

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ❖ HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

Toán học & Tuổi trẻ

8
2002

SỐ 302 - NĂM THỨ 39 - TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG

CHÚC MỪNG THÀNH TÍCH ĐỘI TUYỂN VIỆT NAM THI TOÁN QUỐC TẾ



KÌ THI TOÁN QUỐC TẾ LẦN THỨ 43

VŨ ĐÌNH HÒA - NGUYỄN KHẮC MINH

Kì thi toán quốc tế lần thứ 43 (IMO2002) được tổ chức tại thành phố cảng Glasgow của Scotland, Vương quốc Anh từ 18/7 tới 30/7/2002 với 479 thí sinh từ 84 nước và khu vực (có thêm 1 nước và 6 thí sinh tham gia so với kì thi toán quốc tế lần thứ 42 tổ chức tại Hoa Kỳ). Đoàn tuyển Việt Nam gồm 6 học sinh: Phạm Hồng Việt (12 PTCTT ĐH KHTN-ĐHQG Hà Nội), Nguyễn Xuân Trường (PTCTT Vĩnh Phúc), Vũ Ngọc Minh và Phạm Gia Vĩnh Anh (12T PTCTT ĐHSP Hà Nội), Mai Thanh Hoàng lớp 12 và Phạm Thái Khánh Hiệp lớp 11 (PTCTT ĐH Vinh). Đoàn có một quan sát viên là thầy giáo Mai Văn Tư, chủ nhiệm khối THPT chuyên Toán Tin ĐH Vinh.

IMO2002 chính thức được khai mạc vào ngày 23.07 tại hội trường Barony của Trường đại học Strathclyde ở Glasgow. Trước đó, trong ba ngày liên từ 20.7 tới 22.7, các trưởng đoàn cùng Ban tổ chức kì thi soạn thảo đề thi. Bài thi bao gồm 6 bài trên cơ sở các bài toán được các nước đề nghị (Anh là nước chủ nhà

không ra đề), thuộc các lĩnh vực đại số, hình học, tổ hợp và số học. Các bài thi được phân loại làm 3 loại: dễ, khó và trung bình. Bài ra cho mỗi ngày gồm một bài dễ (bài số 1 và bài số 4), một bài trung bình (bài số 2 và bài số 5) và một bài khó (bài số 3 và bài số 6). Mỗi bài được tối đa 7 điểm.

Theo điều lệ của IMO, không quá 1/2 tổng số thí sinh được trao huy chương, tính từ điểm cao xuống thấp theo tỉ lệ 1:2:3 là huy chương vàng, bạc và đồng. Năm nay Ban tổ chức IMO đã trao:

39 huy chương vàng (HCV) cho các thí sinh đạt từ 29 điểm trở lên,

73 huy chương bạc (HCB) cho các thí sinh đạt từ 23 điểm trở lên,

120 huy chương đồng (HCD) cho các thí sinh đạt từ 14 điểm trở lên,

Bằng khen cho mỗi thí sinh giải được trọn vẹn một bài toán.

Sau đây là bảng điểm của các thí sinh Việt Nam.

TT	Họ và tên	Bài 1	Bài 2	Bài 3	Bài 4	Bài 5	Bài 6	Tổng số	Giải
1	Mai Thanh Hoàng	7	7	1	0	6	0	21	HCD
2	Nguyễn Xuân Trường	7	7	1	7	7	0	29	HCV
3	Phạm Gia Vĩnh Anh	7	7	7	7	7	0	35	HCV
4	Phạm Hồng Việt	3	6	2	7	6	0	24	HCB
5	Phạm Thái Khánh Hiệp	1	7	0	7	7	0	22	HCD
6	Vũ Ngọc Minh	7	7	7	7	7	0	35	HCV

Theo thông lệ IMO không có giải đồng đội, nhưng nếu tính theo tổng số điểm, đoàn Việt Nam đứng thứ năm (với tổng số 166 điểm). Mười nước có tổng số điểm cao nhất là Trung quốc (212 điểm), Nga (204 điểm), Hoa Kỳ (171 điểm), Bungari (167 điểm), Việt Nam (166 điểm), Hàn Quốc (163 điểm), Đài Loan (161 điểm), Rumani (157 điểm), Ấn Độ (156 điểm) và Đức (144 điểm). Trong buổi lễ bế mạc công chúa Anne đã đến dự và trao huy chương vàng cho các thí sinh.

Tổng số 39 huy chương vàng được trao cho thí sinh các nước sau:

6 HCV: Trung Quốc, Nga ;

4 HCV: Hoa Kỳ ;

3 HCV: Việt Nam, Bungari ;

2 HCV: Đức, Rumani ;

1 HCV: Bélarut, Canada, Hungari, Hồng Kông, Ấn Độ, Nhật, Hàn Quốc, Na Uy, Đài Loan, Thổ Nhĩ Kỳ, Ukraina, Ôxtralia, Niu Dilân.

Dành cho các bạn TRUNG HỌC CƠ SỞ



Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ 3/2002 đã đăng lời giải bài T5/293 với hai cách giải, trong đó cách thứ nhất sử dụng đến tính chất đường phân giác trong tam giác để chứng minh $AB + AC > 2BC$. Ta thấy điều kiện $IG \perp AI$ trong giả thiết là để cho $AI > 2DI$ và tam giác ABC không cân tại A . Nếu tam giác ABC có thêm điều kiện $AB < AC$ thì muốn có $AI > 2DI$ ta chỉ cần cho rằng buộc : IG cắt tia MB là đủ. Trước hết có nhận xét sau :

Nhận xét 1. Cho $\triangle ABC$ với $AB < AC$. Gọi AD là đường phân giác trong, AM là đường trung tuyến của tam giác đó thì M nằm giữa C và D

(h. 1). Thật vậy ta có $\frac{BM}{CM} = 1 > \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD} \Rightarrow \frac{BC}{CM} > \frac{BC}{CD} \Rightarrow CD > CM \Rightarrow M$ nằm giữa C và D .

Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$ thì :

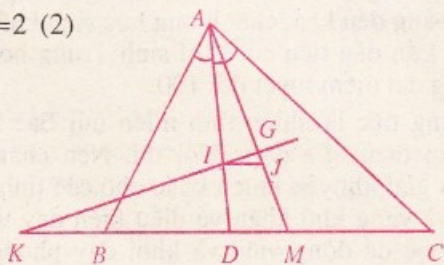
$$\frac{AI}{ID} = \frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CD} = \frac{AB+AC}{BD+CD} = \frac{AB+AC}{BC} \quad (1)$$

Bài toán 1 : Cho $\triangle ABC$ ($AB < AC$). Gọi G, I lần lượt là trọng tâm, tâm đường tròn nội tiếp tam giác và GI cắt tia MB tại K . Chứng minh rằng $AB + AC > 2BC$.

Lời giải : Gọi D, M là các giao điểm tương ứng của AI và AG với BC . Từ I kẻ đường thẳng song song với BC , cắt GM tại J , khi đó theo

Nhận xét 1, J nằm giữa G và M nên $\frac{AI}{ID} = \frac{AJ}{JM} >$

$$\frac{AG}{GM} = 2 \quad (2)$$



Hình 1

VẬN DỤNG TÍNH CHẤT ĐƯỜNG PHÂN GIÁC TRONG TAM GIÁC ĐỂ GIẢI TOÁN

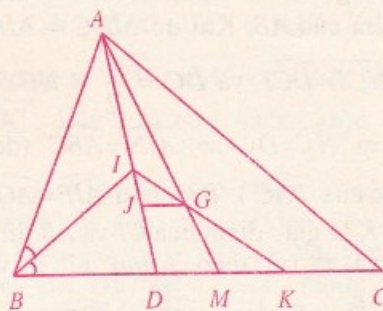
PHAN THẾ HẢI
(GV THCS Hồ Xuân Hương,
Quỳnh Lưu, Nghệ An)

Từ (1), (2) suy ra $AB + AC > 2BC$.

Từ kết quả bài toán 1 đặt ra cho chúng ta câu hỏi : Khi nào thì $AB + AC < 2BC$? Kết quả sau đây sẽ trả lời câu hỏi đó.

Bài toán 2 : Cho $\triangle ABC$ ($AB < AC$) gọi I là tâm đường tròn nội tiếp và G là trọng tâm tam giác và GI cắt tia DC tại K . Chứng minh rằng $AB + AC < 2BC$.

Lời giải : Gọi giao điểm của AI và AG với BC lần lượt là D và M . Qua G kẻ đường thẳng song song với DM , cắt ID tại J thì J nằm giữa I và D theo Nhận xét 1 nên



Hình 2

$$\frac{AI}{ID} < \frac{AJ}{JD} = \frac{AG}{GM} = 2 \quad (3)$$

Từ (1), (3) suy ra $AB + AC < 2BC$.

Ta xét xem khi nào $AB + AC = 2BC$.

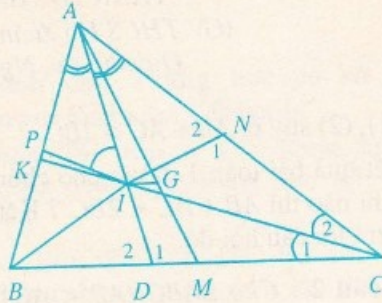
Bài toán 3 : Cho $\triangle ABC$ ($AB < AC$). I, G lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp, trọng tâm tam giác đó. Khi đó $IG \parallel BC$ nếu và chỉ nếu $AB + AC = 2BC$

$$\text{Lời giải : } IG \parallel BC \Leftrightarrow \frac{AI}{ID} = \frac{AG}{GM} = 2 \quad (\text{h.3}).$$

Theo (1) điều này xảy ra $\Leftrightarrow AB + AC = 2BC$.

Phần tiếp theo sẽ ta sẽ khai thác bài toán 3 để có thêm các kết quả khác.

Nhận xét 2. Đặt $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$; $c < b$, $c + b = 2a$. Khi đó: $IG \parallel BC$, theo **Nhận xét 1** thì: $\frac{b}{CD} = \frac{c}{BD} = \frac{b+c}{a} = 2$ và $DM = DC - MC = \frac{b-a}{2}$. Suy ra $IG = \frac{2}{3}DM = \frac{b-a}{3}$.



Hình 3

Nếu lấy $a = 3$, $b = 4$, $c = 2$ thì $IG = 1/3$ và đây chính là nội dung bài toán T4/227 trong THPT 9/1996. Nếu lấy $a = 6$, $b = 7$, $c = 5$ thì $IG = 1/3$ và đó là nội dung bài T4/229 trong THPT 11/1996.

Bây giờ gọi N là trung điểm của AC , P là trung điểm của AB . Khi đó $\triangle IDC = \triangle INC$ (c chung, $\widehat{NCI} = \widehat{DCI}$ và $DC = \frac{b}{2} = NC$). Do đó

$\widehat{N_1} = \widehat{D_1} \Rightarrow \widehat{N_2} = \widehat{D_2} \Rightarrow \widehat{AIN} = \widehat{ABC}$ (do AI là phân giác của $\widehat{BAC}$). Tương tự $\widehat{AIP} = \widehat{ACB}$ (4).

Giả sử K là giao điểm của CI và AB thì K nằm giữa B và P (vì theo **Nhận xét 1** và $a = \frac{b+c}{2} < \frac{b+b}{2} = b$). Vậy $\widehat{AIP} < \widehat{CID} \Rightarrow \widehat{ACB} < \widehat{CID}$ (theo (4)), suy ra $\widehat{ACB} < \widehat{CIN}$ ($\widehat{CIN} = \widehat{CID}$). Từ đó $\widehat{GIC} < \widehat{GIN}$ ($IG \parallel BC$) và chúng ta có kết quả:

Bài toán 4. Cho $\triangle ABC$ ($AB < AC$). Gọi G, I lần lượt là trọng tâm và tâm đường tròn nội tiếp tam giác đó, N là trung điểm AC . Chứng minh rằng nếu $AB + AC = 2BC$ thì $\widehat{GIC} < \widehat{GIN}$

Nhận xét 3: Nếu $\triangle ABC$ có $\widehat{B} = 90^\circ$, $AB = 6$ và $BC = 8$ thì lúc đó $AC = 10$. Tam giác này thỏa mãn điều kiện $b + c = 2a$. Trở lại phần phân tích để dẫn đến bài toán 4 (hình 3), ta có $\widehat{AIN} = \widehat{ABC} = 90^\circ$. Đây chính là nội dung của bài toán T4/205 trong THPT 7/1994.

Hi vọng rằng các bạn có thể tìm được nhiều kết quả thú vị trong các bài toán khác nữa. /.

HỘI THI TIN HỌC TRẺ KHÔNG CHUYÊN TOÀN QUỐC LẦN THỨ VIII

VŨ KIM THỦY

Khai mạc ngày 1.8.2002, Hội thi Tin học trẻ không chuyên toàn quốc lần thứ VIII, tổ chức tại Hà Nội, đã bế mạc ngày 3.8.2002. Tham dự hội thi là 154 học sinh từ 49 tỉnh, thành và ngành được tuyển chọn từ các cuộc thi cơ sở. TP Hồ Chí Minh, Cần Thơ, Tổng Công ty Bưu chính Viễn thông là các đơn vị tổ chức tốt cuộc thi. Quảng Trị là một địa phương có nhiều khó khăn nhưng đã tiến hành hội thi có kết quả tốt. Ngoài các cơ quan Trung ương Đoàn TNCS Hồ Chí Minh, Bộ Khoa học Công nghệ và Môi trường, Bộ Giáo dục và Đào tạo, Đài Truyền hình Việt Nam, Tổng Công ty Bưu chính Viễn thông, Hội Tin học Việt Nam, năm nay đồng tổ chức còn có thêm Bộ Tài chính. Ngoài các phần thi như mọi năm (Bảng A cho học sinh Tiểu học, bảng B cho học sinh Trung học cơ sở, bảng C cho học sinh Trung học Phổ thông, bảng D cho các phần mềm sáng tạo khối không chuyên và bảng E cho phần mềm sáng tạo khối chuyên) năm nay còn có thêm phần thi Tin học vui để tăng phần Hội cho Hội thi và có cuộc Chung khảo Tin học vui. 98 giải thưởng đã được trao, trong đó có 9 giải Nhất, 11 giải Nhì, 32 giải Ba. Đoàn Tổng Công ty Bưu chính Viễn thông giành giải Nhất đồng đội với điểm bình quân 63,7/100. Giải nhất bảng A là Nguyễn Anh Tuấn, Hải Phòng, nhất bảng B là Nguyễn Đặng Việt Anh, TCT Bưu chính Viễn thông, nhất bảng C là Thân Quốc Lâm, Quảng Ninh, Huỳnh Lý Thanh Trung, Đà Nẵng, Trần Ngọc Đức, Tp. Hồ Chí Minh, nhất bảng D là Huỳnh Nguyệt Thanh, Cần Thơ, Nguyễn Đặng Việt Anh, TCT Bưu chính Viễn thông, Nguyễn Ngọc Quỳnh, Hà Nội, nhất bảng E là Phan Vĩnh Long, Hà Nội. Huỳnh Dương Quy, An Giang, 10 tuổi là thí sinh trẻ tuổi nhất đạt giải.

Năm nay đề thi khó hơn nhưng kết quả của các bảng đều khá, chất lượng học sinh khá đồng đều. Lần đầu tiên có 3 thí sinh Trung học Phổ thông đạt điểm tuyệt đối 100.

Đáng tiếc là nhiều tỉnh miền núi Bắc Bộ đã không tham gia được Hội thi. Nền tảng, có thêm giải khuyến khích khác cho các tỉnh miền núi và vùng khó khăn về điều kiện dạy và học Tin học để động viên và khơi dậy phong trào cho những năm sau.

MỘT SỐ ĐẶC ĐIỂM CỦA SÁCH HÌNH HỌC LỚP 6 MỚI

PHẠM GIA ĐỨC

1. Đặc điểm chung của hình học lớp 6

Hình học 6 (HH6) là phần chuyển tiếp từ giai đoạn hình học bằng quan sát, thực nghiệm ở bậc tiểu học sang giai đoạn tiếp thu kiến thức bằng suy diễn ở cấp trung học cơ sở. Ở tiểu học, mỗi hình là một chỉnh thể, bây giờ mỗi hình được tạo thành từ một số "bộ phận" có liên hệ với nhau và ngay giữa các hình cũng có mối quan hệ nào đó.

Hình được hiểu theo nghĩa khái quát và thống nhất : *Hình là một tập hợp điểm*. Mỗi hình phẳng là một tập hợp con của mặt phẳng và mặt phẳng là tập hợp điểm cho trước. Đường thẳng là một tập hợp vô hạn điểm, là một hình, nó là một *bộ phận* của mặt phẳng. Từ đó quan hệ *thuộc*, kí hiệu $\in$ giữa phần tử và tập hợp, đã biết trong lí thuyết tập hợp trở thành quan hệ được thừa nhận trong hình học. Mệnh đề thông thường *điểm A là một phần tử của tập hợp a*, kí hiệu $A \in a$ và đọc là *điểm A thuộc đường thẳng a*. Từ các điểm, ta xây dựng các hình đơn giản và từ hình đơn giản đến các hình phức tạp hơn, đó là logic phát triển của hình học phẳng. Chẳng hạn : *Đoạn thẳng AB là hình gồm điểm A, điểm B và các điểm nằm giữa A, B. Tam giác ABC là hình gồm ba đoạn thẳng AB, BC, CA khi ba điểm A, B, C không thẳng hàng, v.v...*

Tuy nhiên, quan niệm *Hình là tập hợp điểm* được ngấm hình thành cho học sinh. Cũng vậy, quan hệ $\in$ được học sinh quen dần, còn quan hệ bao hàm ($\subset$) thì không sử dụng một cách tường minh.

Dạy học hình học ở lớp 6 khác với dạy hình học trong các lớp tiếp theo ở chỗ học sinh nhận thức các hình và các mối quan hệ nói trên bằng mô tả trực quan với sự hỗ trợ của trực giác, của tưởng tượng. Tuy nhiên, từ mô tả trực quan, học sinh phải đi đến khái niệm trừu tượng về hình hình học, qua quan sát, thực nghiệm, đo đoạn thẳng, đo góc, ... học sinh hiểu được các quan hệ trừu tượng trong hình học. Học sinh phải phân biệt được cái thước, cái gậy với đoạn thẳng, cái mắc áo với hình tam giác, hình vẽ với hình hình học. Sự phân biệt này nói lên tính trừu tượng của hình học lớp 6 so với hình học ở Tiểu học.

Hình học lớp 6 được xây dựng theo đường lối quy nạp, cung cấp những biểu tượng ban đầu,

cần thiết để hiểu thấu một số khái niệm mở đầu hình học phẳng, chuẩn bị cơ sở vững chắc cho việc chứng minh suy diễn ở các lớp tiếp theo.

Nội dung của Hình học 6 gồm :

– Một số hình đơn giản và quan hệ giữa chúng.

– Số đo đoạn thẳng, số đo góc và các dụng cụ đo vẽ

– Một số tính chất liên hệ giữa các hình đã nêu.

2. Cách trình bày của hình học lớp 6

– Hình học lớp 6 được trình bày theo kiểu tiếp cận quy nạp, từ quan sát, thử nghiệm, đo, vẽ, nêu nhận xét, đi dần đến kiến thức mới.

Chẳng hạn : Từ việc đo đoạn thẳng đi đến khái niệm *độ dài đoạn thẳng*.

– Trong trường hợp có thể, SGK nêu tình huống để học sinh khám phá.

Chẳng hạn : Cho ba điểm A, M, B thẳng hàng. Đo AM, MB, AB rồi so sánh $AM + MB$ với AB. Cho học sinh vẽ, đo, so sánh, nêu nhận xét trong hai trường hợp : M nằm giữa A, B và M không nằm giữa A, B, từ đó đi đến kết luận :

M nằm giữa A, B $\Leftrightarrow AM + MB = AB$.

– SGK cũng chú trọng nêu các khái niệm phủ định nhau và vẽ hình minh họa để rèn luyện tư duy thuận, nghịch, chẳng hạn :

Ba điểm thẳng hàng và ba điểm không thẳng hàng.

Điểm nằm giữa hai điểm và điểm không nằm giữa hai điểm.

Hai tia đối nhau và hai tia không đối nhau.

– SGK coi trọng việc sử dụng thành thạo các công cụ đo, vẽ, nói rõ tác dụng của mỗi loại công cụ đó. Chẳng hạn :

Với thước thẳng, ta vẽ được vạch thẳng biểu diễn một đường thẳng. Để biểu diễn một đoạn thẳng phải vẽ rõ hai mút.

Với compa ta vẽ được đường tròn, chuyển được một độ dài từ vị trí này đến vị trí khác.

– SGK coi trọng việc sử dụng các công cụ khác nhau để giải quyết cùng một vấn đề. Chẳng hạn :

Để vẽ đoạn thẳng cho biết độ dài thì có thể dùng thước đo độ dài hoặc dùng compa và thước thẳng.

Để xác định trung điểm của đoạn thẳng thì có thể dùng thước đo độ dài hoặc gấp giấy.

Để vẽ tia phân giác của góc thì có thể dùng thước đo góc hoặc gấp giấy rồi tô lại nếp gấp bằng bút và thước thẳng.

Chú ý rằng việc sử dụng mỗi công cụ có cơ sở khác nhau. Việc dùng thước đo độ dài, thước đo góc dựa vào tính chất xác định điểm trên tia, xác định tia trên nửa mặt phẳng, còn việc gấp giấy dựa vào phép đối xứng trục.

– SGK rất chú trọng việc trình bày định nghĩa khái niệm.

Cho học sinh tiếp xúc với khái niệm được định nghĩa trước khi định nghĩa nó, tiếp xúc bằng cách quan sát quá trình hình thành khái niệm đó hoặc bằng cách quan sát hình vẽ đối tượng đó.

Chẳng hạn quan sát hình vẽ trung điểm M của đoạn thẳng AB ta thấy điểm M có hai tính chất : M nằm giữa A, B và $MA = MB$, từ đó yêu cầu học sinh trả lời câu hỏi : Trung điểm của đoạn thẳng AB là gì ?

Xây dựng các định nghĩa theo kiểu mô tả, đơn giản, dựa vào hình vẽ, có mức độ trừu tượng, khái quát thích hợp. Chẳng hạn ta định nghĩa đoạn thẳng AB chứ không định nghĩa đoạn thẳng, ta định nghĩa tam giác ABC chứ không định nghĩa tam giác.

Có trường hợp, ta phát biểu định nghĩa về cùng một đối tượng bằng nhiều cách khác nhau. Chẳng hạn :

Định nghĩa thứ nhất : Điểm O chia đường thẳng xy thành hai phần riêng biệt. Mỗi phần đó cùng với điểm O là một tia gốc O .

Định nghĩa thứ hai : Tia AB là hình gồm điểm A và tất cả các điểm nằm cùng phía với B đối với A .

Định nghĩa thứ ba : Hình tạo thành bởi điểm O và phần đường thẳng chứa tất cả các điểm nằm cùng phía đối với O là một tia gốc O .

Tuy nhiên SGK không viết tiêu đề "định nghĩa", chưa yêu cầu học sinh xây dựng mọi định nghĩa phải thỏa mãn tất cả các yêu cầu logic. Trong các khái niệm của Hình học 6, một số khái niệm ban đầu được nêu ra ở dạng mô tả, dựa vào hình vẽ, còn một số khái niệm được định nghĩa bằng lời dựa trên các khái niệm đã biết.

– Trong hình học 6, các tính chất được diễn đạt chính xác, nhưng đơn giản, rõ ràng, ít dùng những thuật ngữ toán học khó như *tồn tại, duy nhất, bất kì, xác định...*

SGK quy ước : Khi nói "cho hai điểm (đường thẳng, tia)" mà không nói gì thêm thì ta hiểu là

"hai điểm (đường thẳng, tia) phân biệt". Sử dụng quy ước đó, SGK không viết : "Có một và chỉ một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt cho trước" mà viết : "Có một và chỉ một đường thẳng đi qua hai điểm A, B ". Quy ước này chỉ sử dụng ở lớp 6.

– SGK coi trọng hình vẽ, xem kênh hình có tác dụng gây biểu tượng, trí tưởng tượng không gian để thuận lợi trong việc nhận thức khái niệm hình học trừu tượng. Do đó trong sách có nhiều hình vẽ, có hình vẽ kèm theo chú thích.

– SGK Hình học 6 cấu tạo bài giảng theo §, mỗi § một tiết (cả lý thuyết và thực hành). Riêng "§5. Tia" (chương I) và "§6. Tia phân giác của góc" (chương II) có thêm mỗi § một tiết luyện tập. Số bài tập ở mỗi § chủ yếu nhằm củng cố kiến thức, rèn luyện cách phát biểu chính xác, nhận dạng và thể hiện khái niệm. Có chú trọng loại bài tập rèn luyện kỹ năng đo, vẽ. Còn các câu hỏi, bài tập liên hệ với thực tế, ứng dụng vào thực tế, cũng như các bài tập tổng hợp có chút ít đào sâu, tìm tòi, khai thác được trình bày nhiều hơn trong sách bài tập.

Sách giáo khoa, sách bài tập, sách giáo viên là một bộ sách hoàn chỉnh. Bài tập trong sách bài tập không trùng lặp bài tập trong SGK nhưng được xây dựng tương tự, là sự bổ sung không thể thiếu cho SGK về mặt số lượng bài tập, về dạng bài tập, về loại hình tư duy. Sách bài tập thực hiện yêu cầu phân hóa học sinh, nâng trình độ học sinh từ trung bình lên khá, giỏi. Mỗi bài tập đều kèm theo hướng dẫn, hoặc đáp số, hoặc hình vẽ minh họa, hoặc lời giải tóm tắt.

3. Những chú ý khi dạy Hình học lớp 6

SGK viết theo kiểu quy nạp, đúng trình tự lên lớp. Nói chung, giáo viên có thể hướng dẫn học sinh sử dụng SGK, giúp học sinh tự học, nêu thắc mắc, phát biểu, tranh luận. Giáo viên làm trọng tài, gợi ý, chốt kiến thức.

Giáo viên ra xen bài tập để củng cố từng phần. Hết mỗi tiết học, giải quyết xong khoảng 75% số bài tập trong SGK. Học sinh về nhà làm tiếp số bài tập còn lại của SGK và như vậy là đạt yêu cầu dạy học đối với học sinh trung bình. Giáo viên có thể hướng dẫn học sinh làm thêm bài tập trong sách bài tập nhằm nâng cao kỹ năng giải toán, đào sâu, khai thác về mặt lý thuyết, vận dụng kiến thức vào thực tế.

Giáo viên tự chọn phương pháp dạy học thích hợp với mọi đối tượng học sinh, đảm bảo mục tiêu bài giảng, kích thích được hứng thú và hoạt động học tập của học sinh.

CHUẨN BỊ THI VÀO ĐẠI HỌC

MỘT SỐ LƯU Ý KHI GIẢI

ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC KHỐI A NĂM 2002

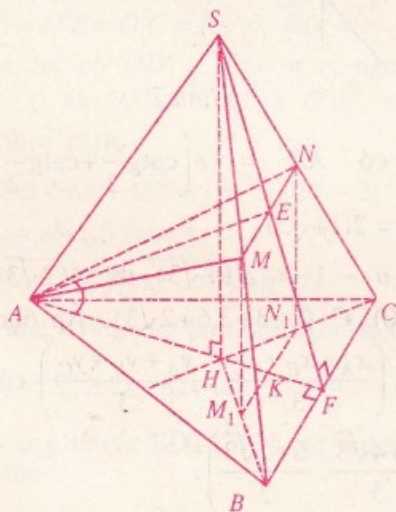
(Tiếp theo kì trước)

ĐẶNG THANH HẢI – NGUYỄN ANH DŨNG

Câu IV. 1) Cho hình chóp tam giác đều $SABC$ đỉnh S , có độ dài cạnh đáy bằng a . Gọi M và N lần lượt là các trung điểm của các cạnh SB và SC . Tính theo a diện tích tam giác AMN , biết rằng mặt phẳng (AMN) vuông góc với mặt phẳng (SBC) .

Hướng dẫn giải. Vì $SABC$ là hình chóp tam giác đều nên $\Delta SAB = \Delta SAC \Rightarrow AM = AN$. Gọi F là trung điểm của BC . SF cắt MN tại E (h. 1).

Ta có MN là đường trung bình của ΔSBC cân và E là trung điểm của MN . Vì ΔAMN cân với đáy MN nên $AE \perp MN$. Lại do $mp(AMN) \perp mp(SBC)$. Suy ra $AE \perp SF$ (1).



Hình 1

Mặt khác $\frac{SE}{SF} = \frac{SM}{SB} = \frac{1}{2}$ (2)

Từ (1) (2) suy ra $SA = AF = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Xét ΔSBF vuông có $SF^2 = SB^2 - BF^2 = SA^2 - BF^2 = \frac{a^2}{2} \Rightarrow SF = \frac{a}{\sqrt{2}} \Rightarrow SE = \frac{a}{2\sqrt{2}}$

Xét ΔSAE vuông có $AE^2 = SA^2 - SE^2 = \frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{8} = \frac{5a^2}{8} \Rightarrow AE = \frac{a\sqrt{10}}{4}$.

Cách 1. Tính theo công thức $S_{\Delta} = ah_a : 2$

$$S_{AMN} = \frac{MN \cdot AE}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{10}}{4} = \frac{a^2 \sqrt{10}}{16} \text{ (đvdt)}$$

Cách 2. Tính theo công thức hình chiếu $S' = S \cos \alpha$. Gọi H là tâm ΔABC đều và M_1, N_1 lần lượt là trung điểm của HB, HC . Khi đó ΔAM_1N_1 là hình chiếu của ΔAMN lên $mp(ABC)$. Qua A kẻ đường thẳng $d // BC \Rightarrow d // MN$ thì d là giao tuyến của hai mặt phẳng (ABC) và (AMN) , mà $AE \perp d$ và $AF \perp d$ nên góc $\widehat{EAF}$ là góc phẳng nhị diện tạo bởi 2 mặt phẳng (ABC) và (AMN) . Theo công thức tính diện tích hình chiếu ta có :

$$S_{AM_1N_1} = S_{AMN} \cdot \cos \widehat{EAF} = S_{AMN} \cdot \frac{AE}{AF} \\ \Rightarrow S_{AMN} = \frac{AE}{AF} \cdot \frac{M_1N_1}{2} \cdot AK = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{10}} \cdot \frac{a}{4} \cdot \frac{a5\sqrt{3}}{12} \\ = \frac{a^2 \sqrt{10}}{16} \text{ (đvdt)}$$

Câu IV. 2) Trong không gian với hệ tọa độ Đềcac vuông góc $Oxyz$ cho hai đường thẳng

$$\Delta_1: \begin{cases} x-2y+z-4=0 \\ x+2y-2z+4=0 \end{cases} \text{ và } \Delta_2: \begin{cases} x=1+t \\ y=2+t \\ z=1+2t \end{cases}$$

a) Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng Δ_1 và song song với đường thẳng Δ_2 .

b) Cho điểm $M(2; 1; 4)$. Tìm tọa độ điểm H thuộc đường thẳng Δ_2 sao cho đoạn thẳng MH có độ dài nhỏ nhất.

Hướng dẫn giải: a) **Cách 1.** Sử dụng cách thiết lập PT chùm mặt phẳng. Vì $mp(P)$ đi qua Δ_1 nên nó thuộc chùm mặt phẳng chứa hai mặt phẳng có giao tuyến là Δ_1 . PT mặt phẳng (P) có dạng $\lambda(x-2y+z-4) + \mu(x+2y-2z+4) = 0$ ($\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$) hay $(\lambda+\mu)x + (-2\lambda+2\mu)y + (\lambda-2\mu)z - 4\lambda+4\mu = 0$

Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (\lambda+\mu, -2\lambda+2\mu, \lambda-2\mu)$. Đường thẳng Δ_2 có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1, 1, 2)$. Theo giả thiết $\Delta_2 // mp(P)$

nên $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$, suy ra $\lambda + \mu - 2\lambda + 2\mu + 2\lambda - 4\mu = 0$ hay $\lambda = \mu (\neq 0)$. Thay vào PT mặt phẳng (P) ta được $2x - z = 0$ (1)

Lưu ý 1. Chúng ta chưa thể kết luận ngay mp(P) có PT $2x - z = 0$ vì chưa biết Δ_2 có thuộc mp(P) không? Thay $x = 1 + t, y = 2 + t, z = 1 + 2t$ vào vế trái PT (1) ta được $2(1 + t) - 1 - 2t = 1 \neq 0 (\forall t)$, điều này chứng tỏ $\Delta_2 \notin \text{mp}(P)$ hay $\Delta_2 \parallel \text{mp}(P)$. Vậy mp(P) có PT $2x - z = 0$.

Cách 2. Xác định tọa độ vector pháp tuyến của mp(P).

Đường thẳng Δ_1 đi qua $\left(\frac{4}{3}, 0, \frac{8}{3}\right)$ và có vector chỉ phương $\vec{v} = \left(\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right) = (2, 3, 4)$.

Đường thẳng Δ_2 đi qua $B(1, 2, 1)$ có vector chỉ phương $\vec{u} = (1, 1, 2)$. Khi đó $\vec{m} = [\vec{u}, \vec{v}] = (-2, 0, 1)$. Ta có $[\vec{u}, \vec{v}] \cdot \vec{AB} = -1 \neq 0 \Rightarrow \vec{u}, \vec{v}, \vec{AB}$ không đồng phẳng, từ đó Δ_1 và Δ_2 chéo nhau. Mp(P) đi qua $A\left(\frac{4}{3}, 0, \frac{8}{3}\right)$ và nhận $\vec{m} = [\vec{u}, \vec{v}] = (-2, 0, 1)$ làm vector pháp tuyến, từ đây suy ra được PT mp(P) là $2x - z = 0$.

b) **Cách 1.** $MH (H \in \Delta_2)$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow MH \perp \Delta_2$. Dựng mp(Q) đi qua $M(2, 1, 4)$ và vuông góc với $\Delta_2 \Rightarrow \text{mp}(Q)$ nhận $\vec{u} = (1, 1, 2)$ làm vector pháp tuyến. Do đó mp(Q) có PT

$$1(x - 2) + 1(y - 1) + 2(z - 4) = 0 \text{ hay } x + y + 2z - 11 = 0.$$

H là giao điểm của Δ_2 và mp(Q) nên tọa độ

$$H \text{ là nghiệm của hệ PT } \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 1 + 2t \\ x + y + 2z - 11 = 0 \end{cases}$$

Giải hệ này tìm được tọa độ $H(2, 3, 3)$. Khi đó $\text{Min} MH = \sqrt{5}$.

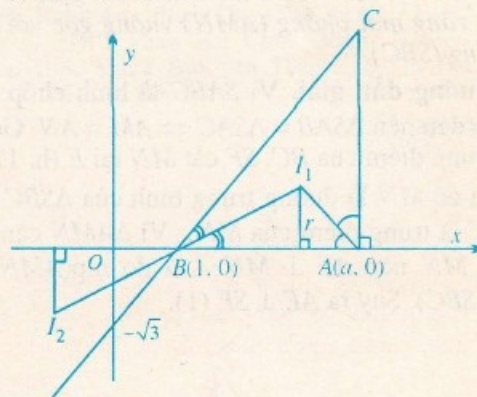
Cách 2. Do $H \in \Delta_2$ nên $H(1 + t, 2 + t, 1 + 2t)$, $t \in \mathbb{R}$. Từ đó $MH^2 = (t - 1)^2 + (t + 1)^2 + (2t - 3)^2 = 6t^2 - 12t + 11 \geq 5 \Rightarrow MH \geq \sqrt{5}$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow t = 1$, lúc đó $H(2, 3, 3)$.

Câu V. 1) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đềcac vuông góc Oxy, xét tam giác ABC vuông

tại A, phương trình đường thẳng BC là $\sqrt{3}x - y - \sqrt{3} = 0$, các đỉnh A và B thuộc trục hoành và bán kính đường tròn nội tiếp bằng 2. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC.

Hướng dẫn giải: Cách 1. Vì B là giao điểm của BC với trục hoành nên $B(1, 0)$. Mặt khác do đường thẳng BC có PT $y = \sqrt{3}x - \sqrt{3}$ với hệ số góc bằng $\sqrt{3}$ suy ra trong ΔABC thì $\hat{B} = 60^\circ$, $\hat{C} = 30^\circ$, $\hat{A} = 90^\circ$. Giả sử $A(a, 0) \Rightarrow C(a, \sqrt{3}a - \sqrt{3})$ (h. 2)



Hình 2

Ta có $AB = r \left(\cotg \frac{A}{2} + \cotg \frac{B}{2} \right)$ hay $a - 1 = 2(1 + \sqrt{3})$

Với $a - 1 = 2(1 + \sqrt{3})$ thì $A(2\sqrt{3} + 3, 0)$, $B(1, 0)$, $C(2\sqrt{3} + 3, 6 + 2\sqrt{3})$. Áp dụng công thức $G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$ có

$$G_1\left(\frac{7 + 4\sqrt{3}}{3}, \frac{6 + 2\sqrt{3}}{3}\right).$$

Với $a - 1 = -2(1 + \sqrt{3})$ thì $A(-2\sqrt{3} - 1, 0)$, $B(1, 0)$, $C(-2\sqrt{3} - 1, -6 - 2\sqrt{3})$ lúc đó

$$G_2\left(\frac{-1 - 4\sqrt{3}}{3}, \frac{-6 - 2\sqrt{3}}{3}\right).$$

Vậy bài toán này có hai nghiệm.

Cách 2. Lập PT đường phân giác trong góc A của ΔABC : $y = -x + a$. Lập PT đường phân giác trong góc B của ΔABC : $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Từ đây xác định được tọa độ tâm đường tròn nội tiếp ΔABC là $I\left(\frac{1 + \sqrt{3}a}{1 + \sqrt{3}}, \frac{a - 1}{1 + \sqrt{3}}\right)$. Sử dụng giả

thiết $d(I, AB) = d(I, Ox) = 2$, ta tìm được a , từ đó tính được tọa độ các điểm A, B, C và tọa độ trọng tâm ΔABC .

Câu V. 2) Cho khai triển nhị thức

$$\left(2^{\frac{x-1}{2}} + 2^{\frac{-x}{3}}\right)^n = C_n^0 \left(2^{\frac{x-1}{2}}\right)^n + C_n^1 \left(2^{\frac{x-1}{2}}\right)^{n-1} \left(2^{\frac{-x}{3}}\right) + \dots + C_n^{n-1} \left(2^{\frac{x-1}{2}}\right) \left(2^{\frac{-x}{3}}\right)^{n-1} + C_n^n \left(2^{\frac{-x}{3}}\right)^n$$

(n là số nguyên dương). Biết rằng trong khai triển đó $C_n^3 = 5C_n^1$ và số hạng thứ tư bằng $20n$, tìm n và x .

Hướng dẫn giải. Từ điều kiện $C_n^3 = 5C_n^1 \Rightarrow \frac{(n-1)(n-2)}{6} = 5 \Rightarrow n = 7$. Từ điều kiện

$$C_7^3 \left(2^{\frac{x-1}{2}}\right)^4 \left(2^{\frac{-x}{3}}\right)^3 = 140 \Leftrightarrow 2^{x-2} = 4 \Leftrightarrow x = 4.$$

4. Vậy $n = 7, x = 4$.

Xin giới thiệu một số bài tập liên quan đến các đề thi trên để các bạn luyện tập.

BT1. Cho hình chóp tam giác đều $SABC$ đỉnh S có các góc phẳng tại đỉnh S đều bằng α ($0 < \alpha < 90^\circ$), cạnh bên hình chóp bằng b . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB, SC . Tính diện tích tam giác AMN theo b và α .

ĐS : $S_{AMN} = \frac{b^2 \sqrt{(9-7\cos\alpha)(1-\cos\alpha)}}{8}$. Cho

$\cos\alpha = \frac{1}{3}$ và $b = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ ta có kết quả câu IV 1).

BT2. Cho hình chóp tam giác đều $SABC$, cạnh đáy bằng a , các cạnh bên nghiêng đều trên đáy một góc α . Một mặt phẳng qua A , song song với BC , tạo với mp(ABC) một góc β ($0 < \beta < \alpha$) cắt SB, SC tại M, N . Tính diện tích tam giác AMN theo a, α, β .

Gợi ý giải. (h.1) $S_{AM_1N_1} = S_{AMN} \cdot \cos\beta$. Theo ĐL Ta-lét

$$\frac{M_1N_1}{BC} = \frac{SE}{SF} = \frac{S_{ASE}}{S_{ASF}} = \frac{AE \cdot \sin(\alpha-\beta)}{AF \cdot \sin\alpha} =$$

$$\frac{\sin \widehat{AFE}}{\sin \widehat{AEF}} \cdot \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha} = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

(Xem tiếp trang 9)

KẾT QUẢ

THĂM DÒ Ý KIẾN BẠN ĐỌC

Tháng 4-2002 tạp chí Toán học và Tuổi trẻ đã tổ chức trưng cầu ý kiến bạn đọc. Ngay trong tuần đầu tiên đã có phiếu thăm dò gửi về. Kết quả của các phiếu thăm dò cho thấy :

1. Các mục được bạn đọc yêu thích nhất là :

Đề ra kì này : 90%, Giải bài kì trước : 88%, Các đề thi học sinh giỏi : 84%, Chuẩn bị thi vào đại học : 79% , Dành cho Trung học cơ sở : 76%, Diễn đàn dạy học toán : 72%, Giải trí toán học : 71%.

Các chuyên mục được ít người thích hơn :

Gương mặt các tác giả, Giới thiệu các trường, Tin học, Vui một tí, Câu lạc bộ,

2. Hình thức trình bày của tạp chí :

58% cho là đẹp, 33% cho là trung bình, 11% cho là xấu.

3. Bạn đọc thường có tạp chí vào cuối tháng mà tạp chí phát hành : 79%, có 5% trả lời là đến tháng sau mới có báo.

4. Con đường báo đến với bạn đọc đã rất đa dạng. Tỷ lệ đặt báo ở Bưu điện là 57%, mua ở các cửa hàng sách là 23%, số bạn đọc mua ở các đại lí, các sạp báo vỉa hè là 20%.

5. Trong số phiếu gửi về có 75% là nam và số học sinh phổ thông trung học gửi phiếu về chiếm 50% số phiếu nhận được.

6. Các ý kiến đề xuất của độc giả tập trung vào :

- Tăng bài cho chuyên mục Toán học và Đời sống, Lịch sử Toán, Tiểu sử các nhà toán học.

- Thêm các bài về phương pháp và kinh nghiệm học toán.

- Giới thiệu thêm về toán học hiện đại

- Nên có các câu đố vui, thông minh

- Giới thiệu các gương mặt học sinh giỏi.

- Duy trì hộp thư giao lưu giữa tòa soạn và bạn viết, bạn đọc

- Có bài cho học sinh lớp 6 lớp 7

- Đề ra kì này có một số bài còn dễ

- Tăng thêm các đề thi toán và có hướng dẫn giải các đề thi vào các trường chuyên, đề thi của các địa phương.

- Bám sát chương trình phổ thông mới, thêm các đề thi trắc nghiệm.

- Giới thiệu sách hay về toán.

7. Câu hỏi đề nghị nêu tên các tác giả các bài báo trong THPT mà bạn thích đã bị hiểu nhầm là các tác giả sách toán khác nên thông tin nhận được của câu hỏi này chưa thật chính xác. Có 50 tác giả được nêu tên. Các tác giả được nhắc đến nhiều là Nguyễn Minh Hà, Nguyễn Cảnh Toàn, Đặng Hùng Thắng, Vũ Đình Hòa, Ngô Việt Trung, Nguyễn Văn Mậu, Vũ Thanh Khiết, Hoàng Chung, Nguyễn Đức Tấn, Nguyễn Đăng Phát, Lê Thống Nhất, Hồ Quang Vinh, Vũ Kim Thủy, Nguyễn Việt Hải, Ngô Đạt Tứ, Đặng Thanh Hải, Nguyễn Minh Đức....

NHỮNG KẾT LUẬN SƠ BỘ SAU CUỘC THĂM DÒ

Nhìn chung bạn đọc hài lòng với tạp chí và nhiệt tình cộng tác. Các chuyên mục của tạp chí về cơ bản đã đáp ứng được yêu cầu của độc giả. Cả nội dung và hình thức của tạp chí là tương đối phù hợp với một tạp chí phổ biến kiến thức toán học sơ cấp.

Các chuyên mục nên thường xuyên xuất hiện là: Các đề thi học sinh giỏi, Dành cho Trung học Cơ sở, Tìm hiểu sâu thêm toán học sơ cấp, Các đề thi học sinh giỏi của các địa phương, Chuẩn bị thi vào Đại học, Giải trí toán học và tất nhiên 2 mục thường xuyên là Đề ra kì này, Giải bài kì trước.

Cần tăng thêm các bài về Lịch sử toán học, Tiểu sử các nhà toán học, Ứng dụng toán học, Tin tức hoạt động toán học, Diễn đàn dạy học toán.

Câu lạc bộ cần vui, dí dỏm hơn và phải hợp với học sinh ham thích toán. Mục Sai lầm ở đâu cần chọn bài có những sai lầm phổ biến hoặc tinh vi mà người đọc khó phát hiện hơn.

Có thêm bài cho học sinh lớp 6, lớp 10. Tăng các đề thi học sinh giỏi kèm theo các lời giải, đặc biệt là các đề thi vào các lớp chuyên THPT. Thêm các đề thi trắc nghiệm để học sinh làm quen với cách ra đề thi trong tương lai.

Ở bìa 4 sẽ đăng xen kẽ việc giới thiệu các trường với các bài khác. Việc nêu gương các đơn vị giáo dục tiên tiến là điều cần thiết, động viên các trường và làm cho học sinh chăm học toán hơn.

Cần lưu ý việc gửi tạp chí đi miền Trung và miền Nam đúng ngày.

Tiếp tục tìm tòi để cải tiến cách trình bày bìa và hình minh họa cho đẹp hơn.

THPT xin chân thành cảm ơn các bạn đọc đã nhiệt tình cộng tác với Tạp chí và hi vọng tiếp tục được sự ủng hộ của các bạn trong cả nước.

THPT

BẠN ĐỌC TÌM TÒI

Trong kì thi Olympic toán quốc tế lần thứ 42 năm 2001 có bài toán chứng minh bất đẳng thức (BĐT) do Hàn Quốc đề nghị như sau:

Bài toán 1. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq 1 \quad (1)$$

cho mọi số thực dương a, b, c .

Lời giải bài này đã đăng trên THPT số 296 (2/2002) tuy nhiên cách đánh giá bất đẳng thức có vẻ không tự nhiên. Tòa soạn nhận được các lời giải khác và các bài toán mở rộng của các tác giả: Trần Xuân Đáng (GV THPT chuyên Lê Hồng Phong, Nam Định) và Phạm Thịnh (Xí nghiệp sửa chữa các công trình Dầu khí - Vũng Tàu). Xin giới thiệu cùng bạn đọc.

Phần I. (của bạn Trần Xuân Đáng)

Cách giải 1 BT1. Đặt vế trái của BĐT (1) là T , áp dụng bất đẳng thức Bu-nhi-a-cốp-xki hai lần ta được: $(a+b+c)^2 \leq$

$$\begin{aligned} &\leq \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \right) \times \\ &\times \left(a\sqrt{a^2+8bc} + b\sqrt{b^2+8ca} + c\sqrt{c^2+8ab} \right) = \\ &= T \cdot \left(\sqrt{a}\sqrt{a^3+8abc} + \sqrt{b}\sqrt{b^3+8abc} + \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{c}\sqrt{c^3+8abc} \right) \end{aligned}$$

$$\leq T \cdot \sqrt{(a+b+c)(a^3+b^3+c^3+24abc)}$$

$$\leq T \sqrt{(a+b+c)(a+b+c)^3} = T(a+b+c)^2$$

Từ đó suy ra $T \geq 1$.

Bất đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Cách giải 2 BT1. Đặt $x = \frac{bc}{a^2}$, $y = \frac{ac}{b^2}$,

$$c = \frac{ab}{c^2} \text{ thì } x, y, z > 0 \text{ và } xyz = 1.$$

Ta chuyển việc chứng minh BĐT (1) về bài toán 2:

Bài toán 2. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\sqrt{1+8x}} + \frac{1}{\sqrt{1+8y}} + \frac{1}{\sqrt{1+8z}} \geq 1 \quad (2)$$

trong đó x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $xyz = 1$.

Lời giải. Áp dụng BĐT Cô-si ta có:

$$x + y + z \geq 3 \sqrt[3]{xyz} = 3$$

VỀ MỘT BẤT ĐẲNG THỨC TRONG THI TOÁN QUỐC TẾ

TRẦN XUÂN ĐÁNG - PHẠM THỊNH

$$xy + yz + zx \geq 3 \sqrt[3]{x^2 y^2 z^2} = 3$$

Từ đó suy ra :

$$(1+8x)(1+8y)(1+8z) = 1 + 512xyz + 8(x+y+z) + 64(xy + yz + zx) \geq 729 = 3^6 \quad (3)$$

Áp dụng BĐT Cô-si ta có :

$$\sqrt{1+8x} + \sqrt{1+8y} + \sqrt{1+8z} \geq 3 \sqrt[3]{(1+8x)(1+8y)(1+8z)} \geq 9 \quad (4)$$

Biến đổi BĐT (2) :

$$\begin{aligned} (2) &\Leftrightarrow (\sqrt{1+8x} \cdot \sqrt{1+8y} + \sqrt{1+8y} \cdot \sqrt{1+8z} + \\ &+ \sqrt{1+8z} \cdot \sqrt{1+8x})^2 \geq (1+8x)(1+8y)(1+8z) \\ &\Leftrightarrow 8(x+y+z) + 2\sqrt{(1+8x)(1+8y)(1+8z)} \times \\ &\times (\sqrt{1+8x} + \sqrt{1+8y} + \sqrt{1+8z}) \geq 510 \quad (5) \end{aligned}$$

Thay thế (3) (4) vào vế trái của (5) ta thấy (5) đúng $\Rightarrow$ (2) đúng.

Đẳng thức ở (2) xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 1$.

Tổng quát hóa bài toán 2 là bài toán sau:

Bài toán 3. Xét biểu thức

$$E = \frac{1}{\sqrt{1+kx}} + \frac{1}{\sqrt{1+ky}} + \frac{1}{\sqrt{1+kz}}$$

trong đó x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $xyz = 1$, còn k là tham số dương. Với giá trị nào của k thì biểu thức E có giá trị nhỏ nhất và tìm giá trị nhỏ nhất đó.

Lời giải. • Với $k \geq 8$ thì chứng minh tương tự như ở BT2 ta có giá trị nhỏ nhất của E là

$$\frac{3}{\sqrt{1+k}}, \text{ giá trị này đạt được khi } x = y = z = 1.$$

• Với $0 < k < 8$ thì cũng bằng cách chứng minh tương tự như ở BT2 ta dẫn đến $E > 1$ (với mọi x, y, z dương thỏa mãn $xyz = 1$). Mặt khác cho $y = z = n$ và $x = \frac{1}{n^2}$ với $n \in \mathbb{N}^*$ thỏa mãn điều kiện đề bài thì

$$E_n = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}} + \frac{1}{\sqrt{1+kn}} + \frac{1}{\sqrt{1+kn}}$$

Ta có $\lim_{n \rightarrow \infty} E_n = 1$. Vậy với $0 < k < 8$ thì E không có giá trị nhỏ nhất.

Phần II. (của bạn Phạm Thịnh)

Có thể khái quát hóa BT1 thành hai bài toán dưới đây và sử dụng cách chứng minh tương tự như ở BT2 trên.

Bài toán 4. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + \frac{n^2-1}{a_1}}} + \frac{a_2}{\sqrt{a_2^2 + \frac{n^2-1}{a_2}}} + \dots + \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + \frac{n^2-1}{a_n}}} \geq 1 \quad (6)$$

trong đó $a_1, a_2, \dots, a_n$ là các số thực dương thỏa mãn $a_1 a_2 \dots a_n = 1$.

Bất đẳng thức (6) tương đương với

$$\sqrt{\frac{b_1}{b_1 + n^2 - 1}} + \sqrt{\frac{b_2}{b_2 + n^2 - 1}} + \dots + \sqrt{\frac{b_n}{b_n + n^2 - 1}} \geq 1 \quad (7)$$

trong đó $b_1, b_2, \dots, b_n$ là các số thực dương thỏa mãn $b_1 b_2 \dots b_n = 1$.

Bài toán 5. Chứng minh rằng :

$$\sqrt[3]{\frac{a_1}{a_1 + 26}} + \sqrt[3]{\frac{a_2}{a_2 + 26}} + \sqrt[3]{\frac{a_3}{a_3 + 26}} \geq 1 \quad (8)$$

trong đó a_1, a_2, a_3 là các số thực dương thỏa mãn $a_1 a_2 a_3 = 1$.

Có thể mở rộng BĐT (7) và (8) đối với n số thực dương $a_1, a_2, \dots, a_n$ thỏa mãn $a_1 a_2 \dots a_n = 1$, căn bậc m và mẫu số của phân số trong căn là $a_i + n^m - 1$.

MỘT SỐ LƯU Ý KHI GIẢI ĐỀ THI ... (Tiếp trang 7)

BT 3. Cho hình chóp tứ giác đều $SABCD$, cạnh đáy bằng a . Các mặt bên nghiêng đều trên đáy một góc α . Một mặt phẳng (P) qua AB và tạo với $mp(ABCD)$ một góc β ($0 < \beta < \alpha$) cắt SC, SD lần lượt tại M và N .

a) Hãy xác định dạng của tứ giác $ABMN$.

b) Tìm diện tích tứ giác $ABMN$ theo a, α, β .

ĐS : a) $ABMN$ là hình thang cân,

$$b) S_{ABMN} = \frac{a^2 \sin^2 \alpha \cdot \cos \beta}{\sin^2 (\alpha + \beta)}$$

LỊCH SỬ TOÁN HỌC**LỊCH SỬ HÌNH THÀNH KHÁI NIỆM HÀM SỐ**

LÊ THỊ HOÀI CHÂU

(Khoa Toán trường ĐHSPTp. Hồ Chí Minh)

"Hàm số" (tiếng Pháp : *fonction*, tiếng Anh : *function*) có gốc la tinh là *functio* (lấy từ *fungi*, nghĩa là "thực hiện"). Người đầu tiên dùng thuật ngữ *fonction* là Lai-bơ-nit (Leibniz), vào năm 1673. Năm 1734 Ô-le (Euler) đưa vào kí hiệu f và các dấu ngoặc. Năm 1797 La-grăng (Lagrange) dùng kí hiệu fx để chỉ hàm số của biến x , nhưng sử dụng các ngoặc khi viết $f(x^2)$ hay $f(a + bx)$ để chỉ hàm số của x^2 hay của $a + bx$.

Giống như các khái niệm toán học khác, khái niệm hàm số không được hình thành tức thời mà là kết quả của một quá trình dài phát triển. Bài viết này điểm qua những mốc quan trọng của quá trình hình thành khái niệm hàm số.

1. Thời Cổ đại: Ở thời kì này người ta đã nghiên cứu một số trường hợp về sự phụ thuộc lẫn nhau giữa hai đại lượng. Sự phụ thuộc được thể hiện trên các bảng số, cho biết mối liên hệ giữa hai tập hợp hữu hạn, rời rạc. Chẳng hạn người Ba-bi-lon (Babylone) đã lập được bảng bình phương, bảng căn bậc hai, bảng lập phương, bảng căn bậc ba, bảng các bộ 3 số Pi-ta-go ... ; người Hy Lạp thì có bảng Sin.

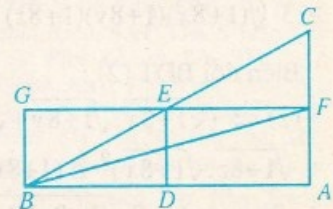
2. Thời Trung đại : Đây là thời kì mà người ta tìm cách định lượng một số hiện tượng như nhiệt độ, mật độ, vận tốc. .. Các luật của tự nhiên bắt đầu được nghiên cứu như một đại lượng này phụ thuộc đại lượng kia. Với sự phát triển của khoa học châu Âu ở thế kỉ 14, khái niệm đại lượng biến thiên và khái niệm hàm số lần đầu tiên được diễn đạt một cách rõ ràng (dưới dạng hình học và cơ học). Nhưng, cũng giống như thời cổ đại, mỗi trường hợp phụ thuộc cụ thể giữa hai đại lượng đều được định nghĩa qua một sự mô tả bằng lời hay bằng sơ đồ chứ chưa phải bằng một công thức.

Chẳng hạn, liên quan đến vận tốc, Ô-ret-smô (N. Oresme, 1323 - 1382) đã đưa ra một phép chứng minh bằng hình học cho kết quả sau : trong một thời gian xác định, một vật chuyển động nhanh dần đều sẽ đi được một quãng đường bằng quãng đường của vật thứ hai chuyển động đều với vận tốc bằng trung bình cộng các vận tốc ở hai đầu mút của vật thứ nhất. Để chứng minh, Oresme biểu diễn thời gian trên một đường nằm ngang AB và vận tốc tức thời trên đường vuông góc AC . Nếu D là trung điểm

của AB , F là trung điểm của AC , thì số đo diện tích hình chữ nhật $AFGB$ bằng số đo quãng đường mà vật thứ hai đi được, vì $AB \times DE$ là tích của thời gian và vận tốc. Số đo diện tích của tam giác ABC tương ứng với quãng đường vật thứ nhất đi được, mà diện tích này bằng diện tích hình chữ nhật $AFGB$.

3. Thế kỉ 16 và**17 :** Giai đoạn này

có nhiều sự kiện quan trọng ảnh hưởng đến quá trình hình thành khái niệm hàm trong toán học. Trước hết



là sự sáng lập ra ngành Đại số với Vi-et (Viète, 1540 - 1603) đã cho phép ghi một biểu thức bao gồm cả các đại lượng đã biết và chưa biết. Toán học được nhận thức như một ngôn ngữ để biểu diễn thực tiễn vật chất của thế giới tự nhiên.

Vào cuối thế kỉ 16 và đặc biệt trong thế kỉ 17 cách biểu diễn hàm số bằng công thức và bằng biểu thức giải tích bắt đầu thống thế. Lớp các hàm số giải tích được biểu diễn một cách tổng quát qua tổng các chuỗi vô hạn nhanh chóng trở thành lớp hàm được sử dụng rộng rãi.

Đê-các (Descartes, 1596-1650) và Phêc-ma (Fermat, 1601-1655), hoàn toàn độc lập với nhau, đã áp dụng phương pháp đại số vào nghiên cứu hình học, xây dựng nên Hình học giải tích, và bằng các phương trình đã hình dung được sự phụ thuộc lẫn nhau của hai đại lượng biến thiên. Năm 1670 nhà bác học Ba-râu (Barrow), dưới dạng hình học, đã xác lập tính đảo ngược qua lại giữa các phép tính vi phân và tích phân (dĩ nhiên không sử dụng các thuật ngữ như vậy). Những điều trên chứng tỏ là thời đó các nhà bác học đã nhận thức rất rõ ràng khái niệm hàm.

Khái niệm hàm còn được ở Niu-ton (Newton, 1642-1727) nêu ra dưới dạng cơ học và hình học trong cuốn "Phép tính vi phân và các chuỗi vô hạn". Newton chọn thời gian là một khái niệm phổ biến và giải thích những biến phụ thuộc như là những đại lượng sinh ra từ đó theo một cách thức liên tục.

Song song với Newton, Leibniz (1646-1716) đã phát triển phép tính vi phân và tích phân từ

hình học các đường cong. Chính ông là người đầu tiên dùng thuật ngữ "hàm số" (fonction), với ý nghĩa : trong bài toán xác định tọa độ của một điểm thỏa mãn một tính chất nào đó, hàm số là những đoạn khác nhau, có liên hệ với một đường cong nào đó, chẳng hạn như tung độ các điểm của nó. Cũng chính là Leibniz là người đã đưa ra các thuật ngữ "hằng số", "biến số", "tham số", "tọa độ".

Định nghĩa đầu tiên về hàm số gắn gũi với quan điểm hiện đại là của Bec-nu-li (Bernoulli Johann I, 1667-1748) : "Ta gọi hàm số của một đại lượng biến thiên là một đại lượng được tạo nên theo một cách nào đó từ đại lượng biến thiên này và từ các hằng số". Trong chiều sâu của định nghĩa chưa thật hoàn chỉnh ấy là ý tưởng biểu diễn hàm số bằng một công thức giải tích. Nhưng dường như không phải Bernoulli đã hiểu rằng hàm số còn là một cái gì đấy khác với những biểu thức giải tích được biết đến ở thời đó. Như thế, ở giai đoạn này, khái niệm hàm số mất dần đi các đặc tính cơ học và hình học.

4. Thế kỉ 18 : Trước kia, tính toán trên các biểu thức vô hạn đã xuất hiện khi bài toán gắn liền với bối cảnh hình học. Euler (1707-1783) đã phát triển tính toán trên những biểu thức như vậy bằng cách chấp nhận một quan điểm hình thức chủ nghĩa. Theo ông, tính toán trên các biểu thức vô hạn phải là một công việc hình thức có bản chất đại số mà thoát đầu không có liên hệ gì với hình học, và do đó việc nghiên cứu nó cần phải có trước việc nghiên cứu tính toán vi phân. Dần dần, trong những công trình của mình, Euler nói rõ về các khái niệm "đại lượng không đổi", "đại lượng biến thiên", "hàm số" : "Một hàm số của một đại lượng biến thiên là một biểu thức giải tích được tạo thành, theo một cách thức nào đó, từ chính đại lượng biến thiên này và từ các số hay các đại lượng không đổi... Một hàm số của một biến cũng là một đại lượng biến thiên". Lưu ý rằng Euler cũng đã phân biệt hàm đơn trị và hàm đa trị, hàm "liên tục" (theo ông, là được xác định bởi một biểu thức duy nhất) và "hàm gián đoạn" (được xác định bởi hai hay nhiều biểu thức giải tích).

Tiếp theo Euler, khái niệm hàm số được hoàn thiện dần trong công trình của nhiều nhà toán học như Đa-lăm-be (D'Alembert, 1717 - 1783), Công-đóc-xê (Condorcet, 1743-1794), La-grăng (Lagrange, 1736-1813), ... và người ta đã nói đến hàm nhiều biến. Các nhà toán học thời kì này đều xem hàm số là một biểu thức giải tích.

5. Thế kỉ 19 : Từ đầu thế kỉ 19 người ta nói về khái niệm hàm số mà không nhắc gì tới cách biểu diễn giải tích của nó.

Phu-ri-ê (Fourier, 1821) phát biểu : "Nói chung, hàm số $f(x)$ biểu diễn một dãy các giá trị được sắp mà mỗi phần tử đã được lấy tùy ý".

Đi-rich-lê (Dirichlet, 1805-1859) thì định nghĩa : "Gọi a, b là hai giá trị cố định, x là một đại lượng biến thiên giữa a và b . Nếu tương ứng với mỗi x đều có một giá trị xác định $y = f(x)$, và y biến thiên một cách liên tục khi chính x biến thiên một cách liên tục từ a đến b , thì ta nói y là một hàm số liên tục trên khoảng này. Theo quan điểm hình học, nếu xem x và y như là hoành độ và tung độ của một điểm, sao cho mỗi giá trị của x thuộc khoảng được xét đều tương ứng với một và chỉ một giá trị của y , thì sự liên tục của hàm số sẽ xảy ra đồng thời với việc đường cong liên một khoảng".

Còn theo Lô-ba-sep-xki (1792-1856) "... hàm số của x là một số được cho với mỗi x và biến thiên dần dần cùng với x . Giá trị của hàm số có thể được cho bằng một biểu thức giải tích, hoặc bằng một điều kiện làm phương tiện để thử tất cả các số và chọn một trong chúng, hoặc cuối cùng, sự phụ thuộc có thể tồn tại nhưng còn chưa được biết". Như vậy, định nghĩa hiện đại của hàm số (thoát ly mọi cách cho bằng biểu thức giải tích của chúng) được coi là của Dirichlet và Lô-ba-sep-xki.

ĐỌC SÁCH

Tập san Thế giới toán - tin học của khoa Toán Tin học, trường Đại học Sư phạm Tp. Hồ Chí Minh đã ra mắt bạn đọc số đầu tiên ngày 25.04.2002 nhằm nâng cao chất lượng đào tạo sinh viên, giúp sinh viên có thêm cơ hội phát huy khả năng học tập và nghiên cứu. Tập san còn là diễn đàn của thầy và trò về phương pháp giảng dạy - học tập - nghiên cứu khoa học.

Toán học và Tuổi trẻ xin giới thiệu cùng bạn đọc hai bài báo rút từ tập san : Một bài toán của A. Einstein (của GS. Hoàng Quý) (đã in trong số 301 (7.2002), Lịch sử hình thành khái niệm hàm số (của TS Lê Thị Hoài Châu).

THTT



ĐỀ RA KÌ NÀY

CÁC LỚP THCS

Bài T1/302. Chứng minh rằng nếu a, b, c là các số nguyên (khác 0) thỏa mãn điều kiện $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = 3$ thì tích số abc là lập phương của một số nguyên.

TRẦN NAM DŨNG
(GV ĐHKHTN - ĐHQG Tp. HCM)

Bài T2/302. Giải phương trình

$$(2001 - x)^4 + (2003 - x)^4 = 2000$$

NGÔ HÂN
(Bắc Ninh)

Bài T3/302. Chứng minh rằng

$$\frac{x^{m+n}}{y^m} + \frac{y^{m+n}}{z^m} + \frac{z^{m+n}}{x^m} \geq x^n + y^n + z^n$$

trong đó x, y, z là các số thực dương và m, n là các số nguyên dương.

PHẠM CÔNG VU
(SV K47 khoa Toán, ĐHSPT Hà Nội)

Bài T4/302. Gọi AD, BE, CF là các đường phân giác trong của tam giác ABC vuông ở A . AD cắt EF tại K . Đường thẳng qua K song song với BC cắt AB và AC lần lượt tại M và N . Chứng

minh rằng $MN \geq \frac{2-\sqrt{2}}{2}(AB+AC)$

NGUYỄN KHÁNH NGUYỄN
(GV THCS Hồng Bàng, Hải Phòng)

Bài T5/302. Cho tam giác ABC và điểm M nằm trong tam giác. Các điểm A_1, B_1, C_1 theo thứ tự thuộc các cạnh BC, CA, AB và thỏa mãn điều kiện $A_1B_1 \parallel AM, B_1C_1 \parallel BM, C_1A_1 \parallel CM$.

Chứng minh rằng $S(A_1B_1C_1) \leq \frac{1}{3}S(ABC)$

trong đó S chỉ diện tích tam giác.

NGUYỄN MINH HÀ
(GV PTCTT ĐHSPT Hà Nội)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/302. Xét hàm số $f: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$ thỏa mãn các điều kiện :

1) Với mỗi số nguyên dương n thì $f(n+1)$ hoặc bằng $f(n) - 1$, hoặc bằng $4f(n) - 1$.

2) Với mỗi số nguyên dương m thì tồn tại duy nhất một số nguyên dương n sao cho $f(n) = m$.

Hãy tính $f(2002)$.

ĐÀO THI LOAN
(SV B1 K46 khoa Vật Lý ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội)

Bài T7/302. Chứng minh rằng

$$\frac{x^m y^n}{z^n} + \frac{y^m z^n}{x^n} + \frac{z^m x^n}{y^n} \geq x^n + y^n + z^n$$

trong đó x, y, z, m, n là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $x \geq y \geq z$ và $m \geq n$.

VŨ TRÍ ĐỨC
(Ninh Bình)

Bài T8/302. Chứng minh rằng

$$\sum_{i=k}^n \frac{1}{C_i^k} = 1 + \frac{1}{k-1} - \frac{C_{n-1}^{k-1}}{C_{n-1}^{k-2} \cdot C_n^k}$$

trong đó C_i^k là tổ hợp chập k của i và $n \geq k \geq 2$.

PHẠM ĐÌNH TRƯỜNG
(Trung tâm CNTT, PSV, Hà Nội)

Bài T9/302. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Các đường cao AA_1, BB_1, CC_1 cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác lần nữa tại A_2, B_2, C_2 tương ứng. Chứng minh rằng :

$$\frac{4\sqrt{3}}{3}(A_1B_1 + B_1C_1 + C_1A_1) \leq AA_2 + BB_2 + CC_2 \leq \frac{2\sqrt{3}}{3}(AB + BC + CA)$$

NGUYỄN LÁI
(GV THPT Lương Văn Chánh, Phú Yên)

Bài T10/302. Gọi V, r và R lần lượt là thể tích, bán kính mặt cầu nội tiếp và ngoại tiếp tứ diện $ABCD$. Chứng minh rằng

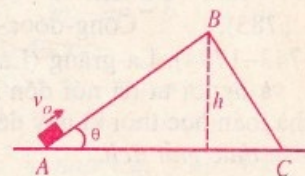
$$\frac{r}{R} \geq \frac{24V^2}{AB \cdot AC \cdot AD \cdot BC \cdot BD \cdot CD}$$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

NGUYỄN VĂN Hào
(SV 00C1C ĐHKHT Đà Nẵng)

CÁC ĐỀ VẬT LÝ

Bài L1/302. Trên mặt bàn nằm ngang có một chiếc nêm có khối lượng M , có mặt cắt là hình tam giác ABC vuông ở B . Góc giữa hai cạnh AB và AC là θ , chiều cao từ B đến mặt sàn là h . Trên mặt phẳng nghiêng AB tại A đặt một vật có khối lượng là m (hình vẽ). Lúc đầu vật và nêm đều đứng yên. Sau đó cho vật m



chuyển động theo hướng AB với vận tốc đầu v_0 . Bỏ qua ma sát giữa nêm và mặt sàn và ma sát giữa vật và mặt AB .

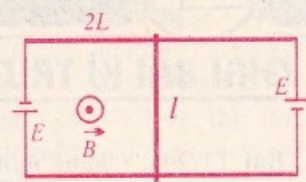
Hỏi v_0 phải lớn hơn giá trị bao nhiêu để vật có thể vượt qua được đỉnh B ?

(Thi Olympic Trung Quốc lần thứ 2)
(TỔ GIANG st)

Bài L2/302. Hai thanh ray đồng chất, tiết diện đều, có cùng chiều dài là $2L$, đều có điện trở suất ρ đặt trên mặt phẳng ngang, song song với nhau, cách nhau một khoảng l . Các thanh ray được nối với nhau qua các nguồn điện như hình vẽ. Suất điện động mỗi nguồn là E , điện trở trong rất nhỏ.

Một thanh kim loại khối lượng m , chiều dài l , điện trở R từ lên 2 thanh ray và có thể trượt không ma sát trên chúng.

Hệ thống được đặt trong từ trường đều $\vec{B}$ có phương thẳng đứng. Từ vị trí cân bằng của thanh, dịch chuyển thanh một đoạn rất nhỏ theo phương song song với 2 thanh ray. Chứng tỏ rằng thanh dao động điều hòa. Tìm chu kỳ dao động.



NGUYỄN XUÂN QUANG
(THPT chuyên Vĩnh Phúc)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/302. Prove that if a, b, c are integers (distinct from 0) satisfying $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = 3$ then the product abc is a perfect cube.

T2/302. Solve the equation

$$(2001 - x)^4 + (2003 - x)^4 = 2000$$

T3/302. Prove that

$$\frac{x^{m+n}}{y^m} + \frac{y^{m+n}}{z^m} + \frac{z^{m+n}}{x^m} \geq x^n + y^n + z^n$$

where x, y, z are positive numbers and m, n are positive integers.

T4/302. Let AB, BE, CF be the inner angled bisectors of a triangle ABC right at A . AD cuts EF at K . The line passing through K , parallel to BC cut AB and AC respectively at M and N . Prove that

$$MN \geq \frac{2-\sqrt{2}}{2}(AB+AC)$$

T5/302. Let ABC be a triangle, M be a point inside it. A_1, B_1, C_1 be the points respectively on the sides BC, CA, AB such that $A_1B_1 \parallel AM, B_1C_1 \parallel BM, C_1A_1 \parallel CM$. Prove that

$$S(A_1B_1C) \leq \frac{1}{3}S(ABC)$$

where S denotes the area of triangles.

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/302. Consider a function $f: \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$ satisfying the following conditions:

i) for every positive integer n , the number $f(n+1)$ is equal to $f(n) - 1$ or to $4f(n) - 1$;

ii) for every positive integer m , there exists a unique positive integer n such that $f(n) = m$.

Calculate $f(2002)$.

T7/302. Prove that

$$\frac{x^m y^n}{z^n} + \frac{y^m z^n}{x^n} + \frac{z^m x^n}{y^n} \geq x^n + y^n + z^n$$

for arbitrary positive numbers x, y, z, m, n satisfying the conditions $x \geq y \geq z$ and $m \geq n$.

T8/302. Prove that

$$\sum_{i=k}^n \frac{1}{C_i^k} = 1 + \frac{1}{k-1} - \frac{C_{n-1}^{k-1}}{C_{n-1}^{k-2} \cdot C_n^k}$$

where C_i^k are binomial coefficients and $n \geq k \geq 2$.

T9/302. Let ABC be an acute triangle. Its altitudes AA_1, BB_1, CC_1 cut the circumcircle again at A_2, B_2, C_2 respectively. Prove that

$$\frac{4\sqrt{3}}{3}(A_1B_1 + B_1C_1 + C_1A_1) \leq AA_2 + BB_2 + CC_2 \leq \frac{2\sqrt{3}}{3}(AB + BC + CA)$$

T10/302. Let V, r and R be respectively the volume, the radii of the inscribed and the circumscribed spheres of a tetrahedron $ABCD$. Prove that

$$\frac{r}{R} \geq \frac{24V^2}{AB \cdot AC \cdot AD \cdot BC \cdot BD \cdot CD}$$

When does equality occur?



Bài T1/298. Chứng minh rằng số các chữ số viết trong hệ thập phân của hai số 2002^{2001} và $2002^{2001} + 2^{2001}$ là bằng nhau.

Lời giải. Giả sử số 2002^{2001} có m chữ số thì $1000^{2001} < 2002^{2001} < 10^m$ (1) $\Rightarrow m > 6003$. Ta sẽ chứng minh bằng phản chứng: Giả sử số $2002^{2001} + 2^{2001}$ có nhiều hơn m chữ số, tức là ít nhất có $m+1$ chữ số thì $2002^{2001} + 2^{2001} \geq 10^m$ (2). Từ (1), (2) có

$$\begin{aligned} 2002^{2001} &< 10^m \leq 2002^{2001} + 2^{2001} \\ \Rightarrow 2^{2001} \cdot 1001^{2001} &< 2^m \cdot 5^m \leq 2^{2001} (1001^{2001} + 1) \\ \Rightarrow 1001^{2001} &< 2^{m-2001} \cdot 5^m \leq 1001^{2001} + 1 \end{aligned}$$

Vì $2^{m-2001} \cdot 5^m$ là số nguyên nên chỉ có thể $2^{m-2001} \cdot 5^m = 1001^{2001} + 1$. Điều này không xảy ra vì vế trái chia hết cho 5 nhưng vế phải luôn có tận cùng là 2. Vậy hai số 2002^{2001} và $2002^{2001} + 2^{2001}$ đều có đúng m chữ số.

Nhận xét. 1) Nhiều bạn đã giải bài toán tổng quát hơn với chứng minh tương tự như trên:

Các số sau có cùng một số chữ số:

a) Số 2002^n và số $2002^n + 8 \cdot 2^n$ với $n \in \mathbb{N}^*$

b) Số a^n và số $a^n - 2^n$, số $a^n + 2^n$ với $n \in \mathbb{N}^*$ trong đó $a = 10t + 2$ với $t \geq 3$.

2) Các bạn sau có lời giải tốt:

Phú Thọ: Trần Thành Đức, 9A1, THCS Lâm Thao, Nguyễn Đức Thắng, 9A1, THCS TT. Thanh Ba 2, **Vĩnh Phúc:** Nguyễn Thị Ngân, 9A, Nguyễn Phú Cường, Nguyễn Huy Tùng, 9B, THCS Yên Lạc; **Bắc Ninh:** Lưu Thị Thu Trang, 8A, THCS Yên Phong; **Hà Tây:** Nguyễn Khắc Dũng, 9A, THCS Thạch Thất, Phạm Văn Khiêm, 8B, THCS Nguyễn Trục, Thanh Oai; **Hà Nội:** Phạm Hoàng Lê, 9B, Trần Nam Sơn, 7T, THCS Nguyễn Trường Tộ, Đống Đa; **Hải Dương:** Nguyễn Hồng Thanh, 9/3, THCS Lê Quý Đôn, Tp. Hải Dương; **Hải Phòng:** Đường Hải Long, 8B, THCS NK Trần Phú; **Nam Định:** Phạm Duy Hiến, 9A7, THCS Trần Đăng Ninh, Phạm Kim Hùng, Đoàn Duy Thuý, 9A2, THPT Lê Quý Đôn, Ý Yên; **Thanh Hóa:** Nguyễn Ngọc Tú, 9B, THCS Lê Đình Kiên, Yên Định, Trần Mạnh Tuấn, 9C, THCS Triệu Thị Trinh, Triệu Sơn, Nguyễn Tiến Trung, 9A, THCS Quang Trung, Nga Sơn, Nguyễn Quốc Thắng, Lê Thị Thu, Bùi Việt Anh, Bùi Khắc Kiên, Nguyễn Chí Linh, 8A, THCS Nhữ Bá Sĩ, Hoàng Hóa; **Nghệ An:** Mạnh Phúc Thọ, 9E, THCS Trung Đô, Vinh; **Hà Tĩnh:** Lê Anh Vũ Hà, 9A, THCS TT. Hương

Khê; **Bình Định:** Nguyễn Phúc Thọ, 9D, THCS Ngô Mây, Phù Cát; **Phú Yên:** Huỳnh Thị Thùy Lam, 8C1, THCS Phú Lâm, Tuy Hòa; **Đồng Nai:** Lương Minh Thắng, 9/3, THCS Nguyễn Bình Khiêm, Biên Hòa.

VIỆT HẢI

Bài T2/298. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $x^2 + xy + y^2$, trong đó x, y là các số thực thỏa mãn 2 điều kiện:

$$|2x - y| \leq 3 \text{ và } |x - 3y| \leq 1$$

Lời giải. Từ các bất đẳng thức đã cho, bằng cách nhân lên theo hệ số 3 và 2, ta có các bất đẳng thức tương đương

$$|6x - 3y| \leq 9 \text{ và } |x - 3y| \leq 1, \quad (1)$$

$$|2x - y| \leq 3 \text{ và } |2x - 6y| \leq 2 \quad (2)$$

Sử dụng bất đẳng thức $|A + B| \leq |A| + |B|$ (đẳng thức chỉ xảy ra khi A và B cùng dấu), từ (1) và (2) ta thu được:

$$|5x| = |(6x - 3y) + (3y - x)| \leq |6x - 3y| + |x - 3y| \leq 9 + 1 = 10 \Rightarrow |x| \leq 2,$$

$$|5y| = |(2x - y) + (6y - 2x)| \leq |2x - y| + |2x - 6y| \leq 3 + 2 = 5 \Rightarrow |y| \leq 1.$$

Như vậy, $x^2 + xy + y^2 \leq x^2 + |x|y + y^2 \leq 4 + 2 + 1 = 7$, với đẳng thức xảy ra chỉ khi $|x| = 2$ và $|y| = 1$ trong đó x và y cùng dấu, hay (x, y) bằng $(2, 1)$; $(-2, -1)$, lúc đó $x^2 + xy + y^2 = 7$.

Nhận xét. Khá đông bạn gửi lời giải và đều có kết quả đúng.

VŨ ĐÌNH HÒA

Bài T3/298. Chứng minh rằng nếu phương trình $ax^4 + bx^3 + cx^2 - 2bx + 4a = 0$ ($a \neq 0$) (*) có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 x_2 = 1$ thì $5a^2 = 2b^2 + ac$.

Lời giải. Nếu phương trình ở đề bài có 2 nghiệm x_1, x_2 thì đa thức bậc 4 ở vế trái của phương trình phân tích được thành

$$\begin{aligned} &ax^4 + bx^3 + cx^2 - 2bx + 4a = \\ &= (x - x_1)(x - x_2)(ax^2 + mx + n) \\ &= (x^2 - px + 1)(ax^2 + mx + n) \\ &= ax^4 + (m - ap)x^3 + (a - mp + n)x^2 + \\ &+ (m - pn)x + n, \text{ trong đó } p = x_1 + x_2 \end{aligned}$$

Vì hai đa thức đầu và cuối ở các đẳng thức trên là đồng nhất nên ta có:

$$n = 4a \quad (1); \quad m - pn = -2b \quad (2);$$

$$a - mp + n = c \quad (3); \quad m - ap = b \quad (4)$$

Thay (1) vào (2), (3) được:

$$m - 4ap = -2b \quad (5); \quad 5a - mp = c \quad (6)$$

Từ (4) (5) có $b = ap$ (7) và $m = 2b$ (8)

Từ (6) (7) (8) có $5a^2 = map + ac = 2b^2 + ac$.

Nhận xét. 1) Ban Trần Vĩnh Trung, 9/2, THCS Võ Văn Ký, Nha Trang. **Khánh Hòa** đưa ra lời giải tóm tắt như sau :

Vì $x_1 \neq 0$ và $x_2 = \frac{1}{x_1}$ đều là nghiệm của PT (*) nên

$$\text{có: } ax_1^4 + bx_1^3 + cx_1^2 - 2bx_1 + 4a = 0$$

$$a + bx_1 + cx_1^2 - 2bx_1^3 + 4ax_1^4 = 0$$

Trừ hai đẳng thức này dẫn đến :

$$ax_1^4 - bx_1^3 + bx_1 - a = 0$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + 1)(x_1 - 1)(ax_1^2 - bx_1 + a) = 0$$

Xét 3 trường hợp :

a) $x_1 = -1 \Rightarrow x_2 = x_1 = -1$ thì đa thức ở vế trái của (*) phải chia hết cho $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$ nên đa thức dư phải đồng nhất bằng 0, nghĩa là $-4a + b - 2c = 0$ và $a + 2b - c = 0$. Từ đó có $b = -2a, c = -3a$, suy ra $2b^2 + ac = 5a^2$.

b) $x_1 = 1 \Rightarrow x_2 = x_1 = 1$. Làm tương tự trường hợp a) dẫn đến $b = 2a, c = -3a \Rightarrow 2b^2 + ac = 5a^2$.

c) $|x_1| \neq 1$ thì x_1, x_2 là 2 nghiệm của $ax^2 - bx + a = 0$. Chia đa thức ở vế trái của (*) cho $ax^2 - bx + a$ thì đa thức dư phải đồng nhất bằng 0, nghĩa là $(a - bx)(5a^2 - 2b^2 - ac) = 0 \Rightarrow 5a^2 = 2b^2 + ac$.

2) Đa số các bạn giải như sau :

Vì $x \neq 0$ không là nghiệm của PT (*) nên

$$(*) \Leftrightarrow a\left(x^2 + \frac{4}{x^2}\right) + b\left(x - \frac{2}{x}\right) + c = 0$$

Đặt $y = x - \frac{2}{x} \Rightarrow x^2 + \frac{4}{x^2} = y^2 + 4$ thì PT trên trở thành $ay^2 + by + 4a + c = 0$ (**)

Đặt $y_1 = x_1 - \frac{2}{x_1}$ (9) và $y_2 = x_2 - \frac{2}{x_2}$ (10). Áp dụng

công thức Vi-ét đối với PT (**) có $y_1 + y_2 = -\frac{b}{a}$ và

$y_1 \cdot y_2 = \frac{4a+c}{a}$. Thay (9) (10) vào các đẳng thức này và

biến đổi dẫn đến $5a^2 = 2b^2 + ac$. Chú ý rằng ta áp dụng được công thức Vi-ét chỉ khi y_1, y_2 là 2 nghiệm của PT (**). Nhưng nếu $y_1 = y_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$ thì $y_1 = y_2$ chỉ mới là 1 nghiệm của PT (**). Như vậy còn phải xét 2 trường hợp a), b) như ở nhận xét 1 nêu trên.

Cũng từ sự nhầm lẫn trên nên có bạn cho rằng PT (1) có 4 nghiệm. Điều này không đúng, chẳng hạn

$$x^4 - x^3 - x^2 + 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x+1)(x^2 - 3x + 4) = 0$$

2) Ngoài bạn Trung các bạn sau có lời giải đúng :

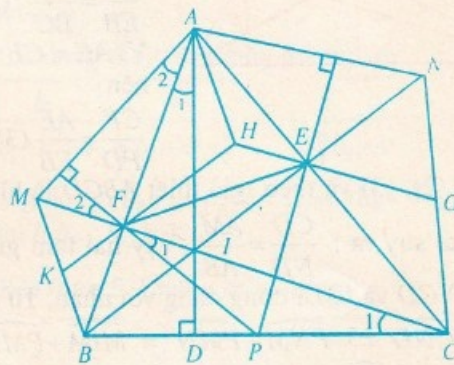
Vĩnh Phúc : Vũ Văn Quang, 8A3, THCS Vĩnh Tường ; **Hòa Bình :** Nguyễn Hoàng Anh, 9A1, THCS Hữu Nghị, Tx. Hòa Bình ; **Bắc Ninh :** Lưu Thị Thu Trang, 8A, THCS Yên Phong ; **Hải Dương :** Lê Đình Huy, 9A, THCS Nguyễn Trãi, Nam Sách, **Trịnh Quốc Bảo**, 9A1, THCS Chu Văn An, Thanh Hà ; **Hải Phòng**

Đường Hải Long, 9B, THPT NK Trần Phú ; **Thanh Hóa :** Trịnh Thành Kiên, 8A1, Lê Anh Linh, 8B, THCS Trần Mai Ninh, **Trịnh Thành Đông**, Vũ Nguyên Thắng, 9A, THCS Tây Đô, Vinh Lộc ; **Nghe An :** Nguyễn Hoài An, 8D, Đặng Bảo Đức, 8E, THCS Đặng Thai Mai, Vinh.

HOÀNG NGUYỄN

Bài T4/298. Gọi P là trung điểm cạnh BC của tam giác ABC và BE, CF là hai đường cao. Đường thẳng qua A , vuông góc với PF , cắt đường thẳng CF tại M . Đường thẳng qua A , vuông góc với PE , cắt đường thẳng BE tại N . Gọi K và G lần lượt là trung điểm của BM và CN . Gọi H là giao điểm của đường thẳng KF và GE . Chứng minh rằng AH vuông góc với EF .

Lời giải. Xét $\triangle ABC$ nhọn. Gọi I là trực tâm của $\triangle ABC$, D là giao điểm của AI và BC . Ta có $\widehat{A_1} = \widehat{C_1}$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc)



Mặt khác tam giác vuông BFC có $BP = PC$ nên $\widehat{C_1} = \widehat{F_1}$. Mà $\widehat{F_1} = \widehat{F_2}$. Lại có $\widehat{F_2} = \widehat{A_2}$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc). Do đó $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$. Cùng với $CF \perp AB$ suy ra $\triangle AMI$ cân. Do đó $MF = FI$ tức là KF là đường trung bình của $\triangle MBI$.

Suy ra $KH \parallel BE$ và suy tiếp ra $KH \perp AE$.

Tương tự $EH \perp AF$. Nghĩa là H là trực tâm $\triangle FAE$. Vậy $AH \perp EF$. Trường hợp $\triangle ABC$ tù bài toán vẫn đúng.

Nhận xét. 1) Có thể chứng minh theo cách thứ hai là $\widehat{ACF} + \widehat{CFH} = 90^\circ$ (Do $\widehat{AFH} = \widehat{ACF}$) để dẫn tới $FH \perp AC$.

2. Bài toán này được rất nhiều bạn gửi lời giải. Giải tốt hơn cả là : **Phú Thọ :** Vương Mạnh Tùng, 9G, THCS Việt Trì ; **Vĩnh Phúc :** Nguyễn Thị Hà, 7A, THCS Yên Lạc ; **Hải Phòng :** Phạm Huy Hoàng, 8B, THPT NK Trần Phú ; **Hải Dương :** Trần Quốc Hoàn, 9A1, THCS Chu Văn An, Thạch Hà ; **Nam Định :** Dương Đỗ Nhuận, 9A2 THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên, **Phạm Duy Hiến**, 9A7, THCS Trần Đăng Ninh, Nam Định ; **Nghe An :** Nguyễn Bá Giang, 8B, THCS Lăng Thành, Yên

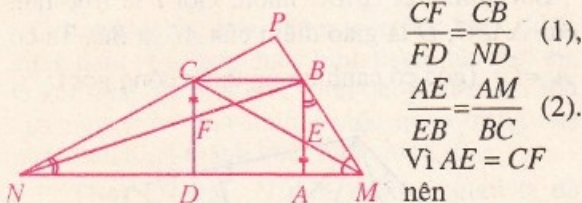
Thành ; **Bình Định** : Nguyễn Phương Anh, 8A1, THCS Lê Lợi, Quy Nhơn ; **Phú Yên** : Huỳnh Thị Thùy Lam, 8C1, THCS Phú Lâm, Tuy Hòa ; **Khánh Hòa** : Lê Thị Hồng Nhung, 8¹⁴, THCS Thái Nguyên, Nha Trang ; **Hà Nội** : Phạm Hoàng Lê, 9B, THCS Nguyễn Trường Tộ.

VŨ KIM THUY

Bài T5/298. Cho hình vuông ABCD. Lấy điểm E trên cạnh AB và điểm F trên cạnh CD sao cho AE = CF. Các đường thẳng BF và CE cắt đường thẳng AD lần lượt tại N và M. Tìm quỹ tích giao điểm P của các đường thẳng BM và CN khi E, F di chuyển trên các cạnh AB và CD.

Lời giải. Phân thuận.

Áp dụng định lý Ta-lét ta được:



$$\frac{CF}{FD} = \frac{CB}{ND} \quad (1),$$

$$\frac{AE}{EB} = \frac{AM}{BC} \quad (2).$$

Vì AE = CF nên

$$\frac{CF}{FD} = \frac{AE}{EB} \quad (3).$$

Từ (1), (2), (3) và theo giả thiết ABCD là hình vuông ta suy ra : $\frac{CD}{ND} = \frac{AM}{AB}$, vậy hai tam giác vuông NCD và BMA đồng dạng với nhau. Từ đó $\widehat{MBA} = \widehat{CND} \Rightarrow \widehat{PNM} + \widehat{PMN} = \widehat{MBA} + \widehat{PMN} = 90^\circ$ hay $\widehat{BPC} = 90^\circ$. Do đó P thuộc nửa đường tròn đường kính BC, nằm ngoài hình vuông ABCD trừ đi hai điểm B và C.

Phân đảo. Lấy điểm P bất kỳ trên nửa đường tròn đường kính BC nằm ngoài hình vuông ABCD ($P \neq B, P \neq C$). Gọi M, N lần lượt là giao điểm của PB, PC với AD, E là giao điểm của MC với AB, F là giao điểm của NB với CD. Ta phải chứng minh AE = CF. Thật vậy, do $\widehat{MPN} = 90^\circ$ nên $\widehat{PMN} + \widehat{PNM} = 90^\circ$, $\widehat{PMN} + \widehat{MBA} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{MBA} = \widehat{PNM} \Rightarrow \triangle CDN \sim \triangle MAB$ (g.g). Suy ra : $\frac{AM}{AB} = \frac{CD}{ND} \Rightarrow \frac{AM}{BC} = \frac{CB}{ND} \Rightarrow \frac{AE}{BE} = \frac{CF}{DF} \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{CF}{CD} \Rightarrow AE = CF$ (đpcm)

Kết luận. Quỹ tích điểm P là nửa đường tròn đường kính BC, nằm ngoài hình vuông ABCD, bỏ đi hai điểm B, C.

Nhận xét. 1) Trừ một số bạn chưa loại bỏ hai điểm B và C trong tập hợp điểm cần tìm, số còn lại đều giải

đúng. Có thể nhận thấy nếu E thuộc tia BA ($BE > BA$) ; F thuộc tia DC ($DF > DC$) thì tập hợp điểm là nửa đường tròn đường kính BC, nằm trong hình vuông ABCD loại bỏ các điểm B, C và tâm hình vuông ABCD.

2) Các bạn có lời giải tốt :

Hà Nội : Phan Xuân Dũng, 9A, THCS Nguyễn Trường Tộ, Quận Đống Đa, Nguyễn Trung Kiên, Vũ Nhật Minh, 8H, THCS Lê Quý Đôn, Q. Cầu Giấy ; **Hải Phòng** : Đặng Ngọc Chiến, Phạm Huy Hoàng, Đường Hải Long, Trịnh Tuấn Linh, 8B, THPT NK Trần Phú ; **Bắc Ninh** : Lưu Thị Thu Trang, 8A, THCS Yên Phong ; **Phú Thọ** : Nguyễn Trung Kiên, 8A, THCS Giầy, Phong Châu ; **Hà Tây** : Phạm Anh-Tuyết, 9A, THCS Tô Hiệu, Thường Tín ; **Nam Định** : Đào Mạnh Chiến, Nguyễn Thành Luân B, 9A2, THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên ; **Thanh Hóa** : Trịnh Thành Kiên, 8A1, THCS Trần Mai Ninh, Tp. Thanh Hóa, Lê Phú Khánh, 8A, THCS Lê Hữu Lập, Hậu Lộc ; **Nghệ An** : Hồ Ngọc Kiên, Vũ Trọng Quý, Bùi Duy Toàn, 8A, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu, Đặng Bảo Đức, 8E, THCS Đặng Thai Mai, Tp. Vinh ; **Khánh Hòa** : Lê Thị Hồng Nhung, Phạm Kiều Anh, 8¹⁴, THCS Thái Nguyên, Tp. Nha Trang, Trần Vĩnh Trung, 9/2, THCS Võ Văn Ký, Tp. Nha Trang ; **Tp. Hồ Chí Minh** : Nguyễn Lê Hoàng, 8¹, THCS CLC Hồng Bàng, Q.5.

HỒ QUANG VINH

Bài T6/298. Tìm số dư của phép chia

$$\prod_{i=1}^{2003} (1+i^2) \text{ cho } 2003.$$

Lời giải. (của bạn Hoàng Thị Tuyết Mai, 10NK Trần Phú, Hải Phòng)

Nhận thấy 2003 là một số nguyên tố. Ta giải bài toán tổng quát sau : Tìm số dư của

$$\prod_{i=1}^p (1+i^2) \text{ khi chia cho } p.$$

Vì $i^2 \equiv (p-i)^2 \pmod{p}$ nên nếu đặt

$$S = \prod_{i=1}^p (1+i^2), T = \prod_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} (1+i^2) \text{ thì}$$

$$S \equiv \prod_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} (1+i^2) \equiv T^2 \pmod{p}$$

$$\text{Xét đa thức } P(x) = \prod_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} (x-i^2) - \left(x^{\frac{p-1}{2}} - 1 \right)$$

Ta có bậc của đa thức P là $\deg P < \frac{p-1}{2}$ và

$$P(i^2) \equiv 0 \pmod{p} \text{ với } i = 1, 2, \dots, \frac{p-1}{2}.$$

Dễ thấy $i^2 \not\equiv j^2 \pmod{p}$ với $1 \leq i, j \leq \frac{p-1}{2}$.

Theo định lý La-grăng (THTT 298, 4/2002).

thì $P(x) \equiv 0 \pmod{p}$ với mọi $x \in \mathbb{Z}$. Nói riêng

$$P(-1) \equiv 0 \pmod{p} \Leftrightarrow T \equiv -\left[(-1)^{\frac{p-1}{2}} - 1\right] \pmod{p}$$

$$\text{Vậy } S \equiv \left[(-1)^{\frac{p-1}{2}} - 1\right]^2 \equiv$$

$$\equiv \begin{cases} 0 \pmod{p} & \text{nếu } p = 4k+1 \\ 4 \pmod{p} & \text{nếu } p = 4k+3 \end{cases}$$

$$\text{Nếu } p = 2003 \Rightarrow S \equiv 4 \pmod{2003}$$

Nhận xét. Các bạn sau đây có lời giải tốt.

Hải Phòng: Trần Hồng Trang, Phạm Khoa Thu Hương, 10 THPT Trần Phú; **Hà Nội:** Nguyễn Kim Tấn, 12A1, THPT Nguyễn Tất Thành, Nguyễn Hoàng Thanh, 11A1, ĐHSP Hà Nội, Vũ Quốc Mỹ, 11 ĐHKHTN; **Bình Định:** Phạm Thành Phú, 11 Lê Quý Đôn; **Đông Nai:** Lê Phương, 11 Lương Thế Vinh; **Vĩnh Phúc:** Vũ Nhật Huy, Phan Bá Lê Biên; **Phú Yên:** Huỳnh Lâm Linh, Phan Thành Nam, 11T2, THPT Lương Văn Chánh; **Tp. Hồ Chí Minh:** Trần Võ Huy, 11T NK, Nguyễn Lâm Hưng; **Ninh Bình:** Trịnh Mỹ Châu, 11, THPT Lương Văn Tụy; **Hòa Bình:** Nguyễn Lâm Tuyền, Hà Hữu Cao Trinh; **Hải Dương:** Nguyễn Anh Ngọc, Nguyễn Thành Nam, Lưu Văn Hiến, 11A1, THPT Nguyễn Trãi; **Thanh Hóa:** Trần Mạnh Tuấn, 9C Triệu Sơn.

Cũng có một vài bạn giải sai.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T7/298. Giải phương trình:

$$3^x = 1 + x + \log_3(1 + 2x)$$

Lời giải. Điều kiện: $1 + 2x > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}$.

Cộng hai vế của phương trình với x thì phương trình trên có dạng

$$\varphi(3^x) = \varphi(1 + 2x), \text{ trong đó } \varphi(t) = t + \log_3 t.$$

Chú ý $\varphi(t)$ với $t > 0$ là hàm số đồng biến, do t và $\log_3 t$ là các hàm số đồng biến trên $(0, +\infty)$, nên điều trên xảy ra khi và chỉ khi $3^x = 1 + 2x$.

$$\text{Xét hàm số } f(x) = 3^x - 1 - 2x \text{ với } x > -\frac{1}{2}.$$

Ta có $f'(x) = 3^x \ln 3 - 2$ là hàm số đồng biến. Do đó, theo định lý Rôn, phương trình $f(x) = 0$ có không quá hai nghiệm. Rõ ràng $f(0) = f(1) = 0$.

Vậy phương trình đã cho chỉ có hai nghiệm $x = 0$ và $x = 1$.

Nhận xét. Tòa soạn nhận được lời giải của gần 500 bạn học sinh, hầu hết các bạn đều giải theo phương pháp trên – đó là phương pháp ứng dụng của đạo hàm trong việc tính số nghiệm của phương trình. Một số ít bạn dựa vào đặc thù riêng của bài toán đã chứng minh

$x = 0$ và $x = 1$ là hai nghiệm duy nhất của phương trình bằng cách sử dụng bất đẳng thức Bernoulli hoặc tính chất của đồ thị các hàm số 3^x và $1 + 2x$.

2) Các bạn sau có lời giải tốt: **Hòa Bình:** Hà Hữu Cao Trinh, 11T, THPT chuyên Hoàng Văn Thụ; **Quách Thanh Sơn,** 11A, THPT Lạc Sơn; **Ninh Bình:** Lê Thị Hoa Tâm, 11T, THPT Lương Văn Tụy; **Hải Dương:** Vũ Văn Thiện, 11B3, THPT Nhị Chiểu; **Bắc Ninh:** Trần Xuân Quyết, 11A6, THPT Thuận Thành; **Nguyễn Duy Tuấn,** 11A9, THPT Quế Võ I; **Vĩnh Phúc:** Hoàng Văn Công, 11A1, THPT Liên Sơn, Nguyễn Anh Minh, 11A, THPT DL Châu Phong; **Thanh Hóa:** Lê Công Huy, 11A4, THPT Triệu Sơn I; **Nghệ An:** Lê Thành Lê, 11A1, THPT Nghi Lộc I; **Lâm Đồng:** Phạm Nguyễn Tuấn Anh, 11T, THPT Thăng Long; **Tây Ninh:** Nguyễn Anh Tuấn, 11T, THPT Hoàng Lê Kha, ...

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T8/298. Dãy số (x_n) ($n = 0, 1, 2, \dots$)

được xác định bởi: $x_0 = 1, x_1 = \frac{1}{2}$,

$$x_{n+2} = \frac{x_{n+1} \cdot x_n}{2002x_{n+1} + 2001x_n + 2000x_{n+1} \cdot x_n}$$

với mọi $n = 0, 1, 2, \dots$

Hãy tìm công thức tổng quát của x_n theo n .

Lời giải. (Lời giải của bạn Hà Hữu Cao Trinh, 11 Toán, THPT chuyên Hoàng Văn Thụ, Hòa Bình).

Từ giả thiết suy ra $x_n \neq 0$ với mọi n và

$$\frac{1}{x_{n+2}} = \frac{2001}{x_{n+1}} + \frac{2002}{x_n} + 2000 \text{ với } n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\text{Đặt } y_n = \frac{1}{x_n} + \frac{1000}{2001} \text{ ta có } y_0 = \frac{3001}{2001},$$

$$y_1 = \frac{5002}{2001} \text{ và } y_{n+2} = 2001y_{n+1} + 2002y_n \text{ với } n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra: } y_{n+2} + y_{n+1} &= 2002(y_{n+1} + y_n) \\ &= 2002^2(y_n + y_{n-1}) = \dots = 2002^{n+1}(y_1 + y_0) \\ &= \frac{8003}{2001} \cdot 2002^{n+1}. \end{aligned}$$

$$\text{Đặt } a = y_1 + y_0 = \frac{8003}{2001} \text{ và } b = 2002, \text{ ta có}$$

$$\begin{aligned} y_n &= a \cdot b^{n-1} - y_{n-1} = a \cdot b^{n-1} - a \cdot b^{n-2} + y_{n-2} = \dots \\ &= a[b^{n-1} + (-1)b^{n-2} + \dots + (-1)^{n-2}b + (-1)^{n-1}] + \end{aligned}$$

$$+ (-1)^n y_0 = \frac{a(b^n - (-1)^n)}{b+1} + (-1)^n y_0$$

$$\text{Suy ra } y_n = \frac{3000}{2003}(-1)^n + \frac{8003}{2001 \cdot 2003}(2002)^n$$

với $n = 0, 1, 2, \dots$

Từ đó, công thức tổng quát của x_n là :

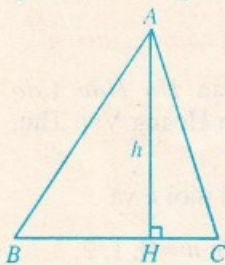
$$x_n = \frac{2001.2003}{2002^n.8003 + (-1)^n 3000.2001 - 1000.2003}$$

Nhận xét. Nhiều bạn đã biết sử dụng thành thạo việc biểu diễn nghiệm của phương trình sai phân tuyến tính nhờ đa thức đặc trưng nên có lời giải gọn hơn việc sử dụng hệ thức truy hồi như đã trình bày ở trên.

Đây là một bài toán cơ bản, do vậy có đến gần 200 bài giải gửi đến tòa soạn có lời giải đúng.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T9/298. Gọi AH và r lần lượt là đường cao và bán kính đường tròn nội tiếp của tam giác ABC . Gọi p_1 là nửa chu vi $\triangle ABH$ và r_1 là bán kính đường tròn nội tiếp của nó. Gọi p_2 là nửa chu vi $\triangle ACH$ và r_2 là bán kính đường tròn nội tiếp của nó. Chứng minh rằng tam giác ABC vuông tại A khi và chỉ khi $r = \frac{p_1 r_1 + p_2 r_2}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2}}$, các góc B, C không tù.



Lời giải. Khi góc A vuông thì H thuộc đoạn BC . Để chứng minh chiều ngược lại ta phải bổ sung điều kiện $\max\{B, C\} \leq 90^\circ$ để H thuộc đoạn BC . Đặt $h = AH$, p là nửa chu vi $\triangle ABC$.

Gọi S, S_1, S_2 lần lượt là diện tích $\triangle ABC, \triangle ABH, \triangle ACH$. Lúc đó $r = \frac{p_1 r_1 + p_2 r_2}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2}} \Leftrightarrow$

$$\frac{S}{p} = \frac{S_1 + S_2}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2}} \Leftrightarrow p^2 = p_1^2 + p_2^2 (*)$$

Dễ thấy

$$p = \frac{h}{2} \left(\cot B + \frac{1}{\sin B} + \cot C + \frac{1}{\sin C} \right)$$

$$p_1 = \frac{h}{2} \left(\cot B + \frac{1}{\sin B} + 1 \right),$$

$$p_2 = \frac{h}{2} \left(\cot C + \frac{1}{\sin C} + 1 \right) \text{ nên}$$

$$(*) \Leftrightarrow \left(\cot B + \frac{1}{\sin B} + \cot C + \frac{1}{\sin C} \right)^2 = \left(\cot B + \frac{1}{\sin B} + 1 \right)^2 + \left(\cot C + \frac{1}{\sin C} + 1 \right)^2$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \left(\frac{\cos B + 1}{\sin B} + \frac{\cos C + 1}{\sin C} \right)^2 \\ &= \left(\frac{\cos B + 1}{\sin B} + 1 \right)^2 + \left(\frac{\cos C + 1}{\sin C} + 1 \right)^2 \\ &\Leftrightarrow \left(\cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} \right)^2 = \left(\cot \frac{B}{2} + 1 \right)^2 + \left(\cot \frac{C}{2} + 1 \right)^2 \\ &\Leftrightarrow \cot \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2} = \cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} + 1 \\ &\Leftrightarrow \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{B}{2} \cdot \tan \frac{C}{2} = 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{\tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2}}{1 - \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2}} = 1 \Leftrightarrow \tan \left(\frac{B+C}{2} \right) = 1 \\ &\Leftrightarrow \hat{A} = 90^\circ \text{ (dpcm).} \end{aligned}$$

Nhận xét. 1) Bài này có rất nhiều bạn tham gia giải. Tuy nhiên số các bạn nhận thấy sự cần thiết của điều kiện $\max\{B, C\} \leq 90^\circ$ không nhiều. Ban Hà Hữu Cao Trình, 11T, THPT chuyên Hoàng Văn Thụ. Hòa Bình đã đưa ra phản ví dụ tốt chứng tỏ khi thiếu điều kiện bổ sung thì có thể góc A không vuông.

2) Nhiều bạn có nhận xét rằng bài toán này (ở dạng hệ thức (*)) là Câu III₃, đề 121 của Bộ đề thi tuyển sinh Đại học có bổ sung thêm điều kiện cần.

3) Các bạn sau có lời giải tương đối tốt :

Phú Thọ : Hoàng Ngọc Minh, 11A1, THPT chuyên Hùng Vương ; **Hải Phòng :** Lương Thế Hùng, 10T, THPT NK Trần Phú ; **Vĩnh Phúc :** Đào Quang Sơn, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc ; **Bắc Ninh :** Nguyễn Văn Thảo, 11T, THPT NK Hàn Thuyên ; **Hưng Yên :** Cao Thị Huệ, 11A, THPT Dương Quảng Hàm ; **Thanh Hóa :** Nguyễn Danh Quang, 8A1, THCS Nhữ Bá Sĩ, Hoàng Hóa ; **Quảng Trị :** Hồ Sĩ Sang, 10T, THPT chuyên Lê Khiết ; **Bà Rịa - Vũng Tàu :** Trương Công Định, 11A4, THPT Vũng Tàu.

NGUYỄN MINH HÀ

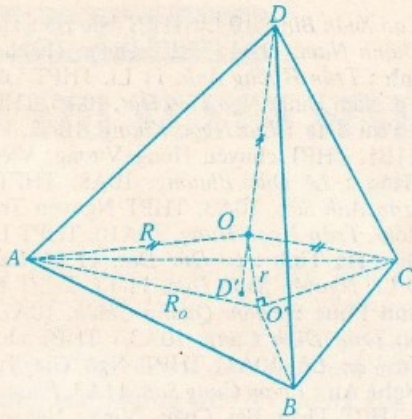
Bài T10/298. Cho tứ diện gần đều $ABCD$ ($AB = CD, AC = BD, AD = BC$). Gọi R và r lần lượt là bán kính các mặt cầu ngoại tiếp và nội tiếp của tứ diện $ABCD$. Gọi R_o và r_o lần lượt là bán kính các đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của tam giác ABC . Chứng minh rằng :

$$\frac{R_o + r_o}{\sqrt{R^2 - 3r^2}} \leq \sqrt{3}$$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

Lời giải. (Nguyễn Lâm Tuyển, 12 Toán, THPT chuyên Hoàng Văn Thụ, Hòa Bình)

Gọi O là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$. Vì $ABCD$ là một tứ diện gần đều nên O



trùng với trọng tâm G và tâm I mặt cầu nội tiếp của tứ diện và do đó, $O \in DD'$ và $\frac{DO}{DD'} = \frac{3}{4}$, hay

là : $OD' = \frac{1}{3}OD = \frac{1}{3}R$ (trong đó D' là trọng tâm của tam giác ABC). Gọi O' là hình chiếu (vuông góc) của O trên mặt phẳng ABC thì O' là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC , và do đó : $O'A = O'B = O'C = R_o$, và $OO' = r$.

Nhưng lại có $OD' \geq OO' = r$, nghĩa là : $R \geq 3r$ (1) và $OA^2 = OO'^2 + O'A^2$, suy ra : $R_o^2 = R^2 - r^2$ (2)

Từ (1) ta được : $4R^2 - 12r^2 \geq 3R^2 - 3r^2$

Kết hợp với (2) suy ra :

$$2\sqrt{R^2 - 3r^2} \geq \sqrt{3(R^2 - r^2)} = R_o \sqrt{3} \quad (3)$$

Mặt khác, trong mọi tam giác ABC ta có BĐT

$$\text{quen thuộc } R_o \geq 2r_o, \text{ hay là } r_o \leq \frac{R_o}{2} \quad (4)$$

Cuối cùng, từ các BDT (3) và (4) ta được BDT (*) cần tìm :

$$\frac{R_o + r_o}{\sqrt{R^2 - 3r^2}} \leq \frac{3R_o}{2\sqrt{R^2 - 3r^2}} \leq \sqrt{3} \text{ . dpcm.}$$

Đẳng thức xảy ra ở (*) khi và chỉ khi đẳng thức xảy ra đồng thời ở (4) và (1) nghĩa là khi và chỉ khi tam giác ABC là đều và tứ diện gần đều $ABCD$ cũng là tứ diện trục tâm ($O = I = G = H$), và do đó $ABCD$ là một tứ diện đều. (Tuy nhiên, cũng dễ thấy rằng đẳng thức xảy ra ở (1) kéo theo đẳng thức xảy ra ở (4), và ngược lại vì chỉ cần xảy ra một trong hai đẳng thức đó thì tứ diện gần đều $ABCD$ sẽ trở thành một tứ diện đều).

Nhận xét. 1) Vì $ABCD$ là một tứ diện gần đều nên các mặt là những tam giác nhọn và bằng nhau : $\triangle DCB$

$= \triangle CDA = \triangle BAD = \triangle ABC$. Gọi d_a, d_b và d_c lần lượt là các khoảng cách từ tâm O' đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC đến các cạnh BC, CA và AB . Ta sử dụng hệ thức sau đây (Định lý Carnot) :

$$d_a + d_b + d_c = R_o + r_o \text{ (do } \triangle ABC \text{ là tam giác nhọn) (5)}$$

(Nếu tam giác ABC có góc $\hat{A}$ tù thì ta có:

$$-d_a + d_b + d_c = R_o + r_o)$$

[Các bạn có thể chứng minh hệ thức trên bằng cách sử dụng định lý Ptolômê hoặc thay $d_a = R_o \cos A$, v.v... rồi sử dụng các hệ thức lượng giác quen thuộc trong

$$\text{tam giác: } \sum \cos A = 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} + 1,$$

$$r_o = 4R_o \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}]$$

Sau đó, thiết lập BDT:

$$(R_o + r_o)^2 \leq 3 \left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{8} - 3r^2 \right) \quad (AB = CD = a, AC = BD = b, AD = BC = c), \quad (6)$$

Sau cùng, chứng minh hệ thức (có thể sử dụng vectơ):

$$a^2 + b^2 + c^2 = 8R^2 \quad (7)$$

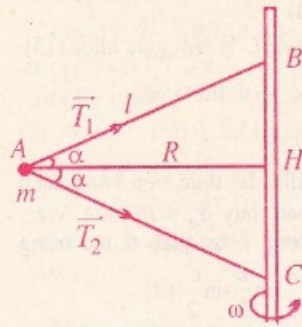
Từ đó suy ra BDT (*) cần tìm.

2) Nhiều bạn cho lời giải quá dài dòng hoặc sử dụng quá nhiều đẳng thức hoặc BDT trong tam giác nên lời giải công kênh. Đáng tiếc, còn có một bạn do quá cầu thả nên đã vội vàng kết luận đề toán là sai ! Ngoài bạn Lâm Tuyên, các bạn sau đây có lời giải tốt và tương đối ngắn gọn hơn cả.

Hà Nội : Đỗ Xuân Diễn, Đặng Đình Khánh, Nguyễn Hoàng Thanh, 11A1, Văn Anh Tuấn, 11A2, PTCT-T, ĐHSP Hà Nội, Vũ Quốc Mỹ, Trần Anh Tuấn, 11A., Lê Hùng Việt Bảo, 10A Toán, ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội; **Bắc Ninh :** Nguyễn Văn Thảo, 11CT, THPT NK Hàn Thuyên; **Vĩnh Phúc :** Vũ Nhật Huy, 11A1, Trần Bá Bách, 11A1, THPT chuyên Phú Thọ; **Hòa Bình :** Hà Hữu Cao Trình, 11 Toán, THPT chuyên Hoàng Văn Thụ, Hòa Bình; **Hải Dương :** Khổng Minh Thảo, 10 Toán, Nguyễn Tiến Thành, 11 Lý, THPT chuyên Nguyễn Trãi; **Nam Định :** Dương Đỗ Nhuận, 9A2, THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên; **Ninh Bình :** Nguyễn Tuyết Mai, 11T, Trịnh Thùy Nhung, 12T, THPT Lương Văn Tụy; **Thanh Hóa :** Mai Quang Thành, 11T1, Nguyễn Xuân Hòa, 12CT, THPT Lam Sơn, Lê Khắc Huyền, 11B1, THPT Lê Văn Huu, Thiệu Hóa; **Quảng Trị :** Bạch Ngọc Bảo Phước, Đoàn Quang Trí, 11 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Q.T; **Bình Định :** Phạm Thành Phú, 11 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn.; **Tp. Hồ Chí Minh :** Trần Võ Huy, 11T, THPT NK ĐHQG Tp.HCM; **Đồng Nai :** Nguyễn Hoàng Minh Dũng, 10 Toán, Nguyễn Cảnh Lâm, 11 Tin, THPT chuyên Lương Thế Vinh, Biên Hòa; **Bà Rịa - Vũng Tàu :** Bùi Hoàng Giang, 11A1, THPT Vũng Tàu; **Tây Ninh :** Nguyễn Anh Tuấn, 11, THPT Hoàng Lê Kha; **Đồng Tháp :** Nguyễn Võ Vinh Lộc, 11T, THPT Sa Đéc; **Dương Tiến Cường**, 11A2, THPT Ngô Gia Tự.

NGUYỄN ĐĂNG PHÁT

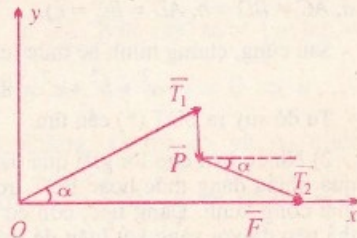
Bài L1/298. Một quả cầu khối lượng $m = 1,2$ kg nối bằng 2 sợi dây không khối lượng vào một thanh thẳng đứng đang quay với vận tốc góc ω . Hai dây buộc vật bị căng và tạo thành một tam giác cân ABC với $AB = AC = l = 1,5\text{m}$, $BC = 1,8\text{m}$. Lực căng của dây AB là $T_1 = 35\text{N}$. Cho $g = 10\text{m/s}^2$. Hãy xác định



a) Lực căng T_2 của dây AC .

b) Vận tốc góc ω .

Lời giải. a) Vật m chịu tác dụng của 3 lực : trọng lực $\vec{P} = m\vec{g}$, lực căng $\vec{T}_1$ của dây AB và lực căng $\vec{T}_2$ của dây AC . Lực tổng hợp $\vec{F} = \vec{P} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2$ đóng vai trò lực hướng tâm $F = m\omega^2 R$ (1).



Trên hình có vẽ lực tổng hợp $\vec{F}$ (theo chu vi đường đa giác, trục Ox hướng theo AH). Từ hình vẽ ta có :

$$F = T_1 \cos \alpha + T_2 \cos \alpha \quad (2) \text{ và } T_1 \sin \alpha = P + T_2 \sin \alpha \quad (3) \text{ với } \sin \alpha = \frac{BH}{BA} = \frac{0,9}{1,5} = 0,6 \text{ và}$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - 0,6^2} = 0,8.$$

$$\text{Từ (2) và (3) tìm được : } T_2 = 15\text{N} ; F = 40\text{N}.$$

$$\text{b) } R = AH = \sqrt{1,5^2 - 0,9^2} = 1,2(\text{m}).$$

$$\text{Từ (1) tìm được : } \omega = \sqrt{\frac{F}{mR}} \approx 5,3(\text{rad/s}).$$

Nhân xét. Các em có lời giải gọn và đáp số đúng :

Hòa Bình : Nguyễn Tuấn Anh, 11 Lí, THPT chuyên Hoàng Văn Thụ ; **Ninh Bình :** Vũ Thị Ngọc Anh, 10A3, THPT Yên Khánh A ; **Đà Nẵng :** Lê Tấn Huy, 10A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn ; **Quảng Ngãi :** Nguyễn Văn Thắng, 11T, THPT Lê Khiết ; **Quảng Ninh :** Lê Quý Anh, 10A4, THPT Hoàng Quốc Việt, Mạo Khê, Đông Triều ; **Hải Dương :** Trần Thanh Cường, 10 Tin, THPT Nguyễn Trãi, Đoàn Mạnh Hà, 10A1, THPT Thanh Hà ; **Hà Nội :** Nguyễn Hoàng Duy, 10L2, THPT HN - Amsterdam ; **Tiền Giang :** Trương Gia Thuận, 11 Lí, THPT chuyên Tiền Giang ; **Bắc**

Ninh : Cao Xuân Bình, 10 Lí, THPT NK Hàn Thuyên . Vương Thành Nam, 11A1, THPT Thuận Thành số 1 ; **Nam Định :** Trần Hoàng Anh, 11 Lí, THPT Lê Hồng Phong, Tp. Nam Định, Ngô Tiến Đạt, 10A5, THPT Hải Hậu A ; **Phú Thọ :** Bùi Ngọc Khang, 10A2, Vũ Văn Trung, 11B1, THPT chuyên Hùng Vương, Việt Trì ; **Thanh Hóa :** Lê Đức Phương, 10A8, THPT Hàm Rồng; Trần Anh Sơn, 10A3, THPT Nguyễn Trãi, Tp. Thanh Hóa ; Trần Ngọc Hưng, 10A10, THPT Lê Lợi, Thọ Xuân ; **Hà Tĩnh :** Lê Đức Đạt, 11 Lí, Bùi Hoài Nam, 10 Lí, Nguyễn Xuân Đức, 11 Lí, THPT NK Hà Tĩnh ; **Vĩnh Phúc :** Phạm Quang Chiến, 10A1, Trần Đức Phú, Trần Đình Cung, 10A3, THPT ch. Vĩnh Phúc, Hà Văn Lê, 10A1, THPT Ngô Gia Tự, Lập Thạch; **Nghe An :** Phạm Cung Sơn, 11A3, Phạm Trọng Trường, THPT Phan Bội Châu, Vinh, Nguyễn Việt Dũng, 10A, THPT Bắc Yên Thành, Lê Thị Thu Hà, 10A, THPT Nam Đàn 1.

MAI ANH

Bài L2/298. Ba quả cầu nhỏ giống hệt nhau (mỗi quả có khối lượng m , diện tích q) nằm yên ở các đỉnh của tam giác ABC vuông tại A nhờ các sợi dây nối không giãn, không dẫn điện, khối lượng không đáng kể và chiều dài các sợi dây bằng độ dài các cạnh tương ứng của tam giác.

Hệ thống đặt trên mặt phẳng ngang, nhẵn và cách điện. Gọi $\widehat{ABC} = \alpha$, $BC = l$. Hãy xác định gia tốc của các quả cầu ngay sau khi dây BC bị đứt đột ngột.

Lời giải. Chọn hệ trục xOy như hình vẽ. Kí

hiệu $\vec{F}_1$,

$\vec{F}_2$ là các

lực tương

tác giữa

quả cầu B

với các

quả cầu A

và C . Xét

hệ gồm 2

quả cầu A

và C ,

ngoại lực

tác dụng

lên hệ

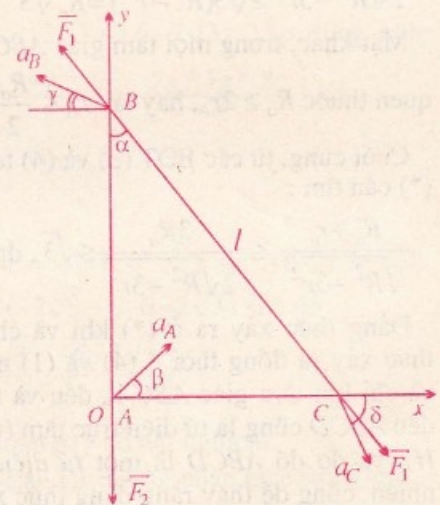
theo

phương

Ox là

$F_1 \sin \alpha$, do đó : $F_1 \sin \alpha = 2ma_x \Rightarrow a_{Ax} = a_{Cx} =$

$$a_x = \frac{F_1}{2m} \sin \alpha = \frac{kq^2}{2ml^2} \sin \alpha.$$





Cuộc chơi 2002 : AI BIẾT NHIỀU HƠN ?

AI - THẾ NÀO ?

Từ thế kỉ thứ II một nhà khoa học Hy Lạp đã xây dựng mô hình vũ trụ địa tâm (coi Trái đất nằm yên ở trung tâm vũ trụ). Đến thế kỉ XVI một nhà khoa học Ba Lan đã đề ra Hệ nhật tâm (coi Mặt trời ở trung tâm vũ trụ). Năm hành tinh gần gũi của Hệ Mặt trời mà con người biết đến từ rất sớm là Kim, Mộc, Thủy, Hỏa, Thổ. Một nhà khoa học Áo đã xây dựng nên ba định luật nổi tiếng, trong đó một định luật là : Các hành tinh chuyển động quanh Mặt trời theo quỹ đạo hình elip mà Mặt trời nằm tại một trong hai tiêu điểm của elip đó. Năm 1964 Hội Thiên văn quốc tế đã xác nhận bán kính Trái đất vào khoảng từ 6356,78 km đến 6378,16 km.

Câu hỏi dành cho các bạn.

1. Hãy nêu tên các nhà khoa học Hy Lạp, Ba Lan và Áo nói trên. Bạn biết gì thêm về họ ?

2. Hãy xếp thứ tự 5 hành tinh trên cùng với Trái đất tính theo thứ tự từ gần Mặt trời nhất đến xa nhất.

Ngoài các hành tinh trên bạn còn biết các hành tinh nào thuộc Hệ Mặt trời ?

3. Hai số đo bán kính Trái đất nói trên ứng với các khoảng cách nào ?

VKT

Kết quả : TÌM HIỂU TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

1. Số báo TH&TT đầu tiên xuất bản vào tháng 10 năm 1964 theo sáng kiến của Ban Vận động thành lập Hội Toán học Việt Nam (từ 1/1966 là Hội Toán học Việt Nam) cùng với cơ quan chủ quản là Ủy ban Khoa học Nhà nước (từ 1966 là Ủy ban Khoa học và Kỹ thuật Nhà nước). Ra mỗi tháng một số, 16 trang, in 2 màu. Từ tháng 1/1993 Báo trở thành Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ.

2. Từ số tháng 1/2001 đến số tháng 6/2002 đã có 7 bài viết cho chuyên mục Toán học và đời sống và 2 bài viết cho chuyên mục Lịch sử toán học.

3. Tháng, năm xuất hiện các chuyên mục được cho bởi bảng thống kê đúng sau :

Chuyên mục	Tháng, năm xuất hiện	Thường xuyên từ
Dành cho các bạn THCS	6/1992	1/1994
Diễn đàn dạy học Toán	1/1998	
Dành cho các bạn chuẩn bị thi Đại học	6/1993	1/1994
Toán học muôn màu	5/2000	
Nhìn ra thế giới	1/1999	

Các bạn sau có đáp án đúng được nhận tặng phẩm : Nguyễn Chí Hiệp, 11A1, chuyên Toán - Tin, ĐHQG Hà Nội, Hà Nội ; Phan Thị Kim Hoa, 11A1, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành, Yên Bái ; Lê Quốc Hiệp, 10T2, THPT Lam Sơn, T. Thanh Hóa ; Đoàn Thị Thúy, Đội 2, Đồng Thọ, Diên Thọ, Diên Châu, Nghệ An .

HOÀI THƯƠNG

Giải đáp bài : CHO MẤY ĐIỂM ?

Bạn thí sinh đã sai ngay từ đầu do đã lập luận :

Hai đường cong ở đề bài tiếp xúc

nhau khi và chỉ khi PT : $3^x(3^x - a + 2) + a^2 - 3a = 3^x + 1$ có nghiệm kép, bởi vì ta chỉ nói đến khái niệm nghiệm kép (nghiệm bội 2) đối với hàm đa thức mà thôi. Nhiều bạn đã cho thí sinh nọ điểm "zêrô" ! Sau đây là lời giải đúng của bài toán: Hai đường cong ở đề bài tiếp xúc nhau

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3^x(3^x - a + 2) + a^2 - 3a = 3^x + 1 & (1) \\ 2 \cdot 3^{2x} \ln 3 + (2 - a)3^x \ln 3 = 3^x \ln 3 & (2) \end{cases}$$

Từ (2) suy ra $3^x = \frac{a-1}{2}$ ($a > 1$) thay vào (1) ta được $3a^2 - 10a - 5 = 0$ mà $a > 1$ nên chỉ có $a = \frac{5 + 2\sqrt{10}}{3}$ thỏa mãn đề bài.

Nhận xét : Các bạn sau đã phân tích chỗ sai và nêu ra lời giải đúng được nhận tặng phẩm : Bạch Hoàng Yến, 10 Anh, Nguyễn Khoa Dững, 12 toán, THPT NK Hàn Thuyên, Bắc Ninh ; Vũ Nhật Huy, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc ; Hoàng Minh Đức, 12E, THPT Kim Liên, Hà Nội ; Trần Tuấn Anh, 12A1, THPT Quốc Oai, Hà Tây.

NGỌC HIỂN

Toán học và Tuổi trẻ

Mathematics and Youth

Năm thứ 39
Số 302 (8-2002)
Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội
ĐT - Fax : 04.5144272
Email : toanhocvt@yahoo.com

TRONG SỐ NÀY

1. **Dành cho Trung học cơ sở - For Lower Secondary Schools**
Phan Thế Hải - Vận dụng tính chất đường phân giác trong tam giác để giải toán
2. *Vũ Kim Thủy* - Hội thi tin học trẻ không chuyên toàn quốc lần thứ VIII
3. **Diễn đàn dạy học toán - Math Teaching Forum**
Phạm Gia Đức - Một số đặc điểm của sách Hình học lớp 6 mới
5. **Chuẩn bị thi vào Đại học - University Entrance Preparation**
Đặng Thanh Hải - Nguyễn Anh Dũng
Một số lưu ý khi giải đề thi tuyển sinh đại học khối A năm 2002 (Tiếp theo kì trước)
7. Kết quả thăm dò ý kiến bạn đọc
8. **Bạn đọc tìm tòi - Reader's Contribution**
Trần Xuân Đáng - Phạm Thịnh - Về một bất đẳng thức trong thi toán quốc tế.
10. **Lịch sử toán học - History of Math**
Lê Thị Hoài Châu - Lịch sử hình thành khái niệm hàm số
12. **Đề ra kì này - Problems in This Issue**
T1/302, ..., T10/302, L1, L2/302
14. **Giải bài kì trước - Solutions to Previous Problems**
Giải các bài của số 298
21. **Tiếng Anh qua các bài toán - English through Math Problems**
Ngô Việt Trung - Bài số 56
22. **Câu lạc bộ - Math Club**
Sai lầm ở đâu ? - Where's the Mistake ?
23. **Giải trí toán học - Math Recreation**

Bìa 1, 2 : Đội tuyển Việt Nam thi Toán quốc tế ở thành phố Glasgow. Từ trái sang phải : *Vũ Ngọc Minh, Nguyễn Xuân Trường, Phạm Hồng Việt, Thầy Vũ Đình Hòa, Thầy Nguyễn Khắc Minh, Thầy Mai Văn Tư, Phạm Thái Khánh Hiệp, Phạm Gia Vĩnh Anh, Mai Thanh Hoàng.*

Tổng biên tập :
NGUYỄN CẢNH TOÀN
Phó tổng biên tập :
NGÔ ĐẠT TỨ

Chịu trách nhiệm xuất bản :
Giám đốc NXB Giáo dục :
NGÔ TRẦN ÁI
Tổng biên tập NXB Giáo dục :
VŨ DƯƠNG THỤY

Trưởng ban biên tập : NGUYỄN VIỆT HẢI. Biên tập : VŨ KIM THỦY, HỒ QUANG VINH.

Trị sự : VŨ ANH THỨ. Trình bày : NGUYỄN THỊ OANH, NGUYỄN THANH LONG, NGUYỄN TIẾN DŨNG
Đại diện phía Nam : TRẦN CHÍ HIẾU, 231 Nguyễn Văn Cừ, Tp. Hồ Chí Minh. ĐT : 08.8309049

ISSN : 0866-8035
Chỉ số : 12884
Mã số : 8BT04M2

Chế bản tại Tòa soạn
In tại Nhà máy in Diên Hồng, 187B phố Giảng Võ
In xong và nộp lưu chiểu tháng 8 năm 2002

Giá : 3000đ
Ba nghìn đồng

TOÁN HỌC MUÔN MÀU

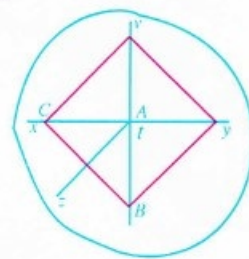
CẮT GIẤY MỘT NHẤT THÀNH HÌNH SAO

Muốn cắt giấy thành hình sao với mục đích trang trí (độ chính xác không quá cao) ta thường sử dụng tính chất đối xứng qua trục của một hình để gấp giấy theo trục nhiều lần, cuối cùng chỉ cần cắt 1 nhất theo 1 đường thẳng là được hình sao.

Để cho gọn ta kí hiệu $A \xrightarrow{d} A'$ là thao tác gấp giấy theo đường thẳng d để điểm A trùng với điểm A' .

Cắt mảnh giấy thành hình vuông (h.1)

- (1) $Av \xrightarrow{xy} At$; (2) $Ay \xrightarrow{At} Ax$. Lấy B trên At ; (3) $AB \xrightarrow{Az} AC$ có C .
(4) Mở nếp gấp Az . Cắt theo BC . Mở hết các nếp gấp được hình vuông.



Hình 1

Cắt giấy hình vuông thành hình sao 4 cánh, 8 cánh (h. 2)

Có mảnh giấy hình vuông $ABCD$.

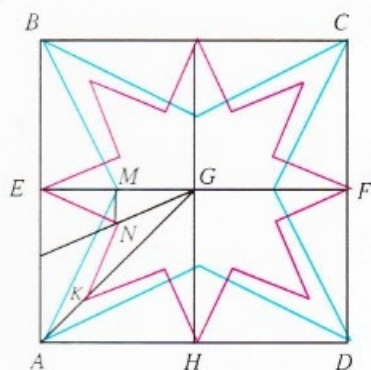
- (1) $BC \xrightarrow{EF} AD$; (2) $FD \xrightarrow{GH} EA$ (3) $GA \xrightarrow{MN} GE$

- (4) $E \xrightarrow{MN} G$; (5) Mở nếp gấp MN , cắt theo AM .

Mở các nếp gấp được hình sao 4 cánh đều.

Nếu sau (4) mở nếp gấp MN rồi thực hiện:

- (5) $GK \xrightarrow{GN} GE$ có N ; (6) Cắt theo EN . Mở các nếp gấp được hình sao 8 cánh đều mà các cạnh cách nhau 2 cánh thì thẳng hàng.



Hình 2

Dành cho bạn đọc

Từ mảnh giấy hình vuông hãy trình bày cách gấp giấy rồi cắt 1 nhất để được:

- 1) Hình sao 6 cánh đều 2) Hình sao 5 cánh (gần) đều
mà các cạnh cách nhau 1 cánh thì thẳng hàng

Giải đáp: BÀI TOÁN CẦU PHƯƠNG HÌNH TRÒN

Giả sử hình tròn (T) bán kính r và hình vuông (V) cạnh x có diện tích bằng nhau $S_T = S_V$. Trong *Toán học muôn màu* THPT số 293 (11/2001) đã chỉ ra nhiều cách dựng đoạn πr .

- 1) Dựng $x = \sqrt{\pi} r \approx 1,77245r$: $BH = r$, $CH = \pi r$, $AH \perp BC$

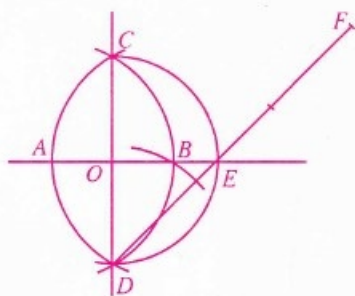
$$\text{Có } AH^2 = BH \cdot CH \Rightarrow x = AH = \sqrt{\pi} r \text{ (h. 3)}$$

- 2) Dựng $r = x / \sqrt{\pi} \approx 0,56419x$: $BC = \sqrt{\pi} x$, $BA = x$, $AH \perp BC$.

$$\text{Có } BH \cdot BC = BA^2 \Rightarrow r = BH = x / \sqrt{\pi} \text{ (h. 3)}$$

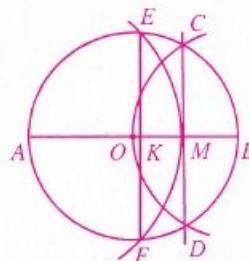
Các cách dựng sau khá đơn giản:

$$\begin{aligned} AB &= AD = BD = r \\ OE &= OD = \sqrt{3}r/2 \\ DF &= 3r \\ x &= EF \\ &= (3 - \sqrt{6}/2)r \\ &\approx 1,77525r \\ \Delta x &= 0,0029r \end{aligned}$$



Hình 4

$$\begin{aligned} AB &= 2BO = 2BC = x; AM = AE = 3x/4 \\ r &= AK = 9x/16 \approx 0,5625x; \Delta r = 0,0017x \end{aligned}$$



Hình 5

Các bạn được nhận tặng phẩm:

- 1) Trần Bình Minh 11A1 THPT chuyên Nguyễn Tất Thành, Yên Bái đã nêu ra 8 cách dựng hình vuông và 7 cách dựng hình tròn.

- 2) Nguyễn Quang Đạt, A2 (2000-2003) THPT chuyên Nguyễn Tất Thành, Yên Bái.

PHI PHI

