

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO * HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

Toán học & Tuổi trẻ

8
2003

SỐ 314 - NĂM THỨ 40 - TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG

DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ



Chúc mừng thành tích của đội tuyển toán Việt Nam tại kì thi Quốc tế



OLYMPIC TOÁN HỌC QUỐC TẾ LẦN THỨ 44 (IMO 2003 JAPAN)

TRẦN NAM DŨNG - NGUYỄN KHẮC MINH

IMO 2003 JAPAN được tổ chức từ ngày 07/7 đến ngày 19/7/2003 tại thành phố Tokyo - Thủ đô của Nhật Bản. Tham dự kì thi này có 83 đoàn. Đoàn Việt Nam gồm có: thầy Nguyễn Khắc Minh, chuyên viên môn Toán Vụ THPT, trưởng đoàn; thầy Trần Nam Dũng, giảng viên khoa Toán-Tin ĐHKHTN - ĐHQG Tp. Hồ Chí Minh, phó trưởng đoàn; và 6 học sinh: Lê Hùng Việt Bảo (lớp 11 Khối PTCT-Tin ĐHKHTN ĐHQG Hà Nội), Nguyễn Trọng Cảnh (lớp 12 Khối PTCT-Tin ĐHSP Hà Nội), Nguyễn Đăng Hợp (lớp 11 THPT Lê Hồng Phong, Nam Định), Vũ Nhật Huy (lớp 12 THPT Chuyên Vĩnh Phúc, tỉnh Vĩnh Phúc), Nguyễn Đăng Khoa (lớp 11 trường PTNK ĐHQG Tp. Hồ Chí Minh) và Nguyễn Tiến Việt (lớp 11 THPT chuyên Lê Quý Đôn, Nha Trang - Khánh Hòa). Đi cùng đoàn, trong tư cách quan sát viên, có thầy Lê Anh Tuấn - phó hiệu trưởng trường THPT chuyên Vĩnh Phúc, tỉnh Vĩnh Phúc.

Theo quy định của Ban tổ chức (BTC), từ ngày 07/7 đến ngày 14/7 các trưởng đoàn bị cách ly để cùng soạn thảo, rồi dịch đề thi sang tiếng nước mình. Ngày 11/7 BTC bắt đầu tiếp đón các phó trưởng đoàn cùng các học sinh. Vì một số lí do, đoàn Việt Nam đã đến Tokyo sớm 1 ngày và rời Tokyo muộn 2 ngày so với quy định. Nhờ sự quan tâm giúp đỡ tận tình, chu đáo của ông Đại sứ Việt Nam tại Nhật Bản, ông Tham tán công sứ và toàn thể cán bộ, nhân viên Đại sứ quán Việt Nam tại Nhật Bản, việc "đi sớm - về muộn" đã không gây cho đoàn bất cứ một khó khăn nào.

IMO 2003 JAPAN được chính thức khai mạc vào chiều ngày 12/7 tại Hội trường chính của Nhà Nghệ thuật thuộc Trung tâm Olympic Trẻ của Thủ đô Tokyo.

Các học sinh làm bài thi trong hai ngày, 13/7 và 14/7/2003. Thời gian làm bài của mỗi ngày thi là 4 tiếng rưỡi. Dưới đây là Đề thi của IMO 2003 JAPAN:

Ngày thi thứ nhất. 13/7/2003

Bài 1. (Tổ hợp, Braxin). Cho A là một tập hợp con của tập hợp $S = \{1, 2, \dots, 1000000\}$ mà A có đúng 101 phần tử. Chứng minh rằng tồn tại các số $t_1, t_2, \dots, t_{100}$ thuộc S sao cho các tập hợp

$A_j = \{x + t_j \mid x \in A\}$ với $j = 1, 2, \dots, 100$ đôi một không có phần tử chung.

Bài 2. (Số học, Bungari). Hãy tìm tất cả các cặp số nguyên dương (a, b) sao cho:

$$\frac{a^2}{2ab^2 - b^3 + 1}$$

là một số nguyên dương.

Bài 3. (Hình học, Ba Lan). Cho một lục giác lồi mà mỗi cặp cạnh đối của nó đều có tính chất sau: khoảng cách giữa hai trung điểm của hai

cạnh thuộc cặp bằng $\frac{\sqrt{3}}{2}$ nhân với tổng độ dài của hai cạnh ấy. Chứng minh rằng tất cả các góc của lục giác đó bằng nhau.

(Lục giác lồi ABCDEF có ba cặp cạnh đối: AB và DE, BC và EF, CD và FA).

Ngày thi thứ hai. 14/7/2003

Bài 4. (Hình học, Phần Lan). Cho ABCD là một tứ giác nội tiếp. Gọi P, Q và R tương ứng là chân các đường vuông góc hạ từ D xuống các đường thẳng BC, CA và AB. Chứng minh rằng PQ = QR khi và chỉ khi các đường phân giác của các góc $\angle ABC$ và $\angle ADC$ cắt nhau tại một điểm nằm trên đường thẳng AC.

Bài 5. (Đại số, Ai len). Cho n là một số nguyên dương và cho $x_1, x_2, \dots, x_n$ là các số thực thỏa mãn $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$.

(a) Chứng minh rằng

$$\left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |x_i - x_j| \right)^2 \leq \frac{2(n^2 - 1)}{3} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_i - x_j)^2$$

(b) Chứng minh rằng đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi dãy $x_1, x_2, \dots, x_n$ là một cấp số cộng.

Bài 6. (Số học, Pháp). Cho p là một số nguyên tố. Chứng minh rằng tồn tại số nguyên tố q sao cho với mỗi số nguyên n , số $n^p - p$ không chia hết cho q .

Điểm tối đa cho mỗi bài toán thi là 7 điểm.

Các ngày 15/7 và 16/7 là thời gian dành cho Tiểu ban chấm thi và lãnh đạo các đoàn thực hiện nhiệm vụ chấm thi. Trong thời gian này, các học sinh được đi tham quan thành phố Tokyo và vui chơi trong công viên Disnalend.

Trong kì thi lần này có 3 học sinh đạt điểm tối đa (42/42); đó là các em: Lê Hùng Việt Bảo, Nguyễn Trọng Cảnh (Việt Nam), và Yunhao Fu (Trung Quốc). Đây là lần đầu tiên đoàn Việt Nam có hai học sinh đạt điểm tối đa trong một kì thi.

Căn cứ kết quả thi và Quy chế của các kì IMO, BTC IMO 2003 JAPAN đã quyết định...

(Xem tiếp trang 9)

Dành cho các bạn
TRUNG HỌC CƠ SỞ



Bài toán

XÁC ĐỊNH MỘT ĐA THỨC

NGÔ ĐỨC MINH
(GV THCS Ngô Gia Tự – Hải Phòng)

Việc tìm tòi lời giải bài toán xác định một đa thức thường gây lúng túng cho học sinh. Nguyên nhân chính là học sinh được trang bị đầy đủ các kiến thức cần thiết nhưng rồi rạc ở các khối lớp và thường thiếu bài tập áp dụng. Bài viết này nhằm củng cố kiến thức về đa thức trong chương trình toán từ lớp 7 đến lớp 9 và rèn luyện kỹ năng giải một số dạng toán trên từ đơn giản đến phức tạp mà kiến thức của nó không vượt quá trình độ THCS.

1. Một vài kiến thức cơ bản để giải loại toán này

Định lý Bơ-du : Phần dư của phép chia đa thức $f(x)$ cho nhị thức $x - a$ bằng giá trị của đa thức tại $x = a$, tức là $f(x) = (x - a)g(x) + f(a)$.

Thực vậy, giả sử $f(x) = (x - a)g(x) + r$ thì $f(a) = r$

Phương pháp hệ số bất định

Giả sử $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

$g(x) = b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0$

Nếu $f(x) = g(x)$ với ít nhất 4 giá trị phân biệt của x thì $a_3 = b_3, a_2 = b_2, a_1 = b_1, a_0 = b_0$.

Chứng minh : Giả sử với 4 giá trị phân biệt x_1, x_2, x_3, x_4 có

$$f(x_1) = g(x_1) \quad (1) \quad f(x_2) = g(x_2) \quad (2)$$

$$f(x_3) = g(x_3) \quad (3) \quad f(x_4) = g(x_4) \quad (4)$$

Đặt $c_3 = a_3 - b_3, c_2 = a_2 - b_2; c_1 = a_1 - b_1; c_0 = a_0 - b_0$

Trừ theo từng vế của (1) và (2) được

$$c_3(x_1^3 - x_2^3) + c_2(x_1^2 - x_2^2) + c_1(x_1 - x_2) = 0$$

Vì $x_1 - x_2 \neq 0$ nên

$$c_3(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) + c_2(x_1 + x_2) + c_1 = 0 \quad (5)$$

Tương tự từ (1) và (3) có

$$c_3(x_1^2 + x_1x_3 + x_3^2) + c_2(x_1 + x_3) + c_1 = 0 \quad (6)$$

Trừ theo từng vế của (5) và (6) rồi chia cho $x_2 - x_3 \neq 0$ được $c_2 + c_3(x_1 + x_2 + x_3) = 0 \quad (7)$

Tương tự từ (1), (2), (4) có

$$c_2 + c_3(x_1 + x_2 + x_4) = 0 \quad (8)$$

Trừ theo từng vế của (7) và (8) được $c_3(x_3 - x_4) = 0 \Rightarrow c_3 = 0$ vì $x_3 - x_4 \neq 0$. Thay $c_3 = 0$ vào (8) được $c_2 = 0$. Từ đó và (6) được $c_1 = 0$. Thay vào (1) được $a_0 = b_0$ suy ra đpcm.

2. Một số dạng toán thường gặp

Dạng 1 : Xác định đa thức bậc n ($n = 2, 3$) khi biết $(n+1)$ giá trị của đa thức

Bài toán 1 : Xác định đa thức bậc ba biết : $f(0) = 1; f(1) = 0; f(2) = 5; f(3) = 22$.

Lời giải. Gọi đa thức cần tìm là

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Theo bài ra ta có : $f(0) = 1 \Rightarrow d = 1$

$$f(1) = 0 \Rightarrow a + b + c = -1 \quad (1)$$

$$f(2) = 5 \Rightarrow 4a + 2b + c = 2 \quad (2)$$

$$f(3) = 22 \Rightarrow 9a + 3b + c = 7 \quad (3)$$

Giải hệ phương trình (1), (2), (3) được $a = 1, b = 0, c = -2$. Vậy $f(x) = x^3 - 2x + 1$.

Chú ý rằng để xác định đa thức bậc n thì cần biết $n+1$ giá trị đa thức, còn nếu chỉ biết n giá trị thì đa thức tìm được có hệ số phụ thuộc một tham số. Chẳng hạn ở bài toán 1 nếu bỏ đi điều kiện $f(3) = 22$ thì khi giải hệ phương trình (1) (2) và $d = 1$ ta được $f(x) = ax^3 + (3 - 3a)x^2 + (2a - 4)x + 1$ với a là tham số.

Dạng 2 : Xác định đa thức dư khi biết một số phép chia khác

Bài toán 2 : Đa thức $f(x)$ khi chia cho $x+1$ dư 4, khi chia cho x^2+1 dư $2x+3$. Tìm đa thức dư khi chia $f(x)$ cho $(x+1)(x^2+1)$.

Lời giải. Theo định lý Bơ-du ta có $f(-1) = 4$ (4). Do bậc của đa thức chia $(x+1)(x^2+1)$ là 3 nên đa thức dư có dạng bậc hai $ax^2 + bx + c$. Giả sử

$$f(x) = (x+1)(x^2+1).q(x) + ax^2 + bx + c$$
$$= [(x+1).q(x) + a].(x^2+1) + bx + c - a \quad (5)$$

$$\text{Mà } f(x) \text{ chia cho } (x^2+1) \text{ dư } 2x+3 \quad (6)$$

$$\text{Từ (4), (5), (6) có } b = 2 \quad (7), \quad c - a = 3 \quad (8),$$

$$a - b + c = 4 \quad (9).$$

Giải hệ phương trình (7) (8) (9) suy ra đa thức dư cần tìm là $\frac{3}{2}x^2 + 2x + \frac{9}{2}$. Chú ý rằng để tìm đa thức dư khi chia $f(x)$ cho $g(x)$ ở điều kiện đề bài ta biết phép chia $f(x)$ cho các đa thức thương của $g(x)$.

Dạng 3: Xác định đa thức khi biết điều kiện của các hệ số

Bài toán 3: Tìm các đa thức $f(x)$ có tất cả các hệ số đều là số nguyên không âm nhỏ hơn 8 và thỏa mãn: $f(8) = 2003$.

Lời giải. Xét đa thức

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ với $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ đều là các số nguyên không âm và nhỏ hơn 8. Do $f(8) = 2003$ nên $a_n 8^n + a_{n-1} 8^{n-1} + \dots + a_1 8 + a_0 = 2003$. Ở đây $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ là các chữ số của 2003 được viết trong hệ ghi số cơ sở 8. Thực hiện việc chia 2003 cho 8 được dư $a_0 = 3$, lại lấy thương chia cho 8, liên tiếp như thế, ta được đa thức cần tìm là:

$$f(x) = 3x^3 + 7x^2 + 2x + 3$$

Bài toán tổng quát là: Tìm các đa thức $f(x)$ sao cho tất cả các hệ số đều là số nguyên không âm nhỏ hơn a và biết $f(a) = b$, trong đó a, b là các số đã cho.

Dạng 4. Xác định đa thức $f(x)$ thỏa mãn một hệ thức đối với $f(x)$

Bài toán 4. Tìm các đa thức $f(x)$ bậc nhỏ hơn 4 và thỏa mãn hệ thức sau với ít nhất 4 giá trị phân biệt của x :

$$3f(x) - f(1-x) = x^2 + 1 \quad (10)$$

Lời giải. Giả sử $f(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$.

Sử dụng phương pháp hệ số bất định ta có:

$$4a_3 x^3 = 0 \Rightarrow a_3 = 0 \text{ suy ra } 2a_2 x^2 = x^2 \Rightarrow a_2 = \frac{1}{2},$$

$$\text{từ đó có } (4a_1 + 1)x = 0 \Rightarrow a_1 = -\frac{1}{4} \text{ và } 2a_0 - \frac{1}{4}$$

$$= 1 \Rightarrow a_0 = \frac{5}{8}. \text{ Vậy } f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{5}{8}.$$

Các bạn hãy chứng minh phương pháp hệ số bất định đối với hai đa thức có bậc 4, bậc 5 và tìm thêm các dạng khác của bài toán xác định đa thức. Các bạn có thể tham khảo thêm bài viết *Phương pháp nội suy và các bài toán về xác định đa thức* của tác giả Nguyễn Văn Vinh trên THPT số 229 (7/1996).

(Xem tiếp trang 20)

ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 TRƯỜNG THPT NĂNG KHIẾU ĐHQC TP. HỒ CHÍ MINH

NĂM 2003

MÔN: TOÁN (Dành cho mọi thí sinh)

Thời gian làm bài: 150 phút

Câu I. Cho phương trình

$$mx^2 + 2mx + m^2 + 3m - 3 = 0 \quad (1)$$

a) Định m để phương trình (1) vô nghiệm.

b) Định m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1 - x_2| = 1$.

Câu II. a) Giải phương trình

$$\sqrt{x(x-2)} + \sqrt{x(x-5)} = \sqrt{x(x+3)}$$

b) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} (x^2 + y^2)(x^2 - y^2) = 144 \\ \sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{x^2 - y^2} = y \end{cases}$$

Câu III. Cho tam giác ABC có $\hat{A} = 45^\circ$. Gọi M và N lần lượt là chân đường cao kẻ từ B và C của tam giác ABC .

a) Tính tỉ số $\frac{MN}{BC}$

b) Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Chứng minh rằng $OA \perp MN$.

Câu IV. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a ; mặt bên SAB là tam giác đều; mặt bên SCD là tam giác vuông cân tại S . Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD .

a) Tính diện tích tam giác SIJ theo a .

b) Gọi H là chân đường cao kẻ từ S của $\triangle SIJ$. Chứng minh rằng $SH \perp AC$.

Câu V. Lớp 9A có 28 học sinh đăng kí dự thi vào các lớp chuyên Toán, Lý, Hóa của trường Phổ thông Năng khiếu. Trong đó: Không có học sinh nào chỉ chọn thi vào lớp Lý hoặc chỉ chọn thi vào lớp Hóa. Có ít nhất 3 học sinh chọn thi vào cả ba lớp Toán, Lý và Hóa; Số học sinh chọn thi vào lớp Toán và Lý bằng số học sinh chỉ chọn thi vào lớp Toán; Có 6 học sinh chọn thi vào lớp Toán và Hóa; Số học sinh chọn thi vào lớp Lý và lớp Hóa gấp 5 lần số học sinh chọn thi vào cả 3 lớp Toán, Lý và Hóa. Hỏi số học sinh chọn thi vào từng lớp là bao nhiêu?

CHUẨN BỊ THI VÀO ĐẠI HỌC

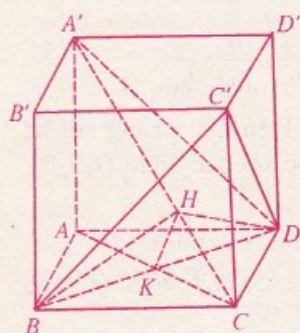
BẢN LUYỆN VỀ CÁCH GIẢI ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC MÔN TOÁN KHỐI A NĂM 2003

(tiếp theo kì trước)

ĐẶNG THANH HẢI – NGUYỄN ANH DŨNG

Câu III. 1. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính số đo của góc phẳng nhị diện $[B, A'C, D]$.

Hướng dẫn giải. Cách 1. $BD \perp AC \Rightarrow BD \perp A'C$ (ĐL ba đường vuông góc). Tương tự $DC' \perp A'C$. Suy ra $A'C \perp mp(BDC')$. Gọi H là giao điểm của $A'C$ với $mp(BDC')$ thì $A'C \perp BH$ và $A'C \perp DH$ nên góc phẳng nhị diện phải tìm là $\varphi = \widehat{BHD}$.



Vì $CB = CD = CC'$ nên $HB = HD = HC'$

$\Rightarrow H$ là tâm của $\triangle BDC'$ đều $\Rightarrow \widehat{BHD} = 120^\circ$.

Cách 2. Gọi H là hình chiếu của K trên $A'C$. Từ $A'C \perp KH$ và $BD \perp mp(AA'C)$ suy ra $A'C \perp mp(BHD)$ nên $CH \perp BH$ và $CH \perp DH \Rightarrow \varphi = \widehat{BHD}$.

• Tìm $\cos \varphi$ dựa vào các hệ thức :

$$BD^2 = BH^2 + DH^2 - 2BH.DH.\cos \varphi$$

$$BH.A'C = A'B.BC = A'D.DC = DH.A'C ; \text{ hoặc}$$

• Tìm φ từ $BD \perp mp(AA'C) \Rightarrow BD \perp HK$ rồi

$$\text{tính } \sin(\varphi/2) = \frac{KD}{HD} = \frac{(CD\sqrt{2})/2}{(CD\sqrt{2})/\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Câu III. 2. Trong không gian với hệ tọa độ Đêcac vuông góc $Oxyz$ cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có A trùng với gốc của hệ tọa độ, $B(a; 0; 0)$, $D(0; a; 0)$, $A'(0; 0; b)$

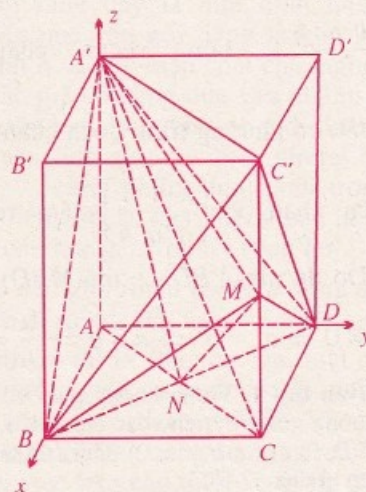
a) Tính thể tích khối tứ diện $BDA'M$ theo a và b .

b) Xác định tỉ số $\frac{a}{b}$ để hai mặt phẳng $(A'BD)$ và (MBD) vuông góc với nhau.

Hướng dẫn giải. a) Cách 1.

$$\text{Đặt } S = S_{BDA'}, V = V_{ABCD.A'B'C'D'} = a^2b$$

Kí hiệu h, h_1, h_2 lần lượt là khoảng cách từ các điểm M, C, C' đến $mp(BDA')$ thì $h = (h_1 + h_2)/2$.



$$\begin{aligned} \text{Từ đó } V_{BDA'M} &= \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}Sh_1 + \frac{1}{3}Sh_2 \right) \\ &= \frac{1}{2}(V_{BDA'C} + V_{BDA'C'}) \end{aligned} \quad (1)$$

$$\text{Ta có } V_{BDA'C} = \frac{1}{3}AA'.S_{BDC} = \frac{V}{6} = \frac{a^2b}{6} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} V_{BDA'C'} &= V - (V_{AA'BD} + V_{BB'A'C} + V_{CC'BD} + V_{DD'A'C}) \\ &= V - \frac{4V}{6} = \frac{V}{3} = \frac{a^2b}{3} \quad (3) \end{aligned}$$

$$\text{Thay (2), (3) vào (1) được } V_{BDA'M} = \frac{a^2b}{4}.$$

$$\text{Cách 2. } M(a; a; b/2) \Rightarrow \overrightarrow{BM} = \left(0, a, \frac{b}{2}\right);$$

$$\overrightarrow{DM} = \left(a, 0, \frac{b}{2}\right); \overrightarrow{AM} = \left(a, a, \frac{b}{2}\right).$$

$$\text{Từ đó } \vec{u} = [\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{DM}] = \left(\frac{ab}{2}, \frac{ab}{2}, -a^2\right)$$

$$\Rightarrow V_{BDA'M} = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{DM}] \cdot \overrightarrow{AM}| = \frac{a^2b}{4}$$

b) *Cách 1.* Gọi N là trung điểm của BD thì $A'N \perp BD$ (do $A'B = A'D = \sqrt{a^2 + b^2}$) và $MN \perp BD$ (do $MB = MD = \sqrt{a^2 + \frac{b^2}{4}}$). Suy ra $\widehat{MNA'}$ là góc phẳng nhị diện $[M, BD, A']$. Vậy $\text{mp}(A'BD) \perp \text{mp}(MBD) \Leftrightarrow \widehat{MNA'} = 90^\circ \Leftrightarrow MA'^2 = MN^2 + NA'^2 \Leftrightarrow MC'^2 + C'A'^2 = (MC'^2 + CN^2) + (NA'^2 + AA'^2) \Leftrightarrow a^2 = b^2 \Leftrightarrow \frac{a}{b} = 1$ (do $a > 0, b > 0$).

Cách 2. $\text{mp}(MBD)$ nhận $\vec{u} = [\vec{BM}, \vec{DM}] = \left(\frac{ab}{2}, \frac{ab}{2}, -a^2\right)$ làm vector pháp tuyến.

$\text{Mp}(A'BD)$ có phương trình đoạn chắn $\frac{x}{a} + \frac{y}{a} + \frac{z}{b} = 1$ nên nhận $\vec{v} = \left(\frac{1}{a}, \frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right)$ làm vector pháp tuyến. Do đó $\text{mp}(A'BD) \perp \text{mp}(MBD) \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = b \Leftrightarrow \frac{a}{b} = 1$.

Bài luyện tập 1. Trong không gian với hệ tọa độ Đề-các vuông góc $Oxyz$ cho các điểm $A(a, 0, 0), B(0, b, 0), C(0, 0, c)$ ($a, b, c > 0$). Gọi I là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$.

1) Tính thể tích khối tứ diện $IABC$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng AB, IC theo a, b, c .

2) Mặt phẳng (P) thay đổi cắt các đoạn OA, OB, OC, OI lần lượt tại A_1, B_1, C_1, I_1 . Hãy xác định tọa độ của I_1 sao cho $\frac{OA}{OA_1} + \frac{OB}{OB_1} + \frac{OC}{OC_1} = 2003$.

Câu V. Cho x, y, z là ba số dương và $x + y + z \leq 1$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt{y^2 + \frac{1}{y^2}} + \sqrt{z^2 + \frac{1}{z^2}} \geq \sqrt{82} \quad (*)$$

Hướng dẫn giải. Nhận xét. Giả thiết của đề bài gợi ý có thể sử dụng các bất đẳng thức (BĐT) sau (chỉ xét khi x, y, z đều dương):

$$1) x + y + z \leq 1 \quad (1)$$

$$2) (x + y + z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \geq 9$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{x + y + z} \geq 9 \quad (2)$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z$.

Chứng minh BĐT bên trái dựa vào BĐT Cô-si Bu-nhi-a-côp-xki hoặc khai triển rồi sử dụng BĐT Cô-si cho 2 số.

$$3) xyz \leq \left(\frac{x + y + z}{3} \right)^3 \leq \frac{1}{3^3} \quad (3)$$

$$4) (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geq (ac + bd)^2 \quad (4)$$

Đẳng thức xảy ra khi $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$.

Chứng minh (4) bằng cách khai triển rồi sử dụng BĐT Cô-si cho 2 số.

$$5) \sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \sqrt{a_2^2 + b_2^2} + \sqrt{a_3^2 + b_3^2} \geq \sqrt{(a_1 + a_2 + a_3)^2 + (b_1 + b_2 + b_3)^2} \quad (5)$$

Đẳng thức xảy ra khi $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$.

Chứng minh. Cách 1. Trên mặt phẳng với hệ tọa độ Đề-các vuông góc xét các điểm $O(0, 0), M(a_1, b_1), N(a_2, b_2), P(a_3, b_3)$.

Từ $OM + MN + NP \geq OP$ suy ra (5)

Cách 2. Đặt vế trái của (5) là T , bình phương T và sử dụng (4) được:

$$\begin{aligned} T^2 &\geq a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + 2(a_1a_2 + b_1b_2) \\ &\quad + 2(a_1a_3 + b_1b_3) + 2(a_2a_3 + b_2b_3) \\ &= (a_1 + a_2 + a_3)^2 + (b_1 + b_2 + b_3)^2 \end{aligned}$$

6) Đặt vế trái của (*) là S thì $(*) \Leftrightarrow S \geq \sqrt{82} \Leftrightarrow S^2 \geq 82$. Ta thử tìm giá trị x, y, z để có dấu bằng xảy ra ở (*). Thay $x = y = z > 0$ vào (*)

$$\text{được } x^2 + \frac{1}{x^2} = \frac{82}{9} \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \quad (= y = z) \quad (6) \text{ và}$$

thỏa mãn $x + y + z \leq 1$. Trong quá trình giải cần luôn chú ý nếu sử dụng BĐT nào thì dấu bằng của BĐT xảy ra đều phải thỏa mãn (6) để đảm bảo sẽ có dấu bằng xảy ra ở (*).

Xin trình bày tóm tắt một số cách chứng minh BĐT (*).

Hướng giải 1. Sử dụng BĐT Cô-si Bu-nhi-a-côp-xki.

Cách 1a. Sử dụng (4) có

$$\sqrt{82} \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} = \sqrt{(1+81) \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right)} \geq x + \frac{9}{x}$$

Đẳng thức xảy ra khi $\frac{1}{\sqrt{81}} = x^2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$ thỏa mãn (6). Tương tự với y, z . Ta có

$$\sqrt{82}S \geq (x+y+z) + 9\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \quad (7)$$

• Từ (7) sử dụng (2), (1) có:

$$\sqrt{82}S \geq 81(x+y+z) + 9\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) - 80(x+y+z)$$

$$\geq 2.9.3. \sqrt{(x+y+z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)} - 80 \geq 162 - 80 = 82$$

• Hoặc từ (7) sử dụng (2), (1) có:

$$\begin{aligned} \sqrt{82}S &\geq x+y+z + \frac{81}{x+y+z} = \\ &= (x+y+z) + \frac{1}{(x+y+z)} + \frac{80}{x+y+z} \geq 2 + 80 = 82. \end{aligned}$$

Trong các biến đổi trên đẳng thức xảy ra thì đều thỏa mãn (6).

Cách 1b. Sử dụng (4) có

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{82}}{3} \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} &= \sqrt{\left(\frac{1}{9} + 9\right)\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)} \\ &\geq \frac{x}{3} + \frac{3}{x} = \left(\frac{x}{3} + \frac{3}{81x}\right) + \frac{80}{27x} \geq \frac{2}{9} + \frac{80}{27x}. \end{aligned}$$

Hai dấu đẳng thức đều xảy ra khi $x^2 = \frac{1}{9}$,
thỏa mãn (6). Tương tự với y, z . Từ đó và sử dụng (2) có

$$\frac{\sqrt{82}}{3}S \geq \frac{2.3}{9} + \frac{80}{27}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geq \frac{2}{9} + \frac{80.9}{27} = \frac{82}{3} \Rightarrow S \geq \sqrt{82}.$$

Bài luyện tập 2. Cho ba số dương x, y, z thỏa mãn $x+y+z \leq 1$. Chứng minh rằng với hai số thực không âm bất kì $\frac{a}{b} \leq 81$ ta có

$$\sqrt{ax^2 + \frac{b}{x^2}} + \sqrt{ay^2 + \frac{b}{y^2}} + \sqrt{az^2 + \frac{b}{z^2}} \geq \sqrt{a+81b}$$

Bạn hãy tổng quát hóa đối với $x_1+x_2+\dots+x_n \leq 1$

Hướng giải 2. Sử dụng BĐT Cô-si cho nhiều

số: $x^2 + \frac{1}{x^2} = x^2 + \frac{1}{81x^2} + \dots + \frac{1}{81x^2} \geq$

$$82. \sqrt[82]{\frac{x^2}{(81x^2)^{81}}} = \frac{82}{\sqrt[41]{9^{81}x^{80}}}$$

Đẳng thức xảy ra khi $x^2 = \frac{1}{81x^2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$,
thỏa mãn (6). Tương tự đối với y, z . Sử dụng BĐT Cô-si cho 3 số và (3) có:

$$S \geq \frac{\sqrt{82}}{\sqrt[41]{3^{81}}} \left(\frac{1}{\sqrt[41]{x^{40}}} + \frac{1}{\sqrt[41]{y^{40}}} + \frac{1}{\sqrt[41]{z^{40}}} \right)$$

$$\geq \frac{\sqrt{82}}{3 \sqrt[41]{3^{40}}} \cdot \frac{3}{\sqrt[41]{(xyz)^{40}}} = \sqrt{82}$$

Bài luyện tập 3. Cho 3 số dương x, y, z thỏa mãn $x+y+z \leq 1$. Chứng minh rằng với số tự nhiên $n > 1$ bất kì có:

a) $\sqrt[n]{x^2 + \frac{1}{x^2}} + \sqrt[n]{y^2 + \frac{1}{y^2}} + \sqrt[n]{z^2 + \frac{1}{z^2}} \geq \sqrt[n]{82.3^{n-2}}$

b) $\sqrt{x^n + \frac{1}{x^n}} + \sqrt{y^n + \frac{1}{y^n}} + \sqrt{z^n + \frac{1}{z^n}} \geq \sqrt{(9^n + 1)3^{2-n}}$

Bạn hãy tổng quát hóa với $x_1+x_2+\dots+x_n \leq 1$

Hướng giải 3. Đặt $R = (x+y+z)^2 + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)^2$.

Sử dụng BĐT (5) có $S \geq \sqrt{R}$. Ta cần chứng minh $R \geq 82$ (8)

Đẳng thức xảy ra khi

$$x^2 = y^2 = z^2 \Leftrightarrow x = y = z \quad (9)$$

Cách 3a. Sử dụng BĐT Cô-si cho 2 số và (1), (2) có:

$$\begin{aligned} R &= 81(x+y+z)^2 + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)^2 - 80(x+y+z)^2 \\ &\geq 18(x+y+z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) - 80 \geq 162 - 80 = 82 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ (8). Đẳng thức xảy ra khi $9(x+y+z) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$, kết hợp với (9) thì thỏa mãn (6).

Cách 3b. Đặt $t = (x+y+z)^2$. Sử dụng (1), (2) có: $R \geq t + \frac{81}{t} = \left(t + \frac{1}{t}\right) + \frac{80}{t} \geq 2 + 80 = 82 \Rightarrow$ (8)

Đẳng thức xảy ra khi $t = \frac{1}{t} \Leftrightarrow t^2 = 1$. Kết hợp với (9) thì thỏa mãn (6).

Cách 3c. Đặt $a = \frac{1}{x} - x, b = \frac{1}{y} - y, c = \frac{1}{z} - z$.

Sử dụng (1), (2) có $a+b+c \geq 8$. Dễ thấy $x^2 + \frac{1}{x^2} = a^2 + 2$. Tương tự với y, z . Sử dụng BĐT (5) có:

(Xem tiếp trang 7)

TÌM HIỂU SÂU THÊM TOÁN HỌC SƠ CẤP**KHAI THÁC MỘT BẤT ĐẲNG THỨC HÌNH HỌC**NGÔ QUANG VIỆT
(GV THPT NK Quảng Bình)

Khi nghiên cứu hình học ta thường phải xét một bài toán từ nhiều góc độ khác nhau để cố tìm ra một cái gì mới trong những cái đã biết rồi. Nếu gặp bài toán với tính khái quát cao thì khi xét những trường hợp riêng ta gặp lại một số kết quả đã biết, hoặc cả kết quả mới, nhưng chúng có những mối liên hệ với nhau, lúc đó ta có một cách nhìn các sự kiện riêng phong phú, đa dạng trong một thể thống nhất. Xin minh họa bằng các ví dụ dưới đây khi khai thác một bất đẳng thức (BĐT) hình học.

I. Bài toán gốc

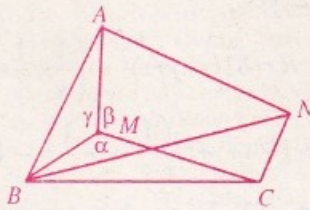
Giả sử điểm M nằm trong tam giác ABC . Đặt $\alpha = \widehat{BMC}$, $\beta = \widehat{CMA}$, $\gamma = \widehat{AMB}$. Chứng minh rằng với điểm N bất kì (nằm trong mặt phẳng ABC) luôn có bất đẳng thức:

$$NA \sin \alpha + NB \sin \beta + NC \sin \gamma \geq MA \sin \gamma + MB \sin \beta + MC \sin \gamma \quad (1)$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi N trùng với M

Chứng minh.

(của TS Nguyễn Minh Hà: bài tập 5.34 trong quyển sách *Toán nâng cao Hình học 10*, tác giả: Nguyễn Minh Hà, Nguyễn Xuân Bình, NXB Giáo dục).



$$\begin{aligned} \text{Biến đổi } NA &= \frac{NA \cdot MA}{MA} \geq \frac{\overrightarrow{NA} \cdot \overrightarrow{MA}}{MA} = \\ &= \frac{(\overrightarrow{NM} + \overrightarrow{MA}) \cdot \overrightarrow{MA}}{MA} = \frac{\overrightarrow{NM} \cdot \overrightarrow{MA}}{MA} + MA \\ \text{Tương tự đối với } NB \text{ và } NC, \text{ từ đó} \\ NA \sin \alpha + NB \sin \beta + NC \sin \gamma &\geq \\ &\geq \overrightarrow{NM} \left(\frac{\overrightarrow{MA}}{MA} \sin \alpha + \frac{\overrightarrow{MB}}{MB} \sin \beta + \frac{\overrightarrow{MC}}{MC} \sin \gamma \right) + \\ &+ (MA \sin \alpha + MB \sin \beta + MC \sin \gamma) \quad (2) \\ \text{Vì } \frac{\overrightarrow{MA}}{MA} \sin \alpha + \frac{\overrightarrow{MB}}{MB} \sin \beta + \frac{\overrightarrow{MC}}{MC} \sin \gamma \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{MA \cdot MB \cdot MC} (S_{MBC} \cdot \overrightarrow{MA} + S_{MCA} \cdot \overrightarrow{MB} + S_{MAB} \cdot \overrightarrow{MC}) = \vec{0} \quad (3)$$

(Biểu thức vector trong ngoặc bằng $\vec{0}$ đã có trong nhiều tài liệu, bạn đọc tự chứng minh). Từ (2) và (3) suy ra điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi $NA \cdot MA = \overrightarrow{NA} \cdot \overrightarrow{MA}$, $NB \cdot MB = \overrightarrow{NB} \cdot \overrightarrow{MB}$, $NC \cdot MC = \overrightarrow{NC} \cdot \overrightarrow{MC} \Leftrightarrow N$ trùng với M .

II. Khai thác bài toán gốc trong hình học phẳng

Khi cho M (nằm trong $\triangle ABC$) hoặc N trùng với các điểm đặc biệt trong $\triangle ABC$ ta được các bất đẳng thức trong các trường hợp riêng. Kí hiệu $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, $a + b + c = 2p$ và m_a, m_b, m_c là độ dài ba đường trung tuyến xuất phát từ A, B, C . Gọi G, H, I, Q, R lần lượt là trọng tâm, trực tâm, tâm đường tròn nội tiếp, tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.

1) Nếu tam giác ABC có các góc đều nhỏ hơn 120° thì tồn tại điểm T (điểm Toricelli) nằm trong tam giác mà nhìn các cạnh AB, BC, CA cùng dưới một góc 120° . Lúc đó với điểm N bất kì ta có:

$$NA + NB + NC \geq TA + TB + TC$$

2) Xét $\triangle ABC$ bất kì, cho M trùng với tâm I . Lúc đó dễ thấy $\sin \alpha = \cos(A/2)$, $\sin \beta = \cos(B/2)$, $\sin \gamma = \cos(C/2)$ và vế phải của (1) trở thành

$$IA \cos(A/2) + IB \cos(B/2) + IC \cos(C/2) = p$$

2a) Khi cho N trùng với G có BĐT:

$$m_a \cos(A/2) + m_b \cos(B/2) + m_c \cos(C/2) \geq 3p/4$$

2b) Khi cho N trùng với tâm Q có BĐT

$$\cos(A/2) + \cos(B/2) + \cos(C/2) \geq p/R$$

2c) Khi cho N trùng với H có BĐT:

$$\cos A \cos(A/2) + \cos B \cos(B/2) + \cos C \cos(C/2) \geq p/2R$$

3) Xét $\triangle ABC$ có ba góc nhọn, cho M trùng với trực tâm H . Lúc đó $\sin \alpha = \sin A$, $\sin \beta = \sin B$,

$\sin\gamma = \sin C$ và $HA\sin\alpha = 2R \sin A \cos A = a \cdot \cos A$.
Tương tự $HB\sin\beta = b \cdot \cos B$, $HC\sin\gamma = c \cdot \cos C$.
Vế phải của (1) trở thành $a \cdot \cos A + b \cdot \cos B + c \cdot \cos C$.

3a) Khi cho N trùng với tâm I có BĐT :

$$(b+c-a)\sin(A/2) + (a+c-b)\sin(B/2) + (a+b-c)\sin(C/2) \geq a \cdot \cos A + b \cdot \cos B + c \cdot \cos C.$$

3b) Khi cho N trùng với tâm Q có BĐT :

$$a \cdot \cos A + b \cdot \cos B + c \cdot \cos C \leq p$$

3c) Khi cho N trùng với G có BĐT :

$$2(m_a \cdot \sin A + m_b \cdot \sin B + m_c \cdot \sin C) \geq 3(a \cdot \cos A + b \cdot \cos B + c \cdot \cos C)$$

4) Xét $\triangle ABC$ có ba góc nhọn, cho M trùng với tâm Q . Lúc đó vế phải của (1) trở thành $R(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C)$

4a) Khi cho N trùng với G có BĐT :

$$2(m_a \cdot \sin 2A + m_b \cdot \sin 2B + m_c \cdot \sin 2C) \geq 3R(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C)$$

4b) Khi cho N trùng với tâm I có BĐT :

$$(b+c-a)\cos A \sin(A/2) + (a+c-b)\cos B \sin(B/2) + (a+b-c)\cos C \sin(C/2) \geq (R/2)(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C).$$

4c) Khi cho N trùng với trực tâm H có BĐT :

$$2(\cos A \sin 2A + \cos B \sin 2B + \cos C \sin 2C) \geq \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C$$

5) Cho điểm M nằm trong $\triangle ABC$ và điểm N bất kì. Ta có

$$S_a = S_{MBC} = (MB \cdot MC \cdot \sin \alpha) / 2$$

Tương tự với $S_b = S_{MCA}$, $S_c = S_{MAB}$.

Nhân theo từng vế của (1) ở bài toán gốc được BĐT :

$$S_a \cdot MA \cdot NA + S_b \cdot MB \cdot NB + S_c \cdot MC \cdot NC \geq S_a \cdot MA^2 + S_b \cdot MB^2 + S_c \cdot MC^2$$

5a) Khi M trùng với trọng tâm G thì $S_a = S_b = S_c = (1/3)S_{ABC}$ nên có BĐT :

$$GA \cdot NA + GB \cdot NB + GC \cdot NC \geq GA^2 + GB^2 + GC^2$$

5b) Khi N trùng với tâm Q có BĐT :

$$R(GA + GB + GC) \geq GA^2 + GB^2 + GC^2 \Rightarrow 2R(m_a + m_b + m_c) \geq a^2 + b^2 + c^2.$$

5c) Khi N trùng với trực tâm H có BĐT :

$$4R(m_a \cdot \cos A + m_b \cdot \cos B + m_c \cdot \cos C) \geq a^2 + b^2 + c^2$$

III. Khai thác bài toán gốc trong không gian

Xin trình bày tóm tắt những kết quả tương tự trong không gian.

Bài toán gốc. Giả sử điểm M nằm trong tứ diện $ABCD$. Đặt $V_a = V_{MBCD}$, $V_b = V_{MACD}$, $V_c = V_{MABD}$, $V_d = V_{MABC}$. Với điểm N bất kì luôn có BĐT :

$$V_a \cdot MA \cdot NA + V_b \cdot MB \cdot NB + V_c \cdot MC \cdot NC + V_d \cdot MD \cdot ND \geq V_a \cdot MA^2 + V_b \cdot MB^2 + V_c \cdot MC^2 + V_d \cdot MD^2.$$

Từ bài toán gốc trên ta có các BĐT sau, trong đó G, V, R theo thứ tự là trọng tâm, thể tích tứ diện $ABCD$ và bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

$$1) R(GA + GB + GC + GD) \geq GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2$$

$$2) V_a \cdot MA + V_b \cdot MB + V_c \cdot MC + V_d \cdot MD \leq R \cdot V$$

Việc tìm thêm một số bất đẳng thức nữa xin dành cho bạn đọc.

Một số bất đẳng thức trong hình học phẳng nêu trên đã có ở bài viết *Một bất đẳng thức mới trong tam giác* của tác giả Nguyễn Thế Phương đăng trong THPT số 225 (3/1996).

BÀN LUẬN...

(Tiếp trang 5)

$$S = \sqrt{a^2 + 2} + \sqrt{b^2 + 2} + \sqrt{c^2 + 2} \geq \sqrt{(a+b+c)^2 + (3\sqrt{2})^2} \geq \sqrt{8^2 + 18} = \sqrt{82}.$$

Các đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 8/3 \Rightarrow x = y = z = 1/3$.

Bài luyện tập 4. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2} + \sqrt{x_3^2 + y_3^2}$, trong đó các số thực dương x, y, z thỏa mãn một trong các điều kiện sau :

$$a) (x_1 + x_2 + x_3)(y_1 + y_2 + y_3) = 1$$

$$b) x_1 + x_2 + x_3 + y_1 + y_2 + y_3 = 1.$$

Bài toán BĐT này còn một số cách giải khác. Xin cảm ơn các bạn : Nguyễn Mạnh Hùng, ĐH Thủy Lợi, Hà Nội, Đào Mạnh Thắng, GV THPT Hùng Vương, Phú Thọ, Đoàn Văn Soạn, GV THPT DL Việt Yên, Bắc Giang, Nguyễn Công Chuẩn, K41A2 Toán ĐH Vinh, Nghệ An đã gửi về nhiều cách giải bài BĐT và chúng tôi đã trình bày tổng hợp trong bài này.

KẾT QUẢ KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA MÔN TOÁN THPT - NĂM HỌC 2002-2003

NGUYỄN KHẮC MINH

(Vụ Trung học Phổ thông - Bộ GD&ĐT)

Kì thi chọn học sinh giỏi quốc gia môn Toán THPT năm học 2002 - 2003 được tiến hành trong hai ngày 12/3 và 13/3/2003. Tham dự kì thi này có 260 học sinh ở Bảng A và 257 học sinh ở Bảng B. Trong mỗi ngày thi, mỗi thí sinh phải làm 3 bài toán trong thời gian 180 phút. Điểm tối đa của mỗi ngày thi là 20 điểm.

Căn cứ quy chế thi chọn học sinh giỏi quốc gia và căn cứ điểm thi của các thí sinh, Hội đồng thi chọn học sinh giỏi quốc gia THPT năm học 2002 - 2003 đã quyết định trao giải cho 82 thí sinh ở Bảng A và 65 thí sinh ở Bảng B. Cụ thể như sau:

BẢNG A

- **Giải nhất:** Không có.

• **Giải Nhì (05):** Nguyễn Kim Sơn (Khối THPT chuyên Toán-Tin, ĐHSPT Hà Nội); Võ Văn Thành (Khối THPT chuyên Toán-Tin, ĐHKHTN-ĐHQG Hà Nội); Nguyễn Tiến Yết (THPT chuyên Nguyễn Huệ, Hà Tây); Nguyễn Minh Trường (THPTNK Trần Phú, Hải Phòng) và Vũ Nhật Huy (THPT chuyên Vĩnh Phúc).

• **Giải Ba (47):** Lê Hoàng Phước, Trần Thị Thùy Trang (THPT Lê Quý Đôn, Đà Nẵng); Nguyễn Hoàng Khanh, Lê Phương (THPT Lương Thế Vinh, Đồng Nai); Vũ Trọng Đại (THPT Chuyên Hà Nam); Trần Minh Tú (THPT Hà Nội-Amsterdam, Hà Nội); Vương Quốc Huy, Nghiêm Ngọc Phương, Đỗ Văn Tiếp, Vũ Xuân Quỳnh (THPT chuyên Nguyễn Huệ, Hà Tây); Đồng Quang Diệp, Phạm Huy Hoàng, Nguyễn Thành Nam, Phạm Thành Trung, Vũ Anh Tuấn (THPT Nguyễn Trãi, Hải Dương); Nguyễn Đình Hiếu, Lưu Minh Tùng (THPTNK Trần Phú, Hải Phòng); Đỗ Đức Hải, Phạm Ngọc Sáng, Đỗ Đức Thuận, Nguyễn Thành Vinh (THPT Chuyên Hưng Yên); Lại Nguyên Mai Ngân, Nguyễn Tiến Việt (THPT Lê Quý Đôn, Khánh Hòa); Phùng Văn Doanh, Bùi Hoàng Giang, Trương Hoàng Hiếu, Nguyễn Quang Huy (A), Nguyễn Quang Huy (B), Nguyễn Đăng Hợp (THPT Lê Hồng Phong, Nam Định); Lê Hùng Việt Bảo, Dương Thanh Tùng (Khối THPT Chuyên Toán-Tin, ĐHKHTN-ĐHQG Hà Nội); Phạm Thái Khánh Hiệp, Đậu Minh Hoàng, Lê Minh Hoàng, Trần Mạnh Kế (Khối THPT Chuyên Toán-Tin ĐH Vinh); Nguyễn Lâm Hưng, Trần Võ Huy, Nguyễn Đăng Khoa, Nguyễn Thành Nhân (PTNK ĐHQG Tp. Hồ Chí Minh).

• **Giải Khuyến khích (30):** Nguyễn Tiến Quảng, Phạm Thái Sơn (THPTNK Hàn Thuyên, Bắc Ninh); Nguyễn Văn Vinh, Huỳnh Anh Vũ (THPT Lê Quý Đôn, Đà Nẵng); Nguyễn Tiến Huy

(THPT Lương Thế Vinh, Đồng Nai); Trần Quang Dũng, Nguyễn Hữu Quang (THPT Chuyên Hà Nam); Vương Tuấn Anh, Lê Bảo Khánh (THPT chuyên Nguyễn Huệ, Hà Tây); Lê Quang Hòa (THPT Nguyễn Trãi, Hải Dương); Trần Đông, Lê Quang Huy, Nguyễn Quang Khánh, Phạm Huy Tiến (THPTNK Trần Phú, Hải Phòng); Vũ Trung Đức (THPT Chuyên Hưng Yên); Trần Mạnh Thắng (THPT Lê Hồng Phong, Nam Định); Nguyễn Thị Nhung (THPT Phan Bội Châu, Nghệ An); Hoàng Ngọc Minh (THPT Chuyên Hùng Vương, Phú Thọ); Đặng Huy Hoàng (THPT Chuyên Hạ Long, Quảng Ninh); Lê Vĩ (THPT Chuyên Thái Bình); Trần Thái Sơn, Bùi Mạnh Tiến, Nguyễn Thị Lê Trang (THPT Chuyên Thái Nguyên); Trần Bắc, Chu Văn Sá, Nguyễn Thành Trung (THPT Chuyên Vĩnh Phúc); Phạm Tiến Dũng, Vũ Quốc Mỹ (Khối THPT Chuyên Toán-Tin, ĐHKHTN-ĐHQG Hà Nội); Nguyễn Quang Huy, Nguyễn Thành Vinh (Khối THPT Chuyên Toán-Tin, ĐH Vinh).

BẢNG B

• **Giải nhất (01):** Nguyễn Minh Hải (THPT Trần Hưng Đạo, Bình Thuận).

• **Giải Nhì (04):** Trương Hồng Minh (THPT Chuyên Bạc Liêu); Lê Phi Hùng (THPT Chuyên Nguyễn Du, Đắk Lắk); Lê Vũ Hoàng Minh, Nguyễn Anh Tuấn (THPT Hùng Vương, Gia Lai).

• **Giải Ba (25):** Nguyễn Quốc Chiến (THPT Lê Quý Đôn, Bà Rịa - Vũng Tàu); Lê Tôn Chánh, Phạm Thành Phú, Nguyễn Hoài Phương, Nguyễn Đức Tâm, Tô Đình Trường (THPT Lê Quý Đôn, THPT An Nhơn 2 - Bình Định); Nguyễn Tiến Dũng, Khổng Hoài Hưng (THPT Bến Tre, Bến Tre); Đỗ Sử Hoàng Đông Phương (nữ, THPT Chuyên Nguyễn Du, Đắk Lắk); Lê Thanh Long (THPT Hùng Vương, Gia Lai); Bùi Thị Hương, Vũ Hữu Phương, Nguyễn Xuân Tuấn (THPT Hoàng Văn Thụ, Hòa Bình); Đỗ Hoàng Vũ (THPT Chuyên Kon Tum); Nguyễn Trường Kha, Phan Duy Nhất, Hoàng Vĩnh Thắng (THPT Thăng Long, THPT Bảo Lộc - Lâm Đồng); Nguyễn Trùng Thi, Phùng Trọng Thực, Nguyễn Tiến Hoàng Vũ (THPT Lương Văn Chánh, Phú Yên); Trần Công Nhật (THPT Huỳnh Ngọc Huệ, Quảng Nam); Phạm Quang Vinh (THPT Chuyên Tiến Giang); Đoàn Phúc Trí (THPT Chuyên Trà Vinh); Nguyễn Trường Ân (THPT Nguyễn Bình Khiêm, Vĩnh Long); Trần Bình Minh (THPT Nguyễn Tất Thành, Yên Bái).

OLYMPIC TOÁN HỌC QUỐC TẾ LẦN THỨ 44 (Tiếp bài 2)

... trao Huy chương (HC) cho 210 học sinh (trong tổng số 457 học sinh dự thi, đạt tỉ lệ 46%), với mức điểm cho mỗi loại HC như sau:

- Huy chương vàng (HCV): từ 29 đến 42 điểm;
- Huy chương bạc (HCB): từ 19 đến 28 điểm;
- Huy chương đồng (HCD): từ 13 đến 18 điểm.

Theo đó, có 37 học sinh đạt HCV, 69 học sinh đạt HCB và 104 học sinh đạt HCD. Tất cả các học sinh không đạt HC nhưng giải được trọn vẹn một bài toán thi đều được nhận Bằng danh dự (Certificate of Honorable Mention).

Kết quả của các học sinh Việt Nam như sau:

Stt	Họ và Tên	B1	B2	B3	B4	B5	B6	Tổng số	Giải
01	Lê Hùng Việt Bảo	7	7	7	7	7	7	42	HCV
02	Nguyễn Trọng Cảnh	7	7	7	7	7	7	42	HCV
03	Nguyễn Đăng Hợp	2	7	0	7	7	0	23	HCB
04	Nguyễn Đăng Khoa	7	5	0	7	7	0	26	HCB
05	Nguyễn Tiến Việt	1	5	0	7	7	1	21	HCB
06	Vũ Nhật Huy	2	7	0	7	2	0	18	HCD

Trong bảng tổng sắp không chính thức, Đoàn Việt Nam, với tổng số 172 điểm, *đứng ở vị trí thứ tư* sau các đoàn: Bungari (227 điểm), Trung Quốc (211 điểm), Hoa Kỳ (188 điểm). Xếp thứ tự từ thứ 5 đến thứ 10 là các đoàn: LB Nga (167 điểm), Hàn Quốc (157 điểm), Rumani (143 điểm), Thổ Nhĩ Kỳ (133 điểm), Nhật Bản (131 điểm), Hungari và Vương quốc Anh (cùng 128 điểm). Đoàn Bungari là đoàn có nhiều HCV nhất (6 HCV), tiếp theo là các đoàn: Trung Quốc (5 HCV), Hoa Kỳ (4 HCV), LB Nga (3 HCV); Canada, Hàn Quốc, Việt Nam (mỗi đoàn có 2 HCV); Anh, Argentina, Ba Lan, Belarus, Đài Loan, CHLB Đức, Hungari, Kazakstan, Nhật Bản, Rumani, Thái Lan, Thổ Nhĩ Kỳ và Ukraina (mỗi đoàn có 1 HCV).

Kết quả của đoàn Việt Nam tại IMO lần này đã được tất cả các đoàn bạn và các chuyên gia khoa học tham dự IMO 2003 JAPAN nồng nhiệt chúc mừng. Tối 20/7, Đại sứ Việt Nam tại Nhật Bản đã tiếp đoàn và chúc mừng kết quả của đoàn.

Lễ bế mạc IMO 2003 JAPAN được tổ chức trọng thể vào chiều ngày 18/7/2003. Tới dự lễ có Thái tử Nhật Bản và Bà Bộ trưởng Bộ Giáo dục-Văn hóa-Thể thao và Công nghệ Nhật Bản. Tại lễ bế mạc, GS. Hiroshi Noguchi, Trưởng ban tổ chức IMO 2003 JAPAN đã nói: "Trong kì thi này, tất cả đều chiến thắng; tất cả chúng ta đều làm nên một thắng lợi lớn, đó là cổ vũ và góp phần thúc đẩy sự phát triển không ngừng của phong trào học Toán trên toàn thế giới". Xin mượn lời của GS để kết thúc bài viết này.

• **Giải Khuyến khích (35):** Châu Thành Đức, Phan Hân Hữu (THPT Thoại Ngọc Hầu, An Giang); Bùi Hoàng Giang, Trương Công Định, Phạm Tự Quốc Sáng (THPT Vũng Tàu, Bà Rịa - Vũng Tàu); Phạm Bạch Tùng (THPT Chuyên Bạc Liêu); Trần Ngọc Trung (THPT Lê Quý Đôn, Bình Định); Nguyễn Phước Tài (THPT Trần Hưng Đạo, Bình Thuận); Trần Thế Vũ (THPT Bến Tre, Bến Tre); Mạch Nguyệt Minh, Lưu Anh Tuấn (THPT Lý Tự Trọng, Cần Thơ); Nguyễn Thị Thu Hằng, Nguyễn Hoài Phương, Nguyễn Bá Sơn (THPT Chuyên Nguyễn Du, Đắk Lắk); Phan Tuấn Hải (THPT TX Sa Đéc, Đồng Tháp); Trần Mạnh Hùng, Trần Quang Thọ (THPT Hoàng Văn Thụ, Hòa Bình); Đoàn Hồng Quảng (THPT Lê Quý Đôn, Lai Châu); Nguyễn Ngọc Hà, Đinh Thị Thu Hiền (THPT Chu Văn An, Lạng Sơn); Nguyễn

Mạnh Hùng (THPT Bảo Thắng 1, Lào Cai); Nguyễn Tố Na, Đỗ Lê Hải Thụy (THPT Thăng Long, Lâm Đồng); Lữ Hoàng Chinh (THPT Lê Quý Đôn, Long An); Huỳnh Lâm Linh, Phan Thành Nam, Ngô Thanh Nguyên (THPT Lương Văn Chánh, Phú Yên); Đoàn Quang Việt (THPT Đỗ Đăng Tuyển, Quảng Nam); Nguyễn Thế Long (THPT Chuyên Sơn La); Đỗ Vinh Quang, Trần Việt Tuấn (THPT Hoàng Lê Kha, Tây Ninh); Lữ Minh Thái (THPT Chuyên Tiến Giang); Phạm Quốc Đạt, Phạm Ngọc Hưng, Lê Anh Việt (THPT Nguyễn Tất Thành, Yên Bái).

Các học sinh đạt từ 25,5 điểm trở lên ở Bảng A và các học sinh đạt từ 33,5 điểm trở lên ở Bảng B được Bộ GD&ĐT cho phép tham dự Kì thi chọn học sinh vào đội tuyển Toán quốc gia dự thi Olympic Toán học quốc tế lần thứ 44 năm 2003.



ĐỀ RA KÌ NÀY

CÁC LỚP TRUNG HỌC CƠ SỞ

Bài T1/314. (Lớp 6). Tính $\frac{A}{B}$ biết

$$A = \frac{1}{2.32} + \frac{1}{3.33} + \dots + \frac{1}{n(n+30)} + \dots + \frac{1}{1973.2003}$$

$$B = \frac{1}{2.1974} + \frac{1}{3.1975} + \dots + \frac{1}{n(n+1972)} + \dots + \frac{1}{31.2003}$$

ĐỖ HỒNG HÀ
(GV THCS Đống Đa, Hà Nội)

Bài T2/314. (Lớp 7). Tìm giá trị của biểu thức $S = x^4 + y^4 + z^4$ biết $x + y + z = 0$ và $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

ĐỖ QUANG MINH
(SV Toán Lí 2002–2003, CĐSP Phú Yên)

Bài T3/314. Chứng minh rằng với số nguyên bất kì $n > 1$ luôn có

$$\frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}} < \sqrt{2}$$

BÙI VĂN VIỆN
(GV THPT chuyên Trần Đại Nghĩa, Tp. Hồ Chí Minh)

Bài T4/314. Giải phương trình

$$x^2 - 2x + 3 = \sqrt{2x^2 - x} + \sqrt{1 + 3x - 3x^2}$$

NGUYỄN VĂN HIẾN
(GV THCS Quỳnh Châu, Quỳnh Phụ, Thái Bình)

Bài T5/314. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\frac{a}{1+b-a} + \frac{b}{1+c-b} + \frac{c}{1+a-c}$ trong đó a, b, c là các số dương thỏa mãn $a + b + c = 1$.

CAO MINH QUANG
(SV Toán 01 K25 ĐH Cần Thơ)

Bài T6/314. Đường tròn tâm I bán kính r nội tiếp tam giác ABC . Một tiếp tuyến của đường tròn tâm I cắt đường tròn ngoại tiếp ΔABC tại M và N . Chứng minh rằng $MN > 2r$.

NGUYỄN DŨNG
(SV K49 khoa Toán Tin, ĐHSP Hà Nội)

Bài T7/314. Cho hình thoi $ABCD$ có $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Lấy điểm P trên đường thẳng AB (P khác A, B). Các đường thẳng CP và DA cắt nhau tại E . Các đường thẳng DP và BE cắt nhau tại M . Tìm quỹ tích những điểm M khi P di chuyển trên đường thẳng AB .

VI QUỐC DŨNG
(Thái Nguyên)

CÁC LỚP TRUNG HỌC PHỔ THÔNG

Bài T8/314. Cho số nguyên $k \geq 2$. Chứng minh rằng $(k^{2003})!$ chia hết cho

$$(k!)(1 + k + k^2 + \dots + k^{2002})$$

trong đó kí hiệu $n! = 1.2.3 \dots n$

LÊ QUANG NĂM
(Khoa Toán Tin, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội)

Bài T9/314. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $x^3 + y^3 + (9 - x - y)^3$ trong đó cặp số nguyên dương x, y thỏa mãn các điều kiện $y \leq x \leq 5$,

$$x + y \leq 8 \text{ và } y + \frac{x+1}{2} \geq 5.$$

NGUYỄN VĂN MẬU
(ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội)

Bài T10/314. Các hàm số tuần hoàn $f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ và $g(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x)) = 0$. Chứng minh rằng $f(x) = g(x)$ với mọi số thực x .

NGUYỄN MINH ĐỨC
(Viện Công nghệ thông tin)

Bài T11/314. Gọi AD, BE, CF là các đường cao của tam giác nhọn ABC . Gọi R và r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC và DEF . Chứng minh rằng :

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 + \frac{r}{R}$$

PHẠM KIM THOA
(Kiến Xương, Thái Bình)

Bài T12/314. Gọi S_A, S_B, S_C, S_D lần lượt là diện tích các mặt đối diện với các đỉnh A, B, C, D của tứ diện $ABCD$. Kí hiệu độ lớn các góc nhị diện cạnh $BC, DA; AC, BD; AB, CD$ theo thứ tự là $\alpha, \alpha'; \beta, \beta'; \gamma, \gamma'$. Chứng minh hệ thức :

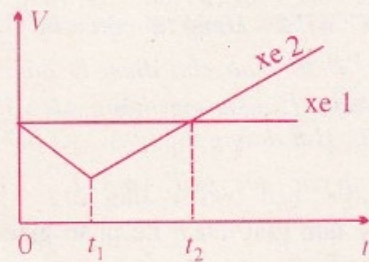
$$S_A^2 + S_B^2 + S_C^2 + S_D^2 = 2T \text{ với}$$

$$T = S_A \cdot S_D \cos \alpha + S_B \cdot S_D \cos \beta + S_C \cdot S_D \cos \gamma + S_B \cdot S_C \cos \alpha' + S_A \cdot S_C \cos \beta' + S_A \cdot S_B \cos \gamma'$$

NGUYỄN HỒNG QUÂN
(GV THPT Hồng Ngự 2, Đồng Tháp)

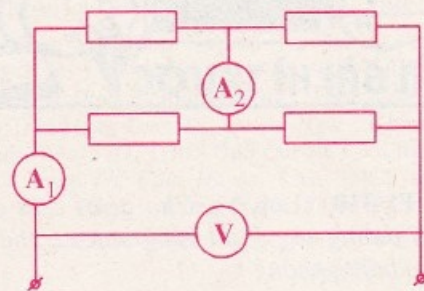
CÁC ĐỀ VẬT LÝ

Bài L1/314. Hình vẽ biểu thị sự phụ thuộc vào thời gian của vận tốc hai xe chuyển động trên cùng một đường thẳng và cùng vị trí ban đầu với t_1, t_2 là những thời điểm đã biết. Hỏi sau khoảng thời gian bao lâu tính từ khi 2 xe bắt đầu chuyển động thì chúng gặp nhau.



NGUYỄN NHẬT MINH
(Hà Nội)

Bài L2/314. Trong sơ đồ mạch điện ở hình bên, ampe kế A_2 chỉ 2A, vôn kế V chỉ 10V. Các



điện trở có giá trị là $1\Omega, 2\Omega, 3\Omega$ và 4Ω . Hỏi ampe kế A_1 chỉ bao nhiêu và vị trí của các điện trở như thế nào? Cho biết dụng cụ đo là lí tưởng.

TÔ GIANG st
(Hà Nội)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/314. (for 6th grade): Calculate $\frac{A}{B}$, where

$$A = \frac{1}{2.32} + \frac{1}{3.33} + \dots + \frac{1}{n(n+30)} + \dots + \frac{1}{1973.2003}$$

$$B = \frac{1}{2.1974} + \frac{1}{3.1975} + \dots + \frac{1}{n(n+1972)} + \dots + \frac{1}{31.2003}$$

T2/314. (for 7th grade). Find the value of the expression $S = x^4 + y^4 + z^4$, knowing that $x + y + z = 0$ and $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

T3/314. Prove that for every integer $n > 1$,

$$\frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}} < \sqrt{2}$$

T4/314. Solve the equation

$$x^2 - 2x + 3 = \sqrt{2x^2 - x} + \sqrt{1 + 3x - 3x^2}$$

T5/314. Find the least value of the expression

$$\frac{a}{1+b-a} + \frac{b}{1+c-b} + \frac{c}{1+a-c} \text{ where } a, b, c \text{ are positive numbers satisfying the condition } a+b+c=1.$$

T6/314. A tangent to the incircle with center I and with radius r of a triangle ABC cuts the circumcircle of $\triangle ABC$ at M and N . Prove that $MN > 2r$.

T7/314. Let be given a rhombus $ABCD$ with $\widehat{BAD} = 60^\circ$. P is a point on the line AB , distinct from A and B . The lines CP and DA intersect at

E . The lines DP and BE intersect at M . Find the locus of M when P moves on the line AB .

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T8/314. Let be given an integer $k \geq 2$. Prove that $(k^{2003})!$ is divisible by $(k!)(1 + k + k^2 + \dots + k^{2002})$ where $n!$ denotes $1.2.3 \dots n$.

T9/314. Find the greatest value of the expression $x^3 + y^3 + (9 - x - y)^3$, where x, y are positive integers satisfying the conditions $y \leq x \leq 5, x + y \leq 8$ and $y + \frac{x+1}{2} \geq 5$.

T10/314. The periodic functions $f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ and $g(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfy the condition $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x)) = 0$. Prove that $f(x) = g(x)$ for every real number x .

T11/314. Let AD, BE, CF be the altitudes of an acute triangle ABC . Let R and r be respectively the circumradii of the triangles ABC and DEF . Prove that :

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 + \frac{r}{R}$$

T12/314. Let S_A, S_B, S_C, S_D be respectively the areas of the faces opposite to the vertices A, B, C, D of a tetrahedron $ABCD$. Denote the measures of the dihedral angles with sides $BC, DA; AC, BD; AB, CD$ respectively by $\alpha, \alpha'; \beta, \beta'; \gamma, \gamma'$. Prove the relation: $S_A^2 + S_B^2 + S_C^2 + S_D^2 = 2T$, where

$$T = S_A \cdot S_D \cos \alpha + S_B \cdot S_D \cos \beta + S_C \cdot S_D \cos \gamma + S_B \cdot S_C \cos \alpha' + S_A \cdot S_C \cos \beta' + S_A \cdot S_B \cos \gamma'$$



Bài T1/310. (Lớp 6). Cho a, b, c là các số nguyên dương tùy ý thì tổng sau có thể là số nguyên dương không :

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a}$$

Lời giải. $M = \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} >$
 $> \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{b+c+a} + \frac{c}{c+a+b} = \frac{a+b+c}{a+b+c} = 1$
 nên $M > 1$ (1)

$$M = \left(1 - \frac{b}{a+b}\right) + \left(1 - \frac{c}{b+c}\right) + \left(1 - \frac{a}{c+a}\right)$$

$$< 3 - \left(\frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{b+c+a} + \frac{a}{c+a+b}\right)$$

$$= 3 - 1 = 2$$
 (2)

Từ (1) và (2) có $1 < M < 2$ nên M không thể là số nguyên dương.

Nhận xét. 1) Có thể chứng minh tính chất của tỉ số :

Với $x < y$ thì $\frac{x}{y} < \frac{x+m}{y+m}$ rồi sử dụng để chứng minh $M < 2$.

2) Các bạn sau có lời giải tốt, gọn :

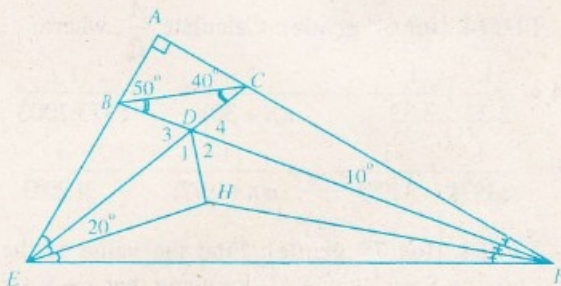
Phú Thọ : Nguyễn Thị Thu Ngân, 6A3, Bùi Thuy Nhân, 6A4, THCS Lâm Thao ; **Vĩnh Phúc :** Nguyễn Thanh Hiếu, 6A, THCS Kim Hoa, Mê Linh, Nguyễn Kim Hùng B, 6C, Trần Quang Sự, Văn Mạnh Tuấn, 6A, THCS Yên Lạc ; **Hà Nội :** Nguyễn Ngọc Hiếu, 6A, THCS Nguyễn Công Trứ, Ba Đình ; **Hải Phòng :** Lê Thế Nhân, 6/1, THCS Lê Quý Đôn ; **Hải Phòng :** Trần Văn Anh, 6A1, THCS Hồng Bàng ; **Phạm Thùy Linh, Nguyễn Tiến Việt, 6D1, THCS Trần Phú, Q. Lê Chân ; Thái Bình :** Tô Đình Công, 6A, THCS Nguyễn Công Trứ, Tiền Hải ; **Nam Định :** Đặng Thị Tuấn, 6A2, THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên ; **Ninh Bình :** Phạm Văn Cao, 6E, THCS Đinh Tiên Hoàng, Hoa Lư ; **Thanh Hóa :** Lê Việt Hưng, 6A3, THCS Quang Trung, Nguyễn Việt Huy, 6G, THCS Trần Mai Ninh, Tp. Thanh Hóa, Phạm Hùng Sơn Tung, 6B, THCS Nga Giáp, Nga Sơn ; **Nghệ An :** Ngô Trần Dũng, Trần Trung Kiên, Nguyễn Việt Dũng, 6B, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu ; **Hà Tĩnh :** Nguyễn Thùy Giang, 6A1, THCS Nam Hồng, Tx. Hồng Lĩnh ; **Quảng Ngãi :** Nguyễn Thị Anh Tú, 6/3, THCS Nguyễn Tự Tân, Bình Sơn ; **Bình Định :** Nguyễn Thị Minh Thư, 6A2, THCS Ngô Mây, Phù Cát ; **Khánh Hòa :** Nguyễn Anh

Thảo, 6/14, THCS Thái Nguyên, Nha Trang ; **Tp. Hồ Chí Minh :** Tô Nguyên Minh, 6/1, THCS Hồng Bàng, Q.5 ; **Đông Tháp :** Nguyễn Nhất Anh Khôi, 6A1, THCS Sa Đéc, Tx. Sa Đéc.

VIỆT HẢI

Bài T2/310. (Lớp 7). Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC} = 90^\circ$, $\widehat{ABC} = 50^\circ$. dựng tam giác BCD với $\widehat{BCD} = \widehat{CBD} = 30^\circ$ sao cho điểm D nằm ngoài tam giác ABC . Hai đường thẳng AB và CD cắt nhau tại E . Hai đường thẳng AC và BD cắt nhau tại F . Tính các góc $\widehat{AEF}$ và $\widehat{AFE}$.

Lời giải. Trong tam giác DEF kẻ phân giác của các góc $\widehat{E}$ và $\widehat{F}$, chúng cắt nhau tại H . Ta có DH là phân giác của $\widehat{EDF}$. Lại có $\widehat{ACE} = 40^\circ + 30^\circ = 70^\circ \Rightarrow \widehat{AEC} = 20^\circ$,
 $\widehat{ABF} = 50^\circ + 30^\circ = 80^\circ \Rightarrow \widehat{AFB} = 10^\circ$,
 $\widehat{EDF} = \widehat{BDC} = 180^\circ - (30^\circ + 30^\circ) = 120^\circ$
 $\Rightarrow \widehat{D_1} = \widehat{D_2} = \widehat{D_3} = \widehat{D_4} = 60^\circ$.



– Giả sử $DH > DB$. Lấy $B' \in DH$ sao cho $DB' = DB$, kết hợp với $\widehat{D_3} = \widehat{D_1}$ suy ra $\widehat{DEH} > \widehat{DEB} = 20^\circ \Rightarrow \widehat{DEF} > 40^\circ \Rightarrow \widehat{AEF} > 60^\circ$ (1)

Vì $DB = DC$ nên cũng có $DH > DC$ suy ra $\widehat{DFH} > \widehat{DFC} = 10^\circ \Rightarrow \widehat{DFE} > 20^\circ \Rightarrow \widehat{AFE} > 30^\circ$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{AEF} + \widehat{AFE} > 90^\circ$: vô lí.

– Nếu $DH < DB$, lập luận tương tự suy ra $\widehat{AEF} + \widehat{AFE} < 90^\circ$ (vô lí). Vậy phải có $DH = DB = DC$, suy ra $\triangle DEH = \triangle DEB \Rightarrow \widehat{DEH} = \widehat{DEB} = 20^\circ$. Vậy $\widehat{AEF} = 60^\circ$, $\widehat{AFE} = 30^\circ$.

Nhận xét. Nhiều bạn đã vẽ tia phân giác của góc $\widehat{EDF}$ trước, trên đó lấy H sao cho $DH = DB = DC \Rightarrow \triangle DBE = \triangle DHE, \triangle DCF = \triangle DHF$, rồi cũng suy ra kết quả như trên.

Các bạn sau có lời giải tốt :

Phú Thọ : Phạm Trung Kiên, Tạ Hồng Sơn, 7A3, THCS Lâm Thao ; **Vinh Phúc :** Đỗ Hoàng Tùng, 7E, THCS Vĩnh Yên ; **Quảng Ninh :** Nguyễn Hồng Diệu, 7A, THCS Bình Khê, Đông Triều ; **Bắc Ninh :** Tạ Khắc Công, 7B, THCS Yên Phong ; **Nam Định :** Vũ Minh Huệ, 7D, THCS Nguyễn Hiền, Nam Trực ; **Thừa Thiên - Huế :** Lê Viết Nghĩa, 7/4 THCS Phú Thuận, Phú Vang

NGUYỄN XUÂN BÌNH

Bài T3/310. Giải phương trình nghiệm nguyên dương : $x^3 - y^3 = xy + 2003$ (*)

Lời giải. (Theo bạn Nguyễn Tuấn Dương, 9A1, THCS Trần Mai Ninh, Tp. Thanh Hóa).

Giả sử (x_0, y_0) là một nghiệm nguyên dương của PT (*). Để thấy $x_0 > y_0 > 0$ ($x_0, y_0 \in \mathbb{Z}^+$), đặt $x_0 = y_0 + a$ ($a \in \mathbb{Z}^+$) thay vào PT (*) được

$$(3a - 1)y_0^2 + a(3a - 1)y_0 + a^3 - 2003 = 0 \quad (1)$$

Do $a \geq 1 \Rightarrow 3a - 1 > 0$ và $y_0 > 0$, suy ra $a^3 < 2003$.

Để ý rằng $12^3 < 2003 < 13^3$ nên $a \leq 12$, từ đó $3a - 1 \leq 35$ (2)

Mặt khác, từ (1) có : $(a^3 - 2003) : (3a - 1) \Rightarrow (27a^3 - 1 - 54080) : (3a - 1) \Rightarrow 54080 : (3a - 1)$. Lại vì $54080 = 2^6 \cdot 5 \cdot 13^2$; $3a - 1 \equiv 2 \pmod{3}$, nên $(3a - 1) \in \{5, 8, 20, 26, 32\}$

Với $3a - 1 = 5$, suy ra $a = 2$. Từ (1) có : $5y_0^2 + 10y_0 - 1995 = 0 \Rightarrow y_0 = 19 \Rightarrow x_0 = 21$.

Thử trực tiếp các trường hợp còn lại ta thấy a không nguyên dương. Tóm lại PT (*) có nghiệm nguyên dương duy nhất $(x, y) = (21, 19)$.

Nhận xét. 1) Vẫn còn một số bạn kết luận PT (*) không có nghiệm nguyên dương. Bằng PP giải tương tự như trên bạn **Trịnh Văn Nam**, 8C, THCS Cao Xuân Huy, Diên Châu, **Nghệ An** đã đặt vấn đề : Giải PT nghiệm nguyên : $x^3 - y^3 = nxy + k$, với một số giá trị nguyên của n, k .

2) Các bạn sau có lời giải tốt :

Bác Giang : Nguyễn Phi Yến, 8A, THCS Ngô Sĩ Liên; **Vinh Phúc :** Vũ Văn Quang, Lê Công Truyền, 9C, THCS Vĩnh Tường ; **Phú Thọ :** Lương Đức Hoàng, 8A, THCS Giấy Phong Châu, Mai Thị Lan Ngọc, 8E, THCS Sa Đéc; **Hà Nội :** Hoàng Thanh Hương, 6H1, THCS Trưng Vương, Đỗ Xuân Huy, 9¹, THCS Lê Quý Đôn, Q. Cầu Giấy ; **Hải Phòng :** Đinh Khang, Nguyễn Mạnh Chiến, 9A, THPT NK Trần Phú ; **Hải Dương :** Nguyễn Tiến Dũng, 9A1, THCS Chu Văn An, Thanh Hà ; **Thanh Hóa :** Trịnh Thành Kiên, 9A1, THCS Trần Mai Ninh, Lê Xuân Quý, 9D, THCS Vạn Hà, Thiệu Hóa ; **Nghệ An :** Đinh Quỳnh Nga, 9A, THCS Quán Hành, Nghi Lộc, Đàm Thanh Thủy, 8C, THCS Cao Xuân Huy, Diên Châu, Trương Việt Đức, 8A, THCS Lý Nhật Quang, Đô

Lương ; **Hà Tĩnh :** Bùi Hồng Hạnh Lê, Tổ 7, phường Bắc Hà, Tx. Hà Tĩnh ; **Quảng Trị :** Dương Bảo Nhân, 9, THCS Đại Hòa ; **Quảng Bình :** Mai Thị Hồng Thịnh, 9A, THCS Hoàn Lão, Bố Trạch ; **Thừa Thiên - Huế :** Lê Hiếu Hồng Phúc, 8¹, THCS Nguyễn Tri Phương, Tp. Huế ; **Quảng Nam :** Phan Hồ Anh Thư, 9/6, THCS Lê Quý Đôn, Thăng Bình ; **Quảng Ngãi :** Phan Văn Du, 8A, THCS Trần Hưng Đạo, Tx. Quảng Ngãi ; **Khánh Hòa :** Võ Thái Thông, 7/4, THCS Ngô Gia Tự, Cam Ranh ; **Tây Ninh :** Phạm Thị Cẩm Huyền, 8A1, THCS Trần Bình Trọng, Hòa Thành ; **Đồng Nai :** Phạm Phan Phương Phương, 9₃, THCS Nguyễn Bình Khiêm, Tp. Biên Hòa.

NGUYỄN PHÚC

Bài T4/310. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x + y + z = -1 \\ xyz = 1 \end{cases} \quad (1) \quad (2)$$

$$\begin{cases} \frac{x}{y^2} + \frac{y}{z^2} + \frac{z}{x^2} = \frac{y^2}{x} + \frac{z^2}{y} + \frac{x^2}{z} \end{cases} \quad (3)$$

Lời giải. Đặt $a = \frac{x}{y^2}$, $b = \frac{y}{z^2}$ và $c = \frac{z}{x^2}$. Từ (2) có đẳng thức $abc^y = xyz = 1$. Từ (3) có đẳng thức $a+b+c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ (4)

Chuyển vế và biến đổi (4) ta được

$$a+b+c - ab - bc - ca + abc - 1 = 0 \Leftrightarrow (a-1)(b-1)(c-1) = 0$$

Xét trường hợp $a = 1$. Khi đó $z^2 = y$ (5). Thay thế vào (1) và (2) ta thu được hệ phương trình

$$\begin{cases} x + z^2 + z = -1 \\ xz^3 = 1 \end{cases} \quad (6)$$

$$\text{Từ đó } \frac{1}{z^3} + z^2 + z = -1.$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow z^5 + z^4 + z^3 + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow z^4(z+1) + (z^3+1) &= 0 \\ \Leftrightarrow z^4(z+1) + (z+1)(z^2-z+1) &= 0 \\ \Leftrightarrow (z+1)(z^4+z^2-z+1) &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow z = -1 \text{ (do } z^4 \geq 0, z^2 - z + 1 = \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0)$$

Thay vào (5) và (6) suy ra nghiệm (x, y, z) là $(-1, 1, 1)$. Tương tự cho $b = 1, c = 1$ có các nghiệm khác là $(-1, -1, 1), (1, 1, -1)$.

Nhận xét. Rất nhiều bạn đã gửi lời giải bài toán này và giải ra đúng các nghiệm trên. Các bạn **Nguyễn Hùng Cường**, THCS Lập Thạch, **Vinh Phúc** ; **Nguyễn Trung Kiên A**, THCS Giấy Phong Châu, **Phú Thọ** ; **Dương Bảo Nhân**, lớp 9, THCS Đại Hòa, **Quảng Trị**... có lời giải rõ ràng và ngắn gọn.

VŨ ĐÌNH HÒA

Bài T5/310. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$\frac{a^3}{1+b} + \frac{b^3}{1+a}$$

trong đó a, b là các số dương thỏa mãn điều kiện $ab = 1$.

Lời giải. (của nhiều bạn). Sử dụng bất đẳng thức Cô-si và các giả thiết : $a, b > 0, a.b = 1$, ta có :

$$\begin{aligned} A &= \frac{a^3}{1+b} + \frac{b^3}{1+a} = \frac{a^3+b^3+a^4+b^4}{1+a+b+ab} \\ &= \frac{(a+b)(a^2-ab+b^2)+a^4+b^4}{a+b+2} \\ &\geq \frac{(a+b)(2ab-ab)+2a^2b^2}{a+b+2} = \frac{ab(a+b+2ab)}{a+b+2} = 1. \end{aligned}$$

Vậy $\min A = 1 \Leftrightarrow a = b = 1$.

Nhận xét. 1) Có nhiều bạn tham gia giải bài toán này và đa số đều giải đúng. Một số bạn đã dùng BĐT Bu-nhia-côp-xki và BĐT Trê-bư-sép để giải nhưng lời giải còn dài. Vẫn còn một số bạn mắc phải những sai lầm không đáng có, chẳng hạn : từ m, n dương, $m > n$ suy ra $\frac{1}{m} > \frac{1}{n}$ hoặc $-m > -n$, ...

2) Từ bài toán đã cho, một số bạn đã khái quát thành một số bài toán tổng quát hơn. Chẳng hạn :

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức A trong trường hợp:

a) $A = \frac{a^n}{1+b^n} + \frac{b^n}{1+a^n}$, trong đó a, b là các số dương thỏa mãn $a.b = 1$ và $m, n \in \mathbb{N}$.

b) $A = \frac{a^3}{k+b} + \frac{b^3}{k+a}$, trong đó a, b là các số dương thỏa mãn : $a.b = k^2$, với k là hằng số dương cho trước

c) $A = \frac{a_1^k}{1+a_2+a_3+\dots+a_n} + \frac{a_2^k}{1+a_1+a_3+\dots+a_n} + \dots + \frac{a_n^k}{1+a_1+a_2+\dots+a_{n-1}}$, trong đó $a_1, a_2, \dots, a_m$ là các số dương thỏa mãn $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n = 1$, $k, n \in \mathbb{N}, k > n \geq 2$.

Các bạn đã có những bài toán mở rộng tốt là : *Lại Nguyễn Thanh*, 9₁₃, THCS Lê Quý Đôn, **Hải Dương** ; *Lê Viết Ân*, 9₄, THCS Phú Thuận, Phú Vang, **Thừa Thiên - Huế** ; *Ngô Vĩnh Thái*, 9A1, THCS Giấy Phong Châu, **Phú Thọ** ; *Nguyễn Hoài Phương*, 9/2, THCS Phạm Hồng Thái, Plâyku, **Gia Lai** ; *Lê Trường Sơn*, 9C, THCS Vĩnh Tường, **Vĩnh Phúc** ; *Nguyễn Quốc Việt*, 9A, THCS Đức Chánh, **Quảng Ngãi** ; *Vũ Việt Hải*, 8A1, THCS Chu Văn An, **Hà Nội** ; *Nguyễn Chiến Thắng*, 9C, THCS Lý Nhật Quang, **Đô Lương**, **Nghệ An** ; *Nguyễn Trung Kiên*, 9A, THCS Giấy Phong Châu, **Phú Thọ** ; *Nguyễn Tuấn Dương*, 9A1, THCS Trần Mai Ninh, **Tp. Thanh Hóa** ; *Lữ Thiện Nhân*, 9A1, THPT Tx. Sa Đéc, **Đồng Tháp**.

TRẦN HỮU NAM

Bài T6/310. Cho tứ giác lồi ABCD sao cho hai đường chéo CA và DB là các đường phân giác của góc $\widehat{BCD}$ và $\widehat{ADC}$. Gọi E là giao điểm của CA và DB . Chứng minh rằng

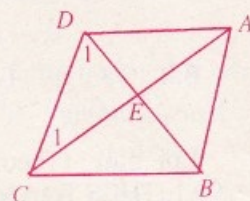
$$EC \cdot ED = EA \cdot EB + EA \cdot ED + EB \cdot EC$$

khi và chỉ khi $\widehat{AED} = 45^\circ$.

Lời giải. 1) Nếu $AD \parallel BC$

Ta có $\widehat{ADC} + \widehat{BCD} = 180^\circ$ suy ra $\widehat{D_1} + \widehat{C_1} = 90^\circ$.

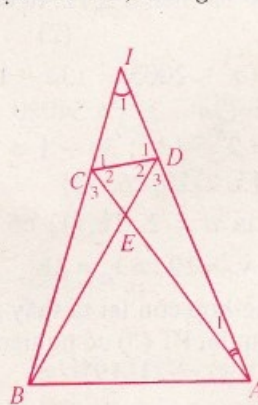
Từ đó $\widehat{AED} = \widehat{D_1} + \widehat{C_1} = 90^\circ > 45^\circ$



Ta có $\frac{ED}{EB} = \frac{EA}{EC} = \frac{DA}{BC}$ nên $ED \times EC = EA \times EB < EA \times EB + EA \times ED + EB \times EC$.

Vậy đẳng thức nói trong giả thiết và $\widehat{AED} = 45^\circ$ đều không xảy ra trong trường hợp này.

2) Nếu AD cắt BC tại I thuộc nửa mặt phẳng tạo bởi CD , không chứa A, B .



Ta có
 $\widehat{BCD} = 180^\circ - \widehat{C_1}$,
 $\widehat{ADC} = 180^\circ - \widehat{D_1}$
 nên $\widehat{BCD} + \widehat{ADC} = 360^\circ - (\widehat{D_1} + \widehat{C_1}) = 180^\circ + \widehat{I_1}$. Từ đó
 $\widehat{AED} = \widehat{C_2} + \widehat{D_2} = 90^\circ + \frac{\widehat{I_1}}{2} > 45^\circ$.

Mặt khác $\widehat{C_2} = \widehat{C_3}$

$= \widehat{I_1} + \widehat{A_1} > \widehat{A_1}$ nên $CD < DA$.

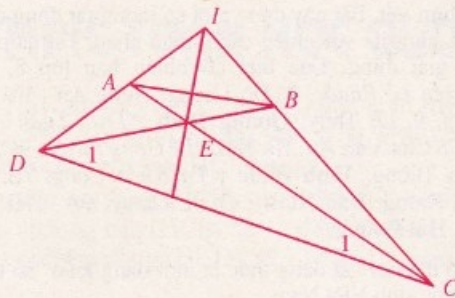
Theo tính chất đường phân giác có $\frac{CE}{EA} = \frac{CD}{DA} < 1$ tức $CE < EA$. Tương tự $ED < EB$. Lúc đó $EC \times ED < EA \times EB < EA \times EB + EA \times ED + EB \times EC$.

Kết luận giống trường hợp trên.

3. Vậy bài toán chỉ xảy ra trong trường hợp AD cắt BC tại I thuộc nửa mặt phẳng tạo bởi CD , chứa A và B . Lúc đó IE là phân giác của $\widehat{DIC}$

$$\text{Để thấy } \frac{IB}{ID} = \frac{BC}{DC} = \frac{IB+BC}{ID+DC} = \frac{IC}{ID+DC}.$$

$$\text{Suy ra } \frac{BD}{ED} = 1 + \frac{EB}{ED} =$$



$$= 1 + \frac{IB}{ID} = \frac{IC + ID + DC}{ID + DC}$$

$$\text{Tương tự } \frac{AC}{EC} = \frac{IC + ID + DC}{IC + DC}$$

$$\text{Do đó } EC \times ED = EA \times EB + EA \times ED + EB \times EC$$

$$\Leftrightarrow 2EC \times ED = (EA + EC)(EB + ED)$$

$$\Leftrightarrow 2EC \times ED = AC \times BD \Leftrightarrow \frac{AC}{EC} \times \frac{BD}{ED} = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{(IC + ID + DC)^2}{(ID + DC)(IC + DC)} = 2 \Leftrightarrow IC^2 + ID^2 = DC^2$$

$$\Leftrightarrow \widehat{DIC} = 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{IDC} + \widehat{ICD} = 90^\circ$$

$$\Leftrightarrow \widehat{D_1} + \widehat{C_1} = \widehat{AED} = 45^\circ \text{ (đpcm).}$$

Nhận xét. 1. Nhiều bạn dùng hàm số lượng giác để giải bài này.

2. Việc xét thêm 2 trường hợp 1) và 2) làm cho lời giải thêm chặt chẽ. Nếu chỉ giải một trường hợp 3) tức là tình cờ vẽ hình đúng trường hợp có lời giải.

3. Bạn **Lê Bá Long**, 9A1, THCS Giấy Phong Châu, Phù Ninh, **Phú Thọ** và **Nguyễn Trung Kiên A**, 9A cùng trường phát hiện ra bài toán đã có trong các cuốn sách.

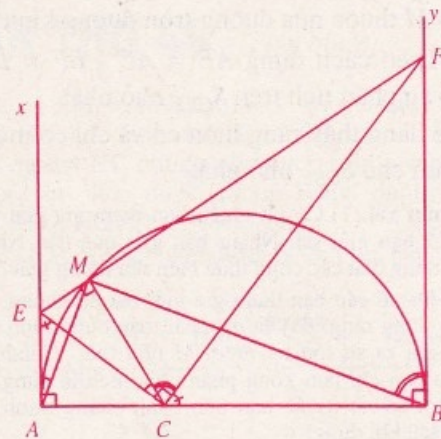
4. Ngoài hai bạn trên các bạn sau cũng giải tốt bài toán

Phú Thọ: **Lương Đức Hoàng**, 8A, THCS Giấy Phong Châu, Phù Ninh; **Vĩnh Phúc**: **Vũ Văn Quang**, 9C, THPT Vĩnh Tường; **Hải Dương**: **Lại Nguyễn Thanh**, 9/3, THCS Lê Quý Đôn; **Hà Nội**: **Vũ Nhật Minh**, 9H, THCS Lê Quý Đôn, Q. Cầu Giấy; **Nam Định**: **Trần Vĩnh Cửu**, 8A, THCS Phùng Chí Kiên, Tp. Nam Định, **Phạm Thị Huệ**, 8A2, THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên; **Thanh Hóa**: **Nguyễn Tuấn Dương**, 9A1, THCS Trần Mai Ninh.

VŨ KIM THỦY

Bài T7/310. Cho nửa đường tròn đường kính AB và một điểm C cố định thuộc đoạn AB (C khác A, B). Lấy điểm M trên nửa đường tròn. Đường thẳng qua M, vuông góc với MC, lần lượt cắt các tiếp tuyến qua A và B của nửa đường tròn tại E và F. Tìm giá trị nhỏ nhất của diện tích tam giác CEF khi M di chuyển trên nửa đường tròn.

Lời giải. (của bạn **Lý Thị Lan**, 9A2, THCS Chu Mạnh Trinh, Văn Giang, **Hưng Yên**).



Vì AEMC, BFMC là các tứ giác nội tiếp nên ta có:

$$\widehat{MEC} + \widehat{MFC} = \widehat{MAC} + \widehat{MBC} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{ECF} = 90^\circ$$

$$\text{Suy ra: } S_{CEF} = \frac{1}{2} CE \cdot CF \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác, } \widehat{FCB} = \widehat{FMB} = 90^\circ - \widehat{CMB} = \widehat{AMC} = \widehat{AEC}$$

$$\Rightarrow \triangle AEC \sim \triangle BCF \Rightarrow \frac{AE}{AC} = \frac{BC}{BF} \Rightarrow AE \cdot BF = AC \cdot BC \quad (2)$$

Từ (1), chú ý tới định lý Pi-ta-go, ta có:

$$\begin{aligned} S_{CEF} &= \frac{1}{2} \sqrt{(AE^2 + AC^2)} \sqrt{(BF^2 + BC^2)} \\ &\geq \frac{1}{2} \sqrt{2AE \cdot AC \cdot 2BF \cdot BC} \\ &= \sqrt{AE \cdot BF \cdot AC \cdot BC} = \sqrt{(AC \cdot BC)^2} \text{ (theo (2))} \\ &= AC \cdot BC \end{aligned}$$

Suy ra: $S_{CEF} \geq AC \cdot BC$ (không đổi).

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow AE = AC$; $BF = BC$

Nhờ sự phân tích trên, ta tiến hành tìm (dùng bảng thước và compa) điểm M như sau:

Trên Ax, By lấy các điểm E, F thỏa mãn điều kiện $AE = AC$; $BF = BC$. Dựng M là hình chiếu của C trên EF. Ta sẽ chứng minh M chính là điểm cần tìm để S_{CEF} nhỏ nhất.

Thật vậy, vì các tứ giác AEMC, BFMC nội tiếp và các tam giác AEC, BFC vuông cân tại A và B (theo cách dựng) nên ta có:

$$\begin{aligned} \bullet \widehat{AMB} &= \widehat{AMC} + \widehat{BMC} = \widehat{AEC} + \widehat{BFC} = 45^\circ \\ &+ 45^\circ = 90^\circ \end{aligned}$$

$\Rightarrow M$ thuộc nửa đường tròn đường kính AB .

• Theo cách dựng $AE = AC$; $BF = BC$ nên theo sự phân tích trên S_{CEF} nhỏ nhất.

Dễ dàng thấy rằng luôn có và chỉ có một điểm M làm cho S_{CEF} nhỏ nhất.

Nhận xét. 1) Có rất nhiều bạn tham gia giải bài toán này. 5 bạn giải sai. Nhiều bạn giải quá dài. Nhiều bạn phải dùng đến các công thức biến đổi lượng giác.

2) Đa số các bạn tham gia giải bài đã không có quan niệm đúng rằng, đây là một bài toán dựng hình nghĩa là phải chỉ ra sự tồn tại điểm M như thế. Chính vì vậy, nhiều bạn chỉ làm xong phần phân tích là dừng lại. Chỉ có một số rất ít các bạn tiến hành chứng minh và biện luận sau khi dựng.

3) Các bạn sau đây có lời giải tương đối tốt:

Hà Nội: Tạ An Hoàng, 9N, THCS Việt An, Thanh Xuân; **Hải Phòng:** Lương Phú Khánh, Vũ Ngọc Linh, 9A, THPT NK Trần Phú; **Nam Định:** Đinh Xuân Tuyền, 9A2, THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên; **Hải Dương:** Hoàng Đình Phương, 8B, THCS Lê Quý Đôn, Vũ Thị Quỳnh Hoa, 8A, THCS Phả Lại, Chí Linh; **Thái Nguyên:** Lý Ngọc Tâm, 9A2, THCS Chu Văn An, Tp. Thái Nguyên; **Hà Tây:** Lê Ngọc Thuần, 9B, THCS Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hòa; **Ninh Bình:** Nguyễn Xuân Trường, 9A, THCS Trương Hán Siêu, Tx Ninh Bình; **Thanh Hóa:** Trịnh Thành Kiên, 9A1, THCS Trần Mai Ninh, Tp. Thanh Hóa.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài T8/310. Chứng minh rằng

$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 2(1+a+b+c)$ (1)
trong đó a, b, c là các số dương thỏa mãn điều kiện $abc = 1$.

Lời giải. (của bạn Hoàng Văn Tú, 10G, THPT Dương Quảng Hàm, Văn Giang, Hưng Yên)

BĐT (1) $\Leftrightarrow a^2b + ab^2 + a^2c + ac^2 + bc^2 + b^2c + 2abc \geq 2 + 2(a+b+c)$
 $\Leftrightarrow P = (a^2b + a^2c + 1) + (b^2a + b^2c + 1) + (c^2a + c^2b + 1) \geq 3 + 2(a+b+c)$ (2) (do $abc = 1$)

Áp dụng BĐT Cô-si

$$a^2b + a^2c + 1 \geq 3a\sqrt[3]{abc} = 3a$$

$$b^2a + b^2c + 1 \geq 3b\sqrt[3]{abc} = 3b$$

$$c^2a + c^2b + 1 \geq 3c\sqrt[3]{abc} = 3c$$

$$\Rightarrow P \geq 3(a+b+c). \quad (3)$$

Ta có $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc} = 3$. Do đó

$$P \geq 3 + 2(a+b+c) \quad (4)$$

Vậy từ (3) và (4) ta suy ra (2)

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Nhận xét. Bài này được một số lượng rất đông các bạn tham gia giải với nhiều cách khác nhau. Tất cả các bạn đều giải đúng. Đặc biệt có nhiều bạn lớp 8, 9 như Nguyễn Lê Phước, 9, Đồ Lương, Nghệ An; Võ Thanh Hùng, 9, Lê Thủy, Quảng Bình; Trần Tuấn Anh, 8, THCS Chu Văn An, Hà Nội; Lê Công Tuyền, 9C, THCS Vinh Tường, Vĩnh Phúc; Tạ Khắc Công, 7B, THCS Yên Phong, Bắc Ninh; Đinh Khang, 9A, THPT Trần Phú, Hải Phòng.

Có thể nói bất đẳng thức là một dạng toán "sở trường" của học sinh Việt Nam.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T9/310. Giải và biện luận phương trình sau theo tham số m :

$$x^3 + 5x^2 + (5m+1)x + m^2 = (x^2 - x + 1)^2 \quad (1)$$

Lời giải. (của đa số các bạn). Ta có

$$(1) \Leftrightarrow m^2 + 5mx + 3x^3 + 2x^2 + 3x - x^4 - 1 = 0 \quad (2)$$

(2) là phương trình bậc hai đối với m nên

$$\Delta_m = 4x^4 - 12x^3 + 17x^2 - 12x + 4$$

$$= (2x^2 - 3x + 2)^2$$

$$\Rightarrow m_1 = x^2 - 4x + 1, m_2 = -x^2 - x - 1.$$

Từ đó suy ra

$$(2) \Leftrightarrow (x^2 - 4x + 1 - m)(x^2 + x + 1 + m) = 0$$

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 1 - m = 0 & (3) \\ x^2 + x + 1 + m = 0 & (4) \end{cases}$$

$$\Delta'_1 = 4 - 1 + m = m + 3$$

$$\Delta'_2 = 1 - 4 - 4m = -4m - 3$$

Phương trình (3) và (4) không có nghiệm chung vì:

$$\begin{aligned} & (x^2 - 4x + 1 - m) + (x^2 + x + 1 + m) \\ &= 2x^2 - 3x + 2 = 2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{7}{8} > 0 \quad \forall x. \end{aligned}$$

Do đó:

* Nếu $m < -3$, thì $\Delta'_1 < 0$, $\Delta'_2 > 0$ và khi đó (1) có hai nghiệm:

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-4m-3}}{2} \quad (x_1 \neq x_2)$$

* Nếu $m = -3$ thì $\Delta'_1 = 0$, $\Delta'_2 > 0$ nên (1) có ba nghiệm: $x_1 = -2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$.

* Nếu $-3 < m < -\frac{3}{4}$ thì $\Delta'_1 > 0$, $\Delta'_2 > 0$ nên

(1) có bốn nghiệm:

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-4m-3}}{2} \quad (x_1 \neq x_2)$$

$$x_{3,4} = 2 \pm \sqrt{m+3}$$

* Nếu $m = -\frac{3}{4}$ thì $\Delta'_1 > 0, \Delta'_2 = 0$ nên (1) có ba nghiệm : $x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = \frac{7}{2}$.

* Nếu $m > -\frac{3}{4}$ thì $\Delta'_1 > 0, \Delta'_2 < 0$ nên (1) có hai nghiệm $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{m+3}$

Nhận xét. Đây là một bài toán dễ và đơn giản nên hầu hết các bạn có lời giải đúng (trên 100 bài) và đa số giải theo cách trên.

Các bạn có lời giải tốt, ngắn gọn hơn cả :

Bác Ninh : Đặng Thế Tùng, lớp 11 Toán, THPT NK Hàn Thuyên ; **Hải Dương :** Lê Đình Duy, 10 Toán, THPT chuyên Nguyễn Trãi ; **Hải Phòng :** Bùi Ngọc Khôi, 9A, THPT NK Trần Phú ; **Quảng Trị :** Dương Bảo Nhân, lớp 9, THCS Đại Hòa ; **Thanh Hóa :** Tào Văn Duy, 10C3, THPT Triệu Sơn I, huyện Triệu Sơn.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T10/310. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{2x^n}{1+x^{n+1}} \leq \left(\frac{1+x}{2}\right)^{n-1} \leq \frac{x^n-1}{n(x-1)}$$

trong đó x là số thực dương, $x \neq 1$ và n là số nguyên dương.

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức (BĐT Cô-si) ta có

$$\left(\frac{1+x}{2}\right)^{n-1} \cdot (1+x^{n+1}) \geq \left(\frac{2\sqrt{x}}{2}\right)^{n-1} \cdot 2\sqrt{x^{n+1}} = 2x^n$$

$$\text{Nhu vậy } \left(\frac{1+x}{2}\right)^{n-1} \geq \frac{2x^n}{1+x^{n+1}}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 1$.

Chúng ta sẽ chứng minh BĐT còn lại

$$\left(\frac{1+x}{2}\right)^{n-1} \leq \frac{x^n-1}{n(x-1)} \quad (1) \text{ bằng quy nạp theo } n = 1, 2, 3, \dots$$

Chú ý với $n = 1 \Rightarrow$ vế trái = vế phải = 1.

$$\text{với } n = 2 \Rightarrow \text{vế trái} = \text{vế phải} = \frac{1+x}{2}$$

Giả sử BĐT đã đúng với $1, 2, \dots, n$. Ta chứng minh BĐT đúng với $n+1$. Thật vậy, theo giả thiết quy nạp

$$\left(\frac{1+x}{2}\right)^n = \left(\frac{1+x}{2}\right) \left(\frac{1+x}{2}\right)^{n-1} \leq \left(\frac{1+x}{2}\right) \frac{x^n-1}{n(x-1)}$$

$$\text{Và } \left(\frac{1+x}{2}\right) \frac{x^n-1}{n(x-1)} \leq \frac{x^{n+1}-1}{(n+1)(x-1)}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1+x}{2}\right) \frac{x^{n-1} + \dots + x + 1}{n} \leq \frac{x^n + \dots + x + 1}{n+1}$$

$$\Leftrightarrow (n+1)(1+x)(x^{n-1} + \dots + x + 1) \leq 2n(x^n + \dots + x + 1)$$

$$\Leftrightarrow (n+1)((x^n + \dots + x + 1) + (x^{n-1} + \dots + x))$$

$$\leq 2n(x^n + \dots + x + 1)$$

$$\Leftrightarrow (n+1)(x^{n-1} + \dots + x) \leq (n-1)(x^n + \dots + x + 1)$$

$$\Leftrightarrow 2(x^{n-1} + \dots + x) \leq (n-1)(x^n + 1)$$

$$\text{Chú ý } (n-1)(x^n+1) - 2(x^{n-1} + \dots + x) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} (x^i - 1)(x^{n-i} - 1) \geq 0.$$

Vậy BĐT (2) đúng. Do đó BĐT (1) đã được chứng minh. Với $n \geq 3$ dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 1$.

Nhận xét. Đây là BĐT cơ bản, hay. Tòa soạn nhận được lời giải của 95 bạn. Các bạn THCS sau đã có lời giải tốt : **Hòa Bình :** Nguyễn Thùy Dương, 9A1, THCS Hữu Nghị ; **Bắc Giang :** Thân Ngọc Thúc, 9A, THCS Nguyễn Hồng ; **Bắc Ninh :** Tạ Hiền, 8T, THCS Long Châu A ; **Hà Nội :** Vũ Nhật Minh, 9H, THCS Lê Quý Đôn ; **Hải Dương :** Nguyễn Tiến Dũng, 9A1, THCS Chu Văn An ; **Hải Phòng :** Đinh Khang, Lương Phú Khánh, Nguyễn Vũ Lân, Vũ Ngọc Linh, 9A, THCS Trần Phú ; **Thừa Thiên - Huế :** Lê Viết Ân, 9H, THCS Phú Thuận ; **Khánh Hòa :** Trần Kiến Thúc, 9¹⁴, THCS Thái Nguyên.

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T11/310. Chứng minh rằng trong tam giác ABC với 3 góc nhọn luôn có :

$$\text{tg}A + \text{tg}B + \text{tg}C + 6(\sin A + \sin B + \sin C) \geq 12\sqrt{3}$$

Lời giải. Bỏ đề : Cho tam giác nhọn ABC, khi đó ta có bất đẳng thức

$$\text{tg}A.\text{tg}B.\text{tg}C.\sin A.\sin B.\sin C \geq \frac{27}{8} \quad (1)$$

Thật vậy, ta có :

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C =$$

$$2\sin(A+B)\cos(A-B) + 2\sin C \cos C$$

$$= 2\sin C(\cos(A-B) - \cos(A+B))$$

$$= 4\sin A.\sin B.\sin C \quad \text{hay}$$

$$\sin A.\cos A + \sin B.\cos B + \sin C.\cos C$$

$$= 2\sin A.\sin B.\sin C \quad (2)$$

Áp dụng BĐT Cô-si cho ba số dương ta được:

$$\sin A.\cos A + \sin B.\cos B + \sin C.\cos C$$

$$\geq 3\sqrt[3]{\sin A.\sin B.\sin C.\cos A.\cos B.\cos C}$$

Từ (2) suy ra :

$$2\sin A.\sin B.\sin C \geq 3\sqrt[3]{\sin A.\sin B.\sin C.\cos A.\cos B.\cos C}$$

$$\Leftrightarrow \text{tg}A.\text{tg}B.\text{tg}C.\sin A.\sin B.\sin C \geq \frac{27}{8}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\triangle ABC$ đều. Bỏ đề được chứng minh.

Trở lại bài toán : Sử dụng BĐT Cô-si cho bốn số dương ta thấy ngay :

$$\begin{aligned} & \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C + 6 \sin A + 6 \sin B + 6 \sin C \geq \\ & \geq 4 \sqrt[4]{6^3 \cdot \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C \cdot \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C} \end{aligned}$$

$$\geq 4 \sqrt[4]{6^3 \cdot \left(\frac{27}{8}\right)} = 12\sqrt{3} \quad (\text{theo bỏ đề trên}).$$

$$\text{Từ đó } \operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C + 6(\sin A + \sin B + \sin C)$$

$$\geq 12\sqrt{3} \quad (\text{dpcm})$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \triangle ABC$ đều.

Nhận xét. 1) Bất đẳng thức (1) ở bỏ đề trên chính là BĐT W.I. Gridasov : *Matematyka, No32, Warszawa, Poland, 1972*. Nhiều bạn đã đưa được BĐT ở đề bài về BĐT này qua các phép biến đổi tương đương.

2) Ngoài cách giải trên, nhiều bạn đã CM BĐT ở bài ra bằng cách xét hàm số : $f(x) = \operatorname{tg} x + 6 \sin x - 7x$, sau đó

khảo sát giá trị nhỏ nhất của hàm số này trên $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

bằng công cụ đạo hàm, từ đó suy ra dpcm. Bạn *Nguyễn Hoàng Thanh*, 12A1, khối PTCTT-ĐHSP Hà Nội đã đề xuất và giải đúng bài toán mạnh hơn : Với mọi tam giác nhọn ABC ta có BĐT :

$$\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C + 14(\sin A + \sin B + \sin C) \geq 24\sqrt{3}.$$

Cách CM của bạn *Thanh* dựa vào kết quả sau :

Nếu $0 < t \leq 16$ thì với mọi tam giác nhọn ABC có :

$$\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C + t(\sin A + \sin B + \sin C) \geq$$

$$\geq \operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C + t \left(\frac{B+C}{2} + 2 \sin \frac{B+C}{2} \right).$$

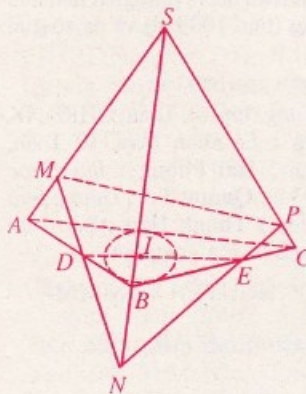
3) Tất cả các bài giải gửi về TS đều đúng. Các bạn sau đưa ra lời giải gọn hơn cả :

Hà Nội : *Dương Đỗ Nhuận*, 10T, Đinh Nhật Minh, 10A1 Tin, *Lê Hùng Việt Bảo*, 11A, ĐHKHTN – ĐHQG Hà Nội, *Nguyễn Hoàng Thanh*, 12A1, ĐHSP Hà Nội ; **Hải Phòng :** *Nguyễn Vũ Lân*, 9A, THPT NK Trần Phú ; **Bắc Ninh :** *Chu Đức Đạo*, 10 Toán, THPT NK Hàn Thuyên ; **Phú Thọ :** *Hoàng Ngọc Minh*, 12A1, THPT chuyên Hùng Vương ; **Vĩnh Phúc :** *Tạ Việt Anh*, 10A10, Hà Đình Thiệu, 10A1, *Phạm Văn Hoàng*, 11A1, THPT ch. Vĩnh Phúc ; **Hà Tây :** *Nguyễn Quốc Đạt*, *Nguyễn Duy Hà*, 10T01, THPT ch. Nguyễn Huệ, Tx. Hà Đông ; **Hải Dương :** *Trần Quốc Hoàn*, *Lê Đình Huy*, 10T, THPT Nguyễn Trãi ; **Thanh Hóa :** *Trần Hoài Thu*, 10T, THPT Lam Sơn ; **Nghệ An :** *Nguyễn Thanh Hưng*, 12A1, THPT Nguyễn Xuân Ôn, Diễn Châu ; **Quảng Trị :** *Hồ Sĩ Sáng*, *Nguyễn Văn Việt*, *Hoàng Tiến Trung*, 11T, THPT ch. Lê Quý Đôn ; **Quảng Bình :** *Phan Thị Kiều Hoa*, 10 Toán, *Lê Đức Anh*, *Nguyễn Mạnh Tuấn*, 11 Toán, THPT chuyên Quảng Bình ; **Đà Nẵng :** *Thái Thanh Hải*, *Dương Đạt Nguyễn*, 10A1, THPT ch. Lê Quý Đôn, Q. Hải Châu ; **Đồng Tháp :** *Lý Duy Khiêm*, 9A1, THPT Tx. Cao Lãnh ; **Tp. Hồ Chí Minh :** *Trần*

Minh Hoàng, *Trần Tiến Hiếu*, *Kha Tuấn Minh*, 10T, PTNK ĐHQG Tp. HCM.

HỒ QUANG VINH

Bài T12/310. Tứ diện SABC có $SA = BC$, $SB = CA$, $SC = AB$. Một mặt phẳng đi qua tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC, cắt các tia SA, SB, SC theo thứ tự tại M, N, P. Chứng minh rằng $SM + SN + SP \geq SA + SB + SC$ (*)



Lời giải. (*Dương Đạt Nguyễn*, 10A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Đà Nẵng và một số bạn khác).

Đặt $SA = BC = a$, $SB = CA = b$, $SC = AB = c$. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC, ta có hệ thức vectơ :

$$a\vec{IA} + b\vec{IB} + c\vec{IC} = \vec{0}$$

Từ đó ta được :

$$(a+b+c)\vec{SI} = a\vec{SA} + b\vec{SB} + c\vec{SC} \quad (1)$$

Vì $M \in [SA]$, $N \in [SB]$, $P \in [SC]$ nên các cặp vectơ $\vec{SM}, \vec{SA}$; $\vec{SN}, \vec{SB}$ và $\vec{SP}, \vec{SC}$ là cùng hướng, vì vậy ta viết được các đẳng thức sau :

$$\vec{SA} = \frac{SA}{SM} \vec{SM} \quad \text{và hai đẳng thức tương tự.}$$

Lúc đó (1) được viết lại như sau :

$$(a+b+c)\vec{SI} = a \frac{SA}{SM} \vec{SM} + b \frac{SB}{SN} \vec{SN} + c \frac{SC}{SP} \vec{SP}$$

hay là :

$$(a+b+c)\vec{SI} = \frac{a^2}{x} \vec{SM} + \frac{b^2}{y} \vec{SN} + \frac{c^2}{z} \vec{SP} \quad (2)$$

trong đó ta đã đặt : $SM = x$, $SN = y$ và $SP = z$.

Lại vì bốn điểm M, N, P, I đồng phẳng nên ta có hệ thức :

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} = a + b + c \quad (3)$$

Áp dụng BĐT Cô-si, ta được :

$$\frac{a^2}{x} + x \geq 2a, \quad \frac{b^2}{y} + y \geq 2b, \quad \frac{c^2}{z} + z \geq 2c$$

Từ đó suy ra BĐT sau :

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} + x + y + z \geq 2(a+b+c) \quad (4)$$

Đối chiếu (3) và (4), ta thu được BĐT $x + y + z \geq a + b + c$.

Vậy BĐT (*) cần tìm đã được chứng minh.

Nhận xét. 1) Trên đây là lời giải của bài toán dựa trên phương pháp vectơ, biểu thị sự đồng phẳng của bốn điểm (điều kiện cần và đủ) bằng một hệ thức (hệ thức (3)) giữa các hệ số trong phép khai triển một vectơ theo ba vectơ không đồng phẳng. Nhiều bạn đã biết sử dụng phương pháp vectơ để giải bài toán này khá gọn. Một số bạn trình bày lời giải bài toán bằng phương pháp tổng hợp thông thường dựa trên cách tính thể tích (phương pháp thể tích), Ngoài ra một số bạn sử dụng khái niệm tâm tỉ cự (mà thực chất cũng là phương pháp vectơ) để giải bài toán này. Có một vài bạn đã giải bài toán bằng cả hai phương pháp trên.

Để chứng minh BĐT hình học (*) nêu trong bài toán, nhất thiết chúng ta phải sử dụng một BĐT đại số. Khi thu được đẳng thức (3) rồi, đại đa số các bạn đều nghĩ đến và sử dụng BĐT Bu-nhia-côp-xki quen thuộc cũng dẫn đến kết quả.

2) Ban Lê Duy Cường, 11A1, THPT Yên Phong I, Bắc Ninh đã giải bài toán tổng quát hơn: Cho tứ diện ABCD với $SA = BC = a$, $SB = CA = b$, $SC = AB = c$. Một mặt phẳng đi qua tâm tỉ cự của ba điểm ABC theo bộ số x, y, z , cắt các tia SA, SB, SC lần lượt tại M, N, P. Chứng minh rằng $SM + SN + SP \geq \frac{(\sqrt{ax} + \sqrt{by} + \sqrt{cz})^2}{x + y + z}$.

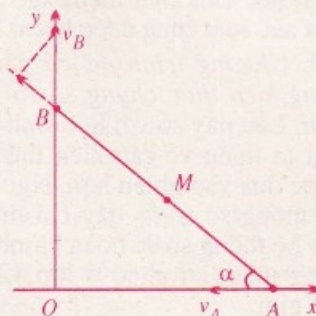
3) Các bạn sau đây cũng có lời giải tốt, tương đối gọn gàng, sáng sủa.

Hà Nội: Dương Đỗ Nhuận, 10 Toán, Lê Hùng Việt Báo, 11A Toán, ĐHKHTN – ĐHQG Hà Nội, Nguyễn Hoàng Thanh, 12A1, PTCT-T, ĐHSP Hà Nội; **Bắc Ninh:** Phạm Thái Sơn, 11T, THPT NK Bắc Ninh; **Hải Dương:** Lê Đình Huy, 10 Toán, THPT chuyên Nguyễn Trãi, Phạm Việt Hải, 11A4, THPT Hồng Quang, Nguyễn Phấn Chiến, 11A1, THPT Kim Môn; **Hưng Yên:** Đào Văn Giỏi, 11A, THPT Hoàng Hoa Thám, Tiên Lữ, Hưng Yên; **Phú Thọ:** Hoàng Ngọc Minh, 12A1, THPT chuyên Hùng Vương; **Thái Nguyên:** Nguyễn Mạnh Tường, 11A1, THPT thuộc trường ĐHSP Thái Nguyên; **Quảng Trị:** Trần Minh, 11A, Lê Hải Dương, 11B, THPT Hải Lăng; **Đà Nẵng:** Thái Thanh Hải, 10A1, THPT Lê Quý Đôn; **Quảng Ngãi:** Thái Xuân Quang, 11T1, THPT chuyên Lê Khiết; **Phú Yên:** Phan Thành Nam, 12T2, THPT Lương Văn Chánh; **Lâm Đồng:** Nguyễn Tường Kha, 12 Toán, THPT Thăng Long, Đà Lạt; **Tp. Hồ Chí Minh:** Trần Minh Hoàng, 10T, PTNK, ĐHQG Tp. HCM; **Bến Tre:** Nguyễn Thành Nhân, 11T, THPT Bến Tre; **Cà Mau:** Trần Bảo Ngọc, 11A3, THPT chuyên Phan Ngọc Hiển, Tp. Cà Mau.

NGUYỄN ĐĂNG PHÁT

Bài L1/310.

Một thanh AB dài $l = \sqrt{3}$ (m) được gắn với 2 ổ trượt ở 2 đầu A, B có thể di động trên 2 thanh cố định Ox, Oy vuông góc với nhau



như hình vẽ. Ổ A chuyển động với vận tốc không đổi $v_A = 30\sqrt{3}$ cm/s. Tính gia tốc của trung điểm M của AB lúc A cách O một đoạn $\frac{l}{2}$?

Lời giải. Ta có $x_M = \frac{x_A}{2}$;

$y_M = \frac{y_B}{2}$. Suy ra $v_{Mx} = \frac{v_A}{2}$, $v_{My} = \frac{v_B}{2}$; từ đó

$v_M = \frac{\sqrt{v_A^2 + v_B^2}}{2}$ (1). Vì $AB = l = \text{const}$, nên ta có

$v_A \cos \alpha = v_B \cdot \sin \alpha \Rightarrow v_B = v_A \cot \alpha$. Do đó

$v_M = \frac{v_A}{2} \sqrt{1 + \cot^2 \alpha} = \frac{v_A}{2 \sin \alpha} = \frac{v_A \cdot l}{2 \sqrt{l^2 - x_A^2}}$ (2),

với $x_A = \overline{OA} = x_0 - v_A t$ (3).

Gia tốc của trung điểm M:

$a = \frac{dv_M}{dt} = \frac{v_A^2 l}{2} \cdot \frac{x_A}{(l^2 - x_A^2)^{3/2}}$, (4) (vì $\frac{dx_A}{dt} = -v_A$).

Tại thời điểm $x_A = \frac{l}{2}$ ta có: $a_M = \frac{2\sqrt{3}v_A^2}{9l} = 6 \text{ cm/s}^2$.

Nhận xét. Các bạn có lời giải đúng:

Hà Nội: Bùi Phi Anh, 10 Lí, THPT Hà Nội – Amsterdam; **Hưng Yên:** Đào Ngọc Dương, 11 chuyên Lí, THPT ch. Hưng Yên; **Hòa Bình:** Nguyễn Tuấn Anh, 12 Lí, THPT ch. Hoàng Văn Thu; **Vĩnh Phúc:** Nguyễn Chí Đông, 10A3, THPT ch. Vĩnh Phúc; **Nam Định:** Nguyễn Đình, 11I, THPT Giao Thủy A; **Thanh Hóa:** Trần Ngọc Hưng, 11A10, THPT Lê Lợi, Thọ Xuân; **Bình Định:** Đinh Thành Vinh, 12 Lí, Nguyễn Thị Bích Liên, 10 Lí; THPT Lê Quý Đôn, Quy Nhơn.

MAI ANH

Bài L2/310. Một tụ điện C_1 có điện dung C được tích điện đến hiệu điện thế U. Sau đó tụ được ngắt khỏi nguồn và ghép song song với một tụ điện phẳng C_2 có điện dung 2C và chưa tích điện. Sau đó các bản của tụ C_2 có thể chuyển động tự do đến nhau. Tìm vận tốc của mỗi bản của tụ C_2 tại thời điểm mà khoảng cách giữa chúng giảm đi một nửa. Biết khối lượng mỗi bản của tụ C_2 là m. Bỏ qua tác dụng của trọng lực.

Lời giải. Điện tích của tụ C_1 trước khi ghép với tụ C_2 là $Q = CU$. Kí hiệu U' là hiệu điện thế của bộ tụ $C_1 + C_2$ ngay sau khi ghép (lúc các

bản của tụ C_2 chưa chuyển động) và Q_1, Q_2 là điện tích các tụ, khi đó ta có : $Q_1 + Q_2 = Q$;

$$CU' + 2CU' = CU \Rightarrow U' = \frac{U}{3}. \text{ Năng lượng của}$$

$$\text{bộ tụ khi đó là : } W = \frac{1}{2}(C_1 + C_2)U'^2 = \frac{CU^2}{6}$$

(1). Kí hiệu v là vận tốc của mỗi bản tụ C_2 khi khoảng cách giữa chúng giảm đi một nửa ; khi đó điện dung của tụ C_2 bằng $4C$ và điện dung của bộ tụ là $5C$. Năng lượng của bộ tụ khi đó là :

$$W' = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{5C} = \frac{CU^2}{10} \quad (2). \text{ Áp dụng định luật bảo}$$

$$\text{toàn năng lượng, ta có : } W = W' + 2 \frac{mv^2}{2} \quad (3).$$

$$\text{Từ (1), (2) và (3) tìm được : } v = U \sqrt{\frac{C}{15m}}.$$

Nhận xét. Các bạn có lời giải đúng :

Vĩnh Phúc : Vũ Lam Điền, 12H, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm ; **Hà Tĩnh :** Hoàng Việt Cường, 11 Lí K7, THPT chuyên Hà Tĩnh ; **Vĩnh Phúc :** Đặng Thu Trang, 11A3, THPT chuyên Vĩnh Phúc ; **Phú Thọ :** Nguyễn Bá Gia, 10H, THPT Tam Nông, Phú Thọ ; **Ninh Bình :** Đoàn Thị Hồng Minh, Vũ Thị Ngọc Ánh, 11A3, THPT Yên Khánh A ; **Bắc Ninh :** Nguyễn Tuấn Hùng, 11 Toán, Lê Minh Huy, 11 Lí, THPT NK Bắc Ninh ; **Tp. Hồ Chí Minh :** Trần Vĩnh Sơn, 10 L, Nguyễn Anh Tuấn, 10 Lí, PTNK, ĐHQG Tp. Hồ Chí Minh ; **Quảng Ngãi :** Nguyễn Thanh Lân, 10T2, THPT Lê Khiết, Ngô An Hòa, 11B1, THPT số II, Mộ Đức, Bùi Thị Thùy Dung, 11A2, THPT số 1, Sơn Tịnh ; **Bình Định :** Đinh Thành Vinh, Lê Văn Thông, 12 Lí, Cao Sĩ Đức, 10 Lí, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Quy Nhơn ; **Nghệ An :** Doãn Trường Thi, Thái Bá Sơn, K30A3, THPT Phan Bội Châu, Vinh, Nguyễn Quang Phương, 10A1, THPT Nghi Lộc I.

MAI ANH

BÀI TOÁN XÁC ĐỊNH..

(Tiếp trang 2)

BÀI TẬP

1) Xác định đa thức $f(x)$ có các hệ số nguyên không âm và nhỏ hơn 9. Biết rằng $f(9) = 613756$.

2) Đa thức $f(x)$ có bậc 3, khi chia cho $x - 1$ có dư là 2001 và khi chia cho $x - 2$ dư là 2002. Tìm đa thức dư khi chia $f(x)$ cho $(x-1)(x-2)$.

3) Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ bậc nhỏ hơn 4 và thỏa mãn hệ thức sau với ít nhất 4 giá trị phân biệt của x : $xP(x-1) = (x-2)P(x)$.

DIỄN ĐÀN DẠY HỌC TOÁN

LTS : Từ năm học 2003-2004 Bộ Giáo dục và Đào tạo sẽ tổ chức giảng dạy thí điểm hai bộ sách giáo khoa lớp 10. Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ sẽ lần lượt giới thiệu về nội dung, phương pháp giảng dạy hai bộ sách đó. Dưới đây là bài viết của PGS. TS. Trần Văn Hạo, Tổng chủ biên của một trong hai bộ sách Toán THPT.

Trong cuộc đổi mới giáo dục lần này theo chủ trương của Bộ GD-ĐT cấp THPT được chia làm hai ban là ban Khoa học tự nhiên (ban A) và ban Khoa học xã hội và nhân văn (ban C). Riêng môn toán, thời lượng ban A hơn ban C khoảng 20%. Điểm khác biệt nữa là Bộ đã giao cho một Tiểu ban soạn thảo chương trình khá chi tiết, sau khi lấy ý kiến đóng góp rộng rãi và thẩm định. Chương trình thí điểm đã được Bộ ban hành chính thức ngày 19/11/2002 và được giao cho tập thể tác giả làm căn cứ biên soạn sách giáo khoa (SGK).

Để bạn đọc hiểu rõ hơn trước khi nghiên cứu SGK chúng tôi xin giới thiệu mấy ý cơ bản của chương trình mới :

1. Tăng cường tính thực tiễn và tính sư phạm, giảm nhẹ yêu cầu quá chặt chẽ về lý thuyết và tránh đi vào những kỹ thuật giải bài tập lắt léo không cần thiết. Chẳng hạn những kiến thức về thống kê rất cần cho cuộc sống đã được đưa vào lớp 10, tiếp nối các hiểu biết ban đầu về thống kê ở cấp THCS. Những kiến thức chỉ cung cấp phương tiện để giải một loại bài tập nào đó mà không cần cho việc học tập sau này đã bị loại bỏ. Chẳng hạn chỉ giới thiệu bất đẳng thức Cô-si cho hai số, ba số, không nói đến bất đẳng thức Cô-si cho n số với $n > 3$ (như thế không có bài tập sử dụng BĐT Cô-si cho nhiều số đối với học sinh diện đại trà).

2. Nội dung chương trình vừa đáp ứng mục tiêu môn học, đồng thời chú ý đáp ứng yêu cầu của một số môn học khác như Vật lí, Sinh học, ... Chẳng hạn, môn Vật lí cần sử dụng khái niệm đạo hàm từ đầu lớp 12 nên trong chương trình Toán, đạo hàm được học từ lớp 11. Cũng vậy, Sinh học cần khái niệm xác suất từ đầu lớp 12, nên xác suất cũng được học ở lớp 11.

3. Chương trình đã cố gắng để có một mặt bằng kiến thức chung so với các nước trên thế giới. Lâu nay so với học sinh các nước, học sinh của ta thiếu về các kiến thức thống kê thì nay được đưa vào nhiều hơn. Ngoài ra việc trình bày hệ thống số trước đây chỉ dừng ở số thực, bây giờ hệ thống số sẽ hoàn chỉnh hơn bằng cách bổ sung thêm số phức ở lớp 12 cho phù hợp với thế giới.

GIỚI THIỆU BỘ SÁCH GIÁO KHOA THPT THÍ ĐIỂM THEO TINH THẦN ĐỔI MỚI

TRẦN VĂN HẠO

Riêng đối với SGK Toán lớp 10, có những thay đổi cơ bản sau so với SGK đã sử dụng :

- Đưa thêm hai chương *Thống kê* và *Lượng giác* và bổ sung phần *Hệ ba phương trình bậc nhất ba ẩn* vào Đại số 10.

- Chuyển chương *Các phép biến hình* lên lớp 11 và đưa chương *Phương pháp tọa độ trong mặt phẳng* vào Hình 10.

Dưới sự chỉ đạo của Bộ GD-ĐT, tập thể tác giả đã thống nhất một số định hướng chính cho SGK như sau :

1. *SGK phải hỗ trợ cho việc đổi mới phương pháp dạy và học.* Đây là định hướng chủ yếu của việc biên soạn SGK lần này. Từ trước đến nay SGK của chúng ta được viết theo lối diễn giảng, từ đặt vấn đề đến trình bày các khái niệm, định lý và ví dụ áp dụng. Cách viết này có ba nhược điểm :

- Một là coi mọi học sinh đều như nhau, không tác động được đến các đối tượng học sinh có trình độ khác nhau.

- Hai là tạo cho thầy và trò thói quen "thầy giảng, trò ghi", một phương pháp dạy học hiệu quả không cao, không phát huy được năng lực tự học của học sinh, đã bị phê phán nhiều lần.

- Ba là kiến thức được truyền thụ cho học sinh một cách áp đặt, học sinh không có điều kiện tự nghiên cứu, khám phá.

Để khắc phục các nhược điểm này, trong SGK mới sẽ chỉ ra các hoạt động tại từng thời điểm để thầy và trò xem xét. Những hoạt động này rất đa dạng : có thể là ôn lại kiến thức cũ, đặt vấn đề cho kiến thức mới, qua các ví dụ cụ thể gợi ý phương pháp giải quyết vấn đề hay đặt ra bài toán, thực hành áp dụng trực tiếp các công thức nêu trong lý thuyết ... Trước mỗi hoạt động có ghi dấu . Cần chú ý rằng nội dung trong các hoạt động này chỉ là gợi ý của tác giả cho những tình huống giả định nào đó, nên tùy theo từng lớp, từng đối tượng, thầy và trò có thể thay đổi cho phù hợp (khó hơn hoặc dễ hơn, ...). Cách thực hiện các hoạt động này cũng rất đa dạng ; có thể học sinh tự đọc, hoặc thầy đặt vấn đề rồi tự làm hay cho học sinh thực hiện, hoặc nêu thành vấn đề để cả lớp thảo luận cùng tìm cách giải quyết. Thậm chí nội dung một hoạt động có thể biến thành một câu kiểm tra nhỏ tại

lớp. Nếu thực hiện tốt các hoạt động này chúng tôi hi vọng giúp cho học sinh tự khám phá các công thức, các kết quả toán học vừa tầm.

2. Trong phạm vi cho phép, cố gắng giới thiệu *văn hóa toán học*, làm cho *toán học gần với đời sống và vui hơn*.

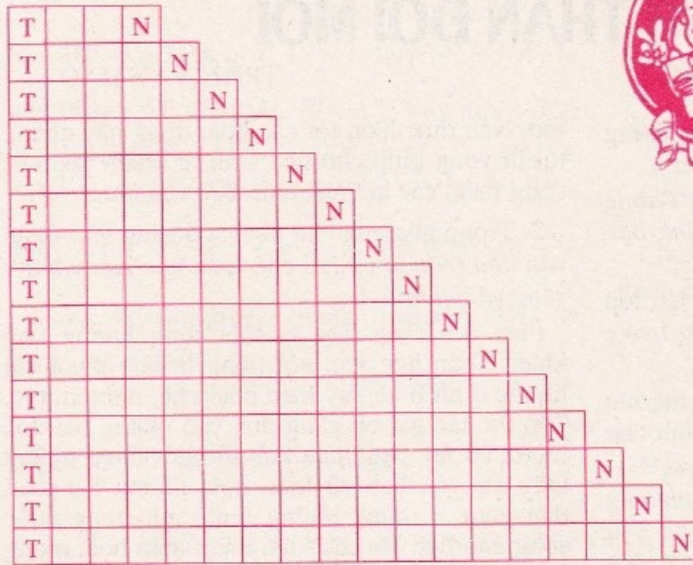
Phải nói rằng đây là một định hướng khó khăn. Toán học vốn nổi tiếng là khô khan với những định lý và suy luận chặt chẽ, nghiêm túc. Tập thể tác giả cố gắng đưa vào những bài đọc thêm, có thể bạn chưa biết để giới thiệu những mẩu chuyện lịch sử toán học, những bài toán dân gian, ... cùng những hình ảnh trong cuộc sống gắn liền với các khái niệm toán học, mong làm cho toán học gần với đời sống hơn.

3. Bước đầu giới thiệu *cách sử dụng máy tính bỏ túi* và đưa ra các bài kiểm tra trắc nghiệm.

Máy tính bỏ túi là công cụ cần thiết cho hoạt động của mỗi người, từ kinh doanh, nghiên cứu đến các công việc thường nhật. Vì vậy, việc giúp học sinh có khả năng sử dụng máy tính bỏ túi là một việc làm cần thiết và trong SGK mỗi chương mục đều có đề cập đến cách sử dụng máy tính bỏ túi để tính toán các vấn đề tương ứng. Tuy nhiên, việc mua máy tính không dễ đối với mọi học sinh, nhất là ở các vùng còn khó khăn. Do đó những kiến thức và bài tập liên quan đến máy tính bỏ túi hầu như không bắt buộc, nơi nào có điều kiện thì khuyến khích thực hiện.

Ngoài ra để giúp cho học sinh bước đầu làm quen với các đề trắc nghiệm, cuối mỗi chương trong SGK có giới thiệu một số đề.

Tóm lại, mới nhìn qua nội dung chương trình Toán lớp 10 ai cũng thấy nhiều vấn đề mới thay đổi so với chương trình cũ, đồng thời giáo viên và học sinh lại phải bắt đầu thực hiện việc đổi mới phương pháp. Chính vì vậy tập thể tác giả đã phải bàn bạc trao đổi, viết đi viết lại nhiều lần, chủ yếu giảm bớt mức độ khó của các kiến thức và bài tập nhằm làm cho giáo viên và học sinh có thể chuyển tải và nắm bắt được những nội dung đó trong thời gian cho phép. Sau khi thử nghiệm tại 44 trường trong cả nước, hi vọng các tác giả sẽ nhận được những ý kiến quý báu để sửa chữa hoàn thiện bộ SGK mới, chuẩn bị cho việc đưa ra đại trà trong những năm tới.



Ô chữ :

THANG TÊN TRONG TOÁN

Bạn hãy điền vào ô chữ (mỗi ô một chữ) sao cho mỗi dòng là một tên tiếng Việt chỉ một số, một khái niệm, một tính chất ... của toán học.

Bạn viết được bao nhiêu tên ở mỗi dòng ? Bạn có thể viết thêm dòng cho ô chữ không ?

VÂN KHANH

Giải đáp : LO LẮNG



Bài toán đã cho có vấn đề không ổn ẩn dấu ở phần giả thiết, đó là không thể tồn tại các số thực a, b ,

$$ab \neq 0 \text{ sao cho } (a^2 + b^2)^3 = (a^3 + b^3)^2 \quad (1)$$

Thật thế, giả sử có đẳng thức (1), lúc đó :

$$3a^2b^2(a^2 + b^2) = 2a^3b^3$$

$$\Leftrightarrow a^2b^2[2(a^2 + b^2) + (a - b)^2] = 0.$$

Điều này không thể xảy ra, vì với $ab \neq 0$, thì :

$$a^2b^2[2(a^2 + b^2) + (a - b)^2] > 0, \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

Xuất phát từ một kết quả không đúng trên tập các số thực $\mathbb{R}$ nên dẫn đến một kết quả lạ lùng

$$\text{làm mọi người đều sững sờ : } \frac{2}{3} \leq \left| \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right| \geq 2 (!)$$

Một số bạn đã phát biểu rằng : Đề bài như vậy có lẽ dành cho các đối tượng đã nghiên cứu về số phức (bài ra thêm dữ kiện $a, b \in \mathbb{C}$).

Tòa soạn xin trao tặng phẩm cho 5 bạn sau đây có đáp án tốt nhất : Lê Ngọc Thuán, 9B, THCS Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hòa, Hà Tây ; Hà Sỹ Tiến, GV Toán THPT Lê Lợi, Thọ Xuân, Thanh Hóa ; Nguyễn Trung Hải, 11/1, THPT Sào Nam, Duy Xuyên, Quảng Nam ; Lê Tôn Chánh, 11T, THPT Lê Quý Đôn, Tp. Quy Nhơn, Bình Định; Nguyễn Đoài, GV THPT Thống Nhất A, Đồng Nai.

NGỌC HIỂN

SUÔNG SẺ !

Trong một cuốn sách tham khảo có bài toán :
Gọi (x, y) là nghiệm của hệ phương trình :

$$\begin{cases} x + y = 2a - 1 \\ x^2 + y^2 = a^2 + 2a - 3 \end{cases}$$

Xác định a để tích xy nhỏ nhất ?

với lời giải :

$$\text{Từ hệ trên ta có : } (x + y)^2 - 2xy = a^2 + 2a - 3$$

$$\Leftrightarrow (2a - 1)^2 - 2xy = a^2 + 2a - 3$$

$$\Leftrightarrow xy = \frac{3}{2}(a - 1)^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$$

Do đó xy đạt giá trị nhỏ nhất khi $a = 1$.

Bạn thấy lời giải trên có suông sẽ không ?

NGÔ TRỌNG THÀNH

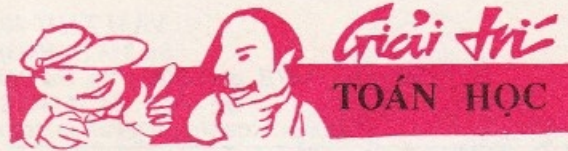
(GV Toán, THPT Kiến Thụy, Hải Phòng)

Đón đọc THPT SỐ 315 (9/2003)

- Phương pháp hệ số bất định trong một số bài toán tam giác lượng.
- Phân tích một số đa thức bậc bốn thành nhân tử.
- Emile Lemoine, người say mê tam giác.
- Giới thiệu SGK Đại số 10 dạy thí điểm.

Các bạn nhớ đặt mua THPT quý IV tại các sở Bưu điện.

THPT



Giải đáp bài :

ĐIỀN SỐ VÀO BẢNG

Chúng ta giải bài toán tổng quát đối với bảng kích thước $n \times n$ ô vuông.

* Với n lẻ : Theo đầu bài, các số x_k, y_k đều bằng 1 hay (-1) . Giả sử rằng : $\sum_{k=1}^n x_k + \sum_{k=1}^n y_k = 0$, thì trong tất cả các số x_k, y_k số các số lấy giá trị 1 bằng số các số lấy giá trị (-1) . Mặt khác ta có : $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n \cdot y_1 \cdot y_2 \cdot \dots \cdot y_n$ bằng bình phương của tích tất cả các số của bảng nên bằng 1. Vậy trong tất cả các số x_k và y_k nói trên, số các số lấy giá trị (-1) phải chẵn. Do đó các số x_k và y_k là tổng của hai số chẵn bằng nhau nên chia hết cho 4. Nhưng vì bảng có n cột, n hàng nên số các số đó bằng $2n$, mà n lẻ nên không chia hết 4. Mâu thuẫn đó chứng tỏ rằng

$$\sum_{k=1}^n x_k + \sum_{k=1}^n y_k \neq 0 \text{ khi } n \text{ lẻ}$$

* Với n chẵn : Ta có thể chỉ ra một bảng sao cho tổng của $2n$ số hạng là bằng 0, trong đó các số hạng là tích tất cả các số trên mỗi hàng và trên mỗi cột. Chẳng hạn đó là bảng sau : Hàng thứ nhất gồm toàn số 1 ; hàng thứ hai gồm $n-1$ số 1 bên trái và một số bên phải là (-1) ; Tổng quát hàng thứ k gồm $n-k+1$ số 1 bên trái và $k-1$ số bên phải là (-1) với $k = 1, 2, \dots, n$. Tích của các số trên hàng thứ k là $(-1)^{k-1}$, do đó tổng của $n = 2m$ số hạng là bằng 0 trong đó các số hạng là tích các số trên mỗi hàng. Vì bảng đối xứng đối với đường chéo chính, nên ta được kết quả tương tự đối với cột.

Từ lời giải của bài toán tổng quát trên, ta thấy đối với bảng 9×9 thì không thể điền số thỏa mãn đầu bài. Còn đối với bảng 4×4 ở hình bên chỉ ra một cách điền số.

1	1	1	1
1	1	1	-1
1	1	-1	-1
1	-1	-1	-1

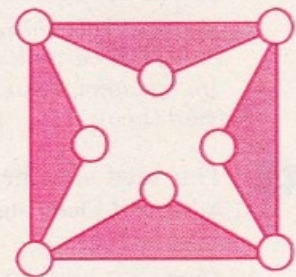
Nhận xét. Các bạn sau có lời giải tốt :

Hà Nội: Nguyễn Lệnh Quân, 10A1, PTCTT-ĐHSP Hà Nội ; **Hải Dương :** Nguyễn Đức Đôn, 9A1, THCS Chu Văn An, Thanh Hà ; **Nghệ An:** Trần Anh Minh, 9E, THCS Đặng Thai Mai, Tp.Vinh ; **Quảng Trị :** Hoàng Tiến Trung, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn ; **Khánh Hòa :** Lê Nữ Huyền Trang, 10T, THPT Lê Quý Đôn, Tp. Nha Trang.

HỒNG QUANG

THĂM KHU DI TÍCH

Một lớp học sinh giỏi toán muốn đi tham quan một khu di tích hình vuông như hình vẽ. Cô giáo phát cho lớp 8 lá phiếu có đánh số từ 1 đến 8 và ra câu đố như sau :



Nếu đặt được các lá phiếu vào các đỉnh của hình vuông và của hình tam giác ở sa bàn khu di tích sao cho tổng các số trên các lá phiếu ở đỉnh mỗi tam giác có chứa cạnh hình vuông đều bằng nhau và tổng các số trên các lá phiếu ở 4 đỉnh của hình vuông là nhỏ nhất. Bạn nào trong lớp giải được thì cả lớp sẽ được tham quan khu di tích.

Nếu bạn là lớp trưởng thì bạn xếp các số như thế nào để cả lớp được đi tham quan ?

MINH TRẦN

(Hương Thủy - Thừa Thiên Huế)

ĐÓN ĐỌC TUYÊN TẬP 5 NĂM TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Toán học và Tuổi trẻ là tạp chí có truyền thống, có uy tín trong nhà trường. Số lượng phát hành đã đạt 30 nghìn bản và tiếp tục tăng. Tuyển tập 30 năm tạp chí Toán học và Tuổi trẻ đã được bạn đọc chào đón và hoan nghênh. Nhiều bạn tỏ ý muốn được đọc các tuyển tập tiếp theo.

Thể theo nguyện vọng của độc giả, nhân dịp kỷ niệm 40 năm ngày ra số báo Toán học và Tuổi trẻ đầu tiên, Tuyển tập 5 năm tạp chí Toán học và Tuổi trẻ sẽ ra mắt bạn đọc vào đầu năm học mới. Tuyển tập bao gồm các bài viết chọn lọc trong các

số Tạp chí đã in ra từ 1991 đến 1995. Sách dày 300 trang, khổ 19×27 gồm có 2 phần :

Phần thứ nhất : Các bài viết tuyển chọn.

Phần thứ hai : Các đề toán hay và lời giải.

Bạn đọc có nhu cầu hãy đặt mua tại các Công ty Sách và thiết bị trường học tại địa phương, các cơ sở Bưu điện tỉnh, thành phố và các quận, huyện. Các đơn vị đặt mua nhiều xin liên hệ theo địa chỉ:

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ,

187B Giảng võ, Hà Nội, ĐT - Fax : (04)5144272.

Toán học và Tuổi trẻ

Mathematics and Youth

NĂM THỨ 40

Số 314 (8-2003)

Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội

ĐT - Fax : 04.5144272

Email : toanhocvt@yahoo.com

TRONG SỐ NÀY

1 **Dành cho Trung học cơ sở – For Lower Secondary Schools**

Ngô Đức Minh – Bài toán xác định một đa thức

2 **Đề thi tuyển sinh lớp 10 trường THPT năng khiếu DHQG Tp. Hồ Chí Minh**

3 **Chuẩn bị thi vào đại học – University Entrance Preparation.**

Nguyễn Anh Dũng, Đặng Thanh Hải – Bàn luận về cách giải đề thi tuyển sinh đại học môn Toán khối A năm 2003 (tiếp theo)

6 **Tìm hiểu sâu thêm toán học sơ cấp – Advanced Elementary Mathematics**

Ngô Quang Việt – Khai thác một bất đẳng thức hình học

8 *Nguyễn Khắc Minh* – Kết quả kì thi chọn học sinh giỏi quốc gia môn toán THPT – năm học 2002–2003

10 **Đề ra kì này - Problems in this Issue**
T1/314, ..., T12/314, L1, L2/314

12 **Giải bài kì trước - Solutions to Previous Problems**
Giải các bài của số 310

20 **Diễn đàn dạy học toán – Math Teaching Forum**

Trần Văn Hạo – Giới thiệu bộ sách giáo khoa THPT thí điểm theo tinh thần đổi mới

22 **Câu lạc bộ – Math Club**

Sai lầm ở đâu – Where's the Mistake ?

23 **Giải trí toán học – Math Recreation**

Bìa 1 : Ảnh trên (từ trái qua phải) :

Hàng trước : Nguyễn Đăng Khoa, Vũ Nhật Huy, Lê Hùng Việt Bảo, Ông Vũ Dũng (Đại sứ Việt Nam tại Nhật Bản), Nguyễn Đăng Hợp, Nguyễn Trọng Cảnh, Nguyễn Tiến Việt
Hàng sau : Ông Đỗ Hòa Bình (Tham tán Công sứ Việt Nam tại Nhật Bản), Thầy Lê Anh Tuấn, Thầy Nguyễn Khắc Minh, Thầy Trần Nam Dũng

Ảnh dưới : Đoàn Việt Nam và đoàn Liên Bang Nga tại IMO 2003 Japan.

Bìa 2 : Olympic Toán học quốc tế lần thứ 44 (IMO 2003 Japan)

Bìa 3 : Toán học muôn màu – Multifarious Mathematics – Xếp hình

Bìa 4 : Toán học và đời sống – Mathematics and Life – Bài toán kết xe

Tổng biên tập :
NGUYỄN CẢNH TOÀN

Phó tổng biên tập :
NGÔ ĐẠT TỬ

Trưởng ban biên tập : NGUYỄN VIỆT HẢI.

Trị sự : VŨ ANH THU.

Đại diện phía Nam : TRẦN CHÍ HIẾU, 231 Nguyễn Văn Cừ, Tp. Hồ Chí Minh. ĐT : 08.8309049

Chịu trách nhiệm xuất bản :

Giám đốc NXB Giáo Dục :

NGÔ TRẦN ÁI

Tổng biên tập NXB Giáo Dục :

VŨ DƯƠNG THUY

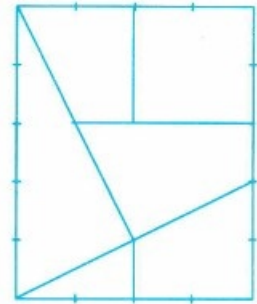
Biên tập : VŨ KIM THỦY, HỒ QUANG VINH

Trình bày : NGUYỄN THỊ OANH

TOÁN HỌC MUÔN MÀU

XẾP HÌNH

Bạn hãy lấy một miếng bìa hình chữ nhật kích thước 4×5 ô vuông và cắt thành 6 miếng như hình 1.



Hình 1

Dành cho bạn đọc

- Bạn hãy xếp đủ 6 miếng trên thành mỗi hình sau :
 - Tam giác vuông
 - Hình vuông
 - Hình thang
 - Hình bình hành
- Bạn có thể xếp thành các hình khác (có ý nghĩa nào đó) không ?

Giải đáp : ĐỀ THI VÀO ĐẠI HỌC

Ta thay các câu trả lời có bởi số 1, không bởi số 0. Chú ý rằng 2 cột số thuộc cùng một đề quạt gồm các số khác nhau nên có thể xếp 2 cột đó thành một cột. Lúc đó 5 đề quạt từ trái sang phải gọi là E, D, C, B, A và câu trả lời trong hai cột cùng một đề quạt nếu là 0, 0 thì coi là 0, nếu là 0, 1 hoặc 1, 0 thì coi là 1.

Mỗi số n từ 1 đến 31 được viết trong hệ cơ số 2 như sau :

$n = a_4 \cdot 2^4 + a_3 \cdot 2^3 + a_2 \cdot 2^2 + a_1 \cdot 2 + a_0 \cdot 1$, trong đó a_i ($0 \leq i \leq 4$) bằng 0 hoặc 1. Chẳng hạn $19 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1$ ứng với một bộ 5 số ở 5 đề quạt từ trái sang phải là (1, 0, 0, 1, 1). Ở

dưới mỗi đề quạt E, D, C, B, A ta ghi nhớ bộ số (16, 8, 4, 2, 1) thì sau khi có câu trả lời dễ dàng tính được số đang nghĩ là $1 \cdot 16 + 0 \cdot 8 + 0 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 19$.

Mặt khác khi lập 5 cột số E, D, C, B, A thì số 19 có mặt ở ba cột E, B, A.

Với 6 đề quạt từ trái sang phải với các số tương ứng F(32), E(16), D(8), C(4), B(2), A(1), mỗi đề quạt chia thành 2 cột số mỗi cột gồm 16 số như ở bảng bên sẽ đoán được số đang nghĩ từ 1 đến 63.

Rất nhiều bạn đã gửi lời giải đúng. Các bạn sau có lời giải thích rõ ràng và gửi bài sớm được nhận tặng phẩm :

32	48	16	48	8	40	4	36	2	34	1	33
33	49	17	49	9	41	5	37	3	35	3	35
34	50	18	50	10	42	6	38	6	38	5	37
35	51	19	51	11	43	7	39	7	39	7	39
36	52	20	52	12	44	12	44	10	42	9	41
37	53	21	53	13	45	13	45	11	43	11	43
38	54	22	54	14	46	14	46	14	46	13	45
39	55	23	55	15	47	15	47	15	47	15	47
40	56	24	56	24	56	20	52	18	50	17	49
41	57	25	57	25	57	21	53	19	51	19	51
42	58	26	58	26	58	22	54	22	54	21	53
43	59	27	59	27	59	23	55	23	55	23	55
44	60	28	60	28	60	28	60	26	58	25	57
45	61	29	61	29	61	29	61	27	59	27	59
46	62	30	62	30	62	30	62	30	62	29	61
47	63	31	63	31	63	31	63	31	63	31	63
F	E	D	C	B	A						

- Trần Thị Thẩm Ngọc, 9A, THCS Tôn Quang Phiệt, Thanh Chương, Nghệ An
- Nguyễn Văn Ngọc, 9C, THCS Nguyễn Cao, Quế Võ, Bắc Ninh ;
- Nguyễn Tiến Dũng, 9A1, THCS Chu Văn An, Thanh Hà, Hải Dương ;
- Trương Hoàng Long, 10I, THPT số 1 Bồ Trách, Quảng Bình ;
- Ngô Công Trường, 11 PT chuyên toán, ĐHKH Huế, Thừa Thiên - Huế ;
- Lê Tôn Chánh, 11 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Quy Nhơn, Bình Định ;
- Nguyễn Lệnh Quân, 10A1, PT chuyên toán, ĐHSP Hà Nội ;
- Nguyễn Trung Kiên, 14, B18, Nam Thành Công, Đống Đa, Hà Nội ;

PHI PHI

Tắc đường (kẹt xe) là chuyện thường ngày đối với các đô thị lớn. Vấn đề này không chỉ là mối quan tâm của các nhà quản lí, lực lượng cảnh sát, giao thông công chính, mà còn là một đề tài nghiên cứu của các nhà toán học. Bài toán tắc đường là một bài toán nhỏ cụ thể trong một bài toán tổng quát hơn, trừu tượng hơn thuộc lí thuyết vận trù, lí thuyết về graph, lí thuyết về nút v.v...

Sau đây là một số bài toán nhỏ về phân luồng xe để tránh tắc đường.

Người ta nghiệm thấy rằng thời gian để nhiều xe chạy hết một quãng đường nhất định theo 1 lộ trình là một hàm số (tăng) của lượng xe x chạy trên quãng đường đó, kí hiệu hàm đó là $T(x)$. Một phương án đi từ A đến D gọi là *ổn định* nếu chọn được một cách phân luồng xe đi theo các đường nào đó sao cho mọi cách đi khác nó đều đòi hỏi thời lượng lớn hơn.

Ở sơ đồ bên đã cho các hàm $T(x)$ trên những quãng đường AB, BD, AC, CD, trong đó x là số xe, $T(x)$ tính bằng phút.

Bài toán 1. Giả sử có $x = 6000$ xe mỗi sáng đi từ A đến D. Tính $T(x)$ khi phân luồng để $x_1 = 3000$ xe đi theo ABD và $x_2 = 3000$ xe đi theo ACD.

Lời giải. Thời lượng của 3000 xe đi từ A đến D theo 2 cách đều là $0,01 \cdot 3000 + 50 + 0,001 \cdot 2000 = 83$ (phút) nên $T(x) = T(x_1) = T(x_2) = 83$ phút.

Các bạn dễ thấy rằng khi $x = x_1 + x_2$ mà $x_1 > 3000 > x_2$ thì $T(x) = T(x_1) > 83 > T(x_2)$. Vậy phương án ở bài toán 1 là ổn định.

Bài toán 2. Một người có "sáng kiến" mở thêm con đường từ B đến C, với dụng ý xe lượng 6000 xe thành ba nhóm ($6000 = 2000 + 2000 + 2000$) đi theo ba luồng ABD, ABCD, ACD. Biết rằng trên BC thì $T(x) = 10 + 0,001 x_{BC}$.

Với cách phân làm ba luồng như thế thời gian tắc đường giảm được bao nhiêu phút?

Lời giải. Thưa rằng, tình hình lại trầm trọng hơn! Các bạn biết vì sao không?

Muốn có 2000 xe đi theo ABD và ABCD thì khi xuất phát từ A đến B phải có 4000 xe. Đến B thì có 2000 xe đi theo BD, 2000 xe đi theo BC. Sau khi đến C thì 2000 xe đó lại nhập cục với 2000 xe đi từ A đến C, thành ra từ C đến D lại có 4000 xe. Tính ra thì số phút đi theo ba luồng đều bằng:

$$(4000 \times 0,01) + (50 + 2000 \times 0,001) = (4000 \times 0,01) + (10 + 2000 \times 0,001) + (4000 \times 0,01) = (50 + 2000 \times 0,001) + (4000 \times 0,01) = 92 \text{ phút.}$$

Như thế là tăng thêm 9 phút!

Cho hay sáng kiến mà không có cơ sở khoa học thì đôi khi thành "tối kiến"!

Một người khác đề xuất một giải pháp sau với điều kiện địa hình cho phép.

Bài toán 3. Nếu mở thêm đường từ A qua E đến D với $T(x) = 71 + 0,002 x_{AED}$, $x = 6000$ xe thì cần phân luồng bao nhiêu xe đi theo 3 ngã đường ABD, ACD, AED để $T(x)$ nhỏ nhất?

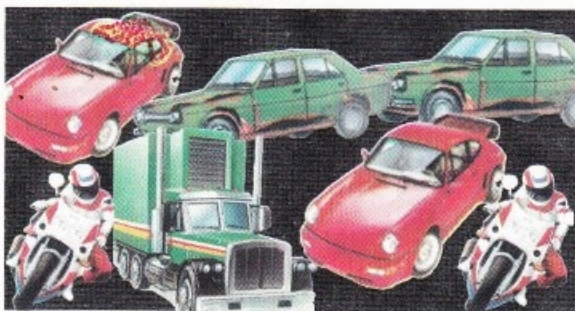
Lời giải. Giả sử phân luồng x_1, x_2, x_3 xe theo thứ tự đi theo các ngã đường ABD, ACD, AED thì $x_1 + x_2 + x_3 = x$. Ta thấy $T(x) = \max\{T(x_1), T(x_2), T(x_3)\}$ nên cần phân luồng để $T(x_1) = T(x_2) =$

$T(x_3) = T(x)$. Vì $T(x_1) = T(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$ nên giải hệ phương trình $2x_1 + x_3 = 6000$ và $0,01x_1 + 50 + 0,001x_1 = 71 + 0,002x_3$ được $x_1 = x_2 = 2200$ (xe) và $x_3 = 1600$ (xe); lúc đó $T(x) = T(x_1) = T(x_3) = 0,011 \cdot 2200 + 50 = 74,2$ (phút).

Với cách mở thêm đường AED và phân luồng như trên thì thời gian tắc đường giảm được 8,8 phút! Các bạn xét xem phương án này có ổn định không?

PHAN THANH QUANG

(Dựa theo Math 2000 - Đại học Montréal)



ISSN : 0866-8035

Chỉ số : 12884

Mã số : 8BT16M3

Chế bản tại Tòa soạn

In tại Nhà máy in Diên Hồng, 187B phố Giảng Võ

In xong và nộp lưu chiểu tháng 8 năm 2003

Giá : 3000đ

Ba nghìn đồng