text{ (??) Thực ra (6) } \Leftrightarrow x - y + \frac{1}{y} - \frac{1}{x} = 0.$$

Như vậy $x = y$ chỉ là ĐK cần để có (6). Đúng ra

$$(6) \Leftrightarrow x - y + \frac{x-y}{xy} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ 1 + \frac{1}{xy} = 0. \end{cases}$$

Để giải tiếp ta thay từng hệ thức này vào PT thứ hai của hệ PT.

Sai lầm thứ hai xảy ra khi giải PT $x^3 - 2x + 1 = 0$. Một số thí sinh cho rằng $a + b + c = 0$ thì

$$x_1 = 1, x_2 = \frac{c}{a} \text{ (điều này chỉ đúng với PT bậc}$$

hai $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$)). Với PT đại số (bậc tùy ý) nếu tổng các hệ số bằng không thì PT chắc chắn có 1 nghiệm bằng 1, ngoài ra có thể còn nghiệm khác. Để tìm các nghiệm khác cần phân tích đa thức đó ra thừa số bằng cách thực hiện phép chia đa thức cho $(x - 1)$.

Sai lầm thứ ba xảy ra khi có thí sinh cho rằng PT $x^2 + x + 2 = 0$ vô nghiệm nên $x^4 + x + 2 = 0$ cũng vô nghiệm (!). Đúng là PT $x^4 + x + 2 = 0$ vô nghiệm nhưng phải lập luận như sau :

$$x^4 + x + 2 = (x^4 - 2x^2 + 1) + x^2 + (x^2 + x + \frac{1}{4}) + \frac{3}{4} = (x^2 - 1)^2 + x^2 + \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0.$$

$$\text{4.2. Đề : Giải hệ PT : } \begin{cases} 3y = \frac{y^2 + 2}{x^2} \\ 3x = \frac{x^2 + 2}{y^2} \end{cases} \text{ (khối B)}$$

Phân tích. ĐK : $x \neq 0, y \neq 0$. Đây là hệ PT đối xứng loại II (khi thay x bởi y và y bởi x thì PT nó chuyển thành PT kia). Sự đối xứng của x và y trong hệ có thể dẫn đến ngộ nhận là luôn có $x = y$.

$$\text{Từ đó thấy hệ tương đương với } \begin{cases} 3x = \frac{x^2 + 2}{y^2} \\ x = y \end{cases} \text{ (?)}$$

và rút ra hệ có nghiệm duy nhất $x = y = 1$. Kết luận này đúng nhưng quá trình giải không đúng.

(Xem tiếp trang 9)

NHÂN KỈ NIỆM 39 NĂM NGÀY RA SỐ BÁO THPT ĐẦU TIÊN (15.10.1964)

Thường xuyên, bạn đọc gửi tới tòa soạn những suy nghĩ và bày tỏ tình cảm yêu quý của mình với tạp chí. Do khuôn khổ có hạn và dành ưu tiên cho các vấn đề thuộc về toán học phổ thông nên nhịp cầu với bạn đọc thông qua hộp thư không nối được nhiều như mong muốn. Nhân dịp kỉ niệm tròn 39 năm ngày ra số báo Toán học Tuổi trẻ đầu tiên 15.10.1964, chúng tôi trích đăng một số thư của các bạn gửi về gần đây. Rất cảm ơn các bạn đã dành nhiều ưu ái cho tờ báo thân thiết với bạn trẻ yêu toán, góp phần làm nên thành công của tạp chí.

THTT

"... Đầu thư, cho phép tôi gửi lời hỏi thăm cảm ơn Quý Thầy Cô & các Giáo sư của "Toán học & Tuổi trẻ", các Thầy Cô, Giáo sư đã xây dựng được "Toán học và Tuổi trẻ" thành công bằng cả nhiệt tâm và công sức. Nhờ đó ngày nay, "Toán học và Tuổi trẻ" đã trở thành một tài liệu quý giá để bồi dưỡng các thế hệ niềm say mê toán học và vận dụng thành công toán học vào cuộc sống..."

VŨ ANH TUẤN
(Tp. Vũng Tàu)

"... Trong những năm gần đây tôi thật sự vui mừng về những sự thay đổi cả về hình thức lẫn nội dung của tạp chí như số trang được tăng lên đến 28 trang, hình thức trình bày bắt mắt và sáng sủa hơn. Về mặt nội dung, bên cạnh các chủ đề đã quen thuộc với các bạn trẻ yêu thích toán sơ cấp như các mục *Đề ra kì này*, *Giải bài kì trước* hay *Tìm hiểu sâu thêm về toán sơ cấp*, tạp chí còn đưa thêm một số nội dung mới với mục đích giải trí và ứng dụng vào đời sống như: *Câu lạc bộ*, *Toán học & đời sống v.v...*"

NGUYỄN THANH TÙNG
(GV Khoa Cơ khí, ĐHSP Kỹ thuật Tp. HCM)

"... Tôi thường xuyên theo dõi các số báo "Toán học và Tuổi trẻ" từ rất lâu. Quả thực, các chuyên mục của báo rất bổ ích và thú vị với các bạn trẻ yêu toán, say mê và ham muốn tìm hiểu thế giới toán học. Nhiều bài báo gợi cho tôi rất nhiều suy nghĩ, đặc biệt là chuyên mục *tìm hiểu toán học hiện đại*. Tuy nhiên tôi nhận thấy mục *Tìm hiểu sâu toán học hiện đại* còn chưa thường xuyên, chưa có bài giới thiệu kiến thức toán học hiện đại một cách hệ thống..."

LÊ KHAI THẠCH
(Học viện KTQS Hà Nội)

"... Vậy là 3 năm học cấp III đã sắp sửa rồi xa chúng em mãi mãi rồi. Xa thời học sinh trong sáng này thật là buồn, nhưng em cũng cảm thấy rất tiếc rằng kể từ những giây phút này đây em không còn có được cái cảm giác hồi hộp vào giữa tháng, đứng trước tiệm báo, lần lượt mở từng trang giấy thơm phức của tờ tạp chí thân quen này... Tất cả sẽ mãi là kỉ niệm. Trước tiên em xin chân thành cảm ơn NXBGD cùng toàn thể Ban biên tập đã tạo cho học sinh chúng em một sân chơi bổ ích này để cùng nhau thi đua, tìm tòi và thể hiện mình..."

TRẦN VĂN DŨNG
(12A4, THPT Xuân Hòa, Vĩnh Phúc)

"...Sắp tới là Kỳ thi Đại học Cao đẳng vì vậy tôi tha thiết mong quý báo thông tin đầy đủ về kì thi này, cùng cố cho các em đang chuẩn bị bước vào cuộc thi một số kiến thức cơ bản và phong cách làm bài cũng như các lỗi thường mắc trong khi giải các bài toán..."

NGUYỄN ĐỨC CẢNH
(Chiến sĩ Bệnh xá biển phòng, Hải Phòng)

"...Hè năm nay, em đã phát hiện ra sự thiếu hụt một cái gì đó về toán học của bản thân nên em đã đặt tạp chí Toán học và Tuổi trẻ và thấy nó rất hay, bổ ích, có nhiều bài toán, thông tin toán học rất thú vị. Cảm ơn tòa soạn rất nhiều..."

NGUYỄN HÒA
(10A4, THPT Phan Đăng Lưu,
Thừa Thiên - Huế)

"... Em là học sinh trung học cơ sở, rất yêu thích toán học. Nhiều lần em đã được đọc báo và xem mục giải đáp thắc mắc trên báo. Em học được rất nhiều điều bổ ích và lí thú trên các trang báo đó..."

TRẦN THỊ HẰNG
(Khối 3, xã Diên Hồng, Diên Châu, Nghệ An)

CÂU LẠC BỘ (Tiếp trang 23)

KỈ NIỆM 39 NĂM TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Các con số sau đây là các cột mốc thời gian liên quan đến tạp chí **Toán học và Tuổi trẻ**. Bạn có thể viết được các sự kiện đó không nhỉ ? 1964, 1968, 1970, 1975, 1984, 1985, 1992, 1993, 1994, 1995, 1997, 1998, 2000, 2002, 2003

BÍNH NAM HÀ

TOÁN HỌC VÀ ĐỜI SỐNG

DÙNG PHÉP HOÁN VỊ ĐỂ MÃ HÓA KHI CHUYỂN TIN

THANH VÂN
(Hà Nội)

1. Phép hoán vị, chỉnh hợp, tổ hợp có nhiều ứng dụng trong toán học. Bài này giới thiệu một ứng dụng đơn giản của phép hoán vị để mã hóa giữ được bí mật khi chuyển tin.

Theo định nghĩa thì số hoán vị của n số tự nhiên đầu tiên (kí hiệu P_n) được xác định bởi công thức:

$$P_n = n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-1) \times n$$

Tích số trên chính là số các cách sắp xếp khác nhau của n số tự nhiên đầu tiên, mỗi cách sắp xếp là một hoán vị. Ví dụ với $n = 3$ ta có $3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$ cách sắp xếp (đổi chỗ) bộ ba số (1 2 3) như sau: (1 2 3), (1 3 2), (2 1 3), (2 3 1), (3 1 2), (3 2 1).

Cách đầu tiên là giữ nguyên vị trí ban đầu (phép hoán vị đồng nhất hoặc phép thế đồng nhất).

2. Người ta có thể dùng một trong 5 phép hoán vị trên của 3 kí tự (trừ hoán vị đồng nhất) làm khóa mã để mã hóa bản tin nhằm giữ bí mật bản tin này, không cho người ngoài cuộc biết. Ví dụ Hùng gửi cho Dũng bản tin T sau đây:

T = TRĂM NĂM TRONG CÔI NGƯỜI TA
và dùng hoán vị (2 3 1) làm khóa mã.

Để tránh nhầm lẫn, người ta viết lại bản tin thành từng nhóm 3 kí tự tương ứng như ở dưới đây, được bản tin R =

TRĂ MNĂ MTR ONG CÔI NGƯ ỜIT AXX
1 2 3 1 2 3 1 2 3 1 2 3 1 2 3 1 2 3 1 2 3
(2 chữ XX được thêm vào cuối bản tin cho đủ nhóm 3). Sau đó đổi chỗ các kí tự theo khóa mã là hoán vị (2 3 1) sẽ thu được bản mã M =
RẤT NĂM TRM NGO ỒIC GUN ITỜ XXA
2 3 1 2 3 1 2 3 1 2 3 1 2 3 1 2 3 1 2 3 1

Nếu chọn hoán vị khác làm khóa mã thì cùng bản tin trên ta sẽ thu được bản mã khác. Không biết khóa mã thì không đọc được bản mã này.

3. Bằng cách nào đó Hùng đã báo cho Dũng biết khóa đã dùng để mã hóa bản tin, do đó khi nhận được bản mã, Dũng phải dùng khóa dịch mã (ngược lại với khóa mã) để chuyển bản mã M thành bản tin T. Từ khóa mã (2 3 1), Dũng tìm được khóa dịch mã như sau:

Khóa mã

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Khóa dịch mã

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Đặt hoán vị (312) vào bản mã M rồi thực hiện phép đổi chỗ theo khóa dịch mã (1 thành 3, 2 thành 1, 3 thành 2) ta thu được bản tin R rồi thực hiện ngắt chữ thì được bản tin T.

M = RẤT NĂM TRM NGO ỒIC GUN
3 1 2 3 1 2 3 1 2 3 1 2 3 1 2 3 1 2

ITỜ XXA

3 1 2 3 1 2

R = TRĂ MNĂ MTR ONG CÔI NGƯ
ỒIT AXX

T = TRĂM NĂM TRONG CÔI NGƯỜI
TA XX

Dũng đã đọc được bản tin mà Hùng gửi cho.

Nếu n lớn thì số hoán vị khác nhau càng lớn, tức là số khóa để lựa chọn càng nhiều, do đó độ phức tạp của bản mã càng cao, cũng có nghĩa là độ bảo mật bản tin càng cao hơn.

Ngày nay, có máy vi tính, người ta đã ứng dụng phép hoán vị để lập ra các khóa mã rất phức tạp, có độ bảo mật cao, ví dụ như hệ thống mã với khóa mã công khai (Public Key Cryptosystem).

NHỮNG SAI LÂM... (Tiếp trang 7)

... Hệ PT đối xứng loại II có cách giải đặc trưng là trừ hai vế của hai PT (sau đó, nếu cần thiết lại cộng hai vế của hai PT đó). Một cách giải đúng là: Trừ vế theo vế hai PT thuộc hệ đã cho (trước đó làm mất mẫu thức) được

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x, y > 0 \\ 3x^2y = y^2 + 2 \end{cases} (7) \Leftrightarrow \begin{cases} x, y > 0 \\ (x-y)(3xy+x+y) = 0 \end{cases} \\ & \begin{cases} 3y^2x = x^2 + 2 \end{cases} (8) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2y = y^2 + 2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = y > 0 \\ 3x^2y = y^2 + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y > 0 \\ (x-1)(3x^2+2x+2) = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & x = y = 1. \end{aligned}$$

Cách giải khác: Lấy (7) chia cho (8) theo từng vế được $\frac{x}{y} = \frac{y^2+2}{x^2+2}$. Do vai trò của x và y như nhau không mất tính tổng quát giả sử $0 < x \leq y$ thì $\frac{x}{y} \geq \frac{y^2+2}{y^2+2} = 1 \Rightarrow x \geq y$. Vậy $x = y$, suy ra $x = y = 1$.

(Kì sau đăng tiếp)



ĐỀ RA KÌ NÀY

CÁC LỚP TRUNG HỌC CƠ SỞ

Bài T1/316. (Lớp 6). Xét các số gồm 7 chữ số phân biệt mà các chữ số đó thuộc tập hợp $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

- 1) Hỏi có ba số a, b, c nào mà $a + b = c$?
- 2) Hỏi có hai số khác nhau a, b nào mà a chia hết cho b ?

TRẦN HÀ
(GV THCS Nguyễn Bình Khiêm,
Vĩnh Bảo, Hải Phòng)

Bài T2/316. (Lớp 7). Cho tam giác ABC có $\widehat{ABC} = 30^\circ$ và $\widehat{BAC} = 130^\circ$. Gọi Ax là tia đối của tia AB . Đường phân giác của góc ABC cắt đường phân giác của góc $C Ax$ tại D . Đường thẳng BA cắt đường thẳng CD tại E . Hãy so sánh các độ dài AC và CE .

TRẦN VĂN HINH
(GV THCS Nam Giang, Nam Trực
Nam Định)

Bài T3/316. Tìm tất cả các cặp số nguyên tố p, q biết rằng $p^3 - q^5 = (p+q)^2$

NGUYỄN DUY LIÊN
(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

Bài T4/316. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 20 \cdot \frac{y}{x^2} + 11y = 2003 \\ 20 \cdot \frac{z}{y^2} + 11z = 2003 \\ 20 \cdot \frac{x}{z^2} + 11x = 2003 \end{cases}$$

HOÀNG HẢI DƯƠNG
(GV THCS Chu Mạnh Trinh, Văn Giang, Hưng Yên)

Bài T5/316. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{c}} + \frac{c}{\sqrt{a}}$ trong đó các số dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $a + b + c \geq 3$.

ĐINH VĂN KHÂM
(GV THPT Lương Văn Tụy, Ninh Bình)

Bài T6/316. Tam giác ABC với $BC = a, AB = AC = b$ có đường phân giác góc ACB cắt cạnh AB tại D sao cho $CD + DA = a$. Chứng minh rằng $a^3 + b^3 = 3ab^2$.

DƯƠNG CHÂU DINH
(GV THPT Lê Quý Đôn, Quảng Trị)

Bài T7/316. Giả sử D là một điểm trên cạnh BC (D khác B, C) của tam giác ABC . Gọi E và F lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABD và tam giác ACD . Chứng minh rằng nếu bốn điểm B, C, E, F cùng nằm trên một đường tròn thì $\frac{AD+DB}{AD+DC} = \frac{AB}{AC}$

PHẠM VĂN THUÂN
(Hà Nội)

CÁC LỚP TRUNG HỌC PHỔ THÔNG

Bài T8/316. Với mỗi số tự nhiên $k > 0$, chứng minh rằng số $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^{2k}$ luôn viết được trong dạng $a_k + b_k \sqrt{6}$ với a_k, b_k nguyên dương. Tìm hệ thức xác định dãy (a_k) , dãy (b_k) với $k = 1, 2, 3, \dots$. Chứng minh rằng với mọi $k \geq 2$ thì $a_{k-1} \cdot a_{k+1} - 6b_k^2$ là một hằng số.

NGUYỄN TRỌNG TUẤN
(GV THPT Hùng Vương, Pleiku, Gia Lai)

Bài T9/316. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$(x^{a_1} + x^{a_2} + \dots + x^{a_n}) \left(\frac{1}{x^{a_1}} + \frac{1}{x^{a_2}} + \dots + \frac{1}{x^{a_n}} \right)$$

trong đó x là số thực dương, $x \neq 1$; m, n là các số tự nhiên, n chẵn và $a_1, a_2, \dots, a_n$ thuộc đoạn $[m, m+1]$.

TRINH XUÂN TÌNH
(GV THPT Phú Xuyên B, Hà Tây)

Bài T10/316. Xét phương trình $x^2 - 2x + \cos \alpha = 0$ với tham số α thuộc $(0; \pi/2)$.

1) Chứng minh rằng phương trình trên luôn có 2 nghiệm thực dương x_1, x_2 .

2) Gọi $f(x)$ là tam thức bậc hai với hệ số bậc cao nhất là 1, nhận hai số $t_1 = x_1^{x_1} + x_2^{x_1}$ và $t_2 = x_1^{x_2} + x_2^{x_2}$ làm nghiệm. Tìm tất cả các giá trị c sao cho $f(c) < 0$ với mọi α thuộc $(0; \pi/2)$.

NGUYỄN SONG MINH
(GV THPT DL Yên Hưng,
Quảng Yên, Quảng Ninh)

Bài T11/316. Cho tam giác ABC có $BC = a, CA = b, AB = c$. Gọi O và R lần lượt là tâm và

bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$. Gọi I_a, I_b, I_c lần lượt là tâm đường tròn bàng tiếp ứng với các góc đỉnh A, B, C . Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{2R} \leq \frac{OI_a}{(a+b)(a+c)} + \frac{OI_b}{(b+c)(b+a)} + \frac{OI_c}{(c+a)(c+b)} \leq \frac{1}{4r}.$$

NGUYỄN THANH GIANG
(GV THPT NK Hưng Yên)

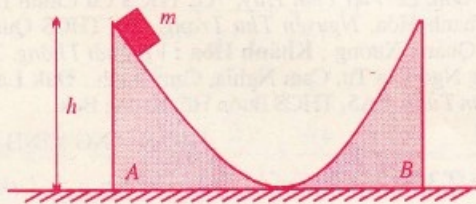
Bài T12/316. Xét các tứ diện $ABCD$ có các cặp cạnh đối bằng nhau và số đo các góc nhị diện cạnh BC, CA, AB tương ứng là α, β, γ đều nhọn. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$T = \sqrt{\cos^2 \alpha + \frac{1}{\cos^2 \alpha}} + \sqrt{\cos^2 \beta + \frac{1}{\cos^2 \beta}} + \sqrt{\cos^2 \gamma + \frac{1}{\cos^2 \gamma}}$$

TRẦN TRƯỜNG SINH
(GV THPT Phan Đình Giót,
Điện Biên, Lai Châu).

CÁC ĐỀ VẬT LÝ

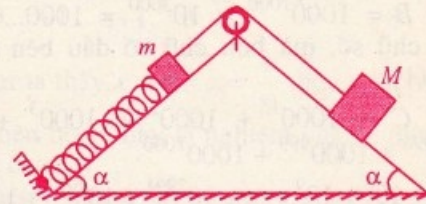
Bài L1/316. Hai nêm A, B có cùng khối lượng M đứng sát nhau như hình vẽ nhưng đều có thể di chuyển trên mặt ngang. Một vật có khối



lượng m ở con nêm A bên trái trượt từ độ cao h xuống. Hỏi vật m có thể lên đến độ cao nào ở nêm B bên phải. Bỏ qua mọi ma sát.

NGUYỄN CHÍ TRUNG
(GV THPT Hoàng Quốc Việt, Bắc Ninh)

Bài L2/316. Một lò xo có độ cứng $k = 75(\text{N/m})$ độ dài tự nhiên $l_0 = 20(\text{cm})$, một đầu cố định, đầu kia mắc vào một vật khối lượng $m = 300(\text{g})$ và vật m được nối với vật $M = 450(\text{g})$ bằng một sợi dây không dẫn qua một ròng rọc. Hai vật nằm trên hai mặt phẳng nghiêng đều có góc nghiêng $\alpha = 53,13^\circ$ (xem hình). Lò xo, sợi dây và ròng rọc đều có khối lượng không đáng kể. Giữ vật M sao cho lò xo có độ dài $l_1 = 21(\text{cm})$ rồi thả nhẹ nhàng.



1. Chứng minh rằng hệ dao động điều hòa. Viết phương trình dao động của vật M . (Chọn trục tọa độ có phương trùng với phương dao động của vật. Chiều dương hướng xuống dưới. Lấy gốc thời gian tại thời điểm vật bắt đầu chuyển động).

2. Giả sử hệ đang dao động như ở câu trên, khi độ dài lò xo là 21cm và vật M đang đi xuống thì dây nối hai vật bị đứt. Chứng minh vật m tiếp tục dao động điều hòa. Tìm biên độ dao động của vật m (lấy $g = 10(\text{m/s}^2)$ và $\pi^2 = 10$).

CHU VĂN BIÊN
(GV ĐH Hồng Đức, Thanh Hóa)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/316. (for 6th grade). Consider all 7-digit numbers, each of which is formed by seven distinct digits belonging to $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

1) Are there three numbers a, b, c among them such that $a+b=c$?

2) Are there two distinct numbers a, b among them so that a is divisible by b ?

T2/316. (for 7th grade) Let ABC be a triangle with $\widehat{ABC} = 30^\circ$, $\widehat{BAC} = 130^\circ$ and let Ax be the opposite ray of the ray AB . The angled-bisector of $\widehat{ABC}$ cuts the angled-bisector of $\widehat{CAx}$ at D . The

line BA cuts the line CD at E . Compare the measures of AC and CE .

T3/316. Find all pairs of prime numbers p, q so that $p^3 - q^5 = (p+q)^2$.

T4/316. Solve the system of equations :

$$\begin{cases} 20 \cdot \frac{y}{x^2} + 11y = 2003 \\ 20 \cdot \frac{y^2}{z^2} + 11z = 2003 \\ 20 \cdot \frac{x}{z^2} + 11x = 2003 \end{cases}$$

(Xem tiếp bìa 3)



Bài T1/312. (Lớp 6). Viết số $1^1 + 2^2 + 3^3 + \dots + 999^{999} + 1000^{1000}$ trong hệ thập phân. Tìm ba chữ số đầu tiên bên trái của số đó.

Lời giải.

Đặt $A = 1^1 + 2^2 + 3^3 + \dots + 998^{998} + 999^{999} + 1000^{1000}$

Đặt $B = 1000^{1000} = 10^{3000} = 1000\dots 0$ gồm 3001 chữ số, mà bốn chữ số đầu bên trái là 1000 (1).

Đặt $C = 1000^1 + 1000^2 + 1000^3 + \dots + 1000^{998} + 1000^{999} + 1000^{1000}$
 $= 10^3 + 10^6 + 10^9 + \dots + 10^{2994} + 10^{2997} + 10^{3000}$
 $= 100100100\dots 1000$ gồm 3001 chữ số mà bốn chữ số đầu bên trái là 1001 (2).

Vì $B < A < C$ mà B, C đều có 3001 chữ số nên từ (1) và (2) suy ra A có 3001 chữ số và ba chữ số đầu bên trái của A là 100.

Nhận xét. Các bạn sau có lời giải đúng:

Phú Thọ : Nguyễn Ngọc Linh, 6A3, THCS Lâm Thao;
Hải Dương : Lê Thế Nhân, 6/1, THCS Lê Quý Đôn, Tp. Hải Dương ; **Hải Phòng :** Lê Công Sơn, Phạm Anh Tú, 6A7, THCS Ngũ Lão, Thủy Nguyên ; **Nghệ An :** Đinh Bá Duyệt, 6A, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu ;
Khánh Hòa : Phạm Đăng Lộc, 6/14, THCS Thái Nguyên, Nha Trang ; **Đắk Lắk :** Võ Văn Tuấn, 6A5, THCS Buôn Hồ, Krông Buk.

VÂN KHANH

Bài T2/312. (Lớp 7). Chứng minh rằng nếu các số a, b, c, x, y, z thỏa mãn điều kiện

$$\frac{bz+cy}{x(-ax+by+cz)} = \frac{cx+az}{y(ax-by+cz)} = \frac{ay+bx}{z(ax+by-cz)} \quad (1)$$

$$\text{thì } \frac{x}{a(b^2+c^2-a^2)} = \frac{y}{b(a^2+c^2-b^2)} = \frac{z}{c(a^2+b^2-c^2)}$$

Lời giải. (theo bạn Bùi Thị Thanh Thúy, 7B, THCS Nam Trạch, Bố Trạch, Quảng Bình)

Nhân mỗi tỉ số ở giả thiết (1) với xyz đồng thời áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau thì được :

$$\frac{c(x^2+y^2)+z(ax+by)}{c} = \frac{a(y^2+z^2)+x(by+cz)}{a}$$

$$= \frac{b(z^2+x^2)+y(cz+zx)}{b}$$

Trừ ở mỗi tỉ số trên đi một lượng là $(x^2+y^2+z^2)$ sẽ có :

$$\frac{z(ax+by-cz)}{c} = \frac{x(by+cz-ax)}{a} = \frac{y(cz+ax-by)}{b}$$

Nhân các đẳng thức trên với các đẳng thức của (1) tương ứng được kết quả :

$$\frac{ay+bx}{c} = \frac{bz+cy}{a} = \frac{cx+az}{b} = \frac{1}{M}$$

Suy ra :

$$\begin{cases} c^2 = (ay+bx).c.M \\ b^2 = (cx+az).b.M \\ a^2 = (bz+cy).a.M \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b^2+c^2-a^2 = 2bc.x.M \\ c^2+a^2-b^2 = 2ca.y.M \\ a^2+b^2-c^2 = 2ab.z.M \end{cases}$$

Vậy ta có :

$$\frac{x}{a(b^2+c^2-a^2)} = \frac{y}{b(a^2+c^2-b^2)} = \frac{z}{c(a^2+b^2-c^2)} = \frac{1}{2abc.M} \quad (\text{dpcm})$$

Nhận xét. Ngoài bạn Bùi Thị Thanh Thúy, các bạn sau cũng có lời giải tốt :

Thanh Hóa : Lê Văn Nguyên, 7D, THCS Nguyễn Chí Chích, Nguyễn Thị Phương A, 7A, THCS Đông Tân, Đông Sơn, Lê Việt Thái Huy, 7G, THCS Cù Chính Lan, Tp. Thanh Hóa, Nguyễn Thu Trang, 7E, THCS Quảng Tâm, Quảng Xương ; **Khánh Hòa :** Võ Thái Thông, 7/4, trường Ngô Gia Tự, Cam Nghĩa, Cam Ranh ; **Đắk Lắk :** Võ Văn Tuấn, 6A5, THCS Buôn Hồ, Krông Buk.

HỒ QUANG VINH

Bài T3/312. Cho số nguyên dương $n > 1$ thỏa mãn $3^n - 1$ chia hết cho n , chứng minh rằng n là số chẵn.

Lời giải. Gọi p là ước số nguyên tố bé nhất của n . Vì $3^n - 1$ chia hết cho n nên cũng chia hết cho p , suy ra $3^n \equiv 1 \pmod{p}$ và $p \neq 3$ (1). Gọi d là số nguyên dương bé nhất sao cho $3^d \equiv 1 \pmod{p}$. Giả sử $n = kd + r$ với $0 \leq r \leq d - 1$ thì $3^n = 3^{kd} \cdot 3^r \equiv 3^r \pmod{p}$. Từ đó và (1) có $3^r \equiv 1 \pmod{p}$. Theo cách chọn d thì $r = 0$ nên $n : d$ (2). Theo định lí nhỏ Fermat thì $3^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. Lập luận như trên suy ra $(p-1) : d$ (3). Nếu $d > 1$ thì d có ước số nguyên tố q mà q là ước của n theo (2), đồng thời q nhỏ hơn p theo (3), trái với cách chọn p . Vậy $d = 1$ tức là

$3 \equiv 1 \pmod{p} \Rightarrow 2 \equiv 0 \pmod{p} \Rightarrow p = 2$ là ước của n . Vậy n là số chẵn.

Nhận xét. 1) Hầu hết các bạn giải theo cách trên. Theo cách giải này có thể thay số 3 bằng số nguyên tố lẻ a .

2) Các bạn sau có lời giải tốt :

Phú Thọ : Nguyễn Trung Kiên A, 9A, Ngô Vinh Thái, 9A1, THCS Giấy Phong Châu, Phù Ninh, Nguyễn Quang Huy, 9G, THCS Văn Lang, Việt Trì ; **Vĩnh Phúc :** Vũ Văn Quang, 9C, THCS Vĩnh Tường, Trần Tấn Phong, 8A, THCS Lập Thạch ; **Hà Tây :** Trần Thị Thùy Trang, 7B, THCS Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hòa ; **Hà Nội :** Nguyễn Trọng Nhật Quang, Trần Nam Sơn, 9A, THPT Hà Nội - Amsterdam, Đỗ Xuân Huy, 9H, THCS Lê Quý Đôn, Q. Cầu Giấy ; **Thái Bình :** Nguyễn Huy Thông, 9B, THCS Tân Thuật, Kiến Xương ; **Hải Dương :** Nguyễn Anh Tuấn, 9/3, THCS Lê Quý Đôn, Tp. Hải Dương ; **Thanh Hóa :** Lê Mạnh Thành, 9A, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoàng Hóa, Lưu Xuân Thế, Nguyễn Khánh Trinh, 9A, THCS Lê Hữu Lập, Hậu Lộc ; **Nghe An :** Trịnh Văn Nam, 9C, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu, Phạm Quang Khang, 9E, THCS Đặng Thai Mai, Vinh ; **Hà Tĩnh :** Hoàng Minh Đức, 9A, THCS Nguyễn Huy Tự, Can Lộc, Lê Minh Ngọc, 9H, THCS Kỳ Anh ; **Quảng Trị :** Dương Bảo Nhân, 9, THCS Đại Hòa ; **Thừa Thiên - Huế :** Lê Viết Ân, 9/4, THCS Phú Thuận, Phú Vang ; **Khánh Hòa :** Nguyễn Thị Hoàng Oanh, 8/1, THCS Đinh Tiên Hoàng, Ninh Hòa.

VIỆT HẢI

Bài T4/312. Tìm các nghiệm số dương của hệ phương trình :

$$\begin{cases} \frac{3x}{x+1} + \frac{4y}{y+1} + \frac{2z}{z+1} = 1 & (1) \\ 8^9 \cdot x^3 \cdot y^4 \cdot z^2 = 1 & (2) \end{cases}$$

Lời giải. Từ (1) có $\frac{2x}{x+1} + \frac{4y}{y+1} + \frac{2z}{z+1} = \frac{1}{x+1}$.

Sử dụng BĐT Cô-si cho 9 số được :

$$\frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1} + \frac{x}{x+1} + \frac{y}{y+1} + \frac{y}{y+1} + \frac{y}{y+1} + \frac{y}{y+1} + \frac{z}{z+1} + \frac{z}{z+1} \geq$$

$$\geq 8 \sqrt[8]{\frac{x^2 y^4 z^2}{(x+1)^2 (y+1)^4 (z+1)^2}}$$

$$\text{Tương tự } \frac{1}{1+y} \geq 8 \sqrt[8]{\frac{y^3 x^3 z^2}{(y+1)^3 (x+1)^3 (z+1)^2}}$$

$$\frac{1}{1+z} \geq 8 \sqrt[8]{\frac{x^3 y^4 z}{(x+1)^3 (y+1)^4 (z+1)}}$$

Từ ba BDT trên có :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{1+x}\right)^3 \left(\frac{1}{y+1}\right)^4 \left(\frac{1}{1+z}\right)^2 \geq \\ & \geq 8^9 \sqrt[8]{\frac{x^{24} y^{32} z^{16}}{(x+1)^{24} (y+1)^{32} (z+1)^{16}}} \\ & = 8^9 \frac{x^3 y^4 z^2}{(x+1)^3 (y+1)^4 (z+1)^2} \end{aligned}$$

$$\text{suy ra } x^3 y^4 z^2 \leq \frac{1}{8^9} \quad (3)$$

Do (2) thì ở (3) phải xảy ra đẳng thức. Đẳng thức (3) xảy ra khi

$$\frac{x}{x+1} = \frac{y}{y+1} = \frac{z}{z+1} = \frac{1}{9} \Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{8} \quad (4)$$

Thử lại ta thấy $x = y = z = \frac{1}{8}$ thỏa mãn hệ PT

(1) (2) nên bộ số này là nghiệm của hệ phương trình đã cho.

Nhận xét. 1) Một số bạn chỉ nhận xét thấy nghiệm mà chưa chứng minh được đó là nghiệm duy nhất. Đa số các bạn không thử lại nghiệm. Một số bạn sử dụng BDT Cô-si cho $n = 64$ số mà với n quá lớn thì điều đó vượt ra ngoài chương trình toán THCS.

2) Các bạn sau có lời giải đúng, phù hợp với chương trình :

Phú Thọ : Lê Bá Long, 9A1, THCS Giấy Phong Châu, Phù Ninh ; **Lê Quang Nghĩa,** 8E, THCS Văn Lang, Việt Trì ; **Vĩnh Phúc :** Trần Tấn Phong, 8A, THCS Lập Thạch, Lê Trường Sơn, 9C, THCS Vĩnh Tường ; **Bắc Giang :** Thân Ngọc Thúc, 9A, THCS Nguyễn Hồng, Tân Yên ; **Hải Dương :** Đỗ Thị Hải, 9A, THCS Phương Hưng, Gia Lộc, Lại Nguyễn Thanh, 9/3, THCS Lê Quý Đôn ; **Thanh Hóa :** Nguyễn Khánh Trinh, 9A, THCS Lê Hữu Lập, Hậu Lộc ; **Nghe An :** Phạm Quang Khang, 9E, THCS Đặng Thai Mai, Vinh ; **Thừa Thiên - Huế :** Lê Hữu Diễn Khuê, 9/1, THCS Nguyễn Tri Phương, Huế.

VŨ ĐÌNH HÒA

Bài T5/312. Chứng minh rằng

$$\begin{aligned} (a^3 + b^3 + c^3) \left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} \right) & \geq \\ & \geq \frac{3}{2} \left(\frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c} \right) \end{aligned}$$

trong đó a, b, c là các số thực dương

Lời giải. Vì $a, b, c > 0$ nên ta có

$$(a+b)(a-b)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a+b)(a^2 - ab + b^2) - (a+b)ab \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a^3 + b^3 \geq ab(a+b)$$

Tương tự, ta cũng có

$$b^3 + c^3 \geq bc(b+c)$$

$$c^3 + a^3 \geq ca(c + a)$$

Vậy nên

$$2(a^3 + b^3 + c^3) \geq ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) \quad (1)$$

Mặt khác, áp dụng bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân cho ba số

$$\frac{1}{a^3}, \frac{1}{b^3}, \frac{1}{c^3} \text{ dương, ta thu được}$$

$$\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} \geq \frac{3}{abc} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$(a^3 + b^3 + c^3) \left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} \right) \geq \frac{3}{2} \left(\frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c} \right) \quad (\text{dpcm})$$

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.

Nhận xét. Những bạn có tên sau đây có lời giải tốt:

Ngệ An: Nguyễn Hải Hoàng, 9E, THCS Trường Thi, Tp. Vinh; Thái Duy Dương, 8A, THCS Bạch Liêu, Yên Thành; Nguyễn Tư Diễm, 8B, Lê Ngọc Thạch, 9A, THCS Lý Nhật Quang, huyện Đô Lương; Đinh Quỳnh Nga, 9A, THCS Quán Hành, Nghi Lộc; **Hà Tây:** Nguyễn Ngọc Anh, 9A2, THCS Trần Phú, Phú Xuyên, Trần Nho Ngọc Toàn, 9A, THCS Hát Môn, Phúc Thọ, Lê Ngọc Thuận, 9B, THCS Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hòa; **Hà Tĩnh:** Trương Thế Dương, THCS thị trấn Cẩm Xuyên, Nguyễn Ngọc Anh, 9A, THCS bán công Hương Khê; **Hải Dương:** Đỗ Thị Hải, 9A, THCS Phương Hưng, Gia Lộc; Phạm Thị Thủy, 8A1, THCS Chu Văn An, Thanh Hà, Vũ Hữu Quý, 9B, Đinh Quang Phong, 9C, Nguyễn Thị Hồng, 8A, THCS Nguyễn Trãi, Nam Sách, Hải Dương; **Hải Phòng:** Vũ Văn Nhất, 9A1, THCS Kiến Thiết, Tiên Lãng, Lương Phú Khánh, 9A, THCS Trần Phú, Tp. Hải Phòng; **Thanh Hóa:** Lê Việt Hưng, 7A4, THCS Quang Trung, Bùi Tiến Quân, 9B, THCS Lê Đình Kiên, Yên Định, Lê Xuân Quý, THCS Vạn Hà, Triệu Hòa, Nguyễn Thành Phúc, 9A, THCS Tây Đô, Vinh Lộc, Lưu Xuân Thế, 9A, THCS Lê Hữu Lập, Hậu Lộc; **Nam Định:** Nguyễn Thị Huệ, 8A, THCS Trục Phú, Trục Ninh, Ngô Quang Đạt, 9A, THCS Nghĩa Hưng, Nguyễn Quang Tuyên, Vũ Đức Khánh, 8C, THCS Đào Sư Tích, Cổ Lễ, Trục Ninh; **Bắc Ninh:** Lê Quốc Khánh, 9C, THCS Yên Phong; **Vĩnh Phúc:** Đỗ Mạnh Cường, 8D, Nguyễn Tuấn Anh, 9C, THCS Vĩnh Tường, Nguyễn Thị Thanh Hiền, 9A1, Phạm Thu Hương, 8A1, THCS Hai Bà Trưng, Phúc Yên, Mê Linh; **Đống Tháp:** Duy Khiêm, 9A1, Huỳnh Võ Trung Dũng, 9A2, Võ Tấn Đạt, 9A10, THPT Tx. Cao Lãnh; **Phú Thọ:** Nguyễn Quang Huy, 9G, THCS Văn Lang, Việt Trì, Nguyễn Thị Thanh Thảo, 9A, THCS Giầy, Phong Châu, Phù Ninh; **Hà Nội:** Trương Đức Long, 9B, THCS Ngũ Hiệp; **Tp. Hồ Chí Minh:** Nguyễn Anh Cường, 9¹, THCS Lê Quý Đôn, Q.3, Tp. HCM.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T6/312. Chứng minh rằng

$$(a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) + \frac{3(a-b)(b-c)(c-a)}{abc} \geq 9$$

trong đó a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Lời giải. BĐT cần chứng minh tương đương với

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2 \right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b} - 2 \right) + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c} - 2 \right) + \frac{3(a-b)(b-c)(c-a)}{abc} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a-b)^2}{ab} + \frac{(b-c)^2}{bc} + \frac{(c-a)^2}{ca} + \frac{3(a-b)(b-c)(c-a)}{abc} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow c(a-b)^2 + a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + 3(a-b)(b-c)(c-a) \geq 0 \quad (*)$$

Từ hằng đẳng thức

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz =$$

$$= (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - xz)$$

suy ra: Nếu $x + y + z = 0$ thì $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$, từ đó

$$(a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3 = 3(a-b)(b-c)(c-a).$$

Từ đó:

$$(*) \Leftrightarrow c(a-b)^2 + a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + (a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2(c+a-b) + (b-c)^2(a+b-c) + (c-a)^2(b+c-a) \geq 0$$

BĐT cuối đúng vì a, b, c là ba cạnh của một tam giác. Vậy BĐT ban đầu đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Nhận xét. Nhiều bạn mắc sai lầm khi kết luận rằng $(a-b)(b-c)(c-a) \geq 0$, vì trong biểu thức ở vế trái, vai trò của a, b, c không như nhau.

Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Phú Thọ: Nguyễn Quang Huy, 9G, THCS Văn Lang, Việt Trì; **Hải Dương:** Nguyễn Anh Tuấn, 9/3, THCS Lê Quý Đôn, Tp. Hải Dương; **Hà Nam:** Nhữ Anh Tuấn, 8B, THCS Trần Phú, Tx. Phù Lý; **Nam Định:** Trần Ngọc Tân, 8A6, THCS Trần Đăng Ninh; **Hưng Yên:** Đỗ Việt Phương, 9A2, THCS Chu Mạnh Trinh, Văn Giang; **Thanh Hóa:** Nguyễn Tuấn Dương, Trịnh Thành Kiên, 9A1, THCS Trần Mai Ninh; **Ngệ An:** Nguyễn Thị Huyền, 9C, THCS thị trấn Quỳnh Hợp, Đậu Thế Linh, 9A, THCS Cao Xuân Huy, Diên Châu; **Hà Tĩnh:** Lê Minh Ngọc, 9H, THCS thị trấn Kỳ Anh; **Thừa Thiên - Huế:** Lê Viết Ân, 9A4, THCS Phú Thuận, Phú Vang; **Bình Định:** Huỳnh Tấn Sang, 9A4, THCS Đống Đa, Quy Nhơn.

NGUYỄN XUÂN BÌNH

Bài T7/312. Đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB tương ứng tại D, E, F . Gọi H là hình chiếu của D trên EF . Chứng minh rằng $\widehat{BHD} = \widehat{CHD}$.

Lời giải. Hạ $BI \perp EF, CK \perp EF$ ta có $BI \parallel HD \parallel CK$. Theo định lý Talét $\frac{BD}{DC} = \frac{IH}{HK}$

Theo tính chất tiếp tuyến :

$$BD = BF,$$

$$CD = CE.$$

Nên

$$\frac{BF}{CE} = \frac{IH}{HK}$$

(1). Mặt khác

$$\widehat{BFI} = \widehat{AFE} = \widehat{AEF} = \widehat{CEK}. \text{ Suy ra } \triangle BFI \sim \triangle CKE. \text{ Từ đó } \frac{BI}{CK} = \frac{IF}{KE} = \frac{BF}{CE} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2): } \frac{BF}{CE} = \frac{IH}{HK} = \frac{IF}{EK} = \frac{BI}{CK}. \text{ Cùng}$$

với $\widehat{BIH} = \widehat{CKH} = 90^\circ$ suy ra $\triangle BIH \sim \triangle CKH$.

$$\text{Ta có } \widehat{BHI} = \widehat{CHK}. \text{ Mà } \widehat{DHI} = \widehat{DHK} = 90^\circ.$$

$$\text{Vậy } \widehat{BHD} = \widehat{CHD}.$$

Nhận xét. 1. Chứng minh trên không phụ thuộc vào hình vẽ. Một số bạn chia trường hợp xét khi $AB < AC, AB > AC$ là không cần thiết.

2. Các bạn giải tốt bài này :

Phú Thọ : Nguyễn Quang Huy, 9G, THCS Văn Lang, Việt Trì; Nguyễn Trung Kiên A, 9A, THCS giấy Phong Châu; **Vĩnh Phúc :** Đỗ Tiến Đăng, 9B, THCS Lập Thạch, Lê Trường Sơn, 9C, THCS Vĩnh Tường; **Bắc Ninh :** Lê Quốc Khánh, 9A, THCS Yên Phong; **Hải Dương :** Đỗ Thị Hải, 9A, THCS Phương Hưng, Gia Lộc; **Hải Phòng :** Lương Phú Khánh, 9A, THPT NK Trần Phú; **Hà Nội :** Vũ Nhật Minh, Vũ Minh Long, 9H, THCS Lê Quý Đôn, Q. Cầu Giấy; **Hưng Yên :** Doãn Thị Kim Huế, 9C, THCS Phạm Huy Thông, Ân Thi; **Hà Nam :** Nguyễn Mạnh An, 8B, THCS Trần Phú, Phù Lý; **Nam Định :** Trần Ngọc Tân, 8A6, THCS Trần Đăng Ninh, Vũ Đức Khánh, 8C, THCS Đào Sư Tích, Cổ Lễ, Trực Ninh, Nguyễn Quang Huy, 9A2, THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên; **Thanh Hóa :** Bùi Tiến Quân, 9B, THCS Lê Đình Kiên, Yên Định; **Nguyễn Tiến Thanh**, 9A, THCS Lê Quý Đôn, Bim Sơn, Trịnh Thành Kiên, THCS Trần Mai Ninh; **Nghệ An :** Nguyễn Lê Phước, 9C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Hà Tĩnh :** Nguyễn Xuân Thúc, 9E, THCS Hoa Liên, Nghi Xuân; **Quảng Ngãi :** Đỗ Tiến Vũ, 8/1, THCS thị trấn Châu Ổ, Bình Sơn; **Tp. HCM :** Lê Đức Lợi, 7¹, THCS Hồng Bàng, Q. 5.

VŨ KIM THỦY

Bài T8/312. Cho $p_1, p_2, \dots, p_n$ và $q_1, q_2, \dots, q_m$ là $m+n$ số nguyên tố đôi một khác nhau với $p_i \geq n+1$ ($i = 1, 2, \dots, n$), $q_j \geq m+1$ ($j = 1, 2, \dots, m$). Đặt $P = p_1 p_2 \dots p_n, Q = q_1 q_2 \dots q_m$. Chứng minh rằng phương trình $P^s x + Q^t y = 1$ với các số nguyên dương s, t có vô số nghiệm nguyên (x_0, y_0) thỏa mãn $(P, x_0) = 1$ và $(Q, y_0) = 1$.

Lời giải. (của bạn Đỗ Quốc Khánh, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Đà Nẵng)

Ta có một kết quả quen thuộc là : Nếu $(a, b) = 1$ thì phương trình $ax + by = c$ có vô số nghiệm nguyên (xem Bài giảng số học, NXBGD của các tác giả Đặng Hùng Thắng, Vũ Kim Thủy, Nguyễn Văn Ngọc).

Do $(P, Q) = 1$ nên phương trình $P^{s+1} x + Q^{t+1} y = 1 - P^s - Q^t$ có vô số nghiệm nguyên. Với mỗi nghiệm (x_1, y_1) , đặt $x_0 = Px_1 + 1, y_0 = Qy_1 + 1$. Ta có $(P, x_0) = 1, (Q, y_0) = 1$ và $P^s x_0 + Q^t y_0 = P^{s+1} x_1 + P^s + Q^{t+1} y_1 + Q^t = 1$. Do có vô số cặp số nguyên (x_1, y_1) nên cũng có vô số cặp số nguyên (x_0, y_0) mà $(P, x_0) = (Q, y_0) = 1$ thỏa mãn phương trình $P^s x + Q^t y = 1$.

Nhận xét. Nhiều bạn nhận xét rằng điều kiện $p_i \geq n+1$ ($i = 1, 2, \dots, n$) và $q_s \geq m+1$ ($s = 1, 2, \dots, m$) là không cần thiết.

Bạn Phạm Văn Hoàng, 11A, THPT chuyên Vĩnh Phúc và Nguyễn Đức Minh, 10A1, THPT Phan Bội Châu, Vĩnh, Nghệ An đề xuất và giải đúng bài toán tổng quát sau đây : Cho a, b là hai số nguyên dương nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng phương trình $ax + by = 1$ có vô số nghiệm nguyên (x_0, y_0) thỏa mãn $(a, x_0) = (b, y_0) = 1$.

Đặc biệt lời giải của bạn Hoàng rất ngắn gọn. Các bạn sau đây có lời giải tốt : Đỗ Hoàng Khiêm, 10A2, PTCT, ĐHSP Hà Nội, Vũ Quang Thanh, 11ACT, ĐHKHTN Hà Nội, Nguyễn Lâm Hưng và Hồ Sỹ Tùng Lâm, PTNK ĐHQG Tp. Hồ Chí Minh, Nguyễn Phúc Thọ, 10T, THPT Lê Quý Đôn, Bình Định, Lê Bá Khiết, 11T, THPT chuyên Lương Thế Vinh, Đồng Nai.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T9/312. Giải phương trình

$$(16\cos^4 x + 3)^4 = 2048\cos x - 768 \quad (1)$$

Lời giải. Cách 1. (của bạn Nguyễn Việt Anh, 10A1 Toán, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội)

Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có :

$$(16\cos^4 x + 3)^4 + 768 = (16\cos^4 x + 1 + 1 + 1)^4 + 768 \geq \left(4\sqrt[4]{16\cos^4 x}\right)^4 + 768$$

$$= 4096\cos^4 x + 256 + 256 + 256$$

$$\geq 4\sqrt[4]{4096\cos^4 x \cdot 256 \cdot 256 \cdot 256} = 2048|\cos x|$$

$$\geq 2048\cos x$$

Dấu đẳng thức xảy ra:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 16\cos^4 x = 1 \\ 4096\cos^4 x = 256 \\ \cos x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Cách 2. Đặt $u = 2\cos x$, $|u| \leq 2$. Khi đó:

$$(1) \Leftrightarrow (u^4 + 3)^4 = 4^4(4u - 3) \Leftrightarrow u^4 + 3 = 4\sqrt[4]{4u - 3},$$

với $u \geq \frac{3}{4}$. Đặt $v = \sqrt[4]{4u - 3}$, $v \geq 0$, ta có hệ

$$\begin{cases} u^4 + 3 = 4v & (2) \\ v^4 + 3 = 4u & (3) \end{cases}$$

Trừ từng vế (2) và (3), ta được: $u^4 - v^4 = 4(v - u)$ hay $(u - v)[(u + v)(u^2 + v^2) + 4] = 0$. Suy ra $u = v$. Thay $v = u$ vào (2), ta có: $u^4 + 3 = 4u$
 $\Leftrightarrow (u - 1)^2(u^2 + 2u + 3) = 0 \Leftrightarrow u = 1$. Ta thấy $u = 1$ thỏa mãn các điều kiện ở trên. Do đó

$$\cos x = \frac{1}{2} \text{ hay } x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Nhận xét. 1) Hầu hết các bạn đã giải đúng bài này và giải theo hai cách trên (cách 1 dùng bất đẳng thức Cô-si và cách 2 chuyển về hệ đối xứng). Một số bạn dùng đạo hàm để giải cũng có kết quả đúng. Dùng bất đẳng thức Cô-si, bạn **Bùi Văn Chiến**, trường THPT chuyên Hoàng Văn Thụ, **Hòa Bình** đã giải bài toán tổng quát hơn:

Giải PT:

$$(2^n \cos^n x + n - 1)^n = n^2 \cdot 2^{2n-1} \cos x - 2^{2n}(n - 1), \text{ trong đó } n \geq 2, n \in \mathbb{N}.$$

2) Các bạn có lời giải tốt là: **Hà Nội**: Nguyễn Phú Cường, 11A2, PTCTT, ĐHSP Hà Nội; **Hải Phòng**: Bùi Ngọc Khôi, 10, THPT NK Trần Phú; **Phú Thọ**: Hoàng Ngọc Minh, 12A1, THPT chuyên Hùng Vương; **Cần Thơ**: Mạch Nguyệt Minh, 12A1, THPT Lý Tự Trọng, Tp. Cần Thơ; **Đồng Nai**: Phạm Xuân Khang, 10A4, THPT Ngô Quyền, Tp. Biên Hòa; **Bắc Giang**: Lê Văn Thịnh, 11A1, THPT số 2, Hiệp Hòa; **Thanh Hóa**: Nguyễn Quốc Hưng, 11A4, THPT Lương Đắc Bằng, TT. Bút Sơn, Nguyễn Tuấn Dương, 9A1, THCS Trần Mai Ninh, Tp. Thanh Hóa; **Nghe An**: Trần Hoàng Đức, 10A1, THPT Phan Bội Châu, Vinh; **Vĩnh Phúc**: Nguyễn Quang Huy, 12A1, THPT Ngô Gia Tự, Lập Thạch.

TRẦN HỮU NAM

Bài T10/312. Chứng minh rằng:

$$\frac{x_1^m}{x_2^n + x_3^n + \dots + x_n^n} + \frac{x_2^m}{x_1^n + x_3^n + \dots + x_n^n} + \dots + \frac{x_n^m}{x_1^n + x_2^n + \dots + x_{n-1}^n} \geq \frac{n}{n-1} \sqrt[n]{\left(\frac{2003}{n}\right)^{m-n}}$$

trong đó các số m, n nguyên, x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) dương thỏa mãn điều kiện: $m \geq n > 1$ và $x_1^n + x_2^n + \dots + x_n^n \geq 2003$.

Lời giải. Do vai trò đối xứng của $x_1, x_2, \dots, x_n$ trong bất đẳng thức (BĐT) trên, không mất tính tổng quát ta giả thiết $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$.

Đặt $S = x_1^n + x_2^n + \dots + x_n^n$. Ta có

$$\frac{x_1^m}{S - x_1^n} \leq \frac{x_2^m}{S - x_2^n} \leq \dots \leq \frac{x_n^m}{S - x_n^n} \text{ và}$$

$S - x_1^n \geq S - x_2^n \geq \dots \geq S - x_n^n$, do đó theo BĐT Trê-bư-sep cho hai dãy đơn điệu ngược chiều:

$$\left(\frac{x_1^m}{S - x_1^n} + \frac{x_2^m}{S - x_2^n} + \dots + \frac{x_n^m}{S - x_n^n} \right) (S - x_1^n + S - x_2^n + \dots + S - x_n^n) \geq n(x_1^m + x_2^m + \dots + x_n^m)$$

Từ BĐT trên suy ra

$$\frac{x_1^m}{S - x_1^n} + \frac{x_2^m}{S - x_2^n} + \dots + \frac{x_n^m}{S - x_n^n} \geq \frac{n}{n-1} \cdot \frac{x_1^m + x_2^m + \dots + x_n^m}{x_1^n + x_2^n + \dots + x_n^n} \quad (1)$$

Với $x > 0$, áp dụng BĐT Cô-si ta có

$$n \cdot x^m + (m - n) \geq m \cdot x^n$$

Thay $x = x_i \sqrt[n]{\frac{n}{S}}$, $i = 1, 2, \dots, n$ và cộng từng vế:

$$n \left(\sqrt[n]{\frac{n}{S}} \right)^m (x_1^m + x_2^m + \dots + x_n^m) + n(m - n) \geq m \cdot n$$

$$\text{Do đó } x_1^m + x_2^m + \dots + x_n^m \geq n \left(\sqrt[n]{\frac{S}{n}} \right)^m.$$

Bởi vậy

$$\frac{x_1^m + x_2^m + \dots + x_n^m}{x_1^n + x_2^n + \dots + x_n^n} \geq \frac{n \left(\sqrt[n]{\frac{S}{n}} \right)^m}{S} = \left(\frac{S}{n} \right)^{\frac{m}{n} - 1}$$

$$= \sqrt[n]{\left(\frac{S}{n} \right)^{m-n}} \geq \sqrt[n]{\left(\frac{2003}{n} \right)^{m-n}} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta nhận được BĐT cần chứng minh.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và khi $x_1 = x_2 = \dots$

$$= x_n = \sqrt[n]{\frac{S}{n}} = \sqrt[n]{\frac{2003}{n}}$$

Nhận xét. Đây là bài toán BĐT cổ điển, hay, khá tinh tế. Tòa soạn nhận được lời giải của 94 bạn, hầu hết các bạn giải đúng. Một số bạn phải dùng BĐT hơi nặng nề như Bernoulli, Jensen của hàm lồi, ... Các bạn sau có lời giải tốt:

Hải Dương: Nguyễn Tiến Dũng, 9A1, THCS Chu Văn An; **Hà Nội:** Vũ Nhật Minh, 9H, THCS Lê Quý Đôn, Nguyễn Anh Tú, 10A1, THPT Việt Đức; **Đỗ Hoàng Khiêm,** Bùi Quốc Hùng, 10A1, PTCT-T, ĐHSP; **Thanh Hóa:** Lê Ngọc Tuấn, 8B, THCS Nhữ Bá Sĩ, Lê Thị Hà, 10A1, THPT Nông Cống I; **Thừa Thiên - Huế:** Lê Viết Ân, 9/4, THCS Phú Thuận; **Đồng Tháp:** Lữ Thiên Nhân, 9A1, THCS Thị xã Sa Đéc; **Đồng Nai:** Nguyễn Trung Thảo, 9/9, THCS Trần Hưng Đạo, ...

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T11/312. Chứng minh rằng trong tam giác ABC có ba góc nhọn luôn có

$$\frac{\cos A \cos B}{\sin 2C} + \frac{\cos B \cos C}{\sin 2A} + \frac{\cos C \cos A}{\sin 2B} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Lời giải. (của bạn Lê Văn Dung, 11A1, THPT chuyên Hùng Vương, **Phú Thọ**)

Ta có:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\cos A \cos B}{\sin 2C} + \frac{\cos B \cos C}{\sin 2A} + \frac{\cos C \cos A}{\sin 2B} \right)^2 \\ & \geq 3 \left(\frac{\cos A \cos^2 B \cos C}{\sin 2C \sin 2A} + \frac{\cos B \cos^2 C \cos A}{\sin 2A \sin 2B} + \frac{\cos C \cos^2 A \cos B}{\sin 2B \sin 2C} \right)^2 \\ & = \frac{3}{4} \left(\frac{\cos^2 B}{\sin C \sin A} + \frac{\cos^2 C}{\sin A \sin B} + \frac{\cos^2 A}{\sin B \sin C} \right)^2 \\ & = \frac{3}{4} \frac{(1 - \sin^2 B) \sin B + (1 - \sin^2 C) \sin C}{\sin A \sin B \sin C} + \\ & \quad + \frac{3}{4} \frac{(1 - \sin^2 A) \sin A}{\sin A \sin B \sin C} \\ & = \frac{3}{4} \frac{(\sin A + \sin B + \sin C) - (\sin^3 A + \sin^3 B + \sin^3 C)}{\sin A \sin B \sin C} \quad (1) \end{aligned}$$

Theo bài T9/299 – THPT5/2002, thì:

$$\sin A + \sin B + \sin C \geq \sin^3 A + \sin^3 B + \sin^3 C + \sin A \sin B \sin C \quad (2)$$

Từ (1), (2) với chú ý rằng ΔABC nhọn, ta có:

$$\frac{\cos A \cos B}{\sin 2C} + \frac{\cos B \cos C}{\sin 2A} + \frac{\cos C \cos A}{\sin 2B} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

Nhận xét. 1) Bài toán này tương đối khó. Có bốn bạn giải sai.

2) Ngoài lời giải trên, một số bạn chứng minh bỏ đề:

$$\Delta ABC, \forall M \text{ ta có: } \frac{MA}{a} + \frac{MB}{b} + \frac{MC}{c} \geq \sqrt{3}$$

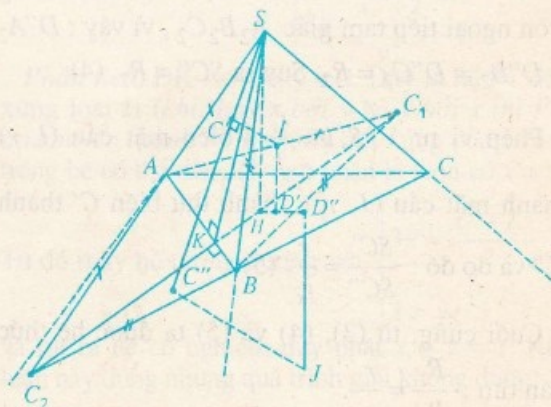
Sau đó, áp dụng bỏ đề trên cho $\Delta A'B'C'$ và điểm H , trong đó, A', B', C' là chân các đường cao hạ từ các đỉnh A, B, C của ΔABC và H là trực tâm của tam giác đó.

3) Các bạn sau đây có lời giải tốt: **Nghe An:** Nguyễn Trường Giang, 12A, THPT Hà Huy Tập, Vinh, Nguyễn Thành Hưng, 12A1, THPT Nguyễn Xuân Ôn, Diễn Châu; **Hải Dương:** Trần Quốc Hoàn, 10T, THPT Nguyễn Trãi; **Vĩnh Phúc:** Lê Hải Nam, 11A1, Hà Đình Hiệu, 10A1, THPT ch. Vĩnh Phú, Trần Tấn Phong, 8A, THCS Lập Thạch; **Đà Nẵng:** Dương Đạt Nguyễn, Đỗ Quốc Khánh, 10A1, THPT Lê Quý Đôn; **Nam Định:** Phạm Hưng Duy Phong, 11M, THPT Giao Thủy A; **Hà Nội:** Nguyễn Phú Cường, 11A2, Khối PTCT-T, ĐHSP Hà Nội; **Tp. HCM:** Nguyễn Lữ Khoa, 10T, ĐHKHTN – ĐHQG Tp. HCM; **Đồng Tháp:** Phan Phước Toàn, 11T, THPT Cao Lãnh.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài T12/312. Trong mặt phẳng đáy (ABC) của hình chóp SABC dựng các tam giác A_1BC , B_1CA , C_1AB cùng hướng với ΔABC và các tam giác A_2BC , B_2CA , C_2AB ngược hướng với ΔABC sao cho $\Delta A_1BC = \Delta A_2BC = \Delta SBC$, $\Delta B_1CA = \Delta B_2CA = \Delta SCA$, $\Delta C_1AB = \Delta C_2AB = \Delta SAB$. Chứng minh rằng: $\frac{R_1}{R_2} = \frac{r}{r_s}$ trong đó R_1 ,

R_2 lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp các tam giác $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, còn r và r_s lần lượt là bán kính mặt cầu nội tiếp và mặt cầu bàng tiếp đối diện đỉnh S của hình chóp SABC.



Lời giải. (theo bạn Hoàng Trọng Bắc, 11B1, THPT Lê Văn Hưu, Thiệu Hóa, Thanh Hóa và Phạm Thái Sơn, 12 Toán, THPT NK Hàn Thuyên, Bắc Ninh).

Gọi I và J lần lượt là tâm các mặt cầu nội tiếp và bàng tiếp góc tam diện đỉnh S của hình chóp $SABC$. Giả sử hai mặt cầu (I, r) và (J, r_s) lần lượt tiếp xúc với các mặt phẳng chứa các mặt SBC , SCA , SAB và ABC tương ứng ở các điểm $\{A', B', C', D'\}$ và $\{A'', B'', C'', D''\}$ (hình vẽ).

– Mặt phẳng (ABI) là mặt phân giác của nhị diện $\widehat{AB}(S, C)$ cạnh AB của hình chóp $SABC$, đồng thời cũng dễ thấy rằng (ABI) còn là mặt phẳng trung trực $\perp[SC_1]$ của đoạn thẳng $[SC_1]$. Phép đối xứng qua mp (ABI) biến các điểm A, B, S và C' theo thứ tự thành A, B, C_1 và D' ; do đó $SC' = C_1D'$. Chứng minh tương tự ta được: $SA' = D'A_1, SB' = D'B_1, SC' = D'C_1$ (1)

Mặt khác, theo tính chất tiếp tuyến từ S đến mặt cầu (I) ta có: $SA' = SB' = SC'$ (2)

Đối chiếu (1) và (2) ta được: $D'A_1 = D'B_1 = D'C_1$ và do đó, D' là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_1B_1C_1$. Vậy $D'A_1 = D'B_1 = D'C_1 = R_1$; suy ra $SC' = R_1$ (3)

– Mặt phẳng (ABJ) là mặt phân giác ngoài của nhị diện $\widehat{AB}(S, C)$ cạnh AB (nhưng là mặt phân giác của nhị diện $\widehat{AB}(S, C_2)$, bù của nhị diện $\widehat{AB}(S, C)$) và cũng là mặt phẳng trung trực $\perp[SC_2]$ của đoạn thẳng $[SC_2]$. Chứng minh hoàn toàn tương tự như trên, phép đối xứng qua mp (ABJ) biến A, B, S, C'' theo thứ tự thành A, B, C_2, D'' ; do đó: $SC'' = D''C_2$. Tương tự ta được: $SA'' = D''A_2, SB'' = D''B_2$; đồng thời cũng lại có: $SA'' = SB'' = SC''$. Và do đó, D'' là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $A_2B_2C_2$, vì vậy: $D''A_2 = D''B_2 = D''C_2 = R_2$. Suy ra $SC'' = R_2$. (4)

Phép vị tự $V\left(S, k = \frac{r_s}{r}\right)$ biến mặt cầu (I, r) thành mặt cầu (J, r_s) , thành thử biến C' thành C'' và do đó: $\frac{SC'}{SC''} = \frac{r}{r_s}$ (5)

Cuối cùng, từ (3), (4) và (5) ta được hệ thức cần tìm: $\frac{R_1}{R_2} = \frac{r}{r_s}$.

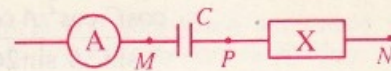
Nhận xét. Giải bài toán HHKG này đòi hỏi ở các bạn không những chỉ về trí tưởng tượng không gian mà còn đòi hỏi vận dụng những kiến thức rất cơ bản về hình chiếu vuông góc, tính chất tiếp diện, tiếp tuyến của mặt cầu. Ngoài ra, cũng đòi hỏi các bạn có khái niệm về tam giác định hướng trong mặt phẳng và vận dụng tính chất của những phép biến hình trong không gian. Chỉ có hai bạn đã nêu tên ở trên là biết sử dụng đến phép biến hình trong không gian, đặc biệt là bạn Hoàng Trọng Bắc sử dụng khá thành thạo phương pháp đó nên lời giải không những gọn gàng mà còn đẹp nữa.

2) Các bạn đều có vẽ hình nhưng hầu hết chỉ để cho có hình chứ ít để ý đến tính chính xác trong mối quan hệ giữa các yếu tố. Chẳng hạn biểu diễn các tiếp điểm C', C'' của (I) và (J) trên mặt phẳng (SAB) đúng $(S, C'$ và C'' thẳng hàng) nhưng chưa để ý đến tính chất: C_1 và C_2 phải thẳng hàng với chân đường cao H (hạ từ S) của hình chóp và sao cho đoạn C_1C_2 nhận giao điểm $K = AB \cap C_1C_2$ làm trung điểm, trong đó K cũng là chân đường cao chung hạ từ S của ba tam giác SAB, C_1AB và C_2AB . Tuy điều này không phải là bắt buộc phải biểu diễn trên hình vẽ nhưng các bạn cần lưu ý vì hình vẽ có thể hiện tính chất như vừa nêu ở trên.

3) Bạn Nguyễn Trường Thọ, 11A1, ĐHKHTN – ĐHQG Hà Nội cũng có lời giải tương đối gọn gàng.

NGUYỄN ĐĂNG PHÁT

Bài L1/312. Một mạch điện như hình dưới. Hiệu điện thế giữa M và N là $u_{MN} = 200\sqrt{2} \sin 100\pi$ (V), tụ điện có điện dung $C = \frac{10^{-3}}{2\pi}$ F. X là một đoạn mạch chứa hai trong ba phần tử cơ bản R, L, C mắc nối tiếp nhau. Ampe kế A trở $I = 0,8$ A; công suất tiêu thụ của đoạn mạch MN là $P = 96$ W.



a) Hãy xác định các phần tử chứa trong X và độ lớn của chúng.

b) Viết biểu thức của u_{PN} .

Lời giải. a) $Z_C = 20\Omega$; công suất tiêu thụ của đoạn mạch MN cũng chính là công suất tiêu thụ của đoạn mạch X ; chứng tỏ X chứa điện trở R : $R = \frac{P}{I^2} = 150(\Omega)$. Mặt khác, ta có: $Z_{MN} = \frac{U}{I} = 250(\Omega)$, với $Z_{MN}^2 = R^2 + (Z - Z_C)^2$, trong đó Z là điện kháng của phần tử thứ hai trong X . Từ đó: $Z = (20 \pm 200)(\Omega)$, nghĩa là Z có thể có một trong hai trị số: $Z_1 = 200(\Omega)$ và $Z_2 = -180(\Omega)$. Nếu $Z = Z_1 = 200(\Omega)$ thì phần tử

thứ hai là cuộn cảm, có độ tự cảm $L = \frac{Z_1}{\omega} = 0,701$

(H). Còn nếu $Z = Z_2 = -180(\Omega)$ thì phần tử thứ hai là tụ điện có điện dung $C = \frac{1}{\omega Z_2} = 17,7\mu F$.

b) + Với $Z = Z_1 = 200(\Omega)$, ta có $U_{PN} = I\sqrt{R^2 + Z_1^2} \approx 213(V)$. Ta thấy u_{MN} sớm pha hơn i một góc φ mà $\tan \varphi = \frac{Z_1 - Z_c}{R} \Rightarrow \varphi \approx 0,9273 \text{ rad}$. Còn u_{PN} sớm pha hơn i một góc φ_1 mà $\tan \varphi_1 = \frac{Z_1}{R} \Rightarrow \varphi_1 = 0,9724 \text{ rad} < \varphi$. Vậy u_{PN} sớm pha hơn u_{MN} một góc $\Delta \varphi_1 = \varphi_1 - \varphi = 0,0451 \text{ rad}$. Từ đó ta có biểu thức

$$u_{PN} = 213\sqrt{2} \sin(100\pi t + 0,0451) (V)$$

+ Với $Z = Z_2 = -180\Omega$. Lập luận và tính toán tương tự như trên, ta tìm được :

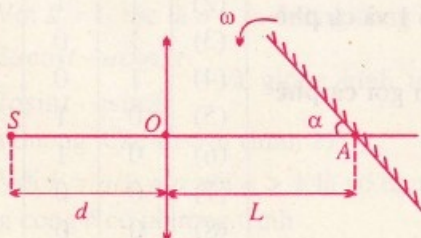
$$u_{PN} = 187\sqrt{2} \sin(100\pi t + 0,0512) (V)$$

Nhận xét. Các bạn có lời giải đúng, viết tương đối đúng các chữ số có nghĩa :

Bắc Ninh : Nguyễn Văn Dương, 11A1, THPT Quế Võ 1;
Nam Định : Nguyễn Văn Phi, 12 Lí, THPT Lê Hồng Phong ; **Bình Định :** Lê Văn Thông, 12 Lí, THPT Lê Quý Đôn, Quy Nhơn ; **Hải Dương :** Phạm Việt Hải, 11A4, THPT Hồng Quang ; **Thanh Hóa :** Nguyễn Thị Trang, 11A4, THPT Hậu Lộc II ; **Hải Phòng :** Đào Mạnh Hùng, 11B1, THPT Kiến Thụy ; **Vĩnh Phúc :** Nguyễn Thị Ngọc, 11A2, THPT Xuân Hòa, Mê Linh ; **Nghe An :** Cao Thanh Hùng, 11I, Nguyễn Bá Hùng, A3K11, Thái Bá Sơn, K30A3, THPT Phan Bội Châu, Vinh, Lê Đức Tuấn Sĩ, 11A, Lê Thành Công, 12B, THPT Nam Đàn 1.

MAI ANH

Bài L2/312. Trên trục chính của một thấu kính hội tụ mỏng có tiêu cự $f = 20\text{cm}$, có một điểm sáng S cách thấu kính $d = \frac{5}{4}f$. Bên kia thấu kính đặt một gương phẳng có mặt phản xạ hướng vào thấu kính sao cho khoảng cách $OA = L = 3f$ (như hình vẽ). Gương quay với vận tốc $\omega = 0,1 \text{ (rad/s)}$ quanh trục nằm trong mặt



phẳng của gương qua A và vuông góc với trục chính của thấu kính.

Hãy tìm vận tốc của ảnh của điểm S sau khi qua thấu kính, gương ở thời điểm góc giữa mặt phẳng của gương và trục chính của thấu kính là $\alpha = 60^\circ$.

Lời giải. Sơ đồ tạo ảnh : $S \xrightarrow{TK} S_1 \xrightarrow{G} S_2$.

Ta có : $d = \frac{5f}{4} \Rightarrow d' = \frac{df}{d-f} = 100(\text{cm}) > L = 3f = 60(\text{cm})$: S_1 trở thành vật ảo đối với gương G và cách A một khoảng $AS_1 = d' - OA = 40(\text{cm})$. Ảnh S_2 là ảnh thật, cách A là : $AS_2 = AS_1 = 40(\text{cm})$. Khi gương quay, S_2 chuyển động trên cung tròn tâm A bán kính 40cm , và vectơ vận tốc $\vec{v}$ của S_2 luôn vuông góc với AS_2 . Trong khoảng thời gian Δt , gương quay một góc $\Delta \alpha = \omega \Delta t$, còn AS_2 quay một góc $\Delta \beta = 2\Delta \alpha = 2\omega \Delta t$. Như vậy ảnh S_2 có vận tốc góc bằng 2ω , do đó vận tốc của S_2 bằng $v = 2\omega \cdot AS_2 = 8(\text{cm/s})$. Khi mặt phẳng gương hợp với trục chính của thấu kính một góc $\alpha = 60^\circ$, thì $\vec{v}$ hợp với trục chính một góc $90^\circ - (180^\circ - 2\alpha) = 2\alpha - 90^\circ = 30^\circ$.

Nhận xét. Các bạn có lời giải đúng : **Hà Tây:** Lê Đức Hải, 10L2, THPT ch. Nguyễn Huệ, Hà Đông ; **Nam Định :** Nguyễn Văn Phi, 12 Lí, THPT Lê Hồng Phong ; **Nghe An :** Lê Quang Duy, 10A3, THPT chuyên Phan Bội Châu, Vinh ; **Hòa Bình :** Bùi Lê Vũ, 12T, THPT Hoàng Văn Thụ ; **Vĩnh Phúc :** Nguyễn Tùng Lâm, 11A3, THPT ch. Vĩnh Phúc ; **Bình Định :** Đinh Thành Vinh, 12 Lí ; **Trần Quốc Thành**, 11 Lí, THPT ch. Lê Quý Đôn, Quy Nhơn ; **Bắc Ninh :** Vũ Công Thành, Lí 12, Chu Thanh Bình, Lí 12, THPT ch. Bắc Ninh.

MAI ANH

ĐÓN ĐỌC THPT SỐ 317 (11/2003)

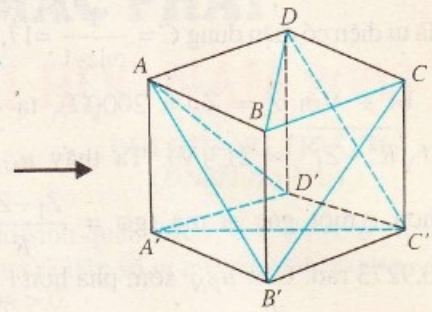
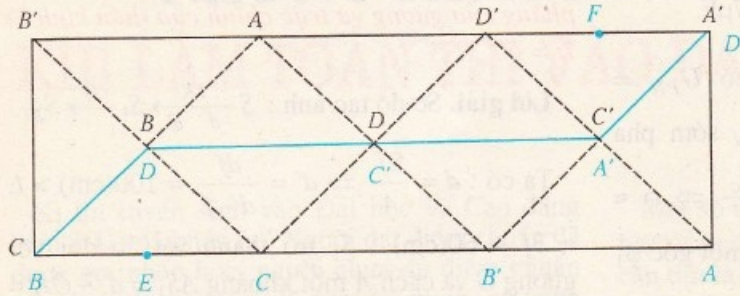
- Hướng dẫn giải đề thi tuyển sinh lớp 10 trường THPT NK Trần Phú, Hải Phòng năm 2003
- Những sai lầm dễ mắc phải khi làm toán thi vào Đại học năm 2003 (tiếp theo)
- Tại sao phương trình bậc 5 không giải được (tiếp theo)
- Kết quả Cuộc thi giải Toán và Vật lí trên tạp chí Toán học và Tuổi trẻ năm học 2002-2003

Các bạn nhớ đặt mua THPT quý IV tại các cơ sở Bưu điện.

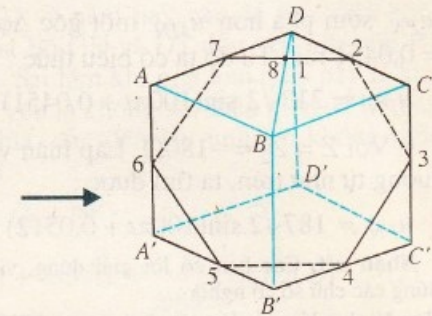
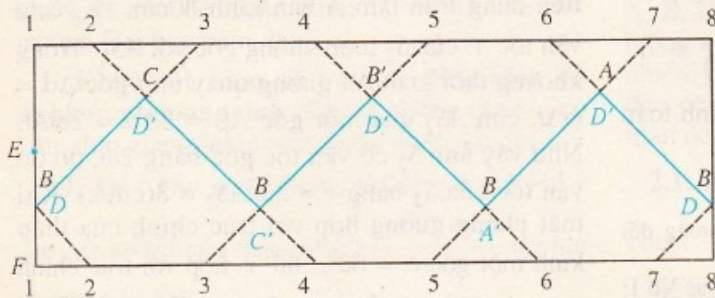
THPT

Đáp án cuộc thi AI THÔNG MINH NHANH TRÍ (Tiếp bài 4)

Cách 1.

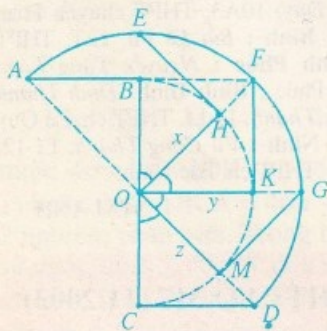


Cách 2.



Câu đố 3. VI KHUẢN TỰ PHÂN CHIA

Bài toán vi khuẩn tự phân chia thực chất là bài toán phân chia hình đã cho thành 4 hình tương đương giống hệt nhau. Với các phép đo (gần đúng) nhận thấy $AB \perp BC$, $BC \perp CD$, $AB = CD = \frac{1}{2} BC$ nên có thể đưa ra cách phân chia như sau



Dựng các tia OB , Ox , Oy , Oz , OC sao cho $\widehat{BOx} = \widehat{xOy} = \widehat{yOz} = \widehat{zOC} = 45^\circ$. Các tia này lần lượt cắt nửa đường tròn đường kính AD tại E , F , G , D và cắt nửa đường tròn đường kính BC tại B , H , K , M (hình vẽ). Bốn vi khuẩn con được phân chia là $AEHOBA$, $EFKOHE$, $FGMOKF$, $GDCOMG$ và chúng giống hệt nhau.

Bài toán trên có thể mở rộng thành bài toán phân chia vi khuẩn Z thành n - vi khuẩn con giống hệt nhau.

Câu đố 4. UỐNG THỨ GÌ.

Cách 1. Gọi An là A, Bình là B và Chi là C, đặt **trà** là số 1 và **cà phê** là số 0. Ta có tất cả 8 khả năng khác nhau như bảng bên.

Các trường hợp (6) và (7) trái với giả thiết đầu tiên (An gọi **cà phê** thì Bình gọi theo Chi).

Các trường hợp (3) và (8) trái với giả thiết thứ hai.

Trường hợp (5) trái với giả thiết thứ ba.

	A	B	C
(1)	1	1	1
(2)	1	1	0
(3)	1	0	1
(4)	1	0	0
(5)	0	1	1
(6)	0	1	0
(7)	0	0	1
(8)	0	0	0

Vậy chỉ có 3 trường hợp thỏa mãn là (1), (2) và (4), tức là An luôn gọi một thứ là trà.

Cách 2. Giả sử An gọi cà phê. Lúc đó có 2 khả năng.

a) Nếu B, C cùng gọi 1 thì trái giả thiết (3), cùng gọi 0 thì trái giả thiết (2)

b) Nếu B gọi khác C thì trái giả thiết (1). Vậy An chỉ gọi trà. Kiểm tra lại thấy đúng. Cách lập bảng như cách 1 giải được nhiều bài về logic. Chỉ có bạn Phan Huỳnh Lâm, 10C3 chuyên Hùng Vương, Bình Dương giải bằng cách này.

Câu đố 5. TRỒNG HOA

Giả sử a, b_i, c_i, d_i ($i = 1, 2, 3, 4$) là số cây hoa được đặt vào 13 cái bồn như hình vẽ bên (trong đó $d_3 = 12$). Từ giả thiết bài ra ta có :

$$4b_1 = a + c_1 + c_2 + d_1 \quad (1) \quad 4b_4 = a + c_4 + c_1 + d_4 \quad (4)$$

$$4b_2 = a + c_2 + c_3 + d_2 \quad (2) \quad 4a = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 \quad (5)$$

$$4b_3 = a + c_3 + c_4 + d_3 \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3), (4) suy ra : $4 \left(\sum_{i=1}^4 b_i \right) = 4a + 2 \left(\sum_{i=1}^4 c_i \right) + \sum_{i=1}^4 d_i \quad (6)$

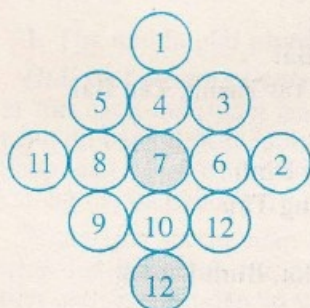
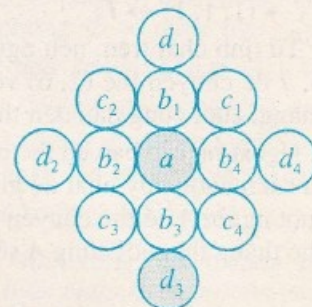
Vì $\sum_{j=1}^{12} j = 78$ nên tổng tất cả các số trên các ô tròn của sơ đồ là :

$$78 + 12 = 90. \text{ Từ (6) có : } 5 \left(\sum_{i=1}^4 b_i \right) = 3a + \left(\sum_{i=1}^4 c_i \right) + 90. \quad (7)$$

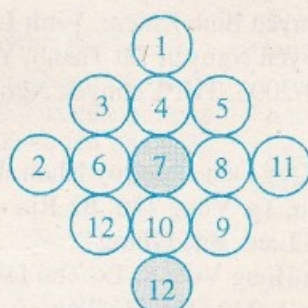
Từ (5) và (7) suy ra : $17a = \left(\sum_{i=1}^4 c_i \right) + 90 \quad (8)$. Từ (8) và $1 + 2 + 3 + 4 \leq \sum_{i=1}^4 c_i \leq 9 + 10 + 11 + 12$ có $6 \leq a \leq 7$.

• Với $a = 6$, không có cách điền nào thỏa mãn điều kiện đề bài.

• Với $a = 7$. Khi đó $\sum_{i=1}^4 b_i = 28$. Từ giả thiết bài ra có $4 \leq b_i \leq 10$.



Hình 1



Hình 2

Chỉ có thể xảy ra các khả năng (KN):

$$b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 4 + 5 + 9 + 10 \quad (\text{KN1})$$

$$b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 5 + 6 + 8 + 9 \quad (\text{KN2})$$

$$b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 4 + 6 + 8 + 10 \quad (\text{KN3})$$

Nhận thấy KN1 và KN2 không thể trồng hoa như ý muốn. Đối với KN3 ta có cách điền bên trái (hình 1). Nếu lấy đối xứng theo trục thẳng đứng ta có một cách xếp nữa (hình 2).

Câu đố 6. BẮN BÓNG

Ta kí hiệu $(a, b, \dots)$ là số bóng còn trên giá đỡ gồm một nhóm a quả gần nhau, một nhóm b quả gần nhau, ... mà giữa các

nhóm này đã trống ít nhất 1 quả. Mỗi bộ $(a, b, \dots)$ như trên, khi chưa ai bắn, gọi là một *thế*. Sau khi người A bắn thì còn thế (2, 6) hoặc (6, 2), không kể thứ tự của nhóm, do đó ta luôn viết một thế $(a, b, c, \dots)$ với $a \leq b \leq c \leq \dots$



Ta xét tập hợp các thế thắng $\mathcal{T}$ gồm các thế sau :

$$T_0 = (0), T_1 = (1, 1), T_2 = (2, 2), T_3 = (1, 1, 1, 1), T_4 = (1, 2, 3).$$

Tập hợp các thế thắng $\mathcal{T}$ có tính chất : Sau một lần bắn chuyển từ thế thắng T_i ($i = 1, 2, 3, 4$) thành một thế t bất kì (kí hiệu $T_i \rightarrow t$) thì chọn được ít nhất một cách bắn chuyển từ thế t sang thế thắng T_j (kí hiệu $t \rightarrow T_j$) ($j = 0, 1, 2, 3, 4$ mà $j \neq i$).

Bạn đọc dễ dàng kiểm tra được tính chất này qua lược đồ sau :

$$T_4 \rightarrow t \rightarrow T_1 \text{ với } t \text{ là } (1, 3), (1, 1, 2)$$

$$T_4 \rightarrow t \rightarrow T_2 \text{ với } t \text{ là } (2, 3), (1, 2, 2)$$

$$T_4 \rightarrow t \rightarrow T_3 \text{ với } t \text{ là } (1, 1, 3), (1, 1, 1, 2) \text{ và } T_1 \rightarrow (1) \rightarrow T_0, T_2 \rightarrow (1, 2) \rightarrow T_1, T_2 \rightarrow (2) \rightarrow T_0, T_3 \rightarrow (1, 1, 1) \rightarrow T_1.$$

Từ tính chất trên, nếu người B muốn thắng thì B phải bắn một lần rơi 2 quả bóng số 4, 5 hoặc số 6, 7 để chuyển thế $(2, 6)$ về thế thắng T_4 $(1, 2, 3)$, sau đó phải chọn cách bắn để luôn luôn giữ thế thắng, cuối cùng dẫn đến thế thắng $T_0 = (0)$.

Ngoài ra, các bạn có thể chứng minh rằng cách đi của người B chuyển từ $t = (2, 6)$ về $T_4 = (1, 2, 3)$ là cách chọn duy nhất để giữ thế thắng, nghĩa là nếu người B chuyển $t = (2, 6)$ về thế khác T_i thì đến lượt người A có thể chuyển về thế thắng $T_2 = (2, 2)$ hoặc $T_4 = (1, 2, 3)$, hoặc $T_5 = (1, 4)$ và A luôn giữ thế thắng thì cuối cùng A sẽ thắng.

DANH SÁCH CÁC BẠN ĐOẠT GIẢI CUỘC THI AI THÔNG MINH NHANH TRÍ

Giải nhất (3 giải)

- 1) Nguyễn Ngọc Hà, 11T, THPT Cam Đường, Tx. Lao Cai, **Lao Cai**
- 2) Nguyễn Phúc Thọ, 10T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Bình Định**
- 3) Võ Thái Thông, 7/4, THCS Ngô Gia Tự, Cam Nghĩa, Cam Ranh, **Khánh Hòa**

Giải nhì (5 giải)

- 1) Vũ Việt Hải, 8A1, THCS Chu Văn An, Q. Tây Hồ, **Hà Nội**
- 2) Trần Như Ngọc (địa chỉ liên lạc : Đình Thị Như Thúy, THPT bán công Krông Pắc, **Đắk Lắk**)
- 3) Võ Minh Tâm, 12T1, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm, **Vĩnh Long**
- 4) Trần Mạnh Cường, 10 Toán, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành, **Yên Bái**
- 5) Nguyễn Quang Đạt, lớp A2, khóa 2000-2003, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành, **Yên Bái**

Giải ba (14 giải)

- 1) Đào Thanh Sứ, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Tp. Quy Nhơn, **Bình Định**
- 2) Nguyễn Kỳ Nam, 9A8, THPT Vũng Tàu, Tp. Vũng Tàu, **Bà Rịa - Vũng Tàu**
- 3) Đào Tuấn Anh, 11A, THPT NK Ngô Sĩ Liên, **Bắc Giang**
- 4) Phan Huỳnh Lâm, 10C3, THPT chuyên Hùng Vương, Tx. Thủ Dầu Một, **Bình Dương**
- 5) Trần Minh Tuấn, 12K1, THPT Mỹ Đức A, Mỹ Đức, **Hà Tây**
- 6) Lê Nam Trường, 10T, THPT NK Hà Tĩnh, **Hà Tĩnh**
- 7) Trần Văn Dũng, 12A4, THPT Xuân Hòa, Mê Linh, **Vĩnh Phúc**
- 8) Lê Văn Đạt, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Huệ, Tx. Hà Đông, **Hà Tây**
- 9) Nguyễn Thế Lộc, 12T, THPT chuyên Nguyễn Trãi, **Hải Dương**
- 10) Trần Xuân Dũng, 11 Toán, THPT NK Trần Phú, **Hải Phòng**
- 11) Nguyễn Khắc Dũng, 10A2, khối PTCTT, ĐHSPT **Hà Nội**
- 12) Nguyễn Ngọc Minh, 6D, THCS Quỳnh Mai, Q. Hai Bà Trưng, **Hà Nội**
- 13) Nguyễn Thị Ngọc Trúc, 10T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Nha Trang, **Khánh Hòa**
- 14) Nguyễn Văn Hùng, Kim Đào, TT. Thừa, Lương Tài, **Bắc Ninh**

THTT



4	T	O	Á	N																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																															
---	---	---	---	---	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Giải đáp ô chữ :

THANG TÊN TRONG TOÁN

Các bạn đã gửi về tòa soạn rất nhiều cách điền chữ khác bảng trên. Chẳng hạn :

4 chữ cái : TRÒN

5 chữ cái : TUYẾN, THUẬN

6 chữ cái : TẬP CON

7 chữ cái : TAM DIỆN, TỰ NHIÊN, TRỤC LỚN

8 chữ cái : THẬP PHÂN, TÍNH TIẾN, THAM BIẾN, TÍCH PHÂN, TIẾP DIỆN

9 chữ cái : THIẾT DIỆN, TẬP HỢP CON, TẬP HỮU HẠN, TỈ LỆ THUẬN, TÍNH VÔ HẠN, THUẬT TOÁN.

10 chữ cái : TAM GIÁC CÂN, TÍNH BỊ CHẶN

11 chữ cái : TỌA ĐỘ NGUYÊN, TÂM HÌNH TRÒN

12 chữ cái : TÍNH GIAO HOÁN, TẬP HỢP HỮU HẠN, THAM SỐ NGUYÊN

13 chữ cái : TOÁN TỈ LỆ THUẬN, TỌA ĐỘ TRỌNG TÂM, ...

Ở đây chưa kể tên các số và không ghi tên bắt đầu bằng động từ. Các bạn đạt kỉ lục viết đúng tên đến hơn 38 chữ cái là :

1) Hoàng Mai Quỳnh, 10T, THPT Nguyễn Tất Thành, Yên Bái

2) Phạm Anh Tuấn, 11A3, THPT số 3 Quảng Trạch, Quảng Bình

3) Bùi Phong Quang, 9A, THCS Lê Hữu Lập, Hậu Lộc, Thanh Hóa

4) Phạm Phương Anh, 10A1 Hóa, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội

5) Ngô Xuân Tuấn, 10B2, THPT Sơn Tây, Hà Tây

6) Trần Phương Nam, 11 Toán, THPT Quốc học Huế, Thừa Thiên - Huế

7) Nguyễn Thị Hương, 11A3, THPT Hoàng Hóa II, Hoàng Hóa, Thanh Hóa.

VÂN KHANH

(Xem tiếp trang 8)

GIẢI TRÍ TOÁN HỌC (tiếp bài 3)

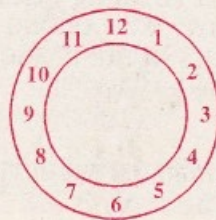
Trường hợp $a_j \in \{1, 2, 3, 6\}$. Không mất tính tổng quát giả sử $a_1 = 1$, do a_2 và a_4 không thể bằng 2 nên $a_3 = 2, a_2 = 3, a_4 = 6$. Vì $T = 12$ nên $a_5 = 5, a_6 = 4, a_7 = 7, a_8 = 8$. Sơ đồ trên chỉ một cách sắp xếp số trên các lá phiếu thỏa mãn điều kiện đặt ra. Nếu lấy đối xứng qua các trục đối xứng của hình vuông ta được các nghiệm khác.

Nhận xét : Các bạn sau có lời giải đúng, gửi bài sớm về TS được nhận tặng phẩm kì này : Nguyễn Trọng Kỳ, lớp Thiết bị Điện - Điện tử 1 - K47, Khoa Điện, ĐHBK Hà Nội, Nguyễn Đức Minh, 11A, ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội ; Nguyễn Hữu Hoàng, 11I, THPT Thăng Long, Q. Hai Bà Trưng, Hà Nội ; Phạm Lam Giang,

10A2, khối PTCTT - ĐH Vinh, Nghệ An ; Lê Viết Ân, 9⁴, THCS Phú Thuận, Phú Vang, Thừa Thiên - Huế.

HỒNG QUANG

SẮP XẾP SỐ THEO VÒNG TRÒN



Từ hình bên bạn hãy sắp xếp lại các số theo vòng tròn sao cho với ba số a, b, c bất kì xếp theo chiều kim đồng hồ ta đều có $b^2 - ac$ chia hết cho 13.

TRẦN HÀ
(GV THCS Nguyễn Bình Khiêm, Vĩnh Bảo, Hải Phòng)

Toán học và Tuổi trẻ

Mathematics and Youth

NĂM THỨ 40

Số 316 (10-2003)

Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội

ĐT - Fax : 04.5144272

Email : toanhocvt@yahoo.com

TRONG SỐ NÀY

- 1 **Dành cho Trung học cơ sở – For Lower Secondary Schools**
Đặng Văn Biểu – Một số bài toán về tích số do hai đoạn thẳng.
- 2 **Tiếng Anh qua các bài toán – English through Math Problems**
Ngô Việt Trung – Bài số 65.
- 3 **Giới thiệu về toán học cao cấp – Introduction to Higher Mathematics**
Phùng Hồ Hải – Tại sao phương trình bậc 5 không giải được ?
- 6 **Chuẩn bị thi vào Đại học – University Entrance Preparation**
Bùi Quang Trường – Những sai lầm dễ mắc phải khi làm toán thi vào Đại học năm 2003
- 8 **Nhân kỉ niệm 39 năm ngày ra số báo THPT đầu tiên.**
- 9 **Toán học và đời sống - Math and Life**
Thanh Vân – Dùng phép hoán vị để mã hóa khi chuyển tin.
- 10 **Đề ra kì này - Problems in this Issue**
T1/316, ..., T12/316, L1, L2/316
- 12 **Giải bài kì trước – Solutions to Previous Problems**
Giải các bài của số 312
- 23 **Câu lạc bộ - Math Club**

Bìa 2 : Đường cong Ê-pi-xy-clô-it
Bìa 3 : Giải trí toán học – Math Recreation
Bìa 4 : Kết quả cuộc thi Ai thông minh nhanh trí

Tổng biên tập :
NGUYỄN CẢNH TOÀN

Phó tổng biên tập :
NGÔ ĐẠT TỨ

Chịu trách nhiệm xuất bản :

Giám đốc NXB Giáo Dục :
NGÔ TRẦN ÁI
Tổng biên tập NXB Giáo Dục :
VŨ DƯƠNG THUY

Hội đồng biên tập :

NGUYỄN CẢNH TOÀN, NGÔ ĐẠT TỨ, LÊ KHẮC BẢO, NGUYỄN HUY ĐOAN, NGUYỄN VIỆT HẢI, ĐINH QUANG HẢO, NGUYỄN XUÂN HUY, PHAN HUY KHẢI, VŨ THANH KIỆT, LÊ HẢI KHÔI, NGUYỄN VĂN MẬU, HOÀNG LÊ MINH, NGUYỄN KHẮC MINH, TRẦN VĂN NHUNG, NGUYỄN ĐĂNG PHÁT, PHAN THANH QUANG, TẠ HỒNG QUẢNG, ĐẶNG HÙNG THẮNG, VŨ DƯƠNG THUY, TRẦN THÀNH TRẠI, LÊ BÁ KHÁNH TRINH, NGÔ VIỆT TRUNG

Trưởng ban biên tập : NGUYỄN VIỆT HẢI.

Trị sự : VŨ ANH THU.

Biên tập : VŨ KIM THUY, HỒ QUANG VINH

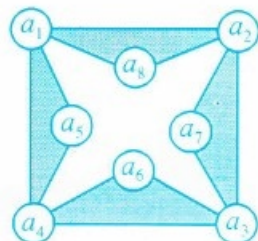
Trình bày : NGUYỄN THỊ OANH

Đại diện phía Nam : TRẦN CHÍ HIẾU, 231 Nguyễn Văn Cừ, Tp. Hồ Chí Minh. ĐT : 08.8309049



Giải đáp bài :

**THÂM KHU
DI TÍCH**



Giả sử a_i ($1 \leq i \leq 8$) là số trên lá phiếu đặt như hình vẽ; $a_i \in \{1, 2, \dots, 8\}$, $a_i \neq a_j$, $\forall i \neq j$ ($i, j = 1, 2, \dots, 8$). Từ giả thiết bài ra có :

$$a_1 + a_2 + a_8 = a_2 + a_3 + a_7 = a_3 + a_4 + a_6 = a_4 + a_5 + a_1 = T.$$

$$4T = 2 \sum_{j=1}^4 a_j + \sum_{k=5}^8 a_k \Rightarrow 4T = \sum_{j=1}^8 a_j + 36 \quad (1)$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^4 a_j : 4 \quad (2). \text{ Để ý rằng :}$$

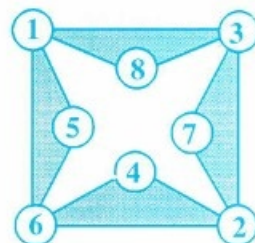
$$1 + 2 + 3 + 4 \leq \sum_{j=1}^4 a_j \leq 5 + 6 + 7 + 8 \text{ hay}$$

$$10 \leq \sum_{j=1}^4 a_j \leq 26, \text{ kết hợp (2) với giả thiết } \sum_{j=1}^4 a_j$$

$$\text{là nhỏ nhất ta có : } \sum_{j=1}^4 a_j = 12 = 1 + 2 + 4 + 5 = 1 + 2 + 3 + 6.$$

Từ đó và (1) suy ra $T = 12$.

Để nhận thấy với trường hợp $a_j \in \{1, 2, 4, 5\}$ thì không thể sắp xếp các số trên các lá phiếu thỏa mãn điều kiện bài ra.



(Xem tiếp trang 23)

PROBLEMS IN THIS ISSUE (Tiếp trang 11)

T5/316. Find the least value of the expression

$$\frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{c}} + \frac{c}{\sqrt{a}}, \text{ where } a, b, c \text{ are positive numbers satisfying the condition } a + b + c \geq 3.$$

T6/316. Let ABC be a triangle with $BC = a$, $AB = AC = b$ and suppose that the angled-bisector of $\widehat{ACB}$ cuts the side AB at D so that $CD + DA = a$. Prove that $a^3 + b^3 = 3ab^2$.

T7/316. Let D be a point on the the side BC of triangle ABC (D distinct from B, C) and let E and F be respectively the incenters of triangle ABD and triangle ACD . Prove that if the four points B, C, E, F lie on a circle then

$$\frac{AD+DB}{AD+DC} = \frac{AB}{AC}.$$

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T8/316. Prove that for every natural number $k > 0$, the number $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^{2k}$ can be written in the form $a_k + b_k \sqrt{6}$ where a_k, b_k are positive integers. Find the relations defining the sequences $(a_k), (b_k), k = 1, 2, 3, \dots$

Prove that for every $k \geq 2$, $a_{k-1} \cdot a_{k+1} - 6b_k^2$ is a constant not depending on k .

T9/316. Find the greatest value of the expression

$$(x^{a_1} + x^{a_2} + \dots + x^{a_n}) \left(\frac{1}{x^{a_1}} + \frac{1}{x^{a_2}} + \dots + \frac{1}{x^{a_n}} \right)$$

where x is an arbitrary positive number, $x \neq 1$, n is a given even natural number, $a_1, a_2, \dots, a_n$ are given numbers belonging to the segment $[m, m+1]$, where m is a given natural number.

T10/316. Consider the equation $x^2 - 2x + \cos \alpha = 0$ where the parameter α belongs to the interval $(0; \pi/2)$.

1) Prove that the equation has two positive roots x_1, x_2 .

2) Let $f(x)$ be the trinomial with leading coefficient 1, the two roots of which are $t_1 = x_1^{x_1} + x_2^{x_1}$ and $t_2 = x_1^{x_2} + x_2^{x_2}$. Find all value c such that $f(c) < 0$ for all α in the interval $(0; \pi/2)$.

T11/316. Let ABC be a triangle with $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, let O and R be respectively its circumcenter and circumradius, let I_a, I_b, I_c be respectively the centers of its escribed circles in the angles A, B, C and let r be the inradius of ΔABC . Prove that

$$\frac{1}{2R} \leq \frac{OI_a}{(a+b)(a+c)} + \frac{OI_b}{(b+c)(b+a)} + \frac{OI_c}{(c+a)(c+b)} \leq \frac{1}{4r}.$$

T12/316. Consider the tetrahedra $ABCD$ with opposite congruent sides ($AB = CD, AC = BD, AD = BC$) and the dihedral angles α, β, γ respectively of sides BC, CA, AB are acute. Find the least value of the expression :

$$T = \sqrt{\cos^2 \alpha + \frac{1}{\cos^2 \alpha}} + \sqrt{\cos^2 \beta + \frac{1}{\cos^2 \beta}} + \sqrt{\cos^2 \gamma + \frac{1}{\cos^2 \gamma}}$$

KẾT QUẢ CUỘC THI

A9 THÔNG MINH NHANH TRÍ ?

Đề thi công bố ngày 15.6.2003 và ngày 24.6.2003 đã nhận được bài giải đầu tiên của bạn *Nguyễn Thị Thanh Thủy*, 8B1, THCS Vĩnh Niệm, Quận Lê Chân, **Hải Phòng** gửi về. Điều thú vị là trong 8 giải nhất và nhì có 4 bạn ở miền núi phía Bắc và Tây Nguyên. Bạn *Lê Tiến Đà*, lớp 4 trường tiểu học DLI Diên Châu, **Nghệ An** là bạn đọc nhỏ tuổi nhất dự thi (Bạn viết tắt tên trường). Do khuôn khổ của tờ báo, những bài nhiều cách giải cũng chỉ nêu được hướng giải và số cách chứ không trình bày tất cả các cách. Một kì hệ bổ ích và lí thú đã khép lại. Hẹn gặp lại trong kì thi hệ năm sau. Dưới đây là lời giải vắn tắt các bài của cuộc thi.

ĐÁP ÁN

Câu đố 1. DU LỊCH

Do đường đi không được lặp lại nên chỉ có thể đi 2 chặng đường sắt nối từ Hà Nội đến 2 đô thị vòng trong, còn lại 4 chặng đường sắt Phủ Lý - Nam Định, Hải Dương - Hải Phòng, Bắc Ninh - Bắc Giang, Vĩnh Yên - Việt Trì là bắt buộc phải qua. Như vậy nhiều nhất là qua 6 chặng đường sắt.

Với kí hiệu $\rightarrow$ chỉ đường bộ, $\Rightarrow$ chỉ đường sắt, có 4 lộ trình sau :

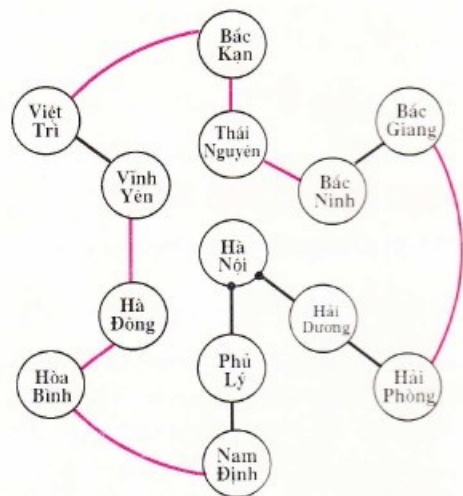
1) HN $\Rightarrow$ HD $\Rightarrow$ HP $\Rightarrow$ BG $\Rightarrow$ BN $\Rightarrow$ TN $\Rightarrow$ BK $\Rightarrow$ VT $\Rightarrow$ VY $\Rightarrow$ HD $\Rightarrow$ HB $\Rightarrow$ ND $\Rightarrow$ PL $\Rightarrow$ HN (sơ đồ)

2) HN $\Rightarrow$ HD $\Rightarrow$ HP $\Rightarrow$ ND $\Rightarrow$ PL $\Rightarrow$ HD $\Rightarrow$ HB $\Rightarrow$ VT $\Rightarrow$ VY $\Rightarrow$ TN $\Rightarrow$ BK $\Rightarrow$ BG $\Rightarrow$ BN $\Rightarrow$ HN.

3) HN $\Rightarrow$ TN $\Rightarrow$ BK $\Rightarrow$ VT $\Rightarrow$ VY $\Rightarrow$ HD $\Rightarrow$ HB $\Rightarrow$ ND $\Rightarrow$ PL $\Rightarrow$ HD $\Rightarrow$ HP $\Rightarrow$ BG $\Rightarrow$ BN $\Rightarrow$ HN

4) HN $\Rightarrow$ TN $\Rightarrow$ BK $\Rightarrow$ BG $\Rightarrow$ BN $\Rightarrow$ HD $\Rightarrow$ HP $\Rightarrow$ ND $\Rightarrow$ PL $\Rightarrow$ HD $\Rightarrow$ HB $\Rightarrow$ VT $\Rightarrow$ VY $\Rightarrow$ HN.

Mỗi lộ trình trên lại cho tương ứng với một lộ trình theo thứ tự ngược lại, do vậy có tất cả 8 lộ trình.



Câu đố 2. BỌC HỘP TẶNG PHẨM

Diện tích 6 mặt hình vuông của hình lập phương cạnh a là $6a^2$. Mảnh giấy hình chữ nhật với chiều rộng x , chiều dài $3x$ có diện tích là $3x^2$. Từ $3x^2 = 6a^2$ có $x = a\sqrt{2}$, nghĩa là chiều rộng mảnh giấy bằng đường chéo hình vuông. Cắt giấy thành 2 mảnh như ở cách 1 hoặc cách 2 trang 20.

Từ cách 1 có thể suy ra nhiều kiểu khác, chẳng hạn : cắt theo đường $E(D,B)(A',C')F$ hoặc $B'(D,B)(A',C')A...$ Từ cách 2 có thể chọn điểm D di chuyển tùy ý trong khoảng EF .

(Xem tiếp trang 20)

ISSN : 0866-8035

Chỉ số : 12884

Mã số : 8BT18M3

Chế bản tại Tòa soạn

In tại Nhà máy in Diên Hồng, 187B phố Giảng Võ

In xong và nộp lưu chiểu tháng 10 năm 2003

Giá : 3000đ

Ba nghìn đồng