

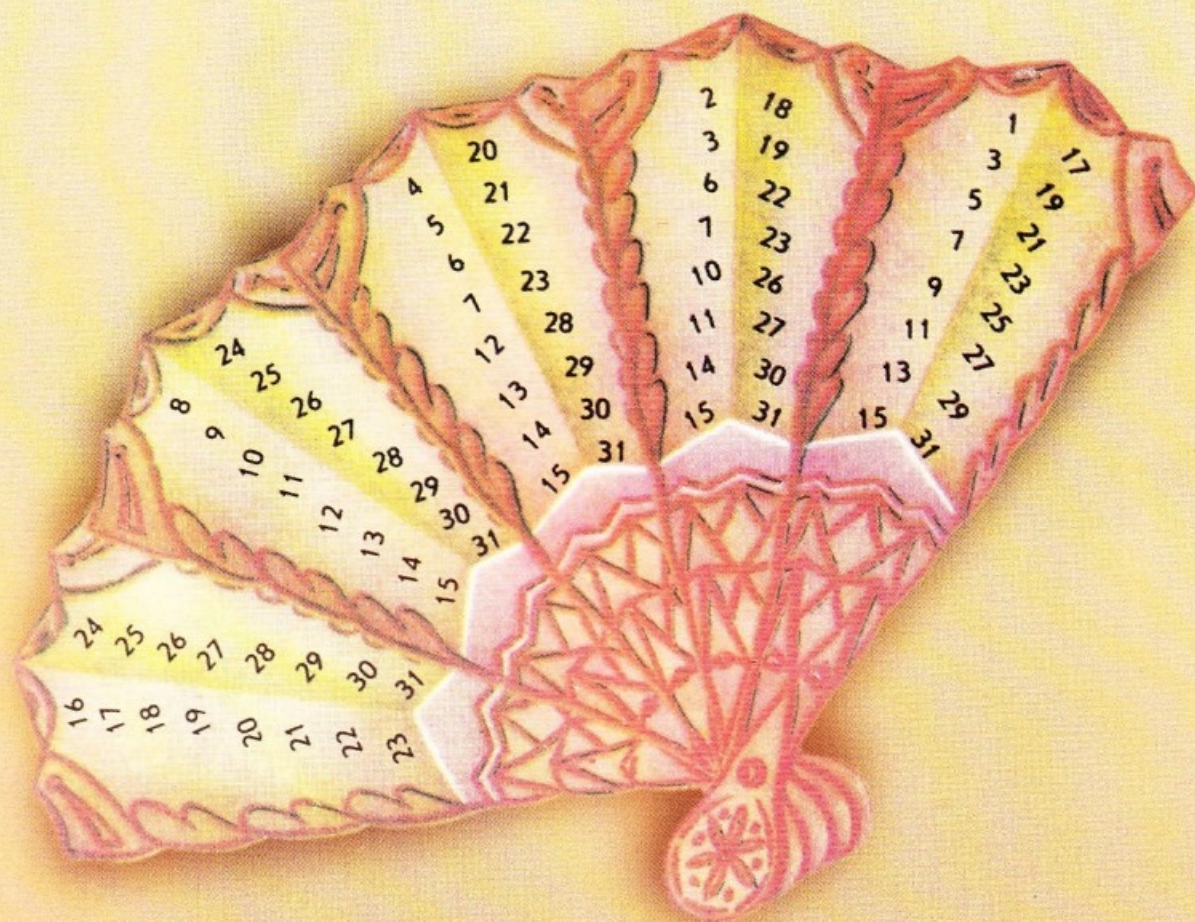
BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO * HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

Toán học & Tuổi trẻ

4
2003

SỐ 310 - NĂM THỨ 40 - TẬP CHÍ RA HÀNG THÁNG

DÀNH CHO TRUNG HỌC PHỔ THÔNG VÀ TRUNG HỌC CƠ SỞ



● PHƯƠNG PHÁP LÙI VÔ HẠN

● GIÚP BẠN TỰ ÔN THI

● GIẢI CÁC ĐỀ THI

● MẶT CẦU TIẾP XÚC VỚI ĐƯỜNG THẲNG CHỮA CẠNH CỦA TỨ DIỆN



LIÊN HIỆP CÁC HỘI KHOA HỌC VÀ KỸ THUẬT VIỆT NAM

HAI MƯƠI NĂM - MỘT CHẶNG ĐƯỜNG

TÔ BÁ TRỌNG(*)

Trên cơ sở những thành tựu của 15 Hội khoa học và kỹ thuật lần lượt ra đời từ nửa cuối thập niên 50 của thế kỷ trước, và kết quả 18 năm hoạt động của "Ủy ban liên lạc lâm thời các Hội khoa học và kỹ thuật Việt Nam (1965-1983)", Liên hiệp các Hội khoa học và kỹ thuật Việt Nam (gọi tắt là Liên hiệp hội) được thành lập ngày 26/3/1983 và hoạt động theo Quyết định số 121/HĐBT ngày 29/7/1983 của Hội đồng Bộ trưởng (nay là Chính phủ). Trải qua 20 năm xây dựng và hoạt động, đến nay Liên hiệp hội bao gồm 83 tổ chức thành viên, trong đó có 50 Hội ngành ở Trung ương và 33 Liên hiệp hội tỉnh, thành phố với trên 60 vạn hội viên.

Được sự chỉ đạo của Bộ Chính trị, tiếp nối hoạt động của Hội phổ biến KH&KT Việt Nam trước đây (1963-1971), Liên hiệp hội luôn coi việc phổ biến kiến thức khoa học và kỹ thuật cho quần chúng là nhiệm vụ đặc

biệt quan trọng. Trên 70 tờ báo, tạp chí, chuyên san, bản tin của Liên hiệp hội và các Hội thành viên chiếm khoảng 1/3 tổng số báo chí khoa học trong cả nước. Bên cạnh đó là việc xuất bản hàng trăm đầu sách, tổ chức hơn 40 câu lạc bộ và nhiều cuộc triển lãm.

Với tinh thần xã hội hoá công tác giáo dục và đào tạo, góp phần nâng cao dân trí, đào tạo nhân lực, bồi dưỡng nhân tài, Liên hiệp hội và các hội thành viên thành lập ba trường đại học và nhiều trường phổ thông



Phó Thủ tướng Phạm Gia Khiêm phát biểu tại Hội nghị Hội đồng Trung ương Liên hiệp Hội

dân lập các cấp, mở hàng nghìn lớp học ngắn hạn về kỹ thuật, tin học, kế toán, ngoại ngữ v.v.. Các tổ chức hội đã cấp học bổng cho các sinh viên nghèo vượt khó, học giỏi, ngoài ra còn trao phần thưởng cho các sinh viên đạt thành tích cao trong việc tham gia nghiên cứu khoa học, cho những học sinh đoạt giải trong các kỳ thi về toán học ... và các sinh viên giỏi là con liệt sĩ, thương binh.

Hoạt động nghiên cứu khoa học và phát triển công nghệ, hỗ trợ đưa nhanh các tiến bộ khoa học và kỹ thuật phục vụ sản xuất và đời sống được thực hiện rộng khắp. Phối hợp với các tổ chức khác, hàng năm Liên hiệp hội tổ chức đánh giá, tuyển chọn và trao tặng Giải thưởng sáng tạo khoa học-công nghệ Việt Nam và phát động Hội thi sáng tạo kỹ thuật toàn quốc. Trong số mười công trình khoa học và công nghệ do Liên hiệp hội bình chọn và giới thiệu, đã có bảy công trình được Nhà nước trao tặng Giải thưởng Hồ Chí Minh. Ngoài ra còn có một số công trình được trao tặng Giải thưởng Nhà nước về khoa học và công nghệ.

Tư vấn, phản biện và giám định xã hội về khoa học-công nghệ và kinh tế-xã hội cũng là một hoạt động của Liên hiệp hội. Bên cạnh việc đóng góp ý kiến vào nhiều dự thảo văn kiện quan trọng của Đảng và Nhà nước, Liên hiệp hội và các hội thành viên đã tổ chức thẩm định 9 quy hoạch phát triển kinh tế-xã hội các vùng thời kỳ 1996-2010, phản biện luận chứng kinh tế-kỹ thuật của 15 công trình xây dựng lớn, trong đó có luận chứng kinh tế-kỹ thuật nhà máy thủy điện Sơn La, quy hoạch chống lũ lụt đồng bằng sông Cửu Long, báo cáo đánh giá tác động môi trường trong dự án đường Hồ Chí Minh, đoạn qua Vườn Quốc gia Cúc Phương.

Với những sự nỗ lực phấn đấu bền bỉ và những thành tựu trong hai mươi năm qua, Liên hiệp hội và các hội thành viên đã được Đảng và Nhà nước trao tặng 1 Huân chương Độc lập hạng Nhất, 1 Huân chương Độc lập hạng Hai, 4 Huân chương Độc lập hạng Ba, 1 Huân chương Lao động hạng Nhất, 4 Huân chương Lao động hạng Hai, 11 Huân chương Lao động hạng Ba và nhiều phần thưởng cao quý khác.

* PGS. TS Tô Bá Trọng là Ủy viên Đoàn Chủ tịch Hội đồng Trung ương, Chủ nhiệm Ủy ban Kiểm tra Liên hiệp các Hội KHKT.

Dành cho các bạn
TRUNG HỌC CƠ SỞ



Phương pháp LÙI VÔ HẠN

PHAN THANH QUANG
(Tp. Hồ Chí Minh)

Phương pháp lùi vô hạn là một kỹ thuật chứng minh do nhà toán học Pháp Phê-ma (Fermat : 1601-1665) tìm ra khi ông chứng minh rằng phương trình $x^4 + y^4 = z^4$ (1) không có nghiệm nguyên dương. Ý tưởng như sau : giả sử có 3 số nguyên dương x_0, y_0, z_0 thỏa mãn (1), ta sẽ tìm được 3 số nguyên dương x_1, y_1, z_1 cũng thỏa mãn (1) mà $z_1 < z_0$. Tiếp tục như thế ta có dãy vô hạn các số nguyên dương $z_0 > z_1 > z_2 > \dots$ nhưng từ 1 đến z_0 chỉ có hữu hạn số nguyên dương. Điều mâu thuẫn này chứng tỏ PT (1) không có nghiệm nguyên dương.

1) Dưới đây trình bày tóm tắt chứng minh PT $x^4 + y^4 = t^2$ (2) vô nghiệm nguyên dương bằng phương pháp lùi vô hạn.

a) Trước hết đặt $x^2 = u, y^2 = v$ để giải PT $u^2 + v^2 = t^2$ (3). Ta chỉ xét các nghiệm nguyên tố cùng nhau, nghĩa là $(u, v) = (u, t) = (v, t) = 1 \Leftrightarrow (x, y) = (x, t) = (y, t) = 1$ vì nếu tồn tại ước chung nguyên tố khác 1 thì chia hai vế của PT cho ước chung đó.

Viết PT (3) trong dạng :

$$\frac{u}{t-v} = \frac{t+v}{u} \quad (4) \text{ (dễ thấy } 0 < t-v < u < t+v \text{)}$$

Giả sử $\frac{u}{t-v} = \frac{m}{n}$ tối giản, nghĩa là $(m, n) = 1, m > n$. Lúc đó $u = mk, t-v = nk$ (k nguyên dương), thay vào (4) và giản ước, suy ra $u : v : t = 2mn : (m^2 - n^2) : (m^2 + n^2)$. Đặt $d = (m^2 - n^2, m^2 + n^2) \Rightarrow d$ là ước của $(2m^2, 2n^2) = 2(m, n) = 2 \Rightarrow d = 1$ hoặc $d = 2$. Nếu trong 2 số m, n có một số chẵn, một số lẻ thì $d = 1$, nếu cả hai số lẻ ta đặt $m+n = 2m', m-n = 2n'$ thì có $(m', n') = 1$ và $u = m'^2 - n'^2, v = 2m'n', t = m'^2 + n'^2$, trong hai số m' và n' có một chẵn một lẻ và $(m', n') = 1$.

Tóm lại PT (3) có các nghiệm nguyên tố cùng nhau là $u = 2mn, v = m^2 - n^2, t = m^2 + n^2$ với $(m, n) = 1$, trong đó m, n có 1 số chẵn, 1 số lẻ.

b) Xét PT (2). Nếu m chẵn, n lẻ thì $y^2 = v = m^2 - n^2$ có dạng $4k+3$, không xảy ra $\Rightarrow$ chỉ có thể m lẻ, n chẵn. Từ $x^2 = u = 2mn$ với $(m, n) = 1$, (xét các ước số nguyên tố của m, n), suy ra $m = a^2, n = 2b^2$ với $(a, b) = 1$. Từ $y^2 = v = m^2 - n^2$ có $y^2 + (2b^2)^2 = (a^2)^2$. Theo trên PT dạng (3) này có nghiệm $2b^2 = 2pq, y = p^2 - q^2, a^2 = p^2 + q^2$ với $(p, q) = 1$. Từ $b^2 = pq$ và $(p, q) = 1$ có $p = c^2, q = e^2 \Rightarrow c, e, a$ là nghiệm của PT $c^4 + e^4 = a^2$ mà $a < a^2 = m < m^2 < t$. Cứ lập luận như thế thì tồn tại dãy số nguyên dương $t > t_1 = a > \dots$ gồm vô hạn số, dẫn đến mâu thuẫn.

Vậy PT (2) vô nghiệm nguyên dương $\Rightarrow$ PT (1) vô nghiệm nguyên dương.

2) Ta thử áp dụng phương pháp lùi vô hạn vào giải bài toán hình học : Trên một tờ giấy kẻ ô vuông có thể vẽ được những đa giác đều nào mà mọi đỉnh đều là giao điểm của các đường kẻ.

Nếu trên tờ giấy lấy hai trục tọa độ nằm trên 2 đường kẻ vuông góc thì các giao điểm của các đường kẻ đều có tọa độ nguyên và được gọi là điểm nguyên. Bài toán được phát biểu lại là : Trên mặt phẳng tọa độ có thể vẽ được các đa giác đều nào mà mọi đỉnh của nó đều là điểm nguyên.

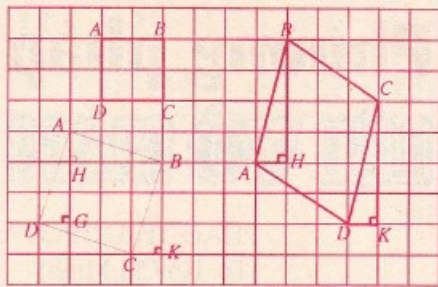
Ta lần lượt xét các trường hợp sau trên mặt phẳng tọa độ.

a) **Mệnh đề 1.** Với hai điểm nguyên A, B cho trước bao giờ cũng vẽ được một hình vuông có cạnh là AB .

Dễ thấy MĐ 1 đúng khi AB nằm trên hoặc không nằm trên một đường kẻ : trên hình 1 dựng $\triangle ADG, \triangle BCK$ vuông sao cho $\triangle ADG = \triangle BAH = \triangle BCK$, được hình vuông $ABCD$.

b) **Mệnh đề 2.** Nếu tam giác ABC có 3 đỉnh nguyên thì vẽ được hình bình hành $ABCD$ có 4 đỉnh nguyên.

Trên hình 2 dựng $\triangle BAH, \triangle CDK$ vuông sao cho $\triangle BAH = \triangle CDK$ được hình bình hành $ABCD$.

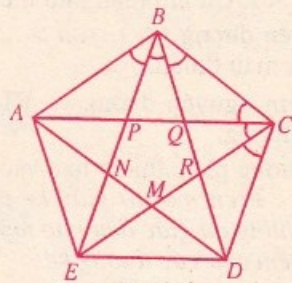


Hình 1

Hình 2

c) **Mệnh đề 3.** Không thể vẽ được đa giác đều n đỉnh với $n = 5$ và $n \geq 7$ sao cho mọi đỉnh đều là điểm nguyên.

Ta sử dụng phương pháp lùi vô hạn: Giả sử tồn tại một đa giác đều n đỉnh $A, B, C, D, E, \dots$ mà mọi đỉnh là điểm nguyên thì luôn vẽ được đa giác đều n đỉnh nguyên nằm bên trong đa giác ban đầu, cứ như thế thì có vô hạn đa giác đều mọi đỉnh nguyên mà nhỏ dần, nhưng bên trong đa giác đều ban đầu chỉ có hữu hạn đỉnh nguyên, dẫn đến mâu thuẫn.



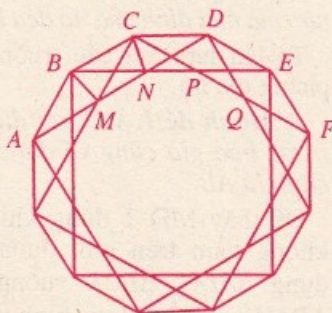
Hình 3

a) Với $n = 5$, giả sử có ngũ giác đều $ABCDE$ mọi đỉnh nguyên, (h. 3) ta dựng được các hình bình hành $ABCM$, $BCDN$, $CDEP$, $DEAQ$, $EABR$ có mọi đỉnh nguyên theo MD 2, do đó tồn tại ngũ giác đều $MNPQR$ có mọi

đỉnh nguyên, nằm bên trong ngũ giác $ABCDE$.

b) Với $n \geq 7$ giả sử có đa giác đều n đỉnh nguyên $A, B, C, D, E, F, \dots$ (h. 4) ta dựng được các hình bình hành $ABCM$, $BCDN$, $CDEP$, $DEFQ$, ... có mọi đỉnh nguyên theo MD2. Vì $n > 6$ nên $\widehat{CBM} > 60^\circ$

$> \widehat{CBN} \Rightarrow CBMN$ là tứ giác lồi và dễ thấy là hình thang. Từ đó suy ra đa giác có n đỉnh $M, N, P, Q, \dots$ cũng là đa giác đều n đỉnh và mọi



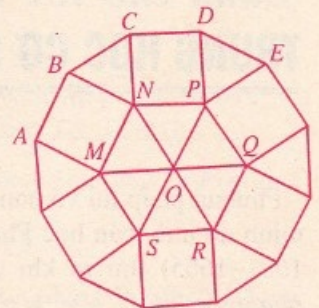
Hình 4

đỉnh nguyên, nằm bên trong đa giác đều n đỉnh $A, B, C, D, E, F, \dots$

Sử dụng phương pháp lùi vô hạn ta có MD3.

Mệnh đề 4. Không tồn tại tam giác đều, lục giác đều có mọi đỉnh nguyên.

a) Giả sử tồn tại tam giác đều MNO (h. 5) thì bằng cách dựng hình bình hành ở MD3 ta có lục giác đều $MNPQRS$ có mọi đỉnh nguyên. Ta sẽ chứng tỏ rằng điều này không xảy ra.



Hình 5

b) Giả sử tồn tại lục giác đều $MNPQRS$ có mọi đỉnh nguyên (h. 5). Trên các cạnh của lục giác dựng về phía ngoài nó 6 hình vuông (dễ thấy $\triangle BCN$ là tam giác đều và áp dụng MD1) ta có đa giác 12 cạnh đều với mọi đỉnh nguyên là $A, B, C, D, E, \dots$ nhưng điều này trái với MD 3 (dpcm).

Tóm lại chỉ có thể vẽ được đa giác đều n đỉnh nguyên với $n = 4$.

Bạn hãy tìm những bài toán có thể giải bằng phương pháp lùi vô hạn.

MẶT CẦU TIẾP XÚC... (Tiếp trang 7)

Mời các bạn tiếp tục nghiên cứu một số kiểu tiếp xúc của mặt cầu với đường thẳng chứa các cạnh của khối đa diện thông qua các bài tập sau:

1. Cho tứ diện $ABCD$ thỏa mãn các điều kiện của mệnh đề 1. Tìm một hệ thức liên hệ giữa số đo các góc nhị diện cạnh AB, CD, BC, AD, AC, BD của tứ diện đó.

2. Tìm điều kiện để tứ diện $ABCD$ có các cặp cạnh đối vuông góc với nhau từng đôi một, có một mặt cầu tiếp xúc với các cạnh BC, CD, BD và tiếp xúc với tia đối của các tia BA, CA, DA .

3. Tồn tại hay không một mặt cầu tiếp xúc với các cạnh đáy, đồng thời tiếp xúc với tia đối của các tia AS, BS, CS, DS của hình chóp tứ giác đều $SABCD$?

4. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = a, AC = BD = b, BC = AD = c$. Tìm bán kính R của mặt cầu tiếp xúc với các cạnh BC, CD, BD và tiếp xúc với tia đối của các tia BA, CA, DA ?

LỜI GIẢI ĐỀ TOÁN THI TUYỂN SINH LỚP 10

TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG TP. HCM

(Đề thi đã đăng trong THPT số 309 tháng 3/2003)

Câu I. a) $A = \sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{29-12\sqrt{5}}}}$
 $= \sqrt{\sqrt{5}-\sqrt{3-\sqrt{(2\sqrt{5}-3)^2}}} = \sqrt{\sqrt{5}-(\sqrt{5}-1)^2} = 1$

b) $B = \frac{x^8+3x^4+4}{x^4+x^2+2} = \frac{(x^4+2)^2-x^4}{x^4+x^2+2}$
 $= \frac{(x^4+x^2+2)(x^4-x^2+2)}{x^4+x^2+2} = x^4-x^2+2$

Câu II. a) Ta có $\Delta' = (m-1)^2 - (2m-4) = m^2 - 4m + 5 = (m-2)^2 + 1 > 0, \forall m$.

b) Theo hệ thức Vi-et ta có $y = x_1^2 + x_2^2 = (x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2 = (2m-2)^2 - 2(2m-4) = (2m-3)^2 + 3 \geq 3$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow 2m-3=0 \Leftrightarrow m = \frac{3}{2}$.

Câu III. a) Sử dụng BĐT $x^2 + y^2 \geq 2xy$.

b) Áp dụng a) hai lần ta có

$$x^4 + y^4 \geq \frac{(x^2+y^2)^2}{2} \geq \frac{\left(\frac{(x+y)^2}{2}\right)^2}{2} = \frac{(x+y)^4}{8}$$

c) Theo BĐT Cô-si $x+y \geq 2\sqrt{xy}$, do $x+y=1$ nên $\frac{1}{xy} \geq 4$. Theo câu b) có $x^4+y^4 \geq \frac{1}{8}$. Vậy $8(x^4+y^4) + \frac{1}{xy} \geq 5$.

Câu IV. a) ĐK $x \geq 1$ (1). PT đã cho tương đương với $\sqrt{(\sqrt{x-1}+2)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-1}-3)^2} = 5$
 $\Leftrightarrow |\sqrt{x-1}-3| = 3-\sqrt{x-1} \Rightarrow \sqrt{x-1}-3 \leq 0$ (2)

Từ (1), (2) PT có nghiệm: $1 \leq x \leq 10$.

b) PT đã cho $\Leftrightarrow$

$$[(4x+1)(3x+2)][(12x-1)(x+1)] = 4$$

$$\Leftrightarrow (12x^2+11x+2)(12x^2+11x-1) = 4$$

$$\Leftrightarrow \left(12x^2+11x+\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow \left(12x^2+11x+\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2$$

Với $12x^2+11x+\frac{1}{2} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow 12x^2+11x-2=0$

ta được nghiệm $x_{1,2} = \frac{-11 \pm \sqrt{217}}{24}$. Với

$12x^2+11x+\frac{1}{2} = -\frac{5}{2}$, nhận thấy PT này vô nghiệm.

Câu V. a) Do tứ giác $MNOP$ nội tiếp được trong một đường tròn $\Rightarrow \widehat{NMO} = \widehat{NPO}$.

b) Gọi C là trung điểm của dây $AB \Rightarrow OC \perp CM$. Đường tròn ngoại tiếp ΔMNP đi qua hai điểm cố định O và C .

c) Tứ giác $MNOP$ là hình vuông khi và chỉ khi ΔOMN vuông cân tại $N \Leftrightarrow OM = ON\sqrt{2}$. Lúc đó M là giao điểm của đường tròn tâm O , bán kính $R\sqrt{2}$ và đường thẳng (d) .

d) Tâm I của đường tròn nội tiếp ΔMPN là giao điểm 3 đường phân giác của $\Delta MNP \Rightarrow I$ là trung điểm của cung $\widehat{NP}$ và thuộc OM . Vậy I di động trên cung lớn $\widehat{AB}$ của đường tròn tâm O bán kính R .

Câu VI. $x + |x^2 - 2x + m| = 0 \Leftrightarrow |x^2 - 2x + m| = -x \Rightarrow x \leq 0$.

• Với $x \leq 0$ và $x^2 - 2x + m \geq 0$ thì (1) trở thành $x^2 - x + m = 0$. Phải có $\Delta_1 = 1 - 4m \geq 0$ và $x = \frac{1 \pm \sqrt{1-4m}}{2}$. Để tồn tại $x \leq 0$ thì

$$1 - \sqrt{1-4m} \leq 0 \Rightarrow m \leq 0 \Rightarrow \Delta_1 > 0 \quad (2)$$

• Với $x \leq 0$ và $x^2 - 2x + m \leq 0$ thì (1) trở thành $x^2 - 3x + m = 0$. Phải có $\Delta_2 = 9 - 4m \geq 0$ và $x = \frac{3 \pm \sqrt{9-4m}}{2}$. Để tồn tại $x \leq 0$ thì

$$3 - \sqrt{9-4m} \leq 0 \Rightarrow m \leq 0 \Rightarrow \Delta_2 > 0 \quad (3)$$

hoặc $x = \frac{3 - \sqrt{9 - 4m}}{2}$.

Câu VII. $A = x^{10} + x^5 + 1 =$
 $= x^8(x^2 + x + 1) - x^7(x^2 + x + 1) + x^5(x^2 + x + 1)$
 $- x^4(x^2 + x + 1) + x^3(x^2 + x + 1) - x(x^2 + x + 1)$
 $+ (x^2 + x + 1) =$
 $= (x^2 + x + 1)(x^8 - x^7 + x^5 - x^4 + x^3 - x + 1).$

Câu VIII. a) ĐK : $x \neq 0$. Đặt $y = \frac{x}{3} - \frac{4}{x}$ thì

$$y^2 = \frac{x^2}{9} + \frac{16}{x^2} - \frac{8}{3}. \text{ PT đã cho trở thành :}$$

$$3y^2 - 10y + 8 = 0 \Rightarrow y_1 = 2; y_2 = \frac{4}{3}.$$

Với $y = 2$, từ cách đặt ta có PT $\frac{x}{3} - \frac{4}{x} = 2 \Leftrightarrow x^2 - 6x - 12 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{21}$.

Với $y = \frac{4}{3}$ có $\frac{x}{3} - \frac{4}{x} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow x^2 - 4x - 12 = 0$
 $\Leftrightarrow x_1 = 6; x_2 = -2.$

b) ĐK $x \geq \frac{5}{2}$. Nhân cả hai vế của PT đã cho với $\sqrt{2}$ ta được

$$\begin{aligned} & \sqrt{2x+4+6\sqrt{2x-5}} + \sqrt{2x-4-2\sqrt{2x-5}} = 4 \\ \Leftrightarrow & \sqrt{(\sqrt{2x-5}+3)^2} + \sqrt{(\sqrt{2x-5}-1)^2} = 4 \\ \Leftrightarrow & 1 - \sqrt{2x-5} = |\sqrt{2x-5}-1| \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 1 - \sqrt{2x-5} \geq 0. \text{ Kết hợp với ĐK } x \geq \frac{5}{2} \text{ ta}$$

được nghiệm của PT đã cho : $\frac{5}{2} \leq x \leq 3$.

$$c) \begin{cases} xy^2 - 2y + 3x^2 = 0 & (1) \\ y^2 + x^2y + 2x = 0 & (2) \end{cases}$$

Với $x = 0$ thì $y = 0$, hệ có nghiệm $(0, 0)$.

Với $x \neq 0$, nhân hai vế PT (2) với x rồi trừ theo từng vế với PT (1) ta được :

$$x^3y + 2y - x^2 = 0 \Rightarrow y = \frac{x^2}{x^3 + 2} \text{ thay vào (1)}$$

biến đổi và rút gọn ta được $3x^6 + 11x^3 + 8 = 0$

$$\Leftrightarrow (x^3 + 1)(3x^3 + 8) = 0$$

Tóm lại : hệ đã cho có 3 nghiệm (x, y) là :

$$(0, 0); (-1, 1); \left(\frac{-2}{\sqrt[3]{3}}, \frac{-6}{\sqrt[3]{9}} \right).$$

Thử lại ta thấy các nghiệm này thỏa mãn hệ PT đã cho.

Câu IX. $x^2 - 5x + 7 = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$.

MXĐ của y là R . Để tìm GTNN, GTLN của y , ta tìm miền giá trị của hàm y , tức là tìm y sao cho

PT $y = \frac{x^2}{x^2 - 5x + 7}$ ẩn x có nghiệm, hay PT :

$$(y - 1)x^2 - (5y)x + 7y = 0 \quad (1) \text{ có nghiệm}$$

- Với $y = 1$, PT (1) có nghiệm $x = \frac{7}{5}$.

- Với $y \neq 1$, PT (1) có nghiệm

$$x = \frac{5y \pm \sqrt{\Delta}}{2(y-1)} \quad (2) \text{ khi } \Delta = 25y^2 - 28y(y-1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq y \leq \frac{28}{3}. \text{ Vậy PT (1) có nghiệm } \Leftrightarrow 0 \leq y$$

$$\leq \frac{28}{3}. \text{ Thay giá trị } y = 0, y = \frac{28}{3} \text{ vào (2) ta kết}$$

GTNN của y là $\frac{28}{3}$, đạt được khi $x = \frac{14}{5}$.

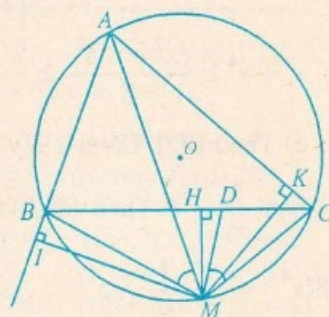
Câu X. Gọi D là điểm trên cạnh BC sao cho $\widehat{DMC} = \widehat{BMA}$, khi đó

$$\Delta MBA \approx \Delta MDC$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{MI} = \frac{DC}{MH} \quad (1)$$

Mặt khác $\triangle MBD \simeq \triangle MAC$ nên có:

$$\frac{BD}{MH} = \frac{AC}{MK} \quad (2)$$



Từ (1), (2) suy ra $\frac{AC}{MK} + \frac{AB}{MI} = \frac{BD+DC}{MH} =$

$$\frac{BC}{MH} \text{ (dpcm)}.$$

Câu XI. Theo giả thiết $\triangle ADE$ vuông cân tại A với đường cao AH , $\widehat{ADH} = \widehat{DAH} = 45^\circ$. Không mất tính tổng quát, giả sử C thuộc đoạn DH .

ĐỀ THI TUYỂN SINH MÔN TOÁN LỚP 10 TRƯỜNG QUỐC HỌC THỪA THIÊN - HUẾ 2002

Câu I. a) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$\sqrt{1+4x+4x^2} + \sqrt{4x^2-12x+9}$$

b) Chứng tỏ rằng :

$$\sqrt[3]{70-\sqrt{4901}} + \sqrt[3]{70+\sqrt{4901}} = 5$$

Câu II. Cho hệ phương trình :

$$\begin{cases} x^4 + y^2 = \frac{697}{81} \\ x^2 + y^2 + xy - 3x - 4y + 4 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$(2)$$

a) Nếu có (x, y) thỏa (2), chứng minh rằng :

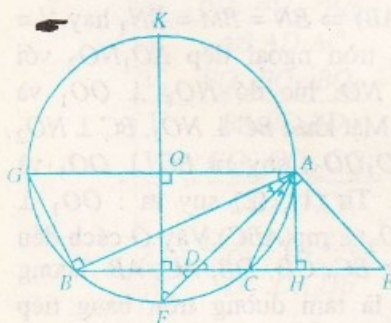
$$1 \leq y \leq \frac{7}{3}$$

b) Giải hệ phương trình (1) và (2).

Câu III. Có tồn tại hay không hai số nguyên x, y sao cho : $3x^2 + 7y^2 = 2002$?

Câu IV. Trên mặt phẳng cho đa giác lồi có 12 cạnh. Có bao nhiêu tam giác mà các đỉnh của nó là đỉnh của đa giác lồi đã cho ?

Câu V. Cho hình thoi $ABCD$ có góc $\widehat{BAD} = 40^\circ$, O là giao điểm hai đường chéo. Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên cạnh AB . Trên tia đối của tia BC , tia đối của tia DC lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $HM \parallel AN$. Tính số đo góc $\widehat{MON}$.



Lúc đó $\widehat{BAH} = \widehat{BAD} + \widehat{DAH} = \widehat{DAC} + 45^\circ < 90^\circ$ nên B phải thuộc tia CD . Tia AD cắt đường tròn tâm O ngoại tiếp $\triangle ABC$ tại điểm F

của cung BC . Dễ thấy $45^\circ = \widehat{ADH} = \widehat{BDF} = \widehat{OFA} \Rightarrow$ hai đường kính $AG \perp FK \Rightarrow AG \parallel BC \Rightarrow GB = AC$. Từ đó $AB^2 + GB^2 = 4R^2 \Rightarrow AB^2 + AC^2 = 4R^2$.

Hướng dẫn giải
NGUYỄN ĐỨC TẤN

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

GIẢI BÀI SỐ 56

LTS. Nhà giáo Trần Trọng Thuyết, trường Bồ túc Văn hóa thị xã Bắc Ninh đã phát hiện ra lời giải bài số 56 (THIT 8-2002) có nhầm lẫn. Ông TTT đã trao đổi với GS. Ngô Việt Trung và GS đã gợi ý hướng giải quyết. Sau đây là bài viết của ông TTT.

Problem. Show that it is possible to cut a hole in cube, through which another cube of equal size can pass.

Solution. Let $ABCDEFGH$ be a cube of edge length 1, its center is O . On the edge AE a point K is taken such that $|AK| = \frac{1}{4}$ (Denote by $|AK|$ the length of the segment AK). On the edge EF a point L is taken such that $|FL| = \frac{1}{4}$. Construct

a plane α through three points O, K and L . The plane α meets the edges FG, GC, CD, DA at points M, N, P and Q respectively. Easily prove that

$$|DP| = |NG| = \frac{1}{4};$$

$$|AQ| = |QD| = |FM|$$

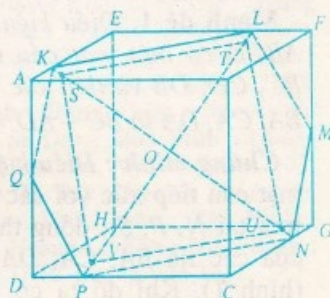
$$= |MG| = \frac{1}{2}, \text{ quadrilateral } KLN P \text{ is square of}$$

the side $\frac{3}{4}\sqrt{2} (> 1)$. The diagonal of this square

has length $\frac{3}{2} (> \sqrt{2})$. Choose an arbitrary

point S on diagonal KN , near K such that $0 < |KS| \leq \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}$. Denote by U the point on

KN such that $|NU| = |KS|$ and by T and V the points on PL such that $STUV$ is a square. Easily prove that $|SU| \geq \sqrt{2}, |ST| \geq 1$. Now construct 4 planes perpendicular to the plane α through the edges of the square $STUV$. The region enclosed by the 4 planes creates a hole inside the cube $ABCDEFGH$, through which one can push through a cube of the same size.



TÌM HIỂU SÂU THÊM TOÁN HỌC SƠ CẤP

MẶT CẦU TIẾP XÚC VỚI ĐƯỜNG THẲNG CHỨA CÁC CẠNH CỦA KHỐI TỨ DIỆN

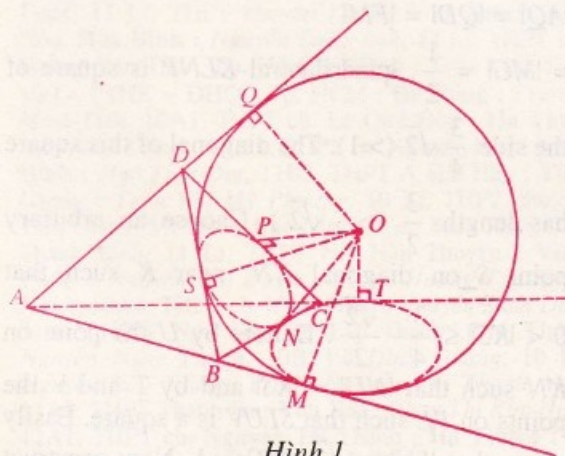
HỒ QUANG VINH
(Hà Nội)

Các bạn đã làm quen với mặt cầu ngoại tiếp, mặt cầu nội tiếp tứ diện. Trên *Tạp chí TH&TT* số 177 (1/1991) tác giả Lê Quốc Hán đã giới thiệu với chúng ta về mặt cầu tiếp xúc với tất cả các cạnh của một khối đa diện và một số bài toán liên quan đến mặt cầu này. Trong bài báo này chúng tôi xin giới thiệu thêm với các bạn một vài kiểu tiếp xúc của mặt cầu với đường thẳng chứa các cạnh của một khối tứ diện trong không gian.

Lưu ý: Trong bài này nói mặt cầu tiếp xúc với cạnh XY (hoặc tia XY) hiểu là tiếp điểm thuộc đoạn thẳng XY (hoặc tia XY).

Mệnh đề 1. Điều kiện cần và đủ để tứ diện $ABCD$ có một mặt cầu tiếp xúc với các cạnh BC, CD, DB và tiếp xúc với tia đối của các tia BA, CA, DA là $BC - AD = CD - AB = DB - AC$.

Chứng minh: Điều kiện cần: Giả sử (S_0) là mặt cầu tiếp xúc với các cạnh BC, CD, DB lần lượt tại N, P, S ; đồng thời tiếp xúc với tia đối của các tia BA, CA, DA lần lượt tại M, T, Q (hình 1). Khi đó ta có $BS = BN = BM = x$,

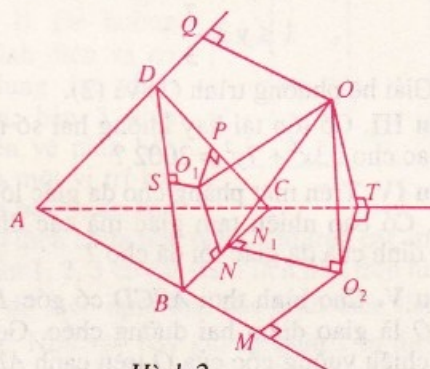


Hình 1

$CN = CT = CP = y, DQ = DP = DS = z, AQ = AM = AT = t$. Từ đó $BC - AD = (x + y) - (t - z) = x + y + z - t$ và $DB - AC = (x + z) - (t - y) = x + y + z - t$. Suy ra $BC - AD = DB - AC$. Tương

tự $BC - AD = CD - AB$. Vậy $BC - AD = DB - AC = CD - AB$ (đpcm).

Điều kiện đủ. Giả sử $BC - AD = DB - AC = CD - AB$. Đường tròn nội tiếp $\triangle BCD$ (tâm O_1) tiếp xúc với BC tại N , đường tròn bàng tiếp $\triangle ABC$ (tâm O_2) ứng với đỉnh A tiếp xúc với BC tại N_1 (hình 2).



Hình 2

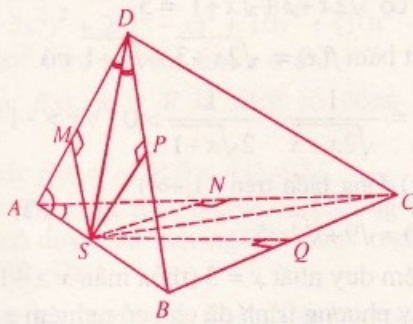
Ta chứng minh $N \equiv N_1$. Thật vậy do $DB - AC = CD - AB \Rightarrow BC + BD - CD = AC + BC - AB \Rightarrow 2BN = BC + BD - CD = (AB + AC + BC) - 2AB = 2(AM - AB) \Rightarrow BN = BM = BN_1$ hay $N \equiv N_1$. Xét đường tròn ngoại tiếp $\triangle O_1NO_2$ với đường kính là NO , lúc đó $NO_1 \perp OO_1$ và $NO_2 \perp OO_2$ (1). Mặt khác $BC \perp NO_1, BC \perp NO_2 \Rightarrow BC \perp mp(NO_1OO_2)$ suy ra $BC \perp OO_1$ và $BC \perp OO_2$ (2). Từ (1), (2) suy ra: $OO_1 \perp mp(BCD)$ và $OO_2 \perp mp(ABC)$. Vậy O cách đều các đường thẳng BC, CD, DB, AC, AB . Tương tự nếu gọi O_3 là tâm đường tròn bàng tiếp $\triangle ACD$ (ứng với đỉnh A) thì cũng có $OO_3 \perp mp(ADC)$. Từ đó O cách đều các đường thẳng AD, AC, CD . Vậy O là tâm mặt cầu tiếp xúc với các cạnh BC, DB, CD đồng thời tiếp xúc với tia đối của các tia BA, CA, DA (đpcm).

Hệ quả: Với tứ diện gần đều $ABCD$ ($AB = CD, AC = BD, BC = AD$) luôn tồn tại mặt cầu

tiếp xúc với các cạnh BC, CD, DB và tiếp xúc với tia đối của các tia BA, CA, DA .

Mệnh đề 2. Điều kiện cần và đủ để tồn tại một mặt cầu có tâm nằm trên cạnh AB của tứ diện $ABCD$ đồng thời tiếp xúc với các cạnh AC, AD, BC, BD là $AC = AD$ và $BC = BD$.

Chứng minh. Điều kiện cần : Giả sử mặt cầu tâm S với $S \in AB$ tiếp xúc với các cạnh AD, AC, BD, BC lần lượt tại M, N, P, Q (hình 3).



Hình 3

Vì $BP = BQ, SP = SQ$ nên $\triangle SBP = \triangle SBQ \Rightarrow \widehat{SBD} = \widehat{SBC}$. Tương tự $\widehat{SAD} = \widehat{SAC}$. Vậy $\triangle ABD = \triangle ABC$, suy ra $AD = AC$ và $BD = BC$.

Điều kiện đủ. Giả sử $AD = AC$ và $BD = BC$ khi đó $\triangle ABD = \triangle ABC$ suy ra $\widehat{DAB} = \widehat{CAB}$ (3).

Đường phân giác trong của góc $\widehat{ADB}$ cắt AB tại S thì $\frac{SA}{SB} = \frac{AD}{BD} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow CS$ là phân giác trong

của góc $\widehat{ACB}$. Dựng SM, SN, SP, SQ lần lượt vuông góc với các cạnh AD, AC, BD, BC thì từ (3) có $\triangle AMS = \triangle ANS$. Từ đó $SM = SN = SP = SQ$ nên S là tâm mặt cầu tiếp xúc với các cạnh AD, AC, BD, BC (đpcm).

Bây giờ chúng ta sẽ sử dụng hai mệnh đề trên để giải một số bài toán liên quan đến hai mệnh đề này.

Bài toán 1. Cho tứ diện gần đều $ABCD$ ($AB = CD, AC = BD, BC = AD$) và một mặt cầu tiếp xúc với các cạnh BC, CD, BD , đồng thời tiếp xúc với tia đối của các tia BA, CA, DA . Gọi d_1, d_2, d_3, d_4 lần lượt là khoảng cách từ tâm mặt cầu này đến các mặt phẳng $(ABC), (ABD), (ACD), (BCD)$; r là bán kính mặt cầu nội tiếp tứ diện $ABCD$. Chứng minh

$$d_1 + d_2 + d_3 - d_4 = 4r$$

Lời giải. (xem hình 2) (Sự tồn tại của mặt cầu tâm O ở bài ra được suy trực tiếp từ hệ quả mệnh đề 1). Do $ABCD$ là tứ diện gần đều nên

$$S_{ABC} = S_{ABD} = S_{ACD} = S_{BCD} = S \text{ và}$$

$$S_{ABC} + S_{ACD} + S_{ABD} + S_{BCD} = 4S. \text{ Ta có :}$$

$$V_{ABCD} = V_{OABC} + V_{OABD} + V_{OACD} - V_{OBCD}$$

$$= \frac{1}{3}d_1 \cdot S_{ABC} + \frac{1}{3}d_2 \cdot S_{ABD} + \frac{1}{3}d_3 \cdot S_{ACD} - \frac{1}{3}d_4 \cdot S_{BCD}$$

$$= \frac{S}{3}(d_1 + d_2 + d_3 - d_4).$$

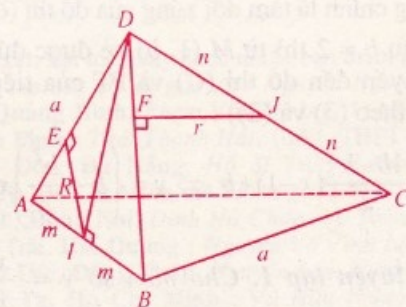
$$\text{Suy ra } d_1 + d_2 + d_3 - d_4 =$$

$$= \frac{3V_{ABCD}}{S} = 4 \left(\frac{3V_{ABCD}}{4S} \right) = 4r \text{ (đpcm)}$$

Bài toán 2. Giả sử mặt cầu tâm I thuộc AB , bán kính R tiếp xúc với các cạnh AC, AD, BC và BD ; mặt cầu tâm J thuộc CD , bán kính r tiếp xúc với các cạnh CA, CB, DA, DB của khối tứ diện $ABCD$. Chứng minh rằng

$$\frac{AB^4}{CD^4} = \frac{AB^2 - 4R^2}{CD^2 - 4r^2}$$

Lời giải. Áp dụng mệnh đề 2 ta có $AC = AD$ và $BC = BD$ (xét đối với mặt cầu tâm I);



Hình 4

$CA = CB$ và $AD = BD$ (xét đối với mặt cầu tâm J) do đó $AC = AD = BC = BD = a$. Từ đó I, J theo thứ tự là trung điểm của AB, CD . Dựng $IE \perp AD, JF \perp BD$ thì $IE = R, JF = r$. Giả sử $AB = 2m, CD = 2n$, lúc đó từ $IE \cdot AD = DI \cdot AI$ có $R \cdot a = m\sqrt{a^2 - m^2} \Leftrightarrow R^2 a^2 = m^2 a^2 - m^4$ (1). Tương tự $r \cdot a = n\sqrt{a^2 - n^2} \Leftrightarrow r^2 a^2 = n^2 a^2 - n^4$ (2).

Từ (1), (2) có $\frac{m^4}{n^4} = \frac{m^2 - R^2}{n^2 - r^2}$, suy ra hệ thức cần chứng minh.

(Xem tiếp trang 2)

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC CỦA BỘ QUỐC PHÒNG - KHỐI D NĂM 2002

(Đề thi đã giới thiệu trên THPT số 309 tháng 3/2003)

Câu I.1) Bạn đọc tự giải.

I.2) Giả sử $M(1, b)$ là điểm nào đó thuộc đường thẳng $x = 1$ thì tiếp tuyến kẻ từ M đến đồ thị (C) có PT $y = k(x - 1) + b$.

Từ điều kiện tiếp xúc suy ra hệ PT :

$$\begin{cases} x+1+\frac{1}{x-1} = k(x-1)+b & (1) \\ \frac{x^2-2x}{(x-1)^2} = k & (2) \end{cases}$$

phải có nghiệm $x \neq 1$.

Thế (2) vào (1) được $\frac{x^2}{x-1} = \frac{x^2-2x}{x-1} + b$
 $\Rightarrow x^2 = x^2 - 2x + b(x-1) \Rightarrow (b-2)x = b$ (3)

• Nếu $b = 2$ thì từ $M(1, 2)$ không kẻ được tiếp tuyến nào đến đồ thị (C) (chú ý : $M(1, 2)$ chính là giao điểm của hai đường tiệm cận của đồ thị (C) và cũng chính là tâm đối xứng của đồ thị (C)).

• Nếu $b \neq 2$ thì từ $M(1, b)$ kẻ được đúng một tiếp tuyến đến đồ thị (C) và PT của tiếp tuyến đó là (theo (3) và (2)) :

$$y = \frac{4b-b^2}{4}(x-1)+b \Leftrightarrow y = \left(b - \frac{b^2}{4}\right)x + \frac{b^2}{4}$$

Bài luyện tập 1. Cho hàm số $y = \frac{x-1}{x+1}$ và đường thẳng d có phương trình $y = x$. Tìm các điểm M trên d sao cho từ đó kẻ được đúng một tiếp tuyến đến đồ thị hàm số. Hãy viết phương trình các tiếp tuyến đó.

Câu II.1) ĐK $\begin{cases} 2x+3 \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \\ 2x^2+5x+3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq -1$

Để ý rằng $\sqrt{2x+3} \cdot \sqrt{x+1} = \sqrt{2x^2+5x+3}$ nên nếu đặt $t = \sqrt{2x+3} + \sqrt{x+1}$ (ĐK : $t \geq 0$) thì $t^2 = 3x + 4 + 2\sqrt{2x^2+5x+3} \Rightarrow 3x + 2\sqrt{2x^2+5x+3} - 16 = t^2 - 20$.

PT đã cho trở thành $t = t^2 - 20 \Leftrightarrow t^2 - t - 20 = 0 \Rightarrow t = 5$ (vì $t \geq 0$).

Ta có $\sqrt{2x+3} + \sqrt{x+1} = 5$ (1)

Xét hàm $f(x) = \sqrt{2x+3} + \sqrt{x+1}$ có

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+3}} + \frac{1}{2\sqrt{x+1}} > 0, \forall x > -1 \text{ do đó}$$

$$\begin{cases} f(x) \text{ đồng biến trên } (-1, +\infty) \\ f(3) = \sqrt{9} + \sqrt{4} = 5 \end{cases} \Rightarrow \text{PT (1) có}$$

nghiệm duy nhất $x = 3$ (thỏa mãn $x \geq -1$)

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = 3$

Nhận xét. PT (1) có thể giải bằng phương pháp biến đổi tương đương khi bình phương hai vế. Đây là bài toán về PT vô tỉ được giải bằng phương pháp đặt ẩn phụ để đưa PT phức tạp đã cho về PT đại số đơn giản hơn.

Bài luyện tập 2 : Giải phương trình :

$$\sqrt{x} + \sqrt{x+7} + 2\sqrt{x^2+7x} = 35 - 2x$$

II. 2) Tìm các giá trị x, y nguyên thỏa mãn :

$$\log_2(x^2+2x+3)^{y^2+8} \leq 7 - y^2 + 3y \quad (1)$$

Do $x^2 + 2x + 3 = (x+1)^2 + 2 \geq 2, \forall x$ và $y^2 + 8 > 0, \forall y$

$$\Rightarrow \log_2(x^2+2x+3)^{y^2+8} = (y^2+8)\log_2(x^2+2x+3) \geq (y^2+8) \cdot \log_2 2 = y^2+8 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1), (2)} \Rightarrow y^2+8 \leq 7 - y^2 + 3y \Rightarrow 2y^2 - 3y + 1 \leq 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq y \leq 1. \text{ Do } y \text{ nguyên nên } y = 1.$$

Với $y = 1$ thì PT (1) trở thành $\log_2(x^2+2x+3)^9 \leq 9 \Leftrightarrow x^2+2x+3 \leq 2 \Leftrightarrow x = -1$.

Bài luyện tập 3. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} 4^{1x^2-8x+12} - \log_4 7 = 7^{2y-1} & (1) \\ |y-3| - 3|y| - 2(y+1)^2 \geq 1 & (2) \end{cases}$$

Câu III. 1) PT đã cho

$$\Leftrightarrow (\cos 2x - 1)(\sin 2x + \cos x + \sin x) = 1 - \cos^2 2x \\ \Leftrightarrow (\cos 2x - 1)(\sin 2x + \cos x + \sin x - 1 + \cos 2x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\cos 2x - 1)(\cos x + \sin x)(2\cos x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \text{PT có nghiệm } x = k\pi; x = -\frac{\pi}{4} + k\pi;$$

$$x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

III.2). Áp dụng định lý hàm số sin cho ΔABD , ΔACD ta có:

$$\begin{cases} \frac{AD}{\sin B} = \frac{BD}{\sin \frac{A}{2}} \\ \frac{AD}{\sin C} = \frac{CD}{\sin \frac{A}{2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AD = \frac{BD \cdot \sin B}{\sin \frac{A}{2}} \\ AD = \frac{CD \cdot \sin C}{\sin \frac{A}{2}} \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } AD^2 = BD \cdot CD \cdot \frac{\sin B \cdot \sin C}{\sin^2 \frac{A}{2}} \leq BD \cdot CD.$$

Câu IV. 1) PT chính tắc của elip có dạng:

$$(E): \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$$

• Gọi $M(x_0, y_0) \in (E)$ ($x_0 \neq 0, y_0 \neq 0$), khi đó:

$$\frac{x_0^2}{3} + \frac{y_0^2}{4} = 1$$

Tiếp tuyến Δ của (E) tại M có PT:

$$\frac{xx_0}{3} + \frac{yy_0}{4} = 1$$

Giả sử A, B là các giao điểm của Δ với hai trục

$$Ox, Oy, \text{ khi đó } A\left(\frac{3}{x_0}, 0\right), B\left(0, \frac{4}{y_0}\right)$$

$$S_{AOB} = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB = \frac{1}{2} \left| \frac{3}{x_0} \right| \left| \frac{4}{y_0} \right| = \frac{6}{|x_0 y_0|} \quad (1)$$

• Áp dụng BĐT Cô-si ta có:

$$|x_0 y_0| = 2\sqrt{3} \left| \frac{x_0}{\sqrt{3}} \right| \left| \frac{y_0}{2} \right| \leq 2\sqrt{3} \sqrt{\frac{\frac{x_0^2}{3} + \frac{y_0^2}{4}}{2}} = \sqrt{3} \quad (2)$$

Xét đẳng thức xảy ra ở (2), suy ra trên (E) có bốn điểm thỏa mãn điều kiện bài toán là:

$$M_1\left(\frac{\sqrt{6}}{2}, \sqrt{2}\right), M_2\left(\frac{\sqrt{6}}{2}, -\sqrt{2}\right),$$

$$M_3\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}, \sqrt{2}\right), M_4\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}, -\sqrt{2}\right)$$

và khi đó $\min S_{AOB} = 2\sqrt{3}$ (đvdt).

Bài luyện tập 4: Cho elip: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$, điểm

$M\left(2, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$, Δ là đường thẳng song song với tiếp tuyến của elip tại M . Xác định phương trình của Δ sao cho Δ cắt elip tại hai điểm phân biệt N, P với diện tích của tam giác MNP đạt giá trị lớn nhất.

IV. 2) Gọi Δ là đường thẳng qua M và vuông góc với $mp(Q)$; I, R là tâm và bán kính mặt cầu cần tìm $\Rightarrow I$ là giao điểm của Δ với $mp(P)$ và $R = IM$. Vì Δ qua $M(1, -1, -1)$ và nhận vectơ pháp tuyến của $mp(Q)$ là $\vec{n} = (2, 1, 2)$ làm vectơ chỉ

$$\text{phương nên có PT tham số: } \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = -1 + 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Vì I là giao điểm của Δ và $mp(P)$ suy ra $I(-3, -3, -5)$ và $R = IM = 6$.

Mặt cầu cần tìm có PT:

$$(x + 3)^2 + (y + 3)^2 + (z + 5)^2 = 36$$

Câu V. 1) Hoành độ giao điểm của các đường là nghiệm của PT:

$$2 - \frac{x^2}{4} = -\frac{x}{2} \Leftrightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 4 \end{cases}$$

Gọi S là diện tích của hình phẳng thì

$$S = \int_{-2}^4 \left(2 - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2}\right) dx = 9 \quad (\text{đvdt})$$

V. 2) Ta có: $P(x) = [(1+x) + x^2]^{10}$

$$= C_{10}^0 (1+x)^{10} + C_{10}^1 (1+x)^9 x^2 + C_{10}^2 (1+x)^8 x^4 + \dots$$

$$\text{Suy ra } a_4 = C_{10}^0 \cdot C_{10}^4 + C_{10}^1 \cdot C_9^2 + C_{10}^2 \cdot C_8^0 = 210 + 360 + 45 = 615$$

Bài luyện tập 5: Xác định hệ số a_4 của x^4 trong khai triển: $(1+2x+3x^2)^{10}$.

$$\text{ĐS: } a_4 = 8085.$$

Hướng dẫn giải

TRẦN TUYẾT THANH
(Học viện PKKQ Hà Tây)

CHUẨN BỊ THI VÀO ĐẠI HỌC**GIÚP BẠN TỰ ÔN THI****HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ TỰ ÔN THI SỐ 1**

(Đề thi đã đăng trong THPT số 309 tháng 3/2003)

Câu I. 1) Các bạn tự giải**I.2)** Hàm số $y = x^4 - mx^2 + 4x + m$ có 3 cực trị $\Leftrightarrow y' = f(x) = 4x^3 - 2mx + 4 = 0$ có 3 nghiệm phân biệt và đổi dấu qua các nghiệm. $\Leftrightarrow f'(x) = 12x^2 - 2m = 0$ có 2 nghiệm phân biệt

$$\text{và } f_{\text{CĐ}} \cdot f_{\text{CT}} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ f\left(\sqrt{\frac{m}{6}}\right) \cdot f\left(-\sqrt{\frac{m}{6}}\right) < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m > \sqrt[3]{54} \quad (1)$$

Giả sử $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2), M_3(x_3, y_3)$ là các điểm cực trị. Vì $O(0, 0)$ là trọng tâm

$$\text{của } \Delta M_1 M_2 M_3 \text{ nên } \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ y_1 + y_2 + y_3 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Do x_1, x_2, x_3 là các nghiệm của PT $y' = 0$ nên theo ĐL Vi-et ta có $x_1 + x_2 + x_3 = 0$; $x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 = -\frac{m}{2}$; $x_1 x_2 x_3 = -1$. Từ đó tính được

$$y_1 + y_2 + y_3 = 3m - \frac{m^2}{2}. \text{ Từ (2) có } 3m - \frac{m^2}{2} = 0.$$

Kết hợp với (1) ta có $m = 6$ là giá trị cần tìm.**Câu II. 1)** ĐK: $0 < x < 2002, x \neq 1, x \neq 2001$.Đặt $y = 2002 - x$, PT đã cho có dạng $\log_y(\log_y x) = \log_x(\log_x y)$ (1). Sử dụng

$$\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c \text{ ta có}$$

$$\text{PT (1)} \Leftrightarrow \log_x(\log_y x) = \log_x y \cdot \log_x(\log_x y)$$

$$\Leftrightarrow \log_x \left(\frac{1}{\log_x y} \right) = \log_x y \cdot \log_x(\log_x y)$$

$$\Leftrightarrow -\log_x(\log_x y) = \log_x y \cdot \log_x(\log_x y)$$

$$\Rightarrow \log_x(\log_x y) = 0 \Rightarrow \log_x y = 1 \Rightarrow x = y$$

$$\Rightarrow x = 2002 - x \Rightarrow x = 1001. \text{ Thử lại ta thấy } x = 1001 \text{ là nghiệm của PT.}$$

II. 2) Tập xác định của $f(x)$ là

$$\begin{cases} x \neq 2a \\ \frac{2a+x}{2a-x} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -|2a| \leq x \leq |2a| \\ x \neq 2a \end{cases}$$

Nếu PT $x^2 + 2x + 4a - 2 = 0$ có nghiệm $x = x_0$ thì $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty \Rightarrow$ tập xác định của $f(x)$ không thể chứa tập giá trị của $g(x)$. Do đó PT

$$x^2 + 2x + 4a - 2 = 0 \text{ vô nghiệm} \Rightarrow \Delta' = 1 - 4a + 2$$

$$< 0 \Leftrightarrow a > \frac{3}{4}. \text{ Lúc đó tập xác định của } f(x) \text{ là}$$

$$-2a \leq x < 2a. \text{ Bài toán trở thành: Tìm } a > \frac{3}{4}$$

$$\text{sao cho } -2a \leq \frac{1}{x^2 + 2x + 4a - 2} < 2a, \forall x \in R.$$

$$\text{Với } a > \frac{3}{4} \text{ thì } x^2 + 2x + 4a - 2 > 0, \forall x, \text{ nên}$$

BPT trên

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2ax^2 + 4ax + 2a(4a-2) - 1 > 0 \\ 2ax^2 + 4ax + 2a(4a-2) + 1 \geq 0 \end{cases}, \forall x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8a^2 - 6a - 1 > 0 \\ 8a^2 - 6a + 1 \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{Kết hợp ĐK } a > \frac{3}{4} \text{ suy ra } a > \frac{3 + \sqrt{17}}{8}.$$

Câu III. 1) Ta có

$$\sin^8 x + \cos^8 x \leq \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad (1)$$

Áp dụng BĐT Cô-si cho 7 số không âm ta được:

$$\sin^{14} x + \left(\frac{1}{2}\right)^7 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^7 \geq$$

$$\geq 7 \sqrt[7]{\sin^{14} x \left(\frac{1}{2}\right)^{42}} = \frac{7}{2^6} \sin^2 x$$

$$\text{Tương tự } \cos^{14} x + 6\left(\frac{1}{2}\right)^7 \geq \frac{7}{2^6} \cos^2 x.$$

Từ đó $64(\sin^{14} x + \cos^{14} x) \geq 1$ (2). Từ (1), (2) suy ra để PT $\sin^8 x + \cos^8 x = 64(\sin^{14} x + \cos^{14} x)$ có nghiệm thì $\sin^8 x + \cos^8 x = 1$ và $64(\sin^{14} x + \cos^{14} x) = 1$. Để thấy điều này không thể xảy ra, suy ra PT đã cho vô nghiệm.

III. 2) Từ $\Delta CA_1 A \sim \Delta HA_1 B$ và $\Delta CB_1 B \sim \Delta HB_1 A$, suy ra

$$HA_1 = \frac{A_1 B \cdot CA_1}{A_1 A} = \frac{c \cdot \cos B \cdot b \cdot \cos C}{A_1 A} \quad (1)$$

$$HB_1 = \frac{B_1 A \cdot CB_1}{B_1 B} = \frac{c \cdot \cos A \cdot a \cdot \cos C}{B_1 B} \quad (2)$$

(trong đó $BC = a, AC = b, AB = c$)

Từ (1), (2) có $S_{HA_1B_1} = \frac{1}{2} HA_1 \cdot HB_1 \cdot \sin C = R^2 \sin 2C \cdot \cos A \cos B \cos C$ (đpcm)

Câu IV. 1) Trên các tia OA, OB, OC lần lượt đặt các vectơ đơn vị $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Lúc đó $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 + \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 = \cos \widehat{AOB} + \cos \widehat{BOC} = 0$ (vì $\widehat{AOB} + \widehat{BOC} = 180^\circ$) $\Rightarrow \vec{e}_2 \perp (\vec{e}_1 + \vec{e}_3)$.

Mặt khác $\vec{e}_2$ và $\vec{e}_1 + \vec{e}_3$ tương ứng là vectơ chỉ phương của đường thẳng OB và OD nên $OB \perp OD$ hay $\widehat{BOD} = 90^\circ$.

IV. 2) a) Giải hệ bao gồm PT của (Δ) và (Δ') , ta thấy hệ có nghiệm duy nhất $(x, y, z) = \left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{3}{2}\right) \Rightarrow$ (đpcm).

b) Gọi I là giao điểm của Δ và Δ' thì I có tọa độ $\left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{3}{2}\right)$. Chọn $A(0, -1, 0)$ thuộc (Δ) ; $B(0, 1, 4)$ thuộc (Δ') . Xét các vectơ đơn vị

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{IA}}{|\vec{IA}|} = \left(\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{-2}{\sqrt{14}}, \frac{-3}{\sqrt{14}}\right);$$

$$\vec{e}_2 = \frac{\vec{IB}}{|\vec{IB}|} = \left(\frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{5}{\sqrt{30}}\right)$$

Lần lượt tính $\vec{e}_1 + \vec{e}_2$ và $\vec{e}_1 - \vec{e}_2$ là các vectơ chỉ phương của cặp đường phân giác của các

góc tạo bởi (Δ) và (Δ') . Từ đó cặp đường phân giác có PT dạng chính tắc là:

$$\frac{x + \frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{14}} + \frac{1}{\sqrt{30}}} = \frac{y}{\frac{-2}{\sqrt{14}} + \frac{2}{\sqrt{30}}} = \frac{z - \frac{3}{2}}{\frac{-3}{\sqrt{14}} + \frac{5}{\sqrt{30}}};$$

$$\frac{x + \frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{14}} - \frac{1}{\sqrt{30}}} = \frac{y}{\frac{-2}{\sqrt{14}} - \frac{2}{\sqrt{30}}} = \frac{z - \frac{3}{2}}{\frac{-3}{\sqrt{14}} - \frac{5}{\sqrt{30}}}$$

Câu V. 1) Đặt $t = \tan x \Rightarrow dt = \frac{dx}{\cos^2 x}$. Từ đó

$$I = \int_{-1}^1 \frac{t^2 dt}{t^2 - 2t + 5} = \int_{-1}^1 dt + \int_{-1}^1 \frac{(2t-2)dt}{t^2 - 2t + 5} - 3 \int_{-1}^1 \frac{dt}{(t-1)^2 + 4}$$

Đối với tích phân thứ 3 ta đổi biến số $t - 1 = 2 \tan z$, khi đó tính được $I = 2 - \ln 2 - \frac{3\pi}{8}$.

V. 2) Phép chọn n viên bi theo yêu cầu đề bài thông qua hai bước:

- Chọn k viên bi ($0 \leq k \leq n$) từ n viên bi xanh đôi một khác nhau (có C_n^k cách chọn).

- Chọn $n - k$ viên bi từ n viên bi đỏ giống hệt nhau (có 1 cách chọn). Từ đó số cách chọn n

viên bi theo yêu cầu bài toán là: $\sum_{k=0}^n C_n^k = 2^n$

Hướng dẫn giải

ĐẶNG VŨ HÀ
(Sơn Tây, Hà Tây)

ĐỀ TỰ ÔN THI SỐ 2

(Thời gian làm bài: 180 phút)

Câu I. (2 điểm)

Cho hàm số: $y = -x^3 + ax^2 - 4$

1) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số khi $a = 3$.

2) Tìm a để phương trình $x^3 - ax^2 + m + 4 = 0$ luôn có 3 nghiệm phân biệt, với mọi giá trị của m thỏa mãn điều kiện: $-4 < m < 0$.

Câu II. (2 điểm)

1) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sqrt{1-x} + \sqrt{1-y} = \sqrt{2} \\ \sqrt{1+x} + \sqrt{1+y} = \sqrt{6} \end{cases}$$

2) Tính: $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(\sqrt{\frac{x+2}{x}} - \sqrt[3]{\frac{x+3}{x}} \right)$

Câu III. (2 điểm)

1) Tìm các nghiệm của phương trình:

$$\sin \frac{2x+1}{x} + \sin \frac{2x+1}{3x} - 2 \cos^2 \frac{2x+1}{3x} = 0,$$

thỏa mãn điều kiện: $x \geq \frac{1}{10}$.

2) Cho tam giác ABC thỏa mãn điều kiện: $\sqrt[3]{r_a r_b r_c} = \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt{S}$ (trong đó S là diện tích của tam giác; r_a, r_b, r_c lần lượt là bán kính các đường tròn bàng tiếp ứng với các đỉnh A, B, C). Chứng minh rằng tam giác ABC đều.

Câu IV. (2 điểm)

(Xem tiếp trang 23)



ĐỀ RA KÌ NÀY

CÁC LỚP TRUNG HỌC CƠ SỞ

T1/310. (Lớp 6). Cho a, b, c là các số nguyên dương tùy ý thì tổng sau có thể là số nguyên dương không :

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a}$$

LƯƠNG ANH VĂN
(GV. Tp. Hồ Chí Minh)

T2/310. (Lớp 7). Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC} = 90^\circ$, $\widehat{ABC} = 50^\circ$. Dựng tam giác BCD với $\widehat{BCD} = \widehat{CBD} = 30^\circ$ sao cho điểm D nằm ngoài tam giác ABC . Hai đường thẳng AB và CD cắt nhau tại E . Hai đường thẳng AC và BD cắt nhau tại F . Tính các góc $\widehat{AEF}$ và $\widehat{AFE}$.

VŨ HỮU CHÍN
(GV THCS Hồng Bàng, Hải Phòng)

T3/310. Giải phương trình nghiệm nguyên dương :

$$x^3 - y^3 = xy + 2003$$

LƯU XUÂN TÌNH
(GV THPT Lam Sơn, Thanh Hóa)

T4/310. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x+y+z=-1 \\ xyz=1 \\ \frac{x}{y^2} + \frac{y}{z^2} + \frac{z}{x^2} = \frac{y^2}{x} + \frac{z^2}{y} + \frac{x^2}{z} \end{cases}$$

BÙI VĂN ĐIỀU
(GV THCS Bảo Linh, Định Hóa, Thái Nguyên)

T5/310. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$\frac{a^3}{1+b} + \frac{b^3}{1+a}$$

trong đó a, b là các số dương thỏa mãn điều kiện $ab = 1$.

LÊ THANH HẢI
(SV Khai thác K44, ĐH Mở Địa chất, Cẩm Phả, Quảng Ninh)

T6/310. Cho tứ giác lồi $ABCD$ sao cho hai đường chéo CA và DB là các đường phân giác của góc $\widehat{BCD}$ và $\widehat{ADC}$. Gọi E là giao điểm của CA và DB . Chứng minh rằng

$$EC \cdot ED = EA \cdot EB + EA \cdot ED + EB \cdot EC$$

khi và chỉ khi $\widehat{AED} = 45^\circ$.

THÁI NHẬT PHƯƠNG
(GV THPT Ngô Gia Tự, Cam Nghĩa, Cam Ranh, Khánh Hòa)

T7/310. Cho nửa đường tròn đường kính AB và một điểm C cố định thuộc đoạn AB (C khác A, B). Lấy điểm M trên nửa đường tròn. Đường thẳng qua M , vuông góc với MC , lần lượt cắt các tiếp tuyến qua A và B của nửa đường tròn tại E và F . Tìm giá trị nhỏ nhất của diện tích tam giác CEF khi M di chuyển trên nửa đường tròn.

PHẠM HOÀNG HÀ
(SV CLC K49, khoa Toán Tin, ĐHSPT Hà Nội)

CÁC LỚP TRUNG HỌC PHỔ THÔNG

T8/310. Chứng minh rằng

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 2(1+a+b+c)$$

trong đó a, b, c là các số dương thỏa mãn điều kiện $abc = 1$.

TRẦN XUÂN ĐÁNG
(GV THPT Lê Hồng Phong, Nam Định)

T9/310. Giải và biện luận phương trình sau theo tham số m :

$$x^3 + 5x^2 + (5m+1)x + m^2 = (x^2 - x + 1)^2$$

PHẠM VĂN THUẬN
(Hà Nội)

T10/310. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{2x^n}{1+x^{n+1}} \leq \left(\frac{1+x}{2} \right)^{n-1} \leq \frac{x^n - 1}{n(x-1)}$$

trong đó x là số thực dương, $x \neq 1$ và n là số nguyên dương.

NGUYỄN SINH NGUYỄN
(GV THPT Lê Quý Đôn, Đà Nẵng)

T11/310. Chứng minh rằng trong tam giác ABC với 3 góc nhọn luôn có :

$$\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C + 6(\sin A + \sin B + \sin C) \geq 12\sqrt{3}$$

HOÀNG MINH DŨNG
(SV lớp CTM8, K44, ĐHBK Hà Nội)

T12/310. Tứ diện $SABC$ có $SA = BC$, $SB = CA$, $SC = AB$. Một mặt phẳng đi qua tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC , cắt các tia SA, SB, SC theo thứ tự tại M, N, P . Chứng minh rằng

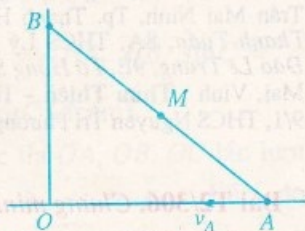
$$SM + SN + SP \geq SA + SB + SC$$

NGUYỄN ĐỨC HUY
(GV THPT Lê Quý Đôn, Long An)

CÁC ĐỀ VẬT LÝ

Bài L1/310. Một thanh AB dài $l = \sqrt{3}$ (m) được gắn với 2 ổ trượt ở 2 đầu A, B có thể di

động trên 2 thanh cố định Ox, Oy vuông góc với nhau như hình vẽ. Ổ A chuyển động với vận tốc không đổi $v_A = 30\sqrt{3}$ cm/s.



Tính gia tốc của trung điểm M của

AB lúc A cách O một đoạn $\frac{l}{2}$?

NGUYỄN VĂN HANH

(GV THPT chuyên Phan Bội Châu, Vinh, Nghệ An)

Bài L2/310. Một tụ điện C_1 có điện dung C được tích điện đến hiệu điện thế U . Sau đó tụ được ngắt khỏi nguồn và ghép song song với một tụ điện phẳng C_2 có điện dung $2C$ và chưa tích điện. Sau đó các bản của tụ C_2 có thể chuyển động tự do đến nhau. Tìm vận tốc của mỗi bản của tụ C_2 tại thời điểm mà khoảng cách giữa chúng giảm đi một nửa. Biết khối lượng mỗi bản của tụ C_2 là m . Bỏ qua tác dụng của trọng lực.

NGUYỄN THANH NHÀN

(GV THPT Yên Lạc 1 - Vĩnh Phúc)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/310. (for 6th grade). Do there exist three positive integers a, b, c such that the sum

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a}$$

is an integer?

T2/310. (for 7th grade). Let ABC be a triangle with $\widehat{BAC} = 90^\circ$, $\widehat{ABC} = 50^\circ$. Construct the triangle BCD such that $\widehat{BCD} = \widehat{CBD} = 30^\circ$ and D is outside of triangle ABC . The lines AB and CD intersect at E . The lines AC and BD intersect at F . Calculate the angles $\widehat{AEF}$ and $\widehat{AFE}$.

T3/310. Find integral solutions of the equation $x^3 - y^3 = xy + 2003$

T4/310. Solve the system of equations:

$$\begin{cases} x+y+z=-1 \\ xyz=1 \\ \frac{x}{y^2} + \frac{y}{z^2} + \frac{z}{x^2} = \frac{y^2}{x} + \frac{z^2}{y} + \frac{x^2}{z} \end{cases}$$

T5/310. Find the least value of the expression $\frac{a^3}{1+b} + \frac{b^3}{1+a}$, where a and b are positive numbers satisfying the condition $ab = 1$.

T6/310. Let $ABCD$ a convex quadrilateral such that the diagonals CA and DB are the angled-bisectors of $\widehat{BCD}$ and $\widehat{ADC}$. Let E be the point of intersection of CA and DB . Prove that $EC \cdot ED = EA \cdot EB + EA \cdot ED + EB \cdot EC$ when and only when $\widehat{AED} = 45^\circ$.

T7/310. Let be given a semi-circle with diameter AB and a fixed point C on the segment AB (C distinct from A, B). M is a point on the semi-circle. The line passing through M , perpendicular to MC , cuts the tangents of the semi-circle at A and B respectively at E and F . Find the least value of the area of triangle CEF when M moves on the semi-circle.

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T8/310. Prove that

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 2(1+a+b+c)$$

where a, b, c are positive numbers satisfying the condition $abc = 1$.

T9/310. Solve the following equation with parameter m :

$$x^3 + 5x^2 + (5m+1)x + m^2 = (x^2 - x + 1)^2$$

T10/310. Prove the inequalities

$$\frac{2x^n}{1+x^{n+1}} \leq \left(\frac{1+x}{2}\right)^{n-1} \leq \frac{x^n-1}{n(x-1)}$$

for positive number $x \neq 1$ and positive integer n .

T11/310. Prove that for arbitrary acute triangle ABC :

$$\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C + 6(\sin A + \sin B + \sin C) \geq 12\sqrt{3}$$

T12/310. Let $SABC$ be a tetrahedron with $SA = BC, SB = CA, SC = AB$. A plane passing through the incenter of triangle ABC cuts the rays SA, SB, SC respectively at M, N, P . Prove that

$$SM + SN + SP \geq SA + SB + SC.$$



Bài T1/306. Tìm mọi nghiệm nguyên dương của phương trình : $10(2^x - 1) = x(13x - 3)$ (1)

Lời giải. (1) $\Leftrightarrow 10(2^x - 1) = 10x^2 + 3x(x - 1)$.
Suy ra $x(x - 1) : 10 \Rightarrow$ với $1 \leq x \leq 5$ chỉ có thể $x = 1$ hoặc $x = 5$.

Thử thấy $x_1 = 1, x_2 = 5$ là nghiệm của PT (1).
Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp rằng với $x \geq 6$ thì vế trái lớn hơn vế phải của PT (1).

Đặt $A_n = 10(2^n - 1) - n(13n - 3) = 10.2^n - 10 - 13n^2 + 3n$ ($n \geq 6$).

Với $n = 6$ thì $A_6 = 2^2(160 - 117) + 8 > 0$.

Giả sử $n = m \geq 6$ thì $A_m > 0$. Xét với $n = m+1$ có
 $A_{m+1} = 10.2^{m+1} - 10 - 13(m+1)^2 + 3(m+1)$
 $= 2(10.2^m - 10 - 13m^2 + 3m) + 13m^2 - 29m$
 $= 2.A_m + m(13m - 29) > 0$ vì $A_m > 0$ và $13m - 29 > 13.6 - 29 > 0$.

Vậy $A_n > 0$ với mọi $n \geq 6$. PT (1) có 2 nghiệm nguyên dương là $x_1 = 1, x_2 = 5$.

Nhận xét. 1) Bằng cách chứng minh như trên có thể giải bài toán tương tự khi thay 2^n bởi a^n với a là số nguyên dương nào đó, còn $13n^2 - 3n$ là một tam thức bậc hai của n sao cho với n không lớn lắm ta có $A_n > 0$. Một số bạn đã sử dụng ĐL nhỏ Phecmá, nhưng chưa để ý rằng ĐL này áp dụng cho số nguyên tố.

2) Các bạn sau có lời giải đúng và trình bày gọn :

Phú Thọ : Trần Duy Thành, 9G, THCS Văn Lang, Việt Trì, Khổng Ngọc Trọng, 7A3, THCS Lâm Thao, Nguyễn Trần Kiên, Tạ Việt Trung, 8A, Ngô Vinh Thái, 9A1, Nguyễn Trung Kiên A, 9A, THCS Giấy Phong Châu, Phù Ninh ; **Vĩnh Phúc :** Trần Tấn Phong, 7A, Trần Thị Hương Giang, 9A, THCS Lập Thạch, Quách Phương Nam, Trần Quang Chính, 9A, THCS Yên Lạc, Nguyễn Xuân Thọ, 8B, Đoàn Anh Quan, 9B, THCS Vĩnh Yên ; Nguyễn Thế Hùng, Vũ Văn Quang, Lê Trường Sơn, 9C, THCS Vĩnh Tường ; **Bắc Ninh :** Tạ Hiền, 8T, THCS Long Châu A, Yên Phong ; **Hải Dương :** Nguyễn Thị Như Trang, 9A1, THCS Chu Văn An, Thanh Hà ; **Hải Phòng :** Nguyễn Hữu Phước, 9A1, THCS Lương Khánh Thiện, Kiến An ; **Hung Yên :** Vũ Văn Khu, Chu Bảo Trung, Nguyễn Thùy Linh, 9A2, THCS Chu Mạnh Trinh, Văn Giang ; **Hà Nội :** Đỗ Xuân Huy, 9H, THCS Lê Quý Đôn, Cầu Giấy ; **Hòa Bình :** Nguyễn Thùy Dương, 9A1, THCS Hữu Nghị ; **Nam Định :** Đinh Xuân Tuyên, 9A2, THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên ;

Thanh Hóa : Trịnh Thành Kiên, 9A1, THCS Trần Mai Ninh, Tp. Thanh Hóa ; **Nghệ An :** Nguyễn Thanh Tuấn, 8A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, Đào Lê Trung, 9E, Tô Hồng Sơn, 8E, THCS Đặng Thai Mai, Vinh ; **Thừa Thiên - Huế :** Phan Lê Anh Minh, 9/1, THCS Nguyễn Tri Phương, Huế.

VIỆT HẢI

Bài T2/306. Chứng minh rằng

$$(a+b-c-1)(b+c-a-1)(c+a-b-1) \leq 8$$

trong đó a, b, c là các số thực dương thỏa mãn

$$ab + bc + ca = abc$$

Lời giải. Từ giả thiết $ab + bc + ca = abc$ và $a, b, c > 0$ ta có abc lớn hơn mỗi tích ab, bc, ca và do đó có $a, b, c > 1$. Đặt

$$2x^3 = b + c - a - 1$$

$$2y^3 = c + a - b - 1$$

$$2z^3 = a + b - c - 1$$

Ta khẳng định rằng $xyz \leq 1$. Thật vậy, giả sử $xyz > 1$ thì do $a, b, c > 1$ nên tổng hai trong ba số x^3, y^3, z^3 là dương và suy ra có tối đa một số trong x, y, z là âm. Do $xyz > 1$ nên cả ba số x, y, z đều là dương. Từ đó

$$y^3 + z^3 = (y+z)[(yz + (y-z)^2)] \geq yz(y+z)$$

$$\Rightarrow x(y^3 + z^3 + 1) \geq xyz(y+z) + x > x + y + z$$

$$\Rightarrow \frac{x}{x+y+z} > \frac{1}{y^3 + z^3 + 1} = \frac{1}{a}$$

$$\text{Tương tự ta có } \frac{y}{x+y+z} > \frac{1}{b} ; \frac{z}{x+y+z} > \frac{1}{c}$$

Cộng theo từng vế 3 bất đẳng thức trên ta có
 $1 > \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \Rightarrow abc > ab + bc + ca$ mâu thuẫn với giả thiết đầu bài cho.

Tóm lại ta có $xyz \leq 1$. Theo cách đặt x, y, z ta có

$$(a+b-c-1)(b+c-a-1)(c+a-b-1) = 8x^3y^3z^3 \leq 8$$

Nhận xét. Trong số những bài giải gửi tới tòa soạn có một số lời giải không đúng hoặc thiếu chặt chẽ, chủ yếu do sử dụng sai chiều bất đẳng thức hoặc bất đẳng thức Côsi cho các số chưa chắc là số dương hoặc trừ theo từng vế các bất đẳng thức cùng chiều. Các bạn có lời giải tương đối tốt là Dương Bảo Nhân, lớp 9, THCS Đại Hòa, Quảng Trị, Nguyễn Xuân Trường, 9A, THCS Giấy Phong Châu, Phù Ninh, Phú Thọ.

VŨ ĐÌNH HÒA

Bài T3/306. Giải phương trình :

$$\left(\frac{8x^3 + 2001}{2002} \right)^3 = 4004x - 2001 \quad (1)$$

Lời giải. Đặt $t = 2x$ và $b = 2001$ thì

$$PT (1) \Leftrightarrow \left(\frac{t^3 + b}{b+1} \right)^3 = (b+1)t - b \quad (2)$$

Đặt $y = \frac{t^3 + b}{b+1}$ từ PT (2) dẫn đến giải hệ PT

$$\text{hai ẩn : } \begin{cases} y^3 - (b+1)t + b = 0 & (3) \\ t^3 - (b+1)y + b = 0 & (4) \end{cases}$$

Trừ theo từng vế (3) và (4) được

$$y^3 - t^3 + (b+1)(y-t) = 0$$

$$\Leftrightarrow (y-t)(y^2 + yt + t^2 + b+1) = 0 \quad (5)$$

$$\text{Ta có } y^2 + yt + t^2 + b+1$$

$$= \left(y + \frac{t}{2} \right)^2 + \frac{3t^2}{4} + b+1 > 0 \text{ vì}$$

$$b+1 = 2002 > 0 \text{ nên từ (5) suy ra } y = t.$$

$$\text{Thay vào (3) được } t^3 - t - bt + b = 0$$

$$\Leftrightarrow (t-1)(t^2 + t - b) = 0$$

Giải PT này được 3 nghiệm :

$$t_1 = 1, \quad t_2 = \frac{-1 + \sqrt{1+4b}}{2}, \quad t_3 = \frac{-1 - \sqrt{1+4b}}{2}$$

$\Rightarrow$ PT (1) có 3 nghiệm :

$$x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{-1 + \sqrt{8005}}{4}, \quad x_3 = \frac{-1 - \sqrt{8005}}{4}.$$

Nhận xét. 1) Đa số các bạn gửi bài giải đều đúng. Cách giải bài toán tổng quát được trình bày trong bài "Phương pháp đặt ẩn phụ để giải phương trình có 2 phép toán ngược nhau" của tác giả Phạm Quốc Phong trên THPT số 303 (9/2002).

2) Các bạn sau đã giải đúng và có nhận xét tổng quát hóa bài toán :

Phú Thọ : Trần Duy Thành, Nguyễn Quang Huy, 9G, THCS Văn Lang, Việt Trì ; **Hoàng Duy Đồng,** 8A, THCS Sông Thao, Trần Hữu Hưởng, 7A, THCS Cấp Dẫn, Cẩm Khê, Nguyễn Trung Kiên A, Nguyễn Xuân Trường, 9A, Ngô Vĩnh Thái, Lê Bá Long, 9A1, THCS Giấy Phong Châu, Phù Ninh ; **Vĩnh Phúc :** Vũ Hồng Toàn, Lê Trường Sơn, 9C, THCS Vĩnh Tường, Đỗ Đình Khanh, 8A, THCS Yên Lạc ; **Hà Tây :** Đặng Quốc Hiến, 9B, THCS Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hòa ; **Hà Nội :** Vũ Nhật Minh, 9H, THCS Lê Quý Đôn, Cầu Giấy ; **Hưng Yên :** Nguyễn Minh Tuệ, 9A2, THCS Chu Mạnh Trinh, Văn Giang ; **Hải Phòng :** Nguyễn Thị Thu Hiền, 9A1, THCS Lương Khánh Thiện, Kiến An ; **Đặng Ngọc Chiến,** 9B, THPT NK Trần Phú ; **Thanh Hóa :** Trịnh Thành Kiên, 9A1, THCS Trần Mai Ninh, Tp. Thanh Hóa ; **Hà Tĩnh :** Vương Quang Hùng, 9I, Nguyễn Thế Thạch, 9/1, THCS Lê Văn Thiêm, Tx. Hà Tĩnh ; **Tp. Hồ Chí Minh :** Trần Hải Đăng, 8A9, THCS Trần Đại Nghĩa, Nguyễn Kiến Long, 9/1, THCS Hồng Bàng, Q. 5.

HOÀNG NGUYỄN

Bài T4/306. Cho tam giác ABC có góc C tù và $\widehat{A} = 2\widehat{B}$. Đường thẳng qua B vuông góc với BC cắt đường thẳng AC tại D. Gọi M là trung điểm của AB. Chứng minh rằng $\widehat{AMC} = \widehat{BMD}$.

Lời giải. Từ C kẻ đường thẳng song song với

AB cắt DM ở I

cắt DB ở J. Ta

có $\frac{CI}{AM} = \frac{IJ}{MB}$

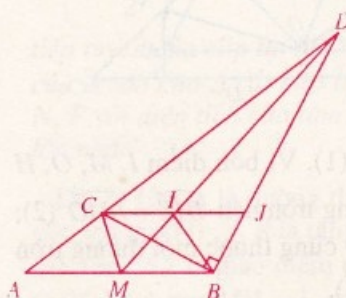
$\left(= \frac{ID}{DM} \right)$. Mà

AM = MB nên

CI = IJ. Mặt

khác $\triangle CBJ$

vuông ở B nên



IB = CI hay $\widehat{ICB} = \widehat{IBC}$. Cùng với nhận xét

$\widehat{ICB} = \widehat{CBA}$ ta có $\widehat{IBC} = \widehat{CBA}$. Do đó

$\widehat{IBA} = \widehat{CAB}$. Chứng tỏ ACIB là hình thang cân.

Từ đó AC = BI. Do đó $\triangle CMA = \triangle IMB$ (cgc).

Suy ra $\widehat{AMC} = \widehat{BMD}$.

Nhận xét. 1) Đa số các bạn dùng định lý Mè-nê-la-uyt, Xê-va.

2) Một số bạn dựa vào nhận xét CB và DB là 2 phân giác của góc IBA cũng có cách giải gọn.

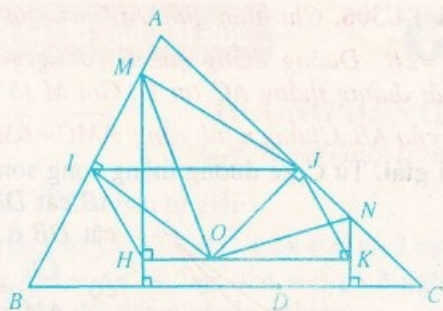
3. Các bạn có lời giải đúng và gọn :

Phú Thọ : Nguyễn Xuân Trường, 9A, THCS Giấy, Phong Châu ; **Vĩnh Phúc :** Nguyễn Kim Thuật, 8A, THCS Yên Lạc, Trần Tấn Phong, 7A, THCS Lập Thạch ; **Hải Dương :** Hoàng Đình Phương, 8³ Lê Quý Đôn ; **Hải Phòng :** Vũ Ngọc Linh, 9A, THPT NK Trần Phú ; **Nam Định :** Nguyễn Đức Dũng, 9A6, THCS Trần Đăng Ninh ; **Thanh Hóa :** Bùi Khắc Kiên, 9A, THCS Nhữ Bá Sĩ, Hoàng Hóa ; **Nghe An :** Nguyễn Thanh Tú, 8C, THCS Lí Nhật Quang, Đô Lương.

VŨ KIM THÙY

Bài T5/306. Cho tam giác ABC. Lấy điểm D trên cạnh BC (D khác B, C). Đường trung trực của DB, DC theo thứ tự cắt các đường thẳng AB, AC tại M, N. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp $\triangle AMN$ luôn đi qua một điểm cố định khác A khi điểm D di động trên đoạn BC.

Lời giải. Gọi I, J, O lần lượt là trung điểm của AB, AC và tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$. Qua O kẻ đường thẳng song song với BC cắt các đường trung trực của DB, DC tương ứng tại H, K. Nếu các đường trung trực của DB, DC cắt các cạnh AB và AC thì từ cách dựng trên ta thấy tứ giác IJKH là hình bình hành, suy ra



$\widehat{IHK} + \widehat{JKH} = 180^\circ$ (1). Vì bốn điểm I, M, O, H cùng thuộc một đường tròn nên $\widehat{IHK} = \widehat{AMO}$ (2); bốn điểm J, N, K, O cùng thuộc một đường tròn nên $\widehat{JKH} = \widehat{ANO}$ (3).

Từ (1), (2), (3) suy ra $\widehat{AMO} + \widehat{ANO} = 180^\circ$ hay tứ giác $AMON$ nội tiếp. Chứng tỏ đường tròn ngoại tiếp $\triangle AMN$ luôn đi qua tâm O (cố định) của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ (đpcm).

Chúng minh tương tự như trên chúng ta thấy kết quả vẫn đúng trong các trường hợp các đường trung trực của DB, DC cắt đường thẳng AB, AC .

Nhận xét. 1) Từ bài toán trên bạn Nguyễn Trung Kiên A, 9A, THCS Giấy Phong Châu, Phú Thọ đã nhận xét và chứng minh thêm tính chất sau: Nếu gọi D_1 là điểm đối xứng với D qua MN thì D_1 nằm trên đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.

2) Các bạn có lời giải đúng: **Phú Thọ:** Ngô Vĩnh Thái, Nguyễn Xuân Trường, 9A, THCS Giấy Phong Châu, Phù Ninh; **Hà Nội:** Đỗ Xuân Huy, Nguyễn Trung Kiên, Vũ Nhật Minh, Nguyễn Hoàng Việt, 9H, THCS Lê Quý Đôn, Cầu Giấy; **Hải Dương:** Nguyễn Duy Mạnh, 9/3, THCS Lê Quý Đôn, Tp. Hải Dương; **Nam Định:** Đinh Xuân Tuyên, 9A2, THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên; **Thanh Hóa:** Bùi Khắc Kiên, Lê Mạnh Thành, 9A, THCS Nhữ Bá Sĩ, Hoàng Hóa; **Nghệ An:** Đậu Thế Linh, 9A, THCS Cao Xuân Huy, Diễn Châu; **Quảng Nam:** Phan Hồ Anh Thư, 9/6, THCS Lê Quý Đôn, Thăng Bình; **Lâm Đồng:** Lê Tiến Hoàng, 9D, THCS TT Madagui-DaHoai; **Đồng Tháp:** Lê Quốc Trung, 9A2, THPT Tx. Cao Lãnh.

HỒ QUANG VINH

Bài T6/306. Giả sử hàm số $f: N^* \rightarrow N^*$ thỏa mãn điều kiện

$$f(m.f(n)) = n^2.f(m) \text{ với mọi } m, n \text{ thuộc } N^*.$$

a) Chứng minh rằng $f(2003)$ hoặc là số nguyên tố hoặc là bình phương của một số nguyên tố.

b) Hãy xây dựng một hàm f thỏa mãn điều kiện trên.

Lời giải. (Vũ Quang Thanh, 11A Toán, ĐHKHTN – ĐHQG Hà Nội và nhiều bạn khác)

Trước hết ta chứng minh f là đơn ánh. Thật vậy, từ $f(n_1) = f(n_2)$ với $n_1, n_2 \in N^*$ suy ra $f(mf(n_1)) = f(mf(n_2)) \Leftrightarrow n_1^2 f(m) = n_2^2 f(m) (\forall m) \Leftrightarrow n_1^2 = n_2^2 \Leftrightarrow n_1 = n_2$

Với $n = 1$ thì $f(mf(1)) = f(m) \Rightarrow mf(1) = m \Rightarrow f(1) = 1$

Với $m = 1$ thì $f(f(n)) = n^2 f(1) = n^2$

Từ đó suy ra $f(f(m).f(n)) = n^2 f(f(m)) = n^2 m^2 = f(f(m.n))$

Suy ra $f(m.n) = f(m).f(n)$ (*)

a) Giả sử $f(2003)$ không phải là 1 số nguyên tố và không là bình phương của một số nguyên tố thì tồn tại $a, b \in N^*$ để

$f(2003) = ab$ ($a, b > 1, a \neq b$). Khi đó theo (*) thì $f(f(2003)) = f(ab) = f(a)f(b) = (2003)^2$

Do $f(a) > 1, f(b) > 1$ nên $f(a) = f(b) = 2003 \Rightarrow a = b$. Vô lí.

b) Đặt $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \dots, p_k$ là số nguyên tố thứ k . Ta xây dựng hàm f như sau:

$f(p_{2i+1}) = p_{2i+2}, f(p_{2i+2}) = p_{2i+1}^2, i = 0, 1, 2, \dots$ Khi đó $f(f(p_{2i+1})) = p_{2i+1}^2, f(f(p_{2i+2})) = p_{2i+2}^2$ và $f(ab) = f(a)f(b)$. Với mỗi $m \in N^*$ ta có: $m = p_{i_1}^{\alpha_1} \dots p_{i_k}^{\alpha_k}$ suy ra $f(f(m)) = m^2$ và hàm số này thỏa mãn đề bài.

Nhận xét. Các bạn sau đây có lời giải tốt: Hoàng Trung Kiên, 12T1, THPT Lam Sơn, Thanh Hóa; Nguyễn Đình Minh, 12/21, Phan Châu Trinh, Đà Nẵng; Nguyễn Hoàng Thanh, 12A, PTCT-T, ĐHSP, Trần Anh Tuấn, 12A Toán, ĐHKHTN ĐHQG Hà Nội; Đỗ Hoàng Huy, 11T1, THPT Lương Văn Tụy, Ninh Bình; Hồ Sĩ Tùng Lâm, 11T2, ĐHKHTN Tp. Hồ Chí Minh; Nguyễn Võ Vĩnh Lộc, 12T, THPT Sa Đéc, Đồng Tháp; Bùi Thị Huyền Trang, 11A3, THPT Hồng Quang, Hải Dương; Lê Duy Cường, 11A1, THPT Yên Phong, Bắc Ninh; Hoàng Việt, 11A, THPT Lào Cai, Tp. Lào Cai; Lê Phương, 12T, THPT Lương Thế Vinh, Đồng Nai; Mạch Nguyệt Minh, 12A1, THPT Lý Tự Trọng, Tp. Cần Thơ; Đặng Tuấn Anh, 9A, THCS Hợp Tiến, Mỹ Đức, Hà Tây; Vũ Hữu Phong, 12T, THPT Hoàng Văn Thụ, Hòa Bình; Phạm Lê Thịnh, 12T, THPT Lê Khiết, Quảng Ngãi; Nguyễn Duy Hưng, 12A2, THPT ch. Vĩnh Phúc; Nguyễn Trung Kiên, Vũ Nhật Minh, 9H, THCS Lê Quý Đôn, Hà Nội; Phan Tuấn Anh, 9A, THCS Đức Giang, Bắc Giang.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T7/306. Chứng minh rằng phương trình sau có nghiệm thực duy nhất :

$$x^7 - 7x^6 + 35x^5 - x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 39x - 1 = 0$$

Lời giải. Đặt

$$f(x) = x^7 - 7x^6 + 35x^5 - x^4 - 5x^3 - 9x^2 + 39x - 1$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } f'(x) &= 7x^6 - 42x^5 + 175x^4 - 4x^3 - 15x^2 + 18x - 39 \\ &= 7(x^6 - 6x^5 + 9x^4) + 2(x^4 - 2x^3 + x^2) + 10x^4 + (100x^4 - 20x^2 + 1) + 3(x^2 - 6x + 9) + 11 \\ &= 7(x^3 - 3x^2)^2 + 2(x^2 - x)^2 + 10x^4 + (10x^2 - 1)^2 + 3(x - 3)^2 + 11 > 0 \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Bởi vậy $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ là hàm số đồng biến (thực sự).

$$\text{Mặt khác } f(0) = -1 < 0 < f(1) = 52$$

Từ hai nhận xét trên ta suy ra phương trình $f(x) = 0$ có duy nhất một nghiệm thực (nghiệm đó thuộc $(0, 1)$).

Nhận xét. Đây là bài toán thuộc "Ứng dụng của đạo hàm tính số nghiệm của phương trình". Tòa soạn nhận được lời giải của hơn 100 bạn học sinh, hầu hết các bạn giải đúng. Hoan nghênh các bạn học sinh lớp 9 và lớp 10 đã giải tốt bài toán này : **Bác Giang** : Phan Tuấn Anh, 9A, THCS Đức Giang ; **Hà Giang** : Hoàng Văn Tâm, THPT chuyên ; **Phú Thọ** : Nguyễn Xuân Trường, 9A, THCS Giấy, Phong Châu, **Trần Hữu Hiếu**, THPT chuyên Hùng Vương ; **Vinh Phúc** : Hà Đình Thiệu, Nguyễn Huy Tùng, 10A1, THPT chuyên ; **Hải Dương** : Lê Đình Huy, Nguyễn Thị Mai, 10T, THPT Nguyễn Trãi ; **Nam Định** : Trần Thị Thu, 10A, THPT Nguyễn Huệ ; **Thanh Hóa** : Nguyễn Trọng Hòa, 10T, THPT Lam Sơn ; **Đà Nẵng** : Thái Thanh Hải, 10A1, THPT Lê Quý Đôn.

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T8/306. Cho m là số nguyên lớn hơn 4. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $ab^{m-1} + a^{m-1}b$, trong đó a, b là các số thỏa mãn các điều kiện $a+b=1$ và $0 \leq a, b \leq \frac{m-2}{m}$.

Lời giải. (của bạn Nguyễn Hoàng Duy, 11T, THPT Lê Quý Đôn, Khánh Hòa)

$$\begin{aligned} \text{Ta có } T &= ab^{m-1} + a^{m-1}b = a(1-a)^{m-1} + a^{m-1}(1-a) = a^{m-1} - a^m + (1-a)^{m-1} - (1-a)^m \\ \text{với } \frac{2}{m} \leq a \leq \frac{m-2}{m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Xét hàm số } f(x) &= x^{m-1} - x^m + (1-x)^{m-1} - (1-x)^m \\ \text{trên } \left[\frac{2}{m}, \frac{m-2}{m} \right]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có : } f'(x) &= (m-1)x^{m-2} - mx^{m-1} - \\ &- (m-1)(1-x)^{m-2} + m(1-x)^{m-1} \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= m(m-1)x^{m-3} \left[\frac{m-2}{m} - x \right] + \\ &+ m(m-1)(1-x)^{m-3} \left[x - \frac{2}{m} \right] \end{aligned}$$

Vì $x \in \left[\frac{2}{m}, \frac{m-2}{m} \right]$ nên $f''(x) \geq 0$ do đó $f'(x)$ đồng biến.

$$\begin{aligned} \text{Với } \frac{1}{2} < x \leq \frac{m-2}{m} \Rightarrow f'(x) > f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \\ \Rightarrow f(x) \text{ đồng biến trên } \left[\frac{1}{2}, \frac{m-2}{m} \right]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Với } \frac{2}{m} < x < \frac{1}{2} \Rightarrow f'(x) < f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow f(x) \\ \text{nghịch biến trên } \left[\frac{2}{m}, \frac{1}{2} \right]. \end{aligned}$$

$$\text{Do đó } f_{\min} = f\left(\frac{1}{2}\right) = 2^{1-m}$$

$$\begin{aligned} f_{\max} &= \max \left\{ f\left(\frac{2}{m}\right), f\left(\frac{m-2}{m}\right) \right\} \\ &= \left(\frac{m-2}{m}\right)\left(\frac{2}{m}\right)^{m-1} + \left(\frac{2}{m}\right)\left(\frac{m-2}{m}\right)^{m-1} \end{aligned}$$

Nhận xét. Bài toán này được nhiều bạn tham gia giải. Các bạn sau đây có lời giải tốt : Nguyễn Ngọc Tú, 11 Toán, **Quảng Bình**, Phạm Văn Hoàng, 11A1, THPT ch. **Vinh Phúc** ; **Thái Thanh Hải**, 10A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Đà Nẵng**, **Hồ Sĩ Tùng Lâm**, PTNK ĐHQG Tp. Hồ Chí Minh, **Lê Phương**, 12 THPT Lương Thế Vinh, **Đồng Nai**, **Đinh Hà Châu**, 11 Toán, THPT Nguyễn Trãi, **Hải Dương** ; **Nguyễn Võ Vinh Lộc**, 12T, THPT Sa Đéc, **Đồng Tháp**, **Nguyễn Lâm Hưng**, PTNK ĐHQG Tp. Hồ Chí Minh ; **Vũ Hữu Phương**, 12C Toán, THPT Hoàng Văn Thụ, **Hòa Bình** ; **Lê Việt Hà**, 11A1, THPT chuyên Hùng Vương, **Phú Thọ** ; **Nguyễn Hữu Quý**, 11 Toán, chuyên Lê Quý Đôn, **Quảng Trị**.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T9/306. Cho tứ giác lồi ABCD với các cạnh $AB = a, BC = b, CD = c, DA = d$. Gọi S là diện tích của ABCD. Chứng minh rằng với $n \geq 1$ thì $4S^n \leq a^{2n} + b^{2n} + c^{2n} + d^{2n} - \left[\left(\frac{a-b}{2}\right)^{2n} + \left(\frac{b-c}{2}\right)^{2n} + \left(\frac{c-d}{2}\right)^{2n} + \left(\frac{d-a}{2}\right)^{2n} \right] (*)$

Lời giải. (dựa theo Nguyễn Ngọc Phương, 11 Toán 1, THPT chuyên Nguyễn Huệ, Hà Tây)

a) Trước hết, các bạn tự chứng minh hai BĐT quen thuộc sau.

BĐT 1. Với $x > y \geq 0$ và số tự nhiên $n \geq 1$ thì:
 $(x+y)^n \geq x^n + y^n$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ n=1 \end{cases}$ (1)

BĐT 2. Với $x > 0, y > 0$ và số tự nhiên $n \geq 1$ thì:
 $\frac{x^n + y^n}{2} \geq \left(\frac{x+y}{2}\right)^n$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ n=1 \end{cases}$ (2)

b) Bây giờ, bằng cách đặt:

$$\begin{cases} \mathcal{A} = a^{2n} + b^{2n} + c^{2n} + d^{2n} \\ \mathcal{B} = (ab)^n + (bc)^n + (cd)^n + (da)^n \\ \mathcal{C} = \left(\frac{a-b}{2}\right)^{2n} + \left(\frac{b-c}{2}\right)^{2n} + \left(\frac{c-d}{2}\right)^{2n} + \left(\frac{d-a}{2}\right)^{2n} \end{cases}$$

ta chứng minh rằng: $\mathcal{A} \geq \mathcal{B} + \mathcal{C}$ (3)

Thật vậy, áp dụng BĐT (2) và BĐT (1), ta được:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(a^{2n} + b^{2n}) &\geq \left(\frac{a^2 + b^2}{2}\right)^n = \left[\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2\right]^n \geq \\ &\geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^{2n} + \left(\frac{a-b}{2}\right)^{2n} \geq (ab)^n + \left(\frac{a-b}{2}\right)^{2n} \end{aligned}$$

Chứng minh tương tự, ta có 3 BĐT nữa:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(b^{2n} + c^{2n}) &\geq (bc)^n + \left(\frac{b-c}{2}\right)^{2n}; \\ \frac{1}{2}(c^{2n} + d^{2n}) &\geq (cd)^n + \left(\frac{c-d}{2}\right)^{2n}; \\ \text{và} \quad \frac{1}{2}(d^{2n} + a^{2n}) &\geq (da)^n + \left(\frac{d-a}{2}\right)^{2n}. \end{aligned}$$

Cộng theo từng vế 4 BĐT trên ta thu được BĐT (3) cần tìm.

c) Mặt khác, ta lại có:

$$\begin{aligned} 2S &= s(ABC) + s(ADC) + s(BCD) + s(BAD) = \\ &= \frac{1}{2}(ab \sin B + cd \sin D + bc \sin C + da \sin A) \\ \Rightarrow S &\leq \frac{1}{4}(ab + bc + cd + da) \end{aligned} \quad (4)$$

Đẳng thức đạt được $\Leftrightarrow \sin A = \sin B = \sin C = \sin D = 1 \Leftrightarrow ABCD$ là một hình chữ nhật.

Áp dụng BĐT (2) nhiều lần được:

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{B}}{2} &= \frac{1}{2}[(ab)^n + (bc)^n + (cd)^n + (da)^n] \geq \\ &\geq \left(\frac{ab+bc}{2}\right)^n + \left(\frac{cd+da}{2}\right)^n \quad \text{và} \quad \frac{\mathcal{B}}{4} \geq \left(\frac{ab+bc+cd+da}{4}\right)^n \end{aligned} \quad (5)$$

d) Cuối cùng, từ các BĐT (3) (4) (5) ta thu được BĐT (*) cần tìm. Đẳng thức xảy ra ở (*) khi và chỉ khi $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D}$ và $a = b = c = d$, nghĩa là $ABCD$ là một hình vuông.

Nhận xét. 1) Bạn Nguyễn Đình Minh, lớp 12/21, THPT Phan Chu Trinh, quận Hải Châu, Tp. Đà Nẵng đã chứng minh được BĐT (**) sau đây, còn mạnh hơn BĐT (*) nêu trong đề bài:

$$4S^n \leq a^{2n} + b^{2n} + c^{2n} + d^{2n} - \frac{1}{2}[(a^n - b^n)^2 + (b^n - c^n)^2 + (c^n - d^n)^2 + (d^n - a^n)^2] \quad (**)$$

Trình tự lời giải của bạn Minh tóm tắt như sau:

- Trước hết, bằng phương pháp quy nạp thiết lập BĐT (2) nêu trong lời giải trên, sau đó lập BĐT: với $x \geq y \geq 0$ thì $(x-y)^{2n} \leq (x^n - y^n)^2$ (6)

- Chứng minh BĐT (4) như trong lời giải ở trên, sau đó sử dụng BĐT (2) thiết lập được BĐT sau:

$$S^n \leq \left(\frac{ab+bc+cd+da}{4}\right)^n \leq \frac{1}{4}[(ab)^n + (bc)^n + (cd)^n + (da)^n]$$

và từ đó suy ra BĐT (**), bởi vì: $(ab)^n + (bc)^n + (cd)^n + (da)^n$ thực ra là vế phải của (**).

- Sau cùng, sử dụng (6) suy ra $\sum (a^n - b^n)^2 \geq \sum (a-b)^{2n}$, v.v... với nhận xét là $\sum \frac{(a-b)^{2n}}{2} \geq \sum \left(\frac{a-b}{2}\right)^{2n}$ và do đó thu được: $-\frac{1}{2} \sum (a^n - b^n)^2 \leq -\sum \left(\frac{a-b}{2}\right)^{2n}$. Như vậy, ta được BĐT (**) mạnh hơn BĐT (*) cần tìm.

2) Hầu hết các bạn đều sử dụng hoặc chứng minh hai BĐT (1), (2) như trên; Rất ít bạn đưa ra được cách chứng minh sử dụng kiến thức cơ bản ngắn gọn như trong lời giải đã chỉ ra mà thường sử dụng công thức khai triển nhị thức Niu-ton, hoặc thậm chí cả đến BĐT Bec-nu-li hay BĐT Jen-sen nữa.

Nhiều bạn còn thiết lập hoặc sử dụng công thức diện tích tứ giác lồi $S \leq \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$ trong đó $2p = a + b + c + d$ là chu vi tứ giác mới đi đến BĐT (*) cần chứng minh. Cách này không gọn.

3). Ngoài hai bạn kể trên, các bạn sau đây có lời giải cũng tương đối gọn:

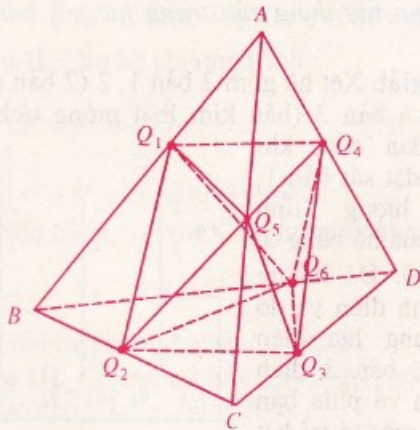
Hà Nội: Nguyễn Hoàng Thanh, 12A1, PTCT-T, ĐHSPT Hà Nội; **Vĩnh Phúc:** Phạm Văn Hoàng, THPT ch. Vĩnh Phúc; **Phú Thọ:** Trần Hữu Hiếu, 10 Toán, THPT ch. Hùng Vương, Việt Trì; **Thanh Hóa:** Nguyễn Ngọc Tú, 10 Toán, THPT Lam Sơn; **Đà Nẵng:** Thái Thanh Hải, 10A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Khánh Hòa:** Nguyễn Hoàng Nguyễn, 12 toán, THPT Lê Quý Đôn, Nha Trang; **Cần Thơ:** Võ Hoàng Hưng, 10A1, THPT Lý Tự Trọng, Cần Thơ.

NGUYỄN ĐĂNG PHÁT

Bài T10/306. Trên các cạnh AB, BC, CD, DA, AC, BD của tứ diện $ABCD$ lấy các điểm Q_1, Q_2 ,

Q_3, Q_4, Q_5, Q_6 theo thứ tự (các điểm này không trùng với đỉnh của tứ diện). Tìm giá trị lớn nhất của tỉ số $\frac{V_1 V_2 V_3 V_4}{V^4}$, trong đó V_1, V_2, V_3, V_4, V lần lượt là thể tích của các tứ diện $AQ_1Q_4Q_5, BQ_1Q_2Q_6, CQ_2Q_3Q_5, DQ_3Q_4Q_6, ABCD$.

Lời giải. (của bạn Nguyễn Trọng Hòa, 10T, THPT Lam Sơn, Thanh Hóa)



Bổ đề. Cho tứ diện $OABC$. Các điểm A', B', C' theo thứ tự thuộc các cạnh OA, OB, OC của tứ diện. Khi đó, ta có :

$$\frac{V_{(OABC)}}{V_{(OA'B'C')}} = \frac{OA \cdot OB \cdot OC}{OA' \cdot OB' \cdot OC'}$$

Việc chứng minh bổ đề trên rất đơn giản, xin dành cho bạn đọc.

Trở lại bài toán của ta. Theo bổ đề trên, ta có :

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{aligned} \frac{V_1}{V} &= \frac{AQ_1 \cdot AQ_4 \cdot AQ_5}{AB \cdot AD \cdot AC} \\ \frac{V_2}{V} &= \frac{BQ_1 \cdot BQ_2 \cdot BQ_6}{BA \cdot BC \cdot BD} \\ \frac{V_3}{V} &= \frac{CQ_2 \cdot CQ_3 \cdot CQ_5}{CB \cdot CD \cdot CA} \\ \frac{V_4}{V} &= \frac{DQ_3 \cdot DQ_4 \cdot DQ_6}{DC \cdot DA \cdot DB} \end{aligned} \right. \\ \Rightarrow \frac{V_1 \cdot V_2 \cdot V_3 \cdot V_4}{V^4} &= \frac{AQ_1 \cdot BQ_1}{AB^2} \times \frac{BQ_2 \cdot CQ_2}{BC^2} \times \frac{CQ_3 \cdot DQ_3}{CD^2} \\ &\times \frac{DQ_4 \cdot AQ_4}{DA^2} \times \frac{AQ_5 \cdot CQ_5}{AC^2} \times \frac{BQ_6 \cdot DQ_6}{BD^2} \\ &\leq \frac{1}{4} \frac{(AQ_1 + BQ_1)^2}{AB^2} \times \frac{1}{4} \frac{(BQ_2 + CQ_2)^2}{BC^2} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\times \frac{1}{4} \frac{(CQ_3 + DQ_3)^2}{CD^2} \times \frac{1}{4} \frac{(DQ_4 + AQ_4)^2}{DA^2} \times \\ &\frac{1}{4} \frac{(AQ_5 + CQ_5)^2}{AC^2} \times \frac{1}{4} \frac{(BQ_6 + DQ_6)^2}{BD^2} = \left(\frac{1}{4}\right)^6 = \frac{1}{2^{12}} \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6$ theo thứ tự là trung điểm các đoạn AB, BC, CD, DA, AC, BD .

Vậy giá trị lớn nhất của tỉ số $\frac{V_1 V_2 V_3 V_4}{V^4}$ bằng $\frac{1}{2^{12}}$.

Nhận xét. 1) Đây là bài toán dễ, rất nhiều bạn tham gia giải và đều giải đúng.

2) Nhiều bạn nhận xét rằng bài toán này là sự tương tự trong không gian của một bài toán quen thuộc trong tam giác.

3) Các bạn sau đây có lời giải tốt : **Bắc Ninh** : Vũ Văn Tú, Trương Đình Trường, 11T, THPT NK Hàn Thuyên ; **Nghệ An** : Trần Hà Phương, 10C5, Hoàng Anh Hào, 11A6, THPT chuyên Phan Bội Châu ; **Đồng Nai** : Lê Phương, 12T, THPT ch. Lương Thế Vinh ; **Lâm Đồng** : Nguyễn Trường Kha, 12T, THPT Thăng Long, Đà Lạt ; **Khánh Hòa** : Nguyễn Hoàng Nguyên, 12T, THPT Lê Quý Đôn, Nha Trang ; **Phú Yên** : Nguyễn Tiến Hoàng Vũ, 11T1, Lê Minh Thiện, 11T2, THPT Lương Văn Chánh ; **Đồng Tháp** : Nguyễn Võ Vĩnh Lộc, 12T, THPT Sa Đéc ; **Hòa Bình** : Quách Thanh Sơn, 12A5, THPT Lạc Sơn, Ngô Nhất Sơn, 10T, THPT Hoàng Văn Thu ; **Hà Tây** : Nguyễn Thị Luyến, 12A1, THPT Đồng Quan, Phú Xuyên ; **Tây Ninh** : Phạm Hữu Vàng, THPT Hoàng Lê Kha ; **Ninh Bình** : Trịnh Thùy Nhung, 12T, THPT Lương Văn Tụy.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài L1/306. Từ điểm O trên bờ một con sông rộng $l = OA = 0,5\text{km}$, một người muốn đi tới điểm A đối diện ở bên kia sông bằng cách đi thuyền từ O đến B , rồi đi bộ từ B đến A (hình vẽ). Vận tốc của thuyền đối với nước là $v_1 = 3\text{km/h}$; vận tốc chảy của nước đối với bờ sông là $v_2 = 2\text{km/h}$; vận tốc đi bộ của anh ta trên bờ là $v = 5\text{km/h}$.

Tìm độ dài BA để thời gian chuyển động là ngắn nhất và tính thời gian ngắn nhất đó.

Hướng dẫn giải. Giả sử $\vec{v}_1$ hợp với OA góc α , kí hiệu $\vec{v}_t$ là vận tốc của thuyền đối với bờ sông, ta có $\vec{v}_t = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ (xem hình). Thời gian

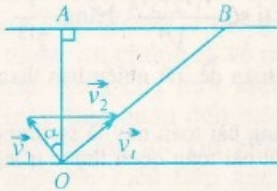
$$\text{qua sông là } t_1 = \frac{l}{v_1 \cos \alpha} \quad (1).$$

Thời gian đi bộ là $t_2 = \frac{AB}{v}$, với

$$AB = t_1(v_2 - v_1 \sin \alpha) = \frac{l(v_2 - v_1 \sin \alpha)}{v_1 \cos \alpha} \quad (2)$$

Toàn bộ thời gian chuyển động là :

$$t = t_1 + t_2 = \frac{l}{vv_1} \cdot \frac{(v + v_2 - v_1 \sin \alpha)}{\cos \alpha} = \frac{100}{3} \cdot \frac{(7 - 3 \sin \alpha)}{\cos \alpha} \quad (3)$$



Để tìm thời gian chuyển động ngắn nhất $t_{\min}$ ta đặt $\frac{dt}{d\alpha} = 0$ (hoặc áp dụng bất đẳng thức Bu-nhi-a-cô-p-xki),

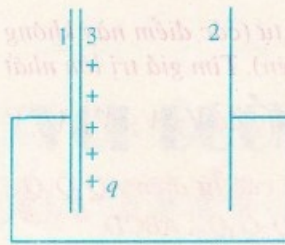
ta tìm được $t = t_{\min}$ khi $\sin \alpha = \frac{3}{7}$. Từ đó $t_{\min} = \frac{\sqrt{10}}{15} h \approx 12,6 \text{ph}$ và $AB_{\min} = \frac{125\sqrt{10}}{3} \approx 132 \text{m}$.

Nhận xét. Các em có lời giải gọn và đúng :

Nghệ An : Hồ Xuân Trường, 10G, THPT Nghĩa Đàn ;
Dăng Danh Tuấn, AIII, khóa 31, THPT Phan Bội Châu, Vinh ;
Bình Định : Lê Văn Thông, 12 Lí, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Quy Nhơn ;
Quảng Ngãi : Phạm Bá Tùng, 11 Lí, THPT chuyên Lê Khết ;
Thanh Hóa : Lê Minh Tú, 10F, THPT Lam Sơn ;
Đồng Nai : Lương Minh Nghĩa, 10 Lí 1, THPT chuyên Lương Thế Vinh, Biên Hòa ;
Hà Nội : Trịnh Thái Duy, 10 Lí, THPT Hà Nội - Amsterdam ;
Quảng Bình : Nguyễn Nhật Anh, 10 Lí, THPT chuyên Quảng Bình ;
Phú Yên : Ngô Anh Tuấn, 11 Lí, THPT chuyên Lương Văn Chánh, Tuy Hòa ;
Hòa Bình : Nguyễn Tuấn Anh, 12 Lí, THPT ch. Hoàng Văn Thụ ;
Tp. Hồ Chí Minh : Trần Vĩnh Sơn, 10 Lí, PTNK - ĐHQG Tp. HCM ;
Đà Nẵng : Trương Minh Tiến, 10A1, THPT ch. Lê Quý Đôn ;
Hà Tây : Đào Xuân Dũng, 11 Lí 1, THPT ch. Nguyễn Huệ ;
Nam Định : Ngô Tiến Đạt, 11B5, THPT A Hải Hậu ;
Tiền Giang : Trần Thị Mỹ Phương, 10 Lí, THPT chuyên Tiền Giang, Mỹ Tho ;
Bắc Ninh : Cao Xuân Bình, Chu Thanh Bình, 11 Lí, THPT NK Hàn Thuyên ;
Vĩnh Phúc : Nguyễn Thị Tuyết Nhung, Hoàng Thị Hồng Hạnh, 10A3, THPT ch. Vĩnh Phúc ;
Nguyễn Xuân Duy, 11A1, THPT Ngô Gia Tự, Lập Thạch ;
Phú Thọ : Nguyễn Ngọc Thạch, 10B, Vũ Đình Quang, 10 Lí, Nguyễn Bảo Trung, 11H1, Nguyễn Thị Thanh Mai, 11A5, THPT Thanh Ba ;
Yên Bái : Phan Thị Kim Hoa, 12A1, THPT ch. Nguyễn Tất Thành ;
Hà Tĩnh : Tôn Quốc Hoàng, 11 Lí, THPT ch. Hà Tĩnh.

MAI ANH

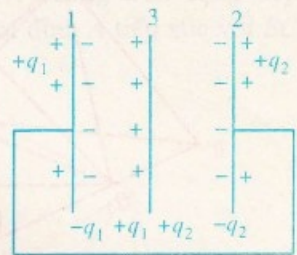
Bài L2/306. Một tụ điện phẳng chưa tích điện, điện môi là chân không, có điện dung C . Nối 2 bản tụ điện với nhau bằng một dây dẫn. Một bản kim loại mỏng, phẳng có kích thước bằng kích



thước của bản tụ điện và tích điện $+q$ được đặt sát một trong 2 bản tụ (hình vẽ). Tính công cần thiết của lực điện trường để tịnh tiến bản kim loại đó theo phương vuông góc với các bản tụ đến vị trí cách đều các bản tụ.

Bỏ qua tác dụng của trọng lực với bản kim loại.

Lời giải. Xét hệ gồm 2 bản 1, 2 (2 bản của tụ điện) và bản 3 (bản kim loại mỏng tích điện $+q$). Ban đầu, khi bản 3 đặt sát bản 1, năng lượng (tính điện) của hệ bằng 0: $W_0 = 0$. Do hưởng ứng tĩnh điện và do tác dụng lực điện trường, bản 3 dịch chuyển về phía bản 2. Tại một vị trí bất kỳ của bản 3, do bản



đầu tụ điện chưa tích điện, nên trên các mặt của các bản 1, 2, 3 có các điện tích như trên hình vẽ, trong đó theo định luật bảo toàn điện tích $q_1 + q_2 = q$. Như vậy bây giờ hệ gồm 2 tụ điện mắc song song. Khi bản 3 cách đều hai bản 1 và 2, dễ dàng thấy rằng điện dung của hai tụ điện đó

bằng $C_1 = C_2 = 2C$ và $q_1 = q_2 = \frac{q}{2}$. Khi đó năng

lượng của hệ bằng $W = \frac{(q/2)^2}{2 \cdot 2C} + \frac{(q/2)^2}{2 \cdot 2C} = \frac{q^2}{8C}$.

Từ đó tìm được công của lực điện trường :

$$A = W - W_0 = \frac{q^2}{8C}.$$

Chú ý. Cũng có thể giải bằng cách khác : Khi bản 3 dịch chuyển, tại vị trí bất kỳ tìm cường độ điện trường do bản 1 và 2 gây ra tại vị trí của bản 3, từ đó xác định lực điện trường và công của lực đó khi bản 3 dịch chuyển từ vị trí ban đầu đến vị trí cách đều hai bản 1 và 2.

Nhận xét. Các em có lập luận và đáp số đúng :

Quảng Ngãi : Nguyễn Thanh Lân, 11T2, THPT Lê Khết ;
Vĩnh Phúc : Nguyễn Hữu Phước, 10A10, THPT chuyên Vĩnh Phúc ;
Bắc Giang : Lê Nho Thủy, 12B, THPT NK Ngô Sĩ Liên ;
Bình Định : Lê Văn Thông, Đinh Thành Vinh, 12 Lí, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Quy Nhơn.

MAI ANH

DIỄN DÀN DẠY HỌC TOÁN

DẠY CHƯƠNG I PHẦN HÌNH HỌC TRONG TOÁN 7 NHƯ THẾ NÀO ?

PHẠM GIA ĐỨC
(Hà Nội)

Phần Hình học trong Sách giáo khoa Toán 7 mới gồm 2 chương. Chương I là *Đường thẳng vuông góc - Đường thẳng song song*, chương II là *Tam giác*. Bài viết này sẽ giới thiệu những điểm chủ yếu cần lưu ý khi dạy chương I.

Chương I Hình học là phần bổ sung trực tiếp kiến thức Hình học 6, vẫn nằm trong mạch những kiến thức mở đầu hình học phẳng. Nội dung chủ yếu của chương này là : khái niệm về hai đường thẳng vuông góc, hai đường thẳng song song, quan hệ giữa tính vuông góc và tính song song, tiên đề Ôclit về đường thẳng song song. Học sinh nhận thức kiến thức chương I chủ yếu bằng *phương pháp trực quan*. Qua các hoạt động gấp hình, vẽ hình, đo góc, quan sát... học sinh tiếp cận kiến thức rồi công nhận kiến thức đó.

Tuy nhiên *yêu cầu suy luận đã được đặt ra* đối với học sinh với dụng ý làm cho các em quen dần, để đến §7 các em hiểu được cấu trúc của một định lý và thế nào là chứng minh một định lý. Học sinh khá giỏi, qua sách bài tập, có thể *làm quen nhiều hơn với lập luận suy diễn*, với chứng minh bằng phản chứng.

Kiến thức của chương được *trình bày theo kiểu tiếp cận quy nạp*, chú trọng các hoạt động phát hiện kiến thức của học sinh thông qua thực hành vẽ hình, quan sát việc gấp giấy, ...

Ở chương này yêu cầu học sinh phải *vẽ thành thạo* hai đường thẳng vuông góc, hai đường thẳng song song bằng nhiều cách khác nhau, với dụng cụ khác nhau. Cần có quan niệm đúng về tính năng của êke. Êke ngoài tác dụng để vẽ góc 90° còn vẽ được góc 30° , 60° , 45° , được sử dụng như thước thẳng, thước có chia khoảng. Như thế, chỉ với êke, ta vẽ được hai đường thẳng vuông góc, hai đường thẳng song song.

Giáo viên cần lưu ý rèn luyện cho học sinh các *kỹ năng vẽ phác, ước lượng bằng mắt* xem hai đường thẳng cho trước có song song hay vuông góc không...

Trong chương này chưa sử dụng các thuật ngữ "định nghĩa", "định lý" làm tiêu đề. Nhiều định nghĩa được nêu dưới dạng không tường minh. Các định lý được nêu dưới dạng các nhận xét,

tính chất. Tuy nhiên vẫn *chú trọng đến các hoạt động ngôn ngữ trên các mệnh đề toán học* như phát biểu gây gọn bằng lời, phát biểu theo nhiều dạng khác nhau, làm quen với cách diễn đạt "nếu ... thì..." *Bước đầu sử dụng kí hiệu để viết gọn các mệnh đề toán học*, làm quen một cách không tường minh định lý thuận và định lý đảo. Đến cuối chương khi đưa ra định nghĩa về "định lý" học sinh có thể *hiểu được cấu trúc của định lý*. Bắt đầu từ chương II Hình học 7, thuật ngữ "định lý" được sử dụng. Các *kiến thức cơ bản* của chương I học sinh cần nắm được là : định nghĩa hai góc đối đỉnh, hai góc đối đỉnh thì bằng nhau, định nghĩa hai đường thẳng vuông góc, định nghĩa đường trung trực, định nghĩa hai đường thẳng song song, nhận biết (kiểm tra) hai đường thẳng song song, tiên đề Ôclit về song song, ba định lý về quan hệ giữa tính song song và vuông góc, cấu trúc của định lý (giả thiết, kết luận, chứng minh). *Các kỹ năng cần nắm vững là* : nhận biết hai góc đối đỉnh, vẽ hai đường thẳng vuông góc, vẽ đường trung trực của đoạn thẳng, nhận biết cặp góc so le trong, đồng vị, trong cùng phía, vẽ hai đường thẳng song song. Học sinh được *phát triển tư duy* thông qua tập suy luận.

Đón đọc THPT SỐ 311 (5/2003)

- Hướng dẫn giải đề thi vào lớp 10 trường Quốc học Huế 2002.
- Đề toán thi tuyển sinh vào lớp 10 trường THPT Lê Hồng Phong, Nam Định.
- Giúp bạn tự ôn thi : Đề ôn thi số 3 và lời giải đề ôn thi số 2.
- Giới thiệu SGK Toán 7.
- Số 1, số 0 và chiến tranh vùng Vịnh.
- Xác định đường dạng cung tròn khi xây dựng nút giao thông.

Mời các bạn đặt mua THPT tại các cơ sở Bưu điện.

THPT



Giải đáp :

VIẾT CÁC CON SỐ

• Các con số từ một đến chín được người Ai Cập, Mai-a, Hy Lạp, La Mã, Ả Rập, Trung Quốc viết như sau :

<i>Ai Cập</i>	I	II	III	IIII	V	VI	VII	VIII	IX
<i>Mai-a</i>	.	..	...		—	.	..	...	
<i>Hy Lạp</i>	A	B	Γ	Δ	E	F	Z	H	Θ
	α	β	γ	δ	ε	ζ	φ	η	θ
<i>La Mã</i>	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
<i>Ả Rập</i>	1	2	3	4	5	6	7	8	9
<i>Trung Quốc</i>	一	二	三	四	五	六	七	八	九

Trong hệ cơ số 2, các con số từ một đến chín được viết theo thứ tự là :

• 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, 1001.

• Con số 0 là sáng tạo của người Ả Rập. Một số tài liệu cho rằng số 0 do người Ấn Độ sáng tạo ra. Người ta cũng cho rằng các chữ số ngày nay đang dùng thịnh hành cũng xuất xứ từ Ấn Độ nhưng lại được người Ả Rập dùng nhiều sau đó và du nhập vào Châu Âu. Từ đó người ta quen gọi là *chữ số Ả Rập*.

• Các bạn được nhận tặng phẩm của Câu lạc bộ : *Phùng Hoài Phương* (đại diện lớp 10K, THPT Hùng Vương, Tx. Phú Thọ ; *Bùi Thị Bích Ngọc*, lớp 8A1, THCS Lâm Thao, **Phú Thọ** ; *Trần Quốc Hoàn*, 10T, THPT Nguyễn Trãi, **Hải Dương** ; *Tống Thị Mai Phương*, 10A1, THPT Lê Quý Đôn, **Thái Bình** ; *Đào Anh Trường*, 10A10, THPT Thái Phiên, **Hải Phòng** ; *Ngô Tiến Thành*, xóm 3, Phong Châu, Phú Châu, Ba Vì, **Hà Tây** ; *Bùi Nguyễn Quốc Thanh*, 9A1, THPT Sa Đéc, **Đồng Tháp**.

BÍNH NAM HÀ

CÁC ĐƠN VỊ ĐO THÔNG DỤNG

Bạn có biết tên gọi, định nghĩa và kí hiệu các đơn vị đo độ dài, góc phẳng, góc khối, diện tích, thể tích, thời gian, vận tốc, gia tốc, vận tốc góc, gia tốc góc ? Sẽ có 5 phần thưởng cho 5 bạn trả lời đúng và gửi về trước 31.5.2003 (tính theo dấu bưu điện).

VKT



Giải đáp bài MỘT CÁCH GIẢI HAY

Lời bạn B:

Rằng hay thì thật là hay.

Xem ra lời giải thấy ngay là ... nhầm !

Chỗ nhầm đó là : với ĐK $-1 \leq x \leq 3$ thì phép

biến đổi từ $\frac{x}{\sqrt{x+1}} = \frac{1}{\sqrt{3-x}}$ đến $x^3 - 3x^2 + x + 1$

= 0 không tương đương mà là phép biến đổi hệ quả ; do đó làm xuất hiện nghiệm ngoại lai :

$x = 1 - \sqrt{2}$ của PT ban đầu. Thực ra PT

$\frac{x}{\sqrt{x+1}} = \frac{1}{\sqrt{3-x}}$ có đk $0 < x < 3$ (*). Biến đổi

PT này được $x^3 - 3x^2 + x + 1 = 0$ ($0 < x < 3$). Giải PT trên được hai nghiệm thỏa mãn điều

kiện (*) là $x_1 = 1$, $x_2 = 1 + \sqrt{2}$. Vậy PT ban đầu có hai nghiệm $x_1 = 1$, $x_2 = 1 + \sqrt{2}$.

Nhận xét. Năm bạn sau có đáp án tốt hơn cả:

Vĩnh Phúc : *Phùng Thị Hoàng Nga*, 10A10, THPT ch. Vĩnh Phúc ; **Hà Tây** : *Vương Tuấn Anh*, 12T1, THPT Nguyễn Huệ, Tx. Hà Đông ; **Thanh Hóa** : *Nguyễn Tiến Liên*, 9A, THCS Yên Trường, Yên Định ; **Nghe An** : *Nguyễn Hoàng*, 10A, THPT Thanh Chương III, Thanh Chương ; **Quảng Bình** : *Hoàng Đoàn Phương Thảo*, 10T, THPT chuyên Quảng Bình.

NGỌC HIẾN

VỀ LỜI GIẢI CỦA MỘT BÀI TOÁN LUYỆN THI

Trong một cuốn sách luyện thi ĐH, CĐ (phần *Hình học giải tích*) có bài toán :

Trên mặt phẳng tọa độ cho đường tròn (C) có phương trình $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 3$.

➤ Từ điểm $A(3 - \sqrt{3}; -1)$ có thể kẻ được bao nhiêu tiếp tuyến tới (C) ?

Lời giải trong cuốn sách này tóm tắt như sau :
Phương trình đường thẳng (Δ) qua $A(3 - \sqrt{3}; -1)$ có hệ số góc m là $y = m(x - 3 + \sqrt{3}) - 1 \Leftrightarrow mx - y - (3 - \sqrt{3})m - 1 = 0$ (Δ) . Đường thẳng này là tiếp tuyến của (C) khi và chỉ khi khoảng cách từ tâm I của đường tròn (C) đến đường thẳng (Δ) bằng bán kính R của đường tròn đó (ở đây $I(3, 2), R = \sqrt{3}$) hay :

$$\frac{|m \cdot 3 - 2 - (3 - \sqrt{3})m - 1|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \sqrt{3}$$

Giải PT trên (ẩn m) ta tìm được $m = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Thay vào PT của (Δ) ta có PT tiếp tuyến cần tìm : $(\Delta) : x - \sqrt{3}y - 3 = 0$

Bạn có thể cho lời bình về lời giải bài toán trên không? Lời giải của bạn như thế nào?

TRẦN ĐĂNG QUÂN
(SV K47, Khoa Vật Lý,
ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội)

ĐỀ TỰ ÔN THI SỐ 2 (Tiếp trang 11)

1) Cho hai hình chóp $SABCD$ và $S'ABCD$ có chung đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh a . Hai đỉnh S và S' nằm về cùng một phía đối với mặt phẳng $(ABCD)$, có hình chiếu vuông góc lên đáy lần lượt là trung điểm H của AD và trung điểm K của BC . Tính thể tích phần chung của hai hình chóp, biết rằng $SH = S'K = h$.

2) Trên mặt phẳng tọa độ cho đường tròn (C) có phương trình : $x^2 + y^2 = 9$. Tìm m để trên đường thẳng $y = m$ có đúng 4 điểm sao cho từ mỗi điểm đó kẻ được đúng hai tiếp tuyến đến (C) và mỗi cặp tiếp tuyến đó tạo thành một góc 45° .

Câu V. (2 điểm)

1) Tính tích phân $I = \int_0^1 \left(\frac{1+x^4}{1+x^6} \right) dx$

2) Trong một buổi liên hoan có 6 cặp nam nữ, trong đó có 3 cặp là vợ chồng và cần chọn 3 người đứng ra tổ chức liên hoan. Hỏi có bao nhiêu cách chọn sao cho trong 3 người được chọn không có cặp vợ chồng nào?

TRẦN THANH VŨ
(Nghệ An)



Kết quả : MÃ SỐ BÍ MẬT

Gọi số bí mật cần tìm là :

$A = a_1 a_2 a_3 a_4 \dots a_{18} a_{19} a_{20}$ ($a_i \in N, i = 1, 2, \dots, 20, a_1 \neq 0, 0 \leq a_j \leq 9, j = 2, 3, \dots, 20$). Từ giả thiết bài toán suy ra :

$$1A9 = 99A \text{ hay } 100A - 1A9 = A.$$

Ta đặt phép tính :

$$\begin{array}{r} a_1 a_2 a_3 a_4 \dots a_{18} a_{19} a_{20} \quad 0 \quad 0 \\ - \quad 1 \quad a_1 a_2 a_3 \dots a_{17} a_{18} a_{19} a_{20} \quad 9 \\ \hline a_1 a_2 \dots a_{16} a_{17} a_{18} a_{19} a_{20} \end{array}$$

Từ phép tính trên suy ra : $a_{20} = 1 \Rightarrow a_{19} = 8, a_{18} = 2, \dots, a_1 = 1$. Vậy số cần tìm là :

$$A = 11235955056179775281$$

Nhận xét. Một số bạn cho đáp số $A = \frac{10^{21} + 9}{89}$.

Đáp số này là đúng, tuy nhiên do đặc thù của ngành truyền tin nên chúng ta phải ghi rõ các chữ số của số A . Rất nhiều bạn giải đúng bài toán này. TS đã phải bốc thăm cho 6 bạn may mắn hơn là : Phạm Quang Vũ, 6H1, THCS Trưng Vương, Hà Nội ; Trần Kim Thịnh, 7A5, THCS Chu Văn An, Tp. Thái Nguyên ; Nguyễn Thanh Sơn, 11A1, THPT Thanh Oai A, Hà Tây ; Trần Quốc Hoàn, 10T, THPT Nguyễn Trãi, Hải Dương ; Trần Quốc Trung, 11/1, THPT Sào Nam, Duy Xuyên, Quảng Nam ; Đinh Thành Vinh, 12 Lí, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Tp. Quy Nhơn, Bình Định.

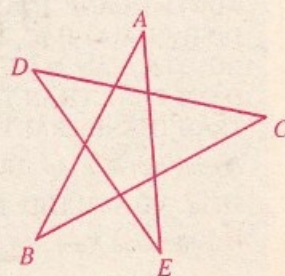
HỒNG QUANG

LÀM TOÁN VỚI NGÔI SAO 5 Cánh

Một đường gấp khúc kín $ABCDEA$ tạo thành một ngôi sao 5 cánh (không nhất thiết phải là đều) (Hình bên). Bạn hãy cho biết tổng các góc tại đỉnh A, B, C, D, E của ngôi sao đó nhé!

Tặng phẩm đang chờ 5 bạn có nhiều cách giải và gửi bài sớm về tòa soạn.

NGÔ HÂN
(Bắc Ninh)



Toán học và Tuổi trẻ

Mathematics and Youth

NĂM THỨ 40

Số 310 (4-2003)

Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội

ĐT - Fax : 04.5144272

Email : toanhocvt@yahoo.com

TRONG SỐ NÀY

- 1 **Dành cho Trung học cơ sở – For Lower Secondary Schools**
Phan Thanh Quang – Phương pháp lùi vô hạn.
- 3 **Lời giải đề toán thi tuyển sinh lớp 10 trường THPT chuyên Lê Hồng Phong, Tp. Hồ Chí Minh**
- 5 **Đề thi tuyển sinh môn toán lớp 10 trường Quốc học Thừa Thiên – Huế 2002**
Tiếng Anh qua các bài toán – English through Math Problems
- 6 **Tìm hiểu sâu thêm toán học sơ cấp – Advanced Elementary Mathematics**
Hồ Quang Vinh – Mặt cầu tiếp xúc với đường thẳng chứa các cạnh của khối tứ diện
- 8 **Hướng dẫn giải đề thi tuyển sinh đại học của Bộ Quốc phòng – khối D năm 2002**
- 10 **Chuẩn bị thi vào đại học – University Entrance Preparation. Giúp bạn tự ôn thi:**
 - Hướng dẫn giải đề tự ôn thi số 1.
 - Đề tự ôn thi số 2.
- 12 **Đề ra kì này - Problems in this Issue**
T1/310, ..., T12/310, L1, L2/310
- 14 **Giải bài kì trước - Solutions to Previous Problems**
Giải các bài của số 306
- 21 **Diễn đàn dạy học toán – Math Teaching Forum**
Phạm Gia Đức – Dạy chương I phần Hình học trong Toán 7 như thế nào ?
- 22 **Câu lạc bộ - Math Club**
Sai lầm ở đâu ? - Where's the Mistake ?
- 23 **Giải trí toán học – Math Recreation**

Bìa 2 : Liên hiệp các Hội KH-KT Việt Nam Hai mươi năm – một chặng đường.

Bìa 3 : Toán học muôn màu – Multifarious Mathematics . Chiếc quạt thần diệu

Bìa 4 : Trường THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm, tỉnh Vĩnh Long

Tổng biên tập :
NGUYỄN CẢNH TOÀN

Phó tổng biên tập :
NGÔ ĐẠT TỬ

Chịu trách nhiệm xuất bản :
Giám đốc NXB Giáo Dục :
NGÔ TRẦN ÁI
Tổng biên tập NXB Giáo Dục :
VŨ DƯƠNG THUY

Hội đồng biên tập :

NGUYỄN CẢNH TOÀN, NGÔ ĐẠT TỬ, LÊ KHẮC BẢO, NGUYỄN HUY ĐOAN, NGUYỄN VIỆT HẢI, ĐINH QUANG HẢO, NGUYỄN XUÂN HUY, PHAN HUY KHẢI, VŨ THANH KIỆT, LÊ HẢI KHÔI, NGUYỄN VĂN MẬU, HOÀNG LÊ MINH, NGUYỄN KHẮC MINH, TRẦN VĂN NHUNG, NGUYỄN ĐĂNG PHÁT, PHAN THANH QUANG, TẠ HỒNG QUẢNG, ĐẶNG HÙNG THẮNG, VŨ DƯƠNG THUY, TRẦN THÀNH TRẠI, LÊ BÁ KHÁNH TRINH, NGÔ VIỆT TRUNG

Trưởng ban biên tập : NGUYỄN VIỆT HẢI. **Biên tập :** VŨ KIM THỦY, HỒ QUANG VINH

Trị sự : VŨ ANH THÚ. **Trình bày :** NGUYỄN THỊ OANH, NGUYỄN THANH LONG, NGUYỄN TIẾN DŨNG

Đại diện phía Nam : TRẦN CHÍ HIẾU, 231 Nguyễn Văn Cừ, Tp. Hồ Chí Minh. ĐT : 08.8309049

TOÁN HỌC MUÔN MÀU

Chiếc quạt thần diệu

Chọn một chiếc quạt đẹp và viết các số trên đó như ở *bìa 1*, bạn sẽ có một chiếc quạt thần diệu dùng để đoán một số người khác đã nghĩ.

Gấp quạt lại. Bạn đề nghị một người A nghĩ một số nguyên nào đó từ 1 đến 31. Bạn xòe quạt để mỗi lần xuất hiện một cột số và hỏi : *Số đang nghĩ có ở cột số này không ?* Người A chỉ trả lời : *có* hoặc *không*.

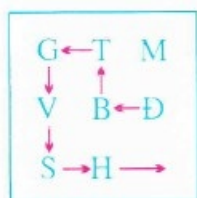
Sau khi xòe hết quạt để hỏi và nghe trả lời, bạn nói ngay được số người A đang nghĩ là số nào. Chẳng hạn : xòe quạt để lần lượt xuất hiện cột số từ phải sang trái và nhận được câu trả lời : có, không, có, không, không, không, không, không, có. Bạn đoán được ngay : số đang nghĩ là 19.

DÀNH CHO BẠN ĐỌC

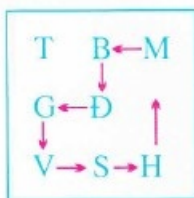
- 1) Hãy giải thích cách đoán số nhờ chiếc quạt thần diệu.
- 2) Nếu viết 12 cột số thì có thể đoán được các số trong khoảng nào ?

Giải đáp : CHUYỂN CHỖ

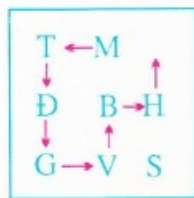
1) Để cho gọn, các đồ vật được viết tắt như sau : Bàn : B, Ghế : G, Đivăng : Đ, Tủ : T, Tivi : V, Máy tính : M, Sách : S, Hoa : H. Có nhiều lời giải. Số lần chuyển ít nhất từ hình 1 đến hình 2 là 24 lần qua 4 bước, mỗi lần chuyển đồ vật biểu thị bởi một mũi tên như dưới đây.



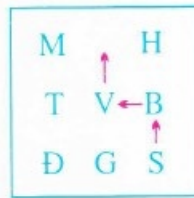
Hình 1 Bước 1



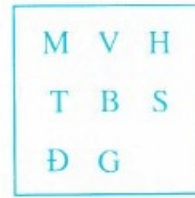
Bước 2



Bước 3



Bước 4



Hình 2

2) Ta sẽ chứng tỏ rằng không thể chuyển được đồ vật từ hình 1 sang hình 3. Đánh số các vật trên hình 1 từ 1 đến 9, trong đó ô trống tương ứng với số 9, ta được các bảng số của hình 1 và hình 3.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Bảng số hình 1

3	4	8
2	5	7
1	6	9

Bảng số hình 3

Với mỗi số a_i ($i = 1, 2, \dots, 9$) trong bảng số ta cho tương ứng với một đặc số (số đặc trưng) $s(a_i)$ là số các số x ở bên phải số a_i và ở hàng dưới số a_i mà $x < a_i$. Chẳng hạn ở bảng số hình 3 có $s(3) = 2$, $s(4) = 2$, $s(8) = 5$, $s(2) = 1$, $s(5) = 1$, $s(7) = 2$, $s(1) = 0$, $s(6) = 0$, $s(9) = 0$.

Gọi đặc số của toàn bảng số hình k ($k = 1, 2, 3$) là $T_k = s(a_1) + s(a_2) + \dots + s(a_9)$. Ta có $T_1 = 0$, $T_2 = 14$, $T_3 = 13$. Các bạn có thể thử thấy hoặc chứng minh tổng quát rằng :

- 1) Khi chuyển một đồ vật sang ô trống kế bên thì đặc số của bảng thay đổi tính chẵn lẻ.
- 2) Khi chuyển ô trống đến các vị trí nằm trên đường chéo của hình vuông thì số lần chuyển phải chẵn, mà $T_0 = 0$ còn $T_3 = 13$, vậy không thể chuyển được từ hình 1 sang hình 3.

Các bạn đã tìm ra cách chuyển 24 lần từ hình 1 sang hình 2, được nhận tặng phẩm :

- 1) *Trần Quốc Nam*, 11A3, THPT chuyên Lê Hồng Phong, **Tp. Hồ Chí Minh**
- 2) *Trần Thị Hòa My*, 12H, THPT Giao Thủy A, **Nam Định**
- 3) *Nguyễn Thành Đạt*, 10A3, THPT chuyên Vĩnh Phúc, **Vĩnh Phúc**
- 4) *Nguyễn Tiến Liên*, 9A, THCS Yên Trường, Yên Định, **Thanh Hóa**
- 5) *Đỗ Quang Trung B*, 5A, THPT Phù Lỗ, Phong Châu, Phù Ninh, **Phú Thọ**
- 6) *Đinh Thị Hồng Minh*, 11A5, THPT Lạc Sơn, **Hòa Bình**.

PHI PHI

TRƯỜNG THPT CHUYÊN NGUYỄN BÌNH KHIÊM

TỈNH VINH LONG



Hiệu trưởng
TĂNG NHƯ LĂNG

Trường THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm được thành lập từ tháng 9 năm 1991. Với khuôn viên gần 13000m², trường có một cơ ngơi khang trang.

Ngày đầu thành lập, trường chỉ có 3 lớp chuyên khối 10 với 60 học sinh và 8 cán bộ, giáo viên, nhân viên. Hiện nay, trường có 26 lớp, với tổng số 822 HS và 65 cán bộ, giáo viên, nhân viên. Sau 12 năm xây dựng và phát triển, trường THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm là trường tiên tiến xuất sắc dẫn đầu chất lượng giáo dục của tỉnh Vinh Long, nhiều lần được UBND tỉnh, Bộ Giáo dục và Đào tạo tặng cờ khen, bằng khen. Từ khi lập trường đến nay, tỉ lệ tốt nghiệp THCS, THPT luôn là 100%. Tỉ lệ học sinh đỗ vào các trường ĐH, CĐ thường đạt từ 90 - 100%, riêng đỗ vào các trường ĐH đạt từ 90 đến 97%. Tính đến nay trường đã có 637 học sinh giỏi cấp tỉnh, 206 học sinh giỏi cấp Quốc gia. Nhiều học sinh xuất sắc như : *Lương Trung Quân, Nguyễn Thị Lâm Uyên, Ngô Nguyễn Chính Tâm, Phạm Bá Hà, Trần Văn Thủy, Tăng Đình Ngọc Thảo, Nguyễn Huỳnh Minh Tâm, ...* nay là giảng viên các trường đại học trong và ngoài nước. Đặc biệt là ba cô gái *Trần Ngọc Minh, Đỗ Thị Hồng Nhung, Lương Phương Thảo* tỏa sáng trên đỉnh Olympia VTV3 lần I, lần II, lần III. Còn biết bao học sinh đã đạt thành tích trong các cuộc thi Olympic miền Tây Nam Bộ, Olympic 30/4 miền Nam, thi học sinh giỏi Hóa Quốc gia Australia,...

Đội ngũ thầy cô giáo cũng phát triển và trưởng thành. Những gương mặt tiêu biểu là thầy *Nguyễn Tuấn Thanh*, Phó hiệu trưởng được Nhà nước phong tặng danh hiệu "Nhà giáo ưu tú"; thầy *Tăng Như Lăng*, Hiệu trưởng, nhiều năm liền là Chiến sĩ thi đua cấp tỉnh, thầy *Đặng Hoàng Dũng*, Phó hiệu trưởng, thầy *Nguyễn Thế Lê Gia*, cô *Bùi Thị Xuân Hoa* được tặng danh hiệu "Viên phấn Vàng". Trường có 60% số giáo viên đạt giáo viên giỏi cấp tỉnh nhiều năm liền. Nhiều thầy cô được tu nghiệp trong và ngoài nước.

Mười hai năm, khoảng thời gian rất ngắn so với sự nghiệp trồng người, nhưng cũng đủ để cho một ngôi trường trẻ khẳng định mình. Năm học 2002-2003 trường được Sở Giáo dục Đào tạo, UBND tỉnh tập trung chỉ đạo xây dựng trường chuẩn quốc gia, và được Nhà nước tặng Huân chương Lao động hạng Ba. Trong giai đoạn mới, phát huy truyền thống, thầy trò trường THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm sẽ phấn đấu vươn lên tầm cao mới.



Các thầy cô giáo toán của trường

ISSN : 0866-8035
Chi số : 12884
Mã số : 8BT12M3

Chế bản tại Tòa soạn
In tại Nhà máy in Diên Hồng, 187B phố Giảng Võ
In xong và nộp lưu chiểu tháng 4 năm 2003

Giá : 3000đ
Ba nghìn đồng