

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ❖ HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

Toán học & Tuổi trẻ

3

2002

SỐ 297 - NĂM THỨ 39 - TẬP CHÍ RA HÀNG THÁNG

HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM
GẶP GỠ XUÂN NHÂM NGỌ



Ảnh trên:

Các thầy giáo và học sinh
được giải thưởng Lê Văn Thiêm
cùng các nhà toán học.

Ảnh dưới:

Nhóm Toán, Ban biên tập
Chi nhánh NXB Giáo dục tại Đà Nẵng



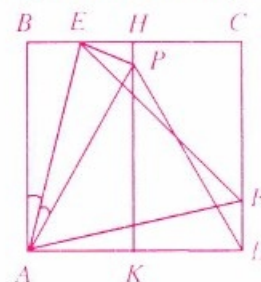
TOÁN HỌC MUÔN MÀU

GẤP GIẤY ĐỂ TẠO ĐA GIÁC ĐỀU

Trong thực tiễn thường gặp trường hợp có một tấm gỗ, tấm tôn, miếng bìa, tờ giấy... hình vuông mà phải xác định một hình đa giác đều bên trong

có diện tích khá lớn nhưng không có dụng cụ đo vẽ kỹ thuật.

Để làm điều đó có thể dùng cách gấp giấy. Từ mảnh giấy hình vuông $ABCD$ tạo thành các tam giác đều APD , AEF , bằng cách gấp giấy như sau (h.1) : Cho A trùng D , B trùng C để có HK , sau đó cho AB trùng với AP với P nằm trên HK để có AE rồi gấp theo AC để có AF .



Hình 1

Dành cho bạn đọc

Từ mảnh giấy hình vuông bạn hãy gấp giấy để tạo thành :

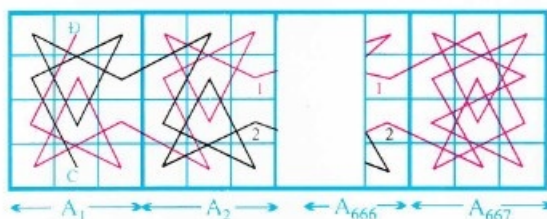
- Hình lục giác đều - Hình ngũ giác đều

sao cho mỗi hình này có 4 đỉnh đều nằm trên cạnh hình vuông.

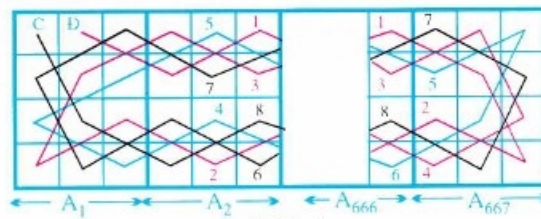
Tặng phẩm dành cho lời giải đầy đủ, giải thích rõ ràng.

Giải đáp bài : ĐƯỜNG ĐI CỦA QUÂN MÃ TRÊN BÀN CỜ

1) Ta chia bàn cờ 4×2001 ô thành các hình chữ nhật $A_1, A_2, \dots, A_{667}$ kích thước 4×3 ô. Có nhiều cách đi quân mã từ ô đầu (Đ) đến ô cuối (C) liên tiếp qua tất cả các ô của bàn cờ, dưới đây chỉ ra 2 cách ở hình 2 và hình 3, trong đó với mỗi đường đi qua các hình chữ nhật ở giữa chỉ ghi hai điểm đầu bởi cùng một số.



Hình 2



Hình 3

2) Kí hiệu các ô ở hàng thứ nhất và thứ tư là ô biên (B), các ô ở hàng thứ hai và thứ ba là ô lõi (L).

Bàn cờ được tô 2 màu : đen (Đ) và trắng (T) sao cho 2 ô kề nhau bất kì không cùng màu.

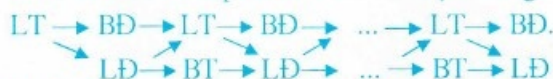
Mỗi bước đi ($\rightarrow$) của quân mã tuân theo các quy tắc sau :

a) $\text{Đ} \rightarrow \text{T}$ hoặc $\text{T} \rightarrow \text{Đ}$ (h.4) ; b) $\text{B} \rightarrow \text{L}$ và $\text{L} \rightarrow \text{B}$ hoặc $\text{L} \rightarrow \text{L}$.

(Chú ý : không có dạng $\text{B} \rightarrow \text{B}$).

Ta sẽ chứng minh rằng : nếu quân mã xuất phát từ ô lõi (L) thì không thể đi hết các ô của bàn cờ

Giả sử có cách đi quân mã liên tiếp qua tất cả các ô của bàn cờ thì phải có điều kiện (*) : số ô T = số ô Đ và số B = số ô L. Nếu xuất phát từ ô LT thì mọi đường đi của quân mã biểu thị bởi sơ đồ sau:



Nếu trong cách đi có ít nhất 1 lần chuyển từ hàng trên của sơ đồ xuống hàng dưới thì số ô L nhiều hơn số ô B, còn nếu chỉ đi theo hàng trên thì không bao giờ đi qua các ô LĐ và BT ; đều trái với điều kiện (*).

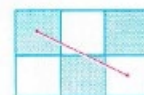
Các bạn sau đã chỉ ra cách đi của quân mã từ ô Đ, được nhận tặng phẩm :

1) Phạm Ngọc Tú, 12E, trường THPT Dân tộc nội trú, Đắk Tô, Kon Tum.

2) Nguyễn Minh Đức, 11A, trường THPT Thanh Chương I, Nghệ An.

3) Nguyễn Thị Chung, đội 7 xã Thanh Ngọc, Thanh Chương, Nghệ An.

PHI PHI



Hình 4

Toán học và Tuổi trẻ

Mathematics and Youth

Năm thứ 39
Số 297 (3-2002)
Tòa soạn : 187B, phố Giảng Võ, Hà Nội
ĐT - Fax : 04.5144272
Email : toanhocct@yahoo.com

TRONG SỐ NÀY

- 2 **Dành cho Trung học cơ sở – For Lower Secondary Schools**
Lê Duy Ninh - Phát triển từ một bài toán hình học
- 4 **Tìm hiểu sâu thêm toán học sơ cấp - Advanced Elementary Mathematics**
Trần Thị Nga - Vài phương pháp giải phương trình hàm
Vũ Đình Hòa, Nguyễn Trọng Tuấn, Nguyễn Anh Quân - Dùng phương pháp phân hoạch tập hợp để giải bài toán số học
- 5 *Hà Huy Khoái* - Giải thưởng Lê Văn Thiêm năm 2001
- 7 **Tiếng Anh qua các bài toán - English through Math Problems**
Ngô Việt Trung - Bài số 51
- 8 **Toán học và đời sống - Math and Life**
Phan Thanh Quang - Bài toán kì không đổi màu
- 9 **Đề thi tuyển sinh lớp 10 hệ THPT chuyên trường ĐHKHTN – ĐHQG Hà Nội năm 2001**
- 10 **Nhìn ra thế giới - Around the World**
Đề thi chọn đội tuyển toán Rumani (4 - 2001)

- 11 **Bạn đọc tìm tòi - Reader's Contributions**
Trịnh Xuân Tình, Đỗ Văn Đức - Việc ước lượng giá trị một biểu thức giữa các cạnh một tam giác
 - 12 **Đề ra kì này - Problems in this Issue**
T12/297, ..., T10/297, L1, L2/297
 - 14 **Giải bài kì trước - Solutions to Previous Problems**
Giải các bài của số 293
 - 22 **Diễn đàn dạy học toán - Math Teaching Forum**
Nguyễn Anh Dũng - Về bài toán phương trình tiếp tuyến
 - 23 *Ngô Việt Trung* - Giải thưởng Khoa học Viện Toán học năm 2001
- Câu lạc bộ - Math Club**
Sai lầm ở đâu ? - Where's the Mistakes ?

Bìa 2 : Toán học muôn màu – Multifarious Mathematics
Gấp giấy để tạo đa giác đều

Bìa 3 : Giải trí toán học – Math Recreation

Bìa 4 : Chi nhánh Nhà xuất bản Giáo dục tại thành phố Đà Nẵng

Tổng biên tập :
NGUYỄN CẢNH TOÀN
Phó tổng biên tập :
NGÔ ĐẠT TỨ
HOÀNG CHỨNG

Chịu trách nhiệm xuất bản :
Giám đốc NXB Giáo Dục :
NGÔ TRẦN ÁI
Tổng biên tập NXB Giáo Dục :
VŨ DƯƠNG THỤY

Hội đồng biên tập :

NGUYỄN CẢNH TOÀN, HOÀNG CHỨNG, NGÔ ĐẠT TỨ, LÊ KHẮC BẢO, NGUYỄN HUY ĐOAN, NGUYỄN VIỆT HẢI, ĐINH QUANG HẢO, NGUYỄN XUÂN HUY, PHAN HUY KHẢI, VŨ THANH KHIẾT, LÊ HẢI KHÔI, NGUYỄN VĂN MẬU, HOÀNG LÊ MINH, NGUYỄN KHẮC MINH, TRẦN VĂN NHUNG, NGUYỄN ĐĂNG PHẤT, PHAN THANH QUANG, TÀ HỒNG QUẢNG, ĐẶNG HÙNG THẮNG, VŨ DƯƠNG THỤY, TRẦN THÀNH TRẠI, LÊ BÁ KHÁNH TRINH, NGÔ VIỆT TRUNG

Trưởng ban biên tập : NGUYỄN VIỆT HẢI. Biên tập : VŨ KIM THÙY, HỒ QUANG VINH

Trị sự : VŨ ANH THỦY. Trình bày : NGUYỄN THỊ OANH

Đại diện phía Nam : TRẦN CHÍ HIẾU, 231 Nguyễn Văn Cừ, Tp. Hồ Chí Minh. ĐT : 08.8323044

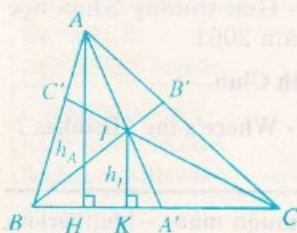


Dành cho các bạn TRUNG HỌC CƠ SỞ

Trong bài báo này chúng tôi muốn giới thiệu với các bạn một số kết quả khai thác từ một bài toán giúp bạn đọc hiểu được rõ quá trình tạo lập bài toán mới từ bài toán ban đầu, tìm được nguồn gốc của bài toán và bước đầu làm quen với tập duyệt sáng tạo toán học. Trước hết ta hãy xét một kết quả hết sức quen thuộc.

Bài toán 1. Cho tam giác ABC và điểm I trong tam giác đó. Các đường thẳng AI, BI, CI cắt các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại A', B', C' . Chứng minh rằng

$$\frac{IA'}{AA'} + \frac{IB'}{BB'} + \frac{IC'}{CC'} = 1 \quad (1)$$



Lời giải. Gọi S_1, S_2, S_3, S là diện tích các tam giác IBC, ICA, IAB và ABC . Khi đó ta có các hệ thức về tỉ số diện tích $\frac{IA'}{AA'} = \frac{h_I}{h_A} = \frac{S_1}{S}$;

$$\frac{IB'}{BB'} = \frac{S_2}{S}; \quad \frac{IC'}{CC'} = \frac{S_3}{S}. \text{ Vậy } \frac{IA'}{AA'} + \frac{IB'}{BB'} + \frac{IC'}{CC'} = \frac{S_1 + S_2 + S_3}{S} = 1 \text{ (dpcm).}$$

$$\text{Từ (1) có } \frac{IA}{AA'} + \frac{IB}{BB'} + \frac{IC}{CC'} = 3 - \left(\frac{IA'}{AA'} + \frac{IB'}{BB'} + \frac{IC'}{CC'} \right) = 2$$

$$\text{Vậy } \frac{IA}{AA'} + \frac{IB}{BB'} + \frac{IC}{CC'} = 2 \quad (2)$$

1) Vận dụng các hệ thức về tỉ số diện tích và các bất đẳng thức Côsi, Bunhiacôpxki để chứng minh được lần lượt các kết quả sau:

$$\frac{AA'}{IA'} + \frac{BB'}{IB'} + \frac{CC'}{IC'} \geq 9 \quad (3)$$

$$\frac{IA}{IA'} + \frac{IB}{IB'} + \frac{IC}{IC'} \geq 6 \quad (4)$$

Phát triển TỪ MỘT BÀI TOÁN HÌNH HỌC

LÊ DUY NINH

(Nguyên GV trường ĐHSP Hà Nội 2)

$$\frac{IA'}{IA} + \frac{IB'}{IB} + \frac{IC'}{IC} \geq \frac{3}{2} \quad (5)$$

Từ (4) và (5) rút ra $\frac{IA}{IA'}, \frac{IB}{IB'}, \frac{IC}{IC'}$ không cùng lớn hơn 2; không cùng nhỏ hơn 2 (6)

$$\frac{AA'}{IA} + \frac{BB'}{IB} + \frac{CC'}{IC} \geq \frac{9}{2} \quad (7)$$

$$\frac{IA}{IA'} \cdot \frac{IB}{IB'} \cdot \frac{IC}{IC'} \geq 8 \quad (8)$$

$$\frac{AA'}{IA'} \cdot \frac{BB'}{IB'} \cdot \frac{CC'}{IC'} \geq 27 \quad (9)$$

$$\frac{AA'}{IA} \cdot \frac{BB'}{IB} \cdot \frac{CC'}{IC} \geq \frac{27}{8} \quad (10)$$

Ngoài các BĐT (1) – (10) chúng ta còn có các kết quả sau với n là số nguyên dương:

$$\sqrt[n]{\frac{IA}{IA'}} + \sqrt[n]{\frac{IB}{IB'}} + \sqrt[n]{\frac{IC}{IC'}} \geq 3 \sqrt[n]{2} \quad (11)$$

$$\sqrt[n]{\frac{AA'}{IA}} + \sqrt[n]{\frac{BB'}{IB}} + \sqrt[n]{\frac{CC'}{IC}} \geq 3 \sqrt[n]{\frac{3}{2}} \quad (12)$$

$$\sqrt[n]{\frac{AA'}{IA'}} + \sqrt[n]{\frac{BB'}{IB'}} + \sqrt[n]{\frac{CC'}{IC'}} \geq 3 \sqrt[n]{3} \quad (13)$$

$$2\sqrt[n]{\frac{IA'}{AA'}} + 2\sqrt[n]{\frac{IB'}{BB'}} + 2\sqrt[n]{\frac{IC'}{CC'}} \leq 2\sqrt[n]{3} \quad (14)$$

$$2\sqrt[n]{\frac{IA}{AA'}} + 2\sqrt[n]{\frac{IB}{BB'}} + 2\sqrt[n]{\frac{IC}{CC'}} \leq 2\sqrt[n]{6} \quad (15)$$

Dấu đẳng thức xảy ra trong mỗi BĐT trên khi và chỉ khi I là trọng tâm $\triangle ABC$. Xin hướng dẫn chứng minh một số BĐT.

• Áp dụng BĐT Côsi và BĐT (8) ta có BĐT (11) khi $n = 2$:

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{IA}{IA'}} + \sqrt{\frac{IB}{IB'}} + \sqrt{\frac{IC}{IC'}} \geq \\ & \geq 3 \sqrt[3]{\sqrt{\frac{IA}{IA'} \cdot \frac{IB}{IB'} \cdot \frac{IC}{IC'}}} \geq 3 \sqrt[3]{\sqrt{8}} = 3\sqrt{2}. \end{aligned}$$

• Từ (1) và BĐT (10) ta có BĐT (12) khi $n=2$:

$$\sqrt{\frac{AA'}{IA}} + \sqrt{\frac{BB'}{IB}} + \sqrt{\frac{CC'}{IC}} \geq$$

$$3 \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{AA'}{IA}\right)\left(\frac{BB'}{IB}\right)\left(\frac{CC'}{IC}\right)} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{3}{2}}$$

• Áp dụng BĐT Bunhiacốpski và (1) ta được BDT (14) khi $n = 1$:

$$1 \cdot \sqrt{\frac{IA'}{AA'}} + 1 \cdot \sqrt{\frac{IB'}{BB'}} + 1 \cdot \sqrt{\frac{IC'}{CC'}} \leq \sqrt{(1^2 + 1^2 + 1^2) \left(\frac{IA'}{AA'} + \frac{IB'}{BB'} + \frac{IC'}{CC'} \right)} = \sqrt{3}$$

Mời các bạn chứng minh tiếp các BDT còn lại.

II) Ta có thể mở rộng các bài toán nêu trên sang không gian bằng phương pháp tương tự. Bài toán trong không gian được chứng minh nhờ áp dụng hệ thức tỉ số thể tích giống như việc áp dụng hệ thức tỉ số diện tích trong hình học phẳng. Cách làm này góp phần rèn luyện kỹ năng chuyển hóa các tính chất hình học giữa mặt phẳng và không gian, từ đó thấy được mối liên hệ khăng khít giữa hai loại bài tập hình học này.

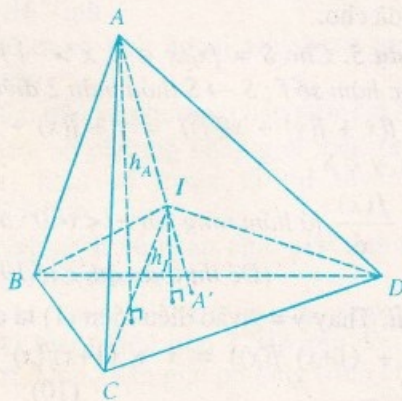
Bài toán 2. Cho tứ diện $ABCD$ và điểm I nằm trong tứ diện đó. Các đường thẳng AI, BI, CI, DI cắt các mặt đối diện lần lượt tại A', B', C', D' . Chứng minh rằng

$$\frac{IA'}{AA'} + \frac{IB'}{BB'} + \frac{IC'}{CC'} + \frac{ID'}{DD'} = 1 \quad (1)$$

Lời giải. $\frac{IA'}{AA'} = \frac{h_I}{h_A} = \frac{V_{IBCD}}{V_{ABCD}}, \frac{IB'}{BB'} = \frac{V_{IACD}}{V_{ABCD}};$

$$\frac{IC'}{CC'} = \frac{V_{IABD}}{V_{ABCD}}, \frac{ID'}{DD'} = \frac{V_{IABC}}{V_{ABCD}}. \text{ Do đó:}$$

$$\frac{IA'}{AA'} + \frac{IB'}{BB'} + \frac{IC'}{CC'} + \frac{ID'}{DD'} =$$



$$= \frac{V_{IBCD} + V_{IACD} + V_{IABD} + V_{IABC}}{V_{ABCD}} = 1$$

Tương tự như ở phần I, chúng ta có các kết quả sau với n là số nguyên dương:

$$\frac{IA}{AA'} + \frac{IB}{BB'} + \frac{IC}{CC'} + \frac{ID}{DD'} = 3 \quad (2)$$

$$\frac{AA'}{IA'} + \frac{BB'}{IB'} + \frac{CC'}{IC'} + \frac{DD'}{ID'} \geq 16 \quad (3)$$

$$\frac{IA}{IA'} + \frac{IB}{IB'} + \frac{IC}{IC'} + \frac{ID}{ID'} \geq 12 \quad (4)$$

$$\frac{IA'}{IA} + \frac{IB'}{IB} + \frac{IC'}{IC} + \frac{ID'}{ID} \geq \frac{4}{3} \quad (5)$$

$$\frac{IA}{IA'}, \frac{IB}{IB'}, \frac{IC}{IC'}, \frac{ID}{ID'} \text{ không cùng lớn hơn}$$

$$3, \text{ không cùng nhỏ hơn } 3 \quad (6)$$

$$\frac{AA'}{IA} + \frac{BB'}{IB} + \frac{CC'}{IC} + \frac{DD'}{ID} \geq \frac{16}{3} \quad (7)$$

$$\frac{IA}{IA'} \cdot \frac{IB}{IB'} \cdot \frac{IC}{IC'} \cdot \frac{ID}{ID'} \geq 81 \quad (8)$$

$$\frac{AA'}{IA'} \cdot \frac{BB'}{IB'} \cdot \frac{CC'}{IC'} \cdot \frac{DD'}{ID'} \geq 256 \quad (9)$$

$$\frac{AA'}{IA} \cdot \frac{BB'}{IB} \cdot \frac{CC'}{IC} \cdot \frac{DD'}{ID} \geq \frac{256}{81} \quad (10)$$

$$\sqrt[n]{\frac{IA}{IA'}} + \sqrt[n]{\frac{IB}{IB'}} + \sqrt[n]{\frac{IC}{IC'}} + \sqrt[n]{\frac{ID}{ID'}} \geq 4\sqrt[n]{3} \quad (11)$$

$$\sqrt[n]{\frac{AA'}{IA}} + \sqrt[n]{\frac{BB'}{IB}} + \sqrt[n]{\frac{CC'}{IC}} + \sqrt[n]{\frac{DD'}{ID}} \geq 4\sqrt[n]{\frac{4}{3}} \quad (12)$$

$$\sqrt[n]{\frac{AA'}{IA'}} + \sqrt[n]{\frac{BB'}{IB'}} + \sqrt[n]{\frac{CC'}{IC'}} + \sqrt[n]{\frac{DD'}{ID'}} \geq 4\sqrt[n]{4} \quad (13)$$

$$2\sqrt[n]{\frac{IA}{AA'}} + 2\sqrt[n]{\frac{IB}{BB'}} + 2\sqrt[n]{\frac{IC}{CC'}} + 2\sqrt[n]{\frac{ID}{DD'}} \leq 2\sqrt[n]{4^{2n-1}} \quad (14)$$

$$2\sqrt[n]{\frac{IA}{AA'}} + 2\sqrt[n]{\frac{IB}{BB'}} + 2\sqrt[n]{\frac{IC}{CC'}} + 2\sqrt[n]{\frac{ID}{DD'}} \leq 2\sqrt[n]{3 \cdot 4^{2n-1}} \quad (15)$$

Xin mời các bạn tự chứng minh các bất đẳng thức (1) – (15) Rất mong các bạn tìm được các kết quả tương tự giữa hình học phẳng và hình học không gian từ các bài toán khác.

LTS: Tòa soạn nhận được một số kết quả tương tự, cùng nội dung với bài báo này của bạn Nguyễn Hữu Hậu, K38D, khoa Toán, ĐH Vinh. Mong nhận được các bài báo khác của bạn.

TÌM HIỂU SÂU THÊM TOÁN HỌC SƠ CẤP**VÀI PHƯƠNG PHÁP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH HÀM**

(Tiếp theo)

TRẦN THỊ NGÀ

(GV THPT DL Nguyễn Trường Tộ, Vinh, Nghệ An)

Trong THPT số 296 tháng 2/2002 đã nêu 2 phương pháp giải phương trình hàm (PTH), bài này giới thiệu tiếp các phương pháp khác.

3. Phương pháp xác định nghiệm duy nhất

Cũng giống như cách giải phương trình thông thường, khi giải PTH ta có thể đoán nhận các nghiệm của PTH và chứng minh rằng ngoài các nghiệm đó ra PTH không có nghiệm nào khác. Thông thường ta hay thử các hàm số đặc biệt: hàm hằng, hàm đồng nhất, hàm tuyến tính, ... để xem chúng có phải là nghiệm của PTH hay không.

Ví dụ 4. Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x^2) + f(y) = y + (f(x))^2$ (1) với mọi số thực x, y .

(Đề thi toán quốc tế 1992)

Giải. Để thấy $f(x) = x$ là nghiệm của PTH (1).

Ta sẽ chứng minh đó là nghiệm duy nhất của (1). Đặt $a = f(0)$. Thay lần lượt $x = 0$ rồi $y = 0$ vào (1) ta được

$$f(f(y)) = y + a^2 \text{ với mọi } y \in \mathbb{R} \quad (2)$$

$$f(x^2 + a) = [f(x)]^2 \text{ với mọi } x \in \mathbb{R} \quad (3)$$

$$\text{Thay } y = 0 \text{ vào (2) được } f(a) = a^2 \quad (4)$$

Từ (3) và (4) có

$$\begin{aligned} a^2 + f(x^2 + a) &= f(a) + [f(x)]^2 \Rightarrow \\ f(a^2 + f(x^2 + a)) &= f(f(a) + [f(x)]^2) \end{aligned} \quad (5)$$

Sử dụng (1), (4) có:

$$f(a^2 + f(x^2 + a)) = x^2 + a + (f(f(a)))^2 = x^2 + a + a^4$$

Sử dụng (1), (2) có:

$$f([f(x)]^2 + f(a)) = a + (f(f(x)))^2 = a + (x + a^2)^2$$

Thay các kết quả biến đổi này vào (5) được

$$x^2 + a + a^4 = a + (x + a^2)^2 \text{ suy ra } a = 0.$$

Vậy $f(0) = 0$.

Thay $a = 0$ vào (2) được $f(f(y)) = y$ hay là $z = f(y)$ thì $y = f(z)$ với mọi $y, z \in \mathbb{R}$ (6)

$$\text{Từ (3) có } f(x^2) = [f(x)]^2 \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}. \quad (7)$$

Từ (7) suy ra nếu $x = t^2 \geq 0$ thì $f(x) \geq 0$.Nếu $f(x) = 0$ thì theo (1), (7) có:

$$x = x + [f(x)]^2 = f(x^2 + f(x)) = f(x^2) = [f(x)]^2 = 0$$

$$\text{Vậy } x = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0, \text{ và nếu } x > 0 \text{ thì } f(x) > 0 \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \text{Với } x > 0 \text{ bất kì đặt } x = t^2, \text{ từ (6), (1), (7) có} \\ f(x+y) &= f(t^2 + f(z)) = z + [f(t)]^2 = f(y) + f(t^2) = \\ &= f(x) + f(y) \text{ với mọi } y \in \mathbb{R} \text{ và } x > 0 \end{aligned} \quad (9)$$

$$\text{Đặt } y = -x \text{ thì } 0 = f(0) = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x) \Rightarrow f(-x) = -f(x) \text{ với } x \text{ bất kì.}$$

Giả sử $f(x) = x + u$ với bất kì $x \in \mathbb{R}$. Xét các trường hợp sau:

• Nếu $u > 0$ thì theo (6), (8), (9) có

$$x = f(f(x)) = f(x+u) = f(x) + f(u) = x + u + f(u)$$

dẫn đến mâu thuẫn vì $u > 0, f(u) > 0$ theo (8)

$$\begin{aligned} \bullet \text{ Nếu } u < 0 \text{ thì } -u > 0 \text{ nên } x = f(f(x)) = \\ &= f(x+u) = -f(-x-u) \end{aligned}$$

$$= -f((-x) + (-u)) = -(f(-x) + f(-u)) =$$

$$= f(x) - f(-u) = x + u - f(-u) \text{ dẫn đến mâu thuẫn vì } u < 0 \text{ và } -f(-u) < 0.$$

• Vậy chỉ xảy ra $f(x) = x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ (dpcm).**4. Phương pháp điểm bất động**

Ta có thể đưa vào ẩn phụ $u = h(f(x))$ để chuyển PTH về tìm u thỏa mãn phương trình $g(u) = u$, tức là tìm điểm bất động của hàm $g(u)$. Khi xác định được u ta sẽ tìm được nghiệm của PTH đã cho.

Ví dụ 5. Cho $S = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x > -1\}$. Tìm tất cả các hàm số $f: S \rightarrow S$ thỏa mãn 2 điều kiện:

$$(1) f(x + f(y) + xf(y)) = y + f(x) + yf(x) \text{ với mọi } x, y \in S;$$

$$(2) \frac{f(x)}{x} \text{ là hàm tăng với } -1 < x < 0 \text{ và } 0 < x.$$

(Đề thi toán quốc tế 1994)

Giải. Thay $y = x$ vào điều kiện (1) ta có

$$f(x + (1+x)f(x)) = x + (1+x)f(x) \text{ với mọi } x \in S \quad (10)$$

$$\text{Đặt } u = x + (1+x)f(x) \quad (11)$$

GIẢI THƯỞNG LÊ VĂN THIÊM NĂM 2001

HÀ HUY KHOÁI

(Viện Toán học)

Giải thưởng Lê Văn Thiêm của Hội Toán học Việt Nam được giành để tặng các thầy cô giáo có thành tích xuất sắc trong giảng dạy môn toán ở bậc phổ thông và các học sinh phổ thông đạt thành tích xuất sắc trong học tập môn Toán. Giải thưởng Lê Văn Thiêm năm 2001 được trao cho các thầy giáo và học sinh sau đây:

I) Thầy giáo.

1. *Hoàng Văn Phú*, sinh năm 1969, tổ trưởng tổ Toán-Tin, trường THPT chuyên Hoàng Văn Thụ, Hòa Bình.

- Đã 11 năm dạy Toán tại tỉnh miền núi Hoà Bình, liên tục là giáo viên dạy giỏi cấp tỉnh.

- Từ 1996 đến nay, phụ trách giảng dạy tất cả các chuyên đề cho Đội tuyển Toán tỉnh Hoà Bình. Các học sinh của Đội tuyển đã đạt 32 giải quốc gia, trong đó có 2 giải nhất, 10 giải nhì.

Được tặng nhiều bằng khen của Sở GD-ĐT, UBND tỉnh Hoà Bình, Bộ GD và ĐT.

2. *Vũ Quốc Lương*, sinh năm 1953, tổ trưởng tổ Toán trường THCS Chu Văn An, Hà Nội.

- Đã có thâm niên giảng dạy 29 năm, liên tục chủ nhiệm các lớp chuyên, chọn của trường.

- Liên tục tham gia bồi dưỡng học sinh giỏi và Đội tuyển quận Ba Đình, trong đó có nhiều em đạt giải cao ở các cuộc thi Thành phố, Quốc gia,

nhiều em về sau được giải trong các kì thi Olympic quốc tế.

- Là đồng tác giả của 2 cuốn sách bồi dưỡng học sinh giỏi (NXB Giáo dục) và có nhiều bài đăng trên tạp chí Toán học & Tuổi trẻ.

II) Học sinh:

1. *Vũ Ngọc Minh*, học sinh lớp 11 (năm học 2000-2001), Khối Phổ thông chuyên Toán - Tin, trường ĐHSPT Hà Nội.

- Giải nhất kì thi HS giỏi thành phố lớp 7,8,9.

- Giải nhất kì thi học sinh giỏi Khối chuyên Toán-Tin ĐHSPT Hà Nội lớp 10, 11, 12.

- Giải ba Kì thi HS giỏi toàn quốc năm 2001.

- Huy chương vàng Cuộc thi Olympic Toán quốc tế 2001.

2. *Lê Anh Vinh*, học sinh lớp 12 (năm học 2000-2001), Khối Phổ thông chuyên Toán-Tin, (hiện là học sinh Khối Cử nhân khoa học tài năng), trường ĐHKHTN-ĐHQGHN.

- Giải nhì kì thi HS giỏi toàn quốc 1999-2000.

- Giải nhì kì thi HS giỏi toàn quốc 2000-2001.

- Huy chương bạc Cuộc thi Olympic Toán quốc tế 2001.

Lễ trao giải thưởng Lê Văn Thiêm năm 2001 đã được tổ chức ngày 3-3-2002 tại Hội trường Lê Văn Thiêm 19 Lê Thánh Tông Hà Nội.

thì $f(u) = u$ với mỗi u có dạng (11). Thay $x = u$ vào (10) ta có $f(u^2 + 2u) = u^2 + 2u$.

• Nếu $-1 < u < 0$ thì cũng có $-1 < u^2 + 2u < 0$ mà theo điều kiện (2) thì chỉ có 1 điểm bất động trong $(-1, 0)$ nên $u^2 + 2u = u \Rightarrow u = 0$ hoặc $u = -1$ điều này không xảy ra.

• Nếu $u > 0$ thì $u^2 + 2u > 0$. Lập luận như trên, điều này cũng không xảy ra.

• Vậy $u = 0$ là điểm bất động duy nhất thuộc S của hàm f nghĩa là $x + (1+x)f(x) = 0$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{-x}{x+1}.$$

Thử lại ta thấy hàm này thỏa mãn các điều kiện (1), (2).

BÀI TẬP

Ứng dụng các phương pháp trên có thể giải các phương trình hàm sau đây :

Bài 1. Giải các PTH :

a) $f(x) - 2f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = x$ với $x \neq 0, -1, +1$.

b) $2f(2x) = f(x) + x$, trong đó f liên tục trên R .

Bài 2. Tìm tất cả các hàm số $f: R \rightarrow R$ thỏa mãn :

1) $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $\forall x, y \in R$.

2) $f(1) = 1$;

(3) $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{f(x)}{x^2}$ với $x \neq 0$.

Bài 3. Tìm tất cả các hàm số $f: N \rightarrow N$ sao cho $f(m+f(n)) = f(f(m)) + f(n)$, $\forall m, n \in N$.

Bài 4. Tìm tất cả các hàm số đơn điệu tăng : $f: N^* \rightarrow N^*$ thỏa mãn $f(1) = 1, f(2) = 2, f(pq) = f(p)f(q)$, với $(p, q) = 1$.

DÙNG PHƯƠNG PHÁP PHÂN HOẠCH TẬP HỢP ĐỂ GIẢI BÀI TOÁN SỐ HỌC

VŨ ĐÌNH HÒA, NGUYỄN TRỌNG TUẤN, NGUYỄN ANH QUÂN

LTS. Bài toán số 6 trong cuộc thi Toán quốc tế (IMO) lần thứ 36) năm 1995 là một bài toán khó đòi hỏi tính số các tập con của một tập hợp. Lời giải bài này của bạn Ngô Đắc Tuấn (Huy chương vàng của IMO lần thứ 36) đã được đăng trong THPT số 224 (2/1996). Trong bài báo "Dùng cái ảo để đếm cái thật" THPT số 250 (4/1998) tác giả Đặng Hùng Thắng đã sử dụng số phức để giải bài toán tổng quát hơn sau đây:

Bài toán 1. Cho p là một số nguyên tố lẻ. Tìm số các tập con A của tập hợp $X = \{1, 2, \dots, n\}$ có tính chất sau:

- A chứa đúng p phần tử
- Tổng tất cả các phần tử của A chia hết cho p .

Bài toán số 6 của IMO lần thứ 36 là trường hợp riêng khi $n = 2p$.

Tòa soạn đã nhận được thư của các bạn: Nguyễn Trọng Tuấn (GV trường THPT Hùng Vương, Gia Lai) và Nguyễn Anh Quân (lớp 12 Toán, trường THPT NK Trần Phú, Hải Phòng, HC bạc của IMO lần thứ 42 năm 2001) về lời giải bài toán nêu trên dựa trên sự phân hoạch tập hợp. Ý tưởng này đã được trình bày tóm tắt trong hướng dẫn giải của nước ra đề thi là Ba Lan (đăng ở THPT số 250 tháng 4/1998). Tòa soạn đã nhờ TSKH Vũ Đình Hòa viết bài giới thiệu phương pháp phân hoạch tập hợp, dựa trên ý kiến của các bạn Nguyễn Trọng Tuấn và Nguyễn Anh Quân, với hi vọng các bạn có thể sử dụng phương pháp này để giải nhiều bài toán khác.

Ta gọi sự phân chia tập hợp A thành các tập hợp con khác rỗng $A_1, A_2, \dots, A_k$ ($k > 1$) của A là một phân hoạch của tập hợp A nếu thỏa mãn điều kiện:

- Hợp các tập con chứa trọn vẹn A , nghĩa là

$$\bigcup_{i=1}^k A_i = A$$

- Các tập con đôi một rời nhau, nghĩa là $A_i \cap A_j = \emptyset$ với mọi $i \neq j$, $i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$.

Để lập một phân hoạch của tập hợp A ta xác định một quan hệ T giữa các phần tử của A có ba tính chất sau và gọi là quan hệ tương đương:

- Tính phản xạ: xTx với mọi x thuộc A
- Tính đối xứng: nếu xTy thì yTx với mọi x, y thuộc A

- Tính bắc cầu: nếu xTy và yTz thì xTz với mọi x, y, z thuộc A .

Người ta đã chứng minh rằng: Một tập hợp A được phân hoạch thành các tập hợp con $A_1, A_2, \dots, A_k$ khi và chỉ khi tồn tại quan hệ tương đương T giữa các phần tử của A thỏa mãn: $xTy \Leftrightarrow x, y$ cùng thuộc một tập con A_i nào đó ($1 \leq i \leq k$)

Ta sẽ vận dụng phương pháp phân hoạch tập hợp để giải các bài toán liên quan đến bài số học số 6 trong kì thi IMO lần thứ 36.

Với mỗi tập hợp số hữu hạn A kí hiệu $|A|$ là số các phần tử của tập hợp A và $S(A)$ là tổng các phần tử của tập hợp A .

Bài toán 2. Cho p là một số nguyên tố lẻ và số nguyên dương $t < p$. Tìm số các tập con D của tập $Y = \{1, 2, \dots, p\}$ có tính chất sau

- D chứa đúng t phần tử
- $S(D) \equiv r \pmod{p}$ với r là hằng số, $0 \leq r < p$

Lời giải bài 2. Gọi $\mathcal{H}$ là tập hợp các tập con D của Y mà $|D| = t < p$. Với mỗi tập $D = \{d_1, d_2, \dots, d_t\}$ lập ánh xạ $\varphi_m: D \rightarrow D_m$ với $\varphi_m(d_i) = d_{m_i}$ như sau: $\varphi_m(d_i) = d_i + m \pmod{p}$ với m là hằng số và $0 \leq \varphi_m(d_i) \leq p-1$. Lúc đó $D_m = \{d_{m_1}, \dots, d_{m_t}\}$. Ta thấy $d_i \neq d_j \Leftrightarrow d_{m_i} \neq d_{m_j}$ với $i \neq j$ nên φ_m là song ánh và D_m gồm t phần tử phân biệt.

Để thấy quan hệ $D \varphi_m D_m$ giữa các tập gồm t phần tử trong $\mathcal{H}$ là quan hệ tương đương và $\mathcal{H}$ được phân hoạch thành các lớp rời nhau, mỗi lớp gồm p tập (do $m = 0, 1, \dots, p-1$) và mỗi tập có đúng t phần tử.

Vì vậy số các lớp của $\mathcal{H}$ là $\frac{C_p^t}{p}$

Tính tổng $S(D_m) \equiv S(D) + mt \pmod{p}$, ta thấy mt không chia hết cho số nguyên tố p nên $S(D_m)$ và $S(D)$ có số dư khác nhau khi chia cho p mà mỗi lớp có đúng p tập ($m = 0, 1, \dots, p-1$) nên trong mỗi lớp phải tồn tại đúng một tập có số dư bằng r khi chia cho p .

Với mỗi r mà $0 \leq r \leq p-1$ gọi s_r là số các tập D của $\mathcal{H}$ mà $S(D) \equiv r \pmod{p}$ ta kết luận được

$$s_0 = s_1 = \dots = s_{p-1} = \frac{C_p^t}{p}$$

Lời giải bài toán 1. Giả sử $n = kp + r$ với $0 \leq r < n$. Xét các tập con của $X = \{1, 2, \dots, n\}$ như sau: $B_1 = \{1, 2, \dots, p\}$; $B_2 = \{p+1, p+2, \dots, 2p\}$; ...; $B_k = \{(k-1)p + 1, (k-1)p+2, \dots, kp\}$; $C_1 = X = \{1, 2, \dots, kp+r\}$; $C_2 = \{p+1, p+2, \dots, kp+r\}$; ...; $C_k = \{(k-1)p + 1, (k-1)p + 2, \dots, kp + r\}$; $C_{k+1} = \{kp + 1, \dots, kp + r\}$ (nếu $r = 0$ thì $C_{k+1} = \emptyset$).

Trong tập $\mathcal{E}$ các tập con A có đúng p phần tử của tập X ta xác định một quan hệ T như sau: ATA' nếu thỏa mãn 2 điều kiện

1) nếu $A \cup A' \subseteq C_i$ với chỉ số i lớn nhất ($1 \leq i \leq k$) thì $A \cap C_{i+1} = A' \cap C_{i+1}$

2) tồn tại ánh xạ $f: A \cap B_i \rightarrow A' \cap B_i$ (i lớn nhất như trên) thỏa mãn: với mọi $x \in A \cap B_i$ thì $f(x) \equiv x + m \pmod{p}$, trong đó m là hằng số, $0 \leq m \leq p-1$; $1 \leq f(x) \leq p$.

Dễ dàng chứng minh được quan hệ T là quan hệ tương đương trong tập $\mathcal{E}$ và $\mathcal{E}$ được phân hoạch thành lớp các tập con có đúng p phần tử. Trong phân hoạch này có k lớp gồm đúng 1 tập con là $\{B_1\}, \{B_2\}, \dots, \{B_k\}$. Xét lớp có ít nhất hai tập hợp là A và A' với chỉ số i lớn nhất nào đó, mà $A \cup A' \subseteq C_i$, lúc đó $A \cap C_{i+1} = E = A' \cap C_{i+1}$ và $A \cap B_i = D$, $A' \cap B_i = D'$. Lúc đó $A = D \cup E$; $A' = D' \cup E$ với D và E rời nhau, D' và E rời nhau. Giả sử $|D| = |D'| = t = p - |E|$. Lúc đó xét quan hệ T hạn chế trong các tập D gồm đúng t phần tử trong tập $\mathcal{H}$ các tập con D , ta áp dụng được kết quả bài toán 2:

• Mỗi lớp các tập D của $\mathcal{H}$ chứa đúng p tập hợp, suy ra mỗi lớp các tập A của $\mathcal{E}$ cũng chứa đúng p tập hợp, do đó số các lớp như thế của $\mathcal{E}$ là $\frac{C_n^p - k}{p}$ (do có k lớp $\{B_i\}$).

• Nếu $S(E) \equiv p - r \pmod{p}$ và $S(D) \equiv r \pmod{p}$ thì $S(A) \equiv S(D) + S(E) \equiv 0 \pmod{p}$ nghĩa là trong mỗi lớp của tập A có đúng một tập hợp có tổng các phần tử chia hết cho p .

Tóm lại, số các tập con có đúng p phần tử và có tổng các phần tử chia hết cho p bằng

$$k + \frac{C_n^p - k}{p}, \text{ trong đó } k = \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor.$$

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

BÀI SỐ 51

Problem. Given are two skew lines in the space and two segments of fixed lengths on the lines. Prove that the volume of the tetrahedron determined by the endpoints of the two segments is unchanged by sliding the segments along the lines.

Solution. Recall that a base of the tetrahedron is one of its triangular faces and the corresponding height is the perpendicular distance from the remaining vertex to the face.

Since the volume of a tetrahedron is proportional to the area of a base and the corresponding height, we can solve the problem by showing that each of these ingredients remains unchanged.

Obviously, it is enough to show this claim when one of the segments is held fixed and the other is permitted to move.

Let AB be the fixed segment and let CD move along a line x . Then the area of the base ACD remains constant for all positions of CD . The distance from B to the base ACD is the distance from B to the plane spanned by A and the line x , which is constant, too.

Từ mới:

skew	= lệch, chéo nhau (tính từ)
space	= không gian
fixed	= cố định (tính từ)
tetrahedron	= tứ diện
determine	= xác định (động từ)
segment	= đoạn, đoạn thẳng
unchanged	= không thay đổi (tính từ)
slide	= trượt (động từ)
along	= dọc theo (phó từ)
recall	= nhớ lại, nhắc lại (động từ)
triangular	= dạng tam giác (tính từ)
height	= độ cao
distance	= khoảng cách
vertex	= đỉnh
proportional	= tỷ lệ thuận (tính từ)
area	= diện tích
solve	= giải, giải quyết (động từ)
ingredient	= thành phần
obviously	= một cách rõ ràng (phó từ)
hold	= nắm, giữ, đúng (động từ)
permit	= cho phép (động từ)
move	= chuyển động, di chuyển (động từ)
constant	= bất biến (tính từ)
position	= vị trí
span	= căng ra, trải ra (động từ)

NGÔ VIỆT TRUNG

TOÁN HỌC VÀ ĐỜI SỐNG

BÀI TOÁN KÌ NHÔNG ĐỔI MÀU

PHAN THANH QUANG
(Tp. Hồ Chí Minh)

Kì nhông là loài bò sát lưỡng cư đào hang sống ở các bãi cát, bờ biển. Ở một hòn đảo Ấn Độ Dương có một loài kì nhông đặc biệt, rất độc đáo. Chúng có ba màu : xám (X), nâu (hạt dẻ) (N), trắng nhạt (T). Điều thú vị là khi hai con cùng màu gặp nhau thì chúng giữ nguyên màu. Nếu hai con khác màu gặp nhau thì chúng đổi thành màu thứ ba. Ví dụ 2 con màu xám và trắng gặp nhau thì chúng cùng đổi thành màu nâu.

Tại một thời điểm người ta đếm thấy có 45 con kì nhông với các màu : 13X, 15N, 17T.

Bài toán đặt ra là : Liệu sau một số lần gặp nhau giữa chúng, 45 con kì nhông với các màu như trên có thể biến thành cùng một màu được không ? Nếu được, thì màu gì ? Nếu không, thì tại sao ?

Lời giải :

Lúc đầu tiên : $X_0 = 13, N_0 = 15, T_0 = 17$.

Có ba trường hợp đơn giản nhất khi các con kì nhông gặp nhau để chúng đổi màu.

Kiểu α : 1 xám gặp 1 nâu thành trắng cả, nghĩa là X bớt 1, N bớt 1, T thêm 2, viết tắt là

$\alpha : (X, N, T) \rightarrow (X-1, N-1, T+2)$

Tương tự có :

Kiểu β : $(X, N, T) \rightarrow (X-1, N+2, T-1)$

Kiểu γ : $(X, N, T) \rightarrow (X+2, N-1, T-1)$

Để thấy rằng thứ tự các kiểu gặp là không quan trọng : $\alpha\beta = \beta\alpha$ nghĩa là kết quả của hai kiểu gặp α rồi β và β rồi α là như nhau. Thật vậy

$$\bullet (X, N, T) \xrightarrow{\alpha} (X-1, N-1, T+2) \xrightarrow{\beta} (X-2, N+1, T+1)$$

$$\bullet (X, N, T) \xrightarrow{\beta} (X-1, N+2, T-1) \xrightarrow{\alpha} (X-2, N+1, T+1)$$

Có thể kiểm tra để thấy rằng kết quả của các kiểu gặp nhau khác cũng vậy, nghĩa là $\alpha\gamma = \gamma\alpha$ và $\beta\gamma = \gamma\beta$.

Ta thử tìm mối liên hệ giữa các màu sau khi xảy ra một số cuộc gặp giữa các con kì nhông. Giả sử sau a cuộc gặp kiểu α , ta có

$$X' = X_0 - a; N' = N_0 - a, T' = T_0 + 2a$$

Tiếp theo nếu có b cuộc gặp kiểu β ta có $X'' = X' - b = X_0 - a - b$ và $N'' = N_0 - a + 2b$; $T'' = T_0 + 2a - b$

Tiếp theo nếu có c cuộc gặp kiểu γ ta có :

$$X = X_0 - a - b + 2c$$

$$N = N_0 - a + 2b - c$$

$$T = T_0 + 2a - b - c$$

Suy ra sau $a + b + c$ lần gặp như thế có

$$N - X = N_0 - a + 2b - c - (X_0 - a - b + 2c)$$

$$= 3(b - c) + N_0 - X_0$$

Với $N_0 - X_0 = 2$ ta có :

$$N - X - 2 = \text{bội số của } 3$$

Nếu chúng có màu trắng cả thì $N = X = 0 \Rightarrow N - X - 2 = -2$ không phải bội số của 3.

Nếu chúng có màu xám cả thì $N = 0 \Rightarrow N - X - 2 = -45 - 2 = -47$ không phải bội số của 3.

Nếu chúng có màu nâu cả thì $X = 0 \Rightarrow$

$N - X - 2 = 45 - 2 = 43$ không phải bội số của 3.

Vậy với 13 con xám, 15 con nâu và 17 con trắng thì không thể xảy ra trường hợp 45 con cùng màu sau những lần gặp nhau được.

Các bạn hãy đi từ kết luận đến giả thiết để xét xem với những màu nào của 45 con kì nhông thì sau nhiều lần gặp nhau chúng có thể có cùng một màu ? Từ bài toán này bạn có nghĩ ra một trò chơi mới không ?

Toán học đã minh họa và tôn vinh bàn tay kì diệu của thiên nhiên, mà người ta gọi là *sự sắp đặt vô song, huyền bí của Ông Trời* tạo nên một thế giới muôn hình, muôn vẻ.

(Dựa theo bài của Jean Brette trong tạp chí *Découverte* 3/2000)



ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 HỆ THPT CHUYÊN TRƯỜNG ĐHKHTN - ĐHQG HÀ NỘI NĂM 2001

MÔN THI : TOÁN

VÒNG 1

(Dành cho thí sinh thi vào chuyên Toán,
Lý, Hóa, Sinh)

(Thời gian làm bài : 150 phút)

Câu I. Tìm các giá trị nguyên x, y thỏa mãn đẳng thức :

$$(y+2)x^2 + 1 = y^2$$

Câu II. 1) Giải phương trình :

$$\sqrt{x(3x+1)} - \sqrt{x(x-1)} = 2\sqrt{x^2}$$

2) Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x^2 + xy + 2 = 3x + y \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$$

Câu III. Cho nửa vòng tròn đường kính $AB = 2a$. Trên đoạn AB lấy điểm M . Trong nửa mặt phẳng bờ AB chứa nửa vòng tròn, ta kẻ 2 tia Mx và My sao cho $\widehat{AMx} = \widehat{BMy} = 30^\circ$. Tia Mx cắt nửa vòng tròn ở E , tia My cắt nửa vòng tròn ở F . Kẻ EE', FF' vuông góc xuống AB .

1) Cho $AM = \frac{a}{2}$, tính diện tích hình thang vuông $EE'F'F$ theo a .

2) Khi điểm M di động trên AB , chứng minh đường thẳng EF luôn tiếp xúc với một vòng tròn cố định.

Câu IV. Giả sử x, y, z là các số thực khác không thỏa mãn hệ đẳng thức :

$$\begin{cases} x\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) + y\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{x}\right) + z\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = -2 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 1 \end{cases}$$

Hãy tính giá trị của biểu thức :

$$P = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$$

Câu V. Với x, y, z là những số thực dương, hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$M = \frac{xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}$$

VÒNG 2

(Dành cho thí sinh thi vào chuyên Toán
và chuyên Tin)

(Thời gian làm bài : 150 phút)

Câu VI. 1) Cho $f(x) = ax^2 + bx + c$ có tính chất : $f(x)$ nhận giá trị nguyên khi x là số nguyên. Hỏi các hệ số a, b và c có nhất thiết phải là các số nguyên hay không ? Tại sao ?

2) Tìm các số nguyên không âm x, y thỏa mãn đẳng thức :

$$x^2 = y^2 + \sqrt{y+1}$$

Câu VII. Giải phương trình :

$$4\sqrt{x+1} = x^2 - 5x + 14$$

Câu VIII. Cho các số thực a, b, x, y thỏa mãn

$$\text{hệ : } \begin{cases} ax + by = 3 \\ ax^2 + by^2 = 5 \\ ax^3 + by^3 = 9 \\ ax^4 + by^4 = 17 \end{cases}$$

Hãy tính giá trị của các biểu thức :

$$A = ax^5 + by^5$$

$$B = ax^{2001} + by^{2001}$$

Câu IX. Cho đoạn thẳng AB có trung điểm là O . Gọi d_1, d_2 là các đường thẳng vuông góc với AB tương ứng tại A và B . Một góc vuông đỉnh O có một cạnh cắt d_1 ở M , còn cạnh kia cắt d_2 ở N . Kẻ OH vuông góc xuống MN . Vòng tròn ngoại tiếp tam giác MHB cắt d_1 ở điểm thứ hai E khác M . MB cắt NA ở I , đường thẳng HI cắt EB ở K . Chứng minh rằng K nằm trên một vòng tròn cố định khi góc vuông quay xung quanh đỉnh O .

Câu X. Cho 2001 đồng tiền, mỗi đồng tiền được sơn một mặt bằng màu đỏ và mặt kia bằng màu xanh. Xếp 2001 đồng tiền đó theo một vòng tròn sao cho tất cả các đồng tiền đều có mặt xanh ngửa lên phía trên. Cho phép mỗi lần đổi mặt đồng thời 5 đồng tiền liên tiếp cạnh nhau. Hỏi với cách làm như thế, sau một số hữu hạn lần ta có thể làm cho tất cả các đồng tiền đều có mặt đỏ ngửa lên phía trên được hay không ? Tại sao ?



ĐỀ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN TOÁN RUMANI (4 - 2001)

Bài 1. Chứng minh rằng nếu a, b, c là các số phức sao cho

$$(a+b)(a+c) = b;$$

$$(b+c)(b+a) = c;$$

$$(c+a)(c+b) = a$$

thì a, b, c là các số thực.

Bài 2. Cho tập hợp các số nguyên Z .

a) Cho $f, g : Z \rightarrow Z$ là các song ánh. Chứng minh rằng hàm số $h : Z \rightarrow Z$, được xác định bởi $h(x) = f(x)g(x)$ với mọi $x \in Z$, không thể là toàn ánh.

b) Cho $f : Z \rightarrow Z$ là toàn ánh. Chứng minh rằng tồn tại các toàn ánh $g, h : Z \rightarrow Z$ thỏa mãn $f(x) = g(x)h(x)$ với mọi $x \in Z$.

Bài 3. Các cạnh của một tam giác có độ dài là a, b, c . Chứng minh bất đẳng thức :

$$(-a+b+c)(a-b+c) + (a-b+c)(a+b-c) + (a+b-c)(-a+b+c) \leq \sqrt{abc}(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})$$

Bài 4. Có ba trường học, mỗi trường có 200 học sinh. Mỗi học sinh (trong ba trường này) có ít nhất một người bạn trong mỗi trường (nếu a là bạn của b thì b là bạn của a). Biết rằng tồn tại một tập hợp E gồm 300 học sinh trong các trường nói trên sao cho với mỗi trường S và với hai em học sinh $x \neq y$ bất kì trong E mà x, y không thuộc trường S thì số bạn của x và số bạn của y trong trường S là hai số khác nhau.

Chứng minh rằng trong mỗi trường học tìm được một học sinh sao cho chúng là bạn của nhau.

Người giới thiệu : VŨ ĐÌNH HÒA

LTS: Trong tạp chí THPT số 292 (10/2001) tác giả Trần Tuấn Điệp đã giới thiệu lời giải Bài toán 1 dưới đây trong đề thi tuyển sinh vào trường ĐH Vinh năm 2001 cùng với sự phân tích các cách giải.

Trong bài viết này kí hiệu a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác và chu vi $2p = a+b+c$.

Bài 1. Chứng minh rằng với $2p = 3$ thì $3a^2 + 3b^2 + 3c^2 + 4abc \geq 13$ (1)

Bài 2. Chứng minh rằng với $2p = 2$ thì

$$\frac{52}{27} \leq a^2 + b^2 + c^2 + 2abc < 2 \quad (2)$$

Bài 2 chính là bài T3/213 và lời giải đã đăng trên THPT số 217 (7/1995)

Tòa soạn đã nhận được thư của các bạn Trịnh Xuân Tình (GV toán trường THPT Phú Xuyên B, Hà Tây) và bạn Đỗ Văn Đức (GV toán trường THPT chuyên Lương Văn Tuy, Ninh Bình) trong đó chứng minh kết quả của các bài toán tổng quát hơn dưới đây, đồng thời cũng nêu lời bàn thêm của TS Nguyễn Việt Hải.

Bài 3. (của bạn Trịnh Xuân Tình)

Chứng minh rằng :

$$\frac{52}{27} p^2 \leq a^2 + b^2 + c^2 + \frac{2abc}{p} < 2p^2 \quad (2)$$

Giải : Áp dụng BDT Côsi ta được :

$$0 < (p-a)(p-b)(p-c) \leq$$

$$\leq \left(\frac{p-a+p-b+p-c}{3} \right)^3 = \frac{p^3}{27}$$

$$\Leftrightarrow 0 < p^3 - p^2(a+b+c) + p(ab+bc+ca) - abc \leq \frac{p^3}{27}$$

$$\Leftrightarrow p^3 < p(ab+bc+ca) - abc \leq \frac{28}{27} p^3$$

$$\Leftrightarrow 2p^3 < p((a+b+c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2)) - 2abc$$

$$\leq \frac{56}{27} p^3$$

$$\Leftrightarrow 2p^3 < 4p^3 - p(a^2 + b^2 + c^2) - 2abc \leq \frac{56}{27} p^3$$

$$\Leftrightarrow \frac{52}{27} p^2 \leq a^2 + b^2 + c^2 + \frac{2abc}{p} < 2p^2$$

Bài 4. (của bạn Đỗ Văn Đức)

Chứng minh rằng với $2p = 3$, và số thực k ,

$$\text{a) Nếu } k \leq \frac{9}{2} \text{ thì } 3a^2 + 3b^2 + 3c^2 + kabc > 9 + k \quad (4a)$$

$$\text{b) Nếu } k \geq \frac{36}{5} \text{ thì } 3a^2 + 3b^2 + 3c^2 + kabc < 9 + k \quad (4b)$$

BẠN ĐỌC TÌM TÒI

VỀ VIỆC ƯỚC LƯỢNG GIÁ TRỊ MỘT BIỂU THỨC GIỮA CÁC CẠNH MỘT TAM GIÁC

Giải : Để chứng minh rằng :

$$3a^2 + 3b^2 + 3c^2 + kabc - 6\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - kc\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(a-b)^2(6-kc) \quad (5)$$

a) Nếu $k \leq 0$ thì $3a^2 + 3b^2 + 3c^2 + kabc \geq (a+b+c)^2 + k\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 = 9 + k \Rightarrow$ có (4a)

Giả sử $c \leq b \leq a$ và $a + b + c = 3$ thì $0 < c \leq 1$.

Nếu $0 < k \leq \frac{9}{2}$ thì $kc \leq \frac{9}{2} \cdot 1 < 6 \Rightarrow$ vế phải (5) dương. Từ đó $3a^2 + 3b^2 + 3c^2 + kabc > 3c^2 + 6\left(\frac{3-c}{2}\right)^2 + kc\left(\frac{3-c}{2}\right)^2 = 9 + k + \frac{1}{4}(c-1)^2(kc + 18 - 4k) \geq 9 + k$ (do $2k \leq 9$), suy ra có (4a).

b) Giả sử $a \leq b \leq c$ và $a + b + c = 3$ thì $1 \leq c < \frac{3}{2}$. Nếu $k \geq \frac{36}{5}$ thì $kc \geq \frac{36}{5} \cdot 1 > 6 \Rightarrow$ vế phải (5) âm.

Từ đó có $3a^2 + 3b^2 + 3c^2 + kabc < 3c^2 + 6\left(\frac{3-c}{2}\right)^2 + kc\left(\frac{3-c}{2}\right)^2 = 9 + k + \frac{1}{4}(c-1)^2(kc + 18 - 4k) \leq 9 + k$ (do $18 + kc - 4k < 18 + \frac{3}{2}k - 4k = 18 - \frac{5}{2}k \leq 0$), suy ra có (4b).

Lời bàn thêm. Có thể sử dụng cách biến đổi của bạn Đỗ Văn Đức để ước lượng giá trị biểu thức

$f = a^2 + b^2 + c^2 + tabc$, trong đó t là tham số.

Bài 5. Chứng minh rằng với số dương t ,

a) Nếu $\frac{9}{4p} \leq t \leq \frac{9}{3p}$ thì $a^2 + b^2 + c^2 + tabc > 2p^2$ (6a)

TRỊNH XUÂN TÌNH, ĐỖ VĂN ĐỨC

b) Nếu $t \leq \frac{9}{4p}$ thì $a^2 + b^2 + c^2 + tabc > \frac{4}{3}p^2 + \frac{8}{27}p^3t$ (6b)

c) Nếu $t \geq \frac{18}{5p}$ thì $a^2 + b^2 + c^2 + tabc < \frac{4}{3}p^2 + \frac{8}{27}p^3t$ (6c)

Giải : Để chứng minh rằng

$$4(a^2 + b^2 + tabc) = (a+b)^2(2+tc) + (a-b)^2(2-tc)$$

hay $4f = 4c^2 + (2p-c)^2(2+tc) + (a-b)^2(2-tc)$

$$4f = 8p^2 + tc\left(c - 2p + \frac{3}{t}\right)^2 + c\left(4p - \frac{9}{t}\right) + (a-b)^2(2-tc) \quad (7a)$$

$$4f = \frac{16}{3}p^2 + \frac{32}{27}p^3t + \left(c - \frac{2p}{3}\right)^2\left(tc + 6 - \frac{8}{3}pt\right) + (a-b)^2(2-tc) \quad (7b)$$

a) Nếu $\frac{9}{4p} \leq t \leq \frac{9}{3p}$, xét c là cạnh ngắn nhất thì $c \leq \frac{2p}{3} \Rightarrow tc \leq \frac{9}{3p} \cdot \frac{2p}{3} = 2$ và $4p - \frac{9}{t} \geq 0$ nên từ (7a) suy ra $4f > 8p^2$, tức là có (6a)

b) Nếu $t \leq \frac{9}{4p}$, xét c là cạnh ngắn nhất thì $c \leq \frac{2p}{3} \Rightarrow tc \leq \frac{9}{4p} \cdot \frac{2p}{3} = \frac{3}{2} < 2$ và $\frac{8}{3}pt \leq \frac{8p}{3} \cdot \frac{9}{4p} = 6$ nên từ (7b) suy ra $4f > \frac{16}{3}p^2 + \frac{32}{27}p^3t$, tức là có (6b).

c) Nếu $t \geq \frac{18}{5p}$, xét c là cạnh dài nhất thì $\frac{2p}{3} \leq c < p \Rightarrow tc \geq \frac{18}{5p} \cdot \frac{2p}{3} = \frac{12}{5} > 2$ và $t\left(\frac{8p}{3} - c\right) > t\left(\frac{8p}{3} - p\right) \geq \frac{18}{5p} \cdot \frac{5p}{3} = 6$ nên từ (7b) suy ra $4f < \frac{16}{3}p^2 + \frac{32}{27}p^3t$, tức là có (6c)./.



ĐỀ RA KÌ NÀY

CÁC LỚP THCS

Bài T1/297. Tìm ba số nguyên a sao cho biểu thức sau có cùng một giá trị: $a^3 - 12a^2 + 47a$

VŨ TRÍ ĐỨC
(Ninh Bình)

Bài T2/297. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\frac{a^2}{1-a} + \frac{b^2}{1-b} + \frac{1}{a+b} + a + b$ trong đó a, b là hai số thực dương thỏa mãn điều kiện $a + b < 1$

TRƯƠNG NGỌC ĐẮC
(GV THPT Lê Quý Đôn, Quy Nhơn, Bình Định)

Bài T3/297. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{a_1^2}{a_2 + a_3 + a_4} + \frac{a_2^2}{a_3 + a_4 + a_5} + \frac{a_3^2}{a_4 + a_5 + a_1} + \frac{a_4^2}{a_5 + a_1 + a_2} + \frac{a_5^2}{a_1 + a_2 + a_3} \geq \frac{\sqrt{5}}{3}$$

trong đó a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 là 5 số dương thỏa mãn điều kiện

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 \geq 1$$

TRƯƠNG CAO DŨNG
(SV lớp Điện tử 5, K43 ĐH Bách Khoa Hà Nội)

Bài T4/297. Đường tròn tâm O bán kính R và đường tròn tâm O' bán kính R' ($R > R'$) tiếp xúc ngoài tại điểm A . Góc vuông xAy cắt hai đường tròn ở các điểm B và C (khác A). Gọi H là hình chiếu của A trên đường thẳng BC . Hãy xác định vị trí các điểm B, C để độ dài AH lớn nhất và tính giá trị đó theo R, R' .

NGUYỄN ĐỨC TẤN
(GV Tp. Hồ Chí Minh)

Bài T5/297. Cho đường tròn tâm O đường kính EF . Lấy hai điểm N, P trên đường thẳng EF sao cho $ON = OP$. Từ điểm M nào đó nằm bên trong đường tròn mà không thuộc EF , kẻ đường thẳng MN cắt đường tròn tại A và C , đường thẳng MP cắt đường tròn tại B và D sao cho B và O nằm khác phía đối với AC . Gọi K là giao điểm của OB và AC , Q là giao điểm của

EF và CD . Chứng minh rằng các đường thẳng KQ, BD và AO đồng quy.

NGUYỄN HỮU PHƯỚC
(SV ĐH Bách Khoa Hà Nội)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/297. Cho a, b là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau, chứng minh rằng có đúng $\frac{1}{2}(ab - a - b + 1)$ số tự nhiên không biểu diễn được thành dạng $ax + by$ với x, y là các số nguyên không âm.

TRẦN NAM DŨNG
(GV toán ĐHKHTN-ĐHQG Tp. Hồ Chí Minh)

Bài T7/297. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2$ ($n > 1$), trong đó các số thực $a_1, a_2, \dots, a_n$ thuộc $[0; 2]$ và thỏa mãn

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = n$$

TRINH XUÂN TÌNH
(GV THPT Phú Xuyên B, Hà Tây)

Bài T8/297. Tìm mọi giá trị của tham số a để phương trình $ax^2 + 2\cos x = 2$ có đúng 2 nghiệm (phân biệt) trong $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

NGUYỄN VĂN CƯỜNG
(SV K26G Khoa Toán, ĐHSP Hà Nội 2)

Bài T9/297. Đường tròn tâm I bán kính r tiếp xúc với ba cạnh $BC = a, CA = b, AB = c$ của tam giác ABC lần lượt ở các điểm M, N, P . Gọi S là diện tích $\triangle ABC$ và h_a, h_b, h_c là độ dài đường cao của $\triangle ABC$ tương ứng với các đỉnh A, B, C . Chứng minh rằng:

$$1) 4S^2 = ab.MN^2 + bc.NP^2 + ca.PM^2$$

$$2) \frac{MN^2}{h_a h_b} + \frac{NP^2}{h_b h_c} + \frac{PM^2}{h_c h_a} = 1$$

LÊ QUỐC HÁN
(GV Khoa Toán, ĐH Vinh, Nghệ An)

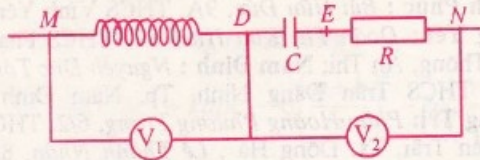
Bài T10/297. Cho tứ diện $OABC$ vuông ở O (OA, OB, OC vuông góc từng đôi một). Gọi α, β, γ lần lượt là góc hợp bởi các mặt OBC, OCA, OAB với mặt ABC . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$\left(\frac{1}{\tan \alpha \tan \beta} + \frac{1}{\tan \beta \tan \gamma} + \frac{1}{\tan \gamma \tan \alpha} \right)^2 + \frac{6}{\tan^2 \alpha \tan^2 \beta \tan^2 \gamma}$$

BÙI LINH PHƯỢNG
(SV K33B khoa Toán ĐHSP Thái Nguyên)

CÁC ĐỀ VẬT LÝ

Bài L1/297. Một đoạn mạch điện có sơ đồ như hình bên. Cho biết $u_{MN} = 127\sqrt{2} \sin 100\pi t$ (V); Số chỉ của vôn kế V_1 lớn gấp đôi số chỉ của vôn kế V_2 ; $R = 50\Omega$; $C = 10^3/\pi$ (μF).

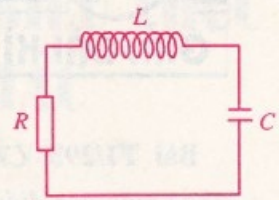


Hãy viết biểu thức của cường độ dòng điện tức thời i đi qua đoạn mạch điện trên, biết rằng u_{MD} vuông pha với u_{DN} .

NGUYỄN QUANG HẬU
(Hà Nội)

Bài L2/297. Cho mạch dao động điện từ như hình vẽ. $L = \frac{\pi}{4} H$, $C = \frac{10^{-4}}{\pi} F$, $R = 5\Omega$. Do

mạch có điện trở thuần R nên dao động tắt dần. Để duy trì dao động người ta làm như sau: Vào thời điểm tụ tích điện cực đại người ta thay đổi khoảng cách 2 bản tụ một lượng



Δd , và khi điện tích của tụ bằng không thì đưa các bản tụ về vị trí ban đầu (cách nhau d). Cho rằng thời gian để thay đổi khoảng cách giữa 2 bản tụ là rất nhỏ so với chu kỳ dao động.

Hãy xác định độ biến thiên tương đối $\frac{\Delta d}{d}$ để dao động được duy trì.

NGUYỄN THANH NHÀN
(GV THPT Yên Lạc, Vĩnh Phúc)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/297. Find three distinct integers a such that the expression $a^3 - 12a^2 + 47a$ takes the same value at them.

T2/297. Find the least value of the expression

$$\frac{a^2}{1-a} + \frac{b^2}{1-b} + \frac{1}{a+b} + a+b$$

where a, b are two positive real numbers satisfying the condition $a+b < 1$.

T3/297. Prove the inequality

$$\frac{a_1^2}{a_2 + a_3 + a_4} + \frac{a_2^2}{a_3 + a_4 + a_5} + \frac{a_3^2}{a_4 + a_5 + a_1} + \frac{a_4^2}{a_5 + a_1 + a_2} + \frac{a_5^2}{a_1 + a_2 + a_3} \geq \frac{\sqrt{5}}{3}$$

where a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 are five positive numbers satisfying the condition

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 \geq 1$$

T4/297. The circle with center O and radius R and the circle with center O' and radius R' ($R > R'$) are externally tangent at A . The rays of a right angle xAy cut the circles at B and C (distinct from A). Let H be the orthogonal projection of A on the line BC . Determine the positions of B and C so that the measure of AH attains its greatest value and calculate this value in terms of R, R' .

T5/297. Let EF be a diameter of a circle with center O . Take two points N, P on the line EF so that $ON = OP$. From a point M inside the circle, not belonging to EF , draw the line MN cutting the circle at A and C and the line MP cutting the circle at B and D so that B and O lie on distinct sides of the line AC . Let K be the point of intersection of OB and AC , let Q be the point of intersection of EF and CD . Prove that the lines KQ, BD and AO are concurrent.

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/297. Let a and b be two coprime positive integers. Prove that there exist exactly $\frac{1}{2}(ab - a - b + 1)$ natural numbers which cannot be written in the form $ax + by$, where x and y are non negative integers.

T7/297. Find the greatest value of the expression $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2$ ($n > 1$), where the real numbers $a_1, a_2, \dots, a_n$ belong to $[0; 2]$ and satisfy the condition $a_1 + a_2 + \dots + a_n = n$.

T8/297. Find all values of the parameter a such that the equation: $ax^2 + 2\cos x = 2$ has exactly two distinct roots belonging to $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

(Xem tiếp trang 21)



Bài T1/293. Cho các số tự nhiên n và k thỏa mãn các điều kiện: $n = \overline{ab}$ với $a+b=10$ và số thập phân (hữu hạn hay vô hạn) $\frac{k}{n} = 0, a_1 a_2 a_3 \dots$ có mọi chữ số a_i ($i = 1, 2, 3, \dots$) đều khác 0. Chứng minh rằng hai chữ số thập phân kế nhau bất kỳ a_i, a_{i+1} không thể bằng nhau.

Lời giải. Giả sử $\frac{k}{n} = 0, a_1 a_2 a_3 \dots$ với mọi a_i ($i = 1, 2, \dots$) đều khác 0. Ta sẽ chứng minh bằng phản chứng.

Theo giả thiết $n = \overline{ab} = 10a + b = 10(10 - b) + b = 100 - 9b$ (1)

a) Xét $a_1 = a_2 = c > 0$ thì $\frac{100k}{n} = cc, a_3 \dots$
nên $11c \leq \frac{100k}{n} < 11c + 1$ hay $\frac{11cn}{100} \leq k < \frac{(11c+1)n}{100}$ (2)

Từ (1) có $11cn = 11c(100-9b) = 100c(11-b) + bc$ (3)

$(11c+1)n = 100c(11-b) + bc + 100 - 9b = 100c(11-b) + 100 - 9(9-c)$
 $\leq 100c(11-b) + 100$ vì $9-c \geq 0$ (4)

Thay (3), (4) vào (2) được

$$c(11-b) + \frac{bc}{100} \leq k < c(11-b) + 1$$

Điều này không xảy ra vì k là số nguyên dương.

b) Giả sử $a_i = a_{i+1} > 0$ với chỉ số $i \geq 1$, khi đó $\frac{k \cdot 10^{i-1}}{n} = a_1 a_2 \dots a_{i-1}, a_i a_{i+1} \dots$

Đặt $h = k \cdot 10^{i-1} - n \cdot a_1 a_2 \dots a_{i-1}$ thì $\frac{h}{n} = 0, a_i a_{i+1} \dots$ với số tự nhiên $h > 0 \Rightarrow h \geq 1$.

Áp dụng kết quả câu a ta có điều phải chứng minh.

Nhận xét. Một số bạn giải theo cách trên không nêu rõ $h > 0$ (do giả thiết $a_i \neq 0$ với mọi $i \geq 1$). Các bạn có lời giải đúng là :

Phú Thọ: Nguyễn Quang Huy, 8A, Nguyễn Trường Thọ, 9A, THCS Giầy, Phong Châu, Phù Ninh ; **Vĩnh Phúc :** Bùi Hữu Đức, 9A, THCS Vĩnh Yên ; **Hưng Yên:** Doãn Thị Kim Huế, 8C, THCS Phạm Huy Thông, Ân Thi; **Nam Định :** Nguyễn Đức Tâm, 9A7, THCS Trần Đăng Ninh, Tp. Nam Định ; **Quảng Trị:** Phan Hoàng Phương Trang, 6/2, THCS Nguyễn Trãi, Tx. Đông Hà , Lê Thành Nhân, 8E, THCS thị trấn Hải Lăng ; **Quảng Ngãi:** Hoàng Lê Duy, 8H, THCS Trần Hưng Đạo, Tx. Quảng Ngãi ; **Bình Định:** Nguyễn Phúc Thọ, 9D, THCS Ngô Mây, Phù Cát.

VIỆT HẢI

Bài T2/293. Cho ba số thực x, y, z thỏa mãn các điều kiện :

$$xyz = 2 \text{ và } xy + yz + zx < \sqrt[3]{2}(x + y + z).$$

Chứng minh rằng trong ba số x, y, z có một và chỉ một số lớn hơn $\sqrt[3]{2}$

Lời giải. (của Lại Xuân Trường, 9A, THCS Giầy, Phong Châu, Phù Ninh, Phú Thọ).

Ta có thể phát biểu và chứng minh bài toán tổng quát sau :

Cho ba số thực x, y, z thỏa mãn các điều kiện: $xyz = k^3$ (1)

$$xy + yz + zx < k(x + y + z) \quad (2)$$

với $k > 0$. Chứng minh rằng trong ba số x, y, z có một và chỉ một số lớn hơn k .

$$\begin{aligned} \text{Xét } A &= (x-k)(y-k)(z-k) \\ &= k^2(x+y+z) - k(xy+yz+zx) \quad (\text{do (1)}) \\ &= k[k(x+y+z) - (xy+yz+zx)] > 0 \quad (\text{do (2)}) \end{aligned}$$

Điều này chứng tỏ trong ba số $(x-k), (y-k), (z-k)$ chỉ xảy ra hai trường hợp :

a) Cả ba số đều dương. Từ đó suy ra $xyz > k^3$ (mâu thuẫn với (1))

b) Chỉ có một số dương, tức có một và chỉ một số lớn hơn k .

Cho $k = \sqrt[3]{2}$ ta trở về bài toán cần chứng minh.

Nhận xét. Rất nhiều bạn có lời giải tốt :

Đồng Tháp : Nguyễn Thị Minh Châu, 9T, THPT Cao Lãnh ; **Tp. Hồ Chí Minh:** Nguyễn Lê Hoàng,

GIẢI BÀI KÌ TRƯỚC

8¹, Hồng Bàng, Q.5; **Khánh Hòa:** Đào Thị Thanh Hà, 9¹⁶, THCS Thái Nguyên, Nha Trang; **Đắc Lắc:** Ngô Thị Huyền Trang, 8A¹, THCS Trần Hưng Đạo, Buôn Ma Thuột; **Quảng Ngãi:** Bùi Lê Trọng Thanh, 9D1, THCS Nguyễn Nghiêm; **Đà Nẵng:** Thái Thanh Hải, 9/2, trường Nguyễn Khuyến; **Quảng Trị:** Phan Hoàng Phương Trang, 6², THCS Nguyễn Trãi, Đông Hà; **Nghệ An:** Nguyễn Đức Hùng, 9A, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu; **Thanh Hóa:** Nguyễn Hùng Phong, 8A1, THCS Nhữ Bá Sĩ, Hoàng Hóa; **Nam Định:** Lưu Đức Ly, 9C, THCS Đào Sư Tích, Trục Ninh; **Nguyễn Thế Tiên**, 9A2, THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên; **Hưng Yên:** Trần Quốc Việt, 9D, THCS Lê Lợi; **Hải Dương:** Trịnh Quốc Bảo, 9A1, THCS Chu Văn An, Thanh Hà; **Nguyễn Đức Phương**, 9A, NK Trần Phú; **Hải Phòng:** Trần Xuân Dũng, 9A, Nguyễn Vũ Lân, 8A, PTNK Trần Phú; **Hà Nội:** Nguyễn Phạm Hiền, 9A, Hà Nội - Amsterdam; **Bắc Ninh:** Nguyễn Văn Hiền, 9B, THCS Nguyễn Cao, Quế Võ, Lưu Thị Thu Trang, 8A, THCS Yên Phong; **Hà Tây:** Cấn Văn Bằng, 9A, THCS Thạch Thất, Phùng Quang Hiệp; 9A, THCS Ba Vì; **Vĩnh Phúc:** Nguyễn Phú Cường, 9B, THCS Yên Lạc; **Phú Thọ:** Ngô Vĩnh Thọ, 9A2, Nguyễn Trung Kiên A, 8A, THCS Giầy, Phong Châu, Phú Ninh.

TỔ NGUYỄN

T3/293. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\frac{x^{20}}{y^{11}} + \frac{y^{20}}{z^{11}} + \frac{z^{20}}{x^{11}}$ trong đó x, y, z là các số dương thỏa mãn: $x + y + z = 2001$.

Lời giải. (của nhiều bạn). Sử dụng bất đẳng thức Côsi cho 20 số, trong đó có 11 số y và 8 số 667, ta có:

$$\frac{x^{20}}{y^{11} 667^8} + 11y + 8.667 \geq 20 \sqrt[20]{\frac{x^{20}}{y^{11} 667^8} \cdot y^{11} \cdot 667^8} = 20x$$

Tương tự:

$$\frac{y^{20}}{z^{11} 667^8} + 11z + 8.667 \geq 20y$$

$$\frac{z^{20}}{x^{11} 667^8} + 11x + 8.667 \geq 20z.$$

Cộng theo từng vế các bất đẳng thức trên và bằng biến đổi đơn giản, ta thu được bất đẳng thức

$$\frac{x^{20}}{y^{11}} + \frac{y^{20}}{z^{11}} + \frac{z^{20}}{x^{11}} \geq (9(x+y+z) - 3 \cdot 8.667) \cdot 667^8 = 3.667^9$$

với đẳng thức xảy ra chỉ khi $x = y = z = 667$. Vậy giá trị nhỏ nhất cần tìm là 3.667^9 .

Nhận xét. Khoảng 1/3 số bạn giải sai bài toán này dù cũng đi tới kết quả đúng là giá trị nhỏ nhất của biểu thức đạt được khi $x = y = z$. Chủ yếu phương pháp các bạn dùng hoàn toàn sai, phổ biến nhất là các bạn đi tới một bất đẳng thức đối với xyz và kết luận vì đẳng thức xảy ra khi $x = y = z$ nên giá trị nhỏ nhất đạt được khi $x = y = z$ (lưu ý tại giá trị này, xyz đạt giá trị lớn nhất với ràng buộc $x + y + z = 2001$). Nhiều bạn đi tới bất đẳng

thức đúng $\frac{x^{20}}{y^{11}} + \frac{y^{20}}{z^{11}} + \frac{z^{20}}{x^{11}} \geq x^9 + y^9 + z^9$ rồi cũng kết

luận đẳng thức xảy ra khi $x = y = z$ và đó là giá trị nhỏ nhất. Kết luận tuy đúng, nhưng thiếu cơ sở toán học, vì phải tìm xem khi đó hàm số $x^9 + y^9 + z^9$ có đạt giá trị nhỏ nhất tại giá trị $x = y = z$ hay không. Khá nhiều bạn nêu ra và giải bài toán tổng quát cho n biến.

VŨ ĐÌNH HÒA

Bài T4/293. Cho tam giác ABC và điểm M nằm trong tam giác. Đường thẳng qua M cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại D, E . Chứng

minh rằng: $S_{MBD} \cdot S_{MCE} \leq \frac{1}{64} S_{ABC}^2$.

Xác định vị trí của M để đẳng thức xảy ra.

Lời giải. Hai tam giác có chiều cao bằng nhau thì tỉ số diện tích của chúng bằng tỉ số

$$\text{cạnh đáy, nên } \frac{S_{BDM}}{S_{ABC}} = \frac{S_{BDM}}{S_{BDE}} \times \frac{S_{BDE}}{S_{BAE}} \times \frac{S_{BAE}}{S_{ABC}} = \frac{DM}{DE} \times \frac{BD}{BA} \times \frac{AE}{AC}$$

$$\text{và } \frac{S_{MEC}}{S_{ABC}} = \frac{S_{MEC}}{S_{DEC}} \times \frac{S_{DEC}}{S_{DAC}} \times \frac{S_{DAC}}{S_{ABC}} = \frac{ME}{DE} \times \frac{EC}{AC} \times \frac{DA}{BA}$$

$$\text{Do đó } \frac{S_{MBD} \times S_{MCE}}{S_{ABC}^2} =$$

$$= \frac{BD \times AD}{AB^2} \times \frac{DM \times ME}{DE^2} \times \frac{AE \times EC}{AC^2}$$

Mà $BD \times AD \leq \frac{1}{4} (BD + AD)^2 = \frac{1}{4} AB^2$ (Bất đẳng thức Côsi)

$$\text{Tương tự } DM \times ME \leq \frac{1}{4} DE^2$$

$$AE \times EC \leq \frac{1}{4} AC^2$$

GIẢI BÀI KÌ TRƯỚC

$$\text{Vậy } S_{MBD} \times S_{MCE} \leq \frac{1}{64} S_{ABC}^2$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi ba dấu đẳng thức xảy ra ở ba BĐT Côsi, nghĩa là $BD = AD$, $DM = ME$, $AE = EC$ tức M là trung điểm của trung tuyến xuất phát từ A .

Nhận xét. Nhiều bạn trình bày bài giải dài dòng, phức tạp. Các bạn sau có lời giải gọn gàng:

Vinh Phúc: Bùi Hữu Đức, 9A, THCS Vinh Yên;
Hải Dương: Nguyễn Anh Tuấn, 8₃, THCS Lê Quý Đôn;
Phú Thọ: Ngô Vĩnh Thọ, 9A2, THCS Giấy Phong Châu, Phù Ninh;
Nam Định: Nguyễn Đức Tâm, Vũ Khắc Kỳ, 9A7, THCS Trần Đăng Ninh;
Hải Phòng: Trần Xuân Dũng, 9A, THPT Trần Phú;
Hà Tĩnh: Trần Danh Tuấn, 9/2, THCS Lê Văn Thiêm.

VŨ KIM THỦY

Bài T5/293. Cho tam giác ABC với I là tâm đường tròn nội tiếp và G là trọng tâm. Biết rằng $AI \perp IG$. Chứng minh:

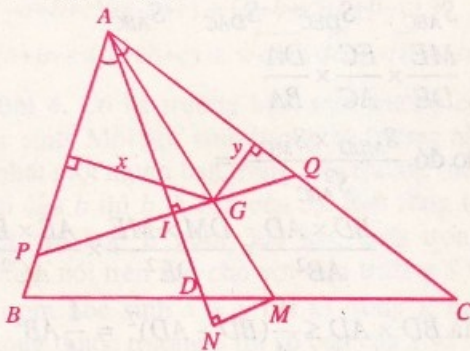
$$AB + AC > 2BC.$$

Lời giải. Cách 1. Nhận xét rằng nếu $\triangle ABC$ cân tại A thì $AI \equiv AG$, vì phạm giả thiết $AI \perp IG$. Giả sử rằng $AB < AC$, AI cắt BC tại D .

Dựng $MN \perp AD$ tại N . Khi đó $\widehat{ADC} = \widehat{ABC} + \widehat{BAD} > \widehat{ACB} + \widehat{DAC}$. Nhưng vì $\widehat{ADC} + \widehat{ADB} = 180^\circ$ nên $\widehat{ADC} > 90^\circ$.

Từ đó D nằm giữa I và N , suy ra $IN > ID$.

$$\text{Mặt khác từ } IG \parallel MN \text{ ta có } \frac{AI}{IN} = \frac{AG}{GM} = 2 \\ \Rightarrow AI = 2IN > 2ID$$



Áp dụng tính chất đường phân giác trong một tam giác, ta được

$$\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{DC} = \frac{AI}{ID} > 2$$

$$\Rightarrow AB + AC > 2(BD + DC) = 2BC \text{ (đpcm).}$$

Cách 2. Gọi P, Q lần lượt là các giao điểm của đường thẳng IG với các cạnh AB và AC ; x, y là khoảng cách từ G đến các cạnh đó. Gọi h_b, h_c là các đường cao của $\triangle ABC$ kẻ từ B, C .

Khi đó $x = \frac{1}{3}h_c$; $y = \frac{1}{3}h_b$. Nhận thấy $\triangle APQ$ cân tại $A \Rightarrow AP = AQ$, từ đó $(x + y)AP = 2S_{APQ} = 2AP \cdot r$ (trong đó r là bán kính đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$). Suy ra $x + y = 2r$ hay $\frac{1}{3}(h_b + h_c) = 2r$

Sử dụng các công thức

$$h_b = \frac{2S_{ABC}}{b} = \frac{(a + b + c)r}{b};$$

$$h_c = \frac{(a + b + c)r}{c} \text{ ta được}$$

$$(a + b + c) \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) = 6.$$

Áp dụng BĐT $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} > \frac{4}{b + c}$ ($b > 0, c > 0, b \neq c$) ta có $b + c > 2a$ hay $AB + AC > 2BC$ (đpcm).

Nhận xét. Rất nhiều bạn đã gửi lời giải về Tòa soạn và đều giải đúng. Các bạn có lời giải gọn hơn cả là:

Hà Nội: Nguyễn Thanh Tùng, 8A1, THCS Láng Thượng;
Phú Thọ: Lại Trường Xuân, 9A, THCS Giấy, Phong Châu, Phù Ninh;
Hải Dương: Lê Đình Huy, 9A, THCS Nguyễn Trãi, Nam Sách;
Nam Định: Phạm Kim Hùng, 9A2, THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên;
Phạm Văn Hải, 9C, THCS Đào Sư Tích, Trục Ninh;
Thanh Hóa: Nguyễn Ngọc Tú, 9B, THCS Lê Đình Liên, Yên Định;
Bùi Anh Việt, 9B, THCS Trần Mai Ninh, T. Thanh Hóa;
Nghe An: Nguyễn Ngọc Cường, 9B, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu;
Khánh Hòa: Võ Thông Thái, 9B, THCS Ngô Gia Tự, Cam Nghĩa, Cam Ranh;
Hải Phòng: Nguyễn Thanh Huyền, 8A, Phạm Anh Minh, 9A, Đặng Ngọc Chiến, 8B, THPT NK Trần Phú.

HỒ QUANG VINH

Bài T6/293. Tìm tất cả các giá trị nguyên của biểu thức $\frac{12 - 6x}{16x^4 - 219x + 249}$ trong đó x là biến số thực.

Lời giải. (của bạn Trần Mạnh Hà, 12A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc)

$$\text{Ta có: } 16x^4 - 219x + 249 = \\ = (4x^2 - 7)^2 + 56x^2 - 219x + 200 \\ \text{mà } 56x^2 - 219x + 200 > 0 \text{ (do } \Delta < 0) \\ \text{do đó } 16x^4 - 219x + 249 > 0 \text{ (}\forall x\text{)}$$

GIẢI BÀI KÌ TRƯỚC

$$\text{Đặt } f(x) = \frac{12 - 6x}{16x^4 - 219x + 249}$$

Ta chứng minh

$$a) f(x) \leq 2 \Leftrightarrow 16x^4 - 216x + 243 \geq 0 \Leftrightarrow (4x^2 - 9)^2 + 18(2x - 3)^2 \geq 0. \text{ Dấu bằng khi } x = \frac{3}{2}.$$

$$b) f(x) > -1 \Leftrightarrow 16x^4 - 225x + 261 > 0 \Leftrightarrow (4x^2 - 9)^2 + 72x^2 - 225x + 180 > 0 \text{ đúng vì tam thức } 72x^2 - 225x + 180 \text{ có } \Delta = -1215 < 0$$

Vậy $-1 < f(x) \leq 2$. Với $x = 2$ thì $f(x) = 0$. Hàm $f(x)$ liên tục nên đi qua tất cả các giá trị trong $[0, 2]$. Vậy $\exists x$ để $f(x) = 1$. Như vậy, tất cả các giá trị nguyên của $f(x)$ là $0, 1, 2$.

Nhận xét. Nhiều bạn có lời giải tốt như :

Phan Thành Nam, 11T2, THPT Lương Văn Chánh, Phú Yên ; Nguyễn Mạnh Long, 12N, THPT Thăng Long, Hoàng Ngọc Minh, 11A chuyên Hùng Vương, Phú Thọ ; Trần Tiến Hoàng, 12 chuyên Lê Quý Đôn, Quảng Trị ; Nguyễn Lâm Tuyền, 12 chuyên Hoàng Văn Thụ, Hòa Bình ; Lê Bảo Khánh, 10A Toán, ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội ; Lê Diệp Kiều Trang, 12T, Lương Thế Vinh, Đồng Nai ; Nguyễn Lâm Hưng, PTNK ĐHQG Tp. Hồ Chí Minh ; Trần Ngọc Trung, 11T, Lê Quý Đôn, Quy Nhơn, Bình Định ; Nguyễn Huy Cung, 12T, THPT Lê Khuyết, Quảng Ngãi. Cũng có một vài bạn cho đáp số không đúng.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T7/293. Xét dãy số (u_n) ($n = 1, 2, 3, \dots$) được xác định bởi :

$$u_1 = a > 0, u_{n+1} = u_n + \left[\sqrt{u_n} \right] - \left[\frac{u_n}{3} \right]$$

với mọi $n = 1, 2, 3, \dots$

(kí hiệu $[x]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x). Chứng minh rằng dãy số này có giới hạn và tìm giới hạn đó.

Lời giải. (của đa số các bạn)

Từ cách xác định dãy (u_n) ta có nhận xét sau: Nếu $\exists m \in \mathbb{N}^*$ để $u_m = u_{m+1}$ thì $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u_m$.

- Khi $a \in (0; 1) \cup [3; 4) \cup [6; 12)$ thì $u_1 = u_2$ nên $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a$.

- Khi $a \in [1; 2) \cup [4; 5)$ thì $u_3 = u_4 = a + 2$ nên $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a + 2$

- Khi $a \in [2; 3) \cup [5; 6)$ thì $u_2 = u_3 = a + 1$ nên $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a + 1$

- Khi $a \in [12; 13)$ thì $u_2 = u_1 - 1$ nên $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a - 1 = 11 + \{a\}$.

Tương tự, khi $a \in [13; 14)$ thì $u_2 = u_1 - 1 \in [12; 13)$ và $u_3 = u_2 - 1$ nên $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u_3 = a - 2 = 11 + \{a\}$.

Ta chứng minh bằng quy nạp theo m : Nếu tồn tại $u_i \in [12 + m; 12 + m + 1)$ thì tồn tại $u_j \in [11, 12)$ với j đủ lớn.

Thật vậy, nếu $u_i \in [12 + k + 1, 12 + k + 2)$ thì $u_{i+1} = u_i + \left[\sqrt{u_i} \right] - \left[\frac{u_i}{3} \right] < u_i$.

Suy ra $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 11 + \{a\}$.

Kết luận :

- Nếu $a \in (0; 1) \cup [3; 4) \cup [6; 12)$ thì $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a$

- Nếu $a \in [1; 2) \cup [4; 5)$ thì $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a + 2$

- Nếu $a \in [2; 3) \cup [5; 6)$ thì $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a + 1$

- Nếu $a \geq 12$ thì $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 11 + \{a\}$.

Nhận xét. Các bạn sau đây có lời giải tốt :

Hòa Bình: Vũ Hữu Phương, 11CT, THPT Hoàng Văn Thụ ; Vinh Phúc : Cao Việt Dũng, Nguyễn Văn Giáp, Nguyễn Xuân Trường, Trần Bá Bách, 12A1, Nguyễn Duy Hưng, 11B2, THPT chuyên Vĩnh Phúc ; Đồng Tháp: Nguyễn Võ Vĩnh Lộc, 11T, THPT Sa Đéc ; Đồng Nai: Lê Phương, 11T1, THPT chuyên Lương Thế Vinh ; Ninh Bình: Trịnh Mỹ Châu, 11T, THPT chuyên Lương Văn Tụy ; Phú Yên: Phan Thành Nam, 12T2, THPT chuyên Lương Văn Chánh, Huỳnh Thị Thùy Lam, 8C1, THCS Phú Lâm ; Quảng Ngãi: Nguyễn Duy Thành, 11 Lý, Trần Thái An Nghĩa, 12T2, THPT chuyên Lê Khiết ; Thanh Hóa : Bùi Hồng Quyền, 11T1, THPT Lam Sơn, Nguyễn Minh Công, 12T, THPT Lam Sơn ; Quảng Ngãi: Nguyễn Hải Duyên, 11T, Trần Tiến Hoàng, 12T, THPT chuyên Lê Quý Đôn ; Hà Nội: Lê Hùng Việt Bảo, 10A Toán, Vũ Đình Thế, 11A Toán, Nguyễn Hữu Thuận, 11B Toán, Nguyễn Đức Nhật, 12B Toán, ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội ; Tp. Hồ Chí Minh: Nguyễn Lâm Hưng, 11T, ĐHQG tp. HCM ; Bắc Giang: Nguyễn Tuấn Hương, 12A2, THPT Việt Yên ; Khánh Hòa: Nguyễn Tiến Việt, 10T, THPT chuyên Lê Quý Đôn ; Hải Dương: Nguyễn Thành Nam, 11T, THPT Nguyễn Trãi ; Lào Cai: Nguyễn Quốc Tuấn, 12A, THPT Lào Cai ; Nghệ An : Nguyễn Đức Nam, 10A1, PTTC Toán - Tin, ĐH Vinh.

NGUYỄN VĂN MẬU

GIẢI BÀI KÌ TRƯỚC

Bài T8/293. Chứng minh rằng

$$\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{1+k^2} C_{2n}^{n+k} < 0$$

trong đó C_n^m là tổ hợp chập m của n .

Lời giải. (của các bạn Vũ Khắc Kỷ, Nguyễn Đức Tâm, 9A7, THCS Trần Đăng Ninh, Nam Định; Trần Mạnh Tuấn, 9C, THCS Triệu Thị Trinh, Triệu Sơn, Thanh Hóa; và nhiều bạn THPT).

Ký hiệu $a_k = \frac{C_{2n}^{n+k}}{1+k^2}$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Chúng ta sẽ chứng minh $a_1 > a_2 > \dots > a_n$.

Với $k = 1, 2, \dots, n-1$ ta có

$$\frac{C_{2n}^{n+k}}{C_{2n}^{n+k+1}} = \frac{(n+k+1)!(n-k-1)!}{(n+k)!(n-k)!} = \frac{n+k+1}{n-k} > 1$$

Như vậy $C_{2n}^{n+1} > C_{2n}^{n+2} > \dots > C_{2n}^{2n}$

Và rõ ràng $\frac{1}{1+1^2} > \frac{1}{1+2^2} > \dots > \frac{1}{1+n^2}$.

Do đó $a_1 > a_2 > \dots > a_n$

Hệ quả $\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{1+k^2} \cdot C_{2n}^{n+k} =$

$$= \begin{cases} (-a_1 + a_2) + (-a_3 + a_4) + \dots + (-a_{n-1} + a_n) & \text{nếu } n \text{ chẵn} \\ (-a_1 + a_2) + (-a_3 + a_4) + \dots + (-a_{n-2} + a_{n-1}) - a_n & \text{nếu } n \text{ lẻ} \end{cases}$$

< 0 (đpcm).

Nhận xét. Tòa soạn nhận được lời giải của 71 bạn, trong đó có 3 bạn THCS, có 70 bạn đã giải bài toán theo cách trên.

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T9/293. Cho tam giác ABC với BE , CF là các đường phân giác trong. Các tia EF , FE cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác theo thứ tự tại M , N . Chứng minh rằng

$$\frac{1}{BM} + \frac{1}{CN} = \frac{1}{AM} + \frac{1}{AN} + \frac{1}{BN} + \frac{1}{CM} \quad (*)$$

Lời giải. (Nguyễn Nam Chấn, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; Đinh Duy Hiến, 12T, THPT chuyên Hoàng Văn Thụ, Hòa Bình)

Kí hiệu: $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$.

– Áp dụng định lý Ptolômê vào hai tứ giác nội tiếp $AMBC$ và $ANCB$ ta có:

$$aAM + bBM = cCM \quad (1)$$

$$aAN + cCN = bBN \quad (2)$$

Từ (1) và (2)

ta được:

$$a(AM + AN) = b(BN - BM) + c(CM - CN),$$

hay là

$$AM + AN = \frac{b}{a}(BN - BM) + \frac{c}{a}(CM - CN) \quad (3)$$

– Mặt khác, lại có:

$$\triangle AMF \sim \triangle NBF \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{AM}{BN} = \frac{MF}{BF} \quad (4)$$

Cũng vậy:

$$\triangle ANF \sim \triangle MBF \Rightarrow \frac{AN}{BM} = \frac{AF}{MF} \Rightarrow \quad (5)$$

Từ (4), (5) và tính chất đường phân giác có:

$$\frac{AM \cdot AN}{BM \cdot BN} = \frac{AF}{BF} = \frac{b}{a} \quad (6)$$

Chứng minh tương tự, ta được:

$$\frac{AM \cdot AN}{CM \cdot CN} = \frac{AE}{CE} = \frac{c}{a} \quad (7)$$

Từ (3), (6) và (7) ta thu được hệ thức (*) cần tìm.

Chú ý. Chỉ từ (2), (6) và (7) ta có hệ thức:

$$\frac{1}{AM} + \frac{1}{CM} = \frac{1}{BM} \quad (8)$$

Hoàn toàn tương tự, từ (1), (6) và (7) ta được:

$$\frac{1}{AN} + \frac{1}{BN} = \frac{1}{CN} \quad (9)$$

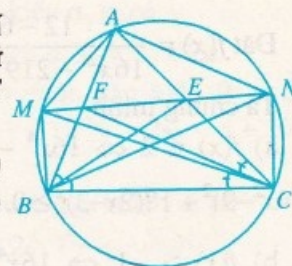
Và từ (8) và (9) ta cũng được (*).

Nhận xét. 1) Nếu chỉ xét một tia $[EF]$ hoặc $[FE]$ thì ta được hệ thức (8) và (9); một trong hai hệ thức này cho ta biết quan hệ giữa ba khoảng cách từ M (hoặc N) đến các đỉnh của tam giác ABC . Xét về khía cạnh tính chất hình học liên quan đến đường phân giác và đường tròn ngoại tiếp một tam giác thì (8) hoặc (9) là đẹp hơn (*).

2) Một số bạn chứng minh (*) bằng các cách khác:

• sử dụng định lý hàm sin và định lý Ptolômê cũng thiết lập được (8), (9).

• dựng hình chiếu vuông góc của M , N , E , F lên các cạnh của tam giác ABC .



GIẢI BÀI KÌ TRƯỚC

Ngoài ra bạn **Trần Bắc**, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc có nhận xét thêm : nếu $\triangle ABC$ không cân ở B và thay phần giác trong BE bằng phần giác ngoài, thì trong

(*) $\frac{1}{CM}$ được thay bằng $-\frac{1}{CM}$.

4) Ngoài các bạn đã nêu tên, các bạn sau đây có lời giải gọn hơn cả :

Hà Nội : **Trần Tuấn Anh**, **Lê Bảo Khánh**, 10A Toán, ĐHKHTN – ĐHQG Hà Nội ; **Vĩnh Phúc :** **Nguyễn Văn Giáp**, 12A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc ; **Phú Thọ :** **Hoàng Ngọc Minh**, 11A1, THPT chuyên Hùng Vương, Việt Trì ; **Hải Dương :** **Phan Tuấn Thành**, 10T, Nguyễn Thành Nam, 11T, Nguyễn Anh Ngọc, 11A1, THPT chuyên Nguyễn Trãi ; **Hải Phòng :** **Trần Xuân Dũng**, 9A, THPT NK Trần Phú ; **Hồa Bình :** **Hà Hữu Cao** **Trình**, 11T, Nguyễn Lâm Tuyền, 12T, THPT chuyên Hoàng Văn Thụ ; **Thanh Hóa :** **Mai Quang Thành**, 11T1, **Lê Mạnh Trung**, 11L, THPT Lam Sơn ; **Nghệ An :** **Đậu Minh Hoàng**, 10A1, PTCT, ĐH Vinh ; **Quảng Trị :** **Phan Quốc Hưng**, 12B, THPT Hải Lăng ; **Quảng Ngãi :** **Nguyễn Huy Khiêm**, 10T1, **Nguyễn Huy Cung**, 12T2, THPT Lê Khiết ; **Phú Yên :** **Huỳnh Thị Thủy Lam**, 8C1, THCS Phú Lâm, Tuy Hòa, **Phùng Trọng Thúc**, 11T2, THPT chuyên Lương Văn Chánh ; **Đồng Tháp :** **Lê Thanh Nhân**, 12T, THPT thị xã Cao Lãnh.

NGUYỄN ĐĂNG PHÁT

Bài T10/293. Cho tứ diện $ABCD$ với tam diện vuông đỉnh A . Xác định vị trí điểm M để biểu thức sau là nhỏ nhất :

$$\sqrt{3}MA + MB + MC + MD$$

Lời giải.

Cách 1. (của bạn **Hoàng Ngọc Minh**, 11A1, THPT Hùng Vương, **Phú Thọ**)

Vì các vectơ $\frac{\overrightarrow{AB}}{AB}$, $\frac{\overrightarrow{AC}}{AC}$, $\frac{\overrightarrow{AD}}{AD}$ có độ dài bằng 1 và đôi một vuông góc với nhau nên :

$$\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{AB} + \frac{\overrightarrow{AC}}{AC} + \frac{\overrightarrow{AD}}{AD} \right)^2 = 1 + 1 + 1 = 3 \Rightarrow \left| \frac{\overrightarrow{AB}}{AB} + \frac{\overrightarrow{AC}}{AC} + \frac{\overrightarrow{AD}}{AD} \right| = \sqrt{3}$$

Từ đó, với mọi điểm M ta có :

$$\begin{aligned} & \sqrt{3}MA + MB + MC + MD \\ &= \left| \frac{\overrightarrow{AB}}{AB} + \frac{\overrightarrow{AC}}{AC} + \frac{\overrightarrow{AD}}{AD} \right| |\overrightarrow{AM}| + \frac{\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{AB}}{AB} + \\ &+ \frac{\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{AC}}{AC} + \frac{\overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{AD}}{AD} \geq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \geq \left(\frac{\overrightarrow{AB}}{AB} + \frac{\overrightarrow{AC}}{AC} + \frac{\overrightarrow{AD}}{AD} \right) \overrightarrow{AM} + \frac{\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{AB}}{AB} + \\ &+ \frac{\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{AC}}{AC} + \frac{\overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{AD}}{AD} = \\ &= \frac{(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}) \cdot \overrightarrow{AB}}{AB} + \frac{(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC}) \cdot \overrightarrow{AC}}{AC} + \\ &+ \frac{(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MD}) \cdot \overrightarrow{AD}}{AD} \\ &= \frac{\overrightarrow{AB}^2}{AB} + \frac{\overrightarrow{AC}^2}{AC} + \frac{\overrightarrow{AD}^2}{AD} = AB + AC + AD \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi M trùng A .

Vậy : $(\sqrt{3}MA + MB + MC + MD)$ nhỏ nhất khi M trùng A và giá trị nhỏ nhất đó bằng $(AB + AC + AD)$

Cách 2. (của bạn **Phan Thành Nam**, 11T2, THPT Lương Văn Chánh, **Phú Yên**).

Lấy M bất kì. Gọi B_1 , C_1 , D_1 lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên các đường thẳng AB , AC , AD . Ta có :

$$\begin{aligned} \sqrt{3}MA &= \sqrt{3(AB_1^2 + AC_1^2 + AD_1^2)} \geq \\ &\geq AB_1 + AC_1 + AD_1 ; \\ MB &\geq B_1B ; MC \geq C_1C ; MD \geq D_1D \\ \text{Vậy } \sqrt{3}MA + MB + MC + MD &\geq \\ &\geq (AB_1 + B_1B) + (AC_1 + C_1C) + (AD_1 + D_1D) \\ &\geq AB + AC + AD \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi M trùng A . Từ đó ta có kết luận cần thiết cho bài toán.

Cách 3. (của bạn **Lê Diệp Kiều Trang**, 12T, THPT Lương Thế Vinh, **Đồng Nai**).

Vì tứ diện $ABCD$ có tam diện đỉnh A là tam diện vuông nên ta lập hệ tọa độ vuông góc $Axyz$ sao cho $A(0; 0; 0)$; $B(b; 0; 0)$; $C(0; c; 0)$; $D(0; 0; d)$ với $b = AB$; $c = AC$; $d = AD$. Với điểm $M(x, y, z)$ bất kì ta có :

$$\begin{aligned} \sqrt{3}MA &= \sqrt{3(x^2 + y^2 + z^2)} \geq \\ &\geq |x+y+z| \text{ (Theo bất đẳng thức Bunhiacôpxki)} \\ MB &= \sqrt{(x-b)^2 + y^2 + z^2} \geq |b-x| \end{aligned}$$

GIẢI BÀI KÌ TRƯỚC

$$MC = \sqrt{x^2 + (y-c)^2 + z^2} \geq |c-y|$$

$$MD = \sqrt{x^2 + y^2 + (z-d)^2} \geq |d-z|$$

$$\Rightarrow \sqrt{3} MA + MB + MC + MD \geq$$

$$\geq |x+y+z| + |b-x| + |c-y| + |d-z|$$

$$\geq |x+y+z+b-x+c-y+d-z| = |b+c+d| = b+c+d$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=0$.
Từ đó ta có kết luận cần thiết cho bài toán.

Nhận xét. 1) Bài toán này có 81 bạn tham gia giải, (chỉ có một bạn giải sai) với ba hướng giải cơ bản nêu trên.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt: **Vĩnh Phúc:** Nguyễn Xuân Trường, 12A1, Kiểu Ngọc Thanh, 11B3, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Quảng Ngãi:** Nguyễn Duy Thành, 11 Lí, Trần Thái An Nghĩa, 12T2, THPT chuyên Lê Khiết; **Nghệ An:** Hoàng Vũ Tài, 10A2, Nguyễn Tú Anh, 11A1, THPT Phan Bội Châu; **Hòa Bình:** Nguyễn Lâm Tuyền, 12T, Hà Hữu Cao Trình, 11T, Vũ Hữu Phương, 11T, THPT Hoàng Văn Thụ; **Hà Nội:** Lê Bảo Khánh, 10A Toán, ĐHKHTN – ĐHQG; Nguyễn Chí Hiệp, 11A1, Phan Lạc Việt, 11A2, khối PTCT – Tin, ĐHSP Hà Nội.

NGUYỄN MINH HÀ

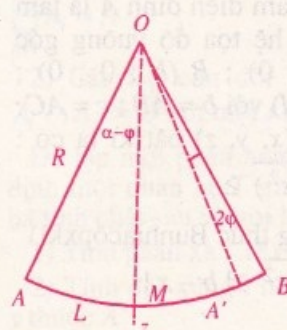
Bài L1/293. Một vật AB khối lượng M , đồng chất, tiết diện đều, có dạng một cung tròn chiều dài L , bán kính cung tròn là R , vật được treo vào điểm O cố định nhờ 2 sợi dây nhẹ OA và OB cùng chiều dài bằng R (hình vẽ). Kích thích cho vật dao động nhỏ trong mặt phẳng thẳng đứng.

Chứng minh vật dao động điều hòa.

Tính chu kỳ dao động. Bỏ qua ma sát.

Lời giải. Đặt $\widehat{AOB} = 2\alpha = \frac{L}{R}$. Xét vật lệch

khỏi vị trí cân bằng một góc φ rất nhỏ. Kí hiệu A' là điểm đối xứng với A , ta có $\widehat{A'OB} = 2\varphi$. Áp dụng phương trình chuyển động quay



của vật quanh trục O nằm ngang, ta có $I = MR^2$. Mômen trọng lực hai phần MA và MA' triệt tiêu nhau, nên chỉ còn mômen trọng lực của cung $A'B$ tác dụng lên vật $\mathcal{M}_{A'B} = m_{A'B}gR\sin(\alpha - \varphi + \varphi) =$

$$\left(\frac{MR}{L} \cdot 2\varphi\right) gR\sin\alpha = \frac{2MgR^2 \sin\alpha}{L} \varphi.$$

Ta có phương trình (do mômen này có tác dụng kéo vật trở về vị trí cân bằng): $I\varphi'' =$

$$-\mathcal{M}_{A'B} \Rightarrow \varphi'' + \frac{2g\sin\alpha}{L} \varphi = 0 : \text{chứng tỏ vật}$$

AB dao động điều hòa với tần số góc $\omega =$

$$\sqrt{\frac{2g\sin\alpha}{L}}, \text{ với chu kỳ } T = \pi \sqrt{\frac{2L}{g\sin\left(\frac{L}{2R}\right)}}.$$

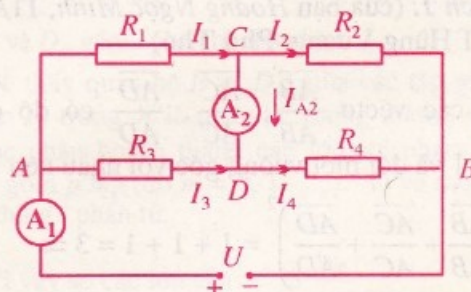
Chú ý rằng có thể giải bằng cách khác: xem vật như một con lắc vật lý, tìm vị trí khối tâm G của con lắc và áp dụng lập luận như với con lắc vật lý.

Nhận xét. Một số em tìm được đáp số nhưng lập luận thiếu chặt chẽ. Các em có lập luận hợp lí:

Hà Tĩnh: Nguyễn Xuân Đức, Nguyễn Văn Tý, 11 Lí, THPT chuyên Hà Tĩnh; **Thanh Hóa:** Lê Văn Dương, 12A2, THPT Hậu Lộc I; **Yên Bái:** Ngọc Anh, 11A2, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành; **Phú Thọ:** Vũ Quốc Hiền, 11B, Lưu Quốc Tuấn, 12B1, THPT chuyên Hùng Vương.

MAI ANH

Bài L2/293. Bốn điện trở có giá trị 1, 2, 3, 4(Ω) được mắc vào sơ đồ mạch điện (chưa rõ vị trí) như hình dưới. Biết $U = 10(V)$. Ampe kế



A_2 chỉ 2(A). Xác định số chỉ Ampe kế A_1 biết số này là số nguyên. Bỏ qua điện trở các Ampe kế.

Lời giải. Kí hiệu các điện trở như trên hình vẽ. Giả sử dòng điện chạy qua A_2 có chiều từ $C \rightarrow D$. Chọn $V_B = 0 \Rightarrow V_A = 10V$. Tại C ta có $I_1 = I_2 + I_{A2}$, suy ra $\frac{10 - V_C}{R_1} = \frac{V_C}{R_2} + 2$ (1).

GIẢI BÀI KÌ TRƯỚC

Tương tự, tại D : $I_4 = I_3 + I_{A2}$, suy ra

$$\frac{V_C}{R_4} = \frac{10 - V_C}{R_3} + 2 \quad (2).$$
 Từ (1) và (2) rút ra :

$$R_1 R_2 R_3 + R_1 R_2 R_4 + R_1 R_3 R_4 + R_2 R_3 R_4 + 5(R_1 R_4 - R_2 R_3) = 0 \quad (3)$$

Dễ dàng nhận thấy :

$X = R_1 R_2 R_3 + R_1 R_2 R_4 + R_1 R_3 R_4 + R_2 R_3 R_4 = 50$ không phụ thuộc vào cách chọn các giá trị điện trở. Do vậy từ (3) suy ra :

$$50 + 5(R_1 R_4 - R_2 R_3) = 0$$

$$\Rightarrow R_2 R_3 = 10 + R_1 R_4 > 10$$

$$\Rightarrow R_2 R_3 = 12 \text{ và } R_1 R_4 = 2\Omega.$$

$$\text{Bởi vì } R_{AB} = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} + \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4}$$

$$= \frac{50}{(R_1 + R_3)(R_2 + R_4)} \text{ nên để số chỉ ampe kế}$$

A_1 là số nguyên với :

$$I_{A1} = \frac{U}{R_{AB}} = \frac{(R_1 + R_3)(R_2 + R_4)}{5}$$

thì tích $(R_1 + R_3)(R_2 + R_4)$ phải chia hết cho 5, nghĩa là phải có : hoặc $R_1 + R_3 = 5\Omega$, hoặc $R_2 + R_4 = 5\Omega$.

Suy ra 2 cách mắc các điện trở : $R_1 = 1\Omega$; $R_4 = 2\Omega$; $R_2 = 3\Omega$; $R_3 = 4\Omega$ và $R_1 = 2\Omega$; $R_4 = 1\Omega$; $R_2 = 4\Omega$; $R_3 = 3\Omega$

Dễ dàng thấy rằng nếu đồng thời đổi chỗ R_1 với R_2 , R_3 với R_4 thì số chỉ ampe kế A_2 vẫn là 2(A) nhưng dòng điện qua A_2 có chiều từ D đến C . Như vậy có 4 cách mắc các điện trở. Với 4 cách mắc đó, ta đều có $R_{AB} = 2\Omega$ và số chỉ ampe kế A_1 đều là $I_{A1} = \frac{U}{R_{AB}} = 5(A).$

Nhận xét. Các em có lời giải đầy đủ và đúng tuy lập luận chưa đầy đủ, chặt chẽ. **Đà Nẵng:** Nguyễn Văn Chí Bửu, 11A2, THPT chuyên Lê Quý Đôn ; **Đồng Tháp:** Nguyễn Hồng Thái, 12T, THPT Đồng Tháp, Cao Lãnh ; **Nam Định:** Trần Vũ Diệu, 11 Toán 1, THPT chuyên Lê Hồng Phong ; **Hải Phòng:** Nguyễn Hoài Phương, 12A1, THPT Vĩnh Bảo ; **Bắc Ninh:** Vũ Văn Toán, 10CT, Phạm Công Nam, 11A1, THPT NK Hàn Thuyên ; **Hải Dương:** Nguyễn Đức Hoàng, 11 Toán, Nguyễn Anh Ngọc, 11A1, THPT chuyên Nguyễn Trãi ; **Vinh Phúc:** Trần Đức Phú, 10A3, Chu Anh Dũng, Cao Mạnh Linh, Tạ Ngọc Bình, 11A3, THPT chuyên Vinh Phúc ; **Nguyễn Hồng Anh,** 12E, THPT Nguyễn Viết Xuân, Vinh Tường ; **Nghệ An:** Nguyễn Thị Thủy Linh, Nguyễn Thị Ngọc Bích, 11A3, Trần Quang Vũ, 11A7, Nguyễn Đức Giang, A5, K28, THPT Phan Bội Châu ; **Lê Đình Hưng,** 10B1, PTCT-T, ĐH Vinh.

MAI ANH

Đón đọc THPT SỐ 298 (4/2002)

- ❖ Dùng ẩn phụ để giải phương trình có dấu căn
- ❖ Đề thi vào lớp 10 các lớp chuyên ĐH Vinh
- ❖ Sử dụng tích ngoài hai vectơ vào giải toán
- ❖ Bàn tiếp về phương pháp nghiệm kép
- ❖ Một số phương pháp giải toán tìm cực trị hàm số trong kì thi tuyển sinh Đại học
- ❖ Nghịch lí về phân chia giải thưởng thi đấu đối kháng.
- ❖ Các bạn sẽ biết kết quả các cuộc chơi : Ai biết nhiều hơn ? Sắp xếp đèn trang trí, Đón xuân giải phương trình chữ...

THTT

PROBLEMS IN THIS ISSUE

(Tiếp trang 13)

T9/297. The circle with center I and radius r touches the sides $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ of a triangle ABC respectively at M , N , P . Let S be the area of $\triangle ABC$, let h_a , h_b , h_c be the measures of the altitudes of $\triangle ABC$ issued respectively from A , B , C . Prove that :

$$1) 4S^2 = ab.MN^2 + bc.NP^2 + ca.PM^2$$

$$2) \frac{MN^2}{h_a h_b} + \frac{NP^2}{h_b h_c} + \frac{PM^2}{h_c h_a} = 1$$

T10/297. Let $OABC$ be a tetrahedron, right at O (i. e. the angles AOB , BOC , COA are right). Let α , β , γ be the angles formed by the faces ABC respectively with the faces OAC , OCA , OAB . Find the greatest value of the expression

$$\left(\frac{1}{\tan \alpha \tan \beta} + \frac{1}{\tan \beta \tan \gamma} + \frac{1}{\tan \gamma \tan \alpha} \right)^2 + \frac{6}{\tan^2 \alpha \tan^2 \beta \tan^2 \gamma}$$



Về bài toán PHƯƠNG TRÌNH TIẾP TUYẾN

NGUYỄN ANH DŨNG
(Thanh Hóa)

Nhiều người đã quen giải các bài toán về phương trình tiếp tuyến bằng hai cách dựa trên cơ sở mệnh đề sau:

Mệnh đề 1. Đường thẳng $y = ax + b$ là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại $x = x_0$ khi và chỉ khi thỏa mãn 1 trong 2 điều kiện sau :

- 1) $f(x_0) = ax_0 + b$ và $f'(x_0) = a$ (cách 1)
- 2) Phương trình $f(x) = ax + b$ có nghiệm bội $x = x_0$. (cách 2)

Nói riêng ở cách 2 nếu $f(x) = ax + b$ là phương trình bậc 2 thì nghiệm bội là nghiệm kép.

Theo "Tài liệu hướng dẫn giảng dạy Toán 12" (sách chỉnh lý hợp nhất 2000 - NXBGD) thì cách 2 MĐ1 là "thiếu cơ sở lý thuyết" và không được dùng. Tuy nhiên nếu chỉ sử dụng cách 1 MĐ 1 thì nhiều bài toán dạng này phải sử dụng nhiều thủ thuật biến đổi rất phức tạp.

Hai bài báo "Nhìn lại khái niệm nghiệm kép của phương trình và vấn đề đường cong tiếp xúc với trục hoành" (THIT 5/1998) và "Một số vấn đề về nghiệm bội của phương trình" (THIT 9/1998) đã đề cập dưới dạng tổng quát mối liên hệ giữa "nghiệm bội" và "tiếp xúc". Tuy nhiên trong bài đầu chỉ xét với hàm số đa thức còn bài thứ hai do tính tổng quát của vấn đề nên không tránh khỏi sự phức tạp đối với học sinh phổ thông.

Ta sẽ nghiên cứu cơ sở lý thuyết của cách 2 MĐ1, tức là *phương pháp nghiệm kép* đối với các hàm số đa thức hoặc phân thức hữu tỉ mà cách chứng minh phù hợp với kiến thức toán ở trường phổ thông.

Xét đa thức $P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$. Ta nói $x = x_0$ là nghiệm bội cấp k của $P(x)$ nếu $P(x) = (x - x_0)^k \cdot Q(x)$, trong đó $k > 1$, $k \in \mathbb{N}$ và $Q(x)$ là đa thức thỏa mãn $Q(x_0) \neq 0$ ($Q(x)$ có thể

là hằng số). Ta gọi tắt x_0 là nghiệm bội của $P(x)$ khi không chỉ cần chỉ ra số k . **Nghiệm bội cấp 2 gọi là nghiệm kép của đa thức.**

Dễ dàng chứng minh rằng:

Mệnh đề 2. Đa thức $P(x)$ có nghiệm bội x_0 khi và chỉ khi $P(x_0) = 0$ và $P'(x_0) = 0$.

Từ đó theo cách 1 MĐ 1 ta có ngay:

Mệnh đề 3. Đường thẳng (d) với phương trình $y = ax + b$ là tiếp tuyến của đồ thị (C_1) của hàm số $y = P(x)$ tại điểm $x = x_0$ khi và chỉ khi phương trình $P(x) - (ax + b) = 0$ có nghiệm bội $x = x_0$.

Bây giờ ta xét tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{U(x)}{V(x)}$.

Mệnh đề 4. Đường thẳng (d) với phương trình $y = ax + b$ là tiếp tuyến của đồ thị (C_2) của hàm số $y = \frac{U(x)}{V(x)}$ tại điểm $x = x_0$ khi và chỉ khi phương trình $U(x) - (ax + b)V(x) = 0$ với $V(x_0) \neq 0$ có nghiệm bội $x = x_0$.

Chứng minh:

Xét đa thức $P(x) = U(x) - axV(x) - bV(x)$

a) Giả sử đa thức $P(x)$ có nghiệm bội $x = x_0$ thì $P(x_0) = 0$ và $P'(x_0) = 0$ theo MĐ 2. Từ đó có

$$U(x_0) = ax_0 V(x_0) + bV(x_0) \quad (1)$$

$$U'(x_0) - ax_0 V'(x_0) - aV(x_0) - bV'(x_0) = 0 \quad (2)$$

Nhân 2 vế của (2) với $V(x_0) \neq 0$ ta được:

$$V(x_0)U'(x_0) - V'(x_0)(ax_0 V(x_0) + bV(x_0)) = aV^2(x_0) \quad (3)$$

Thay (1) vào (3) ta có

$$V(x_0)U'(x_0) - U(x_0)V'(x_0) = aV^2(x_0)$$

$$\text{hay } \frac{V(x_0)U'(x_0) - U(x_0)V'(x_0)}{V^2(x_0)} = a \quad (4)$$

Từ (1) và (4) có $y(x_0) = ax_0 + b$ và $y'(x_0) = a$, do đó (d) là tiếp tuyến của (C_2) theo cách 1 MĐ1.

b/ Giả sử (d) là tiếp tuyến của (C_2) tại $x = x_0$ thế thì $V(x_0) \neq 0$ và có $\frac{U(x_0)}{V(x_0)} = ax_0 + b$,

$y'(x_0) = a$. Từ đó có (1) và (4) rồi lần lượt suy ra (3) và (2), nên $P(x_0) = 0$ và $P'(x_0) = 0$. Áp dụng MĐ2 có điều phải chứng minh.

Bây giờ áp dụng MĐ4 vào xét hàm số $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x + b'}$ (5) và $f(x) = \frac{ax + b}{a'x + b'}$ (6) được:

Mệnh đề 5: Đường thẳng $y = ax + b$ là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $x = x_0$ với $f(x)$ có dạng (5) hoặc (6) khi và chỉ khi phương trình $f(x) - (ax + b) = 0$ là phương trình bậc 2 có nghiệm kép $x = x_0$.

Ví dụ. Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 1}{x}$ có đồ thị (C).

Tìm tập hợp các điểm M mà từ đó kẻ được 2 tiếp tuyến tới (C) vuông góc với nhau.

Giải: Giả sử $M(x_0, y_0)$ là điểm bất kì trên mặt phẳng tọa độ Oxy, phương trình đường thẳng (d) qua M là: $y = a(x - x_0) + y_0$.

Để tìm hoành độ giao điểm giữa (C) và (d) ta xét phương trình $\frac{x^2 + 1}{x} = a(x - x_0) + y_0$

$$\text{hay } (a - 1)x^2 - (ax_0 - y_0)x - 1 = 0. (*)$$

Đường thẳng (d) là tiếp tuyến của (C) $\Leftrightarrow$ phương trình (*) có nghiệm kép $\Leftrightarrow a \neq 1$ và $\Delta = 0$ (lưu ý $a = 1$ là hệ số góc của tiệm cận xiên).

$$\text{Ta có: } \Delta = (ax_0 - y_0)^2 + 4(a - 1)$$

$$= x_0^2 a^2 - 2(x_0 y_0 - 2)a + y_0^2 + 4$$

Qua M kẻ được 2 tiếp tuyến tới (C) vuông góc với nhau $\Leftrightarrow$ phương trình $\Delta = 0$ có 2 nghiệm a_1, a_2 thỏa mãn $a_1 a_2 = -1 \Leftrightarrow$ Điều kiện sau thỏa

$$\text{mãn: } x_0 \neq 0, \frac{y_0^2 + 4}{x_0^2} = -1$$

$$\text{Từ đó ta được } x_0^2 + y_0^2 = 4.$$

Vậy tập hợp M phải tìm là đường tròn $x^2 + y^2 = 4$ trừ các giao điểm của đường tròn với 2 đường tiệm cận (do các điều kiện $x_0 \neq 0$ và $a \neq 1$).

Lưu ý:

- Đối với loại toán trên nếu không sử dụng phương pháp "nghiệm bội" thì cách giải sẽ khá phức tạp.

- Cách giải trên không phải là mới nhưng theo "Tài liệu hướng dẫn giảng dạy Toán Giải tích 12" thì "Giáo viên không nên dạy cho học sinh cách làm ấy" (tr. 34).

Ý kiến đề xuất: Trong chương trình phổ thông nên chấp nhận phương pháp "nghiệm bội" khi giải các bài toán về phương trình tiếp tuyến đối với các hàm số đa thức và phân thức hữu tỉ./.

GIẢI THƯỞNG KHOA HỌC VIỆN TOÁN HỌC NĂM 2001

NGÔ VIỆT TRUNG
(Viện Toán học)

Hội đồng khoa học Viện Toán học trân trọng thông báo Giải thưởng khoa học Viện Toán học năm 2001 đã được trao cho TS Đặng Đức Trọng, cán bộ Khoa Toán, Trường Đại học tổng hợp thành phố Hồ Chí Minh.

TS Đặng Đức Trọng sinh năm 1964 tại Sài Gòn, tốt nghiệp đại học năm 1987 tại Trường Đại học tổng hợp thành phố Hồ Chí Minh, và bảo vệ luận án tiến sĩ năm 1996 tại Trường Đại học kỹ thuật (Ecole Polytechnique) ở Paris (Pháp). Hướng nghiên cứu chính của TS Đặng Đức Trọng là phương trình đạo hàm riêng, cụ thể là các bài toán ngược và các bài toán nghiệm toàn cục. Anh đã công bố 14 công trình ở các tạp chí và sách quốc tế, trong đó có 6 bài từ năm 1998 đến nay. Ngoài ra anh còn có 8 bài báo ở dạng tiến ấn phẩm.

Giải thưởng khoa học của Viện Toán học được trao hai năm một lần, trước năm 1996 chỉ giới hạn cho các cán bộ trẻ của Viện Toán học và từ năm 1997 được mở rộng cho tất cả các nhà toán học trẻ trên toàn quốc. Mọi cán bộ nghiên cứu và giảng dạy toán của Việt Nam không quá 40 tuổi đều có thể đăng ký xét thưởng. Chi tiết sẽ được thông báo trên tờ *Thông tin toán học* vào đầu các năm lẻ là những năm trao giải thưởng. Người được giải thưởng sẽ được nhận một giấy chứng nhận và một khoản tiền (năm 2001 là 5 triệu đồng). Những người được giải thưởng của các năm 1997, 1999 là:

1997: TS Đinh Nho Hào (Viện Toán học) và TS Phạm Anh Minh (Đại học tổng hợp Huế).

1999: TS Tạ Lê Lợi (Đại học Đà Lạt) và TS Phan Thiên Thạch (Viện Toán học).

CÙNG BẠN ĐỌC

Từ tháng 2.2002 TOÁN TUỔI THƠ tách thành đặc san, không là phụ trương của tạp chí TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ.

Số máy điện thoại và số fax hiện nay của TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ là (04)5144272. Địa chỉ Tòa soạn vẫn như cũ: 187B phố Giảng Võ, Hà Nội.

Hai số máy (04)5142648, (04)5142650 là của đặc san TOÁN TUỔI THƠ.

Trân trọng kính báo để độc giả và các cộng tác viên tiện liên hệ.

THTT



Cuộc chơi 2002 : AI BIẾT NHIỀU HƠN ?

CÁC NHÀ NỮ TOÁN HỌC

Nhân ngày Quốc tế Phụ nữ các bạn có biết chính xác về 5 nhà nữ toán học nổi tiếng trên thế giới qua bảng thống kê dưới đây không ? Các bạn hãy lập lại bảng thống kê cho đúng nhé ! Năm bạn giỏi nhất là 5 "nhà lịch sử toán" kì này đấy.

Nhà nữ toán học	Quê hương	Năm sinh, mất
Ghipati HYPATIE	Ý	1850 - 1891
A-nhê-di M.G. AGNESI Maria Gaetana	Nga	1776 - 1831
Giéc-mên S. GERMAIN Sophie	Đức	1882 - 1935
Cô-va-lep-skaia S.V. KOVALEVSKAIA Sophia Vasilievna	Pháp	370 - 415
Nothơ A.E. NOETHER Amalie Emmy	Ai Cập	1718 - 1799

CLB

Giải đáp bài :

TÊN - QUÊ HƯƠNG - NĂM SINH

Đây là 5 nhà toán học vĩ đại của nhân loại mà các công trình của họ trên các lĩnh vực chúng ta đã, đang và sẽ làm quen. Rất nhiều bạn giới thiệu chính xác quê hương, năm sinh của các nhà toán học đó, một số bạn còn nêu một số công trình tiêu biểu của họ nữa đấy !

Giới thiệu với các bạn quê hương và năm sinh của 5 nhà toán học thông qua bảng thống kê chính xác dưới đây.

Nhà toán học	Quê hương	Năm sinh	Ảnh số
Viét (Viète F.)	Pháp	1540	5
Đirichlê (Dirichlet P.)	Đức	1805	2
Niuton (Newton I.)	Anh	1643	1
Ôle (Euler L.)	Thụy Sĩ	1707	3
Cacđanô (Cardano G.)	Ý	1501	4

Trong cuộc chơi Ai biết nhiều hơn kì thứ nhất đã xuất hiện các "nhà lịch sử toán" : **Trần Thanh Giang**, 12A2, TH thực hành - ĐHSP Tp. Hồ Chí Minh ; **Nguyễn Đình Thành**, 11/8, THPT Vinh Lộc, Phú Lộc, **Tp. Huế** ; **Tạ Quang Dũng**, 10A1, Khối PTCTT, ĐH Vinh, **Nghệ An** ; **Đinh Ngọc Tùng**, 11 Lí, THPT NK Trần Phú, **Hải Phòng** ; **Trần Công Mỹ**, THCS Trần Quý Cáp, phường Khuê Trung, Quận Hải Châu, **Tp. Đà Nẵng** ; **Lê Hữu Cẩn**, 9A, THCS Bút Sơn, Hoàng Hóa, Thanh Hóa.

Giải đáp bài :

BẢN KHOẢN

Có khá đông các bạn tham gia bình luận và đại đa số đã chỉ ra sai lầm rất đáng tiếc về lời giải bài toán đó. Từ việc biến đổi biểu thức

$$D = \frac{145}{4} - (x+y)^2 - \left(2x - \frac{7}{2}\right)^2 - (y-5)^2$$

mới chỉ suy ra được $D \leq \frac{145}{4}$, còn việc kết luận giá trị lớn nhất của D không tồn tại là chưa chính xác (vì còn phụ thuộc vào các giá trị của x và y)

Lời giải đúng của bài toán này như sau :

Biến đổi biểu thức D dưới dạng

$$D = (x^2 + y^2 - 6x + 2xy + 9) - (4x^2 - 8x + 4) - (y^2 - 4y + 4) + 16$$

$$= -(x+y-3)^2 - 4(x-1)^2 - (y-2)^2 + 16$$

Suy ra $D \leq 16$. Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x = 1$ và $y = 2$

Do đó $\text{Max } D = 16$, đạt được khi và chỉ khi $x = 1$ và $y = 2$.

Các bạn sau đây đã có lời phân tích tốt và giải đúng đề toán này là : **Đặng Thanh Tùng**, 10T, THPT NK Hàn Thuyên, **Bắc Ninh** ; **Trịnh Ngọc Trí**, 12A6, THPT chuyên Phan Bội Châu, **Nghệ An** ; **Hà Việt Phương**, 9B, THCS thị trấn Tiên Hải, **Thái Bình** ; **Lương Thị Thương**, 12A7, THPT Nguyễn Bình Khiêm, Vĩnh Bảo, **Hải Phòng** ; **Bùi Mai Thanh Loan**, 10T2, THPT chuyên Nguyễn Bình Khiêm, **Vĩnh Long**.

NGỌC HIỂN

ĐÃ ĐÚNG CHƯA !

Bài toán :

Giải phương trình :

$$2 + 4 + \dots + x = 526,$$

biết rằng x là một số hạng của cấp số nhân 2, 4, ...

Một học sinh đã giải như sau :





X	U	Â	N	M	Ơ	I
Ơ	N	X	U	I	M	Â
M	I	U	Â	X	N	Ơ
Â	M	I	Ơ	U	X	N
I	Ơ	N	M	Â	U	X
N	Â	M	X	Ơ	I	U
U	X	Ơ	I	N	Â	M

Kết quả :

Ô CHỮ MỪNG XUÂN MỚI

Một số bạn kết luận không thể xếp các chữ cái X, U, Â, N, M, Ơ, I, mỗi ô một chữ cái và không có dòng nào, cột nào, đường chéo nào của bảng có hai chữ giống nhau (?). Tất cả các bạn còn lại đều điền đúng các chữ cái vào các ô bằng phương pháp loại trừ dần từ các hàng 1, 3, 5, 7 của bảng đó, đồng thời nhận xét đúng rằng chỉ có một cách điền ô chữ như bảng bên

Các bạn sau đây đã điền chính xác ô chữ và gửi bài sớm về TS :

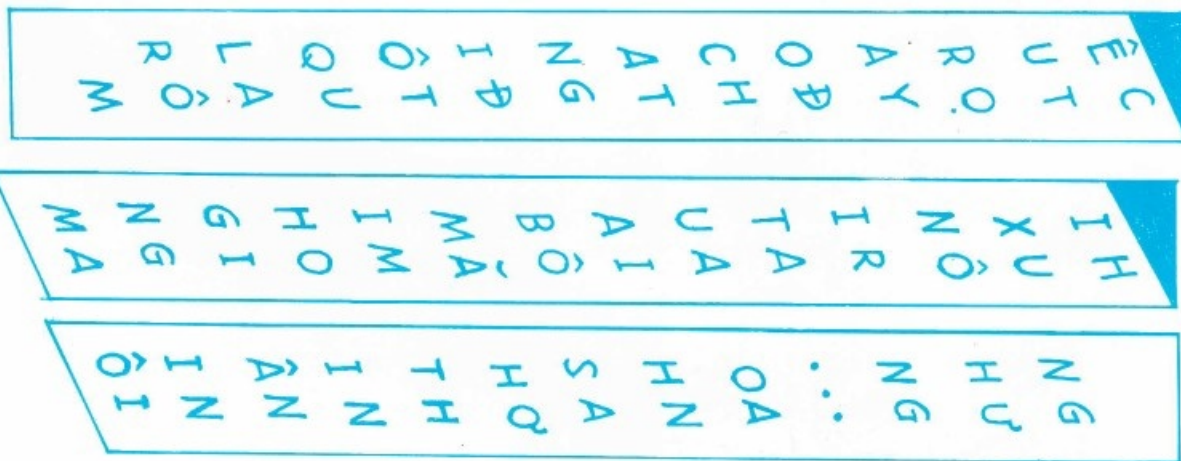
Trương Thanh Tâm, 10T1, THPT Lương Văn Tuy, **Ninh Bình**; Vũ Thanh Hải, 11A1, THPT Nghi Lộc I, **Trịnh Thị Minh Tuệ**, 8B, THCS Tiến Thủy, Quỳnh Lưu, **Nghệ An**; Nguyễn Đình Hiếu, 6A2, THCS Lê Quý Đôn, Đại Lộc, **Quảng Nam**; Tạ Việt Dũng, 11A2, THPT Yên Lạc 2, **Vĩnh Phúc**; Vũ Thái Hưng, 11A1, THPT Châu Thành A, **Bến Tre**; Trần Thị Ngọc, 9A, THCS Lê Hữu Lập, Hậu Lộc, **Thanh Hóa**.

NGỌC HIỂN

THU HIỆN, LỜI ẮN

Nhân dịp ngày Quốc tế Phụ nữ 8-3, một chàng trai đã gửi một bó hoa chúc mừng bạn gái kèm theo một bức thư trên băng giấy và một cái thước kẻ học sinh tiết diện hình vuông 9×9mm. Cô gái đọc xong thư, mỉm cười xao xuyến và dự định sẽ viết một bức thư trả lời theo cách tương tự. Chàng trai đã viết gì cho bạn gái vậy ?

Do băng giấy hơi dài (có lẽ tình cảm của chàng dành cho nàng quá dào dạt !) nên tạm phân ra làm ba đoạn băng. Các bạn hãy photocopy đúng kích cỡ và dán đầu trái của đoạn thứ hai vào đuôi (tô đậm) của đoạn thứ nhất; đầu của đoạn thứ ba vào đuôi của đoạn thứ hai để "bật mí" nội dung của băng giấy đó nhé !



LÊ BÍCH

Do giả thiết, x phải có dạng : $x = 2^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$)

Phương trình trở thành : $2 + 2^2 + \dots + 2^n = 526$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 526 \Leftrightarrow 2^n - 1 = 263$$

$$\Leftrightarrow 2^n = 264 \Leftrightarrow x = 264$$

Vậy phương trình có nghiệm là : $x = 264$.

Theo bạn, lời giải trên đã đúng chưa ?

ĐỖ BÁ CHỦ

(GV THPT Đông Hưng Hà, Thái Bình)

CHI NHÁNH NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC TẠI THÀNH PHỐ ĐÀ NẴNG

- Địa chỉ : 15 Nguyễn Chí Thanh, Tp. Đà Nẵng
- Điện thoại : (0511)894752
Fax : (0511)827368
- Giám đốc : Huỳnh Bá Văn
Phó Giám đốc : Mạc Văn Thiện
Kế toán trưởng : Hồ Văn Linh
- Theo sự phân công của Giám đốc NXB Giáo dục, chi nhánh NXB Giáo dục tại Đà Nẵng xây dựng đội ngũ tác giả, cộng tác viên, làm biên tập, chế bản, in ấn và phát hành sách giáo khoa và các ấn phẩm giáo dục phục vụ địa bàn 9 tỉnh miền Trung : Quảng Bình, Quảng Trị, Thừa Thiên - Huế, Đà Nẵng,

Quảng Nam, Quảng Ngãi, Bình Định, Gia Lai, Kon Tum.

- Gồm 55 cán bộ, công nhân viên, chia thành các phòng : Tổ chức Hành chính, Kế toán Tài vụ, Phát hành Sách Giáo khoa và Thư viện trường học, Phát hành Sách Tham khảo, Quản lý sản xuất, Kho vận và một Ban biên tập.
- Riêng nhóm biên tập sách Toán thuộc Ban biên tập gồm các ông Trần Phước Chương, Huỳnh Thông, Nguyễn Văn Nho, ngoài việc tham gia biên tập, đọc định chính SGK, còn tổ chức được nhiều đầu sách Toán từ bậc Tiểu học đến Đại học có chất lượng tốt, số lượng phát hành cao.



ISN : 0866-0853

Chỉ số : 12884

Mã số : 8BT99M2

Chế bản tại Tòa soạn

In tại Nhà máy in Diên Hồng, 187B phố Giảng Võ, Hà Nội

In xong và nộp lưu chiểu tháng 3 năm 2002

Giá : 3000đ

Ba nghìn đồng