

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO * HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

Toán học & Tuổi trẻ

4
2002

SỐ 298 - NĂM THỨ 39 - TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG

**PGS. Vũ Dương Thụy
và một số biên tập viên
ban Toán trong ngày kỉ niệm
báo Toán học Tuổi trẻ**



**Ban
biên tập Toán
NXB Giáo dục**



TOÁN HỌC MUÔN MÀU

Thiết kế ao hình vuông

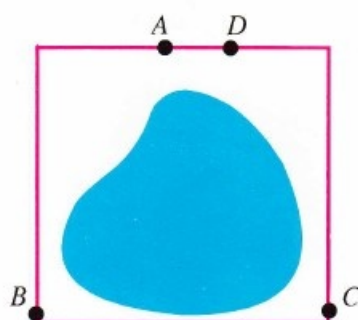
Trong mảnh vườn của một bác nông dân có 1 cái ao và 4 cây lưu niên A, B, C, D. Bác nhờ 3 bạn Định, Khảo, Nghiên thiết kế ao mới hình vuông mà vẫn giữ lại 4 cây, trong đó có ít nhất 3 cây trên bờ ao. (Trên bản vẽ cây nằm trên cạnh hình vuông vì chưa tính đến bờ ao).

Bạn Định thiết kế ngay ao hình vuông có 1 cạnh đi qua 2 cây A, D như hình 1. Bác nông dân chưa thật vừa ý.

Dành cho bạn đọc

- Khảo thiết kế : cây A là đỉnh, còn 2 cây B, C nằm trên 2 cạnh ao.
- Nghiên thiết kế : mỗi cây nằm trên một cạnh ao.

Các bạn hãy trình bày thiết kế của Khảo, Nghiên cùng với cách vẽ và gửi về Tòa soạn sớm để nhận tặng phẩm.



Hình 1

Để tiện lập luận ta ghi số vị trí các đèn như hình 2 và viết tắt là đỏ (Đ); vàng (V), lam (L), tím (T). Khi quay hình đi một bội của 90° thì vị trí các đỉnh (1 2 3 4) chuyển thành các vị trí (2 3 4 1), (3 4 1 2), (4 1 2 3) nhưng vẫn là 1 cách sắp xếp màu đèn nên ta chỉ nêu ra các cách sắp xếp màu đèn ở (1 2 3 4) là đủ.

Xét 3 trường hợp :

- 1) Ở hình vuông (1 2 3 4) có đủ 4 màu thì xảy ra 6 trường hợp :

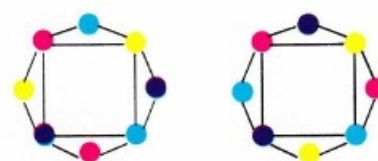
(Đ V L T) (Đ V T L) (Đ L V T)
(Đ L T V) (Đ T L V) (Đ T V L)

Ở mỗi trường hợp trên có 2 cách xếp màu như ở hình 3.

Vậy có $6 \times 2 = 12$ cách xếp.

- 2) Ở hình vuông (1 2 3 4) có đúng 3 màu thì xảy ra 12 trường hợp :

(Đ V Đ L) (Đ V Đ T) (Đ L Đ T)
(V L V T) (V L V Đ) (V T V Đ)
(L T L Đ) (L T L V) (L Đ L V)
(T Đ T V) (T Đ T L) (T V T L)



Hình 3

Ở mỗi trường hợp trên có 4 cách xếp màu như ở hình 4.

Vậy có $12 \times 4 = 48$ cách xếp.

- 3) Ở hình vuông (1 2 3 4) có đúng 2 màu thì xảy ra 6 trường hợp sau :

(Đ V Đ V) (Đ L Đ L) (Đ T Đ T) (V L V L) (V T V T) (L T L T)

Ở mỗi trường hợp trên có 4 cách xếp màu như ở hình 5.

Vậy có $6 \times 4 = 24$ cách xếp.

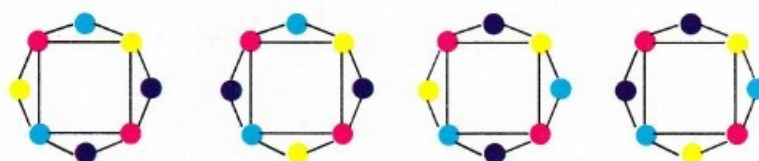
Tổng cộng có : $12 + 48 + 24 = 84$ cách sắp xếp màu đèn.

Hai bạn có lập luận đúng được nhận tặng phẩm là :

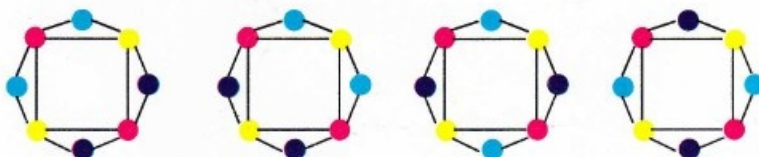
1) Nguyễn Văn Hoàng,
11A, THPT Hoàng Hóa II,
Thanh Hóa.

2) Lương Tiến Dũng,
12A, THPT NK Ngô Sĩ Liên,
Bắc Giang.

PHI PHI



Hình 4



Hình 5

Toán học và Tuổi trẻ Mathematics and Youth

Năm thứ 39
Số 298 (4-2002)
Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội
ĐT - Fax : 04.5144272
Email : toanhocvt@yahoo.com

THỦ TƯỚNG CHÍNH PHỦ TẶNG BẰNG KHEN CHO TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Ngày 25.2.2002 Phó Thủ tướng Nguyễn Tấn Dũng thay mặt Thủ tướng Chính phủ đã ký Quyết định tặng **Bằng khen của Thủ tướng Chính phủ** cho tạp chí Toán học và Tuổi trẻ đã có nhiều thành tích trong công tác, góp phần vào sự nghiệp xây dựng Chủ nghĩa xã hội và bảo vệ Tổ quốc.

Đây là một cột mốc đánh dấu những thành tích của cán bộ, công nhân viên tạp chí trong những năm gần đây đã liên tục đổi mới nội dung và hình thức nhằm đáp ứng tốt hơn nhu cầu của độc giả. (Trong các năm 1984 và 1995 tạp chí cũng đã được nhận 2 Huân chương Lao động hạng Nhì của Chủ tịch nước tặng).

Nhân dịp này Toán học và Tuổi trẻ chân thành cảm ơn sự chỉ đạo và giúp đỡ quý báu của Bộ Giáo dục và Đào tạo, Nhà xuất bản Giáo dục, Hội Toán học Việt Nam và sự cộng tác nhiệt tình của các ủy viên Hội đồng biên tập, các cộng tác viên cùng quý độc giả gần xa.

THTT

TRONG SỐ NÀY

- | | |
|--|---|
| <p>2 Dành cho Trung học cơ sở – For Lower Secondary Schools
Ngô Đức Minh – Tính ưu việt của ẩn phụ trong việc giải phương trình chứa dấu căn</p> <p>3 Ngô Việt Trung – Giải thưởng toán học Abel</p> <p>4 Tìm hiểu sâu thêm toán học sơ cấp - Advanced Elementary Mathematics
Nguyễn Minh Hà – Sử dụng tích ngoài của hai vectơ vào giải toán</p> <p>7 Nguyễn Văn Thông – Tìm cực trị của hàm số nhiều biến bằng cách khảo sát lần lượt từng biến</p> <p>9 Chuẩn bị thi vào đại học - University Entrance Preparation
Đặng Thanh Hải – Một số phương pháp tìm cực trị của hàm số</p> | <p>10 Toán học và đời sống - Math and Life
Nguyễn Duy Tiến – Nghịch lí chia giải thưởng cho hai đầu thủ</p> <p>11 Đề thi tuyển sinh lớp 10 khối PTCTT trường ĐH Vinh 2001</p> <p>12 Đề ra kì này – Problems in this Issue
T1/298, ..., T10/298, L1, L2/298</p> <p>14 Giải bài kì trước – Solutions to Previous Problems
Giải các bài của số 294</p> <p>22 Diễn đàn dạy học toán - Math Teaching Forum
Đặng Hùng Thắng – Về cơ sở của phương pháp nghiệm kép</p> <p>23 Tiếng Anh qua các bài toán - English through Math Problems
Ngô Việt Trung – Bài số 52</p> |
|--|---|

Tổng biên tập :
NGUYỄN CẢNH TOÀN
Phó tổng biên tập :
NGÔ ĐẠT TỨ
HOÀNG CHÚNG

Trưởng ban biên tập : NGUYỄN VIỆT HẢI
Trị sự : VŨ ANH THƯ
Đại diện phía Nam : TRẦN CHÍ HIẾU, 231 Nguyễn Văn Cừ, Tp. Hồ Chí Minh. ĐT : 08.8323044

Chịu trách nhiệm xuất bản :
Giám đốc NXB Giáo Dục :
NGÔ TRẦN ÁI
Tổng biên tập NXB Giáo Dục :
VŨ DƯƠNG THUY

Biên tập : VŨ KIM THUY, HỒ QUANG VINH
Trình bày : NGUYỄN THỊ OANH, NGUYỄN TIẾN DŨNG

Dành cho các bạn
TRUNG HỌC CƠ SỞ



TÍNH ỨNG DỤNG CỦA ẨN PHỤ TRONG VIỆC GIẢI PHƯƠNG TRÌNH CHỨA DẤU CĂN

NGÔ ĐỨC MINH
(GV THCS Ngô Gia Tự, Hải Phòng)

Việc giải phương trình (PT) chứa dấu căn thường gây ra nhiều khó khăn, phức tạp : nếu nâng lên lũy thừa để làm mất dấu căn thì dẫn đến phương trình bậc cao và không biết cách giải. Tuy nhiên nếu biết cách đặt ẩn phụ một cách thích hợp thì có thể chuyển phương trình chứa dấu căn về hệ phương trình hai ẩn nên sử dụng được cách giải quen thuộc. Bài viết này đưa ra nhiều ví dụ minh họa với các tình huống từ đơn giản đến phức tạp nhằm hình thành kỹ năng đặt ẩn phụ khi gặp phương trình chứa dấu căn.

Bài toán 1. Giải phương trình

$$x^2 - \sqrt{x+5} = 5 \quad (1)$$

Giải. Điều kiện : $x+5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -5$.

Đặt ẩn phụ $\sqrt{x+5} = y$ với $y \geq 0$.

Từ đó PT (1) chuyển thành hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 - y = 5 \\ y^2 - x = 5 \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} x^2 - y = 5 \\ y^2 - x = 5 \end{cases} \quad (3)$$

Trừ theo từng vế (2) và (3) được $x^2 - y^2 + x - y = 0 \Leftrightarrow (x-y)(x+y+1) = 0$. Xảy ra 2 trường hợp :

a) $x - y = 0$ hay $x = y \geq 0$, thay vào (2) có $x^2 - x - 5 = 0$ giải ra được $x_1 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{21})$

b) $x + y + 1 = 0$ hay $y = -x - 1 \geq 0$ thay vào (2) có $x^2 + x - 4 = 0$, giải ra được

$$x_2 = -\frac{1}{2}(1 + \sqrt{17})$$

Vì 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện đề bài nên PT (1) có 2 nghiệm x_1, x_2 như trên.

Bài toán 2. Giải phương trình

$$\sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}} = x(1 + 2\sqrt{1 - x^2}) \quad (4)$$

Giải. Điều kiện : $-1 \leq x \leq 1$.

Đặt ẩn phụ $\sqrt{1 - x^2} = y$ với $y \geq 0$.

Từ đó PT (4) chuyển thành hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{1+y} = x(1+2y) \\ x^2 = 1-y^2 \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} \sqrt{1+y} = x(1+2y) \\ x^2 = 1-y^2 \end{cases} \quad (6)$$

Từ (5) có $x \geq 0$ nên $1 + y = x^2(1 + 2y)^2$. Kết hợp với (6) được

$$4y^4 + 4y^3 - 3y^2 - 3y = 0 \Rightarrow y(y+1)(4y^2-3) = 0$$

Vì $y \geq 0$ nên PT trên chỉ có nghiệm : $y_1 = 0$,

$$y_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Thay vào (6) với điều kiện $0 \leq x \leq 1$ được

$$x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{2}. \text{ Đây là 2 nghiệm của PT (4).}$$

Có một số trường hợp ta phải đặt 2 ẩn phụ.

Bài toán 3. Giải phương trình

$$\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{35-x} = 5 \quad (7)$$

Giải. Đặt $\sqrt[3]{x} = a$ và $\sqrt[3]{35-x} = b$.

Từ đó PT (7) chuyển thành hệ phương trình

$$\begin{cases} a + b = 5 \\ a^3 + b^3 = 35 \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} a + b = 5 \\ a^3 + b^3 = 35 \end{cases} \quad (9)$$

Biến đổi (9) thành $(a+b)^3 - 3ab(a+b) = 35$. Kết hợp với (8) được $ab = 6$

Giải hệ PT (8), (10) được hai nghiệm $a_1 = 3, b_1 = 2$ và $a_2 = 2, b_2 = 3$. Từ đó có $x_1 = 27$ và $x_2 = 8$ là 2 nghiệm của PT (7).

Bài toán 4. Giải phương trình

$$\sqrt[3]{x-2} + \sqrt{x+1} = 3 \quad (11)$$

Giải. Điều kiện $x \geq -1$.

Đặt ẩn phụ $\sqrt[3]{x-2} = a$ và $\sqrt{x+1} = b$ với $b \geq 0$ thì PT (11) chuyển thành hệ phương trình

$$\begin{cases} a + b = 3 \\ a^3 - b^2 = -3 \end{cases} \quad (12)$$

$$\begin{cases} a + b = 3 \\ a^3 - b^2 = -3 \end{cases} \quad (13)$$

Từ (12) có $b = 3 - a$, thay thế vào (13) được $a^3 - a^2 + 6a - 6 = 0 \Rightarrow (a-1)(a^2+6) = 0 \Rightarrow a-1=0 \Rightarrow a=1$, thỏa mãn $b=3-a \geq 0$.

Từ đó có $x = 2 + a^3 = 3$ thỏa mãn điều kiện đề bài.

Bài toán 5. Giải phương trình

$$\sqrt{2 - \sqrt{2}(1+x)} + \sqrt[4]{2x} = 1 \quad (14)$$

Giải. Điều kiện : $0 \leq x \leq \sqrt{2} - 1$.

Đặt ẩn phụ : $\sqrt{2 - \sqrt{2}(1+x)} = \sqrt[4]{2} \cdot a$ với $a \geq 0$

$\sqrt[4]{2x} = \sqrt[4]{2} \cdot b$ với $b \geq 0$ và $x = b^4$. Từ đó PT (14) chuyển thành hệ phương trình :

$$\begin{cases} \sqrt[4]{2}(a+b) = 1 \\ a^2 + b^4 = \sqrt{2} - 1 \end{cases} \quad (15)$$

$$\begin{cases} \sqrt[4]{2}(a+b) = 1 \\ a^2 + b^4 = \sqrt{2} - 1 \end{cases} \quad (16)$$

Dùng phương pháp thế, từ (15) và (16) có PT :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{2b}{\sqrt[4]{2}} + b^2 + b^4 - \sqrt{2} + 1 = 0$$

$$\Rightarrow (b^2 + 1)^2 - \left(b + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 0$$

$$\Rightarrow b^2 - b + 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \quad (\text{do } b \geq 0)$$

Giải PT này được

$$\Delta = \frac{4 - 3\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{2}} \Rightarrow 2b = 1 \pm \sqrt{\frac{4 - 3\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{2}}}$$

(thỏa mãn $b \geq 0$ vì $0 < 4 - 3\sqrt[4]{2} < \sqrt[4]{2}$)

Từ đó tính được $x = b^4 \geq 0$.

Xét điều kiện $x \leq \sqrt{2} - 1 \Leftrightarrow b^4 \leq \sqrt{2} - 1$.

Thử thấy $(1 + \sqrt{\Delta})^4 \leq 16(\sqrt{2} - 1)$. Suy ra PT

$$(14) \text{ có 2 nghiệm là } \frac{1}{16} \left(1 \pm \sqrt{\frac{4 - 3\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{2}}}\right)^4.$$

Các ví dụ trên cho thấy tính ưu việt của việc đặt ẩn phụ khi giải phương trình chứa dấu căn. Việc đặt ẩn phụ như thế nào phụ thuộc vào dạng cụ thể của phương trình. Các bạn hãy thử sức bằng cách giải các phương trình dưới đây và tìm tòi, sáng tạo các bài toán mới.

BÀI TẬP

Bài 1. Giải các phương trình sau :

a) $\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x-2} = \sqrt[3]{2x-3}$

b) $\sqrt{x} + \sqrt{x - \sqrt{1-x}} = 1$

c) $\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x - \sqrt{x}} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{x}{x + \sqrt{x}}}$

Bài 2. Giải và biện luận phương trình.

$$\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x} = a$$

GIẢI THƯỞNG TOÁN HỌC ABEL

NGÔ VIỆT TRUNG
(Viện Toán học)

A-ben N.H. (Niels Henrik Abel 1802-1829) là nhà toán học Na Uy nổi tiếng. Ông có những đóng góp quan trọng vào sự phát triển toán học, đặc biệt trong đại số. Nhiều khái niệm toán học mang tên ông như nhóm Abel, đa tạp Abel, tích phân Abel, v.v. Có thể coi Abel và nhà toán học Pháp Ga-loa (Galois 1811-1832) là những cha đẻ của đại số "hiện đại". Họ sinh ra và làm việc gần như trong cùng một thời kì, cùng nghiên cứu việc giải các phương trình đại số bằng căn thức, cùng gặp nhiều bất hạnh trong cuộc sống cũng như trong toán học và cùng mất rất sớm.

Nhân kỉ niệm 200 năm ngày sinh của Abel nhà nước Na Uy vừa thành lập Quỹ giải thưởng Abel theo đề nghị của khoa Toán trường ĐH Tổng hợp Ô-xlô (Oslo). Quỹ này có một số tiền ban đầu tương đương với 22 triệu đô la Mỹ. Tiền lãi của nó sẽ đủ để trao giải thưởng hàng năm cho các nhà toán học. Một ủy ban gồm các nhà toán học quốc tế sẽ được thành lập để xét việc trao giải thưởng.

Khi tuyên bố lập giải thưởng Abel ngày 23/8/2001, ông Thủ tướng Na Uy Xtô-ten-bơ (Stoltenberg) nói rằng chúng ta cần quan tâm hơn nữa đến sự phát triển toán học và khoa học. Giải thưởng nhằm mục đích động viên sinh viên toán và những nhà toán học, tạo nên sự chú ý của cộng đồng quốc tế về toán học cũng như nhằm nâng cao uy tín của Na Uy như là một đất nước của tri thức.

Đúng ra giải thưởng Abel đã được nhà vua Ô-xca II (Oscar II) của Thụy Điển và Na Uy đề nghị lập nên từ đầu thế kỷ 20. Nhưng kế hoạch này đã không được thực hiện do liên bang hai nước tan rã vào năm 1905. Nhà nước Na Uy hy vọng rằng giải thưởng Abel về toán học sẽ có vai trò tương tự như giải thưởng Nô-ben (Nobel) cho các môn khoa học khác. Trong một cuộc họp gần đây, Ban chấp hành Hội Toán học quốc tế đã coi việc lập giải thưởng Abel là đề án quan trọng nhất cho sự phát triển toán học trong nhiều năm qua, có thể làm thay đổi tình hình ngay sau vài năm đầu, và là một tài sản quý báu cho các thế hệ toán học tương lai cùng với giải thưởng toán học cao quý là giải thưởng Phin (Fields) được Hội Toán học quốc tế trao 4 năm một lần.

TÌM HIỂU SÂU THÊM TOÁN HỌC SƠ CẤP**SỬ DỤNG TÍCH NGOÀI CỦA HAI VECTƠ VÀO GIẢI TOÁN**

NGUYỄN MINH HÀ

(GV khối PTCT ĐHSP Hà Nội)

Để sử dụng được tích ngoài của hai vectơ như một công cụ trong việc giải các bài toán hình học, trước hết cần nắm vững định nghĩa và các tính chất của tích ngoài của hai vectơ (đã đăng trong THPT số 294 tháng 12/2001). Một số kĩ thuật sử dụng tích ngoài của hai vectơ vào giải toán cũng đã được giới thiệu trong THPT số 295 (1/2002). Xin nhắc lại một số kiến thức:

Định nghĩa. 1) $\vec{a} \wedge \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin(\vec{a}, \vec{b})$ khi $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$, còn $\vec{a} \wedge \vec{b} = 0$ khi $\vec{a} = \vec{0}$ hoặc $\vec{b} = \vec{0}$.

$$2) S[ABC] = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{BC})$$

$$= \begin{cases} S(ABC) \text{ nếu } (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \text{ có hướng dương} \\ -S(ABC) \text{ nếu } (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \text{ có hướng âm} \end{cases}$$

trong đó $S(ABC)$ là diện tích ΔABC , M thuộc BC .

Tính chất.

$$1) \vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a}$$

$$2) \vec{a} \wedge (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \wedge \vec{b} + \vec{a} \wedge \vec{c}$$

$$3) (k\vec{a}) \wedge (t\vec{b}) = (kt)(\vec{a} \wedge \vec{b})$$

$$4) (\vec{b} \wedge \vec{c})\vec{a} + (\vec{c} \wedge \vec{a})\vec{b} + (\vec{a} \wedge \vec{b})\vec{c} = \vec{0}$$

Với ΔABC và mỗi điểm M thì

$$5) S[ABC] = S[MAB] + S[MBC] + S[MCA]$$

đẳng thức trên đã được mở rộng cho đa giác lồi.

$$6) S[MBC]\overrightarrow{MA} + S[MCA]\overrightarrow{MB} + S[MAB]\overrightarrow{MC} = \vec{0}$$

Bài viết này trình bày tiếp một số bài toán khác nhằm làm rõ hơn hiệu lực của tích ngoài khi giải toán hình học.

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC và M là một điểm nằm trong tam giác.

a) Chứng minh rằng các số đo $S(MBC)MA$, $S(MCA)MB$, $S(MAB)MC$ là độ dài ba cạnh của một tam giác nào đó.

b) Tìm M sao cho diện tích tam giác nói trong câu (a) là lớn nhất.

Giải. a) Vì M thuộc tam giác ABC nên các tam giác MBC , MCA , MAB cùng hướng và các

vectơ $S(MBC)\overrightarrow{MA}$, $S(MCA)\overrightarrow{MB}$, $S(MAB)\overrightarrow{MC}$ đôi một không cùng phương, theo tính chất 6 và định nghĩa phép cộng vectơ, ta thấy: $S(MBC)MA$, $S(MCA)MB$, $S(MAB)MC$ là độ dài ba cạnh của một tam giác.

b) Kí hiệu diện tích của tam giác nói trên là $S(M)$, theo tính chất 3 có:

$$S(M) = \frac{1}{2} | (S(MCA)\overrightarrow{MB} \wedge S(MAB)\overrightarrow{MC}) | =$$

$$= \left| (S(MCA) \cdot S(MAB) \cdot \frac{1}{2} \overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{MC}) \right| =$$

$$= |S(MCA) \cdot S(MAB) \cdot S[MBC]| =$$

$$= S(MCA) \cdot S(MAB) \cdot S(MBC) \leq$$

$$\leq \left(\frac{S(MCA) + S(MAB) + S(MBC)}{3} \right)^3 =$$

$$= \frac{1}{27} S^3(ABC)$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow S(MCA) = S(MAB) = S(MBC) \Leftrightarrow M$ là trọng tâm tam giác ABC .

Tóm lại: $S(M)$ lớn nhất và bằng $\frac{1}{27} S^3(ABC)$ khi M là trọng tâm tam giác ABC .

Ví dụ 2. Cho bốn vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$. Chứng minh rằng:

$$(\vec{a} \wedge \vec{b})(\vec{c} \wedge \vec{d}) + (\vec{a} \wedge \vec{c})(\vec{d} \wedge \vec{b}) + (\vec{a} \wedge \vec{d})(\vec{b} \wedge \vec{c}) = 0$$

Giải: Theo tính chất 3 và 4 có:

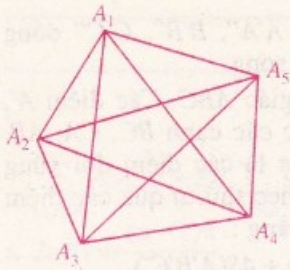
$$(\vec{a} \wedge \vec{b})(\vec{c} \wedge \vec{d}) + (\vec{a} \wedge \vec{c})(\vec{d} \wedge \vec{b}) + (\vec{a} \wedge \vec{d})(\vec{b} \wedge \vec{c}) =$$

$$= \vec{a} \wedge ((\vec{c} \wedge \vec{d})\vec{b}) + \vec{a} \wedge ((\vec{d} \wedge \vec{b})\vec{c}) + \vec{a} \wedge ((\vec{b} \wedge \vec{c})\vec{d})$$

$$= \vec{a} \wedge ((\vec{c} \wedge \vec{d})\vec{b} + (\vec{d} \wedge \vec{b})\vec{c} + (\vec{b} \wedge \vec{c})\vec{d})$$

$$= \vec{a} \wedge \vec{0} = 0 \text{ (đpcm)}$$

Ví dụ 3. Cho ngũ giác lồi $A_1A_2A_3A_4A_5$ có diện tích S . Đặt $a_i = S(A_iA_{i+1}A_{i+2})$ ($1 \leq i \leq 5$) ($A_6 \equiv A_1, A_7 \equiv A_2$). Tính S theo a_i ($1 \leq i \leq 5$).



Giải. Áp dụng kết quả của ví dụ 2 cho bốn véc-tơ $\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}, \overrightarrow{A_1A_4}, \overrightarrow{A_1A_5}$ ta có :

$$\begin{aligned} & (\overrightarrow{A_1A_2} \wedge \overrightarrow{A_1A_3})(\overrightarrow{A_1A_4} \wedge \overrightarrow{A_1A_5}) + \\ & + (\overrightarrow{A_1A_2} \wedge \overrightarrow{A_1A_4})(\overrightarrow{A_1A_5} \wedge \overrightarrow{A_1A_3}) + \\ & + (\overrightarrow{A_1A_2} \wedge \overrightarrow{A_1A_5})(\overrightarrow{A_1A_3} \wedge \overrightarrow{A_1A_4}) = 0 \\ \Rightarrow & S[A_1A_2A_3] \cdot S[A_1A_4A_5] + S[A_1A_2A_4] \cdot S[A_1A_5A_3] + \\ & + S[A_1A_2A_5] \cdot S[A_1A_3A_4] = 0 \quad (1) \end{aligned}$$

Ta thấy : $\begin{cases} \Delta A_1A_2A_3, \Delta A_1A_4A_5 \text{ cùng hướng} \\ \Delta A_1A_2A_4, \Delta A_1A_5A_3 \text{ ngược hướng} \\ \Delta A_1A_2A_5, \Delta A_1A_3A_4 \text{ cùng hướng} \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} S[A_1A_2A_3] \cdot S[A_1A_4A_5] > 0 \\ S[A_1A_2A_4] \cdot S[A_1A_5A_3] < 0 \\ S[A_1A_2A_5] \cdot S[A_1A_3A_4] > 0 \end{cases} \quad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra :

$$\begin{aligned} & S(A_1A_2A_3) \cdot S(A_1A_4A_5) - S(A_1A_2A_4) \cdot S(A_1A_5A_3) \\ & + S(A_1A_2A_5) \cdot S(A_1A_3A_4) = 0 \Rightarrow \\ & a_1a_4 - (S - a_2 - a_4)(S - a_1 - a_3) + a_5(S - a_1 - a_4) = 0 \\ \Rightarrow & S^2 - \left(\sum_{1 \leq i \leq 5} a_i \right) S + \sum_{1 \leq i \leq 5} a_i a_{i+1} = 0 \quad (a_6 \equiv a_1) \end{aligned}$$

Để thấy $S > \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i \leq 5} a_i$. Vậy :

$$S = \frac{1}{2} \left(\sum_{1 \leq i \leq 5} a_i + \sqrt{\left(\sum_{1 \leq i \leq 5} a_i \right)^2 - \left(\sum_{1 \leq i \leq 5} a_i a_{i+1} \right)} \right)$$

Ví dụ 4. Cho tứ giác lồi $A_1A_2A_3A_4$. Gọi H_1, H_2, H_3, H_4 theo thứ tự là trực tâm của các tam giác $A_2A_3A_4, A_3A_4A_1, A_4A_1A_2, A_1A_2A_3$. Chứng minh rằng : $S[H_1H_2H_3H_4] = S[A_1A_2A_3A_4]$

Giải. Vì H_1, H_2 là trực tâm các tam giác $A_2A_3A_4, A_3A_4A_1$ nên :

$$\begin{cases} A_1H_2 \perp A_3A_4 \\ A_2H_1 \perp A_3A_4 \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{A_1H_2} \parallel \overrightarrow{A_2H_1}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{A_1H_2} \wedge \overrightarrow{A_2H_1} = 0 \quad (1)$$

Lấy điểm P bất kì. Từ (1) và tính chất 2 có :

$$\begin{aligned} & (\overrightarrow{PH_2} - \overrightarrow{PA_1}) \wedge (\overrightarrow{PH_1} - \overrightarrow{PA_2}) = 0 \\ \Rightarrow & \overrightarrow{PA_1} \wedge \overrightarrow{PA_2} - \overrightarrow{PH_1} \wedge \overrightarrow{PH_2} = \\ & = \overrightarrow{PA_1} \wedge \overrightarrow{PH_1} - \overrightarrow{PA_2} \wedge \overrightarrow{PH_2} \\ \Rightarrow & 2S[PA_1A_2] - 2S[PH_1H_2] = \\ & = \overrightarrow{PA_1} \wedge \overrightarrow{PH_1} - \overrightarrow{PA_2} \wedge \overrightarrow{PH_2} \quad (2) \end{aligned}$$

Tương tự có :

$$\begin{aligned} & 2S[PA_2A_3] - 2S[PH_2H_3] = \\ & = \overrightarrow{PA_2} \wedge \overrightarrow{PH_2} - \overrightarrow{PA_3} \wedge \overrightarrow{PH_3} \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 2S[PA_3A_4] - 2S[PH_3H_4] = \\ & = \overrightarrow{PA_3} \wedge \overrightarrow{PH_3} - \overrightarrow{PA_4} \wedge \overrightarrow{PH_4} \quad (4) \end{aligned}$$

Cộng theo từng vế của (2), (3), (4) và áp dụng tính chất 5 có :

$$S[A_1A_2A_3] = S[H_1H_2H_3]$$

Từ đó $\Delta A_1A_2A_3, \Delta H_1H_2H_3$ cùng hướng và $S(A_1A_2A_3) = S(H_1H_2H_3)$.

Tương tự ta có $S(A_2A_3A_4) = S(H_2H_3H_4)$, $S(A_3A_4A_1) = S(H_3H_4H_1)$, $S(A_4A_1A_2) = S(H_4H_1H_2)$ và tất cả các tam giác trên đều cùng hướng với $A_1A_2A_3A_4$, do đó tứ giác $H_1H_2H_3H_4$ cũng lồi, cùng hướng với $A_1A_2A_3A_4$, suy ra

$$S[A_1A_2A_3A_4] = S[H_1H_2H_3H_4].$$

Ví dụ 5. Cho tứ giác lồi $ABCD$. Chứng minh rằng :

$$S[ABCD] = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{BD})$$

Giải. $S[ABCD] = S[ABC] + S[ACD]$

$$\begin{aligned} & = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) \\ & = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{BD}) \end{aligned}$$

Nhận xét. Kết quả trên là sự mở rộng của công thức quen thuộc :

$$S(ABCD) = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD \cdot \sin(\angle AC, BD)$$

Ví dụ 6. Cho lục giác lồi $ABCDEF$. Gọi M, N, P theo thứ tự là trung điểm của AD, BE, CF . Chứng minh rằng M, N, P cùng thuộc một đường thẳng khi và chỉ khi $S(ABCDEF) = S(ACE) + S(BDF)$.

Giải. Không mất tính tổng quát giả sử $ABCDEF$ có hướng dương. Theo tính chất 2, 3 và VD 5 có :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MN} \wedge \overrightarrow{MP} &= \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{DB}) \wedge \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DF}) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \overrightarrow{AE} \wedge \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2} \overrightarrow{DB} \wedge \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AE} \wedge \overrightarrow{DF} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \overrightarrow{DB} \wedge \overrightarrow{DF} \right) \\ &= \frac{1}{2} (S[AEC] + S[DABC] + S[ADEF] + S[DBF]) \\ &= \frac{1}{2} (-S(ACE) + S(DABC) + S(ADEF) - S(BDF)) \\ &= \frac{1}{2} (S(ABCDEF) - S(ACE) - S(BDF)) \end{aligned}$$

Vậy : M, N, P cùng thuộc một đường thẳng
 $\Leftrightarrow \overrightarrow{MN} \wedge \overrightarrow{MP} = 0$

$$\Leftrightarrow S(ABCDEF) = S(ACE) + S(BDF)$$

Để rèn luyện việc sử dụng tích ngoài của hai vectơ vào việc giải toán, mời các bạn làm một số bài tập dưới đây.

Bài tập 1. Cho tam giác ABC và điểm M nào đó khác các đỉnh. Giả sử AM cắt BC tại A' , BM cắt CA tại B' , CM cắt AB tại C' . Chứng minh rằng :

$$\frac{\overrightarrow{MA'}}{\overrightarrow{AA'}} + \frac{\overrightarrow{MB'}}{\overrightarrow{BB'}} + \frac{\overrightarrow{MC'}}{\overrightarrow{CC'}} = 1$$

Bài tập 2. Cho tứ giác lồi $ABCD$ có $AD = BC$. Về phía ngoài nó ta dựng các tam giác ADE , BCF cân tại A, B sao cho $\widehat{DAE} = \widehat{CBF}$. Chứng minh rằng trung điểm của các đoạn thẳng AB , CD , EF thẳng hàng.

Bài tập 3. Cho tứ giác lồi $ABCD$. AB cắt CD tại E ; AD cắt BC tại F . Chứng minh rằng trung điểm của các đoạn thẳng AC , BD , EF thẳng hàng.

Bài tập 4. Trên ba đường thẳng a, b, c theo thứ tự có các điểm A, B, C chuyển động với vận tốc đều. Biết rằng tại thời điểm ban đầu A, B, C không thẳng hàng. Chứng minh rằng tồn tại không quá hai thời điểm mà tại đó A, B, C thẳng hàng.

Bài tập 5. Cho tam giác ABC và hai điểm O, O' . Giả sử AO cắt BC tại A' , BO cắt CA tại B' , CO cắt AB tại C' , AO' cắt $B'C'$ tại A'' , BO' cắt $C'A'$ tại B'' , CO' cắt $A'B'$ tại C'' . Chứng minh

rằng các đường thẳng $A'A''$, $B'B''$, $C'C''$ đồng quy hoặc đôi một song song.

Bài tập 6. Cho tam giác ABC . Các điểm A', B', C' theo thứ tự thuộc các cạnh BC, CA, AB . Gọi A'', B'', C'' lần lượt là các điểm đối xứng của các điểm A, B, C theo thứ tự qua các điểm A', B', C' . Chứng minh rằng :

$$S(A''B''C'') = 3S(ABC) + 4S(A'B'C')$$

Bài tập 7. Cho tam giác ABC . Các điểm M, N, P theo thứ tự chạy trên các đường thẳng BC, CA, AB sao cho : $\frac{BM}{BC} = \frac{CN}{CA} = \frac{AP}{AB}$

a) Chứng minh rằng các độ dài AM, BN, CP tạo thành ba cạnh của một tam giác.

b) Tìm vị trí của M, N, P sao cho diện tích tam giác nối trong câu (a) nhỏ nhất.

Bài tập 8. Cho tam giác ABC với $BC = a, CA = b, AB = c$. Gọi G, I, O theo thứ tự là trọng tâm, tâm đường tròn nội tiếp, tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác. Chứng minh rằng :

$$S_{[GOI]} = \frac{(a+b+c)(b-c)(c-a)(a-b)}{48S[ABC]}$$

Bài tập 9. Cho tam giác ABC . Các điểm M, N, P theo thứ tự thuộc các cạnh BC, CA, AB . Gọi X, Y, Z lần lượt là trọng tâm các tam giác ANP, BPM, CMN . Chứng minh rằng :

$$S(ABC) < \frac{9}{2} S(XYZ)$$

Bài tập 10. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp. M là một điểm bất kì. X, Y, Z, T, U, V theo thứ tự là hình chiếu của M trên các đường thẳng AB, CD, AC, DB, AD, BC . Gọi E, F, G theo thứ tự là trung điểm của XY, ZT, UV . Chứng minh rằng E, F, G thẳng hàng.

Đón đọc THPT số 299 (5-2002)

- ◆ Dấu hiệu chia hết trong hệ thập phân
 - ◆ Đề thi tuyển sinh lớp 10 ĐHSP Hà Nội
 - ◆ Những chuyện thú vị về số nguyên tố với bàn cờ, với hình vẽ bằng một nét...
 - ◆ Bài thi giải toán bằng máy tính bỏ túi lần 2
 - ◆ Bài toán về đường thẳng cắt đồ thị hàm bậc 3
 - ◆ Chùm đường tròn và ứng dụng
 - ◆ Ý kiến bạn đọc về phương pháp nghiệm kép
 - ◆ Và các chuyện mục vui, giải trí khác...
- Mời bạn đọc tiếp tục đặt mua THPT quý 3/2002.

THPT

TÌM CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ NHIỀU BIẾN BẰNG CÁCH KHẢO SÁT LẦN LƯỢT TỪNG BIẾN

NGUYỄN VĂN THÔNG

(GV THPT chuyên Lê Quý Đôn, Đà Nẵng)

Trong các cuộc thi chọn học sinh giỏi thường có bài toán tìm giá trị lớn nhất (GTLN) hay giá trị nhỏ nhất (GTNN) của hàm số nhiều biến phụ thuộc lẫn nhau. Ở đáp án thường sử dụng các bất đẳng thức để ước lượng giá trị hàm số rồi xác định giá trị của các biến khi các dấu đẳng thức xảy ra đồng thời.

Để tìm cực trị hàm số nhiều biến có thể dùng phương pháp khảo sát lần lượt từng biến, nghĩa là: tìm GTLN (hoặc GTNN) của hàm số với biến thứ nhất và các biến còn lại coi là tham số, rồi tìm GTLN (GTNN) của hàm số với biến thứ hai và ứng với giá trị đã xác định của biến thứ nhất mà các biến còn lại coi là tham số...

Để thấy rõ hiệu lực của phương pháp này ta thử áp dụng nó vào giải một số bài toán dạng này trong đề thi chọn học sinh giỏi toàn quốc một số năm gần đây.

Bài toán 1. Xét hàm số

$$f(x, y) = (1-x)(2-y)(4x-2y)$$

trên miền $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số f trên miền D .

Lời giải. Biến đổi hàm số đã cho thành

$$f(x, y) = 2(1-x)(2-y)[(2-y) - 2(1-x)]$$

Đặt $v = 1 - x$ và $u = 2 - y$, ta chuyển về tìm GTNN của hàm số $F(u, v) = -2uv^2 + u^2v$ trên miền $E = \{(u, v) \mid 0 \leq u \leq 2, 0 \leq v \leq 1\}$, nghĩa

$$\text{là } \min_E F(u, v) = \min_{0 \leq u \leq 2} \left[\min_{0 \leq v \leq 1} (-2uv^2 + u^2v) \right]$$

Xét hàm $g(v) = -2uv^2 + u^2v$ với $0 \leq v \leq 1$ và coi u là tham số thỏa mãn $0 \leq u \leq 2$. Ta có $g'(v) = -4uv + u^2 = u(-4v + u)$. Ta thấy

$g'(v) = 0$ khi $v_0 = \frac{u}{4}$ mà $0 \leq \frac{u}{4} \leq \frac{1}{2}$ và qua v_0 thì

$g'(v)$ đổi dấu từ dương sang âm, suy ra $\min_{0 \leq v \leq 1} g(v) = \min \{g(0); g(1)\} = \min \{0;$

$$u^2 - 2u\} = u^2 - 2u \text{ do } u^2 - 2u = u(u - 2) \leq 0.$$

Vậy $\min_E F(u, v) = \min_{0 \leq u \leq 2} (u^2 - 2u) = -1$ khi $u = 1, v = 1$.

Từ đó $\min_D f(x, y) = 2 \min_E F(u, v) = -2$ khi $x = 0, y = 1$.

Bài toán 2. Xét các số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $abc + a + c = b$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{2}{a^2 + 1} - \frac{2}{b^2 + 1} + \frac{3}{c^2 + 1}$$

(Đề thi HS giỏi THPT toàn quốc bảng A - 1999)

Lời giải. Biến đổi giả thiết thành $a + c = b(1 - ac) > 0 \Rightarrow a < \frac{1}{c}$ và $b = \frac{a+c}{1-ac}$ (1)

Thay (1) vào biểu thức P và biến đổi được

$$P = \frac{2}{a^2 + 1} + \frac{3}{c^2 + 1} + \frac{2(a+c)^2}{(1+a^2)(1+c^2)} - 2 \quad (2)$$

$$\text{Xét hàm số } f(x) = \frac{1}{x^2 + 1} + \frac{(x+c)^2}{(1+x^2)(1+c^2)}$$

với $0 < x < \frac{1}{c}$ và coi c là tham số ($c > 0$)

$$\text{Ta có } f'(x) = \frac{-2c(x^2 + 2cx - 1)}{(1+x^2)^2(1+c^2)}$$

Trên $\left(0; \frac{1}{c}\right)$ thì $f'(x) = 0$ có nghiệm duy

nhất là $x_0 = -c + \sqrt{c^2 + 1}$ (3) với $0 < x_0 < \frac{1}{c}$.

Qua x_0 thì $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm nên $f(x)$ đạt cực đại tại $x_0 \Rightarrow f(x) \leq f(x_0) =$

$$1 + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 1}}. \text{ Từ đó theo (2) có:}$$

$$P = 2f(x) - 2 + \frac{3}{c^2 + 1} \leq \frac{2c}{\sqrt{c^2 + 1}} + \frac{3}{c^2 + 1} = g(c)$$

Xét hàm số $g(c)$ với $c > 0$.

$$\text{Ta có } g'(c) = \frac{2(1-8c^2)}{(c^2 + 1)^2(3c + \sqrt{c^2 + 1})}$$

Với $c > 0$ thì $g'(c) = 0$ tại $c_0 = \frac{1}{\sqrt{8}}$ và qua c_0 thì $g'(c)$ đổi dấu từ dương sang âm nên $g(c_0)$ là

giá trị cực đại, suy ra $P \leq g\left(\frac{1}{\sqrt{8}}\right) = \frac{10}{3}$. Giá trị $P = \frac{10}{3}$ đạt được khi $c = \frac{1}{\sqrt{8}}$, $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ và $b = \sqrt{2}$ theo (1), (3).

Bài toán 3. Xét các số thực dương x, y, z thỏa mãn hệ điều kiện sau :

$$\begin{cases} \frac{2}{5} \leq z \leq \min\{x, y\} & (1) \\ xz \geq \frac{4}{15} & (2) ; \quad yz \geq \frac{1}{5} & (3) \end{cases}$$

Hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P(x, y, z) = \frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z}$$

(Đề thi HS giỏi THPT toàn quốc bảng B - 2001)

Lời giải. Từ điều kiện (1) và (2) suy ra $x \geq \max\left\{z, \frac{4}{15z}\right\}$ (4)

a) Xét hàm số $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{z}$ với $x > 0$ và tham số $z \geq \frac{2}{5}$. Xảy ra 2 trường hợp :

• Nếu $z \geq \frac{2}{\sqrt{15}}$ thì $x \geq z \geq \frac{4}{15z}$ theo (4) nên

$$f(x) \leq \frac{1}{z} + \frac{1}{z} = \frac{2}{z} \leq 15 \quad (5)$$

• Nếu $\frac{2}{5} \leq z \leq \frac{2}{\sqrt{15}}$ theo (1) thì $x \geq \frac{4}{15z} \geq z$

theo (4) nên $f(x) \leq \frac{15z}{4} + \frac{1}{z} = g(z)$

Xét hàm số $g(z)$ với $\frac{2}{5} \leq z \leq \frac{2}{\sqrt{15}}$.

Ta có $g'(z) = \frac{15}{4} - \frac{1}{z^2} < 0$ khi $z < \frac{2}{\sqrt{15}}$.

Từ đó $g(z)$ là hàm giảm và $f(x) \leq g(z) \leq g\left(\frac{2}{5}\right) = 4$ (6)

So sánh (5) và (6) rút ra $\frac{1}{x} + \frac{1}{z} \leq 4$, đồng thời

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = 4 \text{ khi } x = \frac{2}{3}, z = \frac{2}{5} \quad (7)$$

b) Xét hàm số $h(y) = \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ với tham số $z \geq \frac{2}{5}$.

Từ điều kiện (1) và (3) suy ra $y \geq \max\left\{z, \frac{1}{5z}\right\}$ (8)

Lập luận như câu a) ta được :

• Nếu $z \geq \frac{1}{\sqrt{5}}$ thì $h(y) \leq 2\sqrt{5}$ (9)

• Nếu $\frac{2}{5} \leq z \leq \frac{1}{\sqrt{5}}$ thì $h(y) \leq \frac{9}{2}$ (10)

So sánh (9) và (10) rút ra $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq \frac{9}{2}$, đồng thời $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{9}{2}$ khi $z = \frac{2}{5}, y = \frac{1}{2}$.

Từ các kết quả của (a) và (b) ta có

$$P(x, y, z) = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) + 2\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \leq 4 + 2 \cdot \frac{9}{2} = 13$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = \frac{2}{3}, y = \frac{1}{2}, z = \frac{2}{5}$ suy ra $\max P(x, y, z) = 13$.

(Kì sau đăng tiếp)

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP ... (Tiếp trang 11)

Bài 1. Tùy theo giá trị của m , hãy tìm GTNN của biểu thức

$$A = (x - 2y + 1)^2 + (2x + my + 5)^2$$

(Đề thi ĐH Giao thông vận tải 2000)

HD : Giải, biện luận hệ PT $\begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ 2x + my + 5 = 0 \end{cases}$

Bài 2. Tìm GTNN, GTLN của hàm số

$$y = \sin^6 x + \cos^6 x + a \sin x \cos x$$

(Đề thi ĐH Thương mại)

Bài 3. Xác định dạng của ΔABC sao cho biểu

thức $P = \frac{\sqrt[3]{\sin A} + \sqrt[3]{\sin B} + \sqrt[3]{\sin C}}{\sqrt[3]{\cos \frac{A}{2}} + \sqrt[3]{\cos \frac{B}{2}} + \sqrt[3]{\cos \frac{C}{2}}}$ đạt GTLN

(Đề thi ĐH Bách Khoa, Hà Nội 2000)

HD: Sử dụng BĐT $\frac{a^3 + b^3}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^3$ nếu $a+b \geq 0$

Bài 4. Khai triển đa thức $P(x) = (1 + 2x)^{12}$ thành dạng $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{12}x^{12}$. Tìm $\text{Max}(a_0, a_1, \dots, a_{12})$.

(Đề thi HV Kỹ thuật quân sự 2000)

ĐS: $\text{Max}(a_0, a_1, \dots, a_{12}) = a_8 = C_{12}^8 \cdot 2^8 = 126720$.

CHUẨN BỊ THI VÀO ĐẠI HỌC**MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP
TÌM CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ****ĐẶNG THANH HẢI**

(GV HV Phòng không – Không quân Sơn Tây)

Bài toán tìm giá trị lớn nhất (GTLN), giá trị nhỏ nhất (GTNN) của một hàm số hay một biểu thức nào đó thường được đề cập trong các kì thi tuyển sinh vào các trường Đại học, Cao đẳng, Trung học chuyên nghiệp. Ở bài viết này xin giới thiệu với các bạn một vài phương pháp (PP) thông dụng để giải loại toán trên trong các đợt thi tuyển vào các trường vài năm gần đây. Trước hết chúng ta nhắc lại:

Số m và M theo thứ tự được gọi là GTNN và GTLN của hàm $y = f(x)$ xác định trên tập $D \subseteq \mathbb{R}$ nếu $m \leq f(x) \leq M$ và tồn tại $x_0, x_1 \in D$ sao cho $f(x_0) = m$; $f(x_1) = M$.

Dưới đây chúng tôi đưa ra ba phương pháp thường dùng để đánh giá các bất đẳng thức (BĐT): $m \leq f(x) \leq M$, một công việc rất quan trọng để tìm GTLN, GTNN của hàm $y = f(x)$ trên miền xác định của hàm số đó.

PP1: Phương pháp ước lượng giá trị hàm số

Phương pháp này chủ yếu sử dụng các bất đẳng thức quen thuộc (Cô-si, Bu-nhi-a-cốp-xki, ...) hoặc các BĐT cơ bản để ước lượng giá trị của hàm $y = f(x)$; từ đó sử dụng định nghĩa của GTNN, GTLN suy ra kết quả cần tìm.

Ví dụ 1. Tìm GTLN của hàm số

$$f(x) = \frac{x}{2} + \sin^2 x \text{ trên } \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

(Đề thi ĐH Kinh tế quốc dân – 2000)

Lời giải. Bài toán đặt ra là tìm GTLN của một hàm phức tạp, việc khảo sát hàm số đó trên $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ khá khó khăn, ta nghĩ tới việc ước

lượng giá trị của hàm $f(x)$ trên $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Nhận

thấy rằng với mọi $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ có: $\frac{x}{2} \leq \frac{\pi}{4}$ và

$\sin^2 x \leq 1$. Từ đó $f(x) = \frac{x}{2} + \sin^2 x \leq \frac{\pi}{4} + 1$. Dấu

$$\text{đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} \\ \sin^2 x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{Do đó } \max_{x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]} f(x) = \frac{\pi}{4} + 1, \text{ đạt được khi } x = \frac{\pi}{2}.$$

Ví dụ 2. Cho hàm số $y = x + 1 + \frac{1}{x-1}$. Tìm

những điểm trên đồ thị hàm số có hoành độ lớn hơn 1 sao cho tiếp tuyến tại điểm đó tạo với hai đường tiệm cận một tam giác có chu vi nhỏ nhất.

(Đề thi ĐHQG Hà Nội, khối A – 2000)

Lời giải. Đồ thị (C) của hàm số có tiệm cận đứng $x = 1$, tiệm cận xiên $y = x + 1$. (bạn đọc tự vẽ đồ thị)

Giả sử $M(1 + a, 2 + a + \frac{1}{a})$ ($a > 0$) là điểm thỏa mãn điều kiện bài toán. Phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C) tại M có dạng

$$(D) \quad y = \frac{a^2 - 1}{a^2}(x - 1 - a) + 2 + a + \frac{1}{a}.$$

Gọi E là giao điểm của hai tiệm cận, A, B là các giao điểm của (D) với các tiệm cận đó. Khi đó $E(1, 2)$, $A(1, 2 + \frac{2}{a})$, $B(1 + 2a, 2 + 2a)$.

Suy ra $P = EA + EB + AB = \frac{2}{a} + 2\sqrt{2}a + \sqrt{8a^2 + \frac{4}{a^2}} - 8$. Áp dụng BĐT Cô-si cho các số dương ta được $P \geq 2\sqrt{4\sqrt{2}} + \sqrt{2\sqrt{32}} - 8$ hay $P \geq 4\sqrt[4]{2} + \sqrt{8(\sqrt{2} - 1)}$. Dấu đẳng thức xảy ra

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{a} = 2\sqrt{2}a \\ 8a^2 = \frac{4}{a^2} \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$$

Tóm lại, chỉ có duy nhất điểm M thỏa mãn điều kiện bài toán đó là $M(1 + \frac{1}{\sqrt[4]{2}}, 2 + \sqrt[4]{2} + \frac{1}{\sqrt[4]{2}})$

và $\min P = 4\sqrt[4]{2} + \sqrt{8(\sqrt{2} - 1)}$.

PP2: Phương pháp xác định miền giá trị:

Cho hàm $y = f(x)$ xác định trên tập $X \subseteq \mathbb{R}$. Để tìm GTLN, GTNN của hàm $y = f(x)$ ta tìm miền giá trị của hàm y, tức là tìm điều kiện của tham số y để phương trình $y = f(x)$ (ẩn x) có nghiệm trên tập X.

Ví dụ 3. Tìm GTNN, GTLN của hàm số

$$y = 3\sin^2 x + 6\sin x \cos x - 5\cos^2 x + \sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + 2$$

(Để thi tuyển khối sĩ quan cấp phân đội)

Lời giải. Trước trên ta làm đơn giản hóa hàm y.

$$y = \frac{3}{2}(1 - \cos 2x) + 3\sin 2x - \frac{5}{2}(1 + \cos 2x) + \cos 2x + \sin 2x + 2$$

$y = 4\sin 2x - 4\cos 2x + 1$. Tập xác định của y là R.

Ta tìm y để phương trình (ẩn x):

$$4\sin 2x - 4\cos 2x + (1-y) = 0 \quad (1) \text{ có nghiệm.}$$

PT (1) có nghiệm khi và chỉ khi

$$16 + 16 \geq (y-1)^2 \Leftrightarrow y^2 - 2y - 31 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - 4\sqrt{2} \leq y \leq 1 + 4\sqrt{2}.$$

$$\text{Vậy Max } y = 1 + 4\sqrt{2}, \text{ Min } y = 1 - 4\sqrt{2}$$

PP3: Phương pháp xét chiều biến thiên

Sử dụng công cụ đạo hàm, thiết lập bảng biến thiên của hàm $y = f(x)$ trên tập xác định của nó, từ đó suy ra GTLN, GTNN của hàm số đó.

Ví dụ 4. Tìm GTLN, GTNN của hàm số $y = 2\sin^8 x + \cos^4 2x$

(Để thi ĐH Tài chính Kế toán - 2000)

Lời giải. Đặt $t = \cos 2x$ ($-1 \leq t \leq 1$), hàm y trở thành $f(t) = 2\left(\frac{1-t}{2}\right)^4 + t^4, t \in [-1, 1] = D$.

$$f'(t) = 4\left[t^3 - \left(\frac{1-t}{2}\right)^3\right]; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3}.$$

Lập bảng biến thiên của hàm $f(t)$ trên $[-1, 1]$.

t	-1	$1/3$	1	
$f'(t)$		-	0	+
$f(t)$	3	$1/27$	1	

Từ bảng biến thiên ta có

$$\text{Max}_D y = 3 \Leftrightarrow \cos 2x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{Min}_D y = \frac{1}{27} \Leftrightarrow \cos 2x = \frac{1}{3}.$$

Xin mời các bạn tiếp tục rèn luyện theo các phương pháp trên qua các bài tập sau:

(Xem tiếp trang 8)

TOÁN HỌC VÀ ĐỜI SỐNG



CHIA GIẢI THƯỞNG CHO HAI ĐẤU THỦ

NGUYỄN DUY TIẾN
(ĐHKHTN-ĐHQG Hà Nội)

Hai đấu thủ ngang sức chơi một trò chơi (chỉ có thắng hoặc thua) nghĩa là khả năng chiến thắng của họ là như nhau. Họ thỏa thuận với nhau rằng ai là người đầu tiên thắng 6 ván thì nhận toàn bộ giải thưởng. Giả sử rằng vì lý do nào đó trò chơi phải dừng lại ở tình huống người thứ nhất thắng 5 ván, còn người thứ hai thắng 3 ván. Cần phải phân chia giải như thế nào là hợp lý?

Có nhiều ý kiến trái ngược nhau. Đại đa số cho rằng cần chia theo tỉ lệ 5 : 3, cũng có ý kiến cho rằng cần chia theo tỉ lệ 2 : 1 (với lập luận là người thứ nhất thắng nhiều hơn 2 ván, 2 là một phần ba của 6, nên người thứ nhất phải nhận được 1/3 giải do 2 lần thắng cuộc, phần còn lại của giải chia đôi, mỗi người một nửa). Nhưng thực ra chia theo tỉ lệ 7 : 1 là hợp lý hơn cả (lạ quá nhỉ!)

Giải thích: Pa-xcan (Pascal) và Phéc-ma (Fermat), độc lập với nhau giải thích về tỉ lệ trên theo quan điểm xác suất. Lập luận của Fermat như sau: Nếu tiếp tục chơi thêm 3 ván "giả tạo" nữa thì đối thủ thứ hai muốn lấy được tất cả giải anh ta phải chiến thắng cả 3 ván này. Vì vậy xác suất thắng cuộc của anh ta là: $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$ và do đó xác suất thắng cuộc của

đấu thủ thứ nhất là $\frac{7}{8}$. Điều này chứng tỏ tỉ lệ 7 : 1 là hợp lý nhất.

Cách giải thích trên do Pascal và Fermat tìm ra vào năm 1654. Phát kiến này quan trọng tới mức nhiều người cho rằng 1654 là năm sinh của xác suất)

Chú thích

• Tac-ta-glia (Tartaglia) là người đề nghị chia theo tỉ lệ 2 : 1, mặc dù ông là người khá tài giỏi (sau một đêm đã tìm ra công thức nghiệm của phương trình bậc ba).

ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 KHỐI THPT CHUYÊN TOÁN - TIN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC VINH NĂM 2001

MÔN TOÁN – VÒNG 1

(Thời gian làm bài : 150 phút)

Câu I. 1) Tìm một số tự nhiên có 4 chữ số mà tổng của số đó và tất cả các chữ số của nó bằng 2001.

2) Tìm x sao cho

$$\left(\frac{1-x\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} + \sqrt{x} \right) \left(\frac{1+x\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} - \sqrt{x} \right) \leq 5$$

Câu II. 1) Giải phương trình

$$\sqrt{\frac{1}{4}x^2 + x + 1} - \sqrt{6 - 2\sqrt{5}} = 0$$

2) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A = \frac{y^2}{3x^2 + 3xy + 2y^2}$$

Câu III. Ở về phía ngoài tam giác ABC , ta dựng các hình vuông ABB_1A_2 , BCC_1B_2 , CAA_1C_2 . Gọi M là điểm chính giữa của cạnh BC .

1) Chứng minh rằng AM vuông góc với A_1A_2 .

2) Chứng minh rằng các đường trung trực của các đoạn thẳng A_1A_2 , B_1B_2 , C_1C_2 đồng quy tại một điểm.

MÔN TOÁN – VÒNG 2

(Thời gian làm bài : 150 phút)

Câu IV. Có bao nhiêu số tự nhiên có 8 chữ số, trong đó mỗi số đều chia hết cho 11 và có mặt tất cả các chữ số từ 1 đến 8.

Câu V. a) Cho dãy số $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ thỏa mãn các điều kiện :

$$x_1 = \frac{1}{2}; \quad x_{n+1} = x_n^2 + x_n \quad \text{với } n = 1, 2, \dots$$

Chứng minh rằng :

$$1 < \frac{1}{x_1 + 1} + \frac{1}{x_2 + 1} + \dots + \frac{1}{x_{2001} + 1} < 2$$

b) Tìm các số tự nhiên x và y thỏa mãn phương trình : $10x^2 + 29xy + 21y^2 = 2001$

Câu VI. a) Cho hai đường thẳng b và c song song với nhau, A là một điểm không thuộc hai đường thẳng đó. Dựng tam giác đều ABC sao cho đỉnh B thuộc đường thẳng b , đỉnh C thuộc đường thẳng c .

b) Cho tam giác ABC , đường cao CH . Hai đường thẳng x và y đi qua C tương ứng hợp với hai đường thẳng CA , CB các góc bằng nhau sao cho hình chiếu M của A trên x , hình chiếu N của B trên y và H không thẳng hàng. Chứng minh rằng điểm chính giữa K của AB và các điểm M , H , N nằm trên một đường tròn.

• Trong trường hợp tổng quát khi đấu thủ thứ nhất cần phải thắng thêm n ván nữa mới nhận được giải, còn đấu thủ thứ hai phải thắng thêm m ván nữa mới nhận được giải thì xác suất thắng cuộc của đấu thủ thứ nhất là :

$$2^{-n-m+1} \sum_{j=n}^{n+m-1} C_{n+m-1}^j$$

(Số ván chơi bằng $n + m - 1$ và tất cả các biến số đồng khả năng là 2^{n+m-1}).

• Năm 1977 An-đéc-sơn (Anderson) đã sử dụng ý tưởng (tiếp tục chơi thêm các ván giả

tạo) của Fermat để cho một chứng minh đơn giản của định lý tuyệt diệu sau.

Giả sử hai đấu thủ chơi trò chơi với quy ước là ai thắng trước N ván sẽ nhận giải. Khi đó đấu thủ khai cuộc sẽ có các xác suất chiến thắng như nhau trong 2 luật chơi sau đây :

– Hoặc chơi lần lượt (người khai cuộc chơi ván đầu, rồi đến đấu thủ của anh ta, và cứ tiếp tục chơi tuần tự như thế),

– Hoặc chơi theo cách : ai thắng ván này sẽ được tiếp tục chơi ván sau.

Trước đó, năm 1976, Kinh-xton (Kingston) đã chứng minh định lý này bằng phương pháp tổ hợp.



ĐỀ RA KÌ NÀY

CÁC LỚP THCS

Bài T1/298. Chứng minh rằng số các chữ số viết trong hệ thập phân của hai số 2002^{2001} và $2002^{2001} + 2^{2001}$ là bằng nhau.

TRẦN TUYẾT THANH
(GV Sơn Tây, Hà Tây)

Bài T2/298. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $x^2 + xy + y^2$, trong đó x, y là các số thực thỏa mãn 2 điều kiện :

$$|2x - y| \leq 3 \text{ và } |x - 3y| \leq 1$$

ĐỖ THANH HÂN
(GV THPT chuyên Bạc Liêu)

Bài T3/298. Chứng minh rằng nếu phương trình $ax^4 + bx^3 + cx^2 - 2bx + 4a = 0$ ($a \neq 0$) có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 \cdot x_2 = 1$ thì $5a^2 = 2b^2 + ac$.

TRẦN HỒNG SƠN
(GV THPT BC Thái Thụy, Thái Bình)

Bài T4/298. Gọi P là trung điểm cạnh BC của tam giác ABC và BE, CF là hai đường cao. Đường thẳng qua A , vuông góc với PF , cắt đường thẳng CF tại M . Đường thẳng qua A , vuông góc với PE , cắt đường thẳng BE tại N . Gọi K và G lần lượt là trung điểm của BM và CN . Gọi H là giao điểm của đường thẳng KF và GE . Chứng minh rằng AH vuông góc với EF .

PHẠM HOÀNG HÀ
(SV CLC K49 khoa Toán Tin, ĐHSPT Hà Nội)

Bài T5/298. Cho hình vuông $ABCD$. Lấy điểm E trên cạnh AB và điểm F trên cạnh CD sao cho $AE = CF$. Các đường thẳng BF và CE cắt đường thẳng AD lần lượt tại N và M . Tìm quỹ tích giao điểm P của các đường thẳng BM và CN khi E, F di chuyển trên các cạnh AB và CD .

PHẠM ĐÌNH TRƯỜNG
(Trung tâm CNTT, PSV, Hà Nội)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/298. Tìm số dư của phép chia

$$\prod_{i=1}^{2003} (1 + i^2) \text{ cho } 2003.$$

VŨ HẢI
(Hà Nội)

Bài T7/298. Giải phương trình:

$$3^x = 1 + x + \log_3(1 + 2x)$$

LÊ ANH TUẤN
(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

Bài T8/298. Dãy số (x_n) ($n = 0, 1, 2, \dots$) được xác định bởi :

$$x_0 = 1, x_1 = \frac{1}{2},$$

$$x_{n+2} = \frac{x_{n+1} \cdot x_n}{2002x_{n+1} + 2001x_n + 2000x_{n+1} \cdot x_n}$$

với mọi $n = 0, 1, 2, \dots$

Hãy tìm công thức tổng quát của x_n theo n .

NGUYỄN VĂN THANH
(GV THPT Châu Thành A, Bến Tre)

Bài T9/298. Gọi AH và r lần lượt là đường cao và bán kính đường tròn nội tiếp của tam giác ABC . Gọi p_1 là nửa chu vi $\triangle ABH$ và r_1 là bán kính đường tròn nội tiếp của nó. Gọi p_2 là nửa chu vi $\triangle ACH$ và r_2 là bán kính đường tròn nội tiếp của nó. Chứng minh rằng tam giác ABC

vuông tại A khi và chỉ khi $r = \frac{p_1 r_1 + p_2 r_2}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2}}$

TRẦN VĂN VÀNG
(GV THPT chuyên Hùng Vương, Phú Thọ)

Bài T10/298. Cho tứ diện gần đều $ABCD$ ($AB = CD, AC = BD, AD = BC$). Gọi R và r lần lượt là bán kính các mặt cầu ngoại tiếp và nội tiếp của tứ diện $ABCD$. Gọi R_0 và r_0 lần lượt là bán kính các đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của tam giác ABC . Chứng minh rằng :

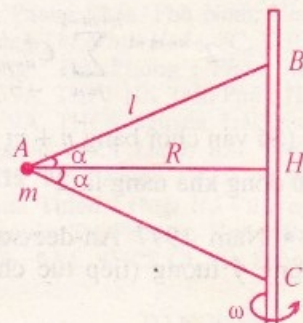
$$\frac{R_0 + r_0}{\sqrt{R^2 - 3r^2}} \leq \sqrt{3}$$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

HỒ QUANG VINH
(Hà Nội)

CÁC ĐỀ VẬT LÝ

Bài L1/298. Một quả cầu khối lượng $m = 1,2 \text{ kg}$ nối bằng 2 sợi dây không khối lượng vào một thanh thẳng đứng đang quay với vận tốc góc ω . Hai dây buộc vật bị căng và



tạo thành một tam giác cân ABC với $AB = AC = l = 1,5\text{m}$, $BC = 1,8\text{m}$. Lực căng của dây AB là $T_1 = 35\text{N}$. Cho $g = 10\text{m/s}^2$. Hãy xác định

a) Lực căng T_2 của dây AC .

b) Vận tốc góc ω .

NGUYỄN QUANG HẬU
(Hà Nội)

Bài T2/298. Ba quả cầu nhỏ giống hệt nhau (mỗi quả có khối lượng m , điện tích q) nằm yên ở các đỉnh của tam giác ABC vuông tại A nhờ

các sợi dây nối không giãn, không dẫn điện, khối lượng không đáng kể và chiều dài các sợi dây bằng độ dài các cạnh tương ứng của tam giác.

Hệ thống đặt trên mặt phẳng ngang, nhẵn và cách điện. Gọi $\widehat{ABC} = \alpha$, $BC = l$. Hãy xác định gia tốc của các quả cầu ngay sau khi dây BC bị đứt đột ngột.

NGUYỄN XUÂN QUANG
(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/298. Prove that the numbers of digits of the numbers 2002^{2001} and $2002^{2001} + 2^{2001}$ written in decimal system are equal.

T2/298. Find the greatest value of the expression $x^2 + xy + y^2$ where x, y are real numbers satisfying simultaneously the conditions $|2x - y| \leq 3$ và $|x - 3y| \leq 1$

T3/298. Prove that if the equation

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 - 2bx + 4a = 0 \quad (a \neq 0)$$

has two roots x_1, x_2 satisfying $x_1 \cdot x_2 = 1$ then

$$5a^2 = 2b^2 + ac.$$

T4/298. Let P be the midpoint of the side BC of a triangle ABC and BE, CF be its two altitudes. The line passing through A , perpendicular to PF , cuts the line CF at M . The line passing through A , perpendicular to PE , cuts the line BE at N . Let K and G be respectively the midpoints of BM and CN , let H be the point of intersection of KF and GE . Prove that AH is perpendicular to EF .

T5/298. Let $ABCD$ be a square. Take a point E on the side AB and a point F on the side CD such that $AE = CF$. The lines BF and CE cut the line AD respectively at N and M . Find the locus of the point of intersection P of the lines BM and CN when E moves on the side AB and F moves on the side CD .

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/298. Find the remainder of the division of the product

$$\prod_{i=1}^{2003} (1 + i^2) \text{ by } 2003.$$

T7/298. Solve the equation

$$3^x = 1 + x + \log_3(1 + 2x)$$

T8/298. The sequence of numbers (x_n)

$(n = 0, 1, 2, \dots)$ is defined by : $x_0 = 1, x_1 = \frac{1}{2}$,

$$x_{n+2} = \frac{x_{n+1} \cdot x_n}{2002x_{n+1} + 2001x_n + 2000x_{n+1} \cdot x_n}$$

for every $n = 0, 1, 2, \dots$

Calculate x_n in terms of n .

T9/298. Let AH be the altitude and r be the inradius of a triangle ABC . Let p_1 be the semiperimeter of triangle ABH and r_1 be its inradius. Let p_2 be the semiperimeter of triangle ACH and r_2 be its inradius. Prove that the triangle ABC is right at A if and only if

$$r = \frac{p_1 r_1 + p_2 r_2}{\sqrt{p_1^2 + p_2^2}}$$

T10/298. Let $ABCD$ be an equifaced tetrahedron ($AB = CD, AC = BD, AD = BC$). Let R and r be respectively the radii of the circumscribed sphere and the inscribed sphere of the tetrahedron $ABCD$. Let R_0 and r_0 be respectively the circumradius and inradius of

triangle ABC . Prove that $\frac{R_0 + r_0}{\sqrt{R^2 - 3r^2}} \leq \sqrt{3}$

When does equality occur ?



Bài T1/293. Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho số $2^8 + 2^{11} + 2^n$ là số chính phương

Lời giải. **Cách 1.** Giả sử $2^8 + 2^{11} + 2^n = a^2$ với $a \in \mathbb{N}$ thì $2^n = a^2 - (2^8 + 2^{11})$

$$\Leftrightarrow 2^n = a^2 - 48^2 \Leftrightarrow 2^n = (a - 48)(a + 48)$$

$$\text{Từ đó có } \begin{cases} a + 48 = 2^p \\ a - 48 = 2^q \end{cases}$$

với $p, q \in \mathbb{N}$ và $p + q = n, p > q$.

$$\text{Suy ra } 2^p - 2^q = 96 \Leftrightarrow 2^q(2^{p-q} - 1) = 2^5 \cdot 3$$

$$\Rightarrow q = 5 \text{ và } p - q = 2 \Rightarrow p = 7$$

$$\Rightarrow n = 5 + 7 = 12.$$

$$\text{Thử lại có } 2^8 + 2^{11} + 2^{12} = 80^2$$

Cách 2.

• Nếu $n \leq 8$. Từ $48^2 = 2^8 + 2^{11} < 2^8 + 2^{11} + 2^n \leq 2^8 + 2^{19} + 2^8 = 2560 < 51^2$ suy ra $a^2 = 2^8 + 2^{11} + 2^n$ chỉ có thể lấy giá trị 49^2 hoặc 50^2 , nhưng không có $n \in \mathbb{N}$ thỏa mãn.

• Nếu $n > 8$ đặt $n = 8 + m$ thì $a^2 = 2^8 + 2^{11} + 2^{8+m} = 2^8(2^m + 9) = 16^2(2^m + 9)$ suy ra $2^m + 9 = b^2 \Leftrightarrow 2^m = b^2 - 3^2$ với $b \in \mathbb{N}$. Giải tiếp tương tự như cách 1 được $m = 4$. Do đó $n = 12$.

Nhận xét. Các bạn sau có lời giải tốt:

Phú Thọ: Vũ Minh Hoàng, 9A, THCS Giấy, Phong Châu, Phú Ninh, Trần Hữu Hiếu, 9A, THCS Thị trấn Sông Thao; **Vĩnh Phúc:** Phạm Huy, Hoàng Thị Minh Huệ, 7C, THCS Tam Dương, Bùi Thị Thu Hiền, 9B, THCS Yên Lạc, Nguyễn Quang Hà, 7A4, THCS Vĩnh Tường; **Hà Nội:** Trần Việt Tuấn, 8H, THCS Lê Quý Đôn, Nghĩa Tân, Cầu Giấy; **Bắc Giang:** Phan Tuấn Anh, 8A, THCS Đức Giang, Yên Dũng; **Hà Nam:** Trần Phan Bình, 9B, THCS Trần Phú, Tx. Phù Lý; **Nam Định:** Phạm Duy Hiền, Nguyễn Đức Tâm, Hoàng Lê Sơn, Vũ Khắc Kỳ, 9A7, THCS Trần Đăng Ninh, Tp. Nam Định; **Hải Dương:** Nguyễn Thị Quyên, 9A1, THCS Chu Văn An, Thanh Hà, Nguyễn Quang Anh, 8A, Lê Đình Huy, 9A, THCS Nguyễn Trãi, Nam Sách; **Hải Phòng:** Bùi Thị Thùy Linh, 9A, THCS Vĩnh Phong, Vĩnh Bảo, Phạm Anh Minh, Vương Anh Chuyển, Nguyễn Đức Phương, Trần Xuân Dũng, 9A,

9A, THPT NK Trần Phú; **Thanh Hóa:** Lê Ngọc Tuấn, 7B, Hoàng Thị Mai, 9C, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoàng Hóa; **Quảng Trị:** Phan Hoàng Phương Trang, 6/2, THCS Nguyễn Trãi, Tx. Đông Hà, Phạm Hoàng Thường, 9B, THCS Triệu Đông, Triệu Phong; **Quảng Nam:** Nguyễn Dương Tuấn, 9/3, THCS Nguyễn Du, Tx. Tam Kỳ; **Quảng Ngãi:** Huỳnh Công Thịnh, 9D, THCS Phổ Văn, Đức Phổ, Phạm Minh Vương, 9D1, THCS Nguyễn Nghiêm, Tx. Quảng Ngãi; **Bình Định:** Nguyễn Yên Vũ, 8A8, THCS Đồng Đa, Quy Nhơn, Lê Tôn Khánh, 8A12, THCS Lê Hồng Phong, Quy Nhơn; **Tp. Hồ Chí Minh:** Trần Đăng Thịnh, 6A2, TH Thực nghiệm SP. Q.5; **Cần Thơ:** Nguyễn Minh Luân, 8A, THCS Nguyễn Việt Hồng, Tp. Cần Thơ.

VIỆT HẢI

Bài T2/294. Tính giá trị biểu thức

$$\frac{a+1}{\sqrt{a^4+a+1}-a^2}$$

trong đó a là nghiệm dương của phương trình

$$4x^2 + \sqrt{2}x - \sqrt{2} = 0$$

Lời giải. (của Hoàng Tuấn Dũng, 8A7, THCS Phan Chu Trinh, Buôn Ma Thuột, Đắk Lắk).

Phương trình $4x^2 + \sqrt{2}x - \sqrt{2} = 0$ có hai nghiệm trái dấu nên ta có

$$4a^2 + \sqrt{2}a - \sqrt{2} = 0 \quad (1) \quad (a > 0)$$

$$\text{Từ (1) dễ thấy } a^2 = \frac{1-a}{2\sqrt{2}} \text{ và } a^4 = \frac{1-2a+a^2}{8}$$

Gọi biểu thức cần tính là S ta có

$$\begin{aligned} S &= \frac{a+1}{\sqrt{a^4+a+1}-a^2} = \sqrt{a^4+a+1} + a^2 \\ &= \sqrt{\frac{1-2a+a^2}{8} + a + 1} + \frac{1-a}{2\sqrt{2}} \\ &= \frac{a+3}{2\sqrt{2}} + \frac{1-a}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

Nhận xét. Có nhiều bạn giải được bài này. Các bạn sau đây có lời giải tốt: **Bắc Giang:** Phan Tuấn Anh, 8A, THCS Đức Giang, Yên Dũng; **Phú Thọ:** Vũ Minh Hằng, 9A, THCS Giấy, Phong Châu, Phú Ninh; **Vĩnh Phúc:** Phạm Huy, Hoàng Thị Minh Huệ, 7C, THCS Tam Dương, Tam Dương; **Hải Phòng:** Phạm Anh Minh, Trần Xuân Dũng, 9A, THPT NK Trần Phú; **Hải Dương:** Lê Đình Huy, 9A, THCS Nguyễn Trãi, Nam Sách; **Cần Thơ:** Nguyễn Minh Luân, 8A, THCS Nguyễn Việt Hồng; **Hà Tây:** Khuất Văn Sơn, 9A, THCS Thạch Thất; **Thừa Thiên - Huế:** Hồ Vũ Ngọc Phương, 9/4, THCS Nguyễn Tri Phương, Huế; **Bạc Liêu:** Nguyễn Văn Tuấn, 9A1, THCS CL Hộ Phòng, Giá Rai.

TỔ NGUYỄN

GIẢI BÀI KÌ TRƯỚC

Bài T3/294. Gọi x là số lớn nhất trong ba số thực dương x, y, z . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\frac{x}{y} + \sqrt{1 + \frac{y}{z}} + \sqrt[3]{1 + \frac{z}{x}}$

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức Cô-si cho các số trong căn, ta có :

$$\begin{aligned} A &= \frac{x}{y} + \sqrt{1 + \frac{y}{z}} + \sqrt[3]{1 + \frac{z}{x}} \geq \\ &\geq \frac{x}{y} + \sqrt{2} \sqrt[4]{\frac{y}{z}} + \sqrt[3]{2} \sqrt[6]{\frac{z}{x}} = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{x}{y} + 4 \sqrt[4]{\frac{y}{z}} + 6 \sqrt[6]{\frac{z}{x}} \right) + \left(1 - \frac{1}{2\sqrt{2}} \right) \frac{x}{y} + \\ &\quad + \left(\sqrt[3]{2} - \frac{6}{2\sqrt{2}} \right) \sqrt[6]{\frac{z}{x}} \quad (1) \end{aligned}$$

Sử dụng BĐT Cô-si cho 11 số, ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{x}{y} + 4 \sqrt[4]{\frac{y}{z}} + 6 \sqrt[6]{\frac{z}{x}} \right) &\geq \frac{11}{2\sqrt{2}} \sqrt[11]{\frac{x}{y} \frac{y}{z} \frac{z}{x}} \\ &= \frac{11}{2\sqrt{2}} \quad (2) \end{aligned}$$

mặt khác theo giả thiết đã cho $x = \max\{x, y, z\}$,

cho nên $\frac{x}{y} \geq 1 \geq \frac{z}{x}$ và vì $-\frac{1}{2\sqrt{2}} > 0 >$

$\sqrt[3]{2} - \frac{6}{2\sqrt{2}}$ nên từ (1), (2) ta có :

$$\begin{aligned} A &\geq \frac{11}{2\sqrt{2}} + \left(1 - \frac{1}{2\sqrt{2}} \right) + \left(\sqrt[3]{2} - \frac{6}{2\sqrt{2}} \right) = \\ &= 1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{2} \end{aligned}$$

Đẳng thức chỉ xảy ra khi $x = y = z$. Vậy giá trị nhỏ nhất của A là $1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{2}$ khi $x = y = z$

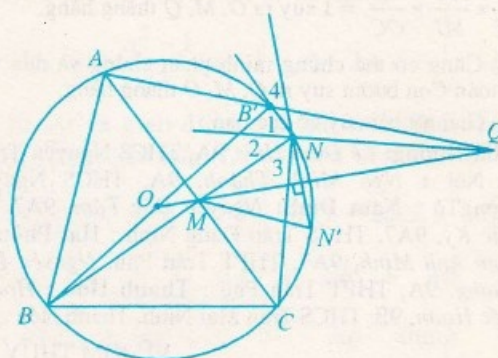
Nhận xét. Các bạn sau đây gửi lời giải có đáp số đúng : **Đắc Lắc :** Hoàng Tuấn Dũng, 8A7, THCS Phan Chu Trinh, Buôn Ma Thuột ; **Hà Tĩnh:** Trần Minh Trọng, 9C, THCS Trung Lương, Hồng Lĩnh ; **Quảng Trị:** Phan Hoàng Phương Trung, 6/2 THCS Nguyễn Trãi, Đăng Hà, Phạm Hoàng Thường, 9B, THCS Triệu Đông, Triệu Phong ; **Cần Thơ:** Nguyễn Minh Luân, 8A, THCS Nguyễn Việt Hồng, Tp. Cần Thơ ; **Nam Định:** Vũ Khắc Kỳ và Nguyễn Đức Tâm, 9A7, THCS Trần Đăng Ninh, Tp. Nam Định ; **Bắc Giang :** Phan Tuấn Anh, 8A, THCS Đức Giang, Yên Dũng ; **Vĩnh Phúc:** Nguyễn Phú Cường, 9B, THCS Yên Lạc.

VŨ ĐÌNH HÒA

Bài T4/294. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O . Gọi M là điểm nào đó trên cạnh AC (M khác A, C). Đường thẳng BM cắt đường tròn lần nữa tại N . Đường thẳng qua A vuông góc với AB và đường thẳng qua N vuông góc với NC cắt nhau tại điểm Q . Chứng minh rằng đường thẳng QM luôn đi qua một điểm cố định khi M di chuyển trên cạnh AC .

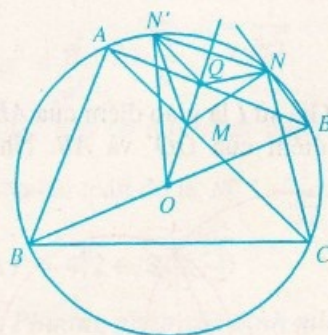
Lời giải. 1. Khi Q nằm ngoài đường tròn (Hình 1). AQ cắt đường tròn ở B' và ta có BB' là đường kính. Ta có $\widehat{B'NB} = \widehat{N_1} + \widehat{N_2} = 90^\circ$. Mà $\widehat{N_3} + \widehat{N_2} = 90^\circ$ nên $\widehat{B'NC} + \widehat{N_2} = 180^\circ$.

Mặt khác do tứ giác $AB'NC$ nội tiếp nên $\widehat{B'AC} + \widehat{B'NC} = 180^\circ$. Vậy $\widehat{B'AM} = \widehat{N_2}$ (1)



Hình 1

Lấy N' đối xứng với N qua MQ có ngay $\widehat{MN'Q} = \widehat{MNQ}$ mà $\widehat{MNQ} + \widehat{N_2} = 180^\circ$. Suy ra $\widehat{MN'Q} + \widehat{N_2} = 180^\circ$ (2)



Hình 2

Từ (1) và (2) ta có $\widehat{MAQ} + \widehat{MN'Q} = 180^\circ$.

Chúng ta tứ giác $AMN'Q$ nội tiếp

GIẢI BÀI KÌ TRƯỚC

Suy ra $\widehat{N'AQ} = \widehat{N'MQ} = \widehat{QMN}$ (tính chất đối xứng). Mặt khác $\widehat{QMN} = \widehat{N}_4$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc) nên $\widehat{B'AN'} = \widehat{N}_4$. Suy ra $AB'NN'$ là tứ giác nội tiếp. Vậy N' nằm trên đường tròn (ABC) và NN' là dây cung. Mà $MQ \perp NN'$ nên đường thẳng MQ đi qua tâm O cố định.

2. Khi Q nằm trong đường tròn (hình 2). Chứng minh tương tự trên, chỉ chú ý rằng $\widehat{MAQ} = \widehat{MN'Q}$ (do cùng bằng $\widehat{CNB'}$) và suy ra $AMQN'$ nội tiếp.

Nhận xét.

1) Bài này có thể dùng định lý Ménélaux đảo để từ $\frac{IQ}{QF} \times \frac{MC}{MI} \times \frac{O}{OC} = 1$ suy ra O, M, Q thẳng hàng.

2) Cũng có thể chứng minh phản chứng và dựa vào bài toán Con bướm suy ra Q, M, O thẳng hàng.

3) Giải tốt bài này có các bạn :

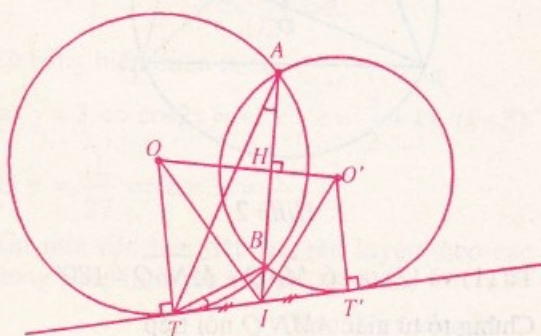
Hải Dương: Lê Đình Huy, 9A, THCS Nguyễn Trãi ; **Hà Nội :** Ngô Minh Thành, 9A, THCS Nguyễn Trường Tộ ; **Nam Định:** Nguyễn Đức Tâm, 9A7, Vũ Khắc Kỷ, 9A7, THCS Trần Đăng Ninh ; **Hải Phòng :** Phạm Anh Minh, 9A7, THPT Trần Phú, Nguyễn Đức Phương, 9A, THPT Trần Phú ; **Thanh Hóa :** Hoàng Quốc Hoàn, 9B, THCS Trần Mai Ninh, Thanh Hóa...

VŨ KIM THUY

Bài T5/294. Gọi A và B là các giao điểm của hai đường tròn tâm O bán kính R và tâm O' bán kính R' . Tiếp tuyến chung của hai đường tròn này tiếp xúc với đường tròn tâm O và tâm O' lần lượt tại T và T' . Chứng minh rằng điểm B là trọng tâm của tam giác ATT' khi và chỉ khi

$$OO' = \frac{\sqrt{3}}{2}(R + R')$$

Lời giải. Giả sử I là giao điểm của AB và TT' ; H là giao điểm của OO' và AB . Nhận thấy



$$\Delta TBI \sim \Delta ATI, \text{ từ đó: } \frac{TI}{BI} = \frac{AI}{TI} \text{ hay } TI^2 = AI \cdot BI \quad (1)$$

$$\text{Tương tự cũng có } TI^2 = AI \cdot BI \quad (2)$$

$$\text{Từ (1), (2) suy ra } IT = IT' \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \text{Mặt khác } S_{OTI} + S_{O'TI} &= \frac{1}{2}(OT + O'T') \cdot IT \\ &= \frac{1}{2}S_{OOT'T'} \text{ nên } S_{OIO'} = \frac{1}{2}S_{OOT'T'} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } IH \cdot OO' = (R + R') \cdot IT.$$

Từ đó

$$OO' = \frac{\sqrt{3}}{2}(R + R') \Leftrightarrow \frac{IT^2}{IH^2} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{IA \cdot IB}{IH^2} = \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{IH^2 - BH^2}{IH^2} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{BH}{IH} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow BI = \frac{1}{3}AI$$

$$\Leftrightarrow B \text{ là trọng tâm } \Delta ATT' \text{ (đpcm).}$$

Nhận xét. 1) Để chứng minh đường thẳng AB cắt đoạn TT' tại trung điểm của đoạn thẳng đó nhiều bạn sử dụng đến khái niệm phương tích của một điểm đối với một đường tròn. Ta nên sử dụng sự đồng dạng của hai tam giác thì phù hợp với kiến thức toán THCS.

2) Các bạn sau đây có lời giải gọn, sáng sủa, ít kẻ thêm đường phụ :

Phú Thọ : Vũ Minh Hoàng, 9A, THCS Giầy, Phong Châu, Phù Ninh ; **Hải Phòng :** Bùi Tuấn Anh, Trần Xuân Dũng, Phạm Anh Minh, 9A, THCS NK Trần Phú ; **Hải Dương :** Lê Đình Huy, 9A, THCS Nguyễn Trãi, Nam Sách ; **Nam Định :** Phạm Duy Hiến, Vũ Khắc Kỷ, Hoàng Lê Sơn, Nguyễn Đức Tâm, 9A7, THCS Trần Đăng Ninh

HỒ QUANG VINH

Bài T6/294. Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh rằng $C_{2001p^2-1}^{p-1} - 1$ chia hết cho p^4 , trong đó C_n^k là tổ hợp chập k của n .

Lời giải. (của bạn Hoàng Ngọc Minh, 11A1, THPT chuyên Hùng Vương, Phú Thọ)

Ta sẽ chứng minh kết quả tổng quát sau : Nếu p là số nguyên tố lớn hơn 3 thì $C_{mp^k-1}^{p-1} - 1$ chia hết cho p^{k+2} với mọi $m, k \in \mathbb{N}^*$.

Để chứng minh ta sử dụng kết quả sau

Định lý La-grăng : Cho số nguyên tố p . Xét đa thức $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ với $n \in \mathbb{N}^*, a_i \in \mathbb{Z}$.

GIẢI BÀI KÌ TRƯỚC

Giả sử có $n+1$ số nguyên $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+1}$ sao cho $\alpha_i \not\equiv \alpha_j \pmod{p}$ nếu $i \neq j$ và $P(\alpha_i) \equiv 0 \pmod{p} \forall i = 1, 2, \dots, n+1$. Khi đó $a_i \equiv 0 \pmod{p} \forall i = 0, 1, 2, \dots, n$.

Chứng minh bằng quy nạp theo n . Dễ thấy định lý đúng với $n = 1$. Giả sử định lý đúng với mọi đa thức hệ số nguyên với bậc nhỏ hơn n . Ta kí hiệu bậc của $G(x)$ là $\deg G(x)$. Đặt $G(x) = P(x) - a_n(x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_n)$. Khi đó $\deg G < n$ và $G(\alpha_i) \equiv 0 \pmod{p} (\forall i = 1, 2, \dots, n)$ do đó $G(x) \equiv 0 \pmod{p} \Rightarrow G(\alpha_{n+1}) \equiv 0 \pmod{p} \Rightarrow a_n(\alpha_{n+1} - \alpha_1) \dots (\alpha_{n+1} - \alpha_n) \equiv 0 \pmod{p} \Rightarrow a_n \equiv 0 \pmod{p}$

Xét đa thức

$$H(x) = P(x) - a_n x^n = a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0.$$

Ta có $\deg H < n$ và $H(\alpha_i) \equiv 0 \pmod{p} \forall i = 1, 2, \dots, n$. Theo quy nạp $a_0, \dots, a_{n-1} \equiv 0 \pmod{p}$

Trở lại bài toán của ta. Xét đa thức

$$f(x) = (x-1)(x-2)\dots(x-p+1) - x^{p-1} - (p-1)! = a_{p-2} x^{p-2} + \dots + a_1 x.$$

Ta có: $f(i) \equiv 0 \pmod{p} \forall i = 1, 2, \dots, p-1$ (định lý Uyn-xơ và Phéc-ma), do đó (vì $\deg f < p-1$) nên theo định lý La-grăng vừa chứng minh có $a_i \equiv 0 \pmod{p} \forall i = 1, 2, \dots, p-2$.

Lại có $f(p) = a_{p-2} p^{p-2} + \dots + a_1 p = -p^{p-1} \equiv 0 \pmod{p^3}$ do $p > 3$. Mặt khác vì $a_2 : p$ nên $f(p) \equiv a_2 p^2 + a_1 p \equiv a_1 p \pmod{p^3}$ suy ra $a_1 p \equiv 0 \pmod{p^3} \Rightarrow a_1 \equiv 0 \pmod{p^2}$

$$\text{Ta có: } C_{mp^k-1}^{p-1} = \frac{(mp^k - 1) \dots (mp^k - p + 1)}{(p-1)!}$$

Vậy

$$\begin{aligned} (p-1)! \left[C_{mp^k-1}^{p-1} - 1 \right] &= f(mp^k) + (mp^k)^{p-1} \\ &= a_{p-2} (mp^k)^{p-2} + \dots + a_2 (mp^k)^2 + \\ &\quad + a_1 (mp^k) + (mp^k)^{p-1} \end{aligned}$$

chia hết cho p^{k+2} (do $a_1 : p^2$).

Vì $(p-1)!$ và p^{k+2} nguyên tố cùng nhau, thành thử $\left(C_{mp^k-1}^{p-1} - 1 \right) : p^{k+2}$.

Nhận xét. Đây là một bài toán khó nên có ít bạn gửi lời giải đến. Các bạn sau đây có lời giải tốt: **Hà Hữu Cao Trinh**, 11 Toán, THPT Hoàng Văn Thụ, **Hòa Bình**; **Trần Võ Huy**, 11T, PTNK Tp. Hồ Chí Minh, **Nguyễn Thành Nam**, 11T, THPT Nguyễn Trãi, **Hải Dương**; **Nguyễn Hoài Phương**, 10T THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Bình Định**.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T7/294. Dãy số (a_n) ($n = 1, 2, 3, \dots$) được xác định bởi: $a_n = \frac{1}{n^2(n+2)\sqrt{n+1}}$ với mọi $n = 1, 2, 3, \dots$

Chứng minh rằng: $a_1 + a_2 + \dots + a_n < \frac{1}{2\sqrt{2}}$ với mỗi $n = 2, 3, \dots$

Lời giải. Với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$ ta có

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2n\sqrt{n+1}} \cdot \frac{2}{n(n+2)} = \frac{1}{2n\sqrt{n+1}} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \\ &= \frac{1}{2n^2\sqrt{n+1}} - \frac{1}{2n(n+2)\sqrt{n+1}} < \\ &< \frac{1}{2n^2\sqrt{n+1}} - \frac{1}{2(n+1)^2\sqrt{n+2}} \end{aligned}$$

Từ đó: $a_1 + a_2 + \dots + a_n <$

$$\begin{aligned} < \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2 \cdot 4\sqrt{3}} \right) + \left(\frac{1}{2 \cdot 4\sqrt{3}} - \frac{1}{2 \cdot 9\sqrt{4}} \right) + \\ &+ \dots + \left(\frac{1}{2n^2\sqrt{n+1}} - \frac{1}{2(n+1)^2\sqrt{n+2}} \right) = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2(n+1)^2\sqrt{n+2}} < \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Nhận xét. 1) Cách khác: Từ $2n^2 \geq n+1 \Rightarrow a_n \leq \frac{\sqrt{2}}{n(n+1)(n+2)} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right)$ rồi xét tổng $a_1 + a_2 + \dots + a_n$.

Bạn **Nguyễn Ngọc Cường**, 10A1, THPT Phan Bội Châu, Vinh, **Nghệ An** đã giải bài toán tổng quát hơn

với $a_n = \frac{1}{n^m(n+p)\sqrt{n+q}}$, trong đó $1 \leq p \leq m$, suy ra

$$\sum_{i=1}^n a_i < \frac{1}{p(1+q)}$$

2) Các bạn sau có lời giải tốt: **Hòa Bình**: **Hà Hữu Cao Trinh**, 11T, **Nguyễn Lâm Tuyên**, 12T, THPT NK Hoàng Văn Thụ; **Phú Thọ**: **Vũ Minh Hoàng**, 9A, THCS Giầy, Phong Châu, **Lê Việt Hà**, 10A1, Hoàng

GIẢI BÀI KÌ TRƯỚC

Ngọc Minh, 11A1, THPT Hùng Vương; **Vinh Phúc**: Nguyễn Thanh Hải, 10A1, THPT chuyên, Nguyễn Phú Cường, 9B, THCS Yên Lạc; **Nghệ An**: Nguyễn Danh Hào, Nguyễn Thị Nhung, 10A1, Hoàng Thái Hào, 10A2, THPT chuyên Phan Bội Châu; **Bình Định**: Nguyễn Hoài Phương, 10T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Lào Cai**: Hoàng Việt, 10A, THPT Tx. Lào Cai; **Hà Nội**: Ngô Minh Thành, 9A, THCS Nguyễn Trường Tộ, Đống Đa; **Hải Dương**: Phạm Thành Trung, 11T, THPT Nguyễn Trãi, Tp. Hải Dương; **Hải Phòng**: Nguyễn Đức Phương, 9A, THPT NK Trần Phú; **Quảng Ninh**: Đào Anh Minh, 11B1, THPT Uông Bí; **Hà Nam**: Trần Phan Bình, 9B, THCS Trần Phú, Phù Lý; **Quảng Trị**: Hoàng Tiến Trung, 10T, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Quảng Ngãi**: Nguyễn Huy Cung, 12T2, THPT chuyên Lê Khiết; **Tp. Hồ Chí Minh**: Nguyễn Lâm Hưng, 11T, THPT NK ĐHKHTN – ĐHQG.

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T8/294. Tìm giá trị của biểu thức $a(x^2 + y^2) + z^2$ trong đó a là hằng số thực dương và x, y, z là các biến số thỏa mãn điều kiện $xy + yz + zx = 1$.

Lời giải. Với mọi $\alpha \in (0, a)$ ta đều có:

$$\alpha x^2 + \frac{z^2}{2} \geq 2\sqrt{\frac{\alpha}{2}}xz \quad (1)$$

$$\alpha y^2 + \frac{z^2}{2} \geq 2\sqrt{\frac{\alpha}{2}}yz \quad (2)$$

$$\sqrt{\frac{\alpha}{2}}(x^2 + y^2) \geq 2\sqrt{\frac{\alpha}{2}}xy \quad (3)$$

Cộng theo từng vế của (1), (2) và (3) và do $xy + yz + zx = 1$ được

$$\left(\alpha + \sqrt{\frac{\alpha}{2}}\right)(x^2 + y^2) + z^2 \geq 2\sqrt{\frac{\alpha}{2}}$$

$$\text{Chọn } \alpha \text{ sao cho } \alpha + \sqrt{\frac{\alpha}{2}} = a$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{\alpha}{2}} = \frac{-1 + \sqrt{1 + 8a}}{4}, \text{ ta được}$$

$$a(x^2 + y^2) + z^2 \geq \frac{-1 + \sqrt{1 + 8a}}{2}$$

$$\text{Vậy } \min(a(x^2 + y^2) + z^2) = \frac{-1 + \sqrt{1 + 8a}}{2} \text{ khi}$$

$$\begin{cases} \sqrt{\alpha}x = \frac{z}{\sqrt{2}} \\ \sqrt{\alpha}y = \frac{z}{\sqrt{2}} \\ xy + yz + zx = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = \frac{1}{\sqrt[4]{1 + 8a}} \\ z = \frac{-1 + \sqrt{1 + 8a}}{2\sqrt[4]{1 + 8a}} \end{cases}$$

$$\text{hoặc } \begin{cases} x = y = \frac{-1}{\sqrt[4]{1 + 8a}} \\ z = \frac{1 - \sqrt{1 + 8a}}{2\sqrt[4]{1 + 8a}} \end{cases}$$

Nhận xét. Nhiều bạn chỉ nêu 1 bộ (x, y, z) ứng với GTNN của k .

Các bạn sau đây có lời giải đúng:

Tp. Hồ Chí Minh: Nguyễn Anh Thái, 11T–T, THPT Lê Hồng Phong, Nguyễn Khắc Định, 12T, Trần Võ Huy, 11T, THPT NK ĐHQG Tp. HCM; **Vinh Phúc**: Hoàng Long, Nguyễn Thanh Hải, 10A1, Trần Bá Bách, 12A2, THPT chuyên; **Phú Thọ**: Lê Việt Hà, 10A1, Hoàng Ngọc Minh, 11A1, THPT chuyên Hùng Vương; **Hải Dương**: Lê Đình Huy, 9A, THCS Nguyễn Trãi, Nam Sách, Nguyễn Anh Ngọc, 11A1, Phạm Thành Trung, 11T, THPT NK Nguyễn Trãi, Tp. Hải Dương; **Bình Định**: Nguyễn Hoài Phương, 10T, THPT Lê Quý Đôn, Quy Nhơn; **Hòa Bình**: Nguyễn Lâm Tuyền, 12T, THPT chuyên Hoàng Văn Thụ; **Khánh Hòa**: Nguyễn Hoa Cương, 12T, THPT Lê Quý Đôn, Nha Trang; **Nghệ An**: Trần Kiên Trung, 10A1, Toán – Tin, ĐH Vinh; **Bắc Giang**: Nguyễn Tuấn Hương, 12A2, THPT Việt Yên; **Nam Định**: Vũ Khắc Kỳ, Nguyễn Đức Tâm, 9A7, THCS Trần Đăng Ninh.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T9/294. Cho đường tròn tâm O bán kính R và số tự nhiên lẻ n . Tìm vị trí n điểm $A_1, A_2, \dots, A_n$ trên đường tròn sao cho tổng các đoạn thẳng $A_1A_2 + A_2A_3 + \dots + A_{n-1}A_n + A_nA_1$

đạt giá trị lớn nhất

Lời giải. Đặt $\widehat{A_iOA_{i+1}} = x_i \in [0, \pi]$ ($i = 1, 2, \dots, n$), $A_{n+1} \equiv A_1$. Vì n lẻ nên đẳng thức $\widehat{A_iOA_{i+1}} = \pi$ không thể xảy ra với mọi $i = 1, 2, \dots, n$ nên ta có bất đẳng thức.

$$\sum_{1 \leq i \leq n} x_i < n\pi \quad (1)$$

Mặt khác $x_i \equiv (\widehat{OA_i}, \widehat{OA_{i+1}}) \pmod{2\pi} \forall i = 1, 2, \dots, n$.

$$\Rightarrow \sum_{1 \leq i \leq n} x_i \equiv \sum_{1 \leq i \leq n} (\widehat{OA_i}, \widehat{OA_{i+1}}) \pmod{2\pi}$$

$$\Rightarrow \sum_{1 \leq i \leq n} x_i \equiv 0 \pmod{2\pi} \quad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra: $\sum_{1 \leq i \leq n} x_i \leq (n-1)\pi$ (vì n lẻ)

Theo định lí hàm số sin:

GIẢI BÀI KÌ TRƯỚC

$$\sum_{1 \leq i \leq n} A_i A_{i+1} = 2R \sum_{1 \leq i \leq n} \sin \frac{x_i}{2} \leq 2nR \sin \frac{\sum_{1 \leq i \leq n} x_i}{n} \leq 2nR \sin \frac{(n-1)\pi}{2n}$$

$$\left(\text{Chú ý : } 0 < \frac{\sum_{1 \leq i \leq n} x_i}{n} \leq \frac{(n-1)\pi}{2n} < \frac{\pi}{2} \right)$$

Đẳng thức xảy ra

$$\Leftrightarrow x_1 = x_2 = \dots = x_n = \frac{(n-1)\pi}{n}$$

$$\Leftrightarrow \widehat{A_1 O A_2} = \widehat{A_2 O A_3} = \dots = \widehat{A_n O A_1} = \frac{(n-1)\pi}{n}$$

$\Leftrightarrow A_1, A_2, \dots, A_n$ là các đỉnh của n - giác đều nội tiếp đường tròn (O, R) và $A_1 A_2, A_2 A_3, \dots, A_n A_1$ là các đường chéo dài nhất của n - giác đều đó.

Từ đó ta có kết luận cần thiết cho bài toán.

Nhận xét. Bài toán này không khó, tuy nhiên chỉ có 5 bạn có kết quả đúng mà cũng không có bạn nào cho lời giải sáng sủa và chính xác. Nguyên nhân của sự việc này là không ai biết tận dụng khái niệm góc định hướng giữa hai vectơ để làm toán. Như chúng ta đã thấy ở trên,

bất đẳng thức $\sum_{1 \leq i \leq n} x_i \leq (n-1)\pi$ đã được chứng minh rất gọn gàng và sáng sủa nhờ khái niệm góc định hướng giữa hai vectơ.

2) Đa số các bạn giải sai đều kết luận rằng $(A_1 A_2 + A_2 A_3 + \dots + A_n A_1)$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow A_1 A_2 \dots A_n$ là đa giác đều nội tiếp đường tròn (O, R) !

3) Các bạn có kết quả đúng là : **Phú Thọ:** Hoàng Ngọc Minh, 11A1, THPT chuyên Hùng Vương ; **Nghệ An :** Nguyễn Đăng Hào, 10A1, THPT chuyên Phan Bội Châu ; **Hải Dương :** Phạm Thành Trung, 11T, THPT NK Nguyễn Trãi ; **Hòa Bình:** Nguyễn Lâm Tuyền, 12T, Hà Hữu Cao Trình, 11T, THPT Hoàng Văn Thụ.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài T10/294. Cho hình chóp tam giác đều $SABC$ có cạnh đáy $AB = a$ và cạnh bên $SA = b$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm các cạnh AB và SC . Một mặt phẳng thay đổi quay xung quanh MN cắt các cạnh SA và BC theo thứ tự ở P và Q (P, Q không trùng với các đỉnh).

a) Chứng minh rằng $\frac{AP}{BQ} = \frac{b}{a}$

b) Xác định tỉ số $\frac{AP}{AS}$ sao cho thiết diện $MPNQ$ có diện tích nhỏ nhất.

Lời giải. (dựa theo Nguyễn Lâm Tuyền, 12T, THPT chuyên Hoàng Văn Thụ, Hòa Bình)

a) Nếu mặt phẳng thiết diện $MPNQ \parallel SB$ thì hiển nhiên ta

$$\text{có } \frac{AP}{BQ} = \frac{b}{a}.$$

Nếu mặt phẳng $(MPNQ)$ không song song với SB , gọi giao của $(MPNQ)$ và SB là D thì SB giao với MP tại $D \in (NQ)$. Áp dụng định lí Mê-nê-la-uyt vào hai cặp tam giác và cát tuyến :

$(\triangle ABS, DPM)$; $(\triangle CBS, DNQ)$ ta được hệ thức :

$$\frac{PS}{PA} \cdot \frac{MA}{MB} \cdot \frac{QB}{QC} \cdot \frac{NC}{NS} = +1 \quad (1)$$

(Định lí Mê-nê-la-uyt trong HHKG áp dụng vào tứ giác ghềnh $SABC$ và mặt phẳng $(PMQN)$).

$$\text{Vì } \frac{MA}{MB} = \frac{NC}{NS} = -1 \text{ nên từ (1) ta được :}$$

$$\frac{AP}{PS} = \frac{BQ}{QC}.$$

Lại vì P và Q nằm trong các cạnh AS và BC nên ta có : $\frac{AP}{PS} = \frac{BQ}{QC} \Rightarrow \frac{AP}{BQ} = \frac{PS}{QC} = \frac{AS}{BC}$.

$$\text{Vậy ta có } \frac{AP}{BQ} = \frac{b}{a} \quad (2)$$

b) Đặt : $S(MPNQ) = S$, $\frac{AP}{AS} = \frac{BQ}{BC} = \lambda$ ($0 < \lambda < 1$), ta được : $\overline{AP} = \lambda \overline{AS}$, $\overline{BQ} = \lambda \overline{BC}$

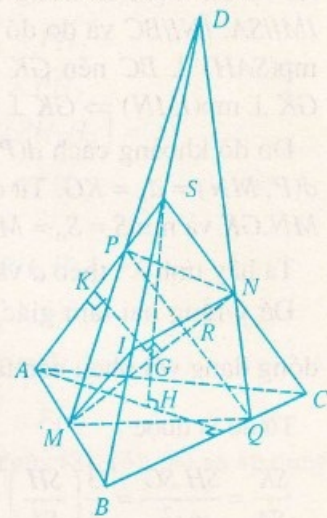
Gọi R là trung điểm của đoạn thẳng PQ , thì :

$$2\overline{MR} = \overline{AP} + \overline{BQ} = \lambda(\overline{AS} + \overline{BC}) = 2\overline{MN} \quad (3)$$

(3) chứng tỏ MN đi qua trung điểm PQ .

$$\text{Từ đó suy ra : } S(MNP) = S(MNQ) = \frac{1}{2} S, \text{ hay } S = 2S(MNP) \quad (4)$$

Bây giờ gọi G là trung điểm của MN , G cũng là trọng tâm của hình chóp $SABC$ và G



GIẢI BÀI KÌ TRƯỚC

thuộc đường cao SH của $SABC$. Dựng $GK \perp AS$ tại K . Gọi I là trung điểm của SB , thế thì $IM \parallel SA$, $IN \parallel BC$ và do đó $GK \perp IM$. Mặt khác $mp(SAH) \perp BC$ nên $GK \perp IN$. Từ đó suy ra $GK \perp mp(IMN) \Rightarrow GK \perp MN$.

Do đó khoảng cách $d(P, MN) \geq d_0 = KG$ và $d(P, MN) = d_0 = KG$. Từ đó và (4) suy ra : $S \geq MN.GK$ và $\min S = S_0 = MN.GK$.

Ta hãy tính λ theo a và b ứng với S_0 .

Để ý rằng hai tam giác vuông KSG và HSA đồng dạng với nhau nên ta có : $\frac{SK}{SH} = \frac{SG}{SA}$.

Từ đó ta được :

$$\frac{SK}{SA} = \frac{SH.SG}{SA^2} = \frac{3\left(\frac{SH}{SA}\right)^2}{4} = \frac{3b^2 - a^2}{4b^2} \quad (5)$$

$$(\text{vì } SH^2 = SA^2 - AH^2 = b^2 - \frac{a^2}{3}).$$

$$\text{Suy ra : } \frac{AP}{AS} = \frac{AK}{AS} = 1 - \frac{KS}{AS} = \frac{a^2 + b^2}{4b^2}$$

Khi $P = K$ được xác định bởi hệ thức (5) thì S đạt giá trị nhỏ nhất, lúc đó :

$$\min S = \frac{a}{8b} \sqrt{(a^2 + b^2)(3b^2 - a^2)}$$

Nhận xét. 1) Nói chung các bạn vận dụng kiến thức về hình học không gian (phần quan hệ song song và vuông góc của đường thẳng và mặt phẳng) chưa thật nhuần nhuyễn, trí tưởng tượng không gian còn bị hạn chế. Điều đó sẽ ảnh hưởng đến kết quả môn hình học họa hình và vẽ kĩ thuật khi các bạn vào học ở các trường đại học kĩ thuật, xây dựng và kiến trúc sau này.

2) Một số bạn sử dụng vectơ, cả tích vectơ (tích có hướng) nữa để giải bài toán này, nhưng lời giải còn dài, không gọn. Ngoài bạn Lâm Tuyền, hai bạn sau đây có lời giải tốt :

Hoàng Ngọc Minh, 11A1, THPT chuyên Hùng Vương, **Phú Thọ** ; *Hà Hữu Cao Trinh*, 11 Toán, THPT Hoàng Văn Thụ, **Hòa Bình**.

Chỉ có hai bạn *Hoàng Ngọc Minh* và *Lê Cường Thịnh*, 11A1, THPT chuyên Hùng Vương, **Phú Thọ** đề cập đến và tính được giá trị nhỏ nhất $S_{\min}$ của diện tích thiết diện $MPNQ$ như đã nêu trên.

NGUYỄN ĐĂNG PHẤT

Bài L1/294. Cho đoạn mạch RLC mắc nối tiếp. Đặt vào hai đầu của nó hiệu điện thế xoay chiều $u = U\sqrt{2} \sin \omega t$, trong đó U không đổi

còn ω có thể thay đổi. Khi $\omega = \omega_1$ và $\omega = \omega_2 < \omega_1$ thì các dòng điện tương ứng đi trong mạch là i_1 và i_2 có cùng cường độ hiệu dụng ($I_1 = I_2$) và i_1 lệch pha với i_2 một góc 2α .

1) Tìm $\omega = \omega_3$ (theo ω_1 và ω_2) để cường độ dòng điện hiệu dụng qua mạch là cực đại ($I_3 = I_{\max}$)

2) Tính L và C theo R , α , ω_1 , ω_2 và theo $R = 300\Omega$, $\omega_1 = 200\pi \text{ rad/s}$, $\omega_2 = 50\pi \text{ rad/s}$, $\alpha = \pi/4$.

Lời giải. 1) Từ $I_1 = I_2$ suy ra $Z_1 = Z_2 \Rightarrow \omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C} = \pm \left(\omega_2 L - \frac{1}{\omega_2 C} \right)$. Vì $\omega_2 \neq \omega_1$

nên ta có $\omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C} = -\omega_2 L + \frac{1}{\omega_2 C}$ (1) suy

ra $\omega_1 \omega_2 = \frac{1}{LC}$ (2). Khi $I_3 = I_{\max}$ trong mạch có

cộng hưởng điện, vì vậy ta có : $\omega_3 L = \frac{1}{\omega_2 C} \Rightarrow$

$\omega_3^2 = \frac{1}{LC}$ (3). Từ (2) và (3) tìm được :

$$\omega_3 = \sqrt{\omega_1 \omega_2}$$

2) i_1 trễ pha hơn u một góc φ_1 , xác định bởi

$$\tan \varphi_1 = \frac{\omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C}}{R} \quad (4). \text{ Theo trên } i_2 \text{ sớm pha so}$$

với u một góc φ_2 , mà $\tan \varphi_2 = \frac{\frac{1}{\omega_2 C} - \omega_2 L}{R}$, và

hơn nữa, theo trên, $\tan \varphi_1 = \tan \varphi_2 \Leftrightarrow \varphi_1 = \varphi_2$. Như vậy i_2 sớm pha so với i_1 một góc $\varphi_1 + \varphi_2 = 2\varphi_1 = 2\alpha$, suy ra $\varphi_1 = \varphi_2 = \alpha$. Từ đó và (2), (4) rút

$$\text{ra : } L = \frac{R \tan \alpha}{\omega_1 - \omega_2} \quad \text{và } C = \frac{\omega_1 - \omega_2}{R \omega_1 \omega_2 \tan \alpha}$$

$$\text{Thay số ta được : } L = \frac{2}{\pi} \text{ (H)} \quad \text{và } C = \frac{10^{-4}}{2\pi} \text{ (F)}$$

Nhận xét. Các bạn có lời giải đúng :

Thanh Hóa : *Lê Văn Dương*, 12A1, THPT Hậu Lộc I ; **Đông Nai :** *Nguyễn Kim Huy*, 12 Lí 1, THPT chuyên Lương Thế Vinh, Biên Hòa; **Nghệ An :** *Trần Đình Trung*, 11A Tin, PTCT ĐH Vinh; *Hồ Quốc Huy*, *Lê Mạnh Cường*, *Trần Quang Vũ*, 11A7, THPT chuyên

GIẢI BÀI KÌ TRƯỚC

Phan Bội Châu, Vinh ; Hà Tĩnh: Nguyễn Xuân Đức, Lê Hữu Hà, 11 Lí, THPT NK Hà Tĩnh

MAI ANH

L2/294. Một người nhìn một vật ở phía sau người đó một khoảng cách $d = 5\text{m}$ qua kính mắt. Khi đó người ấy trông thấy 2 ảnh của vật : một ở khoảng cách $d_1 = 5\text{m}$, một ở khoảng cách $d_2 = 5/7\text{m}$. Quay mặt về phía vật người ấy nhìn thấy qua kính mắt ảnh của nó ở khoảng cách $d_3 = 2,5\text{m}$.

Hãy xác định chiết suất của thủy tinh làm thấu kính của kính mắt.

Hướng dẫn giải. Khi quay mặt về phía vật người ấy nhìn thấy ảnh ảo của nó. Ta có :

$$\frac{1}{d} - \frac{1}{d_3} = D \quad (1), \text{ với } D \text{ là độ tụ của thấu kính}$$

Khi quay lưng lại vật, một ảnh của vật nhìn thấy được là do phản xạ trên mặt kính hướng về phía người, còn ảnh kia là do phản xạ trên mặt thứ hai của kính. Với ảnh thứ hai, các tia sáng phải đi xuyên qua thấu kính, phản xạ trên mặt gương và sau đó lại đi qua thấu kính lần nữa ; có nghĩa là ảnh này được tạo bởi hệ ghép sát "thấu kính +

gương" có độ tụ : $D' = 2D + \frac{2}{R}$ với R là bán kính của mặt thứ hai của kính. Giả thiết rằng ảnh thu được do phản xạ từ mặt trước của kính nằm ở khoảng cách $d_1 = 5\text{m}$, khi ấy mặt này là mặt phẳng vì $d = 5\text{m}$. Lúc này đối với ảnh thứ hai ta có : $\frac{1}{d} - \frac{1}{d_2} = D' = 2D + \frac{2}{R} \quad (2)$ với

$$D = (n-1) \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r} \right) = \frac{(n-1)}{R} \quad (3) \text{ (mặt trước là}$$

mặt phẳng nên $\frac{1}{r} = 0$). Từ (1), (2), (3), thay số

$$(d=5\text{m}; d_2 = \frac{5}{7}\text{m}; d_3 = 2,5\text{m}, \text{ ta được } n = 1,5).$$

Nếu giả thiết là sau khi phản xạ trên mặt trước của kính ảnh nằm ở khoảng cách $\frac{5}{7}\text{m}$, thì tính toán tương tự ta lại tìm được $n = 0,75$: vô lí. Vậy $n = 1,5$.

Nhận xét. Các bạn có lời giải đầy đủ và đúng :

Vĩnh Phúc : Kiều Ngọc Thanh, 11B3, THPT chuyên Vĩnh Phúc ; **Nghệ An :** Nguyễn Thanh Tùng, 12A3, THPT Phan Bội Châu, Vinh.

MAI ANH

BẠN CÓ BIẾT ?

TÍNH SỐ NĂM TĂNG GẤP ĐÔI GDP

Một nhà kinh tế đã đưa ra công thức để tính số năm tăng gấp đôi tổng sản phẩm quốc nội (GDP) của một quốc gia như sau :

$$n = \frac{72}{g}$$

trong đó :

- $g\%$ là tốc độ tăng trưởng bình quân GDP trong giai đoạn xem xét,

- n là số năm để tăng gấp đôi GDP.

GDP (Gross Domestic Product) là tổng giá trị thị trường tất cả các hàng hóa và dịch vụ cuối cùng đã được sản xuất ra trong nước một năm.

Chẳng hạn, một quốc gia có tốc độ tăng trưởng GDP bình quân là 9% năm thì

$$n = \frac{72}{9} = 8 \text{ (năm)}$$

Như vậy, sau 8 năm, GDP của quốc gia này sẽ tăng gấp đôi.

Giả sử năm 1992 một nước có chiến lược tăng gấp đôi GDP từ 200 USD/người lên 400 USD/người. Dự kiến tốc độ tăng trưởng bình quân là 7% /năm thì

$$n = \frac{72}{7} \approx 10 \text{ (năm)},$$

tức là đến năm 2002 nước đó sẽ đạt bình quân 400 USD/người.

Công thức tính toán trên trong lĩnh vực kinh tế thật đơn giản, mang tính chất ước lượng, tuy nhiên trong thực tiễn sự tăng trưởng kinh tế diễn ra không đơn giản chút nào !

NGUYỄN THUỜNG LẠNG
(GV ĐH Kinh tế Quốc dân)



VỀ CƠ SỞ của phương pháp NGHIỆM KÉP

ĐẶNG HÙNG THẮNG
(ĐHKHTN – ĐHQG Hà Nội)

Theo quy định của Bộ GD và ĐT kể từ năm học 2000–2001 không được dùng phương pháp nghiệm kép để giải quyết các bài toán về tiếp tuyến và sự tiếp xúc của hai đồ thị vì nó "thiếu cơ sở lý thuyết". Thực tế cho thấy nhiều giáo viên và học sinh rất lúng túng khi không được dùng phương pháp nghiệm kép, trong khi phương pháp này thực sự có hiệu quả.

Trước hết hãy nhắc lại khái niệm sự tiếp xúc của đồ thị hai hàm số và khái niệm nghiệm bội của đa thức.

Định nghĩa.

1. Đồ thị hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ được gọi là tiếp xúc với nhau tại điểm có hoành độ

$$x = x_0 \text{ nếu } \begin{cases} f(x_0) = g(x_0) \\ f'(x_0) = g'(x_0) \end{cases} \quad (1)$$

2. Giả sử $F(x)$ là một đa thức. Số x_0 được gọi là nghiệm bội của $F(x)$ nếu $F(x)$ chia hết cho $(x - x_0)^2$ tức là $F(x)$ có dạng

$$F(x) = (x - x_0)^2 Q(x)$$

ở đó $Q(x)$ là một đa thức. Trong trường hợp $F(x)$ là một tam thức bậc 2, nghiệm bội được gọi là nghiệm kép.

Chú ý rằng chúng ta chỉ có khái niệm nghiệm bội đối với đa thức.

Định lý sau đây sẽ chứng tỏ rằng phương pháp nghiệm kép là có cơ sở toán học khi chúng ta xét sự tiếp xúc của hai đồ thị các hàm phân thức hữu tỉ.

Định lý. Cho hai phân thức hữu tỉ

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad g(x) = \frac{U(x)}{V(x)}.$$

Khi đó đồ thị hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ tiếp xúc với nhau tại điểm có hoành độ $x = x_0$ khi và chỉ khi phương trình

$$P(x)V(x) - Q(x)U(x) = 0$$

có nghiệm bội $x = x_0$ với $Q(x_0) \neq 0$, $V(x_0) \neq 0$ (tức là x_0 thuộc miền xác định của $f(x)$ và $g(x)$).

Vì đa thức cũng là một phân thức hữu tỉ (khi đa thức ở mẫu thức là đa thức hằng số) nên ta có

các hệ quả sau thường dùng trong chương trình phổ thông trung học.

Hệ quả.

HQ1. Đường thẳng $y = kx + h$ là tiếp tuyến với đồ thị hàm đa thức $y = P(x)$ khi và chỉ khi phương trình $P(x) - (kx + h) = 0$ có nghiệm bội.

HQ2. Đường thẳng $y = kx + h$ là tiếp tuyến với đồ thị của phân thức hữu tỉ $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$ khi và

chỉ khi phương trình $P(x) - Q(x)(kx + h) = 0$ có nghiệm bội $x = x_0$ với $Q(x_0) \neq 0$.

Nói riêng :

HQ3. Đường thẳng $y = kx + h$ là tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + c}{mx + n}$ khi và chỉ khi phương trình bậc hai

$$ax^2 + bx + c - (mx + n)(kx + h) = 0$$

có nghiệm kép ($\Delta = 0$).

HQ4. Đường thẳng $y = kx + h$ là tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = \frac{ax + b}{mx + n}$ khi và chỉ khi phương trình bậc hai

$$ax + b - (mx + n)(kx + h) = 0$$

có nghiệm kép ($\Delta = 0$).

Để chứng minh định lý ta cần đến bổ đề sau khá quen thuộc và dễ dàng chứng minh.

Bổ đề. Đa thức $F(x)$ có nghiệm bội $x = x_0$ khi và chỉ khi $F(x_0) = F'(x_0) = 0$.

Quả vậy nếu x_0 là nghiệm bội của phương trình $F(x) = 0$ thì do định nghĩa $F(x) = (x - x_0)^2 \times Q(x)$. Suy ra $F'(x) = (x - x_0)^2 Q'(x) + 2(x - x_0)Q(x) \Rightarrow F(x_0) = F'(x_0) = 0$. Đảo lại giả sử $F(x_0) = F'(x_0) = 0$. Vì $F(x_0) = 0 \Rightarrow F(x) = (x - x_0)G(x) \Rightarrow F'(x) = (x - x_0)G'(x) + G(x) \Rightarrow G(x_0) = F'(x_0) = 0 \Rightarrow G(x) = (x - x_0)Q(x)$. Vậy $F(x) = (x - x_0)^2 Q(x)$ tức là $F(x)$ có nghiệm bội $x = x_0$.

Chứng minh định lý. Giả sử đồ thị các hàm số $f(x)$ và $g(x)$ tiếp xúc nhau tại điểm có hoành độ $x = x_0$. Khi đó từ (1) có

$$\frac{P(x_0)}{Q(x_0)} = \frac{U(x_0)}{V(x_0)} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} & \frac{P'(x_0)Q(x_0) - P(x_0)Q'(x_0)}{Q^2(x_0)} \\ &= \frac{U'(x_0)V(x_0) - U(x_0)V'(x_0)}{V^2(x_0)} \quad (3) \end{aligned}$$

Đặt $q = Q(x_0) \neq 0$, $v = V(x_0) \neq 0$, $p = P(x_0)$, $u = U(x_0)$, $p' = P'(x_0)$, $q' = Q'(x_0)$.

Từ $qv \neq 0$ và (2) suy ra

$$P(x_0)V(x_0) = Q(x_0)U(x_0) \text{ hay } qu = pv \quad (4)$$

$$\text{Từ (3) có } (p'q - pq')v^2 = (u'v - uv')q^2 \quad (5)$$

• Nếu $pu \neq 0$, nhân theo từng vế của (4) và (5) được: $(p'q - pq')v^2 qu = (u'v - uv')q^2 pv$
 $\Leftrightarrow (p'v + pv')q^2 vu = (q'u + qu')v^2 pq$

Theo (4) thì $qu.qv = pv.qv \neq 0$ nên suy ra $p'v + pv' = q'u + qu'$ hay

$$\begin{aligned} & P'(x_0)V(x_0) + P(x_0)V'(x_0) = \\ &= Q'(x_0)U(x_0) + Q(x_0)U'(x_0) \quad (6) \end{aligned}$$

• Nếu $pu = 0$ thì từ (2) có $p = u = 0$, thay vào (5) được $p'qv^2 = u'vq^2 \Rightarrow p'v = u'q$. Từ điều này cùng với $p = u = 0$ cũng suy ra (6).

Tóm lại, từ (4), (6) và bỏ đi ta kết luận rằng phương trình $P(x)V(x) - Q(x)U(x) = 0$ có nghiệm bội $x = x_0$.

Đảo lại nếu $x = x_0$ với $Q(x_0)V(x_0) \neq 0$ là nghiệm bội của phương trình $P(x)V(x) - Q(x)U(x) = 0$ thì từ (4) và (6) biến đổi ngược lại ta sẽ suy ra (2) và (3). Theo (1) đồ thị hai hàm số tiếp xúc với nhau tại điểm có hoành độ $x = x_0$.

Chúng tôi cho rằng trong sách giáo khoa nên trình bày định lý nói trên (có thể không chứng minh hoặc chứng minh với chữ nhỏ) để làm cơ sở lý thuyết cho phương pháp nghiệm bội. Từ đó cho phép học sinh được sử dụng phương pháp này khi giải các bài toán về sự tiếp xúc của đồ thị hai hàm phân thức hữu tỉ cũng như bài toán về tiếp tuyến với đồ thị hàm phân thức hữu tỉ.

Nhắn tin

Các bạn đoạt giải của **Cuộc thi Vui hè 2001** và **Cuộc thi giải Toán và Vật Lý trên THPT năm học 2000-2001** hãy tiếp tục gửi địa chỉ mới của mình về Tòa soạn.

THTT

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

BÀI SỐ 52

Problem. Let $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ and $y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_n$ be two non-decreasing sequence of real numbers. A permutation of $y_1, \dots, y_n$ is an arrangement of the terms of this sequence in a particular order. For an arbitrary permutation $y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_n}$ of $y_1, y_2, \dots, y_n$ prove that $x_1 y_{i_1} + x_2 y_{i_2} + \dots + x_n y_{i_n} \leq x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$ and that equality holds if and only if $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ or $y_1 = y_2 = \dots = y_n$.

Solution.

Put $S = x_1 y_{i_1} + x_2 y_{i_2} + \dots + x_n y_{i_n}$.

Suppose that $y_n = y_{i_j}$. In the sum S we interchange y_{i_n} and y_{i_j} . This transform S into

$$S' = x_1 y_{i_1} + x_2 y_{i_2} + \dots + x_j y_{i_n} + \dots + x_n y_n$$

$$\begin{aligned} & \text{We have } S' - S = x_n(y_n - y_{i_n}) + x_j(y_{i_n} - y_n) = \\ &= (x_n - x_j)(y_n - y_{i_n}) \geq 0 \end{aligned}$$

because $x_n \geq x_j$ and $y_n \geq y_{i_n}$. Thus, $S' \geq S$. Next find in S' the summand containing y_{n-1} . Suppose that $y_{n-1} = y_{i_k}$. In the sum S' we interchange $y_{i_{n-1}}$ and y_{i_k} . This transform S' into a new sum S'' . Similarly, it is easy to verify that $S'' \geq S'$. This process can be continued until we obtain the sum $x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$ which is larger than or equal to all previous sums $S, S', S'', \dots$. So we have proved that $S \leq x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$.

It is clear that equality holds if $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ or $y_1 = y_2 = \dots = y_n$.

Từ mới:

decreasing	= giảm
real	= thực (tính từ)
permutation	= phép hoán vị
term	= số hạng
particular	= đặc biệt, riêng (tính từ)
summand	= hạng tử
interchange	= đổi chỗ, thay thế nhau (động từ)
transform	= biến đổi (động từ)
similarly	= một cách tương tự, cũng như vậy (phó từ)
verify	= xác minh, xác nhận (động từ)
process	= quá trình
continue	= tiếp tục (động từ)
previous	= trước (tính từ)

NGÔ VIỆT TRUNG



Cuộc chơi 2002 : AI BIẾT NHIỀU HƠN ?

MỘT SỐ PHÁT MINH TOÁN HỌC

Một số nhà toán học thời xưa đã có một số công trình tiêu biểu mà có bạn đã ghi chép chưa thật đúng hàng ngang ở bảng dưới đây.

Tác giả	Quê hương	Công trình	Năm sinh, mất
Lưu Huy	Hy Lạp	Bảng tính sin. Công thức cộng cung. $\pi = \frac{377}{120}$	476 – khoảng 550
A-ri-ap-ha-ta I (Aryabhata I)	Iran	Giải các hệ phương trình, tìm ra $\pi \approx 3,141$	Thế kỉ III (Sau CN)
Ô-ma Khai-am (Omar Khayam)	Ấn Độ	Bảng tính sin các góc nhọn. $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$. $\pi \approx 3,1416$	Khoảng 276-194 (Trước CN)
Ê-ra-tô-xten (Ératosthène)	Trung Hoa	$\pi \approx \frac{22}{7}$, $\pi \approx \frac{355}{113}$. Ma phương bậc 3	Khoảng 1048 – 1131
Ptô-lê-mê C. Ptolémée C.	Trung Hoa	Phân loại, giải phương trình bậc 2, bậc 3 với ý nghĩa hình học	430 – 501
Tổ Xung Chi Zu Chong Zhi	Hy Lạp	Phương pháp tìm số nguyên tố	Khoảng 100 – 178

Năm bạn được nhận tặng phẩm là những bạn điều chỉnh chính xác bảng thống kê, đồng thời trình bày thêm về các nhà toán học đó.

CLB

Giải đáp bài :

CÁC PHÉP TÍNH XUẤT HIỆN LÚC NÀO ?

Kí hiệu	Năm xuất hiện	Người đề xuất	Quê hương
+, -	1489	Uyt-man J. (Johannes Widman)	Sec
$\times$	1631	Ô-trit W. (William Oughtred)	Anh
:	1633	Giôn-xơn (Johnson)	?
$\div$	1630	Pen J. (John Pell)	Anh
=	1557	Ri-cô-đơ R. (Robert Recorde)	Anh
x^2, x^3	1637	Đê-Các R. (René Descartes)	Pháp

Việc đề xuất kí hiệu các phép tính đã đóng góp một phần không nhỏ vào việc phát triển ngành toán và nhiều ngành khoa học khác. Những bạn sau đã chỉnh chính xác bảng thống kê như trên và có thêm lời bình khá hay : Phạm Việt Đức, 9A, 24

THCS Việt Nam - Angiêri, phường Thanh Xuân Bắc, Nguyễn Duy Hà, 10A2, THPT Nguyễn Tất Thành, Xuân Thủy, Cầu Giấy, Hà Nội ; Đường Hải Long, 8B, THPT NK Trần Phú, Hải Phòng ; Nguyễn Văn Huy, 10A1, THPT Bình Giang, Hải Dương ; Nguyễn Thị Phương Yến và Mai Khánh Vân, 10T3, THPT chuyên Lê Hồng Phong, Tp. Nam Định ; Lê Thị Kim Dung, 10A1, THPT Phan Bội Châu, Vinh, Nghệ An.

NGỌC HIỂN

Giải đáp bài :

PHƯƠNG TRÌNH BẬC 4 CÓ 5 NGHIỆM

Tất cả các bạn đều chỉ ra $x = 0$

không phải là

ng nghiệm của phương trình đã cho.

Nó là nghiệm ngoại lai xuất hiện khi thay giá trị của ẩn phụ t vào PT (1).

Lời giải đúng là thay giá trị $t = -x$; $t = 2x$ vào PT (2) : $x^2 - 6x - 9 = 0$, sẽ suy ra PT đã cho có đúng 4 nghiệm (không có nghiệm $x = 0$).

Các bạn sau có lời phân tích tốt và gửi bài sớm về TS : Hoàng Bắc, Trung tâm GDTX Đồng Hỷ,





Kết quả :

ĐÓN XUÂN GIẢI "PHƯƠNG TRÌNH CHỮ"

a) (Theo *Chu Văn Đàm*, 9A, THCS Yên Phú, Yên Phong, Bắc Ninh, *Nguyễn Duy Liên Phương* 238/15/9 Thủ Khoa Huân, Tp. Phan Thiết, Bình Thuận)

Viết lại "Phương trình chữ" dưới dạng

$$TOAN + TUOI = 2002 + HOC + TRE \quad (1)$$

Ta có $2002 + HOC + TRE < 2002 + 999 + 999 = 4000$ suy ra $T = 1$. Thay $T = 1$ vào PT (1) và giản ước được

$$100(U + O - H) + 10(A - R) + (N + I - C - E) = 102 \quad (2)$$

Vì mỗi chữ cái khác nhau được thay bởi các số khác nhau nên

$$-9 \leq A - R \leq 9; -16 \leq N + I - C - E \leq 16.$$

Từ đó và (2) suy ra $0 \leq O + U - H \leq 2$. Xét các trường hợp $O + U - H = 0$; $O + U - H = 1$; $O + U - H = 2$, bạn Phương tìm được 220 đẳng thức đúng, bạn Đàm tìm được 168 đẳng thức đúng, chẳng hạn

$$1268 - 427 = 2002 - 1320 + 159$$

$$1286 - 425 = 2002 - 1320 + 179$$

$$1280 - 623 = 2002 - 1524 + 179, \dots$$

$$b) NHAM + TOAN = TET + NGO + HOC + TRE + 2002 + x$$

Câu này cũng khá nhiều đáp số. Bạn Phương tìm được 80 nghiệm trọng hai trường hợp $T = 2$ và $N = 1$; $N = 1$ và $T = 2$. (Sau khi đã lập luận được $N + T \geq 3$) Chẳng hạn

$$272 - 1350 + 184 + 2002 - 2451 + 346 + 297 = -700 \quad (x = 700)$$

$$262 - 1947 + 103 + 2002 - 2341 + 935 + 286 = -700 \dots$$

Bạn *Nguyễn Thế Kiệt*, 10A2, THPT Trần Quốc Tuấn, Quảng Ngãi cho đẳng thức

$$191 - 2403 + 286 + 2002 - 1602 + 467 + 159 = -900 \quad (x = 900)$$

Còn đẳng thức $161 - 2594 + 280 + 2002 - 1092 + 507 + 136 = -600 \quad (x = 600)$ là của bạn *Nguyễn Văn Chạy*, 8A1, THCS Nguyễn Thượng Hiền, Thống Nhất, Đồng Nai.

Nhận xét. Ngoài các bạn đã nêu tên ở trên, các bạn sau cũng cho nhiều đẳng thức số đúng, trình bày công phu : *Nguyễn Sao Mai*, 10 Tin, THPT chuyên Lam Sơn, Thanh Hóa ; *Vũ Hữu Thắng*, 11 Lí, THPT Lương Thế Vinh, Đồng Nai; *Nguyễn Thị Thanh Thảo*, 10A4, THPT Ngô Gia Tự, Cam Ranh, Khánh Hòa ; *Trịnh Thị Phương*, 12H1, THPT chuyên Nguyễn Huệ, Hà Đông, Hà Tây. Đặc biệt hai bạn *Nguyễn Thị Thúy Hằng* và *Trần Đức Anh*, 10 Hóa, THPT NK Hà Tĩnh, Hà Tĩnh đã viết lời giải câu a bằng ngôn ngữ PASCAL.

NGỌC HÀ

BAO NHIÊU HỌC SINH ?

Một trường học có 2392 học sinh. Trong đó có một số đạt giải trong kì thi quốc tế, một số đạt giải quốc gia, một số đạt giải của tỉnh và một số đạt giải của trường (nhưng không có học sinh nào đạt hai giải). Biết rằng số các học sinh đạt mỗi giải nói trên cũng là các chữ số của số học sinh còn lại ; và số học sinh đạt giải quốc tế ít hơn số học sinh đạt giải quốc gia, số học sinh đạt giải quốc gia ít hơn số học sinh đạt giải của tỉnh, và số học sinh đạt giải của tỉnh ít hơn số học sinh đạt giải của trường. Bạn hãy cho biết số học sinh đạt mỗi giải nói trên và số học sinh còn lại (không đạt giải).

VŨ HOÀNG THÁI
(Hà Nội)

☞ *Thái Nguyên*; *Trần Văn Hình*, THCS Nam Giang, Nam Trực, Nam Định ; *Nguyễn Lê Minh Hoàng*, 10A2, khối PTCT-T, ĐH Vinh, Nghệ An; *Bùi Hoài Nam*, 10 Lý, THPT NK Hà Tĩnh, Hà Tĩnh; *Trần Phương Hà*, K27C Toán - Tin, ĐHSP Hà Nội 2, Mê Linh, Vĩnh Phúc ; *Trương Thị Thanh Phương*, 11 Lý, THPT chuyên Lê Khiết, Quảng Ngãi ; *Trương Đình Trường*, 10 Toán, THPT NK Hàn Thuyên; Bắc Ninh.

NGỌC HIỂN

NGUY BIỆN

Một "nhà toán học nhí" khoe với bạn một phát minh sau :

Định lí : Nếu $p_1, p_2, \dots, p_n$ là dãy n số nguyên tố đầu tiên trong dãy số tự nhiên thì $p = p_1 p_2 \dots p_n + 1$ là số nguyên tố.

Chứng minh : Ta dùng phương pháp phản chứng. Giả sử p là một hợp số. Khi đó p phải chia hết cho một số nguyên tố nào đó thuộc dãy $p_1, p_2, \dots, p_n$. Gọi p_i là số nguyên tố nhỏ nhất của dãy trên mà p chia hết cho p_i . Ta có $p = a \cdot p_i$. Vì p_i là một thừa số trong tích $p_1 p_2 \dots p_n$ nên $p_1 p_2 \dots p_n = b \cdot p_i$. Ta có $a \cdot p_i = b \cdot p_i + 1$, hay $(a - b)p_i = 1$.

Dễ thấy $b < a$ nên $a - b > 0$.

Từ đó suy ra 1 chia hết cho p_i . Điều này mâu thuẫn, vì p_i là số nguyên tố nên $p_i \geq 2$.

Vậy p không thể là hợp số, có nghĩa p là số nguyên tố.

Bạn có công nhận "phát minh" trên không ?

XUÂN TRUNG

BAN BIÊN TẬP SÁCH TOÁN NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

Ban Toán NXB Giáo dục được thành lập từ năm 1989 trên cơ sở các tổ Toán của các bộ phận trong NXB Giáo dục trước đó. Đến nay ban gồm 11 người, trong đó có 4 tiến sĩ, 1 thạc sĩ và 6 cử nhân. Trưởng ban là TS. Trần Phương Dung, Phó trưởng ban là TS. Ngô Ánh Tuyết. Tất cả các biên tập viên của ban đã từng là giáo viên, cán bộ giảng dạy ở các trường Phổ thông, Cao đẳng và Đại học. Các tiến sĩ và thạc sĩ của ban thường xuyên tham gia các xêmina chuyên ngành. Vì thế, sách của ban làm không những đảm bảo được nội dung khoa học mà còn mang tính sư phạm rất rõ nét.

Nhiệm vụ của ban trước đây là tổ chức và biên tập các sách giáo khoa (SGK), các sách tham khảo (STK) bộ môn Toán cho học sinh, giáo viên, phụ huynh học sinh ở bậc THCS và THPT.

Hiện nay ban Toán đảm nhận việc tổ chức và biên tập các bản thảo SGK, Giáo trình, STK môn Toán - Tin cho tất cả các bậc học từ THCS đến Đại học.

Hàng năm, ban Toán đã biên tập được hàng trăm cuốn SGK, Giáo trình, STK cả tái bản lẫn sách mới. Sách của ban làm đã chiếm được ưu thế trên thị trường và chiếm được lòng tin của

độc giả. Đặc biệt là các bộ sách tham khảo chọn lọc cho học sinh phổ thông đã giúp cho giáo viên, phụ huynh và học sinh định hướng được việc chọn mua STK Toán trong điều kiện thị trường có nhiều loại sách.

Trải qua các đợt làm SGK cải cách Giáo dục, SGK THPT chuyên ban và SGK THPT chỉnh lí hợp nhất, ban Toán NXB Giáo dục đã chứng tỏ năng lực của mình trong công việc làm sách. Ban đã nhận được sự giúp đỡ rất hiệu quả của các tác giả, các vụ chức năng của Bộ Giáo dục và Đào tạo, Viện Khoa học Giáo dục và các nhà giáo.

Hiện nay, ban Toán đang đầu tư công sức để làm bộ SGK Toán 6 mới cho đúng tiến độ và đảm bảo chất lượng. Bên cạnh đó, ban Toán vẫn đang triển khai làm SGK thí điểm các lớp 7, 8, 9, giáo trình cho CĐ, ĐH và các sách tham khảo khác. Ngoài ra, một số biên tập viên của ban còn tham gia biên soạn SGK và STK.

Ban Toán hi vọng sẽ nhận được sự cộng tác của các nhà toán học, nhà sư phạm, các thầy cô giáo Toán và của các bộ phận liên quan trong và ngoài NXB Giáo dục trong cả nước.

Tìm mua tạp chí Toán học và Tuổi trẻ ở đâu ?

Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ đến tay bạn đọc sau ngày 15 hàng tháng theo các con đường : Bưu điện, Công ty phát hành sách và thiết bị trường học, Đại lí sách báo.

Bạn đọc có thể tìm mua THTT ở :

- Hà Nội: 81 Trần Hưng Đạo, 187B Giảng Võ, 25 Hàn Thuyên, 23 Tràng Tiền, 232 Tây Sơn...
- Đà Nẵng: 15 Nguyễn Chí Thanh, ...
- Tp. Hồ Chí Minh: 231 Nguyễn Văn Cừ, Q.5, 240 Trần Bình Trọng, Q.5, ...
- Các hiệu sách lớn ở các địa phương khác

Bạn có thể đặt mua trước cho cả năm hoặc từng quý ở các Bưu điện địa phương. Giá bán lẻ thống nhất trên toàn quốc.

Các đại lí sách báo muốn phát hành tạp chí Toán học và Tuổi trẻ xin liên hệ với :

Trung tâm Phát hành sách Tham Khảo NXB Giáo dục, 187B Giảng Võ, Hà Nội, Điện thoại (04)5141253.

THTT

ISBN : 0866-0853

Chỉ số : 12884

Mã số : 8BT100M2

Chế bản tại Tòa soạn

In tại Nhà máy in Diên Hồng, 187B phố Giảng Võ

In xong và nộp lưu chiểu tháng 4 năm 2002

Giá : 3000đ

Ba nghìn đồng