

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ✱ HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

# Toán học & Tuổi trẻ

10  
2002

SỐ 304 - NĂM THỨ 39 - TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG



Trường THPT Thái Phúc, Thái Thụy, Thái Bình





# ĐẠI HỘI TOÁN HỌC QUỐC TẾ LẦN THỨ 24 - ĐÔI ĐIỀU GHI NHẬN

HÀ HUY KHOÁI  
(Viện Toán học)



**Laurent Lafforgue**  
(Pháp)

dành cho các nhà toán học. Điều khác biệt là trong khi giải Nobel của các ngành khoa học khác được trao hàng năm, thì giải Fields được trao 4 năm một lần, vào các kì Đại hội, và người được nhận giải Fields phải không quá 40 tuổi vào năm trao giải. Trong một số kì Đại hội gần đây, mỗi lần có 3-4 người được nhận giải Fields, nhưng ở Đại hội lần này, chỉ có 2 người được nhận giải thưởng cao quý đó là Laurent Lafforgue (Lô-răng Laphoóc-gơ) và Vladimir Voevodsky (Vladimia Vôevôd-xki).

Lafforgue sinh tại Pháp năm 1966, tốt nghiệp trường Ecole Normale ở Paris năm 1986, hiện nay là giáo sư tại IHES (Viện nghiên cứu khoa học cao cấp, Cộng hoà Pháp). Lafforgue nhận được giải thưởng nhờ chứng minh tương ứng Langlands đối với trường hàm. Có thể nói ngắn gọn, "Chương trình Langlands" là một tập hợp các giả thuyết (phát biểu trong bức thư của Langlands gửi André Weil năm 1967) tiên đoán một mối quan hệ mật thiết giữa nhiều ngành toán học tưởng chừng rất khác nhau. Đặc biệt, nếu chứng minh được tương ứng Langlands thì ta có một cách nhìn thống nhất giữa Số học và Giải tích. Thành công của



**Vladimir Voevodsky**  
(Nga)



**Madhu Sudan**  
(Ấn Độ)

Andrew Wiles trong việc chứng minh Định lý lớn Fermat là một trong những ví dụ rõ rệt chứng tỏ sự sâu sắc của *Chương trình Langlands*. Các công trình của Lafforgue đánh dấu một sự tiến bộ đáng kể trong việc chứng minh tương ứng Langlands.

Voevodsky sinh tại Nga năm 1966, tốt nghiệp trường Đại học tổng hợp Lômônôxốp (Mascova) năm 1989, hiện nay là giáo sư tại IAS (Viện nghiên cứu cao cấp, Princeton, Mỹ). Các công trình của Voevodsky được xem là đóng góp xuất sắc nhất trong lĩnh vực hình học đại số những năm gần đây. Cụ thể, Voevodsky đã phát triển một lí thuyết đồng điều mới cho các đa tạp đại số (tức là tập hợp nghiệm của một hệ phương trình đại số nào đó). Thành công của ông bắt nguồn từ tư tưởng của Grothendieck (Giải thưởng Fields năm 1966) về việc xây dựng lý thuyết các "môtip", nhằm thống nhất hai ngành toán học là Số học và Hình học.

(Xem tiếp trang 5)



## Dành cho các bạn TRUNG HỌC CƠ SỞ



Việc giải phương trình (PT) bậc lớn hơn 2 thường gây không ít khó khăn cho học sinh giỏi toán, nhưng cũng kích thích sự tìm tòi sáng tạo để tìm ra cách giải chúng. Bài này giới thiệu một số tính chất và cách giải của phương trình có hệ số đối xứng (PT HSDX).

Phương trình có hệ số đối xứng là PT có dạng  $f(x) = 0$ , trong đó  $f(x)$  là đa thức với đầy đủ các số hạng sắp xếp từ bậc cao tới bậc thấp (kể cả hệ số bằng 0) sao cho từng cặp hệ số cách đều hai đầu thì bằng nhau, nghĩa là  $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$  với  $a_i = a_{n-i}$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, n$ ) (1)

Phương trình  $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$  ( $a \neq 0$ ) là PT HSDX bậc 4. Phương trình  $ax^3 + bx^2 + bx + a = 0$  ( $a \neq 0$ ) là PT HSDX bậc 3.

### Một số tính chất của PT HSDX

**TC1.** PT HSDX (1) nếu có nghiệm  $x_0$  thì  $x_0 \neq 0$  và PT cũng nhận  $\frac{1}{x_0}$  là nghiệm.

Thực vậy  $f(0) = a_0 = a_n \neq 0$  và từ (1) có  $f(x) = x^n \cdot f\left(\frac{1}{x}\right)$  nên  $f(x_0) = 0 \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{x_0}\right) = 0$ .

**TC2.** PT HSDX bậc lẻ  $n = 2k+1$  nhận  $x = -1$  là nghiệm.

Từ (1) dễ thấy  $f(-1) = (a_0 - a_{2k+1}) - (a_1 - a_{2k}) + \dots + (-1)^k (a_k - a_{k+1}) = 0$

**TC3.** Nếu  $f(x)$  là đa thức bậc lẻ có hệ số đối xứng thì  $f(x) = (x+1)g(x)$ , trong đó  $g(x)$  là đa thức bậc chẵn có hệ số đối xứng.

Ta chứng minh cho đa thức  $f(x)$  bậc 5, với bậc cao hơn hoặc bậc 3 thì biến đổi tương tự.

$$ax^5 + bx^4 + cx^3 + cx^2 + bx + a = (x+1)[ax^4 + (b-a)x^3 + (c+a-b)x^2 + (b-a)x + a]$$

Từ đó suy ra tính chất sau :

**TC4.** PT HSDX bậc  $n$  lẻ có nghiệm  $x_0 = -1$  và việc giải nó chuyển về giải PT HSDX bậc  $n-1$  chẵn.

# NÉT ĐẸP CỦA PHƯƠNG TRÌNH HỆ SỐ ĐỐI XỨNG

NGUYỄN ANH THUẦN

(GV THCS Trần Văn Ôn, Hồng Bàng,  
Hải Phòng)

### Giải PT hệ số đối xứng

Áp dụng TC4 bao giờ ta cũng giải được PT HSDX bậc 3. Ta xét PT HSDX bậc lớn hơn 3.

**Ví dụ 1.** Giải phương trình :

$$3x^4 + 7x^3 + 7x + 3 = 0 \quad (2)$$

Vì  $x = 0$  không là nghiệm của phương trình (2), chia cả hai vế của phương trình này cho  $x^2$  ta được :

$$3\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 7\left(x + \frac{1}{x}\right) = 0$$

Đặt ẩn phụ  $t = x + \frac{1}{x}$ , ta có :  $3t^2 + 7t - 6 = 0$ .

Giải phương trình bậc hai này ta được :  $t = -3$ ,  $t = \frac{2}{3}$ . Với  $t = -3$ , ta có  $x + \frac{1}{x} = -3$  hay  $x^2 + 3x + 1 = 0$ . Suy ra :  $x_1 = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}$ ,  $x_2 = \frac{-3-\sqrt{5}}{2}$ .

Với  $t = \frac{2}{3}$ , ta có :  $x + \frac{1}{x} = \frac{2}{3}$  hay  $3x^2 - 2x + 3 = 0$ .

phương trình này không có nghiệm thực. Vậy phương trình  $4x^4 + 7x^3 + 7x + 3 = 0$  có hai nghiệm :  $x_1 = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}$ ,  $x_2 = \frac{-3-\sqrt{5}}{2}$

**Cách giải tổng quát :**

$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$ . Chia cả hai vế cho  $x^2$  được

$$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0 \quad (3)$$

Đặt ẩn phụ  $t = x + \frac{1}{x}$  (4) suy ra  $t^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$ . PT (3) trở thành  $at^2 + bt + c - 2a = 0$ .

Nếu PT này vô nghiệm thì PT (3) vô nghiệm, nếu PT này có nghiệm  $t$  thì thay vào (4) ta tìm được nghiệm  $x$ .



# HỘI NGHỊ TOÁN HỌC TOÀN QUỐC LẦN THỨ 6

Sáng 7.9.2002 tại nhà văn hóa Trung tâm thành phố Huế, hơn 700 nhà toán học, nhà sư phạm, nhà giáo thuộc Viện Toán học, nhiều trường và viện đại học : Đại học Quốc gia Hà Nội, Đại học Sư phạm Hà Nội, Đại học Huế, Đại học Quốc gia Tp. Hồ Chí Minh, Đại học Bách khoa Hà Nội, Đại học Vinh, ĐH Thái Nguyên, ĐH Đà Nẵng, ĐHSP Quy Nhơn, ĐH Cần Thơ... Nhà xuất bản Giáo dục, Viện Khoa học Giáo dục, Viện Công nghệ Thông tin, nhiều trường cao đẳng, THPT và nghiên cứu sinh đã về dự lễ khai mạc Hội nghị Toán học toàn quốc lần thứ 6. GS TSKH Trần Văn Nhung, Thứ trưởng Bộ Giáo dục và Đào tạo, dự lễ khai mạc và phát biểu ý kiến. Giáo sư đã đề nghị chúng ta nên có giải thưởng trao cho các nhà toán học Việt Nam có thành tích xuất sắc. Ngay buổi sáng đầu tiên GS Hoàng Xuân Phú (Viện Toán học) đã đọc báo cáo mời trong phiên họp toàn thể. Ba báo cáo mời toàn thể khác của các giáo sư Lê Tuấn Hoa (Viện Toán học), Nguyễn Văn Minh (ĐHKHTN Hà Nội) và Phạm Anh Minh (ĐHKH Huế) được trình bày trong 3 buổi sáng tiếp theo. Các vấn đề nghiên cứu được trình bày tại các tiểu ban : Đại số - Hình học - Tô pô, Giải tích, Phương trình vi phân, Tối ưu và Tính toán khoa học, Xác suất và Thống kê toán học, Toán học rời rạc và Tin học lý thuyết, Ứng dụng toán học, Giảng dạy toán học với gần 300 báo cáo và thông báo ngắn. Sự tham gia đông đảo của các nhà toán học, nhà giáo và sinh viên tại các tiểu ban trong suốt 4 ngày cho thấy một sức sống mới của Toán học Việt Nam và dự báo một tương lai tốt đẹp của cộng đồng Toán học Việt Nam.

Tại khu vực của tiểu ban Giảng dạy toán học lúc nào cũng có hàng trăm người tham dự. Để

tài đổi mới nội dung sách giáo khoa và thay đổi chương trình, phương pháp giảng dạy được đặc biệt quan tâm. Số đông tán thành phải thay đổi cho sách toán của chúng ta đáp ứng được những đòi hỏi mới của khoa học và cuộc sống. Xu hướng mới sẽ là chú ý hơn đến tính thực tiễn, thực hành và tính toán bên cạnh việc rèn luyện, bồi dưỡng năng lực tư duy logic. Đối với hai lớp 6, 7 sẽ có các mảng kiến thức được học sinh tiếp cận theo cách thực nghiệm. Việc chứng minh được chú ý hơn ở lớp 8, 9 và các lớp trên. Ở THPT các vấn đề lượng giác phức tạp, tích phân hay giải tích được giảm nhẹ để tăng thời lượng cho tổ hợp, thống kê xác suất, số phức và các kiến thức gần với đời sống, sử dụng máy tính bỏ túi... Học sinh không chỉ được học cách giải quyết vấn đề mà còn được làm quen với phát hiện vấn đề. Nhiều ý kiến đề nghị có tiểu ban Lịch sử Toán học trong Hội nghị toán học.

Các đại biểu dự Hội nghị còn tham quan Đại nội, chùa Thiên Mụ, lăng Tự Đức và nghe ca Huế trên sông Hương xen trong các ngày làm việc. Kết thúc Hội nghị, các đại biểu được tham quan bãi biển Lăng Cô và thăm vườn quốc gia Bạch Mã.

Nhân dịp tới Huế, sau khi dự Hội nghị, đoàn cán bộ biên tập viên tạp chí THTT đã có các buổi tiếp xúc với các giáo viên chuyên Toán Quốc học Huế, THCS Nguyễn Tri Phương và gặp gỡ tổ toán trường THCS Kim Long, Huế bàn về nội dung tạp chí THTT, khuyến khích đọc THTT và về đổi mới nội dung và phương pháp dạy toán phổ thông. Đoàn cũng có các buổi làm việc với Công ty Sách Thiết bị Thừa Thiên - Huế, các giáo viên Toán - Tin và Khoa học tự nhiên của trường Cao đẳng Sư phạm Thừa Thiên - Huế.

VKT

## Ví dụ 2. Giải phương trình

$$3x^5 + 10x^4 + 7x^3 + 7x^2 + 10x + 3 = 0 \quad (5)$$

Đây là phương trình HSDX bậc lẻ nên có thể biến đổi phương trình (5) thành dạng :

$$(x+1)(3x^4 + 7x^3 + 7x^2 + 3) = 0$$

Sử dụng kết quả của ví dụ 1, PT (5) có nghiệm

$$\text{là : } x_1 = -1, x_2 = \frac{-3+\sqrt{5}}{2}, x_3 = \frac{-3-\sqrt{5}}{2}$$

Chú ý rằng có thể chuyển việc giải PT HSDX bậc 6 về giải PT bậc 3 (hệ số không chẵn đối xứng) khi đặt  $t = x + \frac{1}{x}$ , lúc đó  $x^3 + \frac{1}{x^3} = t^3 - 3t$ .

Các ví dụ trên cho thấy nét đẹp và mối liên hệ giữa PT HSDX bậc chẵn và PT HSDX bậc lẻ.

Sau đây là một số bài toán giải phương trình có hệ số đối xứng, mời các bạn thử giải và sáng tạo ra các bài toán khác :

Bài 1. Giải các phương trình sau :

$$a) x^6 + 3x^5 + 6x^4 + 7x^3 + 6x^2 + 3x + 1 = 0$$

$$b) x^7 + 4x^6 + 9x^5 + 13x^4 + 13x^3 + 9x^2 + 4x + 1 = 0$$

Bài 2. Giải các phương trình sau :

$$a) x^4 - 2x^3 + 8x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$b) x^5 - x^4 + 6x^3 + 6x^2 - x + 1 = 0$$



# ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 THPT CHUYÊN

## TRƯỜNG ĐHKHTN - ĐHQG HÀ NỘI 2002

### MÔN TOÁN

**Ngày thứ nhất**  
(Dành cho mọi thí sinh)  
(Thời gian : 150 phút)

**Câu I. 1)** Giải phương trình

$$\sqrt{8+\sqrt{x}} + \sqrt{5-\sqrt{x}} = 5$$

**2)** Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} (x+1)(y+1)=8 \\ x(x+1)+y(y+1)+xy=17 \end{cases}$$

**Câu II.** Cho  $a, b, c$  là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Chứng minh rằng phương trình

$$x^2 + (a+b+c)x + ab + bc + ca = 0 \text{ vô nghiệm}$$

**Câu III.** Tìm tất cả các số nguyên  $n$  sao cho  $n^2 + 2002$  là một số chính phương.

**Câu IV.** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$P = \frac{1}{1+xy} + \frac{1}{1+yz} + \frac{1}{1+zx}$$

trong đó  $x, y, z$  là các số dương thay đổi thỏa mãn điều kiện  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 3$ .

**Câu V.** Cho hình vuông  $ABCD$ ,  $M$  là điểm thay đổi trên cạnh  $BC$  ( $M$  không trùng với  $B$ ) và  $N$  là điểm thay đổi trên cạnh  $CD$  ( $N$  không trùng với  $D$ ) sao cho :

$$\widehat{MAN} = \widehat{MAB} + \widehat{NAD}$$

1)  $BD$  cắt  $AN$  và  $AM$  tương ứng tại  $P$  và  $Q$ . Chứng minh rằng năm điểm  $P, Q, M, C, N$  cùng nằm trên một đường tròn.

2) Chứng minh rằng đường thẳng  $MN$  luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định khi  $M$  và  $N$  thay đổi.

3) Ký hiệu diện tích của tam giác  $APQ$  là  $S_1$  và diện tích của tứ giác  $PQMN$  là  $S_2$ .

Chứng minh rằng tỉ số  $\frac{S_1}{S_2}$  không đổi khi  $M$  và  $N$  thay đổi.

**Ngày thứ hai**  
(Dành cho thí sinh thi vào chuyên Toán, chuyên Tin)  
(Thời gian : 150 phút)

**Câu VI. 1)** Giải phương trình :

$$\sqrt{x^2 - 3x + 2} + \sqrt{x + 3} = \sqrt{x - 2} + \sqrt{x^2 + 2x - 3}$$

**2)** Tìm nghiệm nguyên của phương trình :

$$x + xy + y = 9$$

**Câu VII.** Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 1 \\ x^3 + y^3 = x + 3y \end{cases}$$

**Câu VIII.** Cho mười số nguyên dương 1, 2, ..., 10. Sắp xếp mười số đó một cách tùy ý thành một hàng. Cộng mỗi số với số thứ tự của nó trong hàng, ta được mười tổng. Chứng minh rằng trong mười tổng đó tồn tại ít nhất hai tổng có chữ số tận cùng giống nhau.

**Câu IX.** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$P = \frac{4a}{b+c-a} + \frac{9b}{a+c-b} + \frac{16c}{a+b-c}$$

trong đó  $a, b, c$  là độ dài ba cạnh của một tam giác.

**Câu X.** Đường tròn  $(C)$  tâm  $I$  nội tiếp tam giác  $ABC$  tiếp xúc với các cạnh  $BC, CA, AB$  tương ứng tại các điểm  $A', B', C'$ .

1) Gọi các giao điểm của đường tròn  $(C)$  với các đoạn  $IA, IB, IC$  lần lượt là  $M, N, P$ . Chứng minh rằng các đường thẳng  $A'M, B'N, C'P$  đồng quy.

2) Kéo dài đoạn  $AI$  cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$  tại  $D$  (khác  $A$ ). Chứng minh rằng

$$\frac{IB \cdot IC}{ID} = 2r, \text{ trong đó } r \text{ là bán kính của đường tròn } (C).$$

### HƯỚNG DẪN GIẢI

**Câu I. 1)** Điều kiện :  $0 \leq \sqrt{x} = t \leq 5$ .

Phương trình đã cho tương đương với :

$$\sqrt{8+t} + \sqrt{5-t} = 5$$

Bình phương hai vế ta được

$$t^2 + 3t - 4 = 0 ; t_1 = -4 : \text{loại} ; t_2 = 1 \Rightarrow x = 1.$$

**2)** Hệ đã cho tương đương với :

$$\begin{cases} x + y + xy = 7 \\ (x+y)^2 - xy + x + y = 17 \end{cases}$$



Đặt  $x + y = S$ ,  $xy = P$  rồi giải hệ PT trên được :

$$a) \begin{cases} S=4 \\ P=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases} \text{ và } \begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} S=-6 \\ P=13 \end{cases} \text{ hệ này vô nghiệm.}$$

**Câu II.** Ta có

$$\Delta = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc - 2ca \\ = a(a-b-c) + b(b-c-a) + c(c-a-b) < 0 \\ \Rightarrow \text{PT vô nghiệm}$$

**Câu III.** Giả sử  $n^2 + 2002 = m^2$  ( $m$  nguyên)  
 $\Leftrightarrow (m-n)(m+n) = 2002$  (\*)

Chú ý rằng  $m$  và  $n$  phải cùng chẵn hoặc cùng lẻ  $\Rightarrow (m-n) : 2$  và  $(m+n) : 2$

Vế trái của (\*) chia hết cho 4 nhưng vế phải không chia hết cho 4. Vậy không có số nguyên  $n$  nào để  $n^2 + 2002$  là số chính phương.

**Câu IV.** Chú ý rằng với  $a, b, c > 0$  áp dụng BĐT Bu-nhi-a-côp-xki có :

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9$$

Áp dụng BĐT trên với  $1 + xy = a$ ,  $1 + yz = b$ ,  $1 + zx = c$ .

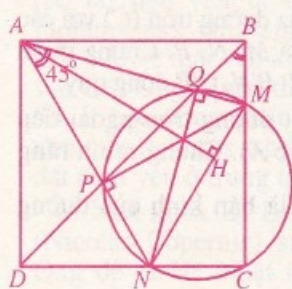
Ta có :  $(3 + xy + yz + zx).P \geq 9$ .

$$\Rightarrow P \geq \frac{9}{3+xy+yz+zx} \geq \frac{9}{3+x^2+y^2+z^2} \geq \frac{3}{2}$$

$$\text{Khi } x = y = z = 1 \text{ thì } P = \frac{3}{2} \Rightarrow \text{Min} P = \frac{3}{2}$$

**Câu V.** Từ giả thiết suy ra  $\widehat{MAN} = 45^\circ$  (h.1)

1) Tứ giác  $ABMP$  có  $\widehat{PBM} = \widehat{PAM} = 45^\circ$  nên là tứ giác nội tiếp. Suy ra  $\widehat{MPA} = 90^\circ$ .



Hình 1

Tương tự, tứ giác  $ADNQ$  nội tiếp và có  $\widehat{NQA} = 90^\circ$ . Vậy năm điểm  $P, Q, M, C, N$  nằm trên đường tròn đường kính  $MN$ .

2) Ta có  $\widehat{AMN} = \widehat{APB} = \widehat{AMB}$

Kẻ  $AH \perp MN$ . Dễ thấy  $\triangle AHM = \triangle ABM$

$\Rightarrow AH = AB$ . Vậy  $MN$  luôn tiếp xúc với đường tròn tâm A bán kính  $AB$  cố định.

3) Do  $\triangle AQN$  và  $\triangle APM$  vuông cân tại  $Q$  và  $P$  nên :

$$\frac{AQ}{AN} = \frac{AP}{AM} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{APQ}}{S_{AMN}} = \frac{AQ \cdot QP}{AN \cdot AM} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = 1$$

**Câu VI.** 1) Điều kiện  $x \geq 2$ . PT đã cho tương đương với :

$$\sqrt{x-1} \sqrt{x-2} + \sqrt{x+3} = \sqrt{x-2} + \sqrt{x-1} \sqrt{x+3}$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x-1}-1)(\sqrt{x-2}-\sqrt{x+3})=0 \Rightarrow x=2.$$

2) PT đã cho có dạng :  $(x+1)(y+1) = 10$  (1).  
 Phân tích  $10 = 1.10 = 2.5$  (2)

Từ (1) và (2) suy ra PT có 8 nghiệm là :

$(0, 9), (9, 0), (-2, -11), (-11, -2), (1, 4), (4, 1), (-3, -6), (-6, -3)$

**Câu VII.** Do  $x^2 + y^2 + xy = 1$ , PT thứ hai của hệ có dạng :

$$x^3 + y^3 = (x+3y)(x^2 + y^2 + xy)$$

Khai triển và rút gọn được :

$$2y(x^2 + (x+y)^2) = 0.$$

Hệ có 2 nghiệm  $(x, y)$  là  $(1, 0), (-1, 0)$ .

**Câu VIII.** Giả sử mười số đã cho viết thành một hàng là :  $a_1, a_2, \dots, a_{10}$ .

Xét mười tổng :  $a_1 + 1, a_2 + 2, \dots, a_{10} + 10$

Khi đó :  $S = (a_1+1) + (a_2+2) + \dots + (a_{10}+10)$

Giả sử rằng 10 tổng trên không có hai tổng nào có tận cùng giống nhau thì tổng tất cả chữ số tận cùng của chúng là :  $0 + 1 + 2 + 3 + \dots + 9 = 45$ . Suy ra chữ số tận cùng của tổng  $S = (a_1+1) + \dots + (a_{10}+10)$  là 5 nhưng  $S = (a_1+a_2+\dots+a_{10}) + (1+2+\dots+10) = 110$  có tận cùng là 0. Vậy điều giả sử trên là sai  $\Rightarrow$  đpcm.

**Câu IX. Cách 1.**

$$\text{Đặt } \begin{cases} b+c-a=2x \\ c+a-b=2y \\ a+b-c=2z \end{cases} \text{ thì } x, y, z > 0 \text{ và } \begin{cases} a=y+z \\ b=z+x \\ c=x+y \end{cases}$$

Áp dụng BĐT Côsi cho các số dương ta có

$$2P = 4\left(\frac{y+z}{x}\right) + 9\left(\frac{z+x}{y}\right) + 16\left(\frac{x+y}{z}\right) \\ = \left(4\frac{y}{x} + 9\frac{x}{y}\right) + \left(4\frac{z}{x} + 16\frac{x}{z}\right) + \left(9\frac{z}{y} + 16\frac{y}{z}\right) \\ \geq 12 + 16 + 24 = 52 \Rightarrow P \geq 26.$$

Dấu bằng đạt được khi  $\frac{y}{x} = \frac{3}{2}$ ;  $\frac{z}{x} = 2$  và  $\frac{z}{y} = \frac{4}{3}$   
 hay  $3z = 4y = 6x$ . Chẳng hạn lấy  $x = 2 \Rightarrow y = 3$ ;



$z = 4 \Rightarrow a = 7, b = 6, c = 5$ , lúc đó  $P = 26$ . Vậy GTNN của  $P$  là 26.

Cách 2.  $2P =$   
 $= 4\left(\frac{a+b+c}{b+c-a}-1\right) + 9\left(\frac{a+b+c}{a+c-b}-1\right) + 16\left(\frac{a+b+c}{a+b-c}-1\right)$   
 $2P = ((b+c-a)+(a+c-b)+(a+b-c)) \times$   
 $\times \left(\frac{4}{b+c-a} + \frac{9}{a+c-b} + \frac{16}{a+b-c}\right) - 29$

rồi áp dụng BĐT Bu-nhi-a-côp-xki cho tích hai biểu thức trong ngoặc, suy ra  $P \geq 26$ .

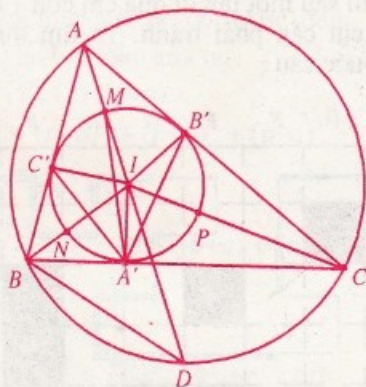
Đẳng thức xảy ra khi

$$\frac{2}{b+c-a} = \frac{3}{a+c-b} = \frac{4}{a+b-c} = \frac{1}{k}, \text{ (với } k > 0), \text{ suy}$$

$$\text{ra } a = \frac{7k}{2}, b = 3k, c = \frac{5k}{2}.$$

Cụ thể hơn, có thể chọn :  $a = 7, b = 6, c = 5$  thì  $P = 26$ .

Câu X. 1)  $\triangle AIB' = \triangle AIC'$  (h. 2)  
 $\Rightarrow \widehat{AIB'} = \widehat{AIC'} \Rightarrow \widehat{MA'B} = \widehat{MA'C} \Rightarrow A'M$  là phân giác trong của  $\triangle A'B'C'$ .



Hình 2

Tương tự  $B'N, C'P$  là các đường phân giác trong của  $\triangle A'B'C' \Rightarrow$  ba đường  $A'M, B'N, C'P$  đồng quy.

2) Cách 1. Dựng đường tròn tâm  $D$  đi qua ba điểm  $B, I, C$ . Đường tròn này cắt  $ID$  kéo dài tại

$K$ . Từ  $\triangle IBA' \sim \triangle IKC$  suy ra  $\frac{IB}{IK} = \frac{IA'}{IC} \Rightarrow$

$$\frac{IB \cdot IC}{ID} = 2r \text{ (dpcm)}$$

Cách 2. Ta có  $\triangle BID$  cân tại  $D$ . Gọi  $E$  là trung điểm  $IB$ . Từ  $\triangle IDE \sim \triangle ICA'$  suy ra

$$\frac{ID}{IC} = \frac{IE}{IA'} = \frac{2IE}{2IA'} = \frac{IB}{2IA'} \Rightarrow \text{dpcm.}$$

Hướng dẫn giải : PHẠM HÙNG

## ĐẠI HỘI TOÁN HỌC QUỐC TẾ LẦN THỨ 24...

(Tiếp bài 2)

Lý thuyết của Voevodsky là một bước tiến đáng kể trong việc khẳng định cách nhìn của Grothendieck về sự thống nhất của Toán học.

Ngoài giải thưởng Fields, kể từ năm 1982, Hội Toán học Quốc tế đặt thêm Giải thưởng Nevanlinna dành cho các công trình xuất sắc về lĩnh vực toán học trong công nghệ thông tin. Lần này, Giải thưởng Nevanlinna được trao cho Madhu Sudan. Ông sinh năm 1966 tại Madras (Ấn Độ), tốt nghiệp Đại học công nghệ Ấn Độ năm 1987, hiện nay là giáo sư tại Đại học công nghệ Massachusetts (Mỹ). Sudan được trao giải thưởng về những đóng góp xuất sắc trong lý thuyết kiểm tra chứng minh, lý thuyết độ phức tạp tính toán và lý thuyết mã sửa sai. Thành tựu nổi bật nhất của ông có thể mô tả như sau: với một chứng minh của mệnh đề toán học nào đó, lý thuyết của Sudan cho phép viết logic cơ bản của chứng minh thành một chuỗi các bit, có thể nhập vào máy tính. Để kiểm tra, ta chỉ cần kiểm tra một số rất ít các bit trong chuỗi nói trên và cho câu trả lời (với xác suất cao) là chứng minh có đúng hay không!

Tại mỗi kì Đại hội, ngoài những người được giải thưởng ra thì vinh dự nhất có lẽ là những người được chọn trình bày Báo cáo mời toàn thể và Báo cáo mời tại các tiểu ban. Đại hội lần này có 20 báo cáo mời toàn thể và khoảng 170 báo cáo mời tại 19 tiểu ban. Có thể nói một cách ngắn gọn, các báo cáo mời toàn thể không chỉ trình bày những công trình tiêu biểu cho một ngành toán học nào đó, mà còn thể hiện rõ mối liên quan chặt chẽ giữa các ngành toán khác nhau và giữa Toán học với Vật lí, Sinh học, và các vấn đề thực tiễn.

Nhân dịp Đại hội Toán học Quốc tế, Hội Toán học Quốc tế tổ chức gần 40 Hội nghị vệ tinh về các lĩnh vực khác nhau của toán học. Việt Nam cũng vinh dự được đăng cai tổ chức một trong các hội nghị như vậy (là Hội nghị về Giải tích toán học, tổ chức tại Viện Toán học từ 13 đến 17/8/2002). Các hội nghị vệ tinh khác diễn ra tại Trung Quốc, Hồng Kông, Đài Loan, Nhật Bản, Nga./.



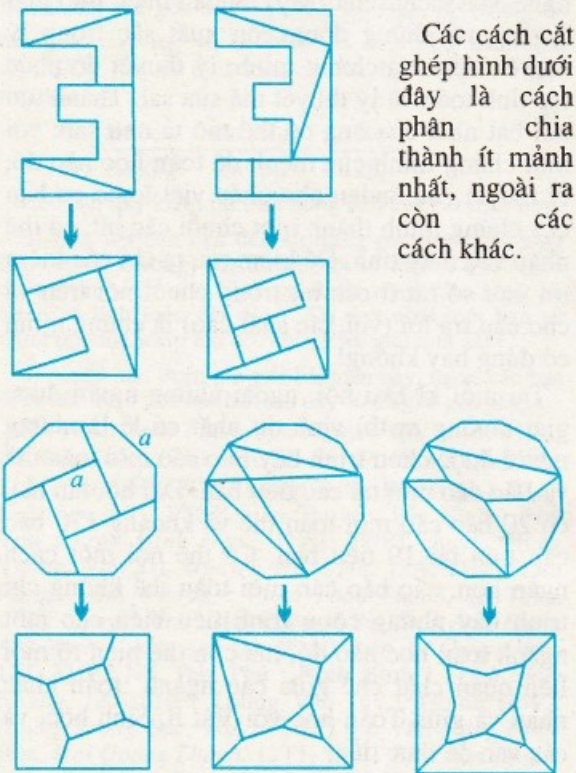
# KẾT QUẢ CUỘC THI VUI HÈ 2002

Cuộc thi đã được các bạn hưởng ứng sôi nổi và gửi bài về từ rất sớm. Số đông các bạn tham gia là học sinh Trung học cơ sở. Nhiều bài đúng và trình bày công phu. Có những bạn năm ngoái được giải năm nay lại được giải. Tuy nhiên còn nhiều bạn chỉ ghi kết quả không có lập luận và một số thì lại viết quá dài. Chỉ có bạn *Trần Mạnh Cường* được điểm tối đa và bạn Cường cũng là người được giải Nhất trong cuộc thi năm ngoái. Thế là chúng ta đã có một cuộc thi bổ ích cho một kì hè lí thú. Hẹn gặp lại trong mùa hè sau.

Sau đây là đáp án của cuộc thi.

## ĐỢT 1

### Bài 1. Biến 300 thành 3 hình vuông



### Bài 2. Bao nhiêu cách

Dễ thấy không thể chọn các số sản phẩm từ 5 trở xuống.

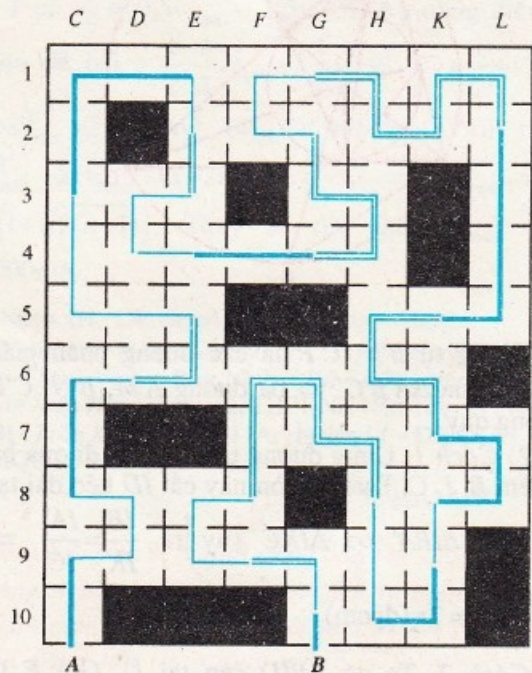
Số lớn nhất là 9 sản phẩm và dòng cuối ứng với các cột có số 9 ở dòng trên lại không có số 8, 9 nên chúng ta chỉ có thể chọn các khả năng có tổng 40 là  $9 + 9 + 8 + 7 + 7$ ,  $9 + 9 + 8 + 8 + 6$ ,  $9 + 8 + 8 + 8 + 7$ . Để có hai trường hợp đầu

thì chọn  $C_\alpha$  và  $G_\gamma$  (không thể chọn  $G_\epsilon$  vì nếu thế sẽ mất khả năng của 9 sản phẩm thứ hai). Cũng vì không thể chọn  $G_\epsilon$  nên không xảy ra trường hợp  $9 + 9 + 8 + 7 + 7$ . Ứng với tổng  $9 + 9 + 8 + 8 + 6$  ta có 1 cách chọn là  $C_\alpha B_\beta G_\gamma D_\lambda H_\epsilon$ .

Trường hợp chỉ có một người cho 9 sản phẩm (ứng với tổng  $9 + 8 + 8 + 8 + 7$ ) thì phải chọn  $C_\alpha$  vì số 7 ở dòng cuối ứng với  $G$  (là người cũng có khả năng cho 9 sản phẩm nếu đúng máy  $\alpha$ ) mà 7 lại lớn nhất dòng cuối nên để  $G$  đúng máy  $\epsilon$ . Các cách tiếp theo là  $C_\alpha H_\beta B_\gamma D_\lambda G_\epsilon$ ,  $C_\alpha B_\beta E_\gamma D_\lambda G_\epsilon$ ,  $C_\alpha H_\beta E_\gamma D_\lambda G_\epsilon$ . Vậy có 4 cách chọn tất cả.

### Bài 3. Đi tìm tin World Cup

Xét các đường đi từ phòng A đến phòng B qua tất cả các phòng không đóng cửa. Nhận xét: để có đường đi qua một phòng nào đó cần có đường vào và đường ra, nghĩa là số cửa phòng đó phải chẵn (2 cửa hoặc 4 cửa), còn nếu phòng có 3 cửa thì sau một lần đi qua chỉ còn 1 cửa, đó là đường cụt cần phải tránh. Ta tìm đường đi theo các bước sau:



**Bước 1.** Vẽ các đường đi qua phòng chỉ có 2 cửa (đường đậm trên hình), sau đó xuất hiện tiếp các đường đi bắt buộc (đường đôi trên hình) vì nếu đi cách khác sẽ xuất hiện đường cụt.



**Bước 2.** Xét các đường đi nối các điểm đầu mút các đường đã vẽ ở bước 1.

Trong hình chữ nhật M (hàng 8, 9 cột C, D, E, F) có 4 cách đi (các bạn tự vẽ) là  $M_1, M_2, M_3$  (nối 8C–9C, nối 8F–9F) và  $M_4$  (nối 8C–8F, nối 9C–9F).

Trong hình chữ nhật N (hàng 8, 9, 10 cột G, H, K) có 3 cách đi là  $N_1, N_2$  (nối 9G–10G, nối 8H–8K) và  $N_3$  (nối 9G–8H, nối 10G–8K).

Trong hình chữ nhật P (hàng 3, 4, 5, 6 cột C, D, E) có 7 cách đi là  $P_1, P_2, P_3$  (nối 3C–6C, nối 3E–4E) và  $P_4, P_5, P_6, P_7$  (nối 3C–3E, nối 6C–4E).

Trong hình chữ nhật Q (hàng 1, 2 cột E, F, G) có 3 cách đi là  $Q_1, Q_2$  (nối 1E–2E nối 1G–2G) và  $Q_3$  (nối 1E–1G nối 2E–2G).

**Bước 3.** Nối các đầu đường đi trong các hình chữ nhật M–P–Q–N theo thứ tự, sao cho không có đường gấp khúc khép kín, không có đường đi từ cửa A đến cửa B mà bỏ qua các đường đi ở P, Q. Trên hình chỉ ra 1 đường đi ứng với  $M_1-P_1-Q_1-N_1$ .

Có tất cả 70 đường đi (mỗi kí hiệu cách đi nằm trong ngoặc chỉ ứng với một đường đi) theo sơ đồ sau :

4 đường :  $M_4 - (P_4, P_5, P_6, P_7) - Q_3 - N_3$ .

6 đường :  $M_4 - (P_1, P_2, P_3) - (Q_1, Q_2) - N_3$

24 đường :  $(M_1, M_2, M_3) - (P_4, P_5, P_6, P_7) - Q_3 - (N_1, N_2)$

36 đường :  $(M_1, M_2, M_3) - (P_1, P_2, P_3) - (Q_1, Q_2) - (N_1, N_2)$ .

Các bạn đã tìm được đủ 70 đường đi là :

Lưu Thị Thu Trang (Bắc Ninh), Bùi Mạnh Hoàng (Hải Phòng), Trần Mạnh Cường (Yên Bái), Nguyễn Lâm Hưng (Tp. Hồ Chí Minh), Đào Tuấn Anh (Bắc Giang).

## ĐỢT II

### Bài 4. Tờ báo thứ mấy ?

Nhận xét rằng nếu có  $1, 3, 9 = 3^2, 27 = 3^3, 81 = 3^4, 243 = 3^5$  tờ báo xếp theo vòng tròn thì sau khi đếm và loại bỏ, tờ số 1 luôn còn lại cuối cùng. Nếu có 301 tờ báo thì cần loại bỏ  $301 - 243 = 58$  tờ ra khỏi vòng tròn, nghĩa là cần 29 lần đếm theo nhóm 3 tờ để loại bỏ 2 tờ, hay là trước tờ số 1 trong 243 tờ còn lại ta cần xếp  $29 \times 3 = 87$  tờ. Vậy chọn tờ báo thứ  $N = 301 - 87 = 214$  để bắt đầu đếm từ số 1 thì tờ báo còn lại cuối cùng là tờ báo số 301.

### Bài 5. Bao nhiêu cách

Trong mỗi ô ta ghi số các đường đi từ ô đó đến ô B.

Để thấy cột bên phải và dòng dưới cùng toàn số 1. Ô góc trên bên trái cạnh B sẽ là 3.

|          |         |
|----------|---------|
| $x$      | $y$     |
| $\alpha$ | $\beta$ |

Trong hình vuông bên trái ta thấy số đường đi từ ô có số  $x$  đến ô B theo quy tắc, bằng  $\alpha + \beta + \gamma$ .

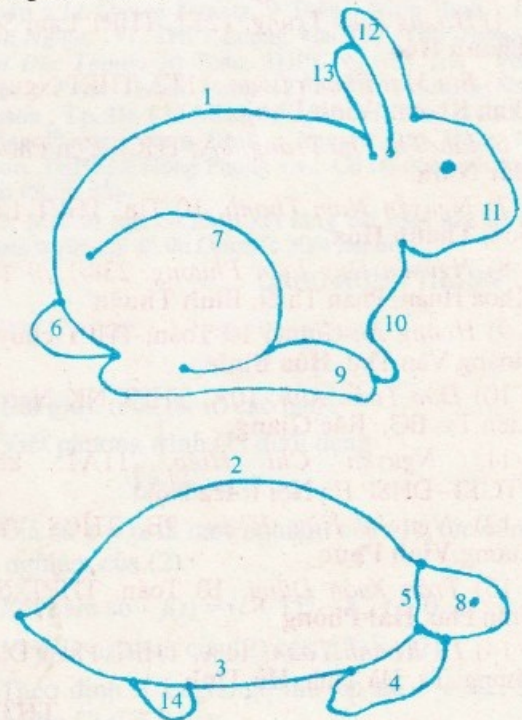
Từ đó ta lập được đầy đủ bảng số mà mỗi ô ghi số đường đi từ nó về ô B.

Vậy từ A đến B có tất cả 63 cách đi thỏa mãn yêu cầu đầu bài.

|    |    |   |   |  |
|----|----|---|---|--|
| A  |    |   |   |  |
| 63 | 25 | 7 | 1 |  |
| 25 | 13 | 5 | 1 |  |
| 7  | 5  | 3 | 1 |  |
| 1  | 1  | 1 | B |  |

### Bài 6. Hai con vật nào ?

Một số bạn đã sắp xếp các đường trên thành hình những con vật khá ngộ nghĩnh, chẳng hạn: con cá heo, con sư tử biển, con chuột túi, ... Nhưng hình hai con vật đẹp nhất của bài này là **con rùa** và **con thỏ** ! Câu chuyện chạy thi của hai con vật này là một bài học hữu ích khi chúng ta thực hiện một công việc nào đó trong cuộc sống. Chúc các bạn sẽ nhanh như chú **thỏ** ; chậm chãi, kiên trì như chú **rùa** trong khi làm toán. Dưới đây là hình hai con vật đáng yêu đó trong bức tranh.





## DANH SÁCH CÁC BẠN ĐOẠT GIẢI CUỘC THI VUI HÈ 2002

### GIẢI NHẤT (2 giải)

- 1) **Trần Mạnh Cường**, 9B, THCS Lê Hồng Phong, Tp. Yên Bái, **Yên Bái**
- 2) **Phan Thị Kim Hoà**, 11A1, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành, **Yên Bái**

### GIẢI NHÌ (6 giải)

- 1) **Phan Đức Thiện**, 12T, THPT NK Hà Tĩnh, **Hà Tĩnh**
- 2) **Nguyễn Công Anh**, 8C, THCS Hàn Thuyên, Lương Tài, **Bắc Ninh**
- 3) **Nguyễn Lâm Hưng**, 11T, THPT NK, ĐHQG Tp. **Hồ Chí Minh**.
- 4) **Nguyễn Quang Đạt**, lớp A2, khóa 2000–2003, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành, **Yên Bái**
- 5) **Nguyễn Minh Hoàng**, 9A, THCS Đoàn Hùng, **Phú Thọ**
- 6) **Quách Thái Sơn**, 11A12, THPT Việt Đức, **Hà Nội**

### GIẢI BA (14 giải)

- 1) **Hàn Ngọc Đức**, 12C, THPT Mỹ Hào, **Hưng Yên**
- 2) **Võ Thái Thông**, 6/4, THCS Ngô Gia Tự, Cam Nghĩa, Cam Ranh, **Khánh Hòa**
- 3) **Võ Viết Hàn**, lớp 01ĐHT, trường ĐHBK Đà Nẵng, Tp. **Đà Nẵng**
- 4) **Hoàng Kiên Trung**, 12T1, THPT Lam Sơn, **Thanh Hóa**
- 5) **Bùi Mai Thanh Loan**, 11T2, THPT Nguyễn Bình Khiêm, **Vĩnh Long**.
- 6) **Lưu Thị Thu Trang**, 8A, THCS Yên Phong, **Bắc Ninh**.
- 7) **Nguyễn Nam Thanh**, 10 Tin, THPT Lam Sơn, **Thanh Hóa**
- 8) **Nguyễn Duy Liên Phương**, 238/15/9 Thủ Khoa Huân, Phan Thiết, **Bình Thuận**
- 9) **Hoàng An Giang**, 10 Toán, THPT chuyên Hoàng Văn Thụ, **Hòa Bình**
- 10) **Đào Tuấn Anh**, 10A, THPT NK Ngô Sĩ Liên, Tx. BG, **Bắc Giang**
- 11) **Nguyễn Chí Hiệp**, 11A1, khối PTCTT–ĐHSP Hà Nội I, **Hà Nội**
- 12) **Nguyễn Hữu Hoán**, 9B, THCS Vĩnh Tường, **Vĩnh Phúc**
- 13) **Trần Xuân Dũng**, 10 Toán, THPT NK Trần Phú, **Hải Phòng**
- 14) **Lê Khánh Toàn**, 11A, THPT Phan Đình Phùng, Tx. Hà Tĩnh, **Hà Tĩnh**

**THTT**

## MA PHƯƠNG BẬC CHẴN

NGUYỄN XUÂN HUY  
(Viện Công nghệ thông tin)

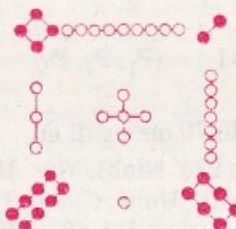
Ma phương là bảng số hình vuông trong đó mỗi hàng, mỗi cột và mỗi đường chéo đều cùng thỏa mãn một số tính chất nào đó. Các nhà thiên văn cổ Trung Hoa cho rằng mỗi tinh tú trên bầu trời đều ứng với một ma phương. Nhiều nhà toán học cổ Ai Cập, Ấn Độ và sau này các nhà toán học Phương Tây đã phát hiện ra những tính chất khá lí thú của các loại ma phương.

Trong THTT số 260 (2/ 1999) tác giả Nguyễn Danh Ninh đã giới thiệu về ma phương bậc lẻ. Sau đó, trong THTT số 264 (6/ 1999) tác giả Nguyễn Văn Thiêm đã giới thiệu đôi nét về ma phương bậc chẵn cấp 8. Bài này sẽ cung cấp cho các bạn một cách xây dựng các ma phương bậc chẵn tổng quát. Bạn nào say mê lập trình sẽ có thể cài đặt các thuật toán sinh tự động các ma phương bậc tùy ý.

Ma phương bậc  $n$  là một bảng số hình vuông, kích thước  $n \times n$  ô, chứa  $n^2$  số sao cho tổng các số trên mỗi hàng, trên mỗi cột và trên mỗi đường chéo đều bằng nhau. Tổng này được gọi là **đặc số** của ma phương.

Ta dễ dàng tính được đặc số của ma phương  $M_n$  bậc  $n$  chứa các số từ 1 đến  $n^2$  như sau :

$$n.S_n = 1 + 2 + \dots + n^2 \Rightarrow S_n = \frac{n(n^2 + 1)}{2}$$



Ma phương bậc 3  
thời cổ đại.

Đặc số  $S_3 = 15$ .

|    |    |    |    |
|----|----|----|----|
| 16 | 2  | 3  | 13 |
| 5  | 11 | 10 | 8  |
| 9  | 7  | 6  | 12 |
| 4  | 14 | 15 | 1  |

Ma phương  $M_4$   
Đặc số  $S_4 = 34$

Nếu ma phương  $M_n(a, d)$  bậc  $n$  chứa  $n^2$  số hạng liên tiếp của một cấp số cộng

$a+d, a+2d, \dots, a+n^2d$  thì đặc số của ma phương

này là  $S_n = \frac{na + n(n^2 + 1)d}{2}$ . Nói riêng  $M_n(0, 1)$

viết gọn là  $M_n$ .

Ngoài bậc  $n = 2$ , với mỗi số tự nhiên  $n \geq 1$  đều tồn tại ma phương với nhiều cách bố trí khác nhau của cùng  $n^2$  số.

Để xây dựng ma phương  $M_n(a, d)$  bậc chẵn  $n = 2k$  ta có thể thực hiện 5 bước sau :

$$6.1 + 6.34 = \frac{6.1 + 6.34}{2} = 11.5$$



**Bước 1. Vẽ bảng hình vuông  $M$  gồm  $n \times n$  ô.**

**Bước 2. Tạo mẫu:** Đặt  $k = \lfloor n/2 \rfloor$ , trong đó  $\lfloor x \rfloor$  là phần nguyên của số  $x$ , nghĩa là  $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$ .

Ta viết vào  $k$  ô đầu tiên bên trái thuộc hàng thứ nhất của bảng các ký tự T, D, N, B phục vụ cho việc đối chỗ các số trong bảng, trong đó ký tự T, D, N theo thứ tự biểu thị phép đối xứng qua tâm, qua trục dọc, qua trục ngang, còn ký tự B là giữ nguyên số trong ô. Các ô này được gọi là các ô mẫu.

Việc tạo  $k$  ô mẫu của hàng thứ nhất được thực hiện theo 3 bước như sau :

2.1. Viết liên tiếp  $d = \lfloor k/2 \rfloor$  ký tự T cho các ô đầu tiên bên trái.

2.2. Nếu  $k$  lẻ viết thêm ký tự D và N cho 2 ô tiếp theo.

2.3. Điền thêm các ký tự B cho đủ  $k$  ô bên trái.

Các thí dụ tạo mẫu

|   |   |  |  |
|---|---|--|--|
| T | B |  |  |
| B | T |  |  |
|   |   |  |  |
|   |   |  |  |

Tạo mẫu và thác triển cho ma phương bậc 4

|    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 36 | T  | D  | N  | 4  | 0  | 6  |    |
| 9  | 5  | 6  | 7  | 8  | 11 | 12 |    |
| 10 | 1  | 2  | 3  | 16 | 17 | 18 |    |
| 11 | 19 | 20 | 21 | 7  | 15 | 23 | 24 |
| 12 | 25 | 26 | 27 | 28 | 8  | 30 |    |
| 13 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 3  | 4  |

Tạo mẫu và thác triển cho ma phương bậc 6

• Với  $n = 4$  ta có  $k = \lfloor 4/2 \rfloor = 2$  (chẵn),  $d = \lfloor 2/2 \rfloor = 1$ , do đó 2 ô bên trái hàng đầu tiên được điền các ký tự T, B.

• Với  $n = 6$  ta có  $k = \lfloor 6/2 \rfloor = 3$  (lẻ),  $d = \lfloor 3/2 \rfloor = 1$ , do đó 3 ô bên trái hàng đầu tiên được điền các ký tự T, D, N.

• Với  $n = 18$  ta có  $k = \lfloor 18/2 \rfloor = 9$  (lẻ),  $d = \lfloor 9/2 \rfloor = 4$ , do đó 9 ô bên trái hàng đầu tiên được điền các ký tự T, T, T, T, D, N, B, B, B.

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| T | T | T | T | D | N | B | B | B |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| B | T | T | T | T | D | N | B | B |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| B | B | T | T | T | T | D | N | B |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| B | B | B | T | T | T | T | D | N |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| N | B | B | B | T | T | T | T | D |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| D | N | B | B | B | T | T | T | T |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| T | D | N | B | B | B | T | T | T |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| T | T | D | N | B | B | B | T | T |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| T | T | T | D | N | B | B | B | T |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Tạo mẫu và thác triển cho ma phương bậc 18

**Bước 3. Thác triển mẫu :** Điền tiếp cho đủ  $k \times k$  ô ở  $k$  hàng gốc trên bên trái của bảng, mỗi hàng  $k$  phần tử bằng cách sau :

Giả sử hàng thứ  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, k-1$ ) có các phần tử  $a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, a_k$  ta sao chép  $k$  phần tử

đó xuống hàng thứ  $i+1$  bằng cách : các phần tử  $a_1, a_2, \dots, a_{k-1}$  được chuyển dịch sang phải 1 ô, còn  $a_k$  đặt ở ô đầu trái, nghĩa là  $a_k, a_1, a_2, \dots, a_{k-1}$ .

|    |    |    |    |
|----|----|----|----|
| 1  | 2  | 3  | 4  |
| 5  | 6  | 7  | 8  |
| 9  | 10 | 11 | 12 |
| 13 | 14 | 15 | 16 |

Khởi trị cho ma phương  $M_4$

**Bước 4. Khởi trị :** Điền các số từ  $a+d$  đến  $a+n^2d$  vào bảng theo trật tự từ trên xuống dưới rồi từ trái sang phải. Thí dụ  $M_4$  được khởi trị như hình bên.

**Bước 5. Thực hiện các phép đối xứng**

Thực hiện các phép đối xứng trên các phần tử  $a[i, j]$  ở hàng thứ  $i$ , cột thứ  $j$  ( $1 \leq i, j \leq n$ ) của  $M_n(a, d)$  mà ở đó có chứa các ký tự T, D và N như sau :

T - thực hiện phép đối xứng tâm : Đối chỗ 2 phần tử  $a[i, j]$  và  $a[n-i+1, n-j+1]$ , chúng đối xứng nhau qua tâm của bảng  $M$ .

D - thực hiện phép đối xứng theo trục dọc : Đối chỗ 2 phần tử  $a[i, j]$  và  $a[i, n-j+1]$ , chúng đối xứng nhau qua trục dọc của bảng  $M$ .

N - thực hiện phép đối xứng theo trục ngang : Đối chỗ 2 phần tử  $a[i, j]$  và  $a[n-i+1, j]$ , chúng đối xứng nhau qua trục ngang của bảng  $M$ .

Sau khi thực hiện các phép T, D, N theo bảng thác triển mẫu và giữ nguyên số trong ô có ký tự B ta nhận được một ma phương  $M_n(a, d)$  bậc chẵn  $n = 2k$ .

## LỜI GIẢI CÁC BÀI THI ...

(Tiếp trang 11)

**Lời giải:** Giả sử  $p$  là một ước nguyên tố của  $C_{2n}^n$ . Gọi  $m$  là số mũ của  $p$  trong phân tích chuẩn của  $C_{2n}^n$ . Ta sẽ chứng minh  $p^m \leq 2n$ .

Giả sử, ngược lại,  $p^m > 2n$ . Khi đó  $\left\lfloor \frac{2n}{p^m} \right\rfloor = 0$ .

Suy ra:

$$m = \left( \left\lfloor \frac{2n}{p} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor \right) + \left( \left\lfloor \frac{2n}{p^2} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor \right) + \dots + \left( \left\lfloor \frac{2n}{p^{m-1}} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{n}{p^{m-1}} \right\rfloor \right) \quad (*)$$

Với  $x \in \mathbb{R}$  ta có  $2[x] + 2 > 2x \geq [2x] \Rightarrow [2x] - 2[x] \leq 1$ . Do đó, từ (\*) suy ra  $m \leq m-1$ . Mâu thuẫn  $\Rightarrow$  đpcm.

Từ kết quả vừa chứng minh ở trên ta được:

$$C_{2n}^n = (2n)^k \Leftrightarrow k = 1 \text{ và } C_{2n}^n = 2n, \Leftrightarrow n = 1.$$



# LỜI GIẢI CÁC BÀI TOÁN THI CHỌN HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA

## MÔN TOÁN THPT NĂM HỌC 2001 - 2002

### BẢNG B

NGUYỄN KHẮC MINH  
(Vụ Trung học Phổ thông)

**Bài 1:** Trong mặt phẳng, cho hai đường tròn cố định  $(O, R_1)$  và  $(O, R_2)$  có  $R_1 > R_2$ . Một hình thang  $ABCD$  ( $AB \parallel CD$ ) thay đổi sao cho bốn đỉnh  $A, B, C, D$  nằm trên đường tròn  $(O, R_1)$  và giao điểm của hai đường chéo  $AC, BD$  nằm trên đường tròn  $(O, R_2)$ . Hãy tìm quỹ tích giao điểm  $P$  của hai đường thẳng  $AD$  và  $BC$ .

**Lời giải.** (Bạn đọc tự vẽ hình): a/ *Phần thuận:* Gọi  $I$  là giao điểm của hai đường chéo  $AC$  và  $BD$ . Vì  $ABCD$  là hình thang nội tiếp nên nó là hình thang cân. Suy ra  $OI$  là trục đối xứng của hình thang  $ABCD$  và  $O, I, P$  thẳng hàng.

Để thấy  $OADI$  là tứ giác nội tiếp. Do đó:

$$PA \cdot PD = PO \cdot PI = OP \cdot IP = OP(OP - OI) = OP^2 - OP \cdot OI \quad (*)$$

Mà  $PA \cdot PD = \mathcal{P}_{P/(O)} = OP^2 - R_1^2$ , nên từ  $(*)$  ta được:  $OP \cdot OI = R_1^2$ . Suy ra:

$$OP = R_1^2 / OI = R_1^2 / R_2 = \text{const.}$$

Như vậy, khi hình thang  $ABCD$  thay đổi thỏa mãn điều kiện đề bài thì  $P$  sẽ chuyển động trên đường tròn tâm  $O$  bán kính  $R_1^2 / R_2$ .

b/ *Phần đảo:* Lấy một điểm  $P$  bất kì trên  $(O, R_1^2 / R_2)$ . Gọi  $I$  là giao điểm của  $OP$  và  $(O, R_2)$ . Dễ dàng dựng được hình thang  $ABCD$  nội tiếp  $(O, R_1)$ , nhận  $I$  là giao điểm hai đường chéo và nhận  $P$  là giao điểm của hai đường thẳng chứa hai cạnh bên.

c/ *Kết luận:* Quỹ tích cần tìm là đường tròn tâm  $O$ , bán kính  $R_1^2 / R_2$ .

**Bài 2:** Hãy tìm tất cả các hàm số  $f(x)$  xác định trên tập hợp số thực  $R$  và thỏa mãn hệ thức

$$f(y - f(x)) = f(x^{2002} - y) - 2001y \cdot f(x)$$

với mọi số thực  $x, y$ .

**Lời giải:** Giả sử  $f(x)$  là hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài. Lần lượt thế  $y = f(x)$  và  $y = x^{2002}$  vào hệ thức của đề bài, ta được:

$$f(0) = f(x^{2002} - f(x)) - 2001(f(x))^2 \quad \forall x \in R;$$

$$f(x^{2002} - f(x)) = f(0) - 2001x^{2002}f(x) \quad \forall x \in R.$$

Cộng vế theo vế hai đẳng thức trên, ta được:

$$f(x) \cdot (f(x) + x^{2002}) = 0 \quad \forall x \in R.$$

Từ đó suy ra, nếu  $f$  là hàm số thỏa mãn yêu cầu đề bài thì:

$$f(0) = 0 \quad (1) \quad \text{và} \quad f(x) = -x^{2002} \quad (2)$$

với mọi  $x$  mà  $f(x) \neq 0$ .

Để thấy, hai hàm số  $f_1(x) \equiv 0$  và  $f_2(x) = -x^{2002} \quad \forall x \in R$  thỏa mãn đồng thời (1) và (2).

Ta sẽ chứng minh rằng nếu tồn tại hàm số  $f(x)$  thỏa mãn yêu cầu đề bài mà khác  $f_1$  và  $f_2$  thì dẫn đến mâu thuẫn.

Khi đó, theo các lập luận ở trên,  $f$  phải thỏa mãn (1) và (2). Hơn nữa, do  $f$  khác  $f_2$  nên tồn tại  $x_0 \neq 0$  sao cho  $f(x_0) = 0$ . Lại do  $f$  khác  $f_1$  nên tồn tại  $y_0 \neq 0$  sao cho  $f(y_0) \neq 0$ .

Thay  $x = 0$  vào hệ thức của đề bài, với lưu ý tới (1), ta được:  $f(y) = f(-y) \quad \forall y \in R$ . Do đó, có thể giả sử  $y_0 > 0$ .

Vì  $f(y_0) \neq 0$  nên theo (2), phải có  $f(y_0) = -y_0^{2002} \quad (*)$ .

Mặt khác, thay  $x = x_0$  và  $y = -y_0$  vào hệ thức của đề bài, ta được:

$$f(-y_0) = f(x_0^{2002} + y_0). \quad (**)$$

Từ  $(*)$ ,  $(**)$  và (2) ta có:

$$0 \neq -y_0^{2002} = f(y_0) = f(-y_0) = f(x_0^{2002} + y_0) = -(x_0^{2002} + y_0)^{2002} < -y_0^{2002} \quad (\text{do } y_0 > 0).$$

$\Rightarrow$  Mâu thuẫn. Vậy chỉ có thể  $f \in \{f_1; f_2\}$ . Phép thử trực tiếp cho thấy  $f(x) \equiv 0$  là hàm số duy nhất cần tìm.

**Bài 3:** Cho tập hợp  $S$  gồm tất cả các số nguyên trong đoạn  $[1; 2002]$ . Gọi  $T$  là tập hợp gồm tất cả các tập hợp con không rỗng của  $S$ . Với mỗi tập hợp  $X$  thuộc  $T$ , kí hiệu  $m(X)$  là trung bình cộng của tất cả các số thuộc  $X$ . Đặt

$$m = \frac{\sum m(X)}{|T|}$$

ở đây tổng lấy theo tất cả các tập hợp  $X$  thuộc  $T$ .

Hãy tính giá trị của  $m$ .

( $|T|$  kí hiệu số phần tử của tập hợp  $T$ ).

**Lời giải:** Với mỗi  $k \in \{1, 2, \dots, 2002\}$ , đặt:  $m_k = \sum m(X)$ , ở đây tổng lấy theo tất cả các tập hợp  $X$  thuộc  $T$  mà  $|X| = k$ .



Xét số  $a$  bất kì thuộc tập  $S$ . Dễ thấy,  $a$  có mặt trong  $C_{2001}^{k-1}$  tập  $X$  thuộc  $T$  mà  $|X| = k$ . Suy ra:  $k.m_k = (1 + 2 + \dots + 2002) C_{2001}^{k-1} = 1001 \times 2003 \cdot C_{2001}^{k-1}$ . Do đó:

$$\sum m(X) = \sum_{k=1}^{2002} m_k = 1001 \times 2003 \cdot \sum_{k=1}^{2002} \left( \frac{C_{2001}^{k-1}}{k} \right) = \left( \frac{2003}{2} \right) \sum_{k=1}^{2002} C_{2002}^k = \frac{2003(2^{2002} - 1)}{2}$$

Dễ thấy,  $|T| = 2^{2002} - 1$ . Vì vậy:

$$m = \left( \frac{\sum m(X)}{|T|} \right) = \frac{2003}{2}.$$

**Bài 4:** Cho  $a, b, c$  là ba số thực tùy ý. Chứng minh rằng:

$$6(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) \leq 27abc + 10(a^2+b^2+c^2)^{3/2} \quad (1)$$

Hỏi dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

**Lời giải:** Xét các trường hợp sau:

- Trường hợp 1:  $a^2 + b^2 + c^2 = 0$ . Khi đó BĐT (1) hiển nhiên đúng.

- Trường hợp 2:  $a^2 + b^2 + c^2 > 0$ . Không mất tổng quát, giả sử  $|a| \leq |b| \leq |c|$  (\*) và  $a^2 + b^2 + c^2 = 9$  (\*\*).

Khi đó: (1)  $\Leftrightarrow 2(a+b+c) - abc \leq 10$  (2)

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } [2(a+b+c) - abc]^2 &= [2(a+b) + c(2-ab)]^2 \\ &\leq [(a+b)^2 + c^2][4 + (2-ab)^2] \\ &= (9+2ab)[8-4ab+(ab)^2] = \\ &= 2(ab)^3 + (ab)^2 - 20ab + 72 \\ &= (ab+2)^2(2ab-7) + 100 \end{aligned} \quad (3)$$

Từ (\*) và (\*\*) suy ra  $c^2 \geq 3$ . Do đó:  $2ab \leq a^2 + b^2 = 9 - c^2 \leq 6$ . Vì vậy, từ (3) ta có:  $[2(a+b+c) - abc]^2 \leq 100$ . Suy ra:  $2(a+b+c) - abc \leq 10$ . BĐT (2) được chứng minh, và do đó BĐT (1) được chứng minh.

Dấu đẳng thức ở (2) xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} |a| \leq |b| \leq |c| \\ a^2 + b^2 + c^2 = 9 \\ (a+b)/2 = c/(2-ab) \Leftrightarrow a = -1 \text{ và } b = c = 2 \\ ab+2=0 \\ 2(a+b+c) - abc \geq 0 \end{cases}$$

Từ đó suy ra, dấu đẳng thức ở (1) xảy ra khi và chỉ khi  $(a, b, c)$  là một hoán vị của  $(-1, 2, 2)$ , trong đó  $t$  là một số thực không âm.

**Bài 5:** Xét phương trình:

$$\frac{1}{2x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-4} + \dots + \frac{1}{x-k^2} + \dots + \frac{1}{x-n^2} = 0$$

trong đó  $n$  là tham số nguyên dương.

1/ Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương  $n$ , phương trình nêu trên có duy nhất nghiệm trong khoảng  $(0; 1)$ ; kí hiệu nghiệm đó là  $x_n$ .

2/ Chứng minh rằng dãy số  $\{x_n\}$  có giới hạn hữu hạn khi  $n \rightarrow +\infty$ .

**Lời giải:** Xét hàm số

$$f_n(x) = \frac{1}{2x} + \frac{1}{x-1} + \dots + \frac{1}{x-n^2}$$

1/ Dễ thấy, với mỗi  $n \in \mathbb{N}^*$ , hàm số  $f_n(x)$  liên tục và nghịch biến trên khoảng  $(0; 1)$ . Hơn nữa, ta có:  $f_n(x) \rightarrow +\infty$  khi  $x \rightarrow 0^+$  và  $f_n(x) \rightarrow -\infty$  khi  $x \rightarrow 1^-$ . Từ đó suy ra với mỗi  $n \in \mathbb{N}^*$ , PT  $f_n(x) = 0$  có duy nhất nghiệm  $x_n \in (0; 1)$ .

2/ Với mỗi  $n \in \mathbb{N}^*$ , ta có:

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x_n) &= \frac{1}{2x_n} + \frac{1}{x_n-1} + \frac{1}{x_n-4} + \dots + \\ &\frac{1}{x_n-k^2} + \dots + \frac{1}{x_n-n^2} + \frac{1}{x_n-(n+1)^2} \\ &= \frac{1}{x_n-(n+1)^2} < 0 \quad (\text{do } x_n \in (0; 1)). \end{aligned}$$

Suy ra, với mỗi  $n \in \mathbb{N}^*$ , p.t.  $f_{n+1}(x) = 0$  có duy nhất nghiệm thuộc khoảng  $(0; x_n)$ . Mà  $(0; x_n) \subset (0; 1) \forall n \in \mathbb{N}^*$  nên, theo kết quả phần 1/, suy ra  $x_{n+1} \in (0; x_n) \forall n \in \mathbb{N}^*$  hay  $x_{n+1} < x_n \forall n \in \mathbb{N}^*$ .

Dãy  $\{x_n\}$  là dãy đơn điệu giảm và bị chặn dưới bởi 0 nên có giới hạn hữu hạn khi  $n \rightarrow +\infty$ .

**Bài 6:** Hãy tìm tất cả các số nguyên dương  $n$  thoả mãn điều kiện:

$$C_{2n}^n = (2n)^k$$

trong đó  $k$  là số các ước nguyên tố của  $C_{2n}^n$ .

( $C_{2n}^n$  kí hiệu số tổ hợp chập  $n$  của tập hợp có  $2n$  phần tử.). (Xem tiếp trang 9)





## ĐỀ RA KÌ NÀY

### CÁC LỚP THCS

**Bài T1/304.** Tìm tất cả các số nguyên dương  $N$  có ba chữ số sao cho cộng các chữ số của  $N$  với  $N$  và với số được viết bởi các chữ số của  $N$  theo thứ tự ngược lại, ta được một số chính phương.

TRẦN VĂN VUÔNG  
(Viện Khoa học Giáo dục)

**Bài T2/304.** Giải phương trình

$$\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = 2x^2 - 5x - 1$$

ĐÀO DUY HẢO  
(SV K24D Toán ĐHSP HN 2)

**Bài T3/304.** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $x^4 + y^4$ , trong đó  $x, y$  là hai số thực thỏa mãn các điều kiện  $x \geq a$  và  $x + y \geq a + 1$  với số  $a \geq 1$  cho trước.

LÊ ANH TUẤN  
(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

**Bài T4/304.** Cho tam giác đều  $ABC$ . Hãy dựng một đường thẳng đi qua tâm của tam giác, cắt các cạnh  $AB, AC$  và tia  $BC$  theo thứ tự tại  $D, E$  và  $F$  sao cho  $DE = EF$ .

ĐÀM VĂN NHÌ  
(GV CĐSP Thái Bình)

**Bài T5/304.** Cho tam giác  $ABC$  với các đường cao  $AD, BE, CF$ . Gọi  $C_1$  và  $B_1, A_2$  và  $C_2, A_3$  và  $B_3$  theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của  $D$  lên  $AB$  và  $AC$ , của  $E$  lên  $BC$  và  $BA$ , của  $F$  lên  $CB$  và  $CA$ . Gọi giao điểm của  $BC$  và  $B_1C_1, AC$  và  $A_2C_2, AB$  và  $A_3B_3$  là  $M, N, P$  theo thứ tự. Chứng minh rằng  $M, N, P$  thẳng hàng.

TRẦN TRƯỜNG SINH  
(GV THPT Phan Đình Giót, Điện Biên,  
Lai Châu)

### CÁC LỚP THPT

**Bài T6/304.** Cho bảng hình vuông gồm  $13 \times 13$  ô vuông. Người ta tô màu đỏ  $s$  ô vuông của bảng sao cho không có 4 ô đỏ nào nằm ở 4 góc của một hình chữ nhật. Hỏi giá trị lớn nhất của  $s$  có thể là bao nhiêu?

LÊ QUANG NĂM  
(SV khoa Toán - Tin, ĐHKHTN -  
ĐHQG Tp. Hồ Chí Minh)

**Bài T7/304.** Dãy số  $(u_n)$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) được

$$\text{xác định bởi } u_n = \frac{\sqrt{n} \cdot \sqrt[3]{7n+10}}{(n+1) \cdot 3^n} \text{ với mọi } n = 1,$$

2, 3, ... Chứng minh rằng  $u_1 + u_2 + \dots + u_n < 4$  với mỗi giá trị của  $n$ .

TRẦN HỒNG SƠN  
(GV THPT BC Thái Thụy, Thái Bình)

**Bài T8/304.** Tìm mọi hàm số  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  thỏa mãn điều kiện

$$f(x - f(y)) = f(x + y^{2002}) + f(f(y) + y^{2002}) + 1$$

với mọi  $x, y$  thuộc  $\mathbb{R}$ .

NGUYỄN VĂN THÔNG  
(GV THPT chuyên Lê Quý Đôn, Đà Nẵng)

**Bài T9/304.** Cho hai đường tròn đồng tâm  $(O, r)$  và  $(O, R)$  với  $r < R$ . Tam giác  $ABC$  nội tiếp đường tròn  $(O, r)$  và tam giác  $A_1B_1C_1$  nội tiếp đường tròn  $(O, R)$  sao cho các điểm  $A_1, B_1, C_1$  theo thứ tự thuộc các tia  $BC, CA, AB$ . Chứng

$$\text{minh rằng } \frac{S(A_1B_1C_1)}{S(ABC)} \geq \left(\frac{R}{r}\right)^2, \text{ trong đó } S(XYZ)$$

là hiệu diện tích của tam giác  $XYZ$ .

NGUYỄN XUÂN HÙNG  
(GV THPT Lam Sơn, Thanh Hóa)

**Bài T10/304.** Cho một hình cầu tâm  $O$  bán kính  $r$ . Một tứ diện  $A_1A_2A_3A_4$  ngoại tiếp hình cầu. Các mặt phẳng tiếp xúc với hình cầu và song song với các mặt của tứ diện  $A_1A_2A_3A_4$  cắt tứ diện này thành 4 tứ diện nhỏ. Gọi  $r_1, r_2, r_3, r_4$  và  $h_1, h_2, h_3, h_4$  theo thứ tự là bán kính hình cầu nội tiếp tứ diện nhỏ đỉnh  $A_1, A_2, A_3, A_4$  và đường cao hạ từ đỉnh  $A_1, A_2, A_3, A_4$  của các tứ diện nhỏ. Chứng minh rằng tổng  $\frac{r_1}{h_1} + \frac{r_2}{h_2} + \frac{r_3}{h_3} + \frac{r_4}{h_4}$  là một số không đổi khi  $A_1A_2A_3A_4$  thay đổi nhưng vẫn luôn ngoại tiếp hình cầu.

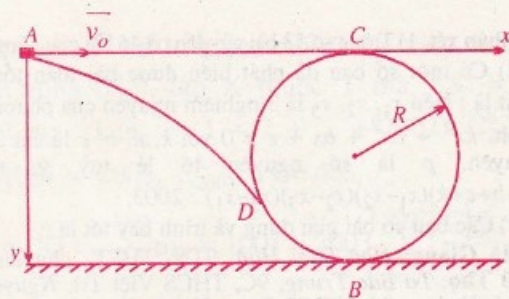
NGUYỄN THẾ BÌNH  
(Sở GD-ĐT Hà Giang)

### CÁC ĐỀ VẬT LÝ

**Bài L1/304.** Trong mặt phẳng thẳng đứng có một đường trượt cấu tạo từ 2 phần: đường parabol với phương trình  $y = \frac{5}{49}x^2$ , nối tiếp là đường tròn có bán kính  $R = 3,6\text{m}$ .

Một vật nhỏ nằm ở đỉnh  $A$  của đường trượt và được truyền vận tốc đầu  $v_0$  theo phương ngang (hình vẽ).

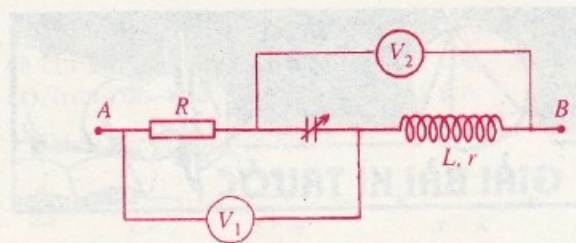




Tìm điều kiện của  $v_0$  để vật đi hết vòng tròn của đường trượt. Bỏ qua ma sát. Lấy  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .

NGUYỄN XUÂN QUANG  
(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

**Bài L2/304.** Cho mạch điện có sơ đồ như hình bên. Các vôn kế có điện trở rất lớn. Biết  $u_{AB} = 120 \sin 100\pi t$  (V);  $R = 30\Omega$ ;  $r = 10\Omega$ ;



$L = \frac{1}{10\pi} \text{ H}$ . Cần điều chỉnh cho điện dung của tụ điện có giá trị là bao nhiêu để:

a) Số chỉ của vôn kế  $V_1$  đạt cực đại.

b) Số chỉ của vôn kế  $V_2$  đạt cực trị. Đó là cực đại hay cực tiểu?

VŨ ĐÌNH TÚY  
(Vũ THPT)

## PROBLEMS IN THIS ISSUE

### FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

**T1/304.** Find all 3-digit positive integers  $N$  such that the sum of  $N$  with its three digits and with the number written with these digits in the reverse order is a perfect square.

**T2/304.** Solve the equation

$$\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = 2x^2 - 5x - 1$$

**T3/304.** Find the least value of the expression  $x^4 + y^4$  where  $x, y$  are real numbers satisfying the conditions:  $x \geq a, x + y \geq a + 1$  where  $a$  is a given number,  $a \geq 1$ .

**T4/304.**  $ABC$  is an equilateral triangle. Construct a line passing through its center of gravity, cutting the sides  $AB, AC$  and the ray  $BC$  respectively at  $D, E$  and  $F$  so that  $DE = EF$ .

**T5/304.** Let  $AD, BE, CF$  be the altitudes of triangle  $ABC$ . Let  $C_1$  and  $B_1, A_2$  and  $C_2, A_3$  and  $B_3$  be respectively the orthogonal projections of  $D$  on  $AB$  and  $AC$ , of  $E$  on  $BC$  and  $BA$ , of  $F$  on  $CB$  and  $CA$ . Let  $M, N, P$  be respectively the points of intersection of  $BC$  and  $B_1C_1$ , of  $AC$  and  $A_2C_2$ , of  $AB$  and  $A_3B_3$ . Prove that the points  $M, N, P$  are collinear.

### FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

**T6/304.** Let be given a square of size  $13 \times 13$  (it consists of  $13 \times 13$  little squares). One colours red  $s$  little squares so that four little squares at the corners of every rectangle would not be coloured red. What is the greatest value of  $s$ ?

**T7/304.** The sequence of numbers  $(u_n)$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) is defined by:  $u_n = \frac{\sqrt{n} \cdot \sqrt[3]{7n+10}}{(n+1) \cdot 3^n}$

for all  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Prove that  $u_1 + u_2 + \dots + u_n < 4$  for all  $n = 1, 2, 3, \dots$

**T8/304.** Find all functions  $f: R \rightarrow R$  satisfying the condition:

$$f(x - f(y)) = f(x + y^{2002}) + f(f(y) + y^{2002}) + 1$$

for all  $x, y$  in  $R$ .

**T9/304.** Let be given two concentric circles  $(O, r), (O, R)$  with  $r < R$ . The triangle  $ABC$  inscribes in the circle  $(O, r)$ , the triangle  $A_1B_1C_1$  inscribes in the circle  $(O, R)$  so that the points  $A_1, B_1, C_1$  lie respectively on the rays  $BC, CA, AB$ . Prove that

$$\frac{S(A_1B_1C_1)}{S(ABC)} \geq \left(\frac{R}{r}\right)^2$$

where  $S(XYZ)$  denotes the area of triangle  $XYZ$ .

**T10/304.** Let be given a sphere with center  $O$  and radius  $r$ . A tetrahedron  $A_1A_2A_3A_4$  circumscribes the sphere. The planes touching the sphere and parallel to the faces of the tetrahedron by cutting the tetrahedron form 4 small tetrahedra. Let  $r_i$  and  $h_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) be respectively the radius of the sphere inscribed in the small tetrahedron with  $A_i$  as a vertex and the altitude issued from  $A_i$  of this small tetrahedron.

Prove that the sum  $\frac{r_1}{h_1} + \frac{r_2}{h_2} + \frac{r_3}{h_3} + \frac{r_4}{h_4}$  is invariant when the tetrahedron  $A_1A_2A_3A_4$  varies, circumscribing the sphere.





**Bài T1/300.** Giả sử phương trình  $x^{2003} + ax^2 + bx + c = 0$  với các hệ số nguyên  $a, b, c$  có 3 nghiệm nguyên  $x_1, x_2, x_3$ . Chứng minh rằng :

$(a + b + c + 1)(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)$  chia hết cho 2003.

**Lời giải. Cách 1** (đa số bạn đọc)

Ta đưa phương trình về dạng  $(x^{2003} - x) + [ax^2 + (b+1)x + c] = 0$ , và đặt  $f(x) = ax^2 + (b+1)x + c$ . Từ giả thiết  $x_1, x_2$ , và  $x_3$  là ba nghiệm nguyên của phương trình, sử dụng định lý Phec-ma đối với số nguyên tố 2003, ta có :

$$(x_i^{2003} - x_i) : 2003 \Rightarrow f(x_i) : 2003 \quad (i = 1; 2; 3) \quad (1)$$

Nếu  $(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1) : 2003$  thì ta có ngay đpcm. Giả sử trái lại, trong các hiệu  $x_1 - x_2, x_2 - x_3$  và  $x_3 - x_1$ , không có hiệu nào chia hết cho 2003. Từ (1) ta có :

$$f(x_1) - f(x_2) = (x_1 - x_2)[a(x_1 + x_2) + b + 1] : 2003 \Rightarrow (ax_1 + ax_2 + b + 1) : 2003, \text{ và}$$

$$f(x_2) - f(x_3) = (x_2 - x_3)[a(x_2 + x_3) + b + 1] : 2003 \Rightarrow (ax_2 + ax_3 + b + 1) : 2003 \quad (2)$$

Suy ra  $a(x_3 - x_1) : 2003$ , kéo theo  $a : 2003$ .

Điều đó cùng với (2) và (1) lần lượt cho ta  $(b+1) : 2003$  và  $c : 2003$ .

Do đó  $a+b+c+1 : 2003$ , suy ra đpcm.

**Cách 2.** (theo Trần Tấn Phong, lớp 7A trường PTCS Lập Thạch, Vĩnh Phúc).

Lập luận như trên có (1)

Với cùng kí hiệu trên, ta viết  $f(x)$  lại như sau:

$$f(x) = A(x - x_1)(x - x_2) + B(x - x_1) + C, \quad (3)$$

$$\text{trong đó: } \begin{cases} a = A \\ b+1 = -A(x_1 + x_2) + B \\ c = Ax_1x_2 - Bx_1 - C \end{cases} \quad (4)$$

Nếu trong các hiệu  $x_1 - x_2, x_2 - x_3$  và  $x_3 - x_1$ , không có hiệu nào chia hết cho 2003 thì từ (1) và (3) ta có  $f(x_1) : 2003 \Rightarrow C : 2003$ ;  $f(x_2) : 2003 \Rightarrow B : 2003$ ;  $f(x_3) : 2003 \Rightarrow A : 2003$ . Các kết quả đó cùng với các đẳng thức (4) cho ta  $(a+b+c+1) : 2003$ , suy ra đpcm.

**Nhận xét.** 1) Trong số 53 bài gửi đến có 46 bài giải đúng.

2) Có một số bạn đã phát biểu được bài toán tổng quát là : Nếu  $x_1, x_2, x_3$  là 3 nghiệm nguyên của phương trình  $kx^p + ax^2 + bx + c = 0$  với  $k, a, b, c$  là các số nguyên,  $p$  là số nguyên tố lẻ tùy ý, thì  $(a+b+c+k)(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1) : 2003$ .

3) Các bạn có bài giải đúng và trình bày tốt là :

**Hà Giang:** Ngô Thái Hoà, 9TN, THPT chuyên ; **Phú Thọ:** Tạ Bảo Trung, 9C, THCS Việt Trì, Nguyễn Minh Hoàng, 9A, THCS Đoàn Hùng, Nguyễn Quang Huy, Nguyễn Trung Kiên và Ngô Vĩnh Thái, 8A1, Nguyễn Xuân Trường và Nguyễn Trường Thọ, 9A, THCS Giáy, Phong Châu ; **Vĩnh Phúc:** Lê Thái Sơn, 9B, THCS Vĩnh Tường, Trần Tấn Phong, 9A, THCS, Lập Thạch, Hoàng Thị Minh Huệ và Phạm Huy, 8C, THCS Tam Dương, Trương Ngọc Cường, 6B, THCS Vĩnh Yên ; **Bắc Giang:** Phan Tuấn Anh, 8A, THCS Đức Giang huyện Yên Dũng ; **Bắc Ninh:** Lưu Thị Thu Trang, 8A, Chu Văn Lai, 9C, THCS Yên Phong ; **Hoà Bình:** Ngô Nhất Sơn, 9A, THCS B Yên Thủy ; **Quảng Ninh:** Bùi Quốc Hùng, 9A, THCS Trần Quốc Toàn, Ưông Bí ; **Hải Phòng:** Đào Thị Huệ, 9A5, THCS Thủy Đường, Thủy Nguyên, Nguyễn Vũ Lâm và Nguyễn Mạnh Chiến, 9A, THPT NK Trần Phú ; **Hung Yên:** Doãn Thị Kim Huệ, 8C THCS Phạm Huy Thông, Ân Thi ; **Hải Dương:** Nguyễn Duy Mạnh và Hoàng Đình Phương, 8B THCS Lê Quý Đôn, Trần Quốc Hoàn, 9A1, THCS Chu Văn An, Thanh Hà, Lê Đình Huy, 9A, THCS Nguyễn Trãi, Nam Sách ; **Hà Nội:** Đặng Văn Giáp, 9, THCS Ngô Gia Tự, Gia Lâm, Phạm Đức Anh, 10 chuyên Lí, ĐH KHTN, ĐHQG ; **Nam Định:** Đoàn Duy Thuyết, 9A2, THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên ; **Thanh Hóa:** Trần Hoài Thu, Bùi Minh Nghĩa, 9A, THCS Trần Mai Ninh, Bùi Tiến Quân, Nguyễn Ngọc Tú, 9B, THCS Lê Đình Kiên, Yên Định, Trịnh Thành Đông, 9A, THCS Tây Đô, Vinh Lộc, Nguyễn Tuấn Nam, 9A, THCS Nhữ Bá Sĩ, Hoàng Hoá ; **Nghe An:** Mạnh Phúc Thọ, 9E, THCS Trung Đô, Vinh ; **Định Việt Tú,** 9A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương ; **Đà Nẵng:** Thái Thanh Hải, 9/2, Trương Minh Tiến, 9/3, THCS Nguyễn Khuyến, Q. Hải Châu ; **Khánh Hoà:** Trần Kiến Thức, 9A, THCS Thái Nguyên, Nha Trang ; **Bình Định:** Nguyễn Yên Vũ, 8A8, THCS Đồng Đa, Quy Nhơn ; **Nguyễn Phúc Thọ,** 9D1, THCS Ngô Mây, Phù Cát ; **TP. Hồ Chí Minh:** Kha Tuấn Minh, 9A1, THCS Hoa Lư, Q9.

NGUYỄN HUY ĐOAN

**Bài T2/300.** Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5}{5} \geq \sqrt[5]{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5} + \frac{(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 + (\sqrt{a_2} - \sqrt{a_3})^2 + (\sqrt{a_3} - \sqrt{a_4})^2 + (\sqrt{a_4} - \sqrt{a_5})^2}{20}$$

trong đó  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$  là các số không âm. Đẳng thức xảy ra khi nào ?

**Lời giải.** (của bạn Trần Quốc Hoàn, 9A1, THCS Chu Văn An, Thanh Hà, Hải Dương)

Ta chứng minh bất đẳng thức chặt hơn là

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5}{5} \geq \sqrt[5]{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5} +$$



$$\frac{(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2})^2+(\sqrt{a_2}-\sqrt{a_3})^2+(\sqrt{a_3}-\sqrt{a_4})^2+(\sqrt{a_4}-\sqrt{a_5})^2+(\sqrt{a_5}-\sqrt{a_1})^2}{20}$$

Thật vậy, khai triển về phải và chuyển phần phân số đối với  $a_i$  sang về trái, ta thu được bất đẳng thức tương đương sau :

$$\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+\sqrt{a_1a_2}+\sqrt{a_2a_3}+\sqrt{a_3a_4}+\sqrt{a_4a_5}+\sqrt{a_5a_1}}{10} \geq \sqrt[5]{a_1a_2a_3a_4a_5}$$

Theo bất đẳng thức Côsi với 10 số thì bất đẳng thức này đúng.

Đẳng thức xảy ra chỉ khi  $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5$ .

**Nhận xét.** Rất đông bạn gửi lời giải và phần lớn các bạn đều giải đúng nhưng biến đổi dài. Một số bạn giải sai do áp dụng sai chiều bất đẳng thức.

VŨ ĐÌNH HÒA

**Bài T3/300.** Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x}$ , trong đó  $x, y$  là hai số thực không âm thỏa mãn điều kiện  $x+y=1$ .

**Lời giải.** Ta giải bài toán tổng quát hơn :

Tìm giá trị lớn nhất (GTLN), giá trị nhỏ nhất (GTNN) của biểu thức  $A = x\sqrt{m+y} + y\sqrt{m+x}$ , trong đó  $x, y$  là hai số thực không âm thỏa mãn điều kiện  $x+y=k$ , với  $k, m$  là hai số dương cho trước.

Chú ý rằng  $A \geq 0$ .

a) Tìm GTLN : Áp dụng BĐT Bu-nhi-a-côp-xki ta có :

$$\begin{aligned} A^2 &= (\sqrt{x} \cdot \sqrt{m+xy} + \sqrt{y} \cdot \sqrt{m+xy})^2 \leq \\ &\leq (x+y)(xm+xy+ym+xy) = k(mk+2xy) \\ &\leq mk^2 + 2k\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = mk^2 + \frac{k^3}{2} = \frac{k^2}{2}(2m+k) \end{aligned}$$

$$\text{Từ đó } A \leq \frac{k\sqrt{4m+2k}}{2}$$

Đẳng thức xảy ra khi  $x=y=\frac{k}{2}$ , lúc đó GTLN

$$\text{của } A \text{ là } \frac{k\sqrt{4m+2k}}{2}$$

Với  $m=k=1$  theo đề bài thì GTLN của  $A$  là  $\frac{\sqrt{6}}{2}$ , xảy ra khi  $x=y=\frac{1}{2}$ .

b) Tìm GTNN. Chú ý rằng  $x \geq 0$  và  $y \geq 0$ .

$$\begin{aligned} A &= x\sqrt{m+y} + y\sqrt{m+x} - (x+y)\sqrt{m} + k\sqrt{m} \\ &= x(\sqrt{m+y}-\sqrt{m}) + y(\sqrt{m+x}-\sqrt{m}) + k\sqrt{m} \geq k\sqrt{m} \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi  $x=0, y=k$  hoặc  $y=0, x=k$ , lúc đó GTNN của  $A$  là  $k\sqrt{m}$ . Với  $m=k=1$  theo đề bài thì GTNN của  $A$  là 1, xảy ra khi  $x=0, y=1$  hoặc  $y=0, x=1$ .

**Nhận xét.** Đa số các bạn giải đúng nhưng biến đổi dài. Một số ít bạn kết luận sai là  $-\sqrt{\frac{3}{2}} \leq A \leq \sqrt{\frac{3}{2}}$ . Bạn

Nguyễn Trung Kiên, 9A, THCS Giấy, Phong Châu, Phú Thọ đã giải bài toán tổng quát.

Các bạn sau có lời giải đúng và gọn :

**Hà Giang :** Ngô Hoàng Phong, 9TN, THPT chuyên, Tx. Hà Giang ; **Yên Bái :** Trần Mạnh Cường, 9B, THCS Lê Hồng Phong, Tp. Yên Bái ; **Phú Thọ :** Nguyễn Vĩnh Thái, 8A1, Nguyễn Trường Thọ, Nguyễn Quang Huy, 9A, THCS Giấy Phong Châu, Phù Ninh, Trần Thế Hùng, 9A1, THCS Hà Hòa ; **Vĩnh Phúc :** Hoàng Thị Minh Huệ, 8C, THCS Tam Dương, Lê Trường Sơn, 9A3, THCS Vĩnh Tường, Hà Đình Thiệu, 9A, Trần Tấn Phong, 7A, THCS Lập Thạch ; **Hà Tây :** Cấn Văn Bằng, THCS Thạch Thất ; **Hòa Bình :** Ngô Nhất Sơn, 9A, THCS Yên Thủy B ; **Hà Nội :** Thân Anh Đức, 8H, THCS Lê Quý Đôn, Cầu Giấy ; **Lạng Sơn :** Nông Gia Tự, 9A, THCS Ttr. Văn Quan ; **Bắc Ninh :** Lưu Thị Thu Trang, 8A, THCS Yên Phong ; **Hải Dương :** Trần Quốc Hoàn, 9A1, THCS Chu Văn An, Thanh Hà ; **Hải Phòng :** Bùi Ngọc Khôi, 8A, Phạm Huy Hoàng, 8B, Phạm Quỳnh Anh, Lương Phú Khánh, 9A, THCS NK Trần Phú ; **Hà Nam :** Lê Đức Hòa, 9B, THCS Nguyễn Hữu Tiến, Duy Tiên ; **Nam Định :** Đoàn Duy Thuyết, 9A2, THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên ; **Thanh Hóa :** Bùi Khắc Kiên, 9A, THCS Như Bá Sỹ, Hoàng Hóa ; **Nguyễn Anh Tuấn,** 9B, THCS Nguyễn Chí, Đông Sơn, Nguyễn Ngọc Tú, 9B, THCS Lê Đình Kiên, Yên Định, Trịnh Thành Đông, 9A, THCS Tây Đô, Vinh Lộc ; **Nghệ An :** Đinh Viết Tú, Trần Hoàng Đức, 9A, Nguyễn Lê Phước, 8C, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, Hoàng Xuân Trung, 9A, THCS Nghi Hương, Cửa Lò, Mạnh Phúc Thọ, 9E, THCS Trung Đô, Vinh ; **Quảng Trị :** Nguyễn Mạnh Tuấn, 9A, THCS Ttr. Hải Lăng ; **Đà Nẵng :** Dương Đạt Nguyễn, 9/2, THCS Hòa Khánh, Liên Chiểu ; **Bình Định :** Nguyễn Yên Vũ, 8A8, THCS Đống Đa, Quy Nhơn ; **Khánh Hòa :** Võ Thông Thái, 9/3, THCS Ngô Gia Tự, Cam Nghĩa, Cam Ranh, Lê Thị Hồng Nhung, 8/14, THCS Thái Nguyên, Nha Trang ; **Tp. Hồ Chí Minh :** Nguyễn Ngọc Sơn, 9/9, THCS Nguyễn Du, Q. 1, Nguyễn Kiến Long, 8/1 THCS Hồng Bàng, Q.5, Vương Vĩnh Đạt, 9/7, THCS Chu Văn An, Q. 11.

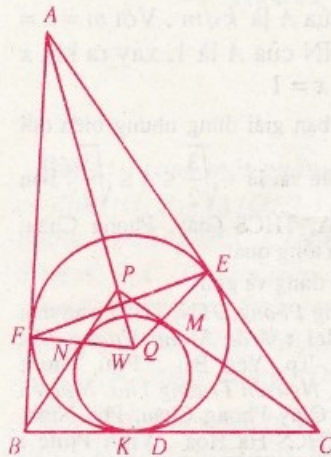
VIỆT HẢI

**Bài T4/300.** Cho tam giác ABC và một điểm P nằm bên trong nó. Đường tròn nội tiếp  $\Delta ABC$  tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Đường tròn nội tiếp  $\Delta PBC$  tiếp xúc với các cạnh BC, CP, PB lần lượt tại K, M, N. Gọi Q là giao điểm của các đường thẳng EM và FN.



**Chứng minh rằng ba điểm A, P, Q thẳng hàng khi và chỉ khi K trùng với D.**

**Lời giải.** • Nếu A, P, Q thẳng hàng.



Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác ACP và tam giác ABP có:

$$\frac{QP}{QA} \times \frac{FA}{FB} \times \frac{NB}{NP} = 1$$

$$= \frac{QP}{QA} \times \frac{EA}{EC} \times \frac{MC}{MP}$$

Suy ra

$$\frac{FA}{NP} \times \frac{BN}{BF} = \frac{MC}{EC} \times \frac{AE}{PM} \quad (1)$$

Mà  $CE = CD$ ,  $FA = EA$ ,  $BF = BD$ ,  $MP = NP$ ,  $MC = CK$ ,  $BN = BK$  nên (1) trở thành

$$\frac{MC}{EC} = \frac{BN}{BF} \Leftrightarrow \frac{BD}{CD} = \frac{BK}{CK} \Leftrightarrow \frac{BD}{BD+DC} = \frac{BK}{BK+KC}$$

mà D và K đều nằm giữa B và C nên D trùng K.

• Nếu D trùng với K. Gọi giao của AP và EM là W. Theo định lý Menelaus ta có

$$\frac{AE}{EC} \times \frac{MC}{MP} \times \frac{WP}{WA} = 1 \Leftrightarrow \frac{AE}{MP} \times \frac{PW}{WA} = 1 \quad (\text{vì } CE = CD = CM)$$

$$\Leftrightarrow \frac{AF}{PN} \times \frac{PW}{WA} = 1 \quad (\text{vì } PM = PN, AE = AF)$$

$$\Leftrightarrow \frac{AF}{FB} \times \frac{BN}{NP} \times \frac{PW}{WA} = 1 \quad (\text{vì } BF = BD = BN)$$

Suy ra F, N, W thẳng hàng. Mà W là giao của FN, EM nên  $W \equiv Q$  hay A, P, Q thẳng hàng (đpcm).

**Nhận xét.** 1) Một số bạn chứng minh chưa chặt do chưa rõ điều kiện cần và đủ hoặc mặc nhiên coi giao điểm của 2 đường thẳng FN và ME là thẳng hàng với A, P.

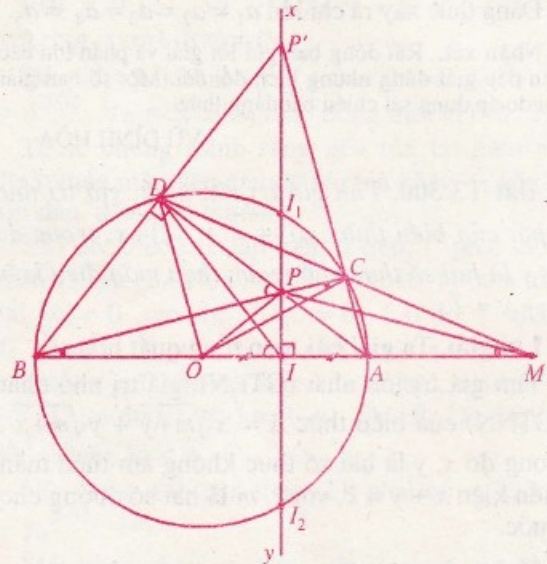
2) Các bạn có lời giải tốt:

**Phú Thọ:** Nguyễn Trường Thọ, 9A, THCS Giấy Phong Châu; **Bắc Ninh:** Lưu Thị Thu Trang, 8A, THCS Yên Phong; **Hải Dương:** Lê Đình Huy, 9A, THCS Nguyễn Trãi, Nam Sách; **Hải Phòng:** Phạm Huy Hoàng, 8B, THPT NK Trần Phú, Đào Thị Huế, 9A5, THCS Thùy Đường, Thủy Nguyên; **Nam Định:** Đoàn Duy Thuý, 9A2, THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên; **Thanh Hóa:** Bùi Tiến Quân, 9B, THCS Lê Đình Kiên,

Yên Định; Thừa Thiên - Huế: Lê Quang Thành, 9<sup>1</sup>, THCS Nguyễn Tri Phương, Huế.

VŨ KIM THỦY

**Bài T5/300.** Cho đường tròn tâm O đường kính AB. Gọi M là điểm đối xứng của O qua A. Một cát tuyến qua M (không đi qua O) cắt đường tròn tại C và D. Tìm quỹ tích giao điểm P của các đường thẳng AC và BD khi cát tuyến chuyển động nhưng luôn đi qua M.



**Lời giải.** • **Phần thuận.**

Xét hai trường hợp:

**Trường hợp 1.** P là giao điểm của BC và AD. Gọi I là trung điểm OA, khi đó  $\triangle ODM \sim \triangle ODI$  (do  $\widehat{DOM} = \widehat{DOI}$ ,  $\frac{OD}{OM} = \frac{OI}{OD} = \frac{1}{2}$ )

$\Rightarrow \widehat{ODM} = \widehat{OID} = \widehat{OCD} \quad (1)$ . Mặt khác:

$$\widehat{OCD} = \widehat{BPD} \quad \left( = \frac{\widehat{EDD} + \widehat{AC}}{2} \right) \quad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra:  $\widehat{BPD} = \widehat{BID} \Rightarrow BDPI$  là tứ giác nội tiếp được trong một đường tròn. Vậy  $\widehat{BIP} = 90^\circ$ , từ đó P nằm trên đoạn thẳng  $I_1I_2$  trừ điểm I (một phần của đường trung trực của đoạn OA) (hình vẽ)

**Trường hợp 2.** P là giao điểm của AC và BD, lúc đó ta thấy P chạy trên hai tia  $I_1x, I_2y$  (thuộc đường trung trực đoạn OA) (hình vẽ).



Tóm lại: Khi cát tuyến  $MCD$  thay đổi thì  $P$  chạy trên đường trung trực  $xy$  của đoạn  $OA$  (trừ điểm  $I$ ).

• **Phần đảo.** Lấy điểm  $P$  bất kỳ trên đường  $xy$  (trừ điểm  $I$ ).  $PA, PB$  cắt đường tròn  $(O)$  lần nữa tại  $C, D$  tương ứng. Cần chứng minh  $M, C, D$  thẳng hàng. Thật vậy từ  $\triangle PBM$  cân tại  $P$  suy ra  $\widehat{PMO} = \widehat{PBO} = \widehat{OCP} \Rightarrow OPCM$  là tứ giác nội tiếp  $\Rightarrow \widehat{POM} + \widehat{PCM} = 180^\circ$  (3). Lại vì  $\triangle POA$  cân và  $ABCD$  là tứ giác nội tiếp  $(O)$  nên :  $\widehat{POM} = \widehat{PAO} = \widehat{BCD}$  (4)

Từ (3), (4)  $\Rightarrow \widehat{PCM} + \widehat{BCD} = 180^\circ$  hay  $M, C, D$  thẳng hàng (dpcm).

• **Kết luận :** Quỹ tích điểm  $P$  là đường thẳng  $xy$  trừ điểm  $I$  (đường trung trực của đoạn  $OA$  bỏ giao điểm của  $xy$  với  $AB$ ).

**Nhận xét.** 1) Nhiều bạn chưa loại bỏ giao điểm của đường trung trực đoạn  $OA$  với đoạn thẳng này trong tập hợp điểm cần tìm. Một số bạn kết luận quỹ tích chưa chính xác, chẳng hạn : "Quỹ tích  $P$  là phần đường trung trực đoạn  $OA$  nằm ngoài hình tròn  $(O)$ " hay "phần đường trung trực đoạn  $OA$  nằm trong hình tròn đó". Hoan nghênh hai bạn Nguyễn Trung Kiên, 8A, THCS Giấy Phong Châu, Phú Thọ ; Nguyễn Đức Minh, 9I, THCS Hưng Bình, Tp. Vinh, Nghệ An đã đề xuất và giải đúng bài toán trên trong trường hợp  $M$  là điểm cố định trên tia đối của tia  $AB$ .

2) Các bạn sau có lời giải tương đối tốt :

**Phú Thọ :** Nguyễn Trường Thọ, 9A, THCS Giấy Phong Châu, Phú Ninh ; **Hà Nội :** Vũ Nhật Minh, 9H, THCS Lê Quý Đôn, Q. Cầu Giấy ; **Hải Phòng :** Nguyễn Mạnh Chiến, 9A, THPT NK Trần Phú, Q. Ngô Quyền ; **Nam Định :** Phạm Văn Hải, 9C, THCS Đào Sư Tích, Trục Ninh, Đoàn Duy Thuý, 9A2, THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên ; **Thanh Hóa :** Nguyễn Ngọc Tú, 9B, THCS Lê Đình Kiên, Yên Định ; **Thừa Thiên - Huế :** Lê Quang Thành, 9<sup>1</sup>, THCS Nguyễn Tri Phương, Tp. Huế, Lê Bẩy, 8/4, THCS Vinh Thanh, Phú Vang ; **Đà Nẵng :** Thái Thanh Hải, 9/2, THCS Nguyễn Khuyến, Q. Hải Châu ; **Khánh Hòa :** Võ Thông Thái, 9<sup>3</sup>, trường cấp 2-3 Ngô Gia Tự, Cam Nghĩa, Cam Ranh ; **Tp. Hồ Chí Minh :** Nguyễn Kiến Long, 8<sup>1</sup>, trường THCS Hồng Bàng, Q. 5.

HỒ QUANG VINH

**Bài T6/300. Tìm tất cả các cặp số nguyên**

**đương  $m, n$  sao cho** 
$$\frac{n}{m} = \frac{(m^2 - n^2)^{n/m} - 1}{(m^2 - n^2)^{n/m} + 1}$$

**Lời giải.** Để thấy  $m > n > 0$

Biến đổi phương trình trên tương đương với

$$(m+n)^{m-n} = (m-n)^{m+n}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln(m-n)}{m-n} = \frac{\ln(m+n)}{m+n} \quad (1)$$

Đặt  $x = m+n$  và  $y = m-n$ . Phương trình (1) trở thành  $\frac{\ln x}{x} = \frac{\ln y}{y}$  ( $x > y$ ) (2)

Ta chứng minh rằng PT (2) có nghiệm duy nhất  $x = 4, y = 2$ . Thật vậy xét hàm số

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} \text{ trên } (0, \infty)$$

Ta thấy trong  $(0, e)$  thì  $f(x)$  đồng biến và trong  $(e, \infty)$  thì  $f(x)$  nghịch biến. Do đó để có (2) ta phải có  $y < e < x$ . Vậy  $y = 1$  hoặc  $y = 2$ , nhưng  $y = 1$  bị loại. Nếu  $y = 2$  thì  $x^2 = 2^x$ . Để chứng minh bằng quy nạp rằng  $2^k > k^2$  với  $k > 4$ . Vậy  $2 < x \leq 4$ . Với  $x = 3$  không thỏa mãn. Vậy  $x = 4$ .

$$\text{Do đó } \begin{cases} m+n=4 \\ m-n=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=3 \\ n=1 \end{cases}$$

**Nhận xét.** 1. Phương trình  $x^y = y^x$  có thể giải bằng phương pháp thuần túy số học như các bạn Lại Đức Khải, 11 NK Hàn Thuyên, Bắc Ninh và Trần Hoài Thu, 9A, THCS Trần Mai Ninh, Thanh Hóa đã làm.

2. Các bạn sau đây có lời giải tốt : **Bắc Ninh :** Lê Duy Cường, 10A, THCS Yên Phong ; **Hải Dương :** Nguyễn Tiến Thành, 11 Lý, THPT Nguyễn Trãi ; **Quảng Ngãi :** Huỳnh Ngọc Hiền, 10T1, THPT Lê Khiết ; **Vĩnh Phúc :** Kim Anh Kiệt, 11A2 chuyên ; **Bến Tre :** Nguyễn Tiến Dũng, 10 Toán ; **Hải Phòng :** Hoàng Thị Tuyết Mai, 10T, THPT Trần Phú ; **Cần Thơ :** Mạnh Nguyệt Minh, 12A1, THPT Lí Tự Trọng ; **Đồng Tháp :** Lê Quang Trường, 9 Toán ; **Ninh Bình :** Lê Văn Nghĩa, 11T, THPT Lương Văn Tụy ; **Hải Dương :** Bùi Đức Thành, 10 Toán, THPT Nguyễn Trãi ; **Phú Yên :** Phan Thành Nam, 12T2, THPT Lương Văn Chánh ; **Tp. Hồ Chí Minh :** Huỳnh Trí Phát, 11CT Lê Hồng Phong ; **Nam Định :** Nguyễn Duy Minh, 11 Toán, THPT Lê Hồng Phong v.v... Có rất đông các bạn giải tốt bài này.

3. Một số bạn có nhận xét rằng bài toán này đã in trong tuyển tập đề thi Olympic 30/4 lần thứ 7.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

**Bài T7/300. Giải phương trình**

$$2^x + 6^x = 3^x + 5^x \quad (1)$$

**Lời giải.** (của đa số các bạn)

Viết phương trình (1) dưới dạng

$$6^x - 5^x = 3^x - 2^x \quad (2)$$

Giả sử  $x = \alpha$  là một nghiệm của (1), tức cũng là nghiệm của (2).

Xét hàm số  $f(t) = (t+1)^\alpha - t^\alpha, t > 0$

Vì  $\alpha$  là nghiệm của (2) nên  $f(5) = f(2)$ .

Theo định lí Lagrange thì tồn tại  $c \in (2, 5)$  sao cho  $f'(c) = 0$  hay



$$\alpha[(c+1)^{\alpha-1} - c^{\alpha-1}] = 0 \quad (3)$$

Từ (3) suy ra  $\alpha = 0$  hoặc  $\alpha = 1$ .

Thử lại ta thấy cả hai giá trị  $x = 0$  và  $x = 1$  đều thỏa mãn.

**Nhận xét.** Nhiều bạn đã có nhận xét rất đúng rằng với cặp số dương  $a, b$  cho trước tùy ý thì phương trình mũ tương ứng

$$a^x + (b+1)^x = (a+1)^x + b^x$$

có cùng cách giải và đáp số hoàn toàn giống như đối với phương trình (1).

Đây là một bài toán cơ bản và dễ. Do vậy có đến hơn 200 bài giải gửi đến tòa soạn có lời giải đúng và hầu hết đều được giải theo cách đã trình bày ở trên.

NGUYỄN VĂN MẬU

### Bài T8/300. Tìm giá trị lớn nhất của biểu

thức 
$$\frac{a}{a+bc} + \frac{b}{b+ca} + \frac{\sqrt{abc}}{c+ab}$$

trong đó  $a, b, c$  là các số thực dương thỏa mãn  $a+b+c=1$

**Lời giải.** Trước hết ta có nhận xét

$$P = \frac{a}{a+bc} + \frac{b}{b+ca} + \frac{\sqrt{abc}}{c+ab}$$

$$= \frac{1}{1+\frac{bc}{a}} + \frac{1}{1+\frac{ca}{b}} + \frac{\sqrt{\frac{ab}{c}}}{1+\frac{ab}{c}}$$

Đặt  $\frac{bc}{a} = \tan^2 \frac{A}{2}$ ,  $\frac{ca}{b} = \tan^2 \frac{B}{2}$ ,  $0 < A, B < \pi$ .

Chú ý  $1 = a + b + c$

$$= \sqrt{\frac{ab}{c}} \cdot \sqrt{\frac{ca}{b}} + \sqrt{\frac{bc}{a}} \cdot \sqrt{\frac{ab}{c}} + \sqrt{\frac{ca}{b}} \cdot \sqrt{\frac{bc}{a}}$$

Suy ra 
$$\sqrt{\frac{ab}{c}} = \frac{1 - \tan \frac{A}{2} \cdot \tan \frac{B}{2}}{\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2}} = \cot g \left( \frac{A+B}{2} \right)$$

Do đó  $\frac{A+B}{2} < \frac{\pi}{2}$  và  $\sqrt{\frac{ab}{c}} = \tan \frac{C}{2}$ ,

( $C = \pi - (A+B) \in (0, \pi)$ ). Bởi vậy

$$P = \frac{1}{1 + \tan^2 \frac{A}{2}} + \frac{1}{1 + \tan^2 \frac{B}{2}} + \frac{\tan \frac{C}{2}}{1 + \tan^2 \frac{C}{2}}$$

$$= \cos^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{B}{2} + \frac{\sin C}{2}$$

$$= 1 + \frac{1}{2}(\cos A + \cos B + \sin C)$$

Mặt khác ta có

$$\cos A + \cos B + \sin C + \sin \frac{\pi}{3}$$

$$= 2 \cos \frac{A+B}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2} + 2 \sin \frac{C+\pi}{2} \cdot \cos \frac{C-\pi}{2}$$

$$\leq 2 \cos \frac{A+B}{2} + 2 \cos \frac{C-\pi}{2}$$

$$\leq 4 \cos \frac{A+B+C-\pi}{4} = 4 \cos \frac{\pi}{6} = 2\sqrt{3}$$

Từ đó  $P \leq 1 + \frac{1}{2} \left( 2\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 1 + \frac{3\sqrt{3}}{4}$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$A = B, C + \frac{\pi}{3} = \pi \Leftrightarrow A = B = \frac{\pi}{6}, C = \frac{2\pi}{3}$$

tức là

$$\sqrt{\frac{bc}{a}} = \sqrt{\frac{ca}{b}} = \tan \frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}, \sqrt{\frac{ab}{c}} = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow a = b = 2\sqrt{3} - 3, c = 7 - 4\sqrt{3}.$$

**Nhận xét.** Đây là bài toán đại số giải bằng phương pháp lượng giác. Tòa soạn đã nhận được lời giải của 106 bạn. Một số bạn do tính toán không cẩn thận đã dẫn đến kết quả sai. Các bạn sau có lời giải tốt: **Phú Thọ**: Nguyễn Trường Thọ, 9A, THCS Giấy Phong Châu, Lê Việt Hà, 10A1, THPT Hùng Vương; **Bắc Ninh**: Nguyễn Chí Bảo, 10A1, THPT Gia Bình 1; Hà Nội: Lê Đăng Nam, 10A1, PTCT-T, ĐHSPT I; **Nam Định**: Dương Đỗ Nhuận, 9A1, THPT Lê Quý Đôn, Trần Công Thành, 10K, THPT Giao Thủy A, **Hải Phòng**: Bùi Quỳnh Mai, Trần Hồng Trang, Nguyễn Quang Khánh, Nguyễn Thu Trang, Lê Hải Yến, THPT NK Trần Phú; **Thanh Hóa**: Hoàng Trọng Bắc, 10A1, THPT Lê Văn Hưu, Phạm Hữu Tùng, 10D, THPT Quảng Xương I; **Thừa Thiên - Huế**: Tôn Thất Tú, 10C, Quốc học Huế; **Đà Nẵng**: Nguyễn Văn Vinh, 10A1, THPT Lê Quý Đôn; **Quảng Ngãi**: Huỳnh Ngọc Hiền, Nguyễn Huy Khiêm, 10T1, THPT Lê Khiết, ...

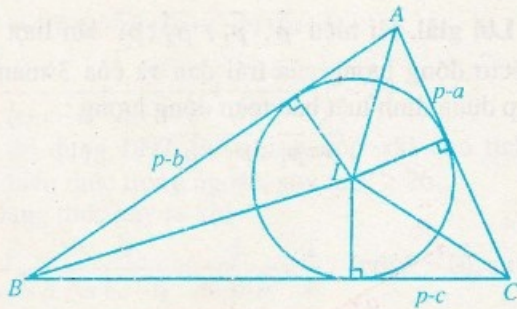
NGUYỄN MINH ĐỨC

**Bài T9/300. Chứng minh rằng tam giác ABC là đều khi và chỉ khi  $108Rr = 7p^2 + 27r^2$ , trong đó  $p, R, r$  tương ứng là nửa chu vi, bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của  $\Delta ABC$ .**

**Lời giải.** (của bạn Nguyễn Văn Trình, 12 Hóa, THPT Hàn Thuyên, Bắc Ninh)



Gọi  $I, G$  là tâm đường tròn nội tiếp, trọng tâm tam giác  $ABC$ . Đặt  $BC = a; CA = b; AB = c$ . Trước hết xin nhắc lại, không chứng minh một vài kết quả cơ bản.



$$\begin{aligned} & * IA^2 + IB^2 + IC^2 = \\ & = 3IG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 \quad (1) \\ & * IA^2 = r^2 + (p-a)^2; IB^2 = r^2 + (p-b)^2; \\ & IC^2 = r^2 + (p-c)^2 \text{ (hình vẽ)} \quad (2) \\ & * bc + ca + ab = p^2 + r^2 + 4Rr \quad (3) \\ & * R \geq 2r \quad (4) \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra  $\Leftrightarrow \Delta ABC$  đều

Trở lại bài toán của ta.

Từ (1), (2) suy ra:

$$\begin{aligned} & 3r^2 + (p-a)^2 + (p-b)^2 + (p-c)^2 \\ & \geq \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2) \\ & \Rightarrow 3r^2 + 3p^2 - 2p(a+b+c) + (a^2 + b^2 + c^2) \\ & \geq \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2) \\ & \Rightarrow 3r^2 - p^2 + \frac{2}{3}(a^2 + b^2 + c^2) \geq 0 \\ & \Rightarrow 3r^2 - p^2 + \frac{2}{3}(4p^2 - 2(bc+ca+ab)) \geq 0 \\ & \Rightarrow 9r^2 - 3p^2 + 2(4p^2 - 2(p^2 + r^2 + 4Rr)) \geq 0 \quad (\text{theo 3}) \\ & \Rightarrow p^2 + 5r^2 \geq 16Rr \Rightarrow 7p^2 + 35r^2 \geq 112Rr \\ & \Rightarrow 7p^2 + 27r^2 + 4Rr \geq 112Rr \quad (\text{theo 4}) \\ & \Rightarrow 7p^2 + 27r^2 \geq 108Rr \quad (*) \end{aligned}$$

$$\text{Vậy: } 7p^2 + 27r^2 = 108Rr$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} IG=0 \\ R=2r \end{cases} \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ đều.}$$

**Nhận xét.** 1) Thực chất của bài toán này là chứng minh bất đẳng thức  $7p^2 + 27r^2 \geq 108Rr$

Bạn **Phạm Văn Trung**, 12T, THPT Lê Khiết, **Quảng Ngãi** còn đưa ra một bất đẳng thức mạnh hơn

$$\frac{27}{4}p^2 + \frac{135}{4}r^2 \geq 108Rr \quad (**)$$

Để chứng minh bất đẳng thức (\*\*), ta chỉ việc khai triển bất đẳng thức đơn giản sau

$$\left(1 - \frac{a}{p}\right)\left(1 - \frac{b}{p}\right)\left(1 - \frac{c}{p}\right) \leq \frac{1}{27}$$

2) Đây là bài toán không khó, rất nhiều bạn tham gia giải. Các bạn sau đây có lời giải tốt.

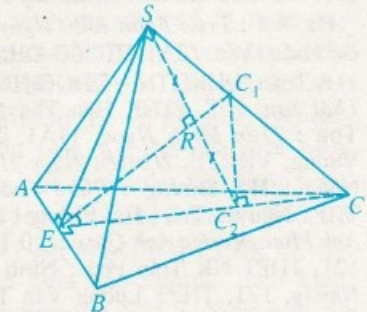
**Đà Nẵng:** Nguyễn Văn Vinh, 10A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Đồng Tháp:** Nguyễn Võ Vĩnh Lộc, 11T, THPT Sa Đéc; **Hà Tây:** Đồng Anh Oanh, 12K1, THPT Mỹ Đức; **Khánh Hòa:** Lê Thị Hồng Nhung, 8<sup>14</sup>, THCS Thái Nguyên, Nha Trang; **Hải Phòng:** Nguyễn Thu Trang, 10T, THPT NK Trần Phú; **Quảng Trị:** Trần Minh, 10A2, THPT Hải Lăng; **Hà Nội:** Trần Ngọc Tuấn Anh, Nguyễn Chí Hiệp, 11A1, khối PTCT-Tin, ĐHSPT Hà Nội, Trương Tuấn Đạt, Nguyễn Hữu Bình Minh, 10A, ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội.

NGUYỄN MINH HÀ

**Bài T10/300.** Cho hình tứ diện  $SABC$  có các cạnh  $SA, SB, SC$  vuông góc với nhau từng đôi một. Gọi  $(P), (Q), (T)$  lần lượt là mặt phẳng phân giác của góc nhị diện cạnh  $BC, CA, AB$ .  $(P)$  cắt  $SA$  tại  $A_1$ ,  $(Q)$  cắt  $SB$  tại  $B_1$ ,  $(T)$  cắt  $SC$  tại  $C_1$ . Gọi  $A_2, B_2, C_2$  lần lượt là hình chiếu vuông góc của  $A_1, B_1, C_1$  lên mặt phẳng  $(ABC)$ .  $(P)$  cắt  $SA_2$  tại  $M$ ,  $(Q)$  cắt  $SB_2$  tại  $N$ ,  $(T)$  cắt  $SC_2$  tại  $R$ . Chứng minh rằng hai mặt phẳng  $(MNR)$  và  $(ABC)$  song song với nhau.

**Lời giải.** (Dựa theo Nguyễn Lâm Tuyền, 12 Toán, THPT Hoàng Văn Thụ, **Hòa Bình**)

Vì  $SA, SB, SC$  vuông góc đôi một với nhau nên  $SC \perp mp(SAB)$  và do đó  $SC \perp AB$ . Bởi vậy, qua  $SC$  có một mặt phẳng duy nhất  $(SCE)$



vuông góc với  $AB$  ở điểm  $E$ , đồng thời  $SC_1 \perp SE$  và ta được ngay  $\widehat{SEC}$  là góc phẳng nhị diện cạnh  $AB$  của tứ diện  $SABC$ . Lại vì  $mp(ABC_1)$  là mặt phẳng phân giác của nhị diện  $\widehat{AB}(C, S)$  nên  $EC_1$  là tia phân giác của góc phẳng  $\widehat{CES}$ . Từ đó suy ra hai tam giác vuông  $EC_1S$  và  $EC_1C_2$  có cạnh huyền  $EC_1$  chung đối xứng với nhau qua  $EC_1$  và do đó  $EC_1$  là trung trực của đoạn thẳng  $SC_2$  và  $R$  là trung điểm của  $SC_2$ . Chứng



minh tương tự,  $M$  và  $N$  theo thứ tự là trung điểm của  $SA_2$  và  $SB_2$ . Suy ra :  $MN \parallel A_2B_2 \subset mp(ABC)$ ,  $MR \parallel A_2C_2 \subset mp(ABC)$  ;  $NR \parallel B_2C_2 \subset mp(ABC)$  và do đó  $mp(MNR) \parallel mp(A_2B_2C_2)$ , cũng tức là  $mp(MNR) \parallel mp(ABC)$ , hơn nữa,  $mp(MNR)$  còn là ảnh của  $mp(ABC)$  trong phép vị tự  $V_S^{1/2}$  tâm  $S$ , tỉ số  $k = 1/2$ .

**Nhận xét.** 1) Bạn Nguyễn Quang Vương, 11C, THPT Bắc Duyên Hà, Hưng Hà, Thái Bình có nhận xét rằng bài toán trên đây là bài toán tương tự trong không gian của bài toán sau trong hình học phẳng : "Tam giác  $ABC$  vuông ở  $C$ . Các đường phân giác trong các góc  $A$  và  $B$  theo thứ tự cắt các cạnh  $BC$  và  $CA$  ở  $A_1$  và  $B_1$ . Gọi  $A_2$  và  $B_2$  lần lượt là hình chiếu vuông góc của  $A_1$  và  $B_1$  trên  $AB$ .  $CA_2$  cắt  $AA_1$  ở  $M$ ,  $CB_2$  cắt  $BB_1$  ở  $N$ . Thế thì  $MN \parallel AB$ ".

2) Bạn Lê Duy Thứ, 11A1, THPT Nghi Lộc 1, Nghệ An còn đề xuất và giải đúng một bài toán tổng quát hơn bài toán trên đây bằng các mặt phẳng chia các nhị diện trên thành các góc  $\alpha_A, \beta_A; \alpha_B, \beta_B; \alpha_C, \beta_C$  (trong đó các góc  $\alpha_A, \alpha_B$  và  $\alpha_C$  đều có một mặt nằm trên  $mp(ABC)$ ). Khi đó điều kiện cần và đủ để  $mp(MNR) \parallel mp(ABC)$  là :

$$\frac{\sin 2\alpha_A}{\sin 2\beta_B} = \frac{\sin 2\alpha_B}{\sin 2\beta_B} = \frac{\sin 2\alpha_C}{\sin 2\beta_C}$$

Các bạn hãy kiểm tra tính đúng đắn của bài toán này.

3) Hầu hết các bạn đều sử dụng phương pháp tổng hợp (thông thường) tuy nhiên một số bạn vẽ quá nhiều đường phụ làm cho hình vẽ thiếu sáng sủa, hoặc lại thiên về tính toán dài dòng. Có duy nhất một bạn sử dụng phương pháp tọa độ, nhưng lời giải quá dài !

4) Nhiều bạn tham gia giải bài toán này, ngoài các bạn được nêu tên ở trên các bạn sau đây có lời giải gọn gàng :

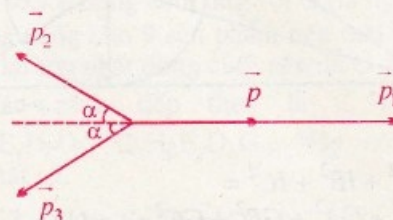
**Hà Nội :** Trần Tuấn Anh, Nguyễn Chí Hiệp, 11A1, Đỗ Xuân Diễn, 12A1, PTCTT-ĐHSP HN, Vũ Quốc Mỹ, 11A Toán, ĐHKHTN - ĐHQG HN ; **Bắc Ninh :** Phạm Thái Sơn, 10T, PTNK Hàn Thuyên, Bắc Ninh ; **Phú Thọ :** Trần Minh Ngọc, 11A1, THPT chuyên Hùng Vương, Việt Trì, Nguyễn Ngọc Hà, 12A, THPT Tam Nông ; **Hải Dương :** Phan Tuấn Thành, 10 Toán, THPT Nguyễn Trãi ; **Hải Phòng :** Bùi Tuấn Anh, Phạm Anh Minh, Vương Anh Quyển, 10 Toán, Lê Quang Huy, 12T, THPT NK Trần Phú ; **Ninh Bình :** Trịnh Thủy Nhung, 12T, THPT Lương Văn Tụy ; **Thanh Hóa :** Hoàng Trọng Bắc, 10A1, THPT Lê Văn Hưu, Thiệu Hóa, Mai Quang Thành, 12T1, THPT Lam Sơn ; **Nghệ An :** Đinh Viết Sang, 11A1, THPT Phan Bội Châu ; **Quảng Ngãi :** Nguyễn Huy Cung, Phạm Văn Trung, 12T, THPT chuyên Lê Khiết, Quảng Ngãi ; **Bình Định :** Trần Thanh Tình, 12T, THPT chuyên Lê Quý Đôn ; **Phú Yên :** Phan Thành Nam, 12T2, THPT chuyên Lương Văn Chánh ; **Đồng Nai :** Lê Phương, 11T1, THPT chuyên Lương Thế Vinh, Đồng Nai ; **Đồng Tháp :** Nguyễn Võ Vĩnh Lộc, 11T, THPT Sa Đéc ; **Tp. Hồ Chí Minh :** Phạm Thế Nghĩa, 11T, Phạm Văn Thắng, 12T, PTNK-ĐHQG Tp. Hồ Chí Minh.

NGUYỄN ĐĂNG PHÁT

**Bài L1/300.** Một trái đạn pháo đang bay với vận tốc  $v = 500\text{m/s}$  thì nổ thành ba mảnh có cùng khối lượng sao cho động năng của hệ tăng gấp  $n = 1,5$  lần. Hãy tìm vận tốc cực đại  $v_{\max}$  mà một trong các mảnh có thể có được.

**Lời giải.** Kí hiệu  $\vec{p}, \vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3$  lần lượt là vectơ động lượng của trái đạn và của 3 mảnh. Áp dụng định luật bảo toàn động lượng :

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 \quad (1)$$



Vì lí do đối xứng (ba mảnh có cùng khối lượng) nên có thể giả thiết  $\vec{p}_1$  cùng hướng với  $\vec{p}$ , còn  $\vec{p}_2$  và  $\vec{p}_3$  đối xứng với nhau qua trục của  $\vec{p}$ . Chiếu (1) lên trục của  $\vec{p}$  :  $p = p_1 - 2p_2 \cos \alpha \Rightarrow 3v = v_1 - 2v_2 \cos \alpha$  (2). Vì  $v$  đã cho nên muốn cho  $v_1$  cực đại ( $= v_{\max}$ ) phải có  $\cos \alpha = 1 \Rightarrow v_2 = 0,5v_{\max} - 1,5v$  (3). Áp dụng điều kiện đề bài :  $\frac{1}{2} \cdot \frac{m}{3} v_{\max}^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{m}{3} v_2^2 = n \cdot \frac{1}{2} m v^2$   
 $\Rightarrow v_{\max}^2 + 2v_2^2 = 3nv^2$  (4). Từ (3) và (4) rút ra  $v_{\max}^2 - 2vv_{\max} + (3-2n)v^2 = 0 \Rightarrow v_{\max} = v(1 + \sqrt{2(n-1)})$ . Thay số tìm được  $v_{\max} = 1000\text{m/s}$

**Nhận xét.** Các em có lời giải và đáp số đúng :

**Nghệ An :** Hồ Quốc Huy, 12A7, THPT chuyên Phan Bội Châu, Vinh ; **Bắc Ninh :** Vũ Tuấn Linh, 11 Lí, Trần Kiều Hưng, Toán 12, THPT NK Hàn Thuyên ; **Hà Nội :** Trần Xuân Anh, B011A, chuyên Lí - ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội

MAI ANH

**Bài L2/300.** Một quả bóng bàn rơi xuống một máng nghiêng  $45^\circ$ , khoảng cách từ điểm bóng chạm máng đến chân máng là  $15\text{m}$  và vận tốc của bóng lúc rơi xuống máng là  $0,5\text{m/s}$ . Hãy tính số lần va chạm tiếp theo khả dĩ lớn nhất của quả bóng với máng. Coi va chạm là tuyệt đối đàn hồi, bỏ qua sức cản của không khí. Lấy  $g = 10\text{m/s}^2$ .



**Lời giải.** Kí hiệu  $O$  là điểm bóng chạm máng lần đầu. Chọn trục  $Ox$  hướng xuống dưới dọc theo máng, trục  $Oy$  hướng xuống, ta có :  $g_x = g \sin \alpha$ ;  $g_y = g \cos \alpha$  ( $\alpha = 45^\circ$ ). Theo trục  $Ox$  :

$$v_x = v \sin \alpha, x = v \sin \alpha \cdot t + g \sin \alpha \cdot \frac{t^2}{2}. \text{ Theo trục}$$

$$Oy : v_y = v \cos \alpha; y = -v \cos \alpha \cdot t + g \cos \alpha \cdot \frac{t^2}{2}.$$

Lúc bóng chạm tiếp sau vào máng :  $y_1 = 0 \Rightarrow t$

$$= \frac{2v}{g} \Rightarrow x_1 = 4 \frac{v^2}{g} \cdot \sin \alpha \text{ và khi đó } v_{x1} = 3v \sin \alpha$$

;

$v_{y1} = v \cos \alpha$ . Chọn điểm chạm này làm gốc tọa độ và lập luận tính toán như trên tìm được :

$$x_2 = 8 \frac{v^2}{g} \sin \alpha. \text{ Và tương tự } x_3 = 12 \frac{v^2}{g} \sin \alpha \dots$$

Nhận thấy

$$\frac{x_1}{1} = \frac{x_2}{2} = \frac{x_3}{3} = \dots = \frac{x_n}{n} = \frac{2(x_1 + x_2 + \dots + x_n)}{n(n+1)}$$

Ta phải có :  $x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq 15$  (m)

$\Rightarrow n(n+1)x_1 \leq 30$ . Thay số tìm được  $x_1 =$

$$\frac{\sqrt{2}}{20} \text{ (m)} \Rightarrow \sqrt{2}(n+1)n \leq 600$$

$$\Rightarrow \frac{-1 - \sqrt{1 + \frac{2400}{\sqrt{2}}}}{2} \leq n \leq \frac{-1 + \sqrt{1 + \frac{2400}{\sqrt{2}}}}{2}.$$

$\Rightarrow n_{\max} = 20 \Rightarrow$  số lần va chạm tiếp theo khả dĩ lớn nhất là 20 lần.

**Nhận xét :** Các em có lời giải chặt chẽ và đúng :

**Tp. Hồ Chí Minh :** Nguyễn Đức Phong, 12C9, THPT Gò Vấp; **Bến Tre :** Võ Duy Thành, 12A1, THPT Châu Thành A; **Bạc Liêu :** Lê Thanh Hoàn, 11T1, THPT chuyên Bạc Liêu; **Thái Bình :** Bùi Minh Tiến, 11 Lí, THPT chuyên Thái Bình; **Đắk Lắk :** Nguyễn Ngọc Tuyết Trinh, 10L, THPT Nguyễn Du, Buôn Ma Thuột; **Hà Nội :** Đinh Hoàng Nam, 10A Lí, ĐHKHTN – ĐHQG Hà Nội; **Thanh Hóa :** Vũ Duy Phương, A2, THPT Hà Trung; **Quảng Ngãi :** Nguyễn Văn Thắng, 11T, THPT Lê Khiết; **Bắc Ninh :** Đào Đức Nguyễn, 11A1, THPT Tiên Du 1; **Nam Định :** Ngô Tiến Đạt, 10A5, THPT Hải Hậu A; **Yên Bái :** Phan Thị Kim Hoa, 11A1, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành; **Vĩnh Phúc :** Lê Văn Quỳnh, 11A3, Kiều Ngọc Thanh, 11B3, Đỗ Thị Thu Hương, 12A3, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hà Tĩnh :** Nguyễn Văn Tý, Nguyễn Xuân Đức, 11 Lí, THPT NK Hà Tĩnh; **Phú Thọ :** Bùi Đình Bảo, 10B, Vũ Văn Trung, 12B, THPT chuyên Hùng Vương, Nguyễn Nhật Minh, 10E, THPT Đoàn Hùng.

MAI ANH

## TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

### BÀI SỐ 58

**Problem.** Prove that the number of ways of choosing  $k$  points, no two consecutive, from a collection of  $n$  points arranged in a circle is  $\frac{nC(n-k, k)}{n-k}$ , where  $C(n, m)$  denote the binomial coefficient  $\frac{n!}{m!(n-m)!}$

**Solution.** Let  $f(n, k)$  be the desired number. Label the points  $1, 2, \dots, n$  in clockwise order. We wish to color  $k$  of them red, no two consecutive. First we count the number of ways when 1 isn't colored red. Place  $n-k$  uncolored points on a circle, label one of these 1, and insert  $k$  red points into the  $k$  spaces between the uncolored points in  $C(n-k, k)$  ways. On the other hand, if 1 is to be colored red, then place  $n-k+1$  points on the circle, color one of these points red and label it 1, and then insert in  $C(n-k-1, k-1)$  ways  $k-1$  red points into the  $n-k-1$  allowed spaces. Hence

$$f(n, k) = C(n-k, k) + C(n-k-1, k-1) \\ = \frac{nC(n-k, k)}{n-k}$$

**Từ mới:**

|             |                                                 |
|-------------|-------------------------------------------------|
| way         | = con đường, cách, biện pháp                    |
| choose      | = chọn (động từ)                                |
| point       | = điểm                                          |
| consecutive | = liên tiếp                                     |
| collection  | = sự tập hợp, sự tụ họp                         |
| denote      | = ký hiệu (động từ)                             |
| coefficient | = hệ số                                         |
| desire      | = yêu cầu, mong muốn (động từ)                  |
| label       | = gán, ghi nhãn (động từ)                       |
| clockwise   | = theo chiều kim đồng hồ<br>(tính từ và phó từ) |
| order       | = thứ tự                                        |
| wish        | = muốn, ước mong (động từ)                      |
| color       | = tô màu (động từ)                              |
| count       | = đếm (động từ)                                 |
| place       | = để, đặt (động từ)                             |
| uncolored   | = không tô màu (tính từ)                        |
| insert      | = gài vào, điền vào (động từ)                   |
| allow       | = cho phép, chấp nhận (động từ)                 |

NGÔ VIỆT TRUNG





## Cuộc chơi 2002 : AI BIẾT NHIỀU HƠN ?

### LỊCH SỬ TOÁN NGẮN GỌN

Bạn đọc báo Toán học Tuổi trẻ lâu rồi. Liệu bạn có điền tiếp được vào những chỗ còn bỏ trống dưới đây không nhỉ ?

• Theo nghĩa cổ điển toán học là khoa học nghiên cứu về các .....

Toán học theo nghĩa đó đã phát triển qua ba giai đoạn.

Từ thời thượng cổ đến thế kỉ thứ 5 trước Công nguyên là giai đoạn ..... (chưa có lí luận)

Từ thế kỉ thứ 5 trước Công nguyên đến đầu thế kỉ 17 là giai đoạn ..... (có lí luận, chưa có khái niệm biến số và hàm số).

Từ đầu thế kỉ 17 đến cuối thế kỉ 19 là giai đoạn ..... (có khái niệm biến số và hàm số, phương pháp tọa độ).

• Theo nghĩa hiện đại thì toán học là khoa học nghiên cứu về các .....

Từ cuối thế kỉ 19 toán học chuyển sang giai đoạn mới gọi là giai đoạn .....

BÍNH NAM HÀ

### Kết quả : AI - THẾ NÀO ?

1. Nhà khoa học Hy Lạp đó là Clau Ptolême (có tài liệu viết là Claude Ptoleme, Claudius Ptolemaeus). Ông sinh vào khoảng từ năm 85 đến 100 và mất vào khoảng từ năm 165 đến 178 sau CN. Ông là nhà thiên văn học, nhà toán học, địa lí học. Ông phát triển mô hình vũ trụ địa tâm của Arixtôt (thế kỉ IV trước CN) coi Trái đất nằm yên ở trung tâm vũ trụ.

a) Nhà khoa Ba Lan đó là Nicôlai Côpecnic (Nicolas Copernic) sinh năm 1473 mất 1543. Ông đề ra Hệ Nhật tâm (coi Mặt trời ở trung tâm vũ trụ, còn Trái đất và các hành tinh khác quay xung quanh mặt trời. Ông từng học Luật Giáo hội, Toán, Y học ở Italia. Phát kiến của ông đảo lộn toàn bộ những hiểu biết về thiên văn thời đó.

b) Nhà khoa học Áo Giôhan Kêple (Johanne Keple hoặc Johannes Keple) sinh năm 1571 mất

1630. Ông sinh ở miền Nam nước Đức. Ông là nhà thiên văn học đồng thời là nhà toán học. Ông từng giữ chức "quan coi về toán" của Hoàng đế Rodolphe II. Ngoài định luật đã nêu ông còn hai định luật là :

- Bán kính vectơ nối mặt trời tới quỹ đạo mỗi hành tinh quét những diện tích bằng nhau trong những khoảng thời gian bằng nhau.

- Bình phương chu kì chuyển động của hành tinh tỉ lệ với lập phương bán trục lớn của quỹ đạo.

2. Thứ tự từ gần Mặt Trời nhất đến xa nhất của 5 hành tinh và Trái Đất là : sao Thủy, sao Kim, Trái Đất, sao Hỏa, sao Mộc, sao Thổ.

Ngoài các hành tinh trên còn có các hành tinh nữa thuộc Hệ Mặt Trời là sao Thiên vương, sao Hải vương và sao Diêm vương.

3. Trái đất có dạng elipxoit tròn xoay chứ không phải hình cầu ; nó dẹt ở hai đầu. Từ tâm Trái Đất đến xích đạo là 6378,16km, còn từ tâm Trái đất đến địa cực là 6356,78km.

Nhận xét. Một số bạn đọc không kĩ câu 2 nên đã quên không xếp thứ tự Trái Đất. Các bạn được nhận quà tặng của THPT là : Trần Thị Thu Hằng, lớp K6 A2, Cao đẳng Sư phạm Lạng Sơn, Nguyễn Thị Mừng, 7D, THCS Cẩm Hưng, Cẩm Giàng, Hải Dương ; Đường Hải Long, 9B, THPT NK Trần Phú, Hải Phòng ; Đặng Xuân Cường, 12B, THPT Quỳnh Lưu III, Nghệ An ; Lê Quang Đức, 9A2, THCS Quang Trung, Quy Nhơn, Bình Định.

VŨ THANH THÀNH

### Giải đáp bài : LỜI GIẢI CÓ VẤN ĐỀ GÌ KHÔNG ?



Nhiều bạn đã chỉ rõ chỗ sai trong lời giải bài toán, đó là việc lập luận "Hàm số  $y = \log_2(x+1)$  đồng biến trên  $(-1, +\infty)$ , hàm số

$$y = \frac{2x}{3(x-2)} \text{ nghịch biến trên } (-1, +\infty) \setminus \{2\}.$$

Vì vậy PT(2) nếu có nghiệm thì nghiệm đó là duy nhất". Chúng ta có thể nhận thấy hàm số

$$y = \frac{2x}{3(x-2)} \text{ là nghịch biến trên } (-1, +\infty) \text{ nhưng}$$

không liên tục tại  $x = 2$ . Do đó việc kết luận PT(2) có nghiệm duy nhất là không chính xác.

Đúng ra phải lập luận : Hàm  $y = \frac{2x}{3(x-2)}$

ngịch biến trên khoảng  $(-1, 2)$  và  $(2, +\infty)$  nên nếu PT(2) có nghiệm thì tối đa có hai nghiệm).

Khắc phục sai lầm: Xét tính đồng biến, nghịch

biến của các hàm  $y = \log_2(x+1)$  và  $y = \frac{2x}{3(x-2)}$



trên các khoảng  $(-1, 2)$  và  $(2, +\infty)$  để từ đó suy ra PT(2) có hai nghiệm  $x = 0$  và  $x = 3$ . Kết hợp nghiệm ta thấy  $x = 0, x = 3$  là hai nghiệm của PT (1).

**Nhận xét.** TS nhận được rất nhiều ý kiến của các bạn trên khắp đất nước cho lời giải bài toán trên, trong đó có nhiều lời phân tích tốt, trình bày lại lời giải khá rõ ràng, chặt chẽ. Sau đây là danh sách các bạn được nhận tặng phẩm kì này

**Hà Nội :** Phạm Trọng Tiến, 12A1, khối chuyên Toán - Tin, ĐHSPT Hà Nội ; **Vĩnh Phúc :** Phạm Văn Hoàng, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc ; **Nam Định :** Đỗ Thị Hải Yến, 12C3, THPT A Hải Hậu ; **Nghệ An :** Lê Thành Lê, 12A1, THPT Nghi Lộc I, Đào Xuân Đức, 11A6, THPT chuyên Phan Bội Châu, Tp. Vinh

NGỌC HIỂN

## DẪ PHẢI LÀ GIÁ TRỊ LỚN NHẤT CHƯA ?

**Bài toán :** Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức  $M = \sin A + \sin B + \sin C$  với  $A, B, C$  là ba góc của tam giác không nhọn  $ABC$ .

Lời giải như sau :

Trước hết ta chứng minh BĐT :

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \leq \frac{9}{4} \quad (1)$$

Thật vậy

$$(1) \Leftrightarrow \frac{1 - \cos 2A}{2} + \frac{1 - \cos 2B}{2} + (1 - \cos^2 C) \leq \frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow -\cos(A+B) \cdot \cos(A-B) + (1 - \cos^2 C) \leq \frac{5}{4}$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 C - \cos C \cdot \cos(A-B) + \frac{1}{4} \geq 0 \quad (2)$$

Đặt  $\cos C = t$  và xem vế trái của BDT (2) là tam thức bậc hai đối với  $t$  :

$$f(t) = t^2 - t \cos(A-B) + \frac{1}{4} \text{ có biệt số}$$

$$\Delta t = \cos^2(A-B) - 1 \leq 0 \Rightarrow f(t) \geq 0.$$

Vậy BDT (2) đúng.

Áp dụng BDT Bu-nhi-a-côp-xki cho hai bộ số  $(1, 1, 1)$  ;  $(\sin A, \sin B, \sin C)$  ta có

$$M = \sin A + \sin B + \sin C \leq \sqrt{3(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C)} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad (\text{theo (1)})$$

$$\text{Suy ra GTLN của } M \text{ là } \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Bạn hãy cho biết ý kiến của mình về lời giải bài toán trên ? Còn cách giải của bạn như thế nào ?

NGUYỄN BÁ NAM  
(SV K26D Toán - Tin, ĐHSPT Hà Nội 2,  
Xuân Hòa, Mê Linh, Vĩnh Phúc)



## Giải đáp : AI TÍNH NHANH HƠN ?

**Quy luật bảng số :** Kể từ hàng thứ hai, mỗi số hạng bằng tổng hai số liền tiếp ở hàng liền trên tạo với nó một tam giác đều.

Ta thấy : Nếu ở hàng đầu tiên của bảng số có 2002 số hạng thì bảng đó có 2002 hàng. Mặt khác tổng các số đầu và cuối của mỗi hàng bằng hai lần tổng số đầu và số cuối của hàng liền trên nó (không kể hàng đầu tiên). Từ đó tổng hai số ở hàng 2001 là :  $2^{2000} \cdot 2003$ , suy ra số cuối cùng của bảng số đã cho là  $2^{2000} \cdot 2003$ .

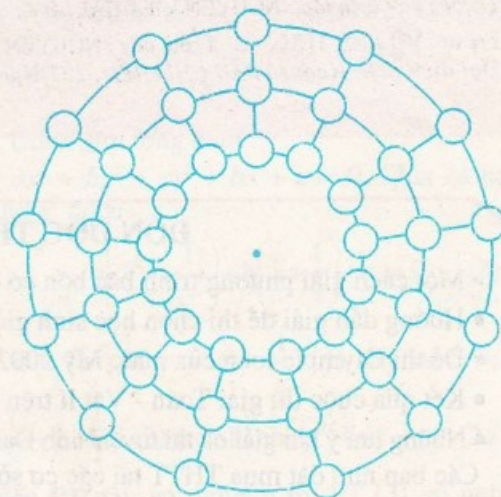
**Nhận xét :** Danh sách các bạn tính nhanh được kết quả bài toán, gửi bài đến tòa soạn sớm hơn cả là :

**Nam Định :** Lương Quy Thọ, 11A1, THPT Xuân Trường ; **Bắc Giang :** Nguyễn Tuyết Mai, 11A, THPT NK Ngô Sĩ Liên ; **Thanh Hóa :** Mai Đức Nam, 9A, THCS Lê Quý Đôn, Bim Sơn ; **Tp. Hồ Chí Minh :** Trần Vĩnh Sơn, 10L, ĐHQG Tp. Hồ Chí Minh, Trần Quốc Nam, 11A3, THPT chuyên Lê Hồng Phong

HỒNG QUANG

## NĂM THỨ 39 TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Nhân dịp Tạp chí THPT bước sang tuổi 39, mời các bạn thử tài trong trò chơi xếp 39 số. Hãy xếp 39 số từ 1 đến 39 vào các ô tròn ở hình dưới sao cho : tổng tất cả các số theo mỗi vòng tròn đồng tâm là bằng nhau, tổng ba số theo mỗi đường thẳng hướng tâm là bằng nhau, còn các số ở các ô kề nhau (có đoạn nối tiếp) hơn kém nhau không ít hơn 4 đơn vị.



HOÀNG NGUYỄN



# Toán học và Tuổi trẻ

## Mathematics and Youth

Năm thứ 39  
Số 304 (10-2002)  
Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội  
ĐT - Fax : 04.5144272  
Email : toanhocct@yahoo.com

### TRONG SỐ NÀY

- |                                                                                                                                             |                                                                                                                                                                           |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>1</b> <b>Dành cho Trung học cơ sở – For Lower Secondary Schools</b><br><i>Nguyễn Anh Thuận – Nét đẹp của phương trình hệ số đối xứng</i> | <b>12</b> <b>Đề ra kì này - Problems in This Issue</b><br>T1/304, ..., T10/304, L1, L2/304                                                                                |
| <b>2</b> <b>VKT – Hội nghị toán học toàn quốc lần thứ 6</b>                                                                                 | <b>14</b> <b>Giải bài kì trước - Solutions to Previous Problems</b><br>Giải các bài của số 300                                                                            |
| <b>3</b> <b>Đề thi tuyển sinh lớp 10 THPT chuyên trường ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội 2002 Môn Toán</b>                                              | <b>21</b> <b>Tiếng Anh qua các bài toán - English through Math Problems</b><br><i>Ngô Việt Trung - Bài số 58</i>                                                          |
| <b>6</b> <b>Kết quả Cuộc thi Vui hè 2002</b>                                                                                                | <b>22</b> <b>Câu lạc bộ - Math Club</b><br><b>Sai lầm ở đâu ? - Where's the Mistake ?</b>                                                                                 |
| <b>8</b> <b>Nguyễn Xuân Huy – Ma phương bậc chẵn</b>                                                                                        | <b>23</b> <b>Giải trí toán học – Math Recreation</b>                                                                                                                      |
| <b>10</b> <b>Nguyễn Khắc Minh – Lời giải các bài toán thi chọn học sinh giỏi Quốc gia môn toán THPT năm học 2001-2002</b>                   | <hr/> <i>Bìa 2 : Hà Huy Khoái - Đại hội Toán học Quốc tế lần thứ 24 - đôi điều ghi nhận</i><br><i>Bìa 4: Trường THPT Thái Phúc, huyện Thái Thụy, tỉnh Thái Bình</i> <hr/> |

*Tổng biên tập :*  
NGUYỄN CẢNH TOÀN  
*Phó tổng biên tập :*  
NGÔ ĐẠT TỬ

*Chịu trách nhiệm xuất bản :*  
Giám đốc NXB Giáo dục :  
NGÔ TRẦN ÁI  
*Tổng biên tập NXB Giáo dục :*  
VŨ DƯƠNG THUY

*Trưởng ban biên tập :* NGUYỄN VIỆT HẢI. *Biên tập :* VŨ KIM THUY, HỒ QUANG VINH.

*Trị sự :* VŨ ANH THU. *Trình bày :* NGUYỄN THỊ OANH, NGUYỄN THANH LONG, NGUYỄN TIẾN DŨNG  
*Đại diện phía Nam :* TRẦN CHÍ HIẾU, 231 Nguyễn Văn Cừ, Tp. Hồ Chí Minh. **ĐT : 08.8309049**

### ĐÓN ĐỌC THPT SỐ 305 (11/2002)

- Một cách giải phương trình bậc bốn có dạng đặc biệt
  - Hướng dẫn giải đề thi chọn học sinh giỏi toán THPT toàn quốc 2002 bảng A
  - Đề thi Olympic toán của nước Mỹ 2002
  - Kết quả cuộc thi giải Toán - Vật lí trên THPT năm học 2001 - 2002
  - Những lưu ý khi giải đề thi tuyển sinh Đại học, Cao đẳng khối B, năm 2002 (phần Hình học)
- Các bạn nhớ đặt mua THPT tại các cơ sở bưu điện gần nhất.

**THPT**



**BỒI DƯỠNG  
HOÁ HỌC**  
TRUNG HỌC CƠ SỞ

**Hướng dẫn  
làm bài tập**

**VẬT LÍ 12**

# SÁCH THAM KHẢO BỔ TRỢ VÀ CHỌN LỌC

## TOÁN TRUNG HỌC PHỔ THÔNG

| Tên sách                                 | Giá bìa (đồng) |
|------------------------------------------|----------------|
| <b>LỚP 10</b>                            |                |
| Nâng cao Đại số 10                       | 14.700         |
| Toán nâng cao Hình học 10                | 13.800         |
| Sổ tay tra cứu Toán 10                   | 5.800          |
| Giải toán Hình học 10 (chuyên)           | 7.700          |
| Giải toán Đại số 10 (chuyên)             | 7.000          |
| Giải toán Lượng giác 10 (chuyên)         | 8.000          |
| Giải toán và Ôn tập Đại số 10            | 10.500         |
| <b>LỚP 11</b>                            |                |
| Sổ tay tra cứu Toán 11                   | 5.000          |
| Giải toán Đại số và Giải tích 11(chuyên) | 12.000         |
| Giải toán Hình học 11 (chuyên)           | 12.600         |
| Giải Toán và Ôn tập Hình học 11          | 7.800          |
| Giải Toán và Ôn tập Đại số Giải tích 11  | 10.000         |

| Tên sách                                       | Giá bìa (đồng) |
|------------------------------------------------|----------------|
| <b>LỚP 12</b>                                  |                |
| Sổ tay tra cứu Toán 12                         | 4.200          |
| Giải toán khảo sát hàm số 12 (chuyên)          | 11.800         |
| Giải Toán tích phân và Giải tích Tổ hợp        | 16.000         |
| Giải toán Đại số Sơ cấp 12 (chuyên)            | 8.800          |
| Giải toán Lượng giác (Ôn thi đại học)          | 16.000         |
| Giảng dạy tích phân trong chương trình toán 12 | 9.800          |
| Giải toán và ôn tập Hình 12                    | 5.600          |
| Giải toán và ôn tập Giải tích 12               | 11.000         |
| Toán nâng cao Đại số - Giải tích 12            | 15.000         |

## LÍ - HÓA - SINH TRUNG HỌC PHỔ THÔNG

| Tên sách                                  | Giá bìa (đồng) |
|-------------------------------------------|----------------|
| Hóa đại cương 10-11-12 (chuyên)           | 13.600         |
| Giải toán Vật lí 10 (T1) (chuyên)         | 14.500         |
| Giải toán Vật lí 10 (T2) (chuyên)         | 9.400          |
| Bài tập tuyển chọn Sinh học 10-11-12 (T1) | 9.000          |
| Bài tập tuyển chọn Sinh học 10-11-12 (T2) | 11.000         |
| Tài liệu giáo khoa chuyên                 |                |
| Hóa học 11-12 (T1)                        | 19.300         |
| Tư liệu giảng dạy Hóa học 11              | 5.200          |
| Giải Toán Vật lí 11 (T1) (chuyên)         | 16.600         |
| Giải Toán Vật lí 11 (T2) (chuyên)         | 16.700         |

| Tên sách                                 | Giá bìa (đồng) |
|------------------------------------------|----------------|
| Hướng dẫn làm bài tập Vật lí 12          | 9.600          |
| Ôn tập Vật lí 12                         | 4.800          |
| Hướng dẫn và Ôn tập Sinh 12              | 3.200          |
| Sổ tay Hóa học sơ cấp                    | 5.600          |
| Sổ tay kiến thức Hóa học THPT            | 11.500         |
| Tài liệu giáo khoa chuyên Vật lí 12 (T2) | 8.000          |
| Giải toán Vật lí 12 (T2) (chuyên)        | 12.700         |
| Giải toán Vật lí 12 (T3) (chuyên)        | 8.900          |
| Sổ tay kiến thức Sinh học THPT           | 8.000          |

**ÔN TẬP  
ĐẠI SỐ 8**

**ÔN TẬP  
HÌNH HỌC 9**

**6**  
TẬP MỘT



# TRƯỜNG TRUNG HỌC PHỔ THÔNG THÁI PHÚC

## HUYỆN THÁI THỤY, TỈNH THÁI BÌNH



Hiệu trưởng  
**BÙI XUÂN THẮNG**

Trường THPT Thái Phúc được thành lập tháng 10 năm 1972, mang tên xã Thái Phúc – đơn vị Anh hùng lực lượng vũ trang thời chống Mỹ, quê hương của các danh nhân văn hóa Quách Đình Nghiêm, Quách Đình Bảo và chiến sĩ cách mạng Nguyễn Đức Cảnh. Năm học đầu tiên trường chỉ có 7 lớp với 25 cán bộ giáo viên. Đến nay trường đã có 30 lớp với 1700 học sinh và 60 CBGV, có phòng thí nghiệm thực hành, phòng dạy vi tính, dãy phòng học 3 tầng, nhà hiệu bộ, nơi ăn ở, làm việc của giáo viên, tất cả đều khang trang hiện đại, đáp ứng yêu cầu dạy – học trong giai đoạn hiện nay.

Ba mươi năm qua nhà trường đã đào tạo được 28 khóa trong đó có 4200 học sinh thi đỗ và được tuyển thẳng vào các trường Đại học, Cao đẳng, 2500 học sinh đỗ cử nhân, 300 người có học vị thạc sĩ, 10 người có học vị tiến sĩ và tiến sĩ khoa học và rất nhiều cán bộ quản lý giỏi trong các cơ quan nhà nước, như tiến sĩ Nguyễn Công Chính, tiến sĩ

Phạm Văn Trí, tiến sĩ Nguyễn Hồng Du...

Các đội tuyển của trường thi học sinh giỏi cấp tỉnh từ năm 1975 đến nay đã có 120 giải đồng đội và 352 giải cá nhân. Năm học 2001 – 2002 trường được Sở GD-ĐT Thái Bình tặng giải Nhì toàn tỉnh về thành tích học sinh giỏi. Đội tuyển Toán 10, 11, 12 năm học này đã đạt được giải Nhất, giải Nhì về đồng đội. Tiêu biểu có các em: Nguyễn Đình Nho, Bùi Công Khiên, Nguyễn Cao Cường, Nguyễn Mạnh Trường, Đoàn Thị Hồng, Nguyễn Tuấn Diện, Phí Văn Ba, Trịnh Đình Trần đều đạt giải Nhất, giải Nhì với số điểm thi tối đa. Hàng năm nhiều em học sinh tham gia giải bài và giải các đề thi do tạp chí Toán học và Tuổi trẻ tổ chức.

Cùng với sự đi lên của nhà trường, đội ngũ các thầy cô giáo ngày một trường thành. Trong số các thầy, cô giáo đang công tác tại trường những gương mặt tiêu biểu phải kể đến các thầy cô Bùi Xuân Thắng, Đoàn Duy Thành, Phạm Thị Lý, Phạm Thị Ngoan, Nguyễn Thị Hồng Trang, Bùi Quang Khải, Bùi Đình Hưng, Phạm Xuân Thủy... Năm 1997 trường được Chủ tịch nước Trần Đức Lương tặng Huân chương Lao động hạng Ba. Ngày 19 tháng 10 năm 2002 trường đón nhận Huân chương Lao động hạng Nhì do Chủ tịch nước tặng trong ngày kỉ niệm 30 năm thành lập trường. Trong giai đoạn mới phát huy truyền thống của quê hương, truyền thống của nhà trường, THPT Thái Phúc sẽ vươn lên tầm cao mới xứng đáng với niềm tin yêu của Đảng bộ và nhân dân địa phương.



Tổ toán trường THPT Thái Phúc

ISSN : 0866-8035

Chi số : 12884

Mã số : 8BT06M2

Chế bản tại Tòa soạn

In tại Nhà máy in Diên Hồng, 187B phố Giảng Võ

In xong và nộp lưu chiểu tháng 10 năm 2002

Giá : 3000đ

Ba nghìn đồng