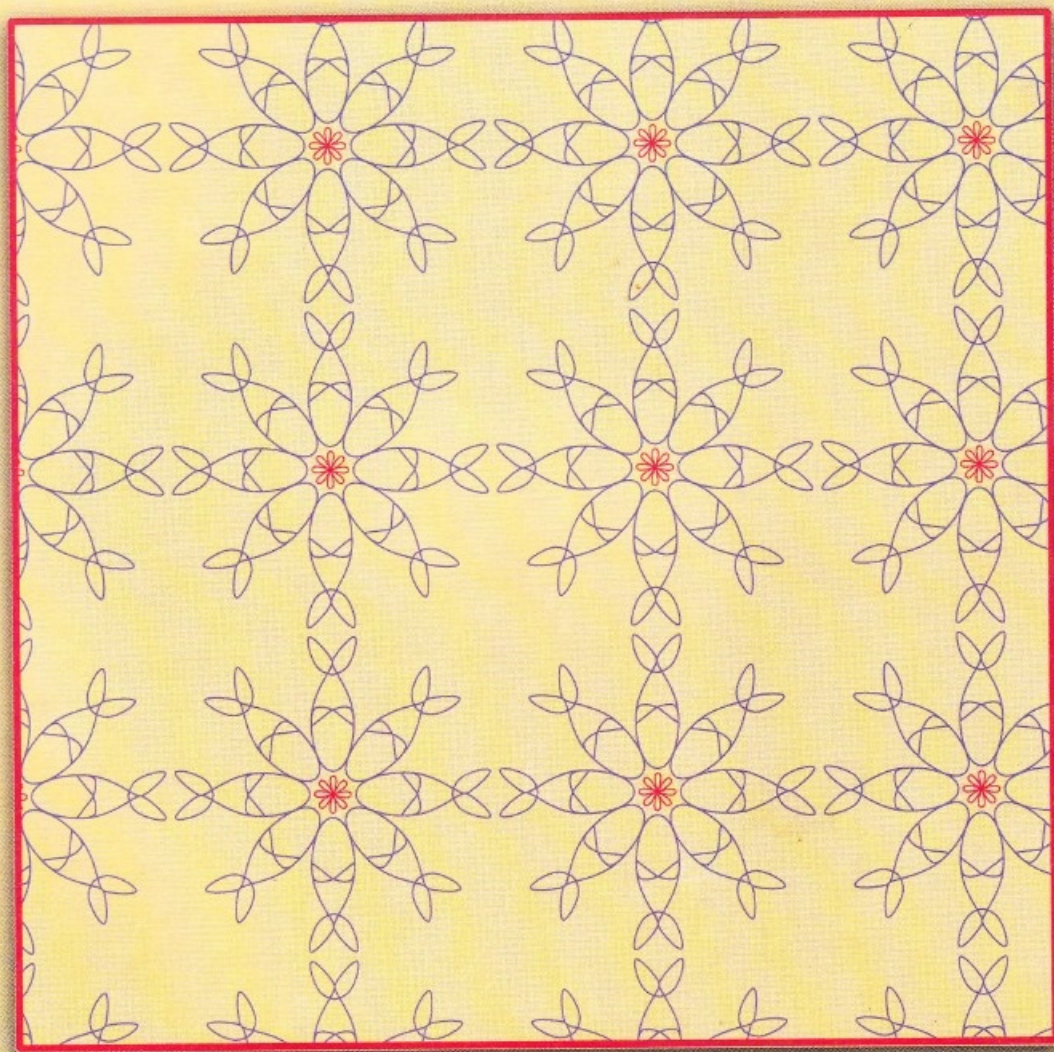


BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ✧ HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

Toán học & Tuổi trẻ

6
2003

SỐ 312 - NĂM THỨ 40 - TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG
DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ



ĐÀN CÁ VÀ BÔNG HOA



LỄ TẶNG SÁCH CỦA NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC TẠI TRƯỜNG THCS KIM LIÊN, NAM ĐÀN, NGHỆ AN



Giám đốc NXB Giáo dục Ngô Trần Ái và Hiệu trưởng Cao Xuân Lan. Ảnh : Bạch Kim

Sáng 17.5.2003 đoàn cán bộ, biên tập viên, công nhân viên NXB Giáo dục đã đến dâng hương tại nhà tưởng niệm và thăm quê nội, quê ngoại của Chủ tịch Hồ Chí Minh. Đặc biệt, nhân dịp này NXB Giáo dục đã tổ chức lễ trao tặng sách cho Nhà lưu niệm tại Nam Đàn và hai thư viện trường học tại Nghệ An nhằm giúp giáo viên và học sinh quê hương Chủ tịch Hồ Chí Minh có thêm sách và tài liệu phục vụ giảng dạy và học tập tốt. Trong sáng 17.5.2003 lễ tặng sách cho thư viện trường THCS Kim Liên, Nam Đàn đã tổ chức trong niềm vui đón nhận của thầy trò, nhà trường và chính quyền địa phương. Dự lễ có ông Nguyễn Đình Nhã, Cục trưởng Cục xuất bản Bộ Văn hóa Thông tin, ông Đỗ Xuân Tru, Vụ trưởng Vụ Tổ chức cán bộ Bộ Văn hóa Thông tin, ông Ngô Trần Ái, Giám đốc Nhà xuất bản Giáo dục, ông Lê Tiến Hưng, Giám đốc Sở Giáo dục Nghệ An, ông Nguyễn Xuân Hòa, Phó giám đốc NXB Giáo dục, ông Ngô Sĩ Dân, Trưởng phòng Tổ chức Lao động Tiền lương NXB Giáo dục, ông Nguyễn Quốc Luân,

Giám đốc NXB Từ điển Bách Khoa, đại diện VTV, các báo Văn hóa, Giáo dục & Thời đại, Gia đình & Xã hội, các tạp chí Toán học và Tuổi trẻ, Văn học và Tuổi trẻ, Toán Tuổi thơ, Sách Giáo dục và Thư viện trường học, đại diện UBND huyện Nam Đàn, xã Kim Liên, hiệu trưởng các trường của huyện Nam Đàn cùng hơn 1000 học sinh và giáo viên trường THCS Kim Liên...

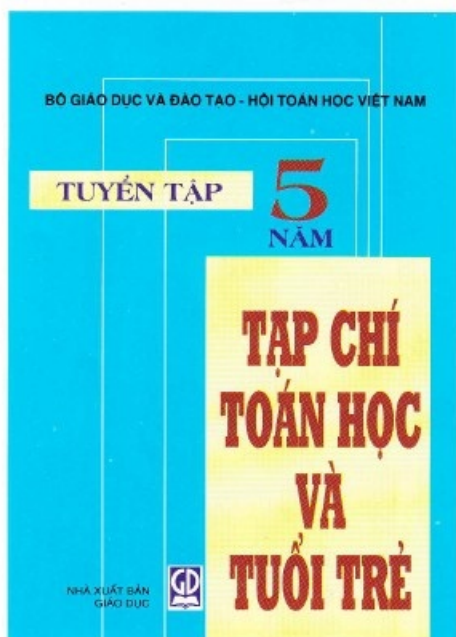
Trong lần này 460 tên sách với 4653 cuốn và các loại bản đồ, tranh ảnh, tạp chí đã được tặng với tổng giá trị sách là 50 triệu đồng. Nhà xuất bản Giáo dục còn hỗ trợ thư viện trường Kim Liên 15 triệu đồng để trang bị thêm giá sách, tủ phích và bàn ghế. Nhân dịp này Toán học và Tuổi trẻ cũng tặng thư viện trường Kim Liên 200 tờ tạp chí THPT.

Trước đó NXB Giáo dục đã tặng sách tại các trường thuộc Hà Nội, Nam Định, Hải Dương, Tp. Hồ Chí Minh, Bà Rịa - Vũng Tàu...

VKT

ĐƠN ĐỌC

TUYỂN TẬP 5 NĂM TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ



Toán học và Tuổi trẻ là tạp chí có truyền thống, có uy tín trong nhà trường. Số lượng phát hành đã đạt 30 nghìn bản và tiếp tục tăng. Tuyển tập 30 năm tạp chí Toán học và Tuổi trẻ đã được bạn đọc chào đón và hoan nghênh. Nhiều bạn tỏ ý muốn được đọc các tuyển tập tiếp theo.

Thể theo nguyện vọng của độc giả, nhân dịp kỷ niệm 40 năm ngày ra số báo Toán học và Tuổi trẻ đầu tiên, Tuyển tập 5 năm tạp chí Toán học và Tuổi trẻ sắp ra mắt bạn đọc trong một ngày gần đây. Tuyển tập bao gồm các bài viết chọn lọc trong các số Tạp chí đã in ra từ 1991 đến 1995. Sách dày 300 trang, khổ 19 x 27 gồm có 2 phần :

Phần thứ nhất : Các bài viết tuyển chọn.

Phần thứ hai : Các đề toán hay và lời giải.

Bạn đọc có nhu cầu cần đặt mua tại các Công ty Sách và thiết bị trường học tại địa phương, các cơ sở Bưu điện tỉnh, thành phố và các quận, huyện. Các đơn vị đặt mua nhiều xin liên hệ theo địa chỉ:

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ, 187B GIẢNG VÕ - HÀ NỘI
Điện thoại - Fax : (04)5144272.

Dành cho các bạn TRUNG HỌC CƠ SỞ



GIẢI TOÁN BẤT ĐẲNG THỨC VÀ CỰC TRỊ DỰA VÀO PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

HOÀNG HẢI DƯƠNG
(GV THCS Chu Mạnh Trinh,
Văn Giang, Hưng Yên)

Trong chương trình toán THCS, các bài tập về bất đẳng thức (BĐT) và cực trị luôn là những bài toán khó, gây lúng túng cho nhiều học sinh bởi vì kiến thức toán THCS rất ít đề cập trực tiếp đến vấn đề này. Bài viết này trình bày một số bài toán chứng minh BĐT và cực trị dựa vào dấu hiệu có nghiệm của phương trình (PT) bậc hai.

MỘT SỐ BÀI TOÁN CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

Bài toán 1. Giả sử cho ba số thực a, b, c thỏa mãn các điều kiện: $a > 0, bc = 2a^2, a+b+c =$

abc . Chứng minh rằng: $a \geq \sqrt{\frac{1+2\sqrt{2}}{2}}$

Lời giải. Ta có: $bc = 2a^2$ và $b+c = abc - a = 2a^3 - a$. Theo hệ thức Vi-ét thì b, c là nghiệm của phương trình:

$$x^2 - (2a^3 - a)x + 2a^2 = 0$$

PT có nghiệm khi $\Delta = a^2(4a^4 - 4a^2 - 7) \geq 0$
 $\Rightarrow a^2 \geq \frac{1+2\sqrt{2}}{2}$, kết hợp với $a > 0$ được

$$a \geq \sqrt{\frac{1+2\sqrt{2}}{2}}$$

Bài toán 2. Giả sử ba số thực a, b, c thỏa mãn các điều kiện: $\begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 2 & (1) \\ ab + bc + ca = 1 & (2) \end{cases}$

Chứng minh rằng $-4 < a+b+c < 4$.

Lời giải. Từ (1) có $a^2 + b^2 + c^2 + 2 = 4$

Kết hợp với (2) được

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) = 4$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)^2 = 4 \Leftrightarrow a+b+c = \pm 2$$

Trường hợp 1: Nếu $a+b+c = 2$. Kết hợp với (2) có $bc = 1 - a(b+c) = (a-1)^2$

Theo hệ thức Vi-ét thì b, c là nghiệm của phương trình: $x^2 + (a-2)x + (a-1)^2 = 0$

PT có nghiệm khi $\Delta \geq 0 \Rightarrow a(4-3a) \geq 0$
 $\Rightarrow 0 \leq a \leq \frac{4}{3}$. Tương tự $0 \leq b, c \leq \frac{4}{3}$ do đó
 $0 \leq a+b+c \leq 4$ nhưng đẳng thức không thể xảy ra nên $0 < a+b+c < 4$.

Trường hợp 2. Nếu $a+b+c = -2$. Xét tương tự trường hợp 1 có $-4 < a+b+c < 0$. Kết hợp cả 2 trường hợp ta có đpcm.

Bài toán 3. Cho các số a, b, c thỏa mãn $(a+c)(a+b+c) < 0$ (3)

Chứng minh rằng: $(b-c)^2 > 4a(a+b+c)$ (4)

Lời giải. 1) Nếu $a = 0$ từ (3) có $c(b+c) < 0$. Nếu $b = c$ thì $2c^2 < 0$, điều này không xảy ra. Vậy $b \neq c \Rightarrow (b-c)^2 > 0$.

2) Nếu $a \neq 0$. Xét tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + (b-c)x + a+b+c$, có $f(0) = a+b+c, f(-1) = 2(a+c)$.

Từ đó: $f(0)f(-1) = 2(a+c)(a+b+c) < 0$ nên phương trình $f(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt
 $\Rightarrow \Delta = (b-c)^2 - 4a(a+b+c) > 0 \Rightarrow (b-c)^2 > 4a(a+b+c)$ (đpcm).

Bài toán 4. Giả sử phương trình

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (a \neq 0) \quad (5)$$

có hai nghiệm khác nhau là x_1, x_2 . Chứng minh rằng: $x_1 x_2 \geq \frac{4ac-b^2}{4a^2}$

Lời giải. Vì x_1, x_2 là nghiệm của (5) nên ta có:

$$\begin{cases} ax_1^3 + bx_1^2 + cx_1 + d = 0 \\ ax_2^3 + bx_2^2 + cx_2 + d = 0 \end{cases}$$

Trừ theo từng vế của hai đẳng thức trên được:

$$a(x_1^3 - x_2^3) + b(x_1^2 - x_2^2) + c(x_1 - x_2) = 0$$

Vì $x_1 \neq x_2$ nên $a(x_1 + x_2)^2 + b(x_1 + x_2) + c - ax_1 x_2 = 0$

Ta nhận thấy : $x_1 + x_2$ là nghiệm của phương trình bậc hai :

$$at^2 + bt + c - ax_1x_2 = 0$$

Để PT này có nghiệm thì $\Delta = b^2 - 4ac + 4a^2x_1x_2 \geq 0 \Leftrightarrow x_1x_2 \geq \frac{4ac - b^2}{4a^2}$ (dpcm)

MỘT SỐ BÀI TOÁN CỰC TRỊ

Bài toán 5. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $a = \frac{2x^2 + 4x + 5}{x^2 + 1}$

Lời giải. Biểu thức nhận giá trị $a \Leftrightarrow$ phương trình $a = \frac{2x^2 + 4x + 5}{x^2 + 1}$ (6) có nghiệm

$$\text{Do } x^2 + 1 > 0 \text{ nên (6)} \\ \Leftrightarrow x^2(a - 2) - 4x + a - 5 = 0 \quad (7)$$

$$1) \text{ Nếu } a = 2 \text{ thì (7) có nghiệm } x = -\frac{3}{4}$$

$$2) \text{ Nếu } a \neq 2.$$

$$\text{PT (7) có nghiệm } \Leftrightarrow \Delta' = 4 - (a - 2)(a - 5) \geq 0 \\ \Leftrightarrow a^2 - 7a + 6 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq a \leq 6 \quad (a \neq 2)$$

$$\text{Với } a = 1 \text{ thì } x = -2.$$

$$\text{Với } a = 6 \text{ thì } x = \frac{1}{2}$$

Kết hợp cả hai trường hợp 1 và 2, ta có : giá trị nhỏ nhất (GTNN) của a là 1 khi $x = -2$, giá trị lớn nhất (GTLN) của a là 6 khi $x = \frac{1}{2}$.

Bài toán 6. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $b = 2x^2 + 4xy + 5y^2$, biết rằng $x^2 + y^2 = a$ với a là hằng số lớn hơn hoặc bằng 1.

Lời giải. Vì $a \geq 1$ nên có

$$\frac{b}{a} = \frac{2x^2 + 4xy + 5y^2}{a} = \frac{2x^2 + 4xy + 5y^2}{x^2 + y^2}$$

$$1) \text{ Nếu } y = 0 \Rightarrow \frac{b}{a} = 2$$

$$2) \text{ Nếu } y \neq 0 \text{ đặt } t = \frac{x}{y} \text{ thì } \frac{b}{a} = \frac{2t^2 + 4t + 5}{t^2 + 1}$$

Theo bài toán 5 điều kiện để PT ẩn t trên có nghiệm khi $1 \leq \frac{b}{a} \leq 6$ nên $a \leq b \leq 6a$ (vì $a \geq 1$). Từ đó suy ra biểu thức b có GTLN là $6a$ khi

$$\frac{x}{y} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow y = 2x \text{ hay khi } (x, y) \text{ lấy giá trị}$$

$$\left(\frac{\sqrt{5a}}{5}, \frac{2\sqrt{5a}}{5}\right); \left(\frac{-\sqrt{5a}}{5}, \frac{-2\sqrt{5a}}{5}\right) \text{ và } b \text{ có}$$

$$\text{GTNN là } a \text{ khi } \frac{x}{y} = -2 \Leftrightarrow x = -2y \text{ hay khi}$$

$$(x, y) \text{ lấy giá trị } \left(\frac{2\sqrt{5a}}{5}, \frac{-\sqrt{5a}}{5}\right); \left(\frac{-2\sqrt{5a}}{5}, \frac{\sqrt{5a}}{5}\right)$$

Bài toán 7. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $c = 2\sqrt{x} + \frac{3}{2}\sqrt{1-x} + \frac{7}{2}$

Lời giải. Điều kiện $0 \leq x \leq 1$. Đặt $z = \sqrt{x}$, $y = \sqrt{1-x}$ thì $z^2 + y^2 = 1$ (8). Ta cần tìm GTLN và GTNN của $d = 4z + 3y$ với $2c = d + 7$. Điều kiện: $0 \leq z, y \leq 1$ và $0 < d < 7$.

Thay $9y^2 = (d - 4z)^2$ vào (8) được

$$25z^2 - 8dz + d^2 - 9 = 0$$

$$\text{Để PT này có nghiệm } z \text{ thì } \Delta \geq 0 \Rightarrow d^2 \leq 25 \\ \Rightarrow d \leq 5.$$

• GTLN của d là 5 $\Leftrightarrow$ GTLN của c là 6 và đạt được khi $z = \frac{4d}{25} = \frac{4}{5} \Rightarrow x = z^2 = \frac{16}{25}$ (thỏa mãn $0 \leq x \leq 1$).

• $d = 4z + 3y \geq 2\sqrt{12yz}$. Đẳng thức xảy ra khi $4z = 3y$. Thay vào (8) tính được $z = \frac{3}{20}$, $y = \frac{1}{5}$, $x = \frac{9}{400}$ (thỏa mãn $0 \leq x \leq 1$). Lúc đó GTNN của

$$d \text{ là } 2\sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{6}{5} \Rightarrow \text{GTNN của } c \text{ là } \frac{41}{10} = 4,1.$$

Với cách sử dụng điều kiện có nghiệm của phương trình bậc hai, các bạn hãy làm tiếp các bài tập dưới đây.

BÀI TẬP

$$1) \text{ Chứng minh rằng : } 3x + 4\sqrt{1-x^2} \leq 5$$

2) Tìm GTLN và GTNN của biểu thức

$$\frac{\sqrt{x-1} - 2\sqrt{2-x} + 3}{\sqrt{x-1} + 2\sqrt{2-x} + 3}$$

3) Tìm GTLN và GTNN của biểu thức

$$x + \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} \text{ với } x > 0.$$

TIN BUỒN



Thứ trưởng Bộ Giáo dục và Đào tạo **LÊ VŨ HÙNG** sinh năm 1952, tại xã Nhơn Ái, huyện Châu Thành, tỉnh Cần Thơ, Ủy viên Ban Cán sự Đảng, Bí thư Đảng ủy Bộ Giáo dục và Đào tạo, Ủy viên Thường vụ Đảng ủy Khối Cơ quan Khoa giáo Trung ương, Ủy viên BCH Hội Khuyến học Việt Nam, Ủy viên Ủy ban Thể dục - Thể thao, Chủ tịch Hội Thể thao Đại học và Chuyên nghiệp Việt Nam, trực tiếp chỉ đạo Nhà xuất bản Giáo dục, do bị bệnh hiểm nghèo, đã từ trần hồi 5 giờ 15 phút ngày 27-5-2003 tại Bệnh viện Hữu nghị, Hà Nội. Lễ viếng và truy điệu được tổ chức vào ngày 28-5-2003 tại nhà tang lễ số 5 Trần Thánh Tông, Hà Nội. Lễ viếng được tổ chức vào ngày 29-5-2003 tại nhà tang lễ thành phố Hồ Chí Minh. An táng tại nghĩa trang thành phố Hồ Chí Minh.

Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ xin gửi đến gia quyến Thứ trưởng Lê Vũ Hùng lời chia buồn sâu sắc nhất.

TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

THƯƠNG NHỚ THỨ TRƯỞNG LÊ VŨ HÙNG

Vẫn biết, đời người ai cũng sẽ có một lần đi xa, đi xa mãi mãi !

Nhưng Anh đã ra đi một cách bất ngờ khiến toàn thể cán bộ công nhân viên NXB Giáo dục, ai nấy bàng hoàng và thương nhớ !

Đối với NXB Giáo dục, Anh lo lắng khi chúng tôi gặp khó khăn, Anh vui mừng khi chúng tôi thành công; Anh lo toan suy nghĩ giúp chúng tôi thực hiện những công việc có ích cho ngành, cho xã hội ; Anh gợi ý cho chúng tôi con đường tốt đẹp phải đi lên phía trước.

Anh luôn im lặng, lắng nghe và gợi mở. Được làm việc với Anh, chúng tôi luôn cảm thấy gần gũi, tin cậy. Vì thế, khi vắng Anh, chúng tôi thấy trống vắng vô cùng !

Chúng tôi, không thể nào quên, khi Anh cầm những quyển SGK mới lớp 1 và lớp 6, đẹp hơn, tốt hơn, đã mừng vui như một em nhỏ tuổi trong ngày

xuân được manh áo mới ; Anh xúc động dặn chúng tôi phải làm đẹp hơn nữa, càng ngày càng đẹp, để mỗi học sinh thấy được *tâm lòng* của chúng ta qua từng trang sách.

Năm nay, những trang SGK mới lớp 2 và lớp 7 tiếp tục ra đời ; lời dặn dò của Anh còn âm vang đầu óc, khiến chúng tôi lại càng thương nhớ Anh không nguôi.

Người ta nói, người ở lại càng thương tiếc, rơi nước mắt, thì người đi xa càng lưu luyến và không đành lòng yên nghỉ.

Nhưng, nghĩa tình sâu nặng của Anh đã dành cho chúng tôi, hỏi làm sao chúng tôi không thương tiếc ! Chúng tôi dặn lòng đừng rơi nước mắt nhưng nước mắt vẫn trào ra !

Tưởng nhớ đến Anh !

NGÔ TRẦN ÁI

Nhà xuất bản Giáo dục

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC -

35 TRIỆU ĐỒNG TẶNG CÁC CHÁU KHUYẾT TẬT NHÂN NGÀY 1.6.2003

Chiều ngày 30.5.2003, nhân ngày Quốc tế Thiếu nhi 1.6, Nhà xuất bản Giáo dục đã phối hợp với Trung ương Hội cứu trợ trẻ em tàn tật Việt Nam tổ chức lễ trao quà cho các cháu đang điều trị tại Trung tâm 1 - Viện Châm cứu Trung ương. Phó Chủ tịch nước Cộng hòa xã hội chủ nghĩa Việt Nam Trương Mỹ Hoa, Nguyên Phó Thủ tướng Nguyễn Khánh đã đến dự lễ trao quà.

170 suất quà cùng một số sách, truyện trị giá 5 triệu đồng được trao cho 150 cháu đang điều trị tại đây và 20 suất tặng các cháu thiếu nhi của CLB

Văn nghệ trẻ em khuyết tật Hà Nội đến tham dự chương trình.

Cũng nhân dịp này, Nhà xuất bản Giáo dục đã tặng Trung ương Hội cứu trợ trẻ em tàn tật Việt Nam, Trung tâm cứu trợ trẻ em tàn tật tỉnh Thái Bình và Trung tâm cứu trợ trẻ em tàn tật tỉnh Nam Định, mỗi đơn vị 10 triệu đồng để hỗ trợ nuôi dưỡng, chăm sóc, điều trị bệnh cho các cháu.

Đây là một trong rất nhiều hoạt động quyền góp từ thiện của Nhà xuất bản Giáo dục từ năm 2002 đến nay. Tính đến tháng 5/2003, Nhà xuất bản Giáo dục đã quyền góp được 430.201.430 đồng tiền mặt và sách tặng các gia đình chính sách, trẻ em nghèo, trẻ em khuyết tật và một số thư viện trường học.

LỜI GIẢI ĐỀ TOÁN THI TUYỂN SINH LỚP 10

TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG, NAM ĐỊNH 2002

(Đề thi đã đăng trong THPT số 311, tháng 5/2003)

Câu I. Ta có :

$$1) \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}} = \frac{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}{(n+1)^2 n - n^2 (n+1)}$$

$$= \frac{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}{n(n+1)} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

2) Áp dụng đẳng thức trên lần lượt với $n = 1, 2, \dots, 99$ rồi cộng theo từng vế các đẳng thức đó ta được $S = 1 - \frac{1}{\sqrt{100}} = \frac{9}{10}$.

Câu II. Điều kiện $x > 0$. Tọa độ điểm $M(x, y)$ là nghiệm của hệ PT :

$$\begin{cases} y = x + 1 & (1) \\ y^2 - 3y\sqrt{x} + 2x = 0 & (2) \end{cases}$$

Giải PT (2) được nghiệm $y_1 = 2\sqrt{x}, y_2 = \sqrt{x}$. Thay vào PT (1) và giải PT bậc 2 đối với $\sqrt{x}$ tìm được nghiệm $x = 1 \Rightarrow y = 2$. Điểm $M(1, 2)$ thỏa mãn đề bài.

Câu III. a) Giả sử hai phương trình sau có nghiệm chung :

$$x^2 - (2m - 3)x + 6 = 0 \quad (1)$$

$$2x^2 + x + m - 5 = 0 \quad (2)$$

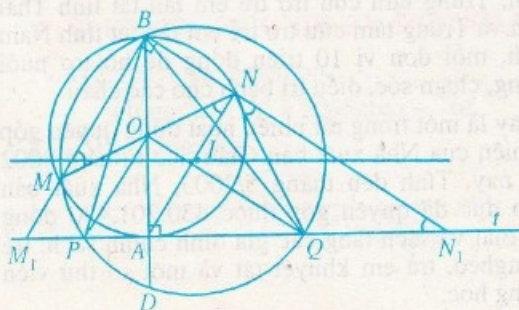
Thay $m = -2x^2 - x + 5$ vào PT (1) được

$$4x^3 + 3x^2 - 7x + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 2)(4x^2 - 5x + 3) = 0$$

$\Rightarrow x = -2 \Rightarrow m = -1$. Thay vào thấy PT (1) và PT (2) chỉ có 1 nghiệm chung là $x = -2$.

Câu IV. 1) $\widehat{AN_1B} = 90^\circ - \widehat{ABN_1} = 90^\circ - \widehat{BNM} = \widehat{BMN} \Rightarrow \widehat{M_1MN} + \widehat{M_1N_1N} = 180^\circ$ nên tứ giác MM_1N_1N nội tiếp được.



2) $\triangle AMM_1$ và $\triangle ANN_1$ vuông ở M, N nên $MP = PM_1 = AP, NQ = QN_1 = AQ$. Từ đó $\widehat{MNQ} = \widehat{MNA} + \widehat{ANQ} = \widehat{BAN} + \widehat{NAQ} = 90^\circ$. Tương tự $\widehat{NMP} = 90^\circ$. Do đó $MPQN$ là hình thang. Nếu $M_1N_1 = 4R$ thì $PQ = 2R = MN$ nên $MPQN$ là hình chữ nhật.

3) Phần thuận : Vì $OP \parallel BM_1$ và $OQ \parallel BN_1$ nên $\widehat{POQ} = 90^\circ$. Giả sử đường tròn tâm I ngoại tiếp $\triangle BPQ$ cắt đường thẳng AB tại B và D . Dễ thấy $\triangle APD \sim \triangle ABQ$ nên $AD \cdot AB = AP \cdot AQ \Rightarrow AD \cdot AB = OA^2 \Rightarrow AD = R/2$. Vì vậy đường tròn ngoại tiếp $\triangle BPQ$ luôn đi qua điểm D cố định. Vì $IB = ID$ nên điểm I luôn nằm trên đường trung trực của BD .

Phần đảo. Lấy điểm I nào đó trên đường trung trực của BD . Dựng đường tròn bán kính $IB = ID$ cắt đường thẳng t tại P và Q . Trên đường thẳng t lấy các điểm M_1, N_1 sao cho P là trung điểm của AM_1 và Q là trung điểm của AN_1 . Từ $\triangle APD \sim \triangle ABQ$ có $AP \cdot AQ = AB \cdot AD = R^2 = AO^2$. Dựng đường tròn đường kính PQ cắt tia AB tại E thì $\widehat{PEQ} = 90^\circ$ và $AE^2 = AP \cdot AQ = AO^2 \Rightarrow E$ trùng với O . Vì OP, OQ tương ứng là đường trung bình của $\triangle ABM_1, \triangle ABN_1$ nên $\widehat{M_1BN_1} = 90^\circ \Rightarrow MN$ là đường kính của đường tròn tâm O .

Kết luận : Tập hợp tâm các đường tròn ngoại tiếp $\triangle BPQ$ là đường trung trực của BD .

Câu V. (Bạn đọc tự vẽ hình)

Gọi C là giao điểm của đoạn OA với đường tròn (O) .

Gọi I là trung điểm của OC thì I là điểm cố định. Khi đó $\triangle OIM \sim \triangle OMA \Rightarrow AM = 2IM$. Vậy $MA + 2MB = 2IM + 2MB = 2(IM + MB) \geq 2BI$ không đổi. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow 3$ điểm B, M, I thẳng hàng. Vậy $MA + 2MB$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow M$ là giao điểm của đoạn thẳng BI với đường tròn (O) .

Câu VI. 1) Đặt $x = \sqrt{a+\sqrt{b}} + \sqrt{a-\sqrt{b}}$
 $\Rightarrow x > 0$ và $x^2 = 2(a + \sqrt{a^2 - b})$
 $\Rightarrow \sqrt{a+\sqrt{b}} + \sqrt{a-\sqrt{b}} = 2\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}$ (1)

Tương tự cũng chứng minh được :

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} - \sqrt{a-\sqrt{b}} = 2\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}} \quad (2)$$

Cộng theo từng vế (1) và (2) được dpcm.

2) Ta có : $2 + \sqrt{3} = \frac{4+2\sqrt{3}}{2} = \frac{(1+\sqrt{3})^2}{2}$
 $\Rightarrow \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}} = \frac{(1+\sqrt{3})^2/2}{\sqrt{2}[1+\sqrt{3}]/\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{6}}$ (3)

Tương tự cũng chứng minh được :

$$\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{6}} \quad (4)$$

Cộng theo từng vế của (3) và (4) với chú ý rằng $\frac{7}{5} < \sqrt{2} < \frac{29}{20}$ được dpcm.

Câu VII.

$$P = (x^4+1)(y^4+1) = (x^4+y^4) + (xy)^4 + 1$$

Đặt $t = xy$, ta có :

$$x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = 10 - 2t$$

$$x^4 + y^4 = (x^2+y^2)^2 - 2(xy)^2 = (10-2t)^2 - 2t^2 = 2t^2 - 40t + 100$$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó } P &= t^4 + 2t^2 - 40t + 101 \\ &= t^4 + 2t^2 - 40t + 101 \\ &= (t^4 - 8t^2 + 16) + 10(t^2 - 4t + 4) + 45 \\ &= (t^2 - 4)^2 + 10(t-2)^2 + 45 \Rightarrow P \geq 45 \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi $x + y = \sqrt{10}$ và $xy = 2$

Suy ra GTNN của P là $P = 45$ khi (x, y) bằng

$$\left(\frac{\sqrt{10}+\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{2}\right) \text{ hoặc } \left(\frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{10}+\sqrt{2}}{2}\right)$$

Câu VIII. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \frac{x}{x-y} + \frac{y}{y-z} + \frac{z}{z-x} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \frac{x}{(x-y)^2} + \frac{y}{(y-z)^2} + \frac{z}{(z-x)^2} = 0 \end{cases} \quad (2)$$

* Điều kiện x, y, z đôi một khác nhau.

* Chia cả hai vế của PT (1) lần lượt cho $x-y$, $y-z$ và $z-x$ rồi cộng lại và biến đổi, áp dụng (2) được :

$$\begin{aligned} &\frac{x}{(z-x)(y-z)} + \frac{y}{(x-y)(z-x)} + \frac{z}{(y-z)(x-y)} = 0 \\ &\Rightarrow x(x-y) + y(y-z) + z(z-x) = 0 \\ &\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = 0 \\ &\Rightarrow (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 = 0 \\ &\Rightarrow x = y = z \text{ (loại). Hệ PT vô nghiệm.} \end{aligned}$$

Câu IX. Sử dụng các công thức :

$$S = \frac{abc}{4R} \text{ và } 2S = ax + by + cz \text{ ta có}$$

$$\begin{aligned} \frac{a^2+b^2+c^2}{2R} &= \frac{(a^2+b^2+c^2)2S}{abc} = \\ &= \frac{(a^2+b^2+c^2)(ax+by+cz)}{abc} \quad (1) \end{aligned}$$

Áp dụng các bất đẳng thức

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca \text{ và}$$

$$(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \geq (ax + by + cz)^2 \text{ có}$$

$$\begin{aligned} \frac{(a^2+b^2+c^2)(ax+by+cz)}{abc} &\geq \\ &\geq \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)(ax+by+cz) \geq (\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z})^2 \quad (2) \end{aligned}$$

Từ (1) và (2) có dpcm.

Câu X. Gọi 10 điểm của tập $\mathcal{P}$ là : $A_1, A_2, \dots, A_{10}$ và bậc của các điểm đó lần lượt là $s_1, s_2, \dots, s_{10} \Rightarrow s_i$ là các số tự nhiên và $0 \leq s_i \leq 9$ ($i = 1, 2, \dots, 10$)

a) Trường hợp $s_1 s_2 \dots s_{10} \neq 0 \Rightarrow s_1, s_2, \dots, s_{10} \neq 0 \Rightarrow 1 \leq s_i \leq 9$ ($i = 1, 2, \dots, 10$). Vì từ 1 đến 9 chỉ có 9 số tự nhiên mà 10 số tự nhiên s_i đều ở trong đoạn $[1, 9]$ nên trong các số $s_1, s_2, \dots, s_{10}$ có ít nhất 2 số bằng nhau suy ra trong tập $\mathcal{P}$ có ít nhất 2 điểm cùng bậc.

b) Trường hợp $s_1 s_2 \dots s_{10} = 0$ thì trong các số s_i có ít nhất 1 số bằng 0, giả sử $s_k = 0$ lúc đó không có đoạn thẳng nào của tập $\mathcal{P}$ nối từ điểm A_k đến các điểm còn lại nên $s_i < 9$ ($i = 1, 2, \dots, 10$) $\Rightarrow 0 \leq s_i \leq 8$ ($i = 1, 2, \dots, 10$). Vì từ 0 đến 8 chỉ có 9 số tự nhiên mà 10 số tự nhiên s_i đều ở trong đoạn $[0, 8]$ nên trong các số $s_1, s_2, \dots, s_{10}$ có ít nhất 2 số bằng nhau $\Rightarrow$ trong tập $\mathcal{P}$ có ít nhất 2 điểm cùng bậc.

Tóm lại trong $\mathcal{P}$ có ít nhất 2 điểm cùng bậc.

Hướng dẫn giải
 TRẦN XUÂN ĐẮNG

THI KHU VỰC

GIẢI TOÁN TRÊN MÁY TÍNH CASIO LẦN THỨ BA – 2003

TẠ DUY PHƯƠNG (Viện Toán học)

NGUYỄN HỮU THẢO (Vụ Trung học Phổ thông)

Ngày 20.2.2003, Bộ Giáo dục và Đào tạo đã tổ chức kỳ thi khu vực “Giải toán trên máy tính Casio lần thứ ba”. 51 tỉnh, thành đã cử đội tuyển dự thi tại 4 địa điểm: Thái Nguyên, Nam Định, Thừa Thiên - Huế và Đồng Nai. Một điều khác so với hai kỳ thi trước là, ngoài hai đội tuyển Trung học Cơ sở và Trung học Phổ thông, trong kỳ thi này, mỗi tỉnh còn cử một đội tuyển Trung học Bồi túc.

Thế hệ máy mới Casio fx-500 MS và Casio fx-570 MS với các tính năng giải toán cao hơn hẳn thế hệ máy Casio fx-220 và Casio fx-500A (khả năng tính toán theo biểu thức đại số, giải phương trình phức tạp, tính ma trận ngược, tính gần đúng đạo hàm và tích phân,...) đã được đưa vào sử dụng trong trường phổ thông và trong kỳ thi “Giải toán trên máy tính Casio”. Đây là điểm mới của kỳ thi này. Tuy nhiên, đề thi đã được soạn để có thể giải trên một trong bốn loại máy mà không ảnh hưởng đến tốc độ làm bài.

Thí sinh được giải sẽ được cộng điểm trong các kỳ thi tốt nghiệp, được bảo lưu kết quả trong suốt cấp học.

Đã có 50% số thí sinh mỗi cấp của từng khu vực được trao giải (nhất: 800000 đ, nhì: 500000 đ, ba: 300000 đ, khuyến khích: 150000 đ).

Bài viết này phân tích hai dạng bài trong đề chính thức và dự bị của Trung học Cơ sở để các bạn tham khảo.

Dạng 1. Trợ giúp tích cực của máy tính trong thi học sinh giỏi toán

Một số bài dưới đây có thể được coi là các bài thi học sinh giỏi toán cho Trung học Cơ sở. Tuy nhiên, để có thể nhanh chóng giải được các bài toán này, cần đến sự trợ giúp của máy tính.

Bài 1. Tìm các chữ số a, b, c, d để ta có:

$$\overline{a5} \times \overline{bcd} = 7850.$$

Giải. Số $\overline{a5}$ là ước của 7850.

Bằng cách thử trên máy khi cho $a = 0, 1, 2, \dots, 8, 9$ ta thấy rằng a chỉ có thể bằng 2. Khi $a = 2$ thì (tính trên máy) $\overline{bcd} = 7850 : 25 = 314$.

Đáp số. $a = 2; b = 3; c = 1; d = 4$.

Bài 2. Tìm các số có không quá 10 chữ số mà khi ta đưa chữ số cuối cùng lên vị trí đầu tiên thì số đó tăng lên gấp 5 lần.

Giải. Giả sử $a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n$ là số cần tìm.

Theo bài ra: $\overline{a_n a_1 a_2 \dots a_{n-1}} = 5 \times \overline{a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n}$.

Từ đây ta có:

$$a_n \times 10^{n-1} + \overline{a_1 a_2 \dots a_{n-1}} = 5(\overline{a_1 a_2 \dots a_{n-1}} \times 10 + a_n)$$

hay $a_n \times (10^{n-1} - 5) = 49 \times \overline{a_1 a_2 \dots a_{n-1}}$, tức là $a_n \times 99 \dots 95 = 49 \times \overline{a_1 a_2 \dots a_{n-1}}$, trong đó số $9 \dots 95$ có $n-2$ chữ số 9. Số đã cho có không quá 10 chữ số nên $n-2 \leq 8$.

Do a_n là số có một chữ số nên a_n không thể chia hết cho $49 = 7 \times 7$, chứng tỏ $99 \dots 95$ phải chia hết cho 7.

Lần lượt lấy các số 95, 995, 9995, 99995, 999995, 9999995, 99999995, 999999995 chia cho 7 (tính trên máy) ta tìm được duy nhất một số chia hết cho 7 là $99995 = 7 \times 14285$. Vậy

$$a_6 \times 99995 = 49 \times \overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5}$$

$$\text{hay } a_6 \times 14285 = 7 \times \overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5}.$$

Vì (thử trên máy) số 14285 không chia hết cho 7 nên $a_6 = 7$.

Số cần tìm là 142857 (duy nhất một số).

Bài 3. Hãy tìm năm chữ số cuối cùng của $F_{24} = 2^{2^{24}} + 1$ (số Fermat thứ 24).

Giải. Ta tìm số dư khi chia $F_{24} = 2^{2^{24}} + 1$ cho 100000. Vì $2^{2^{n+1}} = 2^{2^n} \times 2^{2^n}$ và nếu $a_1 \equiv a_2 \pmod{c}$ và $b_1 \equiv b_2 \pmod{c}$ thì $a_1 \times b_1 \equiv a_2 \times b_2 \pmod{c}$. Vậy nếu $2^{2^n} \equiv a$ thì $2^{2^{n+1}} \equiv a^2$. Từ đây ta có thể tính đồng dư của 2^{2^n} theo mod 100000 như sau (tính trên máy):

$$\begin{aligned}
2^{2^1} &= 4; 2^{2^2} = 16; 2^{2^3} = 256; 2^{2^4} = 65536; \\
2^{2^5} &= 67296; 2^{2^6} = 51616; 2^{2^7} = 11456; \\
2^{2^8} &= 39936; 2^{2^9} = 84096; 2^{2^{10}} = 37216; \\
2^{2^{11}} &= 30656; 2^{2^{12}} = 90336; 2^{2^{13}} = 92896; \\
2^{2^{14}} &= 66816; 2^{2^{15}} = 77856; 2^{2^{16}} = 56736; \\
2^{2^{17}} &= 73696; 2^{2^{18}} = 416; 2^{2^{19}} = 73056; \\
2^{2^{20}} &= 79136; 2^{2^{21}} = 6496; 2^{2^{22}} = 98016; \\
2^{2^{23}} &= 36256; 2^{2^{24}} = 97536.
\end{aligned}$$

Vậy $2^{2^{24}} + 1 \equiv (97536 + 1)$. Chứng tỏ năm chữ số cuối cùng của (số Fermat thứ 24) $F_{24} = 2^{2^{24}} + 1$ là 97537.

Bài 4. Giải phương trình

$$x^2 - 2003[x] + 2002 = 0,$$

trong đó $[x]$ là phần nguyên của x .

Giải. Ký hiệu $[x] = n$. Phương trình đã cho có dạng: $x^2 + 2002 = 2003n$. Vì $0 < n \leq x < n+1$ nên ta có:

$$n^2 + 2002 \leq x^2 + 2002 < (n+1)^2 + 2002.$$

Thay $x^2 + 2002 = 2003n$ vào bất phương trình trên ta được:

$$n^2 + 2002 \leq 2003n < (n+1)^2 + 2002.$$

Bất phương trình này tương đương với hệ

$$\begin{cases} n^2 - 2003n + 2002 \leq 0 \\ n^2 - 2001n + 2003 > 0 \end{cases}$$

hay (giải trên máy):

$$\begin{cases} 1 \leq n \leq 2002 \\ n < 1,0015; n > 1999,998. \end{cases}$$

Vậy $1 \leq n < 1,001$ hoặc $1999,9 < n \leq 2002$.

Do n nguyên nên $n = 1; 2000; 2001; 2002$.

Thay các giá trị trên vào phương trình

$x^2 + 2002 = 2003n$ ta được (n dương nên x cũng chỉ lấy giá trị dương):

$$\text{Với } n=1: x^2 = 1. \text{ Vậy } x=1.$$

Với $n=2000: x^2 = 4003998$. Vậy (tính trên máy) $x = \sqrt{4003998} \approx 2000,999250$.

Với $n=2001: x^2 = 4006001$. Vậy (tính trên máy) $x = \sqrt{4006001} \approx 2001,499687$.

Với $n=2002: x^2 = 4008004; x=2002$.

Đáp số: $x_1=1; x_2=\sqrt{4003998} \approx 2000,99925;$

$x_3=\sqrt{4006001} \approx 2001,499687; x_4=2002$.

Bài 5 (Đề chính thức) Cho đa thức $P(x) = x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$.

Biết $P(1)=3, P(2)=9, P(3)=19, P(4)=33, P(5)=51$. Tính $P(6), P(7), P(8), P(9), P(10)$ và $P(11)$.

Giải. Đặt $Q(x) = 2x^2 + 1$. Khi ấy $Q(n) = 2n^2 + 1 = P(n)$ với $n=1, 2, 3, 4, 5$.

Chúng ta đa thức bậc năm $R(x) = P(x) - Q(x)$ có năm nghiệm $x_n = n$ với $n=1, 2, 3, 4, 5$. Vậy

$$R(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)$$

và $P(x) = R(x) + Q(x) =$

$$= (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5) + 2x^2 + 1.$$

Từ đây (tính trên máy): $P(6)=193;$

$$P(7)=819; P(8)=2649; P(9)=6883;$$

$$P(10)=15321; P(11)=30483.$$

Các bạn tự giải hai bài tập sau.

Bài 6. Tìm số hạng nhỏ nhất trong tất cả các số hạng của dãy số $u_n = n + \frac{2003}{n^2}$.

Bài 7. Cho đa thức

$$P(x) = \frac{1}{630}x^9 - \frac{1}{21}x^7 + \frac{13}{30}x^5 - \frac{82}{63}x^3 + \frac{32}{35}x.$$

1) Tính giá trị của đa thức khi

$$x = -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4.$$

2) Chứng minh rằng đa thức $P(x)$ chỉ nhận giá trị nguyên với mọi x nguyên.

(Kì sau đăng tiếp)

Nhắn tin

Các bạn được khen thưởng trong các số tạp chí từ tháng 5 đến tháng 9 năm 2003 hãy cho biết địa chỉ mới nhất của mình để Tòa soạn chuyển tặng phẩm. Ngoài phong bì ghi rõ: "Thư báo địa chỉ mới".

THTT

CHUẨN BỊ THI VÀO ĐẠI HỌC**GIÚP BẠN TỰ ÔN TẬP****HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ TỰ ÔN THI SỐ 3**

(Đề đã đăng trong THPT số 311 tháng 5/2003)

Câu I. 1) Bạn đọc tự giải.**I. 2)** Đặt $f(x) = x^2 - x + m$ (điều kiện $x \neq 1$) (1)Đồ thị (C_m) của $y = \frac{f(x)}{x-1}$ cắt trục Ox tại 2

$$\text{điểm phân biệt} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 1 - 4m > 0 \\ f(1) = m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{1}{4} \\ m \neq 0 \end{cases} \quad (2)$$

Ta có : $y' = \frac{x^2 - 2x + 1 - m}{(x-1)^2}$. Khi $y = 0$, từ (1) có $m = -x^2 + x$.

Hệ số góc của tiếp tuyến tại giao điểm là

$$k = y' = \frac{2x^2 - 3x + 1}{(x-1)^2} = \frac{2x-1}{x-1}$$

Giả sử x_1, x_2 là hoành độ giao điểm của (C_m) với trục Ox . Theo định lý Vi-et từ (1) ta có $x_1 + x_2 = 1, x_1 x_2 = m$. Hai tiếp tuyến tại các giao điểm vuông góc khi

$$k_1 k_2 = -1 \Leftrightarrow \frac{2x_1 - 1}{x_1 - 1} \cdot \frac{2x_2 - 1}{x_2 - 1} = -1$$

$$\Leftrightarrow 5x_1 x_2 - 3(x_1 + x_2) + 2 = 0$$

$$\text{từ đó : } 5m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{5} \text{ (thỏa mãn (2))}$$

I. 3) Hàm số có tiệm cận đứng $x = 1$, tiệm cận xiên $y = x$ và giao điểm của chúng là C . Giả sử $M(x_0, y_0)$ là điểm bất kỳ thuộc đồ thị. Ta có PT tiếp tuyến với (C_m) tại M có dạng :

$$(\Delta) \quad y = \frac{x_0^2 - 2x_0 + 1 - m}{(x_0 - 1)^2}(x - x_0) + \frac{x_0^2 - x_0 - m}{x_0 - 1}$$

Gọi A, B là các giao điểm của (Δ) với hai tiệm cận của (C_m) , trong đó $x_A = x_C = 1$, còn x_B là nghiệm của PT :

$$\frac{x_0^2 - 2x_0 + 1 - m}{(x_0 - 1)^2}(x - x_0) + \frac{x_0^2 - x_0 - m}{x_0 - 1} = x$$

Giải ra được : $x_B = 2x_0 - 1$. Dựng $BH \perp AC$, tacó $BH = |x_B - x_H| = 2|x_0 - 1|$ mà $y_A = \frac{x_0 - 1 + 2m}{x_0 - 1}$;

$$y_C = 1 \Rightarrow AC = |y_A - y_C| = \left| \frac{2m}{x_0 - 1} \right|.$$

$$\text{Ta có : } S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BH = |2m| < 2 \Leftrightarrow |m| < 1 \quad (m \neq 0).$$

Câu II. 1) Nhận thấy với mọi ΔABC có $\sin(A/2) \geq \sin(B/2) \Leftrightarrow \cos(A/2) \leq \cos(B/2)$ nên $(\sin(A/2) - \sin(B/2))(\cos(A/2) - \cos(B/2)) \leq 0$

$$\text{Từ đó : } \sin(A/2)\cos(A/2) + \sin(B/2)\cos(B/2) \leq \sin(A/2)\cos(B/2) + \sin(B/2)\cos(A/2)$$

$$\text{Hay } (\sin A + \sin B)/2 \leq$$

$$\leq \sin(A/2)\cos(B/2) + \sin(B/2)\cos(A/2)$$

Ta có các BĐT tương tự đối với $(\sin B + \sin C)/2$ và $(\sin C + \sin A)/2$.

$$\text{Mặt khác } (\sin A + \sin B + \sin C)/2 = \sin(A/2)\cos(A/2) + \sin(B/2)\cos(B/2) + \sin(C/2)\cos(C/2)$$

Từ các BĐT trên suy ra :

$$\frac{3}{2}(\sin A + \sin B + \sin C) \leq$$

$$\leq (\sin(A/2) + \sin(B/2) + \sin(C/2)) \times$$

$$\times (\cos(A/2) + \cos(B/2) + \cos(C/2))$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow A = B = C$ hay ΔABC đều.**II. 2)** Từ phương trình thứ nhất

$$\frac{\sin x + \sin 2x}{\sin 3x} = -1 \quad (1) \text{ có } \sin 3x \neq 0 \text{ nên}$$

$$\sin 2x + \sin x + \sin 3x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x + 2\sin 2x \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin x \cos x (2\cos x + 1) = 0 \quad (3)$$

$$\text{Ta có } \sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x = \sin x(3 - 4\sin^2 x)$$

$$= \sin x(4\cos^2 x - 1)$$

$$= \sin x(2\cos x - 1)(2\cos x + 1) \neq 0 \quad (4)$$

$$\text{Từ (3) và (4) suy ra } \cos x = 0 \quad (5),$$

do đó (1) $\Leftrightarrow$ (5)

Biến đổi phương trình thứ hai

$$\cos x + m \sin 2x = 0 \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow \cos x(1 + 2m \sin x) = 0 \quad (6)$$

$$\text{Xét phương trình } 1 + 2m \sin x = 0 \quad (7)$$

- Nếu $m = 0$ thì PT (7) vô nghiệm nên PT (6)

$$\Leftrightarrow \cos x = 0 \quad (5). \text{ Vậy PT (1) } \Leftrightarrow \text{PT (2)}$$

$$\text{- Nếu } m \neq 0 : \text{ có PT (7) } \Leftrightarrow \sin x = \frac{-1}{2m}$$

Nếu $\frac{-1}{2m} = \pm 1$ thì $|\sin x| = 1$. Từ đó PT (6) $\Leftrightarrow \cos x = 0$ nên PT (1) $\Leftrightarrow$ PT (2)

Nếu $\left| -\frac{1}{2m} \right| > 1$: PT (7) vô nghiệm nên PT (6) $\Leftrightarrow$ PT (5). Vậy PT (1) $\Leftrightarrow$ PT (2)

Nếu $\left| -\frac{1}{2m} \right| < 1$: PT (7) có nghiệm không thỏa mãn $\cos x = 0$ nên các phương trình (1) và (2) không tương đương.

Tóm lại PT (1) $\Leftrightarrow$ PT (2) khi $|m| \leq \frac{1}{2}$.

Câu III. 1) Đặt $u = x^2 - x + 1, v = 2x^2 - 4x + 3$

Ta có $u > 0, v > 0$ và $v - u = x^2 - 3x + 2$.

PT đã cho trở thành $\log_2 \frac{u}{v} = v - u$

$$\Leftrightarrow \log_2 u + u = \log_2 v + v \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t) = \log_2 t + t$ thì $f'(t) = \frac{1}{t \ln 2} + 1 > 0, \forall t > 0$ nên hàm số $f(t)$ là đồng biến khi $t > 0$. Từ PT (1) ta có $f(u) = f(v) \Rightarrow u = v$.

Ta được $v - u = 0$ hay $x^2 - 3x + 2 = 0$. PT có nghiệm $x_1 = 1, x_2 = 2$.

II. 2) Chia 2 vế của BPT cho $4^x > 0$, ta được :

$$\left(\frac{3}{4}\right)^x + \left(\frac{5}{4}\right)^x < 2$$

Xét hàm số $f(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^x + \left(\frac{5}{4}\right)^x - 2$ ta có $f(0) = 0, f(1) = 0$.

$$\text{Mặt khác } f'(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^x \ln \frac{3}{4} + \left(\frac{5}{4}\right)^x \ln \frac{5}{4}$$

$$f''(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^x \ln^2 \frac{3}{4} + \left(\frac{5}{4}\right)^x \ln^2 \frac{5}{4} > 0, \forall x.$$

Do đó hàm số $f(x)$ là lõm trên $R \Rightarrow$ PT $f(x) = 0$ có không quá 2 nghiệm. Như vậy PT $f(x) = 0$ có đúng 2 nghiệm là $x = 0, x = 1$.

Lập bảng xét dấu $f(x)$ suy ra BPT $f(x) < 0$ có nghiệm là $0 < x < 1$.

Câu IV. 1) PT đường thẳng chứa các cạnh của hình vuông có dạng (với $C > 0, D > 0$) :

$$Ax + By + C = 0 \quad (d_1) \quad Ax + By + C_1 = 0 \quad (d_2)$$

$$-Bx + Ay + D = 0 \quad (d_3) \quad -Bx + Ay + D_1 = 0 \quad (d_4)$$

với $(d_1) \parallel (d_2), (d_3) \parallel (d_4)$ và $(d_1) \perp (d_3)$. Ta có $(d_1), (d_2)$ là tiếp tuyến của elip khi :

$$\begin{cases} 3A^2 + B^2 = C^2 \\ 3A^2 + B^2 = C_1^2 \end{cases} \Rightarrow C^2 = C_1^2 \Rightarrow -C_1 = C.$$

Tương tự có $-D_1 = D$

Khoảng cách giữa $(d_1), (d_2)$ phải bằng khoảng cách giữa $(d_3), (d_4)$ nên $\frac{2|C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{2|D|}{\sqrt{B^2 + A^2}} \Rightarrow C = D$.

Ta được : $3A^2 + B^2 = 3B^2 + A^2 = C^2 = D^2 \Rightarrow A^2 = B^2$. Chọn $B = 1$, ta được $A = \pm 1, C^2 = 4 \Rightarrow D = C = 2$.

Ta được các PT chứa các cạnh hình vuông là

$$x + y + 2 = 0 \quad -x + y + 2 = 0$$

$$x + y - 2 = 0 \quad -x + y - 2 = 0$$

IV. 2) Gọi E là trung điểm AB thì $\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB} = \vec{0}$ và $E(3; -1; 1)$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } MA^2 + MB^2 &= (\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EA})^2 + (\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EB})^2 \\ &= 2ME^2 + 2\overrightarrow{ME}(\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB}) + EA^2 + EB^2 \\ &= 2ME^2 + EA^2 + EB^2 \end{aligned}$$

Vì $EA^2 + EB^2$ không đổi nên $MA^2 + MB^2$ có giá trị nhỏ nhất khi ME có giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow EM \perp mp(P)$.

Véc tơ pháp tuyến của $mp(P)$ là $\vec{n}_p = (1; -2; 2) \Rightarrow$ PT tham số của đường thẳng d qua $E(3; -1; 1)$

$$\text{và vuông góc với } mp(P) \text{ là: } \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -1 - 2t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$$

Vì điểm M thuộc đường thẳng d và $mp(P)$ nên có $3 + t - 2(-1 - 2t) + 2(1 + 2t) + 2 = 0 \Rightarrow t = -1$. Do đó $M(2; 1; -1)$ là điểm cần tìm.

Câu V. 1) Đặt $x = \tan t; dx = (1 + \tan^2 t) dt \Rightarrow$

$$\frac{dx}{1+x^2} = dt. \text{ Lúc đó } I = \int_0^{\pi/4} \ln(1 + \tan t) dt$$

$$\text{Lại đặt } t = \frac{\pi}{4} - u \Rightarrow dt = -du \text{ và}$$

$$1 + \tan t = 1 + \tan\left(\frac{\pi}{4} - u\right) = 1 + \frac{1 - \tan u}{1 + \tan u} = \frac{2}{1 + \tan u}$$

Ta được :

$$I = \int_0^{\pi/4} \ln \frac{2}{1+\tan u} du = \ln 2 \int_0^{\pi/4} du - I \Rightarrow I = \frac{\pi}{8} \ln 2$$

V. 2) Ta có $\left(\frac{1}{2} + \frac{2x}{3}\right)^{10} = \frac{1}{6^{10}} (3+4x)^{10}$.

Giả sử khi khai triển $P(x) = (3+4x)^{10}$ ta được $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{10}x^{10}$, từ đó $a_k = C_{10}^k \cdot 3^{10-k} \cdot 4^k$.

Xét hiệu

$$a_k - a_{k-1} = C_{10}^k \cdot 3^{10-k} \cdot 4^k - C_{10}^{k-1} \cdot 3^{11-k} \cdot 4^{k-1} \\ = C_{10}^{k-1} \cdot 3^{10-k} \cdot 4^{k-1} \left(\frac{4}{k} - \frac{3}{11-k} \right)$$

$a_k - a_{k-1} > 0 \Leftrightarrow \frac{4}{k} - \frac{3}{11-k} > 0 \Leftrightarrow k < \frac{44}{7}$. Do k nguyên dương nên $k = 1, 2, \dots, 6$; còn với $k \geq 7$ thì $a_{k-1} > a_k$. Vậy

$$\max_{1 \leq i \leq 10} (a_i) = a_6 = \frac{C_{10}^6 \cdot 3^4 \cdot 4^6}{6^{10}} = \frac{840}{729}$$

NGUYỄN ANH DŨNG

ĐỀ TỰ ÔN THI SỐ 4

(Thời gian làm bài : 180 phút)

Câu I. Cho hàm số $y = mx - 1 + \frac{1}{x+1}$

- 1) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số ứng với $m = 2$.
- 2) Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số cắt đường thẳng $y = x$ tại hai điểm A, B mà các tiếp tuyến với đồ thị tại A và B song song với nhau.

Câu II. Xác định hệ số của $x^5 y^3 z^6 t^6$ trong khai triển đa thức $(x+y+z+t)^{20}$

Câu III. Ký hiệu a, b, c và r lần lượt là độ dài ba cạnh và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC . Chứng minh rằng tam giác ABC là tam giác đều khi và chỉ khi :

$$\frac{1}{(p-a)^2} + \frac{1}{(p-b)^2} + \frac{1}{(p-c)^2} = \frac{1}{r^2}$$

Câu IV. 1) Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị của hàm số

$y = (x+1)(x^2 - x - 4mx + 3m^2 - m - 2)$ tiếp xúc với trục hoành

2) Với n là một số nguyên không âm tùy ý đã

cho, tính $I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^{4n} x dx$

Câu V. Trong hệ tọa độ Đề-các vuông góc $Oxyz$, cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a , trong đó A' trùng với gốc O ; $B' \in Ox$; $D' \in Oy$, $A \in Oz$. Giả sử M và N lần lượt trên BB' và AD sao cho $BM = AN = b$ ($0 < b < a$). Gọi I, I' lần lượt là trung điểm các cạnh AB và $C'D'$.

1) Viết phương trình mặt phẳng (α) đi qua ba điểm I, M, N . Chứng tỏ rằng (α) cũng đi qua I' .

2) Tính diện tích thiết diện tạo bởi $mp(\alpha)$ với hình lập phương đã cho.

3) Xác định vị trí của M sao cho chu vi thiết diện nói trên nhỏ nhất.

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 4

Câu I. 1) Các bạn tự giải

2. Ta có : $y'(x) = m - \frac{1}{(x+1)^2}$

Hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số với đường thẳng $y = x$ thỏa mãn PT

$$mx - 1 + \frac{1}{x+1} = x \Leftrightarrow \begin{cases} (m-1)x^2 + (m-2)x = 0 \\ x \neq -1 \end{cases}$$

Nếu $m = 1$ thì PT có nghiệm duy nhất $x = 0$ (loại)

Nếu $m \neq 1$ thì PT có 2 nghiệm $x_1 = 0, x_2 = \frac{2-m}{m-1}$

Tiếp tuyến tại $A(x_1, y_1)$ song song với tiếp tuyến tại $B(x_2, y_2)$ khi $y'(x_1) = y'(x_2)$
 $\Leftrightarrow m - 1 = m - (m-1)^2 \Leftrightarrow m = 0$ hoặc $m = 2$.

Câu II. Trong khai triển $[x + (y+z+t)]^{20}$ số hạng chứa x^5 là $C_{20}^5 x^5 \cdot (y+z+t)^{15}$

Số hạng chứa y^3 trong khai triển $(y+z+t)^{15}$ là $C_{15}^3 y^3 (z+t)^{12}$.

Do đó số hạng chứa x^5y^3 trong khai triển $(x+y+z+t)^{20}$ là $C_{20}^5 C_{15}^3 x^5 y^3 (z+t)^{12}$. Lập luận tương tự suy ra hệ số của $x^5 y^3 z^6 t^6$ là $C_{20}^5 \cdot C_{15}^3 \cdot C_{12}^6$.

Câu III. Áp dụng BĐT Cô-si. Với cặp a, b ta có $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{(p-a)^2} + \frac{1}{(p-b)^2} \right) \geq \frac{1}{(p-a)(p-b)}$.

Tương tự với cặp b, c và cặp c, a , suy ra

$$\frac{1}{(p-a)^2} + \frac{1}{(p-b)^2} + \frac{1}{(p-c)^2} \geq \frac{p}{(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{p^2}{S^2} = \frac{1}{r^2}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow p-a = p-b = p-c \Leftrightarrow a = b = c \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

Câu IV. Ta có $y(x) = (x+1)(x-m+1)(x-3m-2)$
 $y'(x) = (x+1)(2x-4m-1) + (x-m+1)(x-3m-2)$

Đồ thị hàm số tiếp xúc với trục hoành khi và chỉ khi hệ PT sau có nghiệm $\begin{cases} y(x)=0 \\ y'(x)=0 \end{cases} (*)$

Đáp số: $m = 0, m = -1, m = -\frac{3}{2}$.

2) $I_0 = \int_0^{\pi/4} dx = \frac{\pi}{4}$. Với k nguyên dương tùy ý ta

$$\text{có } I_k - I_{k-1} = \int_0^{\pi/4} \tan^{4k-4} x \cdot (\tan^2 x - 1)(\tan^2 x + 1) dx$$

$$= \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{4k-3}. \text{ (Đổi biến số } u = \tan x)$$

$$\text{Do đó } I_n = (I_n - I_{n-1}) + (I_{n-1} - I_{n-2}) + \dots + (I_1 - I_0) + I_0 =$$

$$= \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-5} - \frac{1}{4n-7} + \frac{1}{4n-9} - \frac{1}{4n-11} + \dots + \frac{1}{3} - \frac{1}{1} + \frac{\pi}{4}.$$

Câu V. Từ giả thiết suy ra $A'(0; 0; 0)$, $B'(a; 0; 0)$, $D'(0; a; 0)$, $A(0; 0; a)$,

$$I\left(\frac{a}{2}; 0; a\right); I'\left(\frac{a}{2}; a; 0\right)$$

1) Ta có $\overrightarrow{BM} = \frac{b}{a} \overrightarrow{BB'} \Rightarrow M(a; 0; a-b)$.

Tương tự $N(0; b; a)$. Do đó $\overrightarrow{IN} = \left(\frac{-a}{2}; b; 0\right)$

$$\text{và } \overrightarrow{IM} = \left(\frac{a}{2}; 0; -b\right). [\overrightarrow{IN}, \overrightarrow{IM}] = \left(-b^2; \frac{-ab}{2}; \frac{-ab}{2}\right)$$

Vì vậy có thể chọn $\vec{n} = (2b; a; a)$ làm vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (IMN) .

Mặt phẳng (α) đi qua I, M, N có PT

$$2bx + ay + az - a(b+a) = 0 \quad (1)$$

Rõ ràng $I'\left(\frac{a}{2}; a; 0\right)$ có tọa độ thỏa mãn (1)

nên $I' \in mp(\alpha)$.

2) Gọi M', N' là giao điểm của $mp(\alpha)$ với DD' và $B'C'$ thì $M'(0; a; b)$; $N'(a; a-b; 0)$. Do đó

$$MI = M'I' = I'N' = \sqrt{\frac{a^2}{4} + b^2}$$

$$MN' = M'N = \sqrt{2}(a-b)$$

Mà $\overrightarrow{II'} = (0; a; -a)$, $\overrightarrow{MN'} = (0; a-b; b-a)$, $\overrightarrow{M'N} = (0; a-b; b-a) \Rightarrow II' \parallel MN' \parallel M'N$, suy ra hai tứ giác $INM'I'$ và $IMN'T'$ là hai hình thang cân bằng nhau. Kẻ $MH \perp II'$. Diện tích thiết diện là

$$S = 2dt(IMN'I') = (MN' + II') \cdot MH$$

$$\text{Vì } IN = IM = \sqrt{\frac{a^2}{4} + b^2} \text{ và vì } \overrightarrow{MN} = (-a; b; b), \overrightarrow{II'} = (0; a; -a) \Rightarrow \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{II'} = 0 \Rightarrow$$

$$MH = \frac{MN}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + 2b^2}, \text{ do đó } S = \frac{\sqrt{2}}{2} (2a-b) \sqrt{a^2 + 2b^2}$$

3) Chu vi thiết diện là:

$$4 \sqrt{\frac{a^2}{4} + b^2} + 2\sqrt{2}(a-b)$$

$$= 2\sqrt{2}a + 2\sqrt{2} \left(\sqrt{2b^2 + \frac{a^2}{2}} - b \right)$$

$$\text{Xét hàm số } y = f(b) = \sqrt{2b^2 + \frac{a^2}{2}} - b \quad (0 < b < a).$$

Tính $f'(b)$ có $f'(b) = 0 \Leftrightarrow b = \frac{a}{2}$. Lập bảng biến thiên hàm $f(b)$ trên $(0, a)$ suy ra giá trị nhỏ nhất của $f(b)$ trong khoảng đó là: $f(a/2) = a/2$.

Vậy chu vi thiết diện nhỏ nhất bằng $3\sqrt{2}a$, đạt được khi và chỉ khi M là trung điểm của BB' .

ĐOÀN MINH CƯỜNG



ĐỀ RA KÌ NÀY

CÁC LỚP TRUNG HỌC CƠ SỞ

Bài T1/312. (Lớp 6). Viết số $1^1 + 2^2 + 3^3 + \dots + 999^{999} + 1000^{1000}$ trong hệ thập phân. Tìm ba chữ số đầu tiên bên trái của số đó.

HOÀNG XUÂN VINH
(NXB Giáo dục)

Bài T2/312. (Lớp 7). Chứng minh rằng nếu các số a, b, c, x, y, z thỏa mãn điều kiện

$$\frac{bz+cy}{x(-ax+by+cz)} = \frac{cx+az}{y(ax-by+cz)} = \frac{ay+bx}{z(ax+by-cz)}$$

thì

$$\frac{x}{a(b^2+c^2-a^2)} = \frac{y}{b(a^2+c^2-b^2)} = \frac{z}{c(a^2+b^2-c^2)}$$

MINH TRẦN
(Phòng GD Hương Thủy, Thừa Thiên - Huế)

Bài T3/312. Cho số nguyên dương $n > 1$ thỏa mãn $3^n - 1$ chia hết cho n , chứng minh rằng n là số chẵn.

TRẦN VIỆT ANH
(SV K51 CLC khoa Toán Tin, ĐHSP Hà Nội)

Bài T4/312. Tìm các nghiệm số dương của hệ phương trình :

$$\begin{cases} \frac{3x}{x+1} + \frac{4y}{y+1} + \frac{2z}{z+1} = 1 \\ 8^9 \cdot x^3 \cdot y^4 \cdot z^2 = 1 \end{cases}$$

NGUYỄN VĂN THÔNG
(GV THPT Lê Quý Đôn, Đà Nẵng)

Bài T5/312. Chứng minh rằng

$$(a^3+b^3+c^3)\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\right) \geq \frac{3}{2}\left(\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}\right)$$

trong đó a, b, c là các số thực dương

NGUYỄN BÁ NAM
(SV K26D khoa Toán, ĐHSP Hà Nội)

Bài T6/312. Chứng minh rằng

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) + \frac{3(a-b)(b-c)(c-a)}{abc} \geq 9$$

trong đó a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác.

NGUYỄN HỮU BẢNG
(GV THCS Bến Thủy, Vinh, Nghệ An)

Bài T7/312. Đường tròn nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB tương ứng tại D, E, F . Gọi H là hình chiếu của D trên EF . Chứng minh rằng $\widehat{BHD} = \widehat{CHD}$.

NGUYỄN ĐỀ
(Hải Phòng)

CÁC LỚP TRUNG HỌC PHỔ THÔNG

Bài T8/312. Cho $p_1, p_2, \dots, p_n$ và $q_1, q_2, \dots, q_m$ là $m+n$ số nguyên tố đôi một khác nhau với $p_i \geq n+1$ ($i = 1, 2, \dots, n$), $q_j \geq m+1$ ($j = 1, 2, \dots, m$). Đặt $P = p_1 p_2 \dots p_n$, $Q = q_1 q_2 \dots q_m$. Chứng minh rằng phương trình $P^s x + Q^t y = 1$ với các số nguyên dương s, t có vô số nghiệm nguyên (x_0, y_0) thỏa mãn $(P, x_0) = 1$ và $(Q, y_0) = 1$.

LÊ VĂN AN
(GV THPT Phan Bội Châu, Vinh, Nghệ An)

Bài T9/312. Giải phương trình

$$(16\cos^4 x + 3)^4 = 2048\cos x - 768$$

ĐẶNG THANH HẢI
(GV THPT Triệu Quang Phục, Hưng Yên)

Bài T10/312. Chứng minh rằng :

$$\frac{x_1^m}{x_2^n + x_3^n + \dots + x_n^n} + \frac{x_2^m}{x_1^n + x_3^n + \dots + x_n^n} + \dots + \frac{x_n^m}{x_1^n + x_2^n + \dots + x_{n-1}^n} \geq \frac{n}{n-1} \sqrt[n]{\left(\frac{2003}{n}\right)^{m-n}}$$

trong đó các số m, n nguyên, x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) dương thỏa mãn điều kiện: $m \geq n > 1$ và $x_1^n + x_2^n + \dots + x_n^n \geq 2003$.

NGUYỄN LÂM TUYẾN
(SV BK 48 K47, ĐH Bách Khoa Hà Nội)

Bài T11/312. Chứng minh rằng trong tam giác ABC có ba góc nhọn luôn có

$$\frac{\cos A \cos B}{\sin 2C} + \frac{\cos B \cos C}{\sin 2A} + \frac{\cos C \cos A}{\sin 2B} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

NGUYỄN DUY LIÊN
(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

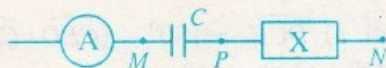
Bài T12/312. Trong mặt phẳng đáy (ABC) của hình chóp $SABC$ dựng các tam giác $A_1 BC$,

B_1CA , C_1AB cùng hướng với ΔABC và các tam giác A_2BC , B_2CA , C_2AB ngược hướng với ΔABC sao cho $\Delta A_1BC = \Delta A_2BC = \Delta SBC$, $\Delta B_1CA = \Delta B_2CA = \Delta SCA$, $\Delta C_1AB = \Delta C_2AB = \Delta SAB$. Chứng minh rằng: $\frac{R_1}{R_2} = \frac{r}{r_S}$ trong đó R_1 ,

R_2 lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp các tam giác $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, còn r và r_S lần lượt là bán kính mặt cầu nội tiếp và mặt cầu bàng tiếp đối diện đỉnh S của hình chóp $SABC$.

NGUYỄN MINH HÀ
(ĐHSP Hà Nội)

Bài L1/312. Một mạch điện như hình dưới. Hiệu điện thế giữa M và N là $u_{MN} = 200\sqrt{2} \sin 100\pi t$ (V), tụ điện có điện dung $C = \frac{10^{-3}}{2\pi}$ F. X là một đoạn mạch chứa hai trong ba phần tử cơ bản R , L , C mắc nối tiếp nhau.



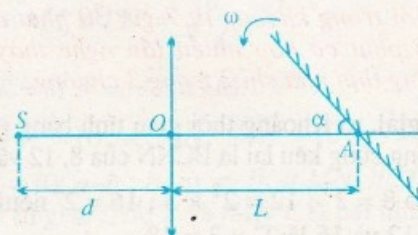
Ampe kế A trở $I = 0,8A$; công suất tiêu thụ của đoạn mạch MN là $P = 96W$ (1).

a) Hãy xác định các phần tử chứa trong X và độ lớn của chúng.

b) Viết biểu thức của u_{PN} .

NGUYỄN QUANG HẬU
(Hà Nội)

Bài L2/312. Trên trục chính của một thấu kính hội tụ mỏng có tiêu cự $f = 20cm$, có một điểm sáng S cách thấu kính $d = \frac{5}{4}f$. Bên kia thấu kính đặt một gương phẳng có mặt phản xạ hướng vào thấu kính sao cho khoảng cách $OA = L = 3f$ (như hình vẽ). Gương quay với vận tốc $\omega = 0,1$ (rad/s) quanh trục nằm trong mặt phẳng của gương qua A và vuông góc với trục chính của thấu kính.



của thấu kính.

Hãy tìm vận tốc của ảnh của điểm S sau khi qua thấu kính, gương ở thời điểm góc giữa mặt phẳng của gương và trục chính của thấu kính là $\alpha = 60^\circ$.

TRINH MỪNG
(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/312. (for 6th grade)

Find the the first three digits from the left side of the number

$$1^1 + 2^2 + 3^3 + \dots + 999^{999} + 1000^{1000}.$$

T2/312. (for 7th grade)

Prove that if the numbers a, b, c, x, y, z satisfy the condition

$$\frac{bz+cy}{x(-ax+by+cz)} = \frac{cx+az}{y(ax-by+cz)} = \frac{ay+bx}{z(ax+by-cz)}$$

then

$$\frac{x}{a(b^2+c^2-a^2)} = \frac{y}{b(a^2+c^2-b^2)} = \frac{z}{c(a^2+b^2-c^2)}$$

T3/312. Given an integer $n > 1$ such that $3^n - 1$ is divisible by n , show that n is even.

T4/312. Find all positive solutions of the

$$\begin{cases} \frac{3x}{x+1} + \frac{4y}{y+1} + \frac{2z}{z+1} = 1 \\ 8^9 \cdot x^3 \cdot y^4 \cdot z^2 = 1 \end{cases}$$

T5/312. Prove that

$$(a^3+b^3+c^3) \left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} \right) \geq \frac{3}{2} \left(\frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c} \right)$$

where a, b, c are positive real numbers.

T6/312. Prove that

$$(a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) + \frac{3(a-b)(b-c)(c-a)}{abc} \geq 9$$

(Xem tiếp trang 22)



Bài T1/308. (Lớp 6) Có 3 cái chuông trong phòng thí nghiệm. Chuông thứ nhất cứ 8 phút reo một lần. Chuông thứ hai cứ 12 phút reo một lần. Chuông thứ ba cứ 16 phút reo một lần. Cả ba cái cùng reo vào lúc 7 giờ 30 phút sáng.

a) Hỏi ba chuông lại cùng reo lần tiếp theo vào lúc nào?

b) Hỏi trong khoảng từ 7 giờ 30 phút đến 11 giờ 30 phút có bao nhiêu lần nghe thấy tiếng reo đồng thời của chỉ 2 trong 3 chuông.

Lời giải. a) Khoảng thời gian tính bằng phút để 3 chuông cùng kêu lại là BCNN của 8, 12 và 16.

Ta có $8 = 2^3$; $12 = 2^2 \times 3$; $16 = 2^4$ nên BCNN của 8, 12 và 16 là $2^4 \times 3 = 48$.

Tức là sau 48 phút ba chuông sẽ cùng kêu lại. Lúc đó là 7 giờ 30 phút + 48 phút = 8 giờ 18 phút sáng.

b) Xét trong 48 phút:

Vì 8 và 12 có bội chung là 24, 48 nên chuông 1, chuông 2 cùng kêu sau 24 phút và 48 phút. Tương tự chuông 1 và chuông 3 cùng kêu sau 16 phút, 32 phút và 48 phút.

Chuông 2 và chuông 3 cùng kêu sau 48 phút. Ta loại thời điểm 48 phút vì cả 3 chuông cùng kêu. Vậy cứ mỗi 48 phút có 3 lần chỉ 2 chuông cùng reo. Từ 7 giờ 30 phút đến 11 giờ 30 phút là $60 \times 4 = 240$ phút. Vì $240 = 48 \times 5$ nên có $3 \times 5 = 15$ lần 2 chuông reo đồng thời.

Vậy từ 7 giờ 30 đến 11 giờ 30 có 15 lần nghe thấy tiếng reo đồng thời của chỉ 2 trong 3 chuông.

Nhận xét. 1. Nhiều bạn giải sai câu b).

2. Các bạn có lời giải đúng, gọn, trình bày sạch: **Phú Thọ**: Đỗ Mạnh Thái, 6A1, THCS Giấy Phong Châu, Phù Ninh, Nguyễn Ngọc Linh, 6A3, THCS Lâm Thao; **Vĩnh Phúc**: Nguyễn Thị Phương, THCS Yên Lạc, Nguyễn Cao Dương, 6C, THCS Xuân Hòa, Mê Linh; **Bắc Ninh**: Nguyễn Văn Ngọc, THCS thị trấn Thứa, Lương Tài; **Thái Bình**: Đỗ Thị Phương, 8A, THCS Thái Học, Thái Thụy; **Hải Phòng**: Bùi Hoài Thu, số 30 khu 3/2, thị trấn Vĩnh Bảo; **Nam Định**: Phạm Văn Thao, 6G, THCS Yên Trị, Ý Yên, Đỗ Thị Hiền, 6C, THCS Trục Hùng, Trục Ninh, Nguyễn Văn Huy, 6A, THCS Nam Quang, Hồng Quang, Nam Trục; **Thanh Hóa**: Nguyễn Việt Huy, 6G, THCS Trần Mai Ninh, Nguyễn Thu Trang, THCS Quảng Tâm, Quảng Xương; **Nghe An**: Phạm Hồng Phong, 6B, THCS Hồ Xuân

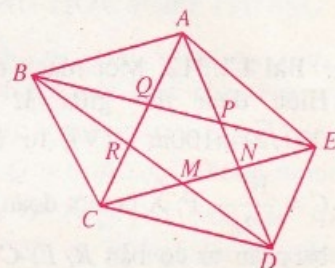
Hương, Quỳnh Lưu; **Quảng Trị**: Hoàng Kim Quốc, 6, THCS thị trấn Hải Lăng; **Quảng Ngãi**: Nguyễn Quang Triệu, 6A, THCS Tinh Thiệu, Sơn Tịnh; **Bình Định**: Bùi Bảo Khang, 6A1, THCS An Nhơn 2, Võ Duy Khái, 6A1, THCS Ngô Mây, Phù Cát; **Khánh Hòa**: Võ Thái Thông: lớp 7/4 trường Ngô Gia Tự, Cam Nghĩa, Cam Ranh; **Bà Rịa - Vũng Tàu**: Huỳnh Xuân An, THCS Nguyễn An Ninh, P. 9, Vũng Tàu. Ban Lê Tuấn Sĩ, lớp 5B, TH Trảng Sơn II, Đô Lương, **Nghe An** là bạn nhỏ tuổi nhất tham gia giải bài này.

VŨ THANH THÀNH

Bài T2/308. (Lớp 7) a) Trong hình vẽ dưới biết $\widehat{BEC} = 30^\circ$, $\widehat{ACD} = 70^\circ$, $\widehat{CDE} = 110^\circ$ và

$\widehat{BAC} = \widehat{CED} = 50^\circ$. Tính số đo góc ABE và giải thích cách làm.

b) Có tất cả bao nhiêu tam giác trên hình. Hãy liệt kê các tam giác đó.



Lời giải. a) $\widehat{DCE} = 180^\circ - (\widehat{CED} + \widehat{CDE}) = 180^\circ - (50^\circ + 110^\circ) = 20^\circ$.

$$\widehat{ACE} = \widehat{ACD} - \widehat{DCE} = 70^\circ - 20^\circ = 50^\circ (*)$$

$$\widehat{AQE} = \widehat{QCE} + \widehat{QEC} = 50^\circ + 30^\circ = 80^\circ$$

$$\widehat{ABE} = \widehat{AQE} - \widehat{BAQ} = 80^\circ - 50^\circ = 30^\circ$$

b) Cách đếm tam giác: Liệt kê mọi tam giác có 1 cạnh (hoặc 1 đỉnh) xác định rồi xóa bỏ cạnh (đỉnh) đó, sau đó liệt kê mọi tam giác có 1 cạnh (hoặc 1 đỉnh) xác định khác. Tiếp tục như thế ta đếm được 35 tam giác là:

ABC, ABD, ABE, ABP, ABQ,
ABR, ACD, ACE, ACN, ADE,
ADR, AEP, AEQ, AEN, AQP
BCD, BCE, BCM, BCR, BCQ
BDE, BDP, BEM, BQR, CDE
CDM, CDN, CDR, CEQ, CRM
DEP, DEN, DEM, DMN, EPN

Nhận xét. 1) Câu a) có nhiều cách giải. Chẳng hạn: Từ (*) suy ra $\widehat{ACE} = \widehat{BAC} \Rightarrow AB \parallel CE \Rightarrow \widehat{ABE} = \widehat{BEC} = 30^\circ$; hoặc từ $(\widehat{CQE} + \widehat{QCE} + \widehat{QEC}) + (\widehat{CED} + \widehat{CDE} + \widehat{ECD}) = 360^\circ$ suy ra $\widehat{CQE} = 100^\circ \Rightarrow \widehat{ABE} = 180^\circ - (100^\circ + 50^\circ) = 30^\circ$; hoặc $\widehat{BQA} = \widehat{QAE} + \widehat{AEQ} = 360^\circ - (\widehat{ACD} + \widehat{CDE} + \widehat{DEQ}) = 100^\circ$ rồi tính $\widehat{ABE}$... Hầu hết các bạn đã giải đúng câu a).

2) Một số bạn liệt kê thừa hoặc thiếu tam giác vì không dùng cách đếm theo một thứ tự nhất định.

3) Các bạn sau có lời giải tốt :

Vĩnh Phúc : Nguyễn Kim Nhung, Trần Thị Thanh Nga, Chu Thị Phương Linh, Lại Anh Đức, 7B, THCS Tam Dương, Đỗ Kiều Oanh, 7B, THCS Yên Lạc ; **Hòa Bình :** Lương Trung Hiếu, 7A5, THCS Hữu Nghị, Tx. Hòa Bình ; **Hà Tây :** Lê Hồng Thuận, 7B, THCS Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hòa ; **Bắc Ninh :** Tạ Khắc Công, 7B, THCS Yên Phong, Cao Vi Đại, 6A, THCS Đông Tiến, Yên Phong ; **Nam Định :** Lê Thị Nhung, 7E, THCS Nam Chấn, Nam Trực ; **Thanh Hóa :** Nguyễn Thu Trang, 7E, THCS Quảng Tâm, Quảng Xương, Nguyễn Viết Hòa, 7A, THCS Nhữ Bá Sĩ, Hoàng Hóa ; **Nghệ An :** Hồ Ngọc Trung, Phan Viễn Phương, Hoàng Anh Công, Vũ Ngọc Mai, 7A, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu ; **Đắk Lắk :** Lâm Chí Đạt, 7A1, THCS Trưng Vương, Buôn Ma Thuột ; **Quảng Nam :** Lê Văn Hiếu, 7/7, THCS Lê Quý Đôn, Thăng Bình ; **Quảng Ngãi :** Võ Thị Ánh Thủy, 7A, THCS Hành Trung, Nghĩa Hành ; **Khánh Hòa :** Võ Thái Thông, 7/4, THCS Ngô Gia Tự, Cam Nghĩa, Cam Ranh, Nguyễn Anh Thảo, 7/14, THCS Thái Nguyên, Nha Trang ; **Ninh Thuận :** Lâm Đại Sơn, 7/8, THCS Lý Tự Trọng, Phan Rang.

HOÀNG NGUYỄN

Bài T3/308. Giải phương trình nghiệm nguyên

$$4(a-x)(x-b) + b - a = y^2 \quad (1)$$

trong đó a, b là các số nguyên cho trước và $a > b$.

Lời giải. Giả sử PT (1) có nghiệm x, y nguyên. Xét nghiệm y nguyên dương. Vì $a > b$ nên từ (1) có $x \neq a, x \neq b$ và $4(a-x)(x-b) > 0$, suy ra $b < x < a$. Đặt $a-x = m, x-b = n$ thì m, n dương. Lúc đó (1) trở thành $4mn - m - n = y^2$ (2) với m, n, y nguyên dương. Biến đổi (2) $\Leftrightarrow (4m-1)(4n-1) = 4y^2 + 1$ (3)

Vì tích các số dạng $4k+1$ lại có dạng đó nên số $4m-1$ phải có ước số nguyên tố dạng $p = 4k+3$. Từ (3) có $(4y^2+1) : p$ hay $4y^2 \equiv -1 \pmod{p}$ (4). Suy ra $(y, p) = 1$. Theo định lý nhỏ

Phéc-ma $(2y)^{p-1} \equiv 1 \pmod{p} \Rightarrow \left[(2y)^2 \right]^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$. Từ đó và (4) có $(-1)^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p} \Rightarrow (-1)^{2k+1} \equiv 1 \pmod{p} \Rightarrow$ mâu thuẫn. Vậy PT(3) không có nghiệm nguyên.

Nhận xét. 1) Nhiều bạn đã nêu ra cách giải khác của PT (2) (xem bài Về một vài phương trình Di-ô-phăng trang 148 trong Tuyển tập 30 năm Toán học và Tuổi trẻ).

2) Các bạn sau có lời giải tốt :

Phú Thọ : Nguyễn Trung Kiên A, Nguyễn Xuân Trường, 9A, Nguyễn Thị Thanh Thảo, 8A, THCS Giấy Phong Châu, Phù Ninh ; **Vĩnh Phúc :** Trần Tuấn Hải, 8A1, THCS Hai Bà Trưng, Mê Linh ; **Hà Nội :** Nguyễn Hoàng Việt, Nguyễn Trung Kiên, 9H, THCS Lê Quý Đôn, Cầu Giấy ; **Hải Dương :** Nguyễn Tiến Dũng, 9A1,

THCS Chu Văn An, Thanh Hà, Nguyễn Anh Tuấn, Nguyễn Duy Mạnh, 9/3, THCS Lê Quý Đôn, Tp. Hải Dương ; **Hải Phòng :** Nguyễn Vũ Lâm, Vũ Ngọc Linh, 9A, THPT NK Trần Phú ; **Nam Định :** Vũ Đức Khánh, 8C, THCS Đào Sư Tích, Cổ Lễ, Trực Ninh ; **Thanh Hóa :** Lưu Xuân Thế, 9A, THCS Lê Hữu Lập, Hậu Lộc, Lê Mạnh Thành, Bùi Khắc Kiên, Nguyễn Tuấn Nam, 9A, THCS Nhữ Bá Sĩ, Hoàng Hóa, Nguyễn Tiến Thanh, 9A, THCS Lê Quý Đôn, Bim Sơn ; **Nghệ An :** Phạm Quang Khang, 9E, THCS Đặng Thai Mai, Vinh ; **Hà Tĩnh :** Võ Quang Sáng, 9B, THCS Nam Hồng, Hồng Lĩnh ; **Quảng Trị :** Dương Bảo Nhân, 9, THCS Đại Hòa, Trần Thị Đồng, 9B, THCS Hải Lâm, Hải Lăng ; **Bình Định :** Huỳnh Tấn Sang, 9A4, THCS Đống Đa, Quy Nhơn ; **Khánh Hòa :** Nguyễn Thị Hoàng Oanh, 8/1, THCS Đinh Tiên Hoàng, Ninh Hòa.

VIỆT HẢI

Bài T4/308. Chứng minh rằng phương trình

$$(n+1)x^{n+2} - 3(n+2)x^{n+1} + a^{n+2} = 0$$

vô nghiệm, trong đó n là số nguyên dương chẵn và $a > 3$.

Lời giải. Cách 1. (của bạn Trần Tấn Phong, THCS Lập Thạch, Vĩnh Phúc)

Dễ dàng thấy rằng nếu phương trình có nghiệm x thì $x \neq 0$ và $x > 0$ vì n là số nguyên dương chẵn. Để thấy

$$f(x) = (x-3) \left[(n+1)x^{n+1} - \sum_{i=1}^{n+1} 3^i x^{n+1-i} \right] + a^{n+2} - 3^{n+2}$$

$$= a^{n+2} - 3^{n+2} + \sum_{i=1}^{n+1} x^{n+1-i} (x^i - 3^i) (x-3), \text{ luôn}$$

là số dương, vì $a > 3$. Do đó phương trình đã cho vô nghiệm.

Cách 2. Nhận xét như trên : nghiệm x nếu có thì $x = 0$. Sử dụng bất đẳng thức Cô-si cho số a^{n+2} và $n+1$ số x^{n+2} , ta có

$$(n+1)x^{n+2} + a^{n+2} \geq (n+2) \sqrt[n+2]{a^{n+2} x^{(n+1)(n+2)}} = (n+2) a x^{n+1}$$

Với $a > 3$ thì từ trên có

$$(n+1)x^{n+2} + a^{n+2} > (n+2)3x^{n+1} \text{ nên}$$

$$(n+1)x^{n+2} - 3(n+2)x^{n+1} + a^{n+2} > 0$$

Cho nên phương trình đã cho vô nghiệm.

Nhận xét. Rất nhiều bạn giải bài toán này và chủ yếu giải theo cách 2. Có một vài bạn dùng phương pháp xét dấu đa thức hoặc tam thức bậc hai.

VŨ ĐÌNH HÒA

Bài T5/308. Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}} + \frac{3(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{\sqrt{a+b}} > 6$$

Lời giải. (của bạn Nguyễn Hải Đăng, THCS Nguyễn Công Trứ, Xuân Lộc, Đồng Nai và một số bạn khác).

Điều kiện : $a, b > 0$. Biến đổi rồi sử dụng BĐT Cô-si ta có :

$$\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}} + \frac{3(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{\sqrt{a+b}} = \frac{a+b}{\sqrt{ab}} + \frac{3\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}} + \frac{3\sqrt{b}}{\sqrt{a+b}}$$

$$\geq 3\sqrt[3]{\frac{a+b}{ab} \cdot \frac{9\sqrt{ab}}{a+b}} = 3\sqrt[3]{9} > 3\sqrt[3]{8} = 6.$$

Nhận xét. Hầu hết các bạn đều có lời giải đúng. Các bạn sau đây có lời giải ngắn gọn.

Vinh Phúc : Vũ Văn Quang, 9C, THCS Vinh Tường ;
Phú Thọ : Nguyễn Bảo Trung, 8E, THCS Văn Lang ;
Nguyễn Thị Xuân Hương, 9A1, THCS Hạ Hòa ; **Ngô Vinh Thái,** 9A1, THCS Giấy Phong Châu, Phù Ninh ;
Hà Nội : Thân Anh Đức, 9H, THCS Lê Quý Đôn, Cầu Giấy ; **Hà Tây :** Mai Quy Công Hoạt, 7B, Ngô Thành Long, 9B, THCS Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hòa ; **Hưng Yên :** Đỗ Việt Phương, 9A2, THCS Chu Mạnh Trinh, Văn Giang ; **Hải Phòng :** Nguyễn Thị Quế, 9A, THCS Việt Tiến, Vĩnh Bảo ; **Thái Bình :** Nguyễn Trường Giang, 9B, THCS Tấn Thuật, Kiến Xương ; **Thanh Hóa :** Trịnh Thành Kiên, 9A1, THCS Trần Mai Ninh, Tp. Thanh Hóa ; **Quảng Trị :** Dương Bảo Nhân, 9, THCS Đại Hòa ; **Thừa Thiên - Huế :** Dương Tấn Khánh, 9A, THCS Phú Dương, Phú Vang ; **Quảng Ngãi :** Hồ Thị Mỹ Nữ, 9A, THCS Nguyễn Trãi, Mộ Đức

NGUYỄN XUÂN BÌNH

Bài T6/308. Cho tam giác ABC. Trên các tia đối của tia BA, CA lấy các điểm E, F (khác B, C) theo thứ tự. BF cắt CE tại điểm M.

Chứng minh rằng : $\frac{MB}{MF} + \frac{MC}{ME} \geq 2\sqrt{\frac{AB \cdot AC}{AF \cdot AE}}$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

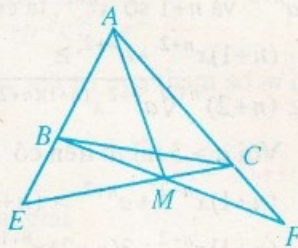
Lời giải. Áp dụng tính chất nếu hai tam giác có cùng chiều cao thì tỉ lệ diện tích giữa chúng bằng tỉ lệ giữa đáy ứng với chiều cao đó, ta có:

$$\frac{MB}{MF} = \frac{S_{ABM}}{S_{AMF}} ; \frac{MC}{ME} = \frac{S_{AMC}}{S_{AME}} \quad (S \text{ kí hiệu diện tích}).$$

Suy ra $\frac{MB}{MF} + \frac{MC}{ME} = \frac{S_{ABM}}{S_{AMF}} + \frac{S_{AMC}}{S_{AME}} \quad (1)$

Mặt khác $\frac{S_{ABM}}{S_{AMF}} + \frac{S_{AMC}}{S_{AME}} \geq 2\sqrt{\frac{S_{ABM}}{S_{AMF}} \cdot \frac{S_{AMC}}{S_{AME}}} \quad (2)$

(Bất đẳng thức Cô-si) Ta có



$$\frac{S_{ABM}}{S_{AMF}} \cdot \frac{S_{AMC}}{S_{AME}} = \frac{AB}{AE} \cdot \frac{AC}{AF} \quad (3)$$

So sánh (1), (2) và (3) suy ra

$$\frac{MB}{MF} + \frac{MC}{ME} \geq 2\sqrt{\frac{AB \cdot AC}{AF \cdot AE}}$$

Đẳng thức xảy ra khi xảy ra đẳng thức ở

(2) tức $\frac{S_{ABM}}{S_{AMF}} = \frac{S_{AMC}}{S_{AME}}$ hay $\frac{MB}{MF} = \frac{MC}{ME}$. Điều này tương đương với $BC \parallel EF$.

Nhận xét. 1. Đa số các bạn dùng định lý Mê-nê-la-uyt giải bài toán này.

2. Bạn Lê Bá Long, 9A1, THCS Giấy Phong Châu, Phù Ninh, Phú Thọ biến đổi bài toán thành tìm quỹ điểm M thuộc miền trong góc BAC sao cho

$$\frac{MB}{MF} + \frac{MC}{ME} = 2\sqrt{\frac{AB \cdot AC}{AF \cdot AE}}$$

3. Các bạn có lời giải tốt :

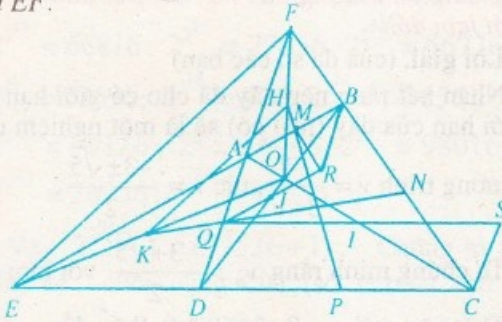
Phú Thọ : Ngô Vinh Thái, 9A1, THCS Giấy Phong Châu, Phù Ninh, Nguyễn Quang Huy, 9G, THCS Văn Lang, Việt Trì ; **Vinh Phúc :** Đỗ Đình Khanh, 8A, THCS Yên Lạc, Vũ Văn Quang, 9C, THCS Vinh Tường ; **Bắc Ninh :** Lê Quốc Khánh, 9A, THCS Yên Phong ; **Hưng Yên :** Nguyễn Thùy Linh, 9A2, THCS Chu Mạnh Trinh, Văn Giang ; **Hải Dương :** Nguyễn Duy Mạnh, 9/3, THCS Lê Quý Đôn ; **Bắc Giang :** Phan Tuấn Anh, 9A, THCS Đức Giang ; **Hải Phòng :** Phạm Kim Phương, 9A, THCS Nguyễn Bình Khiêm, Vĩnh Bảo ; **Hà Nội :** Lê Việt Bách, 9A, Hà Nội - Amsterdam, Vũ Nhật Minh, 9H, THCS Lê Quý Đôn, Q. Cầu Giấy ; **Nam Định :** Nguyễn Huy Quang, Vũ Duy Linh, 9A2, THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên, Phạm Thị Hương Giang, 9A1, THCS Phùng Chí Kiên ; **Thanh Hóa :** Lưu Xuân Thế, 9A, THCS Lê Hữu Lập, Hậu Lộc, Trần Văn Duy, 9B, THCS Xuân Lộc, Hậu Lộc ; **Nghệ An :** Hồ Ngọc Kiên, 9A, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu ; **Hà Tĩnh :** Trần Anh Tài, 9A, THCS Kì Tiến, Kì Anh, Trần Xuân Hoàng, 9A1, THCS Lê Văn Thiêm, Tx. Hà Tĩnh ; **Thừa Thiên - Huế :** Lê Quang Thành, 9¹, THCS Nguyễn Tri Phương, Huế ; **Quảng Ngãi :** Hồ Thị Mỹ Nữ, 9A, THCS Nguyễn Trãi, Mộ Đức ; **Khánh Hòa :** Trần Kiến Thức, 9H, trường Thái Nguyên, Nha Trang ; **Tp. Hồ Chí Minh :** Trần Hải Đăng, 8A9, THPT Trần Đại Nghĩa ; **Đồng Tháp :** Lê Quang Trường, 8A6, THPT Cao Lãnh ; **Bạc Liêu :** Lê Trung, 9/2, THCS Thực hành sư phạm.

VŨ KIM THỦY

Bài T7/308. Cho tứ giác lồi ABCD với E là giao điểm của hai đường thẳng AB, CD và F là giao điểm của hai đường thẳng AD, BC. Hai đường chéo AC, BD cắt nhau tại điểm O. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA. Gọi H, K là giao điểm các đường thẳng OF và MP, OE và NQ theo thứ tự. Chứng minh rằng $HK \parallel EF$.

Lời giải. Ta sẽ sử dụng bổ đề sau.

Bổ đề : Cho tứ giác lồi $ABCD$ với E, F lần lượt là các giao điểm của các cặp đường thẳng AB, CD và AD, BC ; I, J lần lượt là trung điểm của AC, BD . Khi đó IJ đi qua trung điểm của EF .



Thật vậy, dựng các hình bình hành $ABRQ, CDQS$ (hình vẽ) lúc đó I, J, N tương ứng là trung điểm SQ, QR, RS , đồng thời :

$$S(EQJ) = \frac{1}{4}S(ABRQ) \quad (1);$$

$$S(EQI) = \frac{1}{4}S(CDQS) \quad (2);$$

$$S(QIJ) = \frac{1}{4}S(QRS) \quad (3)$$

$$S(BRN) = S(CSN) \quad (4)$$

Từ (1), (2), (3), (4) suy ra :

$$S(EIJ) = \frac{1}{4}[S(ABRQ) + S(CDQS) + S(QRS)] \\ = \frac{1}{4}S(ABCD)$$

$$\text{Tương tự ta cũng có } S(FIJ) = \frac{1}{4}S(ABCD).$$

Vậy $S(EIJ) = S(FIJ)$, nghĩa là khoảng cách từ E, F đến đường thẳng IJ là bằng nhau, từ đó suy ra đường thẳng IJ đi qua trung điểm EF , bổ đề được chứng minh.

Trở lại bài toán đã cho : Áp dụng bổ đề trên cho tứ giác $FAOB, EAOD$ ta thấy H, K lần lượt là trung điểm của OF và OE , do đó $HK \parallel EF$ (đpcm).

Nhận xét. Tất cả các lời giải gửi về TS đều áp dụng bổ đề trên (một tính chất đặc trưng của tứ giác toàn phần) chứng minh H, K tương ứng là trung điểm của OF và OE , từ đó suy ra kết luận ở đề bài. Rất nhiều bạn CM bổ đề bằng cách áp dụng định lý Mê-nê-la-uyt thuận cho ΔAOD với cát tuyến FC , sau đó áp dụng định lý Mê-nê-la-uyt đảo cho ΔQIJ . Sau đây là danh sách các bạn có lời giải tốt hơn cả :

Vinh Phúc : Nguyễn Kim Thuật, 8A, THCS Yên Lạc, Yên lạc ; **Phú Thọ :** Nguyễn Xuân Trường, 9A, THCS Giầy - Phong Châu, Nguyễn Minh Hoàng, 9A, THCS

Đoan Hùng, Nguyễn Mạnh Hùng, 9A3, THCS Lâm Thao ; **Hà Nội :** Nguyễn Đức Hà, 8H, Thân Anh Đức, Đỗ Xuân Huy, 9H, THCS Lê Quý Đôn, Q. Cầu Giấy ; **Hải Phòng :** Phạm Quỳnh Anh, Bùi Ngọc Khôi, Nguyễn Vũ Lân, 9A, THPT NK Trần Phú ; **Hải Dương :** Lại Nguyễn Thanh, 8/3, Nguyễn Duy Mạnh, Nguyễn Anh Tuấn, 9/3, THCS Lê Quý Đôn, Tp. Hải Dương, Nguyễn Mạnh Đức, 8A1, THCS Chu Văn An, Thanh Hà ; **Hà Nam :** Nhữ Anh Tuấn, 8B, THCS Trần Phú, Tx. Phủ Lý ; **Nam Định :** Phạm Thị Trang Nhung, 9A6, THCS Trần Đăng Ninh, Tp. Nam Định, Nguyễn Hồng Phương, 8C, THCS Nguyễn Hiền, Nam Trực ; **Thanh Hóa :** Lê Hữu Tuấn, Lê Anh Tú, 8B, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoàng Hóa, Trần Thị Mai, 9A1, Nguyễn Hoàng Linh, 9B, THCS Trần Mai Ninh, Tp. Thanh Hóa ; **Nghệ An :** Võ Đình Hùng, 8B, THCS Bạch Liêu, Yên Thành ; **Quảng Ngãi :** Huỳnh Kim Quỳnh, 9A, THCS Nguyễn Trãi, Mộ Đức ; **Thừa Thiên - Huế :** Phan Lê Anh Minh, 9₁, THCS Nguyễn Tri Phương, Tp. Huế.

HỒ QUANG VINH

Bài T8/308. Gọi x, y, p là các số nguyên và $p > 1$ sao cho mỗi số x^{2002} và y^{2003} đều chia hết cho p . Chứng minh rằng $1 + x + y$ không chia hết cho p .

Lời giải. (của đa số các bạn)

Trước hết ta có nhận xét rằng nếu q là số nguyên tố và a^n chia hết cho q thì a phải chia hết cho q (1). Vì $p > 1$ nên p có ít nhất một ước nguyên tố q . Do $x^{2002} : q$ và $y^{2003} : q$ nên theo nhận xét trên $x : q$ và $y : q$. Do đó $x + y + 1$ không chia hết cho q . Vì p là bội của q nên $x + y + 1$ không chia hết cho p .

Nhận xét. Các bạn có lời giải tốt rất nhiều chẳng hạn: Trần Quốc Hoàn, 10T, THPT Nguyễn Trãi, **Hải Dương :** Nguyễn Ngọc Tuấn, 10A, PTCT Sư phạm Hà Nội ; Nguyễn Phúc Thọ, 10T, THPT Lê Quý Đôn, **Bình Định :** Nguyễn Bảo Linh, 8A, THCS Văn Lang, Phú Thọ ; Nguyễn Tuấn Nam, 9A, THCS Hoàng Hóa, **Thanh Hóa :** Nguyễn Minh Lộc, 10T, PTNK ĐHQG Tp. Hồ Chí Minh, **Bà Rịa - Vũng Tàu :** Bùi Thị Thu Hiền, 10A1, THPT ch. Vĩnh Phúc.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T9/308. Cho các số dương $a_1, a_2, \dots, a_n$ và $b_1, b_2, \dots, b_n$. Chứng minh rằng

$$a) \frac{a_1^r}{b_1^{r-1}} + \frac{a_2^r}{b_2^{r-1}} + \dots + \frac{a_n^r}{b_n^{r-1}} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^r}{(b_1 + b_2 + \dots + b_n)^{r-1}}$$

trong đó r là số hữu tỉ, $r > 1$;

$$b) \frac{a_1^s}{b_1} + \frac{a_2^s}{b_2} + \dots + \frac{a_n^s}{b_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^s}{n^{s-2}(b_1 + b_2 + \dots + b_n)}$$

trong đó s là số hữu tỉ, $s \geq 2$.

Lời giải. a) Đặt $A_i = \frac{a_i}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}$,

$$B_i = \frac{b_i}{b_1 + b_2 + \dots + b_n}, i = 1, 2, \dots, n.$$

Bất đẳng thức (BĐT) cần chứng minh tương đương với BĐT sau : $\sum_{i=1}^n \frac{A_i^r}{B_i^{r-1}} \geq 1$ (1)

Do r là số hữu tỉ, $r = \frac{p}{q}$, $p > q$, $p, q \in \mathbb{N}^*$

Áp dụng BĐT Cô-si cho q số $A_i^{p/q} / B_i^{(p/q)-1}$ và $(p-q)$ số B_i , ta có $q \cdot (A_i^{p/q} / B_i^{(p/q)-1}) + (p-q) \cdot B_i \geq p \cdot A_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Cộng vế theo vế ta được $q \cdot \sum_{i=1}^n \frac{A_i^r}{B_i^{r-1}} + (p-q) \geq p \Rightarrow$ BĐT (1) đúng.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $A_i^r / B_i^{r-1} = B_i$

$$\Leftrightarrow A_i = B_i, (i = 1, \dots, n). \text{ Tức là } \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}.$$

b) Vẫn kí hiệu A_i, B_i như trên và $C_i = n \cdot A_i$, $D_i = n \cdot B_i$, ($i = 1, \dots, n$), $S = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}^*$, $p \geq 2q$.

BĐT cần chứng minh tương đương với BĐT sau : $\sum_{i=1}^n \frac{C_i^s}{D_i} \geq n$ (2)

Áp dụng BĐT Cô-si cho q số $C_i^{p/q} / D_i$, q số D_i và $(p-2q)$ số 1 ta có $q \cdot (C_i^{p/q} / D_i) + q \cdot D_i + (p-2q) \cdot 1 \geq p \cdot C_i$ ($i = 1, \dots, n$).

Cộng vế theo vế ta được

$$q \cdot \sum_{i=1}^n \frac{C_i^s}{D_i} + q \cdot n + (p-2q) \cdot n \geq p \cdot n.$$

Suy ra BĐT (2) đúng.

Nếu $s > 2$, tức là $p > 2q$, đẳng thức xảy ra khi

$$\text{và chỉ khi } \frac{C_i^r}{D_i} = D_i = 1 \quad (i = 1, \dots, n) \Leftrightarrow a_1 =$$

$$a_2 = \dots = a_n, b_1 = b_2 = \dots = b_n$$

Nếu $s = 2$, đây là trường hợp $r = 2$ của câu a).

Nhận xét. Đây là bài toán BĐT cổ điển. Tòa soạn nhận được lời giải của hơn 100 bạn, hầu hết các bạn giải bài toán này bằng cách dùng BĐT Cô-si suy rộng. Các bạn lớp 10 sau có lời giải tốt : **Hà Nội :** Nguyễn Anh Tú, 10A1, THPT Việt - Đức ; **Hải Dương :** Phạm Văn Dương, Lê Đình Huy, 10T, THPT Nguyễn Trãi ; **Hải Phòng :** Bùi Tuấn Anh, 10T, THPT Trần Phú.

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T10/308. Xét dãy số (v_n) ($n = 0, 1, 2, \dots$)

được xác định bởi : $v_0 = 1$ và $v_n = \frac{-1}{3+v_{n-1}}$ với mọi $n = 1, 2, 3, \dots$

Chứng minh rằng dãy này có giới hạn và tìm giới hạn đó.

Lời giải. (của đa số các bạn)

Nhận xét rằng nếu dãy đã cho có giới hạn thì giới hạn của dãy (nếu có) sẽ là một nghiệm của

$$\text{phương trình } v = \frac{-1}{3+v}, \text{ tức } v = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Ta chứng minh rằng $v_n > \frac{-3+\sqrt{5}}{2}$ với mọi n .

Thật vậy, với $n = 0$ và $n = 1$ ta thấy đúng.

Với $v_k > \frac{-3+\sqrt{5}}{2}$ thì $3 + v_k > \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ và

$$\frac{1}{3+v_k} < \frac{2}{3+\sqrt{5}} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

$$\text{Do đó } v_{k+1} > \frac{-3+\sqrt{5}}{2}.$$

Mặt khác ta lại có dãy (v_n) là một dãy giảm

$$\text{vì } v_n - v_{n+1} = v_n + \frac{1}{3+v_n} = \frac{v_n^2 + 3v_n + 1}{3+v_n} > 0$$

Từ đó, suy ra dãy đã cho có giới hạn và do

$$v_n > \frac{-3+\sqrt{5}}{2} \text{ nên } \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}.$$

Nhận xét. 1. Bạn Hoàng Trọng Bái, 11B1, THPT Lê Văn Hữu, Thanh Hóa và một số bạn khác, nhận xét rằng có thể dựng tương minh số hạng tổng quát của dãy để từ đó có kết luận cần chứng minh. Thật vậy, nếu đặt

$$w_0 = 1, w_{n+1} = \frac{w_n}{v_n}, n = 0, 1, \dots \text{ thì } w_{n+1} + 3w_n + w_{n-1} = 0$$

Từ đây, suy ra

$$w_n = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2} \right)^n + \frac{1-\sqrt{5}}{2} \left(\frac{-3-\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

Vậy nên

$$v_n = \frac{w_n}{w_{n+1}} = \frac{\frac{\sqrt{5}+1}{2} \left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2} \right)^n + \frac{1-\sqrt{5}}{2} \left(\frac{-3-\sqrt{5}}{2} \right)^n}{\frac{\sqrt{5}+1}{2} \left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} + \frac{1-\sqrt{5}}{2} \left(\frac{-3-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}}$$

2. Bạn Vũ Ngọc Hải, 10T, THPT chuyên Hạ Long và nhiều bạn khác, có nhận xét rằng có thể giải trực tiếp

bài toán tổng quát đối với dãy $v_0 = \alpha$, $v_{n+1} = -\frac{a}{b+cv_n}$, trong đó a, b, c là các số dương.

$$0 > \alpha \geq \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c} > \frac{-b}{c}.$$

3. Đây là một bài toán cơ bản đã có trong các tài liệu (xem bài 6, Đề thi HSGQG bảng B năm 2003).

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T11/308. Giả sử điểm M nằm trong tam giác nhọn ABC có độ dài các cạnh là $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Gọi D, E, F lần lượt là hình chiếu của M trên các cạnh BC, CA, AB . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

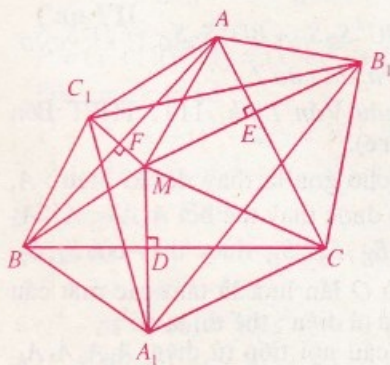
$$P = a.ME.MF + b.MF.MD + c.MD.ME$$

và xác định vị trí của điểm M khi đó.

Lời giải. Trước hết xin phát biểu và chứng minh một bổ đề, thường gọi là định lý Ô-le cho tam giác.

Bổ đề. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O , bán kính R . M là một điểm bất kỳ; D, E, F theo thứ tự là hình chiếu của M trên các đường thẳng BC, CA, AB . Khi đó

$$S[DEF] = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{OM^2}{R^2} \right) S[ABC]$$



Trong bổ đề trên kí hiệu $S[\cdot]$ chỉ diện tích có hướng của tam giác. (xem các bài viết về tích ngoài của hai vector trong THPT

(12/2001, 1/2002,

4/2002). Sử dụng tam giác định hướng thay thế cho việc xét, vẽ rất nhiều vị trí tương đối của $\triangle ABC$ tùy ý và điểm M .

Không mất tính tổng quát, giả sử tam giác ABC có hướng dương. Gọi A_1, B_1, C_1 là các điểm đối xứng của M qua BC, CA, AB (hình vẽ).

$$\text{Đương nhiên : } S[DEF] = \frac{1}{4} S[A_1 B_1 C_1] \quad (1)$$

Mặt khác, theo hệ thức Sa-lơ về diện tích có hướng, ta có :

$$\begin{aligned} S[A_1 B_1 C_1] &= S[MB_1 C_1] + S[MC_1 A_1] + S[MA_1 B_1] \\ &= S[AC_1 M] + S[AMB_1] - S[AC_1 B_1] + \\ &\quad + S[BA_1 M] + S[BMC_1] - S[BA_1 C_1] + \\ &\quad + S[CB_1 M] + S[CMA_1] - S[CB_1 A_1] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= S[AB_1 C_1] + 2S[AFM] + 2S[AME] \\ &\quad + S[BC_1 A_1] + 2S[BDM] + 2S[BMF] \\ &\quad + S[CA_1 B_1] + 2S[CEM] + 2S[CMD] \\ &= S[AB_1 C_1] + S[BC_1 A_1] + S[CA_1 B_1] + \\ &\quad + 2(S[BDM] + S[CMD]) + 2(S[CEM] + S[AME]) + \\ &\quad + 2(S[AFM] + S[BMF]) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= S[AB_1 C_1] + S[BC_1 A_1] + S[CA_1 B_1] + \\ &\quad + 2(S[MBC] + S[MCA] + S[MAB]) \\ &= S[AB_1 C_1] + S[BC_1 A_1] + S[CA_1 B_1] + 2S[ABC] \end{aligned}$$

$$\text{Vậy : } S[A_1 B_1 C_1] = S[AB_1 C_1] + S[BC_1 A_1] + S[CA_1 B_1] + 2S[ABC]$$

$$\text{Chú ý rằng : } AB_1 = AC_1 \text{ (cùng bằng } AM)$$

$$(\overline{AB_1}, \overline{AC_1}) = (\overline{AB_1}, \overline{AM}) + (\overline{AM}, \overline{AC_1}) \pmod{2\pi}$$

$$\equiv 2(\overline{AC}, \overline{AM}) + 2(\overline{AM}, \overline{AB}) \pmod{2\pi}$$

$$\equiv 2(\overline{AC}, \overline{AB}) \pmod{2\pi} \equiv -2A \pmod{2\pi}$$

Suy ra :

$$S[AB_1 C_1] = \frac{1}{2} AB_1 \cdot AC_1 \sin(\overline{AB_1}, \overline{AC_1})$$

$$= -\frac{1}{2} AM^2 \sin 2A.$$

Tương tự như vậy, ta có :

$$S[BC_1 A_1] = -\frac{1}{2} BM^2 \sin 2B$$

$$S[CA_1 B_1] = -\frac{1}{2} CM^2 \sin 2C$$

$$\begin{aligned} \text{Vậy : } S[A_1 B_1 C_1] &= 2S[ABC] - \\ &- \frac{1}{2} (AM^2 \sin 2A + BM^2 \sin 2B + CM^2 \sin 2C) \quad (2) \end{aligned}$$

Từ đẳng thức quen thuộc :

$$\sin 2A \cdot \overline{OA} + \sin 2B \cdot \overline{OB} + \sin 2C \cdot \overline{OC} = \vec{0}.$$

Theo hệ thức Ja-cô-bi, ta có :

$$\begin{aligned} AM^2 \sin 2A + BM^2 \sin 2B + CM^2 \sin 2C &= \\ &= (R^2 + OM^2)(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C) \\ &= 4(R^2 + OM^2) \sin A \sin B \sin C \end{aligned}$$

$$= 2 \left(1 + \frac{OM^2}{R^2} \right) \cdot 2R^2 \sin A \sin B \sin C$$

$$= 2 \left(1 + \frac{OM^2}{R^2} \right) S(ABC)$$

$$= 2 \left(1 + \frac{OM^2}{R^2} \right) S[ABC] \quad (3)$$

Từ (2), (3) suy ra :

$$S[A_1 B_1 C_1] = 2S[ABC] - \left(1 + \frac{OM^2}{R^2}\right) S[ABC]$$

$$= \left(1 - \frac{OM^2}{R^2}\right) S[ABC] \quad (4)$$

Từ (1), (4) suy ra :

$$S[DEF] = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{OM^2}{R^2}\right) S[ABC]$$

Chú ý : D, E, F thẳng hàng $\Leftrightarrow S[DEF] = 0$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{OM^2}{R^2} = 0 \Leftrightarrow OM = R \Leftrightarrow M \in (O, R)$$

Ta lại nhận được kết quả quen thuộc về đường thẳng Sim-Son.

Trở lại bài toán của ta. Để việc áp dụng bổ đề đơn giản hơn, ta vẫn coi tam giác ABC có hướng dương và nội tiếp đường tròn (O, R) . Cũng nên chú ý rằng từ giả thiết M nằm trong tam giác để dàng suy ra tam giác DEF có hướng dương và M nằm trong tam giác DEF .

Ta có : $P = a.ME.MF + b.MF.MD + c.MD.ME$

$$= 4R \left(\frac{1}{2} ME.MF.\sin A + \frac{1}{2} MF.MD.\sin B + \frac{1}{2} MD.ME.\sin C \right)$$

$$= 4R \left(\frac{1}{2} ME.MF.\sin \widehat{EMF} + \frac{1}{2} MF.MD.\sin \widehat{FMD} + \frac{1}{2} MD.ME.\sin \widehat{DME} \right)$$

$$= 4R(S(MEF) + S(MFD) + S(MDE))$$

$$= 4R.S(DEF)$$

$$= R \left(1 - \frac{OM^2}{R^2}\right) S(ABC) \quad (\text{Theo bổ đề})$$

$$\leq R.S(ABC) = \frac{abc}{4}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \frac{OM^2}{R^2} = 0 \Leftrightarrow M \equiv O$.

Tóm lại : P lớn nhất khi M trùng với tâm O và giá trị lớn nhất đó bằng $\frac{abc}{4}$.

Nhận xét. 1) Rất nhiều bạn tham gia giải bài toán này và đều giải đúng trừ một vài sai sót nhỏ. Đa số các bạn đều dùng định lí O-le trong lời giải của mình.

2) Bạn Nguyễn Chí Bảo, 11A1, THPT Gia Bình, Bắc Ninh đưa ra một lời giải khá hay bằng phương pháp tam thức bậc hai.

3) Nhờ bổ đề trên, ta có thể thay giả thiết tam giác nhọn bởi tam giác bất kì.

4) Các bạn sau đây có lời giải tương đối tốt. **Đà Nẵng:** Võ Thanh Hải, 10A1, THPT Lê Quý Đôn ; **Thanh Hóa :** Đỗ Thị Hương, 10A3, THPT Yên Định I ; **Thừa Thiên - Huế :** Tôn Thất Tử, 11T, THPT Quốc học ; **Đồng Tháp :** Lê Quang Trường, 11T, THPT Cao Lãnh ; **Nghệ An :** Phạm Viết Sâm, 10A1, THPT Phan Bội Châu ; **Quảng Nam :** Nguyễn Hữu Hiệp, 11/1, THPT Trần Cao Vân ; **Vĩnh Phúc :** Bùi Hữu Đức, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc ; **Phú Yên :** Phan Thành Nam, 12T2, THPT chuyên Lương Văn Chánh ; **Hòa Bình :** Lưu Như Hòa, 10T, THPT Hoàng Văn Thụ ; **DHSP Hà Nội :** Đỗ Hoàng Khiêm, 10A2, khối PTCT-Tin.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài T12/308. Gọi S_A, S_B, S_C, S_D lần lượt là diện tích các mặt BCD, CDA, DAB, ABC của một tứ diện $ABCD$ và gọi R là bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện đó. Chứng minh rằng

$$R \geq \frac{T}{S_A + S_B + S_C + S_D} \quad (*)$$

trong đó $T^2 = AB^2 S_A S_B + AC^2 S_A S_C + AD^2 S_A S_D + BC^2 S_B S_C + BD^2 S_B S_D + CD^2 S_C S_D$
Đẳng thức xảy ra khi nào ?

Lời giải. (Châu Văn Linh, 11T, THPT Bến Tre, tỉnh Bến Tre).

Để trình bày cho gọn ta thay đổi kí hiệu : A, B, C, D lần lượt được thay thế bởi A_1, A_2, A_3, A_4 ; cũng vậy S_A, S_B, S_C, S_D được thay bởi S_1, S_2, S_3, S_4 . Gọi I và O lần lượt là tâm các mặt cầu nội và ngoại tiếp tứ diện ; thế thì ta có :

I là tâm mặt cầu nội tiếp tứ diện $A_1 A_2 A_3 A_4$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^4 S_i \cdot \overrightarrow{IA_i} = \vec{0} \Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^4 S_i \right) \overrightarrow{OI} = \sum_{i=1}^4 S_i \cdot \overrightarrow{OA_i}$$

$(OA_i = R \text{ với } i = 1, 2, 3, 4)$ (1)

Bất đẳng thức (*) cần tìm tương đương với BĐT sau :

$$(*) \Leftrightarrow R^2 \left(\sum_{i=1}^4 S_i \right)^2 \geq T^2 = \sum_{1 \leq i < j \leq 4} A_i A_j^2 S_i S_j$$

$$\Leftrightarrow R^2 \left(\sum_{i=1}^4 S_i^2 \right) \geq \sum_{1 \leq i < j \leq 4} (A_i A_j^2 - 2R^2) S_i S_j \quad (2)$$

Mặt khác, lại có :

$$A_i A_j^2 = \overline{A_i A_j}^2 = (\overline{OA_j} - \overline{OA_i})^2 = 2R^2 - 2\overline{OA_i} \cdot \overline{OA_j} \quad (3)$$

Đối chiếu (1) (2) và (3), ta được :

$$(*) \Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^4 S_i \cdot \overline{OA_i} \right)^2 = \left(\sum_{i=1}^4 S_i \right)^2 \cdot \overline{OI}^2 \geq 0 (**)$$

Đẳng thức xảy ra ở (*) khi và chỉ khi đẳng thức xảy ra ở (**), nghĩa là $\overline{OI} = \vec{0}$, và do đó : I trùng với O, hay tứ diện là gần đều.

Nhận xét. 1) Lời giải trên đây được trình bày bằng phương pháp phân tích trên cơ sở sử dụng các phép biến đổi đại số tương đương. Số các bạn tham gia giải bài toán này không nhiều, tất cả đều sử dụng PP vectơ và đều giải đúng, trừ hai bạn đã vội vàng kết luận sai : Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tứ diện là đều !!! Nên nhớ rằng $O = I$ mới là một tính chất đặc trưng của tứ diện gần đều (các mặt là những tam giác bằng nhau, nhưng không nhất thiết phải là tam giác đều) và tứ diện là đều khi và chỉ khi nó vừa là một tứ diện gần đều vừa là một tứ diện trực tâm (tứ diện có các đường cao đồng quy).

2) Ngoài bạn Linh, các bạn sau đây có lời giải tốt, tương đối gọn gàng : **Hà Nội** : Lê Hùng Việt Bảo, 11A Toán, ĐHKHTN – ĐHQG Hà Nội, Nguyễn Hoàng Thanh, 12A1, khối PTCT-T, ĐHSP Hà Nội ; **Bắc Ninh** : Lê Duy Cường, Nguyễn Văn Thơ, 11A1, THPT Yên Phong I ; **Hải Dương** : Nguyễn Thị Thanh Hằng, 11 Toán, THPT Nguyễn Trãi, Tp. Hải Dương ; **Phú Thọ** : Lê Việt Hà, 11A1, Hoàng Ngọc Minh, 12A1, THPT ch. Hùng Vương, Việt Trì ; **Nghệ An** : Phan Đình Phúc, 10A1, Bùi Đăng Lương, 11A1, Nguyễn Mạnh Hùng, 11A2, THPT ch. Phan Bội Châu, Tp. Vinh, Phan Đăng Học, 11A1, Khối PTCTT, ĐH Vinh ; **Quảng Trị** : Hồ Sĩ Sáng, Hoàng Tiến Trung, Nguyễn Văn Việt, 11 Toán, THPT ch. Lê Quý Đôn, Lê Hải Dương, 11B, THPT Hải Lăng ; **Đà Nẵng** : Thái Thanh Hải, 10A1, THPT Lê Quý Đôn, Hải Châu, Đà Nẵng ; **Cần Thơ** : Mạch Nguyệt Minh, 12A1, THPT Lý Tự Trọng, Tp. Cần Thơ ; **Cà Mau** : Trần Bảo Ngọc, 11A3 Toán, THPT chuyên Phan Ngọc Hiển, Phan Đình Phùng, Cà Mau.

NGUYỄN ĐĂNG PHÁT

Bài L1/308. Một ô tô bắt đầu chuyển động đều từ điểm A trên một đường thẳng. Đến thời điểm 8 giờ, nó cách A một khoảng ac , đến 8 giờ 30 phút thì cách A một khoảng ca , và đến 9 giờ thì cách A một khoảng abc , biết a, b, c là các số nguyên từ 0 đến 9, đơn vị km. Hãy xác định vận tốc của ô tô và thời điểm xuất phát.

Lời giải. Kí hiệu $t(h)$, $v(km/h)$ tương ứng là thời điểm xuất phát và vận tốc của ô tô. Theo đề bài, ta có các phương trình : $(8 - t)v = ac$ (1) ; $(8,5 - t)v = ca$ (2) ; $(9 - t)v = abc$ (3). Từ (1) và (2) có $0,5v = 9(c - a) \Rightarrow c > a$ (4). Từ (2) và (3) rút ra $0,5v = 99a + 10b - 9c$ (5). Từ (4) và (5) tìm được hệ thức $54a + 5b = 9c$ (6). Bởi vì a, b, c là các số nguyên từ 0 đến 9 (đơn vị km) nên từ (6) tìm được hai cặp nghiệm : $a = 0, b = 9, c = 5$ (I) và $a = 1, b = 0, c = 6$ (II).

– Với cặp nghiệm (I) thay vào các phương trình (4) và (1) tìm được : $v = 90km/h$, và $t = 7h56min40s$

– Với cặp nghiệm (II) tìm được : $v = 90km/h$ và $t = 7h49min20s$.

Nhận xét. Tòa soạn hoan nghênh nhiệt tình gửi bài giải của các em (có tới gần 300 bài), trong số đó có nhiều em đang học THCS sau đây là danh sách các em tìm được cả 2 trường hợp và đáp số đúng :

Thừa Thiên – Huế : Lê Hữu Điện Khuê, 8¹, THCS Nguyễn Tri Phương, Tp. Huế ; **Hà Tây** : Trần Nho Toán, 9A, Đội I, Hát Môn, Phúc Thọ, Vương Tuấn Anh, 12T, THPT Nguyễn Huệ ; **Hà Tĩnh** : Lê Minh Ngọc, 9H, THCS Thị trấn Kỳ Anh ; **Ninh Bình** : Lê Hồng Linh, 11 Lí, THPT Lương Văn Tụy ; **Khánh Hòa** : Nguyễn Thị Thanh Vân, 9¹⁴, THCS Thái Nguyên, Nha Trang ; **Thanh Hóa** : Lê Bá Ngọc, Nguyễn Văn Bích, Nguyễn Đức Thương, 8B, THCS Lê Hữu Lập, Hậu Lộc, Nguyễn Hoàng Linh, 9B, THCS Trần Mai Ninh, Tp. Thanh Hóa ; **Vĩnh Phúc** : Nguyễn Ngọc Hưng, 9C, THCS Tam Dương, Nguyễn Thị Phương Dung, 10A3, THPT ch. Vĩnh Phúc, Hà Văn Lê, 11A1, THCS Ngô Gia Tự, Lập Thạch ; **Phú Thọ** : Nguyễn Quang Huy, 9A1, THCS Hà Hòa, Hà Hòa, Phan Đức Dũng, 9A1, THCS Giầy Phong Châu, Phù Ninh, Nguyễn Đức Chính, 11A2, THPT Việt Trì, Nguyễn Kim Ngọc, 12B1, THPT ch. Hùng Vương, Việt Trì ; **Hải Dương** : Phạm Thị Thanh Phương, Đào Ngọc Hưng, 8/3, THCS Lê Quý Đôn, Tp. Hải Dương ; **Quảng Ngãi** : Ngô An Hòa Kỳ, 11B1, THPT số II, Mộ Đức ; **Quảng Nam** : Nguyễn Hữu Hiệp, 11/1, THPT Trần Cao Văn, Tam Kỳ ; **Hòa Bình** : Bùi Bích Huệ, 10T, THPT ch. Hoàng Văn Thụ ; **Bình Định** : Lê Tôn Chánh, 11T, THPT ch. Lê Quý Đôn, Quy Nhơn ; **Hà Nội** : Nguyễn Tiến Đạt, 10C, THPT Thăng Long ; **Hải Phòng** : Mai Ngọc Trinh, 10A, THPT Hùng Thắng.

MAI ANH

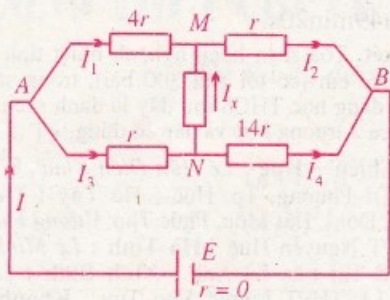
Bài L2/308. Từ một cuộn dây đồng chất, tiết diện đều, làm bằng một hợp kim có điện trở suất lớn, người ta cắt ra hai đoạn dây dài $l_1 = 1m$ và $l_2 = 3m$, rồi mắc chúng song song với nhau vào một nguồn điện có suất điện động không đổi và điện trở trong không đáng kể. Gọi 2 điểm nút là A và B. Người ta đánh dấu điểm M trên dây thứ nhất mà $MB = 0,2m$, và điểm N trên dây thứ hai mà $AN = 0,2m$ rồi nối M với N bằng một đoạn dây thứ ba có chiều dài l_x chưa biết, cũng được cắt ra từ cuộn dây nói trên.

a) Tính tỉ số cường độ dòng điện trong 2 đoạn AM và NB.

b) Tìm chiều dài l_x để cho công suất tiêu thụ trên đoạn dây nối MN đạt giá trị cực đại.

Lời giải. a) Đặt $R_{MB} = R_{AN} = r$, ta dễ dàng có $R_{MN} = 4r$; $R_{NB} = 14r$. Đặt $R_{MN} = x$ và kí hiệu các dòng điện như trên hình. Ta có : $I_1 + I_3 = I_2 + I_4$ (1), và $4r.I_1 + r.I_2 = r.I_3 + 14r.I_4$, từ đó

$4I_1 + I_2 = I_3 + 14I_4$ (2). Từ (1) và (2) rút ra :
 $\frac{I_1}{I_4} = 3$ (không phụ thuộc x).



b) Ta có $I_3 = I_4 + x$; $E = U_{AN} + U_{NB} = (I_4 + I_x)r + I_4 \cdot 14r$ (3); $U_{AN} + U_{NM} = U_{AM} \Rightarrow (I_4 + I_x)r + I_x x = 3I_4 \cdot 4r$ (4) (vì $I_1 = 3I_4$). Từ (3) và (4)

$$\text{tìm được : } I_x = \frac{\frac{11E}{15}}{\frac{26}{x+r}} = \frac{E'}{x+r}, \text{ nghĩa là về}$$

mặt hình thức thì I_x giống như dòng điện chạy trong mạch kín gồm điện trở x và nguồn có sđđ

$E' = \frac{11E}{15}$, điện trở trong $r' = \frac{26}{15}r$. Suy ra công suất tiêu thụ trên đoạn MN đạt cực đại khi $x = r' \Rightarrow x = \frac{26}{15}r$. Vì điện trở đoạn dây tỉ lệ với chiều

dài nên ta có : $MN = l_x = \frac{26}{15} \cdot 0,2 \approx 0,35\text{m}$.

Nhận xét. Các em có lời giải và đáp số đúng :

Bắc Ninh : Vũ Tuấn Linh, 11 Lí, THPT NK Hàn Thuyên ; **Vĩnh Phúc :** Hoàng Thị Hồng Hạnh, 10A3, THPT ch. Vĩnh Phúc ; **Phú Thọ :** Nguyễn Kim Ngọc, 12B1, Nguyễn Ngọc Thạch, 10B chuyên Lí, THPT ch. Hùng Vương ; **Nguyễn Minh Tân,** 11A4, THPT Thanh Thủy ; **Hòa Bình :** Nguyễn Tuấn Anh, 12 Lí, THPT ch. Hoàng Văn Thụ ; **Ninh Bình :** Đoàn Thị Hồng Minh, 11A3, THPT Yên Khánh A ; **Nam Định :** Trần Hoàng Anh, Nguyễn Văn Phú, 11 Lí, THPT ch. Lê Hồng Phong ; **Bình Định :** Lê Văn Thông, 12 Lí, THPT ch. Lê Quý Đôn, Quý Nhơn ; **Hà Nội :** Ninh Văn Cường, 10B, THPT chuyên Lí, ĐHKHTN – ĐHQG Hà Nội ; **Hưng Yên :** Đào Ngọc Dương, 11 chuyên Lí, PTNK Hưng Yên ; **Hải Dương :** Hoàng Văn Huỳnh, 11T, THPT Nguyễn Trãi ; **Bắc Giang :** Lê Nho Thủy, Giáp Ngọc Trung, 12B, THPT NK Ngô Sĩ Liên ; **Nghệ An :** Thái Bá Sơn, K30A3, Nguyễn Văn Hòa, 10A3–K31, THPT Phan Bội Châu.

MAI ANH

PROBLEMS IN THIS ISSUE (Tiếp trang 13)

... where a, b, c are the lengths of the sides of a triangle.

T7/312. The circle inscribed a triangle ABC meets the sides BC, CA, AB at D, E, F , respectively. Let H be the projection of D on EF . Show that $\widehat{BHD} = \widehat{CHD}$.

T8/312. Let $p_1, p_2, \dots, p_n$ and $q_1, q_2, \dots, q_m$ be $m+n$ different prime numbers such that $p_i \geq n+1$ ($i = 1, 2, \dots, n$), $q_j \geq m+1$ ($j = 1, 2, \dots, m$). Put $P = p_1 p_2 \dots p_n$ and $Q = q_1 q_2 \dots q_m$. Prove that the equation $P^s x + Q^t y = 1$, where s, t are fixed positive integers, have infinitely many integral solutions (x_0, y_0) such that $(P, x_0) = 1$ and $(Q, y_0) = 1$.

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T9/312. Solve the equation

$$(16\cos^4 x + 3)^4 = 2048\cos x - 768$$

T10/312. Prove that

$$\frac{x_1^m}{x_2^n + x_3^n + \dots + x_n^n} + \frac{x_2^m}{x_1^n + x_3^n + \dots + x_n^n} + \dots$$

$$+ \dots + \frac{x_n^m}{x_1^n + x_2^n + \dots + x_{n-1}^n} \geq \frac{n}{n-1} \sqrt[n]{\left(\frac{2003}{n}\right)^{m-n}}$$

where $m \geq n > 1$ are integers and x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) are positive numbers such that $x_1^n + x_2^n + \dots + x_n^n \geq 2003$.

T11/312. Show that for a triangle ABC with three acute angles,

$$\frac{\cos A \cos B}{\sin 2C} + \frac{\cos B \cos C}{\sin 2A} + \frac{\cos C \cos A}{\sin 2B} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

T12/312. Construct in the base plane (ABC) of a tetrahedron $SABC$ the triangles $A_1 BC, B_1 CA, C_1 AB$ on the same side as $\triangle ABC$ and $A_2 BC, B_2 CA, C_2 AB$ on the opposite side as $\triangle ABC$ such that $\triangle A_1 BC = \triangle A_2 BC = \triangle SBC, \triangle B_1 CA = \triangle B_2 CA = \triangle SCA, \triangle C_1 AB = \triangle C_2 AB = \triangle SAB$. Prove that $\frac{R_1}{R_2} = \frac{r}{r_s}$, where R_1, R_2 are the radii of the

circumcircles of $A_1 B_1 C_1, A_2 B_2 C_2$ and r, r_s are the radii of the spheres inscribed and escribed the tetrahedron $SABC$ opposite to S , respectively.

DIỄN DÀN DẠY HỌC TOÁN

Sách Giáo Khoa TOÁN 7-

NHỮNG ĐIỀU MỚI MẸ VÀ LÍ THÚ !

(Tiếp theo kì trước)

TÔN THÂN (Viện KHGD Hà Nội)

Hệ thống bài tập đa dạng tạo điều kiện cho HS được luyện tập, thực hành nhiều hơn !

Sách Toán 7 rất chú trọng xây dựng hệ thống bài tập đa dạng, phong phú. Có những bài tập rèn kĩ năng tính toán, vẽ hình, suy luận ; có những bài tập rèn kĩ năng vận dụng toán học vào các môn học khác và vào đời sống.

Các bài tập được thể hiện dưới nhiều hình thức. Ngoài những dạng bài tập thông thường còn có các dạng bài tập : điền số thích hợp vào ô vuông ; điền từ vào chỗ trống ; tìm sai lầm trong lời giải ; giải toán kết hợp với giải ô chữ ; quan sát hình vẽ, mô hình rồi nhận xét ; thực hành đo đạc, gấp hình, cắt ghép hình để nêu dự đoán về một tính chất hình học trước khi chứng minh. HS cũng được làm quen với một số dạng trắc nghiệm : đúng - sai, nhiều lựa chọn, ghép đôi. Nhiều bài tập được viết dưới dạng đố vui. Trong sách còn có những bài tập yêu cầu HS sử dụng máy tính bỏ túi để làm các phép tính được nhanh chóng và thuận tiện.

Hệ thống bài tập trong sách góp phần kích thích óc tò mò, gây hứng thú học tập cho các em vì qua việc giải bài tập chẳng những các em được củng cố kiến thức, rèn luyện kĩ năng, phát triển tư duy mà còn biết được bao điều mới lạ trong cuộc sống : biết được tên một tác phẩm nổi tiếng của Trần Hưng Đạo ; một số kết quả của cuộc Tổng điều tra dân số ở nước ta năm 1999 ; 1 pao bằng bao nhiêu kilôgam ; nói tỉ vi 21 inh-sơ nghĩa là thế nào ; làm 2,5kg

mứt dâu cần bao nhiêu đường, thay cho việc đo chiều dài các cuộn dây thép, người ta thường cân chúng ; nghiên cứu "tuổi thọ" của bóng đèn như thế nào ; dùng thước chữ T để đo góc nghiêng của một con đê ; chọn địa điểm hợp lí để đào giếng ; làm thế nào đo được khoảng cách giữa hai điểm bị ngăn cách bởi một con sông...

Mục "Có thể em chưa biết" đáp ứng phần nào lòng ham muốn hiểu biết của các em bằng những câu chuyện lí thú về lịch sử toán học : Thử tài Fibonaxi ; Kí hiệu căn bậc hai ra đời năm nào ? Câu chuyện về nhà toán học cổ Hi Lạp Oclit ; Ai là cha đẻ của môn Đại số ? Thế nào là đường thẳng Ole ? Tam giác Ai Cập ? ... Về nhiều ứng dụng của toán học trong thực tiễn: Chỉ số BMI là gì và tính như thế nào ? Cách xác định vị trí của một quân cờ trên bàn cờ vua ; Tính bền vững của hình tam giác ; Toán học với sức khỏe con người.

Sách còn có những Bài đọc thêm giúp các em hiểu sâu hơn các bài học : Lũy thừa với số mũ nguyên âm ; Đồ thị của hàm số $y = \frac{a}{x}$ ($a \neq 0$).

Định lí thuận và định lí đảo ; Tần suất.

Với những điểm mới về nội dung và hình thức thể hiện như đã trình bày ở trên, hi vọng sách Toán 7 sẽ khơi dậy hứng thú học tập môn Toán của các em, giúp các em học Toán nhẹ nhàng, hào hứng và có kết quả.

ĐƯỜNG CONG HÌNH CON CÁ

(Tiếp bìa 3)

- Phần đuôi là đường cong đi qua các điểm F ,

G, H, J ứng với $t \in \left[\frac{2\pi}{3}; \pi \right]$ và phần đối xứng qua trục hoành đi qua các điểm J, H', G', F ứng với $t \in \left[-\pi, -\frac{2\pi}{3} \right]$. Phần đuôi dài gần bằng 1,54 (đơn vị) còn mình cá chỗ lớn nhất là 2 (đơn vị), chiều dài con cá gần bằng 9,045 (đơn vị).

II. Một số đường cong tổng quát hóa từ $\mathcal{C}$

Đường cong $\mathcal{C}$ có phương trình (1) là trường hợp riêng của đường cong có phương trình tổng quát hơn :

$$\begin{cases} x = \cos mt + k \cos t \\ y = \sin(m-1)t \end{cases} \quad (2)$$

- Với $m = 4, k = 4$ có đường cong ở hình 1.
- Với $m = 4, k = 3$ có đường cong ở hình 2.
- Với $m = 4, k = 4,5$ có đường cong ở hình 3.
- Với $m = 4, k = 2$ có đường cong ở hình 4. (xem hình ở bìa 3).

Toán học và Tuổi trẻ

Mathematics and Youth

NĂM THỨ 40

Số 312 (6-2003)

Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội

ĐT - Fax : 04.5144272

Email : toanhocvt@yahoo.com

TRONG SỐ NÀY

- 1** **Dành cho Trung học cơ sở – For Lower Secondary Schools**
Hoàng Hải Dương – Giải toán bất đẳng thức và cực trị dựa vào phương trình bậc hai
 - 4** Lời giải đề toán thi tuyển sinh lớp 10 trường THPT chuyên Lê Hồng Phong, Nam Định 2002
 - 6** *Tạ Duy Phương, Nguyễn Hữu Thảo* – Thi khu vực giải toán trên máy tính Casio lần thứ ba – 2003
 - 8** **Chuẩn bị thi vào đại học – University Entrance Preparation. Giúp bạn tự ôn thi:**
 - Hướng dẫn giải đề tự ôn thi số 3
 - Đề tự ôn thi số 4
 - Hướng dẫn giải đề tự ôn thi số 4
 - 12** **Đề ra kì này - Problems in this Issue**
T1/312, ..., T12/312, L1, L2/312
 - 14** **Giải bài kì trước - Solutions to Previous Problems**
Giải các bài của số 308
 - 23** **Diễn đàn dạy học toán – Math Teaching Forum**
Tôn Thân – Sách giáo khoa Toán 7, những điều mới mẻ và lí thú (tiếp theo)
-
- Bìa 2 :** Lễ tặng sách của NXB Giáo dục tại trường THCS Kim Liên, Nam Đàn, Nghệ An.
- Bìa 3 :** Đường cong hình con cá
- Bìa 4 :** Cuộc thi Ai thông minh nhanh trí.

Tổng biên tập :
NGUYỄN CẢNH TOÀN
Phó tổng biên tập :
NGÔ ĐẠT TỨ

Chịu trách nhiệm xuất bản :
Giám đốc NXB Giáo Dục :
NGÔ TRẦN ÁI
Tổng biên tập NXB Giáo Dục :
VŨ DƯƠNG THỤY

Trưởng ban biên tập : NGUYỄN VIỆT HẢI. *Biên tập :* VŨ KIM THỦY, HỒ QUANG VINH
Trị sự : VŨ ANH THU. *Trình bày :* NGUYỄN THỊ OANH, NGUYỄN THANH LONG, NGUYỄN TIẾN DŨNG
Đại diện phía Nam : TRẦN CHÍ HIẾU, 231 Nguyễn Văn Cừ, Tp. Hồ Chí Minh. ĐT : 08.8309049

ĐÓN ĐỌC THPT SỐ 313 (7/2003)

- Phương pháp tham biến - chiếc cầu nối giữa bất phương trình và phương trình.
- Thi giải toán trên máy tính Casio 2003 (tiếp theo)
- Một dãy số thú vị
- Phỏng đoán Ca-ta-lan đã được chứng minh !
- Giới thiệu đạo hàm không nguyên.

Mời các bạn tiếp tục giải đáp 3 câu đố tiếp theo của Cuộc thi đố vui Ai thông minh nhanh trí ?

Các bạn hãy đặt mua THPT tại các cơ sở Bưu điện.

THPT

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đề-các vuông góc Oxy , xét đường cong $\mathcal{C}$ gồm các điểm $M(x, y)$ xác định bởi

$$\text{phương trình tham số } \begin{cases} x = \cos 4t + 4 \cos t \\ y = \sin 3t \end{cases} \quad (1)$$

I. Các tính chất của đường cong $\mathcal{C}$

1. Từ phương trình (1) có $x(t) = x(t + 2\pi)$ và $y(t) = y(t + 2\pi)$ với mọi t nên $\mathcal{C}$ có chu kỳ là $t_0 = 2\pi$. Vì vậy để thấy được hình dạng và các tính chất của $\mathcal{C}$ ta chỉ cần xét sự biến thiên của điểm $M(t)$ trong một chu kỳ, chẳng hạn $[-\pi; \pi]$.

2. Đường cong $\mathcal{C}$ nhận trục hoành Ox làm trục đối xứng. Thực vậy với mọi $t \in [-\pi; \pi]$ ta đều có $x(-t) = x(t)$ và $y(-t) = -y(t)$, nghĩa là lấy bất kỳ điểm $M(t) \in \mathcal{C}$ đều có điểm $M'(-t) \in \mathcal{C}$, M và M' đối xứng với nhau qua trục hoành. Điều này cho phép ta chỉ cần xét hình dạng của $\mathcal{C}$ ứng với

tham số $t \in [0; \pi]$ sau đó lấy đối xứng qua trục hoành để có $M(t)$ với $t \in [-\pi, 0]$.

3. Tiếp tuyến (xem hình 1).

• Tiếp tuyến với $\mathcal{C}$ song song với trục hoành tại các điểm $B, B'(-\frac{\pi}{6}), E, E'(-\frac{\pi}{2}); H, H'(-\frac{5\pi}{6})$.

• Tiếp tuyến với $\mathcal{C}$ song song với trục tung tại các điểm $A, D, D'(-\frac{2\pi}{5}), G, G'(-\frac{4\pi}{5}), J$.

4. $\mathcal{C}$ là một đường cong khép kín. Xuất phát từ A ứng với $t = -\pi$ điểm $M(t)$ chạy qua các điểm $B, C, D, E, F, G, H, I, H', G', F, E', D', C, B'$ trở về A .

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{5}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
x	5	$2\sqrt{3}-0,5$	1,5	$(\sqrt{5}-1)\frac{5}{4}$	1	-2,5	$-5\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{8}}$	$-(0,5+2\sqrt{3})$	-3
y	0	1	0	$-\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$	-1	0	$\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$	1	0
Điểm	A	B	C	D	E	F	G	H	J

Để chứng minh tính chất 3, ta chú ý rằng vectơ chỉ phương của tiếp tuyến tại điểm $M(t)$ thuộc $\mathcal{C}$ là $\vec{v}(t) = (x'(t); y'(t))$ với $x'(t)$ và $y'(t)$ theo thứ tự là đạo hàm của x và y tại t .

Đường cong $\mathcal{C}$ có hình dạng giống một con cá (xem hình 1) gồm ba phần:

• Phần đầu là đường cong đi qua các điểm C, B', A, B trở về C ứng với các giá trị tham số $t \in [-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}]$. Phần này có chiều dài 3,5 (đơn vị).

• Phần thân là đường cong đi qua các điểm C, D, E, F ứng với $t \in [\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}]$ và phần đối xứng qua trục hoành đi qua các điểm F, E', D', C ứng với $t \in [-\frac{2\pi}{3}; -\frac{\pi}{3}]$. Phần này dài 4 (đơn vị).

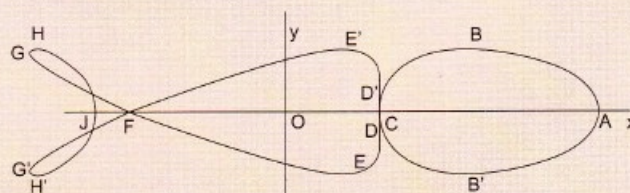
(Xem tiếp trang 23)

ĐƯỜNG CONG HÌNH CON CÁ

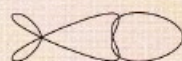
TRẦN ĐÌNH VIỆN
(Hà Nội)

ĐƯỜNG CONG HÌNH CON CÁ

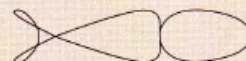
$$x = \cos m t + k \cos t; y = \sin(m-1)t$$



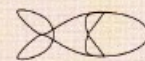
Hình 1 : $m = 4, k = 4$



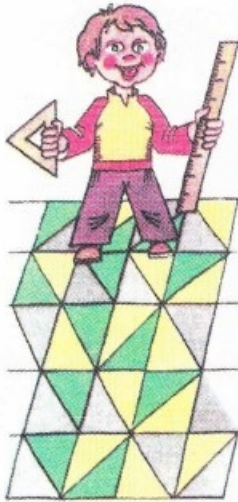
Hình 2 : $m = 4, k = 3$



Hình 3 : $m = 4, k = 4.5$



Hình 4 : $m = 4, k = 2$



CUỘC THI

AI THÔNG MINH NHANH TRÍ ?

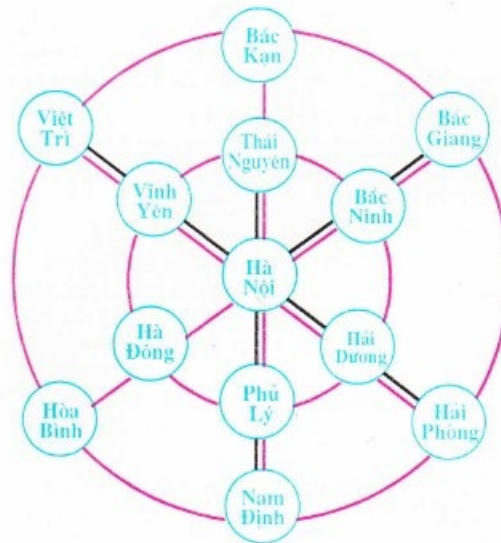
Hè đến rồi, bạn sẽ đi du lịch nơi nào ? Toán học Tuổi trẻ cũng có chuyến du lịch thú vị cho các bạn thông minh nhanh trí. Ai sẽ được nhận thưởng trong chuyến đi vào thế giới của những khám phá lí thú này nhỉ ! Bạn hãy gửi lời giải của ba câu đố trong số này về tòa soạn trước ngày 31.7.2003 và ba bài trong số tiếp theo về tòa soạn trước ngày 31.8.2003. Hi vọng bạn sẽ có tên trong danh sách đoạt giải in trong số tạp chí 316 ra ngày 15.10.2003.

ĐỢT I

Câu đố 1. DU LỊCH

Nam và Hà từ Hà Nội muốn đi đến tất cả các đô thị mỗi nơi chỉ một lần rồi quay về Hà Nội. Trên sơ đồ đường màu đen chỉ đường sắt, đường màu đỏ chỉ đường bộ. Bạn hãy lập một lộ trình để có thể đi được nhiều chặng đường sắt nhất giúp Nam và Hà (cung hoặc đoạn nối trực tiếp hai đô thị gọi là một chặng).

VKT



Câu đố 2. BỌC HỘP TẶNG PHẨM

Để chúc mừng sinh nhật người thân, bạn chuẩn bị một hình lập phương đựng tặng phẩm. Bạn có một mảnh giấy gói quà đẹp hình chữ nhật, chiều dài gấp ba lần chiều rộng với diện tích bằng diện tích toàn bộ bề mặt của hình lập phương. Hãy cắt mảnh giấy thành 2 mảnh nhỏ để có thể dán vừa kín 6 mặt hình lập phương. Bạn có mấy cách cắt giấy ?

MINH KHUÊ



Câu đố 3. VI KHUẨN TỰ PHÂN CHIA

Hình phẳng của vi khuẩn Z có dạng như hình vẽ. Mỗi vi khuẩn này tự phân chia để biến thành 4 vi khuẩn nhỏ hơn và giống hệt nhau. Bạn hãy đoán xem vi khuẩn tự phân chia như thế nào ?

ĐÀO VĂN NHÃN
(Sưu tầm)

ISSN : 0866-8035
Chỉ số : 12884
Mã số : 8BT14M3

Chế bản tại Tòa soạn
In tại Nhà máy in Diên Hồng, 187B phố Giảng Võ
In xong và nộp lưu chiểu tháng 6 năm 2003

Giá : 3000đ
Ba nghìn đồng