

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO * HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

Toán học & Tuổi trẻ

10
2001

SỐ 292 - NĂM THỨ 38 - TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG

**Khởi PTTH
chuyên
Toán - Tin
trường
Đại học Vinh**

Các giáo viên Toán



Hội đồng giáo viên



TOÁN HỌC MUÔN MÀU

TÌM ĐƯỜNG TRONG MÊ CUNG

cung điện có rất nhiều phòng, nhiều hành lang, nhiều lối rẽ và ngã cụt. Trong mê cung vua nuôi một quái vật mình người đầu bò là Minôtavơ. Hàng năm vua Minôs bắt dân thành Aten phải cống nạp 7 con trai và 7 con gái cho quái vật. Hoàng tử thành Aten là Têxê quyết định vào mê cung giết

quái vật. Chàng từ già vua cha Êgiêus, lên thuyền về phía Nam đến đảo Crét với cánh buồm đen và quy ước rằng khi chiến thắng trở về sẽ giương buồm trắng. Công chúa Ariat, con vua Minôs, yêu chàng trai Têxê dưng cảm, tặng chàng một cuộn chỉ màu nhiệm. Têxê buộc một đầu dây ở cửa mê cung rồi vừa tháo dần cuộn chỉ cảm theo vừa tiến vào mê cung. Cuộc chiến đấu quyết liệt kết thúc bằng thắng lợi của Têxê, chàng kiệt sức lần theo dây chỉ của nàng Ariat ra được khỏi mê cung. Người anh hùng trên thuyền trở về Aten, buồn bã vì thần nhơ Đionixôt bắt nàng Ariat làm vợ, đã quên không giương buồm trắng.

Vua Êgiêus nhìn thấy cánh buồm đen liền nhảy xuống biển tự tử, từ đó biển có tên là biển Êgiê. Các di tích của mê cung trên đảo Crét đã bị phát xít Đức thiêu hủy năm 1941.

Cách rải dần dây để tìm đường trong mê cung được gọi là "sợi chỉ Ariat". Để đường đi ngắn hơn có thể kéo căng sợi dây để khỏi đi vòng và bỏ qua vòng dây khép kín xung quanh các phòng, các hành lang.

Dành cho bạn đọc

a) Tìm đường đi ngắn nhất từ ngoài vào đến bụi cây ở hình 2 và từ vị trí 1 đến vị trí 2 ở hình 3.

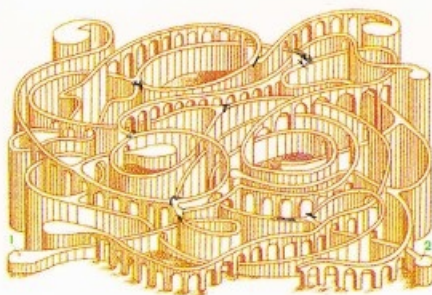
b) Nêu các cách tìm ra đường đi đó.



Hình 1



Hình 2



Hình 3

Tặng phẩm đang chờ các bạn có câu trả lời tốt nhất.

Giải đáp: ĐƯỜNG XOẮN ỐC ACSIMET.

Gọi α là góc giữa tiếp tuyến và đường xoắn ốc Acsimet.

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = 4\pi \approx 12,566 \Rightarrow \alpha_1 \approx 85^\circ 27'$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = 2\pi \approx 6,283 \Rightarrow \alpha_2 \approx 80^\circ 57'$$

PHI PHI

Toán học và Tuổi trẻ

Mathematics and Youth

Năm thứ 38

Số 292 (10-2001)

Tòa soạn : Ngõ 187, phố Giảng Võ, Hà Nội

ĐT : 04.5142648 – 04.5142650. FAX : 04.5142648

Email : toantth@hotmail.com

TRONG SỐ NÀY

- 2** **Dành cho Trung học cơ sở – For Lower Secondary Schools**
Nguyễn Văn Hiến - Một số sai lầm trong giải toán tìm cực trị
 - 4** **Kết quả Cuộc thi Vui hè 2001**
 - 6** ***Doãn Tam Hoè* – Đề thi tuyển sinh môn toán trường Đại học Xây dựng năm 2001**
 - 7** **Tiếng Anh qua các bài toán – English through Math Problems**
Ngô Việt Trung – Bài số 46
 - 8** **Chuẩn bị thi vào đại học – University Entrance Preparation**
Trần Tuấn Điệp – Hai bài toán khó của một đề thi Đại học
 - 10** **Diễn đàn dạy học toán – Math Teaching Forum**
Trần Xuân Uy - Không giải được hay vẫn giải được
 - 12** **Đề ra kì này – Problems in this Issue**
T1/292, ..., T10/292, L1, L2/292
 - 14** **Giải bài kì trước - Solutions to Previous Problems**
Giải các bài của số 288
 - 22** ***Nguyễn Khắc Minh* – Đề thi chọn học sinh giỏi toán quốc gia THPT năm học 2000-2001 bảng B**
 - 24** **Câu lạc bộ – Math Club**
Sai lầm ở đâu? Where's the Mistakes?
-
- Bìa 2 : Toán học muôn màu – Multifarious Mathematics**
Tìm đường trong mê cung
- Bìa 3 : Giải trí toán học – Math Recreation**
Trả lời bạn đọc
- Bìa 4 : 35 năm - khối THPT Chuyên Toán - Tin trường Đại học Vinh**

Tổng biên tập :
NGUYỄN CẢNH TOÀN
Phó tổng biên tập :
NGÔ ĐẠT TỬ
HOÀNG CHÚNG

Chịu trách nhiệm xuất bản :
Giám đốc NXB Giáo dục :
NGÔ TRẦN ÁI
Tổng biên tập NXB Giáo dục :
VŨ DƯƠNG THỤY

Hội đồng biên tập :

NGUYỄN CẢNH TOÀN, HOÀNG CHÚNG, NGÔ ĐẠT TỬ, LÊ KHẮC BẢO, NGUYỄN HUY ĐOAN, NGUYỄN VIỆT HẢI, ĐÌNH QUANG HÀO, NGUYỄN XUÂN HUY, PHAN HUY KHẢI, VŨ THANH KHIẾT, LÊ HẢI KHÔI, NGUYỄN VĂN MẬU, HOÀNG LÊ MINH, NGUYỄN KHẮC MINH, TRẦN VĂN NHUNG, NGUYỄN ĐĂNG PHÁT, PHAN THANH QUANG, TẠ HỒNG QUẢNG, ĐẶNG HÙNG THẮNG, VŨ DƯƠNG THỤY, TRẦN THÀNH TRAI, LÊ BÁ KHÁNH TRINH, NGÔ VIỆT TRUNG

Trưởng ban biên tập : NGUYỄN VIỆT HẢI. *Thư ký tòa soạn :* LÊ THỐNG NHẤT. *Thực hiện :* VŨ KIM THỦY.

Trị sự : VŨ ANH THƯ. *Trình bày :* NGUYỄN THỊ OANH.

Đại diện phía Nam : TRẦN CHÍ HIẾU, 231 Nguyễn Văn Cừ, TP. Hồ Chí Minh. ĐT : 08.8323044.



Dành cho các bạn TRUNG HỌC CƠ SỞ

MỘT SỐ SAI LẦM KHI GIẢI TOÁN CỰC TRỊ

NGUYỄN VĂN HIẾN

(GV THCS Quỳnh Châu, Quỳnh Phụ, Thái Bình)

Giải bài toán tìm cực trị thường đưa về việc tìm giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất của một biểu thức đại số, trong đó biến số lấy giá trị trong một tập hợp xác định. Dạng toán này rất hấp dẫn nhưng tương đối khó về cả việc tìm giá trị lớn nhất (GTLN) hoặc giá trị nhỏ nhất (GTNN) và cả về phương pháp giải. Bài viết này xin nêu ra một số sai lầm khi tìm GTLN, GTNN của một biểu thức $f(x)$ (với kiến thức toán ở trường THCS) bằng cách biến đổi đại số biểu thức để đưa về các dạng sau:

Dạng 1. a) Tìm GTLN: $f(x) \leq g(x) \leq a$.

b) Tìm GTNN: $f(x) \geq g(x) \geq a$.

Dạng 2. a) Tìm GTLN: $f(x) = h(x) + g(x)$ với $h(x) \leq 0$ rồi xét $g(x) \leq a$.

b) Tìm GTNN: $f(x) = h(x) + g(x)$ với $h(x) \geq 0$ rồi xét $g(x) \geq a$ trong đó a là hằng số.

Làm tương tự đối với trường hợp có hai biến số trở lên.

Bài toán 1. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$f(x) = \frac{x}{2} + \sqrt{1-x-2x^2}$$

Lời giải 1. Biểu thức $f(x)$ có nghĩa khi

$$1-x-2x^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x+1)(1-2x) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$-1 \leq x \leq \frac{1}{2} \quad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức (BĐT) Bunhiacôpxki ta có:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}x + 1 \cdot \sqrt{1-x-2x^2} \leq \\ &\leq \sqrt{\frac{1}{4} + 1 \cdot \sqrt{x^2 + (1-x-2x^2)}} \\ &= \sqrt{\frac{5}{4}} \cdot \sqrt{-\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4}} \end{aligned} \quad (2)$$

Từ đó kết luận rằng khi $x = -\frac{1}{2}$ thỏa mãn (2)

và (1) thì biểu thức $f(x)$ đạt GTLN là $\frac{5}{4}$.

Nhận xét. Gọi biểu thức cuối cùng của (2) là $g(x)$ thì khi $x = -\frac{1}{2}$ có $g\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{4}$ nhưng $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4} + \sqrt{1} = \frac{3}{4} < g\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{4}$. Sở dĩ có điều này vì dấu bằng ở BĐT Bunhiacôpxki xảy ra khi $\sqrt{1-x-2x^2} = 2x$.

Giải phương trình này với $x \geq 0$ được

$$1-x-2x^2 = 4x^2 \Leftrightarrow 6x^2 + x - 1 = 0.$$

Phương trình có 2 nghiệm $x_1 = -\frac{1}{2}$ và

$x_2 = \frac{1}{3}$, nhưng $x_1 = -\frac{1}{2} < 0$ nên bị loại, còn

$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{5}{6} < \frac{5}{4}$. Vậy theo cách trên không tìm được GTLN của $f(x)$.

Lời giải 2. Áp dụng BĐT Côsi ta được:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x}{2} + \sqrt{1-x-2x^2} \leq \frac{x}{2} + \frac{1+(1-x-2x^2)}{2} \\ &= 1-x^2 \leq 1 \end{aligned} \quad (3)$$

Từ đó kết luận rằng khi $x = 0$ thỏa mãn (3) và (1) thì biểu thức $f(x)$ đạt GTLN là 1.

Nhận xét. Trong (3) đặt $g(x) = 1-x^2$ thì $g(0) = 1$. Dấu bằng trong BĐT Côsi xảy ra khi $1-x-2x^2 = 1 \Leftrightarrow x(2x+1) = 0$ suy ra $x_1 = 0$ và $x_2 = -\frac{1}{2}$.

Vì $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} < g\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{4} \Rightarrow x_2$ bị loại.

Ta đã gặp may khi $f(0) = g(0) = 1$, nghĩa là hai dấu bằng đồng thời xảy ra trong (3), còn cách

giải này chấp nhận được sau khi tính được $f(0) = 1$.

Bài toán 2. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$f(x) = 3 - 2x + \sqrt{5 - x^2 + 4x}$$

Lời giải 1. Biểu thức $f(x)$ có nghĩa khi $5 - x^2 + 4x \geq 0 \Leftrightarrow (x+1)(5-x) \geq 0$
 $\Leftrightarrow -1 \leq x \leq 5$ (4)

Áp dụng BĐT Côsi ta được :

$$f(x) = 3 - 2x + \sqrt{1(5 - x^2 + 4x)} \\ \leq 3 - 2x + \frac{1 + (5 - x^2 + 4x)}{2} = 6 - \frac{x^2}{2} \leq 6 \quad (5)$$

Biểu thức $g(x) = 6 - \frac{x^2}{2}$ đạt GTLN là 6 khi $x = 0$ thỏa mãn (4). Từ đó kết luận rằng GTLN của $f(x)$ là 6.

Nhận xét. Kết luận này không đúng vì

$f(0) = 3 + \sqrt{5} \approx 5,23 < 6$. Sở dĩ có điều đó vì dấu bằng ở BĐT Côsi xảy ra khi $5 - x^2 + 4x = 1 \Leftrightarrow 4 - x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 8$. Phương trình này có nghiệm $x_1 = 2 - 2\sqrt{2}$ và $x_2 = 2 + 2\sqrt{2}$, lúc đó $f(2 - 2\sqrt{2}) = 4\sqrt{2} \approx 5,65$ và $f(2 + \sqrt{2}) = -4\sqrt{2} \approx -5,65$. Như vậy $f(x)$ không thể đạt giá trị là 6 vì hai dấu bằng trong (5) không đồng thời xảy ra.

Lời giải 2. Áp dụng BĐT Bunhiacôpxki ta được

$$f(x) = -1 + (-2)(x-2) + \sqrt{1(5 - x^2 + 4x)} \\ \leq -1 + \sqrt{4+1} \cdot \sqrt{(x^2 - 4x + 4) + (5 - x^2 + 4x)} \\ = -1 + \sqrt{45} = 3\sqrt{5} - 1 \approx 5,71 \quad (6)$$

Đẳng thức xảy ra trong (6) khi

$$(-2)\sqrt{5 - x^2 + 4x} = x - 2$$

Giải phương trình này với $x - 2 \leq 0$ được $5x^2 - 20x - 16 = 0$. Phương trình có 2 nghiệm là $x_1 = 2 + \frac{6\sqrt{5}}{5}$ (loại vì $x_1 > 2$) và $x_2 = 2 - \frac{6\sqrt{5}}{5} \approx -0,68$, nghiệm này thỏa mãn (4).

Vậy GTLN của $f(x)$ là $f\left(2 - \frac{6\sqrt{5}}{5}\right) = 3\sqrt{5} - 1$.

Nhận xét. Cách giải ở đây là áp dụng BĐT Bunhiacôpxki để sao cho biểu thức trong căn không còn biến số x . Có thể vận dụng BĐT

Bunhiacôpxki để giải bài toán 1 bằng cách thay

$$\frac{x}{2} \text{ bởi } -\frac{1}{8} + \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \sqrt{2} \left(x + \frac{1}{4}\right).$$

Bài toán 3. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$f(x, y) = 4x^2 + 4y^2 - 4xy - 3x$$

Lời giải 1. Biến đổi như sau :

$$f(x, y) = x^2 - 4xy + 4y^2 + 2x^2 - 4x + 2 + x^2 + x - 2 \\ = (x - 2y)^2 + 2(x-1)^2 + x^2 + x - 2 \geq \\ \geq x^2 + x - 2 \text{ với mọi } x \quad (7)$$

$$\text{Vì } g(x) = x^2 + x - 2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} \geq -\frac{9}{4} \quad (8)$$

khi $x = -\frac{1}{2}$ nên kết luận rằng $f(x, y)$ có giá trị nhỏ nhất là $-\frac{9}{4}$ khi $x = -\frac{1}{2}$ và $x - 2y = 0 \Rightarrow y = \frac{x}{2} = -\frac{1}{4}$.

Nhận xét. Dấu bằng xảy ra ở (7) khi $x = 2y$ và $x = 1$, còn dấu bằng xảy ra ở (8) khi $x = -\frac{1}{2}$, như vậy khi $x = -\frac{1}{2}$ thì hai dấu bằng xảy ra không đồng thời nên GTNN của $g(x)$ không phải là GTNN của $f(x, y)$.

Lời giải 2.

$$f(x, y) = 4x^2 + 4y^2 - 4xy - 3x = \\ = 4y^2 - 4xy + x^2 + 3(x^2 - x) \\ = (2y - x)^2 + 3\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4} \geq -\frac{3}{4}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = \frac{1}{2}$ và $y = \frac{x}{2} = \frac{1}{4}$, lúc

đó $f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) = -\frac{3}{4}$ là GTNN của $f(x, y)$.

Các bạn hãy giải các bài tập sau đây và nhớ là đừng sai nhé !

Bài tập 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$f(x) = \frac{3x}{2} - \sqrt{3 + 2x - x^2}$$

Bài tập 2. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$f(x, y) = -5x^2 - 2xy - 2y^2 + 14x + 10y - 1.$$

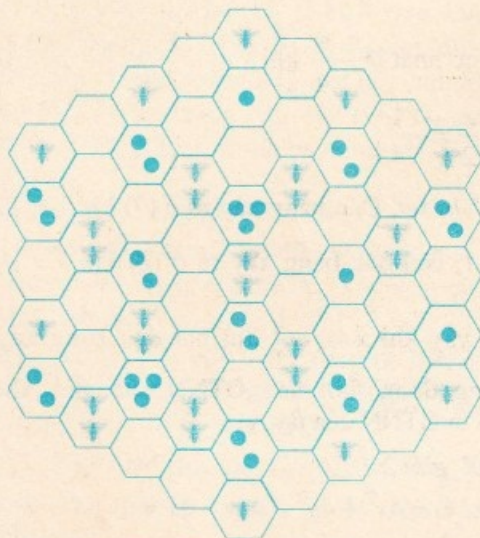
KẾT QUẢ CUỘC THI *VUI HÈ* 2001

Cuộc thi mini Vui hè 2001 được rất đông bạn đọc từ mọi miền đất nước tham gia. Số bạn giải đúng từ 3 bài trở lên khá nhiều. Có những lời giải trình bày rất đẹp. Hai bạn đoạt giải Nhất đã giải hoàn chỉnh tất cả các câu. Tất cả chúng ta có một kì nghỉ hè vui vẻ bổ ích. 22 bạn đoạt giải còn có thêm niềm vui vì đã vượt lên trong cuộc thi với rất nhiều người đua tài. Dưới đây là lời giải vấn đề.

LỜI GIẢI

Bài 1. TÌM ONG

Ghi vị trí các ô ở tổ ong theo các cột A, B, C, D, E, F, G, H, K từ trái sang phải, theo các số tự nhiên 1, 2, 3, 4, ... từ dưới lên trên.



A B C D E F G H K

Nếu mỗi ô trống chỉ chứa 1 con ong thì không thỏa mãn đề bài vì hai viên phấn ở ô A1 phải có ong ở ô A2 và B1, lúc đó 3 con ong đặt 3 viên phấn vào ô C1 không thể chui vào 3 ô trống không kề nhau, kể cả A2 và B1 (Cách khác: xét tổng số các ô trống và các viên phấn hoa).

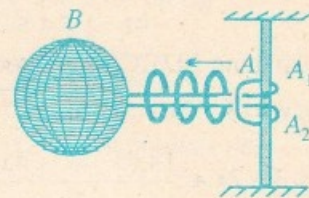
Trong thực tế 3 con ong không thể chui vào cùng 1 ô. Vậy chỉ xảy ra: mỗi ô trống chứa không quá 2 con ong. Từ đó có nhiều đáp án nhưng đều xuất phát từ chỗ ong ở A2 và B1.

Bạn Nguyễn Thị Kim Huế, 8C, THCS Phạm Huy Thông, Hưng Yên đã đề nghị thêm điều kiện: nếu các con ong đặt các viên phấn hoa vào cùng một ô thì phải chui vào các ô khác nhau. Với điều kiện này bài toán có rất ít lời giải. Chẳng hạn lời giải (LG) (1) như ở hình 1, từ LG(1) chỉ có thể chuyển một số con ong ở các vị trí sau để có lời giải khác: LG(2) là (E1, F3, F3, G1, K1) chuyển thành (E1, F3, F3, G1, H2), LG(3) là (E1, F3, F3, H2, H2), LG(4) là (F1, F3, F3, H2, H2).

Bài trong mục đồ vui, mang nội dung thực tiễn thường là "bài toán mở", nghĩa là giả thiết không thật chặt chẽ nên có nhiều cách trả lời, bạn nào lập luận "có lí" hơn sẽ đạt điểm cao hơn.

Bài 2. GỠ RỐI

Bài toán trở nên dễ giải hơn nếu ta chuyển về xét cách gỡ rối như hình bên. Muốn gỡ nút của sợi



dây ra khỏi một thanh (mà không thể đưa nút qua hai đầu thanh) ta nói rộng đoạn dây A rồi di chuyển về phía cuộn lên B theo chiều mũi tên đến lúc có thể vòng đoạn dây A ra phía ngoài cuộn lên sao cho đoạn dây A không lập thành nút với các sợi dây A1 và A2 nữa, sau đó kéo dây về phía cuộn lên.

Để gỡ sợi dây ra khỏi kéo ta làm theo cách như trên với chú ý: suốt trong lúc di chuyển về phía cuộn lên hai đoạn dây nối A với A1 và A với A2 phải luôn giữ tách rời nhau, không được xoắn vào nhau (nhiều bạn quên nói điều này).

Bài 3. XẾP SỐ

Dễ thấy chữ số hàng nghìn là 1. Giả sử $1 < c < f$ cùng với $k \neq 1$ ta thấy $c + f$ có 24 trường hợp, nhưng bằng cách thử trực tiếp chỉ

	a	b	c
+	d	e	f
	1	g	h
			k

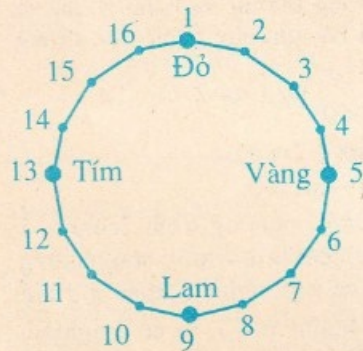
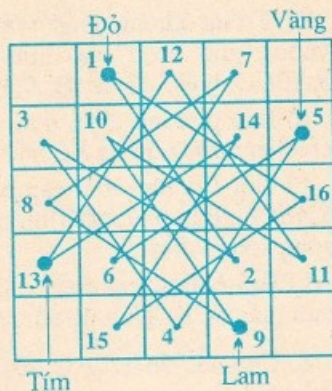
có các trường hợp $c + f$ bằng 2 + 6, 2 + 7, 3 + 5, 3 + 9, 4 + 5, 4 + 9, 6 + 9, 7 + 9 là thỏa mãn. Ứng với nó là 48 cách xếp (tức là 1 cách của đầu bài và 47 cách đổi chỗ). Đổi chỗ 2 số hạng trên dưới lại được 48 cách nữa. Vậy có 96 cách sắp xếp được phép cộng đúng. Ví dụ:

$$\begin{array}{r}
 342 \\
 + 756 \\
 \hline
 1098
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 432 \\
 + 657 \\
 \hline
 1089
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 743 \\
 + 859 \\
 \hline
 1602
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 624 \\
 + 879 \\
 \hline
 1503
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 826 \\
 + 479 \\
 \hline
 1305
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 437 \\
 + 589 \\
 \hline
 1026
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 847 \\
 + 359 \\
 \hline
 1206
 \end{array}$$

Bài 4. CHUYỂN QUÂN

Đánh số mọi ô mà các quân cờ có thể chuyển đến như ở hình bên. Các bước chuyển lập thành đường gấp khúc khép kín, trong đó mỗi bước chuyển biểu thị bởi 1 đoạn thẳng. Vẽ lại đường gấp khúc khép kín này như ở hình dưới, ta thấy mỗi quân ở một ô nào đó có thể chuyển (các bước chuyển không lặp lại) đến một ô bất kỳ khác trong 16 ô có ghi số theo 2 cách: cùng chiều kim đồng hồ hoặc ngược chiều kim đồng hồ.



Để đặt quân vào được ô trống cần chú ý 2 điều: chuyển các quân chỉ theo một chiều và nếu quân nào chuyển đến gặp quân đứng trước nó thì phải chuyển quân đứng trước đi để có ô trống cho quân sau.

Mỗi quân cần ít nhất 8 bước chuyển và 4 quân cần ít nhất $4 \times 8 = 32$ bước chuyển.

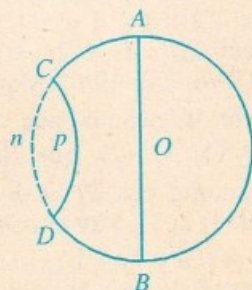
Có nhiều cách chuyển cả 4 quân theo một chiều sao cho các quân không được chồng lên nhau hoặc vượt nhau, cách dễ thấy nhất là cả 4 quân đều chuyển từng bước một.

Bài 5. VƯỜN HOA

Do hai đường tròn bằng nhau nên độ dài cung $\widehat{CpD}$ bằng cung $\widehat{CnD}$ tức độ dài đường dạo quanh vườn bằng chu vi đường tròn bán kính

$$R = \frac{AB}{2}.$$

$$2\pi R + 2R = 348(m)$$



$$\text{Lấy } \pi \approx \frac{22}{7} \text{ suy ra}$$

$$R \approx \frac{348}{2\left(\frac{22}{7} + 1\right)} = \frac{348}{2 \times \frac{29}{7}} = 42(m).$$

Vậy diện tích phần trồng hoa là

$$\frac{\pi R^2}{2} \approx \frac{22 \times 42 \times 42}{7 \times 2} = 11 \times 6 \times 42 = 2772 (m^2)$$

Nhận xét. Rất nhiều bạn tính sai đáp số bài này, có bài tính chưa đến $100m^2$, có bài lại ra hơn $6000m^2$ (!). Một số bạn chỉ đến một biểu thức thì dừng lại. Đây là bài toán thực tế nên cần tính đến con số cuối cùng. Tùy theo cách lấy độ chính xác của số π ta có đáp số khác nhau chút ít. Đáp số chấp nhận được có thể thay đổi từ $2772m^2$ đến $2773m^2$.

Bài 6. ĐIỀN SỐ

Do $1 = 2^0$, $2 = 2^1$, ..., $256 = 2^8$ nên bài toán thật ra chỉ là xếp một ma phương bậc 3 đơn giản từ các số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Nếu chú ý đến vị trí thì có 8 cách xếp.

Điểm mấu chốt trong lập luận là từ giả thiết ta có $a_1.a_2.a_3 = a_4.a_5.a_6 = a_7.a_8.a_9 = a_1.a_4.a_7 = a_2.a_5.a_8 = a_3.a_6.a_9 = a_1.a_5.a_9 = a_3.a_5.a_7 = A$

a_1	a_2	a_3
a_4	a_5	a_6
a_7	a_8	a_9

$$\text{Ta có } A^3 = 2^{36}$$

Mặt khác

$$B = (a_1.a_5.a_9).(a_2.a_5.a_8).(a_3.a_5.a_7).(a_4.a_5.a_6) = A^4 = 2^{48}$$

$$\text{Đặt } C = a_1.a_2.a_3.a_4.a_5.a_6.a_7.a_8.a_9 = A^3.$$

$$\text{Từ } B = C.a_5^3 \text{ hay } 2^{48} = 2^{36}.a_5^3 \text{ suy ra } a_5 = 2^4.$$

Sau đây là một cách điền

32	1	128
64	16	4
2	256	8

(Xem tiếp trang 11)

ĐỀ THI TUYỂN SINH MÔN TOÁN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC XÂY DỰNG NĂM 2001

- Khảo sát hàm số $y = \frac{-x^2 + 2x - 1}{x + 2}$
- Có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x \ln x$ đi qua điểm $M(2; 1)$.
- Tính $\int_{-1}^1 \frac{|x| dx}{x^4 - x^2 - 12}$
- Giải phương trình $\sqrt{x^2 - 6x + 6} = 2x - 1$.
- Giải bất phương trình $x^4 - 8e^{x-1} > x(x^2 e^{x-1} - 8)$
- Tìm m để phương trình $\sin 2x + m = \sin x + 2m \cos x$ có đúng 2 nghiệm thuộc $[0; 3\pi/4]$.
- Trong không gian với hệ tọa độ Đề các vuông góc $Oxyz$ cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$, biết $S(3; 2; 4)$, $B(1; 2; 3)$, $D(3; 0; 3)$.
 - Lập phương trình đường vuông góc chung của hai đường thẳng AC và SD .
 - Gọi I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABCD$. Lập phương trình mặt phẳng qua BI và song song với AC .
 - Gọi H là trung điểm của BD , G là trực tâm tam giác SCD . Tính độ dài HG .
- Cho các số $x; y; z$ thay đổi trên $[0; 1]$ và thỏa mãn $x + y + z = 3/2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = \cos(x^2 + y^2 + z^2)$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

- Bạn đọc tự giải.
- Phương trình tiếp tuyến của đồ thị là $y = (\ln t + 1)(x - t) + t \ln t$, trong đó t là hoành độ tiếp điểm. Vì tiếp tuyến đi qua điểm $M(2; 1)$ nên thỏa mãn phương trình $1 = (\ln t + 1)(2 - t) + t \ln t$ hay $2 \ln t - t + 1 = 0$ (*).
Hàm $y' = \ln x + 1$ đồng biến nên số tiếp tuyến bằng số nghiệm của (*) và bằng 2 (vì hàm $2 \ln t - t + 1$ tăng từ $-\infty$ đến cực đại bằng $2 \ln 2 - 1 > 0$ trong khoảng $(0; 2)$ và giảm từ cực đại xuống $-\infty$ trong khoảng $(2; +\infty)$ nên (*) có 2 nghiệm).
- Hàm dưới dấu tích phân là hàm chẵn (hoặc xét giá trị tuyệt đối của x) nên tích phân cần tìm bằng

$$2 \int_0^1 \frac{x dx}{x^4 - x^2 - 12} = \int_0^1 \frac{dt}{t^2 - t - 12} =$$

$$= \frac{1}{7} \int_0^1 \left(\frac{1}{x-4} - \frac{1}{x+3} \right) dx = \frac{1}{7} \ln \left| \frac{x-4}{x+3} \right| \Big|_0^1 = \frac{2}{7} \ln \frac{3}{4}$$

- $\sqrt{x^2 - 6x + 6} = 2x - 1$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 \geq 0 \\ x^2 - 6x + 6 = (2x - 1)^2 \end{cases}$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0,5 \\ 3x^2 + 2x - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0,5 \\ x = 1 \vee x = -5/3 \end{cases}$
 $\Leftrightarrow x = 1$
 5. $x^4 - 8e^{x-1} > x(x^2 e^{x-1} - 8)$
 $\Leftrightarrow (x^3 + 8)(x - e^{x-1}) > 0$

Hàm $x - e^{x-1}$ không dương và bằng 0 khi và chỉ khi $x = 1$, nên bất phương trình trên tương

$$\text{đương với } \begin{cases} x \neq 1 \\ x^3 + 8 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow x < -2.$$

$$6. \sin 2x + m = \sin x + 2m \cos x$$

$$\Leftrightarrow (2 \cos x - 1)(\sin x - m) = 0.$$

Trong đoạn $[0; 3\pi/4]$ phương trình $2 \cos x - 1 = 0$ có đúng một nghiệm là $x = \pi/3$; còn phương trình $\sin x - m = 0$ có một nghiệm khác $\pi/3$ khi $0 \leq m < \sqrt{2}/2$, hoặc khi $m = 1$, và có 2 nghiệm là $x = \pi/3$ và $x = 2\pi/3$ khi $m = \sqrt{3}/2$.

Vậy đáp số: $0 \leq m < \sqrt{2}/2 \vee m = \sqrt{3}/2 \vee m = 1$

7. a) Vì AC vuông góc với (SBD) tại tâm $H(2; 1; 3)$ của đáy chóp, nên đường vuông góc chung của AC và SD nằm trong mặt phẳng (SBD) và trong mặt phẳng đi qua H , vuông góc với SD . Do đó phương trình của đường vuông góc chung là: $\begin{cases} x + y - 2z + 3 = 0 \\ 2y + z - 5 = 0 \end{cases}$;

b) Tâm I là giao điểm của đường thẳng SH : $x - 2 = y - 1 = z - 3$ và mặt phẳng trung trực của SD : $4y + 2z = 11$, do đó tọa độ của I là $(13/6; 7/6; 19/6)$. Mặt phẳng cần tìm song song với AC nên nó chứa vectơ pháp của (SBD) là $\vec{n} = (1; 1; -2)$, qua BI nên nó chứa vectơ chỉ phương của BI là $\vec{m} = (7; -5; 1)$ và đi qua $B(1; 2; 3)$. Vậy phương trình cần tìm là:

$$x = u + 7v + 1; y = u - 5v + 2; z = -2u + v + 3$$

$$\text{hay } 3x + 5y + 4z = 25;$$

c) Vì $SD \perp CG$ và $SD \perp CH$ nên $SD \perp (CHG)$. Tương tự $SC \perp (DHG)$. Vậy $HG \perp (SCD)$. Gọi trung điểm của CD là E , thế thì HG là đường cao thuộc cạnh huyền của tam giác vuông HSE , có cạnh góc vuông $SH = \sqrt{3}$, $HE = HD \cdot \sqrt{2}/2 = 1$. Do đó $HG = \sqrt{3}/2$.

8. Theo giả thiết thì một trong 3 số x, y, z phải không nhỏ hơn 0,5, giả sử đó là số x .

Đặt $t = x^2 + y^2 + z^2$. Ta có

$$t = (x + y + z)^2 - 2(xy + yz + zx) \leq \frac{9}{4} - 2(xy + zx) = \frac{9}{4} - 2x\left(\frac{3}{2} - x\right) \leq \frac{5}{4}$$

(vì giá trị nhỏ nhất của $2x\left(\frac{3}{2} - x\right)$ là 1 khi $x = 0,5$ hoặc $x = 1$). Mặt khác, khi $x = 1; y = 0,5$ và $z = 0$ thì $t = \frac{5}{4}$ và dễ thấy t có giá trị nhỏ

nhất là $\frac{3}{4}$. Hàm cost giảm khi t tăng từ $\frac{3}{4}$ đến $\frac{5}{4}$. Vậy giá trị nhỏ nhất của A là $\cos \frac{5}{4}$.

Hướng dẫn giải
DOÃN TAM HỒE

ĐÓN ĐỌC THTT SỐ 293 (11-2001)

- Kết quả cuộc thi giải Toán - Lí năm học 2000 - 2001 trên THTT.

Nếu bạn muốn hiểu sâu thêm kiến thức toán sơ cấp và rèn luyện kĩ năng giải toán nên đọc:

- Ứng dụng của một hằng đẳng thức
- Từ một hệ thức lượng giác cơ bản trong tam giác.

Các bạn chuẩn bị thi học sinh giỏi sẽ được đọc:

- Hướng dẫn giải đề thi chọn học sinh giỏi THPT quốc gia năm 2001 (bảng A)

Mọi học sinh đều cần biết về

- Giải toán trên máy tính bỏ túi CASIO

Và các chuyên mục vui như thường lệ: Câu lạc bộ đoán người qua ảnh, Giải trí toán học, Sai lầm ở đâu...

THTT

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

BÀI SỐ 46

Problem. Prove that a reduced fraction a/b has an infinite number of digits in its decimal expansion if and only if the denominator b has at least one prime factor different from 2 and 5.

Solution. We may assume that a/b is a reduced fraction such that $0 < a/b < 1$. It suffices to show the equivalent claim that a/b has a finite number in its decimal expansion if and only if the denominator b is of the form $2^m 5^n$ for some non-negative integers m and n .

Suppose that a/b has a finite number of digits in its decimal expansion: $a/b = 0.a_1 a_2 \dots a_r$. Then

$$0.a_1 a_2 \dots a_r = \frac{a_1 a_2 \dots a_r}{10^r}$$

where $a_1 a_2 \dots a_r$ denotes the number with the digits $a_1, a_2, \dots, a_r$. The only prime factors of 10^r are 2 and 5. Therefore

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{2^m 5^n}$$

for some $m \geq 0, n \geq 0$.

Conversely, suppose that a/b is a fraction with $b = 2^m 5^n$. Let $s = \max\{m, n\}$. Then

$$\frac{a}{b} = \frac{a 2^{s-m} 5^{s-n}}{2^s 5^s}$$

Writing $a 2^{s-m} 5^{s-n}$ in the form $a_1 a_2 \dots a_r$ we get $a/b = a_1 a_2 \dots a_r / 10^s$. Therefore, the decimal expansion of a/b has at most s decimal places.

Từ mới:

reduced	= rút gọn (tính từ)
fraction	= phân số
infinite	= vô hạn (tính từ)
decimal	= thập phân (tính từ)
expansion	= sự khai triển
if and only if	= khi và chỉ khi
denominator	= mẫu số
prime	= nguyên tố (tính từ)
factor	= thừa số
suffice	= đủ, thoả mãn (động từ)
equivalent	= tương đương (tính từ)
claim	= sự khẳng định, mệnh đề
finite	= hữu hạn
conversely	= ngược lại (phó từ)

NGÔ VIỆT TRUNG

CHUẨN BỊ THI VÀO ĐẠI HỌC**HAI BÀI TOÁN KHÓ
CỦA MỘT ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC**

TRẦN TUẤN ĐIẾP

(GV khoa Toán ĐHBK Hà Nội)

Đề thi tuyển sinh Đại học Vinh năm 2001 đã thực sự thách thức năng lực tư duy và kỹ năng vận dụng kiến thức của các thí sinh. Trong tổng số bốn bài lớn gồm 12 câu hỏi của đề bài, số những câu có thể liệt vào loại khó chiếm tỉ lệ hơn một nửa, chắc rằng không mấy thí sinh hoàn thành được trọn vẹn bài giải. Bài viết này phân tích chi tiết cách giải một số bài khó tiêu biểu.

Bài 1. (Câu II3) Chứng minh rằng nếu a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác có chu vi bằng 3 thì :

$$3a^2 + 3b^2 + 3c^2 + 4abc \geq 13 \quad (1)$$

Giải. Gọi $T = 3a^2 + 3b^2 + 3c^2 + 4abc$

Cách 1. Do vai trò của a, b, c trong BĐT (1) như nhau nên không giảm tính tổng quát có thể coi $0 \leq a \leq b \leq c$.

Từ $a+b+c = 3$ và $a+b > c$ suy ra $1 \leq c < \frac{3}{2}$ (2).

Ta biến đổi

$$\begin{aligned} T &= 3(a^2 + b^2) + 3c^2 + 4abc \\ &= 3[(a+b)^2 - 2ab] + 3c^2 + 4abc \\ &= 3(3-c)^2 + c^2 - 2ab(3-2c) \end{aligned}$$

Do $3-2c > 0$ và để ý $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ (3) suy ra :

$$\begin{aligned} T &\geq 3(3-c)^2 + 3c^2 - \frac{1}{2}(a+b)^2(3-2c) = \\ &= 3(2c^2 - 6c + 9) - \frac{1}{2}(3-c)^2(3-2c) = \\ &= c^3 - \frac{3}{2}c^2 + \frac{27}{2} = f(c) \text{ với mọi } c \text{ thỏa mãn (2).} \\ f'(c) &= 3c^2 - 3c = 3c(c-1) \end{aligned}$$

Suy ra hàm số $f(c)$ đồng biến trên khoảng $\left[1; \frac{3}{2}\right)$, vì vậy: $T \geq f(c) \geq f(1) = 1 - \frac{3}{2} + \frac{27}{2} = 13$ đồng thời $T = 13$ khi và chỉ khi $c = 1$. Với giả thiết đã nêu $a \leq b \leq c$, $a+b+c = 3$ và (3) suy ra $a = b = c = 1$, tức là tam giác đều.

Phân tích: Chỗ khó của đề bài là sự hiện diện của số hạng $4abc$ ở vế trái của BĐT (1). Việc áp dụng các BĐT cơ bản quen thuộc như Côsi hoặc Bunhiacôpxki cho biểu thức T tỏ ra không thích hợp. Bằng cách sắp thứ tự $a \leq b \leq c$ và ước lượng T bởi một hàm số chỉ phụ thuộc biến c ta sẽ đạt được mục đích!

Cách 2. Trước hết ta chứng minh rằng nếu a, b, c là ba số dương thì có :

$$abc \geq (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \quad (4)$$

Thật vậy từ

$$a^2 \geq a^2 - (b-c)^2 = (a+b-c)(a+c-b)$$

$$b^2 \geq b^2 - (c-a)^2 = (b+c-a)(b+a-c)$$

$$c^2 \geq c^2 - (a-b)^2 = (c+a-b)(c+b-a)^2$$

Suy ra :

$$a^2b^2c^2 \geq (a+b-c)^2(b+c-a)^2(c+a-b)^2$$

nên $abc \geq (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)$

Ta viết BĐT (4) dưới dạng

$$abc \geq (a+b+c-2c)(b+c+a-2a)(c+a+b-2b)$$

CÂU LẠC BỘ THPT**CUỘC CHƠI ĐAU THIÊN NIÊN KỈ MỚI**

Mời các bạn tham gia cuộc chơi hàng tháng

ĐOÁN TUỔI VÀ BIẾT AI QUÁ ẢNH

Bạn hãy cắt phiếu cuộc chơi và dán ở bên ngoài phong bì gửi Tòa soạn THPT sau khi đã điền câu trả lời. Bên trong phong bì bạn có thể viết cảm tưởng về cuộc chơi nhưng không gửi bài khác. Nhớ ghi địa chỉ của bạn !

THAM GIA CUỘC CHƠI ĐAU THIÊN NIÊN KỈ

Người trong ảnh ?

Họ và tên :

.....

Ảnh chụp khi tuổi.



và theo giả thiết $a+b+c = 3$ nên ta có :

$$\begin{aligned} abc &\geq (3-2c)(3-2a)(3-2b) = \\ &= 27 - 18(a+b+c) + 12(ab+bc+ca) - 8abc \\ &= -27 + 12(ab+bc+ca) - 8abc \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra : } 3abc \geq -9 + 4(ab+bc+ca)$$

Từ đó :

$$\begin{aligned} T &\geq 3(a^2+b^2+c^2) - 12 + \frac{16}{3}(ab+bc+ca) \\ &= 3(a+b+c)^2 - 6(ab+bc+ca) - 12 + \frac{16}{3}(ab+bc+ca) \\ &= 27 - 12 - \frac{2}{3}(ab+bc+ca) \geq \\ &\geq 15 - \frac{2}{9}(a+b+c)^2 = 15 - 2 = 13 \text{ (đpcm).} \end{aligned}$$

Phân tích. Nhờ sự trợ giúp của BĐT (4) ta ước lượng được biểu thức T mà không cần đưa vào giả thiết $a \leq b \leq c$. Tuy mà nhiên việc này sinh ý tưởng vận dụng BĐT (4) vào bài toán tỏ ra khá tinh tế, không dễ phát hiện nhất là trong trạng thái tâm lí căng thẳng ở phòng thi.

Cũng từ cách giải này có thể giảm giả thiết a, b, c là độ dài ba cạnh tam giác có chu vi bằng 3 bởi giả thiết yếu hơn : $a, b, c > 0$ và $a+b+c = 3$.

Bài 2. (Câu IV1; 2)

1) Tính tích phân

$$I = \int_0^{\pi/2} \ln \frac{(1+\sin x)^{1+\cos x}}{1+\cos x} dx$$

2) Tính tích phân

$$J = \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \frac{x \sin x}{\cos^2 x} dx$$

Giải. 1) Dễ thấy $I = I_1 - I_2$ trong đó

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} (1+\cos x) \ln(1+\sin x) dx$$

$$\text{và } I_2 = \int_0^{\pi/2} \ln(1+\cos x) dx$$

Trong tích phân I_1 , đổi biến $x = \frac{\pi}{2} - t$ ta có :

$$\begin{aligned} I_1 &= - \int_{\pi/2}^0 (1+\sin t) \ln(1+\cos t) dt \\ &= \int_0^{\pi/2} \ln(1+\cos t) dt + \int_0^{\pi/2} \ln(1+\cos t) \sin t dt \\ &= I_2 - \int_0^{\pi/2} \ln(1+\cos t) d(1+\cos t) \end{aligned}$$

Đổi biến $1+\cos t = z$ ta được :

$$\begin{aligned} I &= I_1 - I_2 = - \int_2^1 \ln z dz = \int_1^2 \ln z dz \\ &= z \ln z \Big|_1^2 - \int_1^2 z \frac{dz}{z} = 2 \ln 2 - 1 = \ln \frac{4}{e} \end{aligned}$$

Phân tích: Cách tính tích phân I nhờ phép đổi biến $x = \frac{\pi}{2} - t$ giúp biểu diễn được I_1 theo I_2 nhờ đó tính được I là nét đặc trưng trong kĩ thuật tính tích phân xác định. Nếu không tiến hành theo phương pháp đó mà rón sức tìm nguyên hàm của hàm số dưới dấu tích phân I thì bạn sẽ lâm vào ngõ cụt !

2) Để tính J , ta viết $J = \int_0^{\pi/3} x d\left(\frac{1}{\cos x}\right)$, rồi

áp dụng công thức tính tích phân từng phần với lưu ý

$$\int_0^{\pi/3} \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right|_0^{\pi/3} = \ln \tan \frac{5\pi}{12}$$

$$\text{sẽ thu được kết quả } J = 4 \frac{\pi}{3} - 2 \ln \tan \frac{5\pi}{12}.$$

Ý KIẾN BẠN ĐỌC

BÀI NÀO KHÓ HƠN ?

Bạn hãy so sánh hai bài toán :

Bài 1. Cho 3 số dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $abc = 1$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$P = \frac{bc}{a^2b+a^2c} + \frac{ca}{b^2c+b^2a} + \frac{ab}{c^2a+c^2b}$$

Bài 2. Cho a, b, c là 3 số dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$$

Xem cách giải bài 2 và bài 1 ở THPT số 248 (2/1998).

Bạn có biết không : bài 1 là đề thi tuyển sinh vào Đại học Nông nghiệp I Hà Nội năm 2000 còn bài 2 là đề thi toán quốc tế lần thứ 36 (1995). Bài 1 có khi còn khó hơn bài 2 thế mà chúng ta (học sinh dự thi đại học của Việt Nam phải giải quyết trong thời gian ngắn còn bài 2 được giải quyết trong thời gian dài. Thêm nữa theo thầy Nguyễn Văn Mậu trong bài viết về IMO 36 cho biết một số đội tuyển giàu truyền thống trên thế giới đã phải bó tay trước bài toán trên. Các bạn có ý kiến gì về sự kiện trên ?

VÕ VĂN QUANG

(Đội 6, xã Hưng Xá, Hưng Nguyên, Nghệ An)



KHÔNG GIẢI ĐƯỢC hay VẪN GIẢI ĐƯỢC

TRẦN XUÂN UY

(GV THCS Trần Đăng Ninh, Nam Định)

Trong SGK Hình 9 (1995) có bài tập 2 trang 79 :

"Cho tứ giác $ABCD$ và điểm S nằm ngoài $mp(ABCD)$, gọi A', B', C', D' lần lượt là trung điểm của SA, SB, SC, SD .

Chứng minh hai mặt phẳng $(ABCD)$ và $(A'B'C'D')$ song song với nhau".

Xin dẫn ra 3 lời giải trong các sách bài tập :

(1) Lời giải của sách "Giải toán Hình học 9" – NXB Giáo dục – 1995 :

Trong $mp(SAB)$, $A'B'$ là đường trung bình của $\triangle SAB$, do đó $A'B' \parallel AB \Rightarrow A'B' \parallel (ABCD)$, tương tự $B'C' \parallel BC \Rightarrow B'C' \parallel (ABCD)$

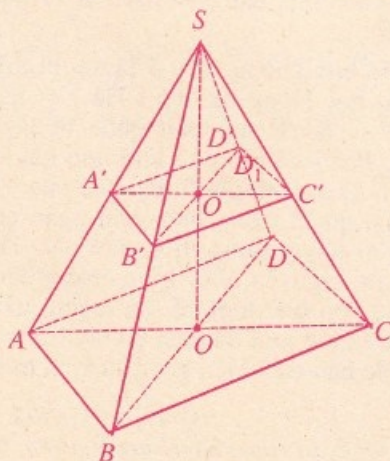
$(A'B'C'D')$ chứa hai đường thẳng $A'B'$ và $B'C'$ cùng song song với $(ABCD)$ mà $A'B'$ cắt $B'C'$ suy ra $(A'B'C'D') \parallel (ABCD)$.

(2) Lời giải của sách "Giải bài tập Hình học 9" – NXB Đồng Nai – 1995 :

Nối hai đường chéo $A'C'$ và $B'D'$ của tứ giác $A'B'C'D'$, chúng cắt nhau (theo tính chất đường chéo của tứ giác)...

(3) Lời giải của sách "Giải bài tập Hình học 9" – NXB Giáo dục – 1997 :

Vì A', B', C' là trung điểm của SA, SB, SC nên $A'B' \parallel AB, A'C' \parallel AC$ do đó $A'B'$ và $A'C'$ nằm trong $mp(P) \parallel (ABCD)$, tương tự $A'D' \parallel AD, A'C' \parallel AC$ nên $A'D'$ và $A'C'$ nằm trong $mp(P') \parallel (ABCD)$, mà (P) và (P') có giao tuyến $A'C'$ nên $(P) \equiv (P')$ hay A', B', C', D' nằm trên



cùng một mặt phẳng. Do đó $(A'B'C'D') \parallel (ABCD)$.

Ý kiến bình luận :

Tính chặt chẽ, lập luận có căn cứ là một vẻ đẹp của Toán học.

Các lời giải (1), (2) mặc nhiên xem 4 điểm A', B', C', D' đã là đồng phẳng ; lời giải (3) sử dụng một mệnh đề không có ở Hình học 9.

Sau đó, sách Hình 9 đã sửa "tứ giác $ABCD$ " thành "hình thang $ABCD$ " phải chăng vì bài toán không giải được với chỉ các kiến thức đã có ở lớp 9 ?

Trong bài viết này, xin nêu ra 2 cách giải bài toán nói trên (khi $ABCD$ là tứ giác), với các kiến thức ở trường THCS.

Cách 1. Gọi giao điểm của AC và BD là O .

Trong $mp(SAC)$, $A'C'$ là đường trung bình của $\triangle SAC \Rightarrow A'C' \parallel AC$, do đó $A'C' \parallel (ABCD)$.

Trong $\triangle SAC$, gọi giao điểm của $A'C'$ và SO là O' thì O' là trung điểm của SO , nghĩa là $A'C'$ đi qua trung điểm O' của SO .

Chứng minh tương tự được $B'D' \parallel (ABCD)$ và $B'D'$ đi qua O' , $A'C'$ và $B'D'$ cắt nhau tại O' xác định $mp(A'B'C'D')$ suy ra $(A'B'C'D') \parallel (ABCD)$.

Cách 2. Ba điểm A', B', C' không thẳng hàng xác định $mp(A'B'C')$, mặt phẳng này cắt SD tại D_1 .

Trong $mp(SAB)$, $A'B'$ là đường trung bình của $\triangle SAB \Rightarrow A'B' \parallel AB$ do đó $A'B' \parallel (ABCD)$.

Tương tự $B'C' \parallel BC \Rightarrow B'C' \parallel (ABCD)$, mà $A'B', B'C'$ giao nhau tại B' , suy ra $(A'B'C'D_1) \parallel (ABCD)$.

Hai mặt phẳng $(A'B'C'D_1), (ABCD)$ song song bị $mp(SCD)$ cắt theo hai giao tuyến lần lượt là $C'D_1, CD \Rightarrow C'D_1 \parallel CD \Rightarrow D_1$ là trung điểm của SD .

D' cũng là trung điểm của SD nên $D' \equiv D_1$, vậy $(A'B'C'D') \parallel (ABCD)$.

Mong nhận được ý kiến trao đổi thêm của các bạn.

DANH SÁCH CÁC BẠN ĐẠT GIẢI CUỘC THI VUI HÈ 2001

Giải nhất: (2 giải)

- 1) *Trần Mạnh Cường*, lớp 8B, THCS Lê Hồng Phong, Tx. Yên Bái, Yên Bái.
- 2) *Hàn Ngọc Đức*, 12C, THPT Mỹ Hào, Hưng Yên.

Giải nhì: (6 giải)

- 1) *Lê Thị Thu Trang*, 9/3, THCS Lê Quý Đôn, Tp. Hải Dương, Hải Dương.
- 2) *Hoàng Kiên Trung*, 11T1, THPT Lam Sơn, Tp. Thanh Hóa, Thanh Hóa.
- 3) *Bùi Văn Trường*, 10D, THPT Giao Thủy A, Nam Định
- 4) *Phan Đức Thiện*, 11T, THCS NK Hà Tĩnh
- 5) *Võ Thông Thái*, 8³ trường cấp 2-3 Ngô Gia Tự, Cam Nghĩa, Cam Ranh, Khánh Hòa.
- 6) *Trần Vũ Diệu*, 11 Toán 1, THPT chuyên Lê Hồng Phong, Nam Định.

Giải ba: (14 giải)

- 1) *Trần Văn Hình*, 11A, THPT Nghĩa Hưng A, Nam Định
- 2) *Nguyễn Quốc Hùng*, 10A2, THPT Nghi Lộc I, Nghệ An
- 3) *Trương Xuân Chiến*, 12G, THPT Phan Đình Phùng, Hà Tĩnh

4) *Đinh Văn Năm*, xóm 6, Giao An, Giao Thủy, Nam Định

5) *Nguyễn Văn Vững*, 11A1, THPT Mạc Đĩnh Chi, Thanh Quang, Nam Sách, Hải Dương

6) *Vũ Trung Dũng*, 12B1, THPT chuyên Hùng Vương, Việt Trì, Phú Thọ

7) *Bạch Văn Huân*, tổ 2, thôn 4, Lộc Châu, Bảo Lộc, Lâm Đồng.

8) *Trần Thị Chiến*, 12A3, THPT Lương Tài I, Bắc Ninh.

9) *Đặng Lam Sơn*, 9B1, THCS Lương Thế Vinh, Tx. Thái Bình, Thái Bình.

10) *Nguyễn Quang Đạt*, lớp A2, khóa 2000-2003, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành, Tx. Yên Bái, Yên Bái.

11) *Phạm Trung Hiếu*, 12A1, khối PT chuyên Toán - Tin, ĐH Vinh, Nghệ An

12) *Cao Ngọc Cường*, 11A, THPT Diễn Châu 5, Diễn Châu, Nghệ An

13) *Nguyễn Vũ Quang Triết*, lớp ĐH1A3, ĐH An Giang, Tp. Long Xuyên, An Giang

14) *Phan Trung Kiên*, 10B, THPT Nam Đàn I, Nghệ An.

THTT

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN QUỐC GIA... (Tiếp trang 23)

Áp dụng bất Côsi ta được:

$$\frac{2}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{15}}{2} \sqrt{z} \leq \frac{3}{2} + \frac{5z}{2x}$$

Do đó, từ (14) ta có:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{z} \leq \frac{3}{2} + \frac{5z}{2x} + \frac{5}{2} \left(1 - \frac{z}{x}\right) = 4. \quad (15)$$

Bằng cách tương tự, từ điều kiện thứ nhất và thứ ba của đề bài ta chứng minh được:

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq \frac{9}{2}. \quad (16)$$

Từ (15) và (16) suy ra:

$$\begin{aligned} P(x, y, z) &= \frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z} \\ &= \frac{1}{x} + \frac{1}{z} + 2\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \leq 4 + 9 = 13. \end{aligned}$$

Hơn nữa, từ các chứng minh trên dễ thấy:

$$P(x, y, z) = 13 \Leftrightarrow x = 2/3; y = 1/2; z = 2/5;$$

Các giá trị x, y, z nêu trên thỏa mãn điều kiện của đề bài. Vì vậy: $\max P(x, y, z) = 13$

Bài 6: Quy ước: Thứ tự của các hàng được tính từ trên xuống dưới và thứ tự của các cột được tính từ trái qua phải.

Kí hiệu (i, j) là ô vuông nằm ở giao của hàng thứ i và cột thứ j . Kí hiệu $k(T)$ là số ô được tô màu ở cách tô màu T .

Xét một cách tô màu T thỏa mãn điều kiện đề bài. Dễ thấy, nếu ô (i, j) được tô màu ($1 \leq i \leq 1999$) thì ô $(i+1, j)$ và các ô kề với nó trong cùng hàng đều không được tô màu. Điều này cho phép ta thực hiện phép biến đổi sau đối với T : Xóa màu ở tất cả các ô (i, j) mà $i \equiv 1 \pmod{2}$ và đồng thời tô màu các ô $(i+1, j)$.

Rõ ràng sau khi thực hiện phép biến đổi nói trên đối với T , ta sẽ được một cách tô màu T' thỏa mãn điều kiện đề bài và:

$$+ k(T') = k(T);$$

+ Tất cả các ô nằm ở các hàng thứ $2i-1$, $i = 1, 2, \dots, 10^3$, đều không có màu.

Từ điều kiện của đề bài suy ra số ô được tô màu trong một hàng không vượt quá 1001. Do đó: $k(T) \leq 1001 \cdot 10^3$. Vì vậy: $k(T) \leq 1001 \cdot 10^3$, với mọi cách tô màu T thỏa mãn điều kiện đề bài.

Xét cách tô màu sau: Tô màu tất cả các ô $(2i, 2j-1)$, với $i = 1, 2, \dots, 10^3$; $j = 1, 2, \dots, 1001$. Dễ thấy cách tô màu vừa nêu thỏa mãn điều kiện đề bài và có số ô được tô màu bằng $1001 \cdot 10^3$.

Vậy, số nguyên dương k lớn nhất cần tìm là: $k = 1001 \cdot 10^3$.



ĐỀ RA KÌ NÀY

CÁC LỚP THCS

Bài T1/292. Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình :

$$\frac{3|3x-4y|+4|4x-3y|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{1201}$$

ĐẶNG THANH HẢI

(Cựu HS khối PTCT-T, ĐH Vinh, Nghệ An)

Bài T2/292. Gọi x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $xyz = 1$.

a) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A = \frac{x^2}{x+y+y^3z} + \frac{y^2}{y+z+z^3x} + \frac{z^2}{z+x+x^3y}$$

b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$B = \frac{x^2y^2}{x^2y^2+x^7+y^7} + \frac{y^2z^2}{y^2z^2+y^7+z^7} + \frac{z^2x^2}{z^2x^2+z^7+x^7}$$

THÁI NHẬT PHƯƠNG

(GV THPT Ngô Gia Tự, Cam Ranh, Khánh Hòa)

TRẦN HÀ

(GV THPT chuyên Vĩnh Bảo, Hải Phòng)

Bài T3/292. Giải phương trình

$$\sqrt{x^2+x-1} + \sqrt{x-x^2+1} = x^2-x+2$$

NGUYỄN THỊ XUÂN MAI

(SV Toán 3A ĐHSP Huế, Thừa Thiên - Huế)

Bài T4/292. Cho tam giác ABC với $AB < AC$. Gọi AD và AM lần lượt là đường phân giác và đường trung tuyến của tam giác. Đường thẳng qua D và vuông góc với AD cắt cạnh AC ở điểm E . So sánh diện tích hai tam giác ADM và CEM .

NGUYỄN KHÁNH NGUYỄN

(GV THCS Hồng Bàng, Hải Phòng)

Bài T5/292. Hai đường tròn $\mathcal{C}_1$ và $\mathcal{C}_2$ cắt nhau tại hai điểm A, B . Một điểm P thay đổi trên đường tròn $\mathcal{C}_1$, P khác A và B . Các đường thẳng PA, PB lại cắt $\mathcal{C}_2$ theo thứ tự tại D và E . Gọi M là trung điểm DE . Chứng minh rằng đường thẳng PM đi qua một điểm cố định.

HÀ VŨ ANH

(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/292. Cho p là số nguyên tố lẻ và $a_1, a_2, \dots, a_{p-1}$ là $p-1$ số nguyên không chia hết cho p . Chứng minh rằng trong các tổng $T = k_1a_1 + k_2a_2 + \dots + k_{p-1}a_{p-1}$, trong đó k_i ($i = 1, 2, \dots, p-1$) bằng 1 hoặc bằng -1 , có ít nhất một tổng chia hết cho p .

PHẠM NGỌC BỘI

(GV khối PTCT-T, ĐH Vinh, Nghệ An)

Bài T7/292. Cho tam thức bậc hai $P(x) = x^2 + px + q$. Hãy tìm tất cả các đa thức bậc bốn $Q(x)$ có hệ số bậc cao nhất bằng 1 sao cho $P(Q(x)) = Q(P(x))$.

BÙI ĐỨC HIỀN

(Cựu HS khối PTCT, ĐH Vinh, Nghệ An)

Bài T8/292. Xét k số không âm $x_1, x_2, \dots, x_k$

a) Biết $x_1 + x_2 + \dots + x_k \geq k$. Chứng minh rằng

$$x_1^a + x_2^a + \dots + x_k^a \geq x_1 + x_2 + \dots + x_k$$

với số thực $a \geq 1$.

b) Biết $x_1^b + x_2^b + \dots + x_k^b \geq k$. Chứng minh rằng : $x_1^a + x_2^a + \dots + x_k^a \geq x_1^b + x_2^b + \dots + x_k^b$ với các số thực a, b thỏa mãn $a \geq b > 0$.

NGÔ VĂN THÁI

(GV THPT hán công Quỳnh Phụ, Thái Bình)

Bài T9/292. Cho tam giác ABC với r là bán kính đường tròn nội tiếp. Gọi h_a, h_b, h_c là độ dài các đường cao với $h_a \leq h_b \leq h_c$. Chứng minh rằng : $9r \leq h_a + h_b + h_c \leq 5r + 2r \left(\frac{\sin A}{\sin C} + \frac{\sin C}{\sin A} \right) =$

$$= 9r + 2r \left(\sqrt{\frac{\sin A}{\sin C}} - \sqrt{\frac{\sin C}{\sin A}} \right)^2$$

VŨ TIẾN VIỆT

(GV Toán, ĐH An Ninh Hà Nội)

Bài T10/292. Cho tứ diện $ABCD$ có từng cặp cạnh đối diện bằng nhau. Gọi φ là số đo góc nhị diện cạnh AB của tứ diện. Chứng minh rằng :

a) $\cos \varphi = 1 - 2\cot A \cdot \cot B$.

b) $\sin \varphi \leq \frac{1}{\sqrt{2} \sin A \sin B}$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

HỒ QUANG VINH

(GV khối PTCT-T, ĐH Vinh, Nghệ An)

CÁC ĐỀ VẬT LÝ

Bài L1/292. Một chiếc thuyền khối lượng $m = 50\text{kg}$ chuyển động thẳng trên mặt nước với vận tốc đầu $v_0 = 10\text{m/s}$, chịu lực cản của nước

$\vec{F}_C = -\alpha \vec{V}$ với $\vec{V}$ là vận tốc của thuyền, α là hằng số dương.

a) Biết quãng đường thuyền đi được khi vận tốc giảm từ v_0 đến $v = 5\text{m/s}$ là 40m . Xác định α và thời gian thuyền đi được quãng đường đó.

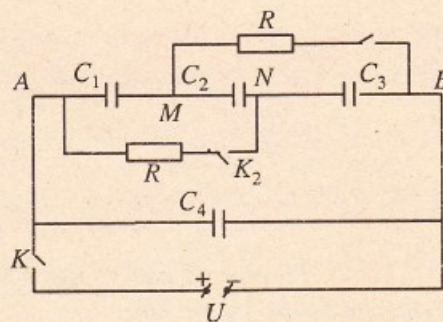
b) Xác định quãng đường thuyền đi được đến khi dừng lại và thời gian đi quãng đường đó.

NGUYỄN XUÂN QUANG
(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

Bài L2/292. Cho mạch điện như hình vẽ : $C_1 = C_2 = C_3 = \frac{1}{2} C_4 = 45\mu\text{F}$; $U = 24\text{V}$; $R = 11\Omega$.

Ban đầu các khóa K, K_1, K_2 đều mở, các tụ chưa tích điện.

Đóng khóa K , các tụ tích điện hoàn toàn. Sau đó, mở khóa K và đóng đồng thời hai khóa K_1, K_2 .



a) Tìm nhiệt lượng tổng cộng tỏa ra trên các điện trở cho đến khi trạng thái mạch điện đã ổn định.

b) Xác định cường độ dòng điện chạy qua các điện trở khi $U_{C_2} = \frac{1}{12} U$.

TRẦN MẠNH HÙNG
(Khởi PTCTT - ĐH Vinh, Nghệ An)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/292. Find all integral solutions of the equation $\frac{3|3x-4y|+4|4x-3y|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{1201}$

T2/292. Let x, y, z be positive real numbers satisfying the condition $xyz = 1$.

a) Find the least value of the expression

$$A = \frac{x^2}{x+y+y^3z} + \frac{y^2}{y+z+z^3x} + \frac{z^2}{z+x+x^3y}$$

b) Find the greatest value of the expression

$$B = \frac{x^2y^2}{x^2y^2+x^7+y^7} + \frac{y^2z^2}{y^2z^2+y^7+z^7} + \frac{z^2x^2}{z^2x^2+z^7+x^7}$$

T3/292. Solve the equation

$$\sqrt{x^2+x-1} + \sqrt{x-x^2+1} = x^2-x+2$$

T4/292. Let ABC be a triangle with $AB < AC$ and let AD and AM be respectively its angled-bisector and its median issued from A . The line passing through D , perpendicular to AD , cuts the side AC at E . Compare the areas of the triangles ADM and CEM .

T5/292. In plane, two circles $\mathcal{C}_1$ and $\mathcal{C}_2$ intersect at A and B . A point P moves on $\mathcal{C}_1$ (P distinct from A and B). The lines PA, PB cut $\mathcal{C}_2$ again at D and E . Let M be the midpoint of DE . Prove that the line PM passes through a fixed point.

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/292. Let p be an odd prime number and let $a_1, a_2, \dots, a_{p-1}$ be $p-1$ integers not divisible by p . Prove that among the sums

$$T = k_1 a_1 + k_2 a_2 + \dots + k_{p-1} a_{p-1},$$

where $k_i = +1$ or $k_i = -1$ for $i = 1, 2, \dots, p-1$, there exists at least a sum divisible by p .

T7/292. Let $P(x) = x^2 + px + q$ be a trinomial of second degree. Find all polynomials of 4th degree $Q(x)$ with leading coefficient 1 such that $P(Q(x)) = Q(P(x))$.

T8/292. Let $x_1, x_2, \dots, x_k$ be k non negative numbers. Prove that :

a) if $x_1 + x_2 + \dots + x_k \geq k$ then

$$x_1^a + x_2^a + \dots + x_k^a \geq x_1 + x_2 + \dots + x_k$$

for every real number $a \geq 1$.

b) If $x_1^b + x_2^b + \dots + x_k^b \geq k$ then

$$x_1^a + x_2^a + \dots + x_k^a \geq x_1^b + x_2^b + \dots + x_k^b$$

where the real numbers a, b satisfy $a \geq b > 0$.

T9/292. Let ABC be a triangle with inradius r and let $h_a \leq h_b \leq h_c$. Prove that :

$$9r \leq h_a + h_b + h_c \leq 5r + 2r \left(\frac{\sin A}{\sin C} + \frac{\sin C}{\sin A} \right) =$$

$$= 9r + 2r \left(\sqrt{\frac{\sin A}{\sin C}} - \sqrt{\frac{\sin C}{\sin A}} \right)^2$$

T10/292. Let $ABCD$ be a tetrahedron with three pairs of equal opposite sides and let ϕ be the measure of its bihedral angle with side AB . Prove that :

a) $\cos \phi = 1 - 2 \cot A \cdot \cot B$.

b) $\sin \phi \leq \frac{1}{\sqrt{2} \sin A \sin B}$. When does equality occur?



Bài T1/288. Tìm tất cả các số nguyên tố $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7, p_8$ sao cho

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 + p_5^2 + p_6^2 + p_7^2 = p_8^2$$

Lời giải. Với p là số nguyên tố thì :

– hoặc $p = 2$ (chẵn), khi đó $p^2 = 4$

– hoặc $p = 2m+1$ (lẻ), khi đó

$$p^2 = 4m(m+1) + 1 \equiv 1 \pmod{8}$$

$$\text{Bây giờ từ } \sum_{i=1}^7 p_i^2 = p_8^2 \quad (1)$$

suy ra $p_8^2 \geq 28$ và $p_8^2 \equiv 1 \pmod{8}$ (2)

Gọi k là số các số chẵn trong dãy số $p_1, p_2, \dots$

$$p_7 \ (0 \leq k \leq 7) \text{ thì } \sum_{i=1}^7 p_i^2 = 4k + A, \text{ trong đó } A \text{ là}$$

tổng bình phương tất cả các số lẻ trong dãy $p_1, p_2, \dots, p_7$ (gồm $7-k$ số lẻ).

$$\text{Do đó } \sum_{i=1}^7 p_i^2 \equiv 4k + (7-k) \cdot 1 = 3k + 7 \pmod{8} \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) ta suy ra $(3k + 6) : 8$ hay $3(k+2) : 8$. Do $(3, 8) = 1$ nên suy ra $(k+2) : 8$ hay $k = 6 \ (0 \leq k \leq 7)$.

Nghĩa là trong dãy $p_1, p_2, \dots, p_7$ có đúng 6 số bằng 2. Giả sử $p_1 = p_2 = \dots = p_6 = 2$.

$$\text{Khi đó từ (1) ta có } 24 + p_7^2 = p_8^2$$

$$\text{hay } (p_8 - p_7)(p_8 + p_7) = 24 \quad (4)$$

Do p_7, p_8 đều là số lẻ và $p_8 - p_7 < p_8 + p_7$ nên từ (4) ta có

$$\begin{cases} p_8 - p_7 = 2 \\ p_8 + p_7 = 12 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} p_8 - p_7 = 4 \\ p_8 + p_7 = 6 \end{cases}$$

Giải ra ta được $(p_7, p_8) = (5, 7)$ hoặc $(1, 5)$

Nghiệm $(p_7, p_8) = (1, 5)$ bị loại.

Tóm lại tất cả các số cần tìm là các bộ $(p_1, p_2, \dots, p_7, p_8)$ trong đó $(p_1, p_2, \dots, p_7)$ là một hoán vị của $(2, 2, \dots, 2, 5)$ và $p_8 = 7$.

Nhận xét. Rất nhiều bạn tìm được đáp số đúng, nhưng trong cách giải có nhiều chỗ chưa chính xác và rõ ràng.

TỔ NGUYÊN

Bài T2/288. Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{(1+b)(1+c)} + \frac{b^3}{(1+c)(1+a)} + \frac{c^3}{(1+a)(1+b)} \geq \frac{3}{4}$$

Lời giải. (Của bạn Lê Bảo Khánh, 9E, PTNK Lê Lợi, Hà Đông, Hà Tây). Áp dụng BĐT Côsi được

$$\frac{a^3}{(1+b)(1+c)} + \frac{1+b}{8} + \frac{1+c}{8} \geq \sqrt[3]{\frac{a^3(1+b)(1+c)}{(1+b)(1+c)64}} = \frac{3a}{4}.$$

$$\frac{b^3}{(1+c)(1+a)} + \frac{1+c}{8} + \frac{1+a}{8} \geq \frac{3b}{4}$$

$$\frac{c^3}{(1+a)(1+b)} + \frac{1+a}{8} + \frac{1+b}{8} \geq \frac{3c}{4}$$

Cộng theo từng vế ba bất đẳng thức trên, ta có :

$$\frac{a^3}{(1+b)(1+c)} + \frac{b^3}{(1+c)(1+a)} + \frac{c^3}{(1+a)(1+b)} + \frac{3}{4} \geq$$

$$\geq \frac{a+b+c}{2}. \text{ Vì } a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc} = 3, \text{ do đó}$$

$$\frac{a^3}{(1+b)(1+c)} + \frac{b^3}{(1+c)(1+a)} + \frac{c^3}{(1+a)(1+b)} \geq \frac{3}{4}$$

đẳng thức xảy ra chỉ khi $a = b = c$.

Nhận xét. Rất nhiều bạn giải được bài toán này. Tuy vậy vẫn có bạn giải sai hoặc không tìm được điều kiện đẳng thức xảy ra. Một số bạn khác có nêu bài toán tổng quát cho n số. Các bạn sau đây có lời giải ngắn gọn : Nguyễn Lâm Tuyền, THCS Lạc Thịnh, Yên Thủy và Lê Thái Hoàng, THCS Hữu Nghị, Hòa Bình; Huỳnh Thị Thủy Lan, 8C1 THCS Phú Lâm Tuy Hòa, Phú Yên; Trần Quang Bách, 9 THCS Lê Văn Thiêm, Hà Tĩnh; Vũ Minh Hoàng, THCS Phong Châu, Phù Ninh, Phú Thọ; Lê Đình Huy, 8A, THCS Nguyễn Trãi, Nam Sách, Hải Dương; Nguyễn Quang Tùng, 9H, THCS Trưng Vương, Hà Nội.

VŨ ĐÌNH HÒA

Bài T3/288. Tìm điều kiện cần và đủ đối với các số a, b, c để phương trình sau vô nghiệm :

$$a(ax^2 + bx + c)^2 + b(ax^2 + bx + c) + c = x$$

Lời giải. Đặt $f(x) = ax^2 + bx + c$ thì phương trình đã cho trở thành $f(f(x)) = x$ (*)

$$\text{Xét } g(x) = f(x) - x = ax^2 + (b-1)x + c$$

Nếu phương trình $g(x) = 0$ có nghiệm x_0 thì $f(x_0) = x_0 \Rightarrow f(f(x_0)) = f(x_0) = x_0$ nên x_0 là nghiệm của (*)

Nếu phương trình $g(x) = 0$ vô nghiệm thì $g(x) \neq 0$ với mọi x , khi đó ta có hai khả năng :

GIẢI BÀI KÌ TRƯỚC

• Khả năng 1 : $g(x) > 0$ với mọi x thì $f(x) > x$ với mọi $x \Rightarrow f(f(x)) > f(x) > x$ với mọi x (*) vô nghiệm.

• Khả năng 2 : $g(x) < 0$ với mọi x thì $f(x) < x$ với mọi $x \Rightarrow f(f(x)) < f(x) < x$ với mọi x nên (*) vô nghiệm.

Từ đó chứng tỏ (*) vô nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình $g(x) = 0$ vô nghiệm.

Để dàng tìm được điều kiện cần và đủ là $a = 0$; $b = 1$; $c \neq 0$ hoặc $(b-1)^2 < 4ac$

Nhận xét.

1) Lời giải trên tuy hay nhưng đã dựa vào tính chất của hàm số $y = g(x)$ là một hàm số liên tục trên R (đồ thị hàm số là đường thẳng hoặc parabol).

2) Một số bạn khi tìm điều kiện để phương trình $g(x) = 0$ vô nghiệm đã thiếu trường hợp $a = 0$; $b = 1$ và $c \neq 0$.

3) Một số bạn không để ý điều kiện $(b-1)^2 < 4ac$ đã bao hàm điều kiện $a \neq 0$.

4) Các bạn có thể đưa phương trình (*) về dạng tích như sau :

$$f(f(x)) = x \quad (*)$$

$$\Leftrightarrow f(f(x)) - ax^2 - bx - c + f(x) - x = 0$$

$$\Leftrightarrow a[f^2(x) - x^2] + b[f(x) - x] + [f(x) - x] = 0$$

$$\Leftrightarrow [f(x) - x][af(x) + ax + b + 1] = 0$$

$$\Leftrightarrow [ax^2 + (b-1)x + c][a^2x^2 + a(b+1)x + ac + b + 1] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ax^2 + (b-1)x + c = 0 & (1) \\ a^2x^2 + a(b+1)x + ac + b + 1 = 0 & (2) \end{cases}$$

Phương trình (*) vô nghiệm $\Leftrightarrow$ (1) và (2) đồng thời vô nghiệm.

Ta có (1) vô nghiệm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0; b = 1; c \neq 0 \\ (b-1)^2 < 4ac \end{cases}$$

Nếu $a = 0$; $b = 1$; $c \neq 0$ thì (2) vô nghiệm $\Rightarrow$ (*) vô nghiệm.

Nếu $(b-1)^2 < 4ac$ thì $a \neq 0$ và phương trình (2) có $\Delta_x = a^2[(b-1)^2 - 4ac - 4] < 0$ nên vô nghiệm $\Rightarrow$ (*) vô nghiệm.

5) Các bạn có lời giải chính xác là :

Bùi Thanh Tùng, 9B, THCS Lê Quý Đôn, Bim Sơn, Thanh Hóa; Nguyễn Tiến Dũng, 9², THCS Mỹ Hóa, Bến Tre; Doãn Thị Kim Huế, 8C, THCS Phạm Huy Thông, Ân Thi, Hưng Yên; Lê Đăng Nam, 9A, THCS Yên Phong, Bắc Ninh; Phạm Huy Hoàng, 9/3, THCS Lê Quý Đôn, Hải Dương; Tôn Thất Tú, 9³, THCS Nguyễn Tri Phương, Huế; Đoàn Duy Thuyết, 8A2, THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên, Nam Định; Lê Đình Huy, 8A, THCS Nguyễn Trãi, Hải Dương; Lê Bảo Khánh, 9E, THCS Lê Lợi, Tx. Hà Đông, Hà Tây; Nguyễn Minh Luân, 8A, THCS Nguyễn Việt Hồng, Tp. Cần Thơ, Cần Thơ; Nguyễn Tuyết Mai, 9A, THCS Lê Quý

Đôn, Bắc Giang; Lê Minh Quang, 9A, THCS Phan Huy Chú, Thạch Hà, Hà Tĩnh.

L.T.N

Bài T4/288. Gọi M là trung điểm cạnh BC của tam giác ABC . Gọi E và F tương ứng là chân đường vuông góc kẻ từ B tới AC và từ C tới AB . Biết tam giác MEF là tam giác đều, tính tỉ số $\frac{IK}{R}$, trong đó I là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$ và K là giao điểm (khác A) của tia AI với đường tròn bán kính R ngoại tiếp $\triangle ABC$.

Lời giải. Từ $\widehat{BIK} = \widehat{A}/2 + \widehat{B}/2$

$$\text{và } \widehat{IBK} = \widehat{CBK} + \widehat{B}/2$$

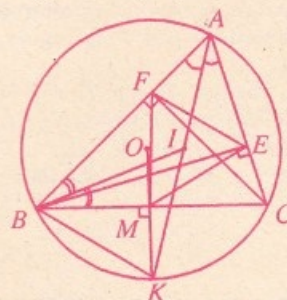
$$\text{suy ra } \widehat{BIK} = \widehat{IBK} \Rightarrow BK = IK \quad (1)$$

Chú ý : $MF = BM = MC = ME$ nên $\triangle MEF$ cân ở đỉnh M .

$$\text{Vậy : } \triangle MEF \text{ đều} \Leftrightarrow \angle EMF = 60^\circ \quad (2)$$

Khi $\widehat{A} = 90^\circ$ thì $E = F \Rightarrow$ trái giả thiết nên ta chỉ xét 2 trường hợp sau :

a) $\triangle ABC$ có góc A nhọn (h.1)



Hình 1

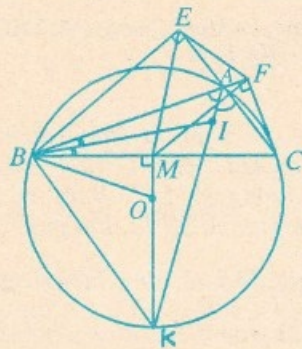
$$\begin{aligned} \widehat{EMF} &= 180^\circ - (\widehat{BMF} + \widehat{CME}) \\ &= 180^\circ - (180^\circ - 2\widehat{FBM} + 180^\circ - 2\widehat{ECM}) \\ &= 2(\widehat{FBM} + \widehat{ECM} - 90^\circ) \\ &= 2(180^\circ - \widehat{BAC} - 90^\circ) = 180^\circ - 2\widehat{A} \quad (3) \end{aligned}$$

Theo (2) thì $\widehat{EMF} = 60^\circ$, từ (3) có $180^\circ - 2\widehat{A} = 60^\circ \Leftrightarrow \widehat{A} = 60^\circ \Leftrightarrow \widehat{BAK} = 30^\circ \Leftrightarrow \widehat{BOK} = 60^\circ \Leftrightarrow BK = R$. Từ đó và từ (1) có $\frac{IK}{R} = 1$

b) $\triangle ABC$ có góc A tù (h.2)

$$\begin{aligned} \widehat{EMF} &= 180^\circ - (\widehat{BME} + \widehat{CMF}) = \\ &= 180^\circ - (180^\circ - 2\widehat{EBC} + 180^\circ - 2\widehat{FCB}) \\ &= 2(\widehat{EBC} + \widehat{FCB} - 90^\circ) \end{aligned}$$

GIẢI BÀI KÌ TRƯỚC



Hình 2

$$\begin{aligned} &= 2(90^\circ - \widehat{ECB} + 90^\circ - \widehat{FBC} - 90^\circ) \\ &= 180^\circ - 2(\widehat{ECB} + \widehat{FBC}) \\ &= 180^\circ - 2(180^\circ - \hat{A}) = 2\hat{A} - 180^\circ \quad (4) \end{aligned}$$

Theo (2) thì $\widehat{EMF} = 60^\circ$, từ (4) có $2\hat{A} - 180^\circ = 60^\circ \Leftrightarrow \hat{A} = 120^\circ \Leftrightarrow \widehat{BAK} = 60^\circ \Leftrightarrow \widehat{BOK} = 120^\circ$. Suy ra $\widehat{MBK} = 60^\circ \Leftrightarrow BK = R\sqrt{3}$. Từ đó và từ (1) có $\frac{IK}{R} = \sqrt{3}$.

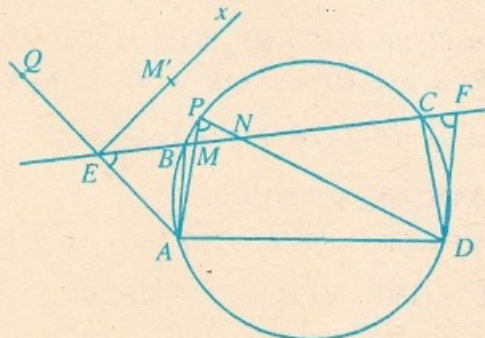
Nhận xét. Đa số các bạn không xét trường hợp góc A tù. Các bạn sau có lời giải đúng (ngoài ra còn 2 bạn không ghi tên).

Nam Định: Nguyễn Thanh Thiên, 9B, THCS Hải Hậu, Đoàn Duy Thuýết, 8A2 và Nguyễn Đăng Hợp, 9A2, THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên ; **Thanh Hóa :** Nguyễn Đình Dũng, 9A, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoàng Hóa; **Hà Tĩnh:** Lê Minh Quang, 9A, THCS Phan Huy Chú, Thạch Hà.

VIỆT HẢI

Bài T5/288. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp một đường tròn. Điểm P chạy trên cung BC không chứa A . Gọi M và N lần lượt là giao điểm của BC với PA và PD . Tính độ dài lớn nhất của MN .

Lời giải. Trên đường thẳng BC lấy E trên tia NM và F trên tia MN (tức M ở giữa E và N , N ở giữa M và F) sao cho : $\widehat{AEB} = \widehat{DFC} = \widehat{APD} =$



α . Do $P \in \widehat{AD}$ cố định nên $\widehat{APD} = \alpha$ không đổi, do đó E, F cố định.

Vì $\widehat{AEM} = \widehat{APN}$ nên tứ giác $AEPN$ là nội tiếp. Suy ra $\widehat{EAM} = \widehat{ENP} = \widehat{DNF}$.

Từ đó $\triangle EAM \sim \triangle FND$ nên $\frac{AE}{EM} = \frac{NF}{FD}$ hay
 $AE \times DF = EM \times NF$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } MN &= EF - (EM + NF) \leq \\ &\leq EF - 2\sqrt{EM \times NF} = EF - 2\sqrt{AE \times DF} \end{aligned}$$

Vậy MN lớn nhất bằng $EF - 2\sqrt{AE \times DF}$ với E, F được xác định như trên và $EM = NF = \sqrt{AE \times DF}$.

Ta có thể dựng điểm P để xác định vị trí của M, N như sau :

Dựng các cung chứa góc α trên đoạn AB, CD cắt đường thẳng BC tại E, F tương ứng nằm ngoài đoạn thẳng BC .

Đựng Q trên tia đối của EA sao cho $EQ = DF$.

Dựng tia $Ex \perp AQ$ cắt đường tròn đường kính AQ tại M' . Đường tròn tâm E bán kính EM' cắt BC tại M . AM cắt đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABCD$ tại P . Giao của PD và BC là N .

Nhận xét. 1) Phép dựng P và các điểm M, N là cần thiết để lời giải đầy đủ.

2) Nhiều bạn lạm dụng kí hiệu $\Rightarrow$ trong chứng minh.
Có bạn còn "sáng tạo" ra kí hiệu 1 để biểu thị từ "sao cho".

3) Các bạn có lời giải tốt :

Vinh Phúc: Khổng Đức Kiên, 9A, THCS Hương Canh, Bình Xuyên; **Bắc Giang:** Nguyễn Tuyết Mai, 9A, THCS Lê Quý Đôn, Tx. Bắc Giang; **Hải Dương:** Phạm Huy Hoàng, 9/3, THCS Lê Quý Đôn; **Hải Phòng:** Phạm Anh Minh và Trần Xuân Dũng, 9A, PTNK Trần Phú; **Hà Nội:** Nguyễn Quang Tùng, 9H, THCS Trung Vương; **Nam Định:** Nguyễn Đăng Hợp, 9A2, THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên; **Nghệ An:** Đậu Minh Hoàng, 9A, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu.

VŨ KIM THỦY

Bài T6/288. Cho số nguyên tố $p > 2$ sao cho $p-2$ chia hết cho 3. Chứng minh rằng trong tập hợp các số dạng $y^2 - x^3 - 1$ trong đó x, y là các số nguyên không âm nhỏ hơn p có nhiều nhất là $p-1$ số chia hết cho p .

Lời giải. (của bạn Võ Văn Thành, 10A, ĐHKHTN-ĐHOG Hà Nội)

Trước hết ta chứng minh nhân xét sau :

GIẢI BÀI KÌ TRƯỚC

Tập hợp $\{0^3, 1^3, \dots, (p-1)^3\}$ lập thành một hệ thặng dư đầy đủ (mod p). Thật vậy giả sử $a^3 \equiv b^3 \pmod{p}$. Ta có $a = 0 \Leftrightarrow b = 0$ ($a, b \in \{0, \dots, p-1\}$).

Giả sử $a, b \neq 0$. Theo định lí Phécma nhỏ

$$a^{p-1} \equiv b^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Theo giả thiết $p = 3k + 2 \Rightarrow a^{3k+1} \equiv b^{3k+1} \pmod{p}$.

Mặt khác $a^3 \equiv b^3 \pmod{p}$ kéo theo $a^{3k} \equiv b^{3k} \pmod{p}$. Suy ra $a \equiv b \pmod{p}$. Mà a, b đều bé hơn p nên $a = b$.

Nhận xét được chứng minh.

Như vậy với mỗi $y \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ tồn tại và duy nhất $x \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ để $x^3 \equiv y^2 - 1 \pmod{p}$. Nói cách khác có đúng p cặp (y, x) với $0 \leq y \leq p-1, 0 \leq x \leq p-1$ để $y^2 - x^3 - 1$ chia hết cho p . Lại có hai cặp $(y, x) = (1, 0)$ và $(y, x) = (3, 2)$ cho ta cùng một giá trị $y^2 - x^3 - 1 = 0$. Vậy tập $\{y^2 - x^3 - 1\}$ ở đó $y^3 - x^3 - 1$ chia hết cho p có nhiều nhất $p-1$ giá trị phân biệt.

Nhận xét. Các bạn sau đây có lời giải tốt:

1) Nguyễn Văn Thắng, 10T, Phạm Văn Trung, 11T, THPT chuyên Lê Khiết, **Quảng Ngãi**, Vũ Văn Dương, Nguyễn Lâm Tuyền, 11T, Nguyễn Thái Ngọc, 12T, Hoàng Văn Thụ, **Hòa Bình**; Trần Trung Duy, 12 Lê Quý Đôn, **Khánh Hòa**; Vũ Quang Thanh, 9B, Duy Tiên, **Hà Nam**; Nguyễn Võ Vĩnh Phúc, 12T, Sadec, **Đồng Tháp**; Trần Bá Bách, 12A, chuyên **Vĩnh Phúc**, Kim Đình Thái, 11A1, ĐHSPT **Hà Nội**, Lê Phương, 10T1, chuyên Lương Thế Vinh, **Đồng Nai**, Nguyễn Lâm Hùng, 10T, ĐHQG **Tp. HCM**.

2) Một số bạn kết luận sai là: "Có đúng p số dạng $y^2 - x^3 - 1$ chia hết cho p ". Ở đây ta chú ý là: "Có đúng p cặp (x, y) mà $y^2 - x^3 - 1$ chia hết cho p " nhưng p cặp đó chỉ cho nhiều nhất $p-1$ giá trị $y^2 - x^3 - 1$.

3) Bạn Nguyễn Lâm Tuyền, 11T, Hoàng Văn Thụ, **Hòa Bình** có nhận xét đúng là: Với giả thiết $p > 5$ và ngoài hai cặp $(1, 0)$ và $(3, 2)$ cho cùng một giá trị còn có cặp $(3, 0)$ và $(6, 3)$ cho cùng một giá trị: $3^2 - 0^3 - 1 = 6^2 - 3^3 - 1$. Do đó ở kết luận bài toán " $p-1$ " được thay bởi " $p-2$ ".

DẶNG HÙNG THẮNG

Bài T7/288. Giải phương trình

$$\sqrt[3]{81x-8} = x^3 - 2x^2 + \frac{4}{3}x - 2 \quad (*)$$

Lời giải. (của đa số các bạn)

$$\text{Đặt } \sqrt[3]{81x-8} + 2 = 3y \text{ thì } 3x = y^3 - 2y^2 + \frac{4}{3}y.$$

Kết hợp với (*) ta được hệ:

$$\begin{cases} 3y = x^3 - 2x^2 + \frac{4}{3}x \\ 3x = y^3 - 2y^2 + \frac{4}{3}y \end{cases}$$

Suy ra (trừ các vế tương ứng của hệ):

$$(x-y)(x^2 + xy + y^2 - 2x - 2y + \frac{13}{3}) = 0 \quad (**)$$

$$\text{Do } x^2 + xy + y^2 - 2x - 2y + \frac{13}{3} = \frac{1}{2}(x+y)^2 + \frac{1}{2}(x-2)^2 + \frac{1}{2}(y-2)^2 + \frac{1}{3} > 0$$

$$\text{nên } (**) \Leftrightarrow y = x \text{ và } (*) \Leftrightarrow 3x = x^3 - 2x^2 + \frac{4}{3}x$$

$$\Rightarrow x_1 = 0, x_{2,3} = \frac{3 \mp 2\sqrt{6}}{3}$$

Nhận xét. Đây là một bài toán cơ bản rất quen thuộc với chương trình phổ thông nên có rất nhiều bạn gửi lời giải đến Tòa soạn (trên 200 bài) và hầu hết các bài giải đều đúng.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T8/288. Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq a^2b^2c^2$

Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2b^2}{c^3(a^2+b^2)} + \frac{b^2c^2}{a^3(b^2+c^2)} + \frac{c^2a^2}{b^3(c^2+a^2)} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Lời giải. Gọi A là biểu thức ở vế trái bất đẳng thức.

Đặt $a = \frac{1}{x}, b = \frac{1}{y}, c = \frac{1}{z}$. Từ giả thiết ta có $x > 0, y > 0, z > 0, x^2 + y^2 + z^2 \geq 1$ và

$$A = \frac{x^3}{y^2 + z^2} + \frac{y^3}{z^2 + x^2} + \frac{z^3}{x^2 + y^2}$$

$$\text{Kí hiệu } B = x(y^2 + z^2) + y(z^2 + x^2) + z(x^2 + y^2).$$

Theo bất đẳng thức Bunhiacốpski

$$A.B \geq (x^2 + y^2 + z^2)^2 \quad (1)$$

Mặt khác áp dụng bất đẳng thức Bunhiacốpski và bất đẳng thức

$$(u+v+s)^2 \geq 3(uv+vs+su) \text{ ta lại có}$$

$$\begin{aligned} B^2 &= (x\sqrt{y^2+z^2} + y\sqrt{z^2+x^2} + z\sqrt{x^2+y^2})^2 \\ &\leq (x^2(y^2+z^2) + y^2(z^2+x^2) + z^2(x^2+y^2)) \times \\ &\quad \times (y^2+z^2 + z^2+x^2 + x^2+y^2) \end{aligned}$$

GIẢI BÀI KÌ TRƯỚC

$$= 4((x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2)(x^2 + y^2 + z^2) \leq \frac{4}{3}(x^2 + y^2 + z^2)^3 \quad (2)$$

Kết hợp (1) và (2) được

$$A \geq \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^2}{B} \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}}$, tức là $a = b = c = \sqrt{3}$.

Nhận xét. Đây là bài toán bất đẳng thức cổ điển, cơ bản. Tòa soạn nhận được lời giải của 170 bạn, tất cả các bạn đều giải đúng. Các bạn sau có lời giải gọn gàng: **Bắc Giang:** Đào Tuấn Anh, 9A, THCS Lê Quý Đôn; Phan Văn Nguyên, 9B, THCS thị trấn Neo; **Bắc Ninh:** Bùi Minh Hải, Lê Đăng Nam, 9A, THCS Yên Phong; Nguyễn Chí Bảo, 9A, THCS Đại Lai, Nguyễn Thanh Hùng, 9A, THCS Nguyễn Đăng Đạo; **Hải Dương:** Lê Đình Huy, 8A, THCS Nguyễn Trãi; **Hà Tây:** Nguyễn Mạnh Tường, 9A, THCS Võng Xuyên; **Hà Nam:** Vũ Quang Thanh, 9B, THCS Nguyễn Hữu Tiến; **Nam Định:** Nguyễn Đăng Hợp, 9A2, THCS Lê Quý Đôn; **Thanh Hóa:** Nguyễn Đình Dũng, 9A, THCS Nhữ Bá Sỹ, Phạm Văn Nam, 9A, THCS Yên Trường, Nguyễn Ngọc Tú, 8B, THCS Lê Đình Kiên; **Quảng Trị:** Nguyễn Phương Hải Đăng, 7B, THCS Hải Thiện; **Khánh Hòa:** Nguyễn Tiến Việt, 9B, THCS Thái Nguyên; **Quảng Ngãi:** Ngô Ngọc Khiêm, 9₂, THCS Nguyễn Tự Tân; **Quảng Nam:** Vũ Thúy Hà, 9B, THCS Đại Yên; **Cần Thơ:** Nguyễn Minh Luân, 8A, THCS Nguyễn Việt Hồng v.v...

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T9/288. Chứng minh rằng với tam giác ABC bất kì:

$$\sin A^{\sin B} + \sin B^{\sin C} + \sin C^{\sin A} > 1,19 \quad (1)$$

Lời giải. Nhiều bạn đã lấy ví dụ chứng tỏ rằng đề ra T9/288 THPT 6/2001 không chính xác. Xin sửa lại như trên.

Chúng ta chú ý hai sự kiện sau:

$$\text{Sự kiện 1: } (x^x)' = x^x(1 + \ln x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}.$$

Hệ quả là với mọi $x > 0$ thì $x^x \geq \frac{1}{\sqrt{e}} \approx 0,6922$

$$\text{Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi } x = \frac{1}{e} \quad (2)$$

Sự kiện 2: Với mọi $u, v \in (0, 1)$. Dùng bất đẳng thức Bernoulli ta có

$$u^v = \frac{u}{u^{1-v}} = \frac{u}{(1-(1-u))^{1-v}} >$$

$$> \frac{u}{1-(1-u)(1-v)} = \frac{u}{u+v-uv} = \frac{u}{u+v} \quad (3)$$

Áp dụng vào bài toán: do tính chất hoán vị vòng quanh của $\sin A, \sin B$ và $\sin C$ trong bất đẳng thức (1), không mất tính tổng quát ta giả sử $\sin A \geq \max\{\sin B, \sin C\}$.

$$\text{Theo (2)} \quad \sin A^{\sin B} \geq \sin A^{\sin A} \geq \frac{1}{\sqrt{e}} \quad (4)$$

Mặt khác theo (3)

$$\begin{aligned} \sin B^{\sin C} + \sin C^{\sin A} &> \frac{\sin B}{\sin B + \sin C} + \frac{\sin C}{\sin C + \sin A} > \\ &> \frac{\sin B + \sin C}{2\sin B + 2\sin C} = \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (5)$$

(do $\sin A < \sin B + \sin C$)

Cộng theo từng vế hai bất đẳng thức (4), (5) ta nhận được (1).

Nhận xét. 1) Với mọi $u, v, s > 0$, dùng bất đẳng thức (3) ta có

$$F = u^v + v^s + s^u > 1 \text{ và với } u = \frac{1}{n^{n^n}}, v = \frac{1}{n^n}, s =$$

$\frac{1}{n} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$ thì $\lim_{n \rightarrow +\infty} F = 1$. Tức là trong bất đẳng thức trên ta không thể thay 1 bằng số lớn hơn.

$$2) \text{ Xét } \triangle ABC: \sin A = \frac{1}{e}, \text{ góc } C \rightarrow 0 \text{ suy ra } \sin B \rightarrow$$

$$\frac{1}{e}. \text{ Do đó } G = \sin A^{\sin B} + \sin B^{\sin C} + \sin C^{\sin A} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{e}} + 1 + 0 \approx 1,6922$$

Lưu ý rằng với $\triangle ABC$ đều ta có

$$G = 3 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \approx 2,6486$$

Chúng tôi dự đoán rằng

$$\sin A^{\sin B} + \sin B^{\sin C} + \sin C^{\sin A} > \frac{1}{\sqrt{e}} + 1 \text{ với}$$

mọi $\triangle ABC$.

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T10/288. Cho tứ diện SABC với $SA = a, SB = b, SC = c$. Một mặt phẳng thay đổi luôn đi qua trọng tâm của tứ diện, cắt các cạnh SA, SB, SC tại các điểm D, E, F tương ứng. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

GIẢI BÀI KÌ TRƯỚC

$$\frac{1}{SD^2} + \frac{1}{SE^2} + \frac{1}{SF^2}$$

Lời giải. (của nhiều bạn). Gọi G là trọng tâm của tứ diện $SABC$, ta có :

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GS} = \vec{0}$$

$$\text{từ đó } \overrightarrow{SG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC}) \quad (1)$$

Vì các điểm D, E, F theo thứ tự nằm trên các tia SA, SB, SC nên các cặp vectơ $\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SD}$; $\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SE}$; và $\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{SF}$ là cộng tuyến, hơn nữa lại

cùng hướng, và do đó : $\frac{\overrightarrow{SA}}{SA} = \frac{\overrightarrow{SD}}{SD}$, v.v...

Từ đó vế phải của (1) được viết lại như sau :

$$\overrightarrow{SG} = \frac{1}{4} \left(\frac{SA}{SD} \overrightarrow{SD} + \frac{SB}{SE} \overrightarrow{SE} + \frac{SC}{SF} \overrightarrow{SF} \right) \quad (2)$$

Lại vì bốn điểm D, E, F, G đồng phẳng nên ta có hệ thức :

$$\frac{1}{4} \left(\frac{SA}{SD} + \frac{SB}{SE} + \frac{SC}{SF} \right) = 1,$$

$$\text{hay là } \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 4 \quad (3)$$

trong đó ta đã đặt : $SD = x, SE = y$ và $SF = z$.

Như vậy là, khi mặt phẳng (α) thay đổi luôn đi qua G , các điểm D, E, F chuyển động tương ứng trên các cạnh SA, SB, SC của tứ diện nhưng các độ dài x, y, z của các đoạn thẳng SD, SE, SF liên hệ với nhau bởi hệ thức (3). Nói khác đi, hàm

$$f(x, y, z) = \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} \text{ là một hằng hàm.}$$

Bây giờ ta tìm giá trị nhỏ nhất của hàm :

$$q(x, y, z) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}$$

trong đó các biến x, y, z thỏa mãn (3) và :

$$0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq c; \quad (4)$$

Áp dụng BĐT Bunhiacôpxki, ta được :

$$16 = \left(a \cdot \frac{1}{x} + b \cdot \frac{1}{y} + c \cdot \frac{1}{z} \right)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2) \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \right)$$

$$\text{Suy ra : } q(x, y, z) \geq \frac{16}{a^2 + b^2 + c^2}$$

Đẳng thức đạt được khi và chỉ khi :

$$a : b : c = \frac{1}{x} : \frac{1}{y} : \frac{1}{z} \quad (5)$$

hay là $ax = by = cz$

Từ (3) và (5) ta tính được :

$$4ax = 4by = 4cz = a^2 + b^2 + c^2$$

$$\text{Kết luận: } \min q(x, y, z) = \frac{16}{a^2 + b^2 + c^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4a} < a \\ y = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4b} < b \\ z = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4c} < c \end{cases}$$

Nhận xét. Nếu ta viết hệ thức (5) một cách cụ thể hơn dưới dạng : $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SD} = \overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{SE} = \overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{SF}$ và tìm hiểu sâu hơn ý nghĩa hình học của các hệ thức này, ta dễ dàng chứng minh được rằng sáu điểm A, B, C, D, E, F cùng thuộc một mặt cầu. Và các bạn có thể đặt vấn đề xác định tâm và bán kính mặt cầu đó.

Nhận xét. 1) Nhiều bạn có nhận xét rằng bài toán này tương tự với bài toán T10/278. Hệ thức (3) được thiết lập ở trên là chung cho cả hai bài toán.

2) Bài toán này có nhiều cách giải. Có nhiều bạn sử dụng phương pháp thể tích hoặc phương pháp tọa độ (Hệ tọa độ xiên góc nhận $\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}$ và $\overrightarrow{SC}$ làm các trục) cũng đều thiết lập được (3). Một số bạn đã khái quát hóa bài toán theo các hướng : Hoặc thay trọng tâm G bằng một điểm P nằm trong tứ diện, hoặc thay chóp tam giác $SABC$ bằng một chóp n -giác $S.A_1A_2...A_n$.

3) Rất đáng tiếc, có không ít bạn do sơ suất hoặc vội vàng, đã không tính được x, y, z , tức là không chỉ ra cách xác định các giao điểm D, E, F của mặt phẳng cần tìm với các cạnh của tứ diện. Như vậy, việc giải bài toán tìm cực trị là chưa trọn vẹn, vì chưa chỉ ra được sự tồn tại thực sự của cực trị ! Thậm chí có không ít bạn vận dụng chưa thành thực BDT Bunhiacôpxki, nên đã dẫn đến kết quả sai lầm : Đẳng thức đạt được khi và

chỉ khi : $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$, và do đó $mp(DEF) // ABC$!!!

4) Các bạn sau đây có lời giải tương đối tốt, nhưng hầu hết quên không đặt điều kiện (4) :

Hà Nội: Nguyễn Trung Chính, Nguyễn Anh Tồn, 11T, THPT Hà Nội - Amsterdam, Kim Đình Thái, 11A1, PTCT-T, ĐHSP Hà Nội, Võ Văn Thành, 10A Toán, PTCT-T, ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội ; Nguyễn Kim Lữ, 12A1, THPT Sóc Sơn ; **Vĩnh Phúc:** Trần Trung Hiếu, 12A10 THPT Ngô Gia Tự, Lập Thạch, Đỗ Đăng Thủy, 12A2, THPT Mê Linh, Vũ Anh Quang, 11A3, THPT Mê Linh, Đỗ Huy Tùng, 10A1, Nguyễn Ngọc Minh, 10A3, THPT chuyên ; **Phú Thọ:** Hoàng Ngọc Minh, 11A1, THPT chuyên Hùng Vương; Yên

GIẢI BÀI KÌ TRƯỚC

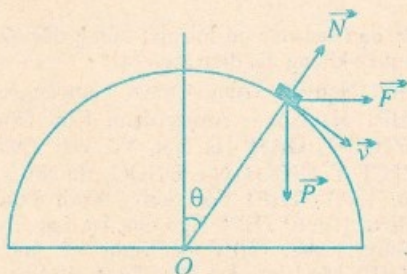
Bái: Nguyễn Duy Phương, 11C, THPT chuyên ; **Lào Cai:** Nguyễn Quốc Tuấn, 11A1, THPT chuyên ; **Bắc Ninh:** Nguyễn Thị Thùy Dương, 11 Sinh, THPT NK Hàn Thuyên, Ngô Quý Hoàn, 11A1, THPT Yên Phong I ; **Hải Dương:** Phạm Văn Hùng, 11T, THPT Nguyễn Trãi ; **Hải Phòng:** Nguyễn Ngọc Khánh, 11A15, THPT Thái Phiên ; **Hà Tây:** Nguyễn Tiến Yết, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Huệ ; **Hòa Bình:** Lê Thái Hoàng, 10 Tin, Nguyễn Lâm Tuyền, 11T, Hà Hữu Cao Trình, 11T, THPT NK Hoàng Văn Thụ ; **Nam Định:** Nguyễn Minh Đức, 10B3, THPT Hải Hậu ; **Ninh Bình:** Nguyễn Trường Sơn, 11A1, THPT Yên Mô, Trần Minh Mẫn, 10T, Lê Văn Nghĩa, THPT Lương Văn Tụy ; **Thanh Hóa:** Hoàng Trung Hiếu, 11T, THPT Lam Sơn ; **Nghệ An:** Lương Ngọc Quang, THPT Quỳnh Lưu I, Cao Xuân Vinh, 12B, THPT Nghĩa Đàn, Lê Văn Đức, 10 Tin, THPT Lê Viết Thuận, Tp. Vinh, Lê Quốc Đò, 10AT, Phạm Trung Hiếu, 12A1, PTCT-T ĐH Vinh ; **Quảng Trị:** Phan Quốc Hưng, 12B, THPT Hải Lăng ; **Quảng Nam:** Lê Quốc Thành, 11/1, THPT Nguyễn Duy Hiệu, Điện Bàn ; **Quảng Ngãi:** Nguyễn Huy Cung, 11T2, Nguyễn Văn Thắng, 10T, THPT Lê Khiết, Lê Hoàng Khang, 11A1, THPT Bình Sơn ; **Ninh Thuận:** Lê Thanh Tùng, 12A2, THPT Chu Văn An ; **Tp. Hồ Chí Minh:** Trần Võ Huy, 11T, PTNK ĐHQG Tp. HCM, Nguyễn Hoàng Hiền, 10CT, Phạm Anh Tuấn, 12A4, THPT chuyên Lê Hồng Phong ; **Đồng Nai:** Lê Phương, 10T1, THPT chuyên Lương Thế Vinh ; **Tiền Giang:** Nguyễn Tuấn Ngọc, 12T, THPT chuyên Tiền Giang ; **Đồng Tháp:** Nguyễn Công Thắng, 12T, Nguyễn Võ Vĩnh Phúc, THPT Tx. Sa Đéc ; **An Giang:** Nguyễn Thành Hưng, 11T, THPT Thoại Ngọc Hầu ; **Cần Thơ :** Nguyễn Minh Luân, 8A, THCS Nguyễn Việt Hồng, Tp. Cần Thơ ; **Bạc Liêu:** Nguyễn Văn Tâm, 11/1, THPT Giá Rai.

NGUYỄN ĐĂNG PHÁT

Bài L1./288. Một vật nhỏ khối lượng m đặt ở đỉnh của một bán cầu nhẵn, bán kính R . Người ta tác dụng vào vật một lực không đổi $\vec{F}$ theo phương ngang và nó trượt xuống. Hãy xác định:

a) Vận tốc của vật lúc nó rời mặt cầu.

b) Góc θ_0 giữa phương thẳng đứng và bán kính vectơ từ tâm O của quả cầu đến vị trí mà vật rời khỏi mặt cầu. Tính θ_0 khi $F = mg$.



Lời giải. a) Áp dụng định luật II Niuton cho vật chuyển động tròn và chiếu lên phương bán kính : $\vec{P} + \vec{F} + \vec{N} = m\vec{a}$

$$\Rightarrow mg \cos \theta - F \sin \theta - N = \frac{mv^2}{R}$$

Vật rời khỏi mặt cầu tại $\theta = \theta_0$ khi $N = 0$, ta

$$\text{có : } mg \cos \theta_0 - F \sin \theta_0 = \frac{mv^2}{R} \quad (1)$$

Áp dụng định lí về động năng: $A_P + A_F = \frac{mv^2}{2}$

$$\Leftrightarrow mgR(1 - \cos \theta_0) + FR \sin \theta_0 = \frac{mv^2}{2} \quad (2)$$

b) Từ (1) và (2) suy ra :

$$g \cos \theta_0 - \frac{F}{m} \sin \theta_0 = \frac{2g}{3} \quad (3)$$

Đặt $\frac{F}{m} = a_0$, (3) trở thành :

$$g \cos \theta_0 - a_0 \sin \theta_0 = \frac{2g}{3} \quad (4)$$

$$\Rightarrow \frac{g}{\sqrt{g^2 + a_0^2}} \cos \theta_0 - \frac{a_0}{\sqrt{g^2 + a_0^2}} \sin \theta_0 = \frac{2}{3} \frac{g}{\sqrt{g^2 + a_0^2}} \quad (5)$$

$$\text{Đặt } \sin \varphi = \frac{g}{\sqrt{g^2 + a_0^2}}, \text{ thì } \cos \varphi = \frac{a_0}{\sqrt{g^2 + a_0^2}}$$

và (5) trở thành

$$\sin \varphi \cos \theta_0 - \cos \varphi \sin \theta_0 = \frac{2g}{3\sqrt{g^2 + a_0^2}}$$

$$\Rightarrow \sin(\varphi - \theta_0) = \frac{2g}{3\sqrt{g^2 + a_0^2}}$$

$$\theta_0 = \varphi - \arcsin \left(\frac{2g}{3\sqrt{g^2 + a_0^2}} \right)$$

$$\text{Khi } F = mg \text{ thì } a_0 = g, \text{ từ đó } \sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \varphi = 45^\circ \text{ và } \theta_0 = 45^\circ - \arcsin \frac{\sqrt{2}}{3} \approx 16^\circ 53'.$$

Nhận xét. Các em có lời giải đúng và gọn :

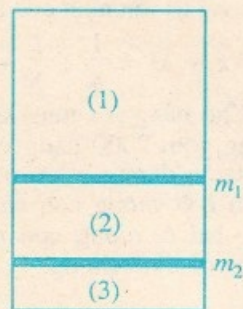
Hà Tĩnh: Nguyễn Đức Trụ, THPT Trần Phú; **Thanh Hóa:** Trịnh Minh Cảnh, 12A, THPT Tống Duy Tân, Vĩnh Lộc ; **Đồng Nai:** Ma Nam, 11 Lí 1, THPT chuyên Lương Thế Vinh, Biên Hòa; **Bình Định:** Phạm Quang

GIẢI BÀI KÌ TRƯỚC

Trung, 11 Lí, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Khánh Hòa:** Trần Hoàng Thanh, 12 Lí, THPT Lê Quý Đôn, Nha Trang; **Quảng Ngãi:** Nguyễn Văn Thắng, 10T, THPT chuyên Lê Khiết; **Phú Thọ:** Vũ Quốc Hiến, 11B1, THPT chuyên Hùng Vương, Việt Trì; **Hải Dương:** Hoàng Trung trí, 10 Lí, THPT Nguyễn Trãi; **Hà Tây:** Nguyễn Minh Chính, 12 Toán 1, THPT chuyên Nguyễn Huệ; **Bắc Ninh:** Trần Đức Lộc, 12 Hóa, Nguyễn Ngọc Tuấn và Nguyễn Việt Trường, 12 Lí, THPT NK Hàn Thuyên; **Nghệ An:** Hồ Việt Hùng, K28 Lí, Vũ Mạnh Linh, Nguyễn Quốc Việt, 11A3, Trần Quang Vũ, 10A7, THPT Phan Bội Châu, Vinh; **Vĩnh Phúc:** Nguyễn Thanh Phương, 11A3, Trần Minh Khuê, 12A3, Cao Mạnh Linh, 10A3, Lưu Văn Dũng, 11A2; THPT chuyên Vĩnh Phúc.

MAI ANH

Bài L2/288. Một xilanh kín đặt thẳng đứng có 2 pittông chia thành 3 ngăn. Mỗi phần chứa một mol khí lí tưởng. Khi nhiệt độ các ngăn khí là T_1 thì tỉ số thể tích các phần là $V_1 : V_2 : V_3 = 5 : 3 : 1$. Khi nhiệt độ các phần là T_2 thì tỉ số thể tích các phần là $V'_1 : V'_2 : V'_3 = x : 2 : 1$. Tìm x và $\frac{T_2}{T_1}$. Bỏ qua ma sát giữa các pittông và xilanh.



Hướng dẫn giải.

Kí hiệu m_1, m_2 là khối lượng các pittông (hình trên). Ở nhiệt độ T_1 ta có :

$$\begin{aligned} m_1 g &= (P_2 - P_1)S; \\ m_2 g &= (P_3 - P_2)S \\ \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} &= \frac{P_2 - P_1}{P_3 - P_2} = \frac{1 - \frac{P_1}{P_2}}{\frac{P_3}{P_2} - 1} = \frac{1 - \frac{V_1}{V_2}}{\frac{V_3}{V_2} - 1} = \frac{1}{5} \quad (1) \end{aligned}$$

Tương tự, ở nhiệt độ T_2 :

$$\begin{aligned} m_1 g &= (P'_2 - P'_1)S; \\ m_2 g &= (P'_3 - P'_2)S \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{1 - \frac{P'_1}{P'_2}}{\frac{P'_3}{P'_2} - 1} = \frac{1 - \frac{x}{2}}{2 - 1} = \frac{x - 2}{x} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) tìm được $x = 2,5$.

Kí hiệu V là thể tích tổng cộng của cả 3 ngăn ta có :

$$V_3 = \frac{V}{5 + 3 + 1} = \frac{V}{9} \text{ và } V'_3 = \frac{V}{2,5 + 2 + 1} = \frac{V}{5,5}$$

Áp dụng phương trình trạng thái ta có :

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{P'_3 V'_3}{P_3 V_3} = \frac{P'_3}{P_3} \times \frac{9}{5,5}$$

Mặt khác ta lại có :

$$\begin{aligned} m_2 g &= (P_3 - P_2)S = (P'_3 - P'_2)S \\ \Rightarrow \frac{2}{3} P_3 &= \frac{P'_3}{2} \Rightarrow \frac{P'_3}{P_3} = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{4}{3} \times \frac{9}{5,5} \approx 2,18$$

Nhận xét. Các em có lời giải đúng và gọn

Đà Nẵng: Lê Anh Vũ, 12A2, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Vũ Quốc Hiến, 11B1, THPT chuyên Hùng Vương, Việt Trì; **Yên Bái:** Phạm Thị Kim Hoa, 10A1, THPT chuyên Nguyễn Tất Thành; **Bắc Ninh:** Nguyễn Trọng Tùng, 12 Lí, THPT NK Hàn Thuyên; **Hưng Yên:** Đào Ngọc Thủy, 11 Lí, THPT NK Hưng Yên; **Hải Dương:** Nguyễn Tiến Thành, THPT Nguyễn Trãi; **Thừa Thiên - Huế:** Nguyễn Thanh Quang, 11 Lí, Quốc học Huế; **Nam Định:** Nguyễn Hùng Cường, 11A, THPT Nguyễn Khuyến; **Hà Tĩnh:** Lê Đức Đạt, 10 Lí, THPT NK Hà Tĩnh; **Nguyễn Đức Tru,** 10 Lí, THPT Trần Phú; **Nghệ An:** Nguyễn Thị Bích Ngọc, Nguyễn Quốc Việt 11A3, Phạm Cung Sơn, 10A3, Đặng Hồng Lê, 10 Lí, THPT chuyên Phan Bội Châu, Vinh;

Quảng Ngãi: Nguyễn Văn Thắng, 10T, Lê Trung Tín và Trần Duy Khiêm, 10 Lí, THPT chuyên Lê Khiết; **Vĩnh Phúc:** Lê Huy Cường, 12A1 Nguyễn Ngọc Anh, Nguyễn Trung Hiếu, 11A3, Kiều Ngọc Thanh, 11B3, Trần Bá Bách, 12A2, Nguyễn Minh Kiên, 12A3, Nguyễn Văn Hùng, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc, Nguyễn Như Thắng, 10A2, THPT Yên Lạc I.

MAI ANH

✉ Nhắn tin

Các bạn được giải trong cuộc thi Vui hè 2001 hãy gửi sớm địa chỉ mới của mình về Tòa soạn.

THPT

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN QUỐC GIA THPT

NĂM HỌC 2000-2001 - BẢNG B

NGUYỄN KHẮC MINH
(Vụ Trung học Phổ thông)

Ngày thi thứ nhất. (12/3/2001).

Bài 1: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sqrt{7x+y} + \sqrt{2x+y} = 5 \\ \sqrt{2x+y} + x - y = 2 \end{cases}$$

Bài 2: Trong mặt phẳng cho hai đường tròn (O_1) , (O_2) cắt nhau tại hai điểm A, B và P_1P_2 là một tiếp tuyến chung của hai đường tròn đó ($P_1 \in (O_1)$, $P_2 \in (O_2)$). Gọi Q_1 và Q_2 tương ứng là hình chiếu vuông góc của P_1 và P_2 trên đường thẳng O_1O_2 . Đường thẳng AQ_1 cắt (O_1) tại điểm thứ hai M_1 , đường thẳng AQ_2 cắt (O_2) tại điểm thứ hai M_2 . Hãy chứng minh ba điểm M_1 , B, M_2 thẳng hàng.

(O) kí hiệu đường tròn tâm O).

Bài 3: Cho số thực a. Cho dãy số $\{x_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, được xác định bởi: $x_0 = a$ và $x_{n+1} = x_n + \sin x_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Chứng minh rằng dãy $\{x_n\}$ có giới hạn hữu hạn khi $n \rightarrow \infty$. Hãy tính giới hạn đó theo a.

($\mathbb{N}$ là tập hợp các số tự nhiên).

Ngày thi thứ hai. (13/3/2001).

Bài 4: Cho dãy số $\{x_n\}$, $n \in \mathbb{N}^*$, được xác định như sau:

$$x_1 = \frac{2}{3} \text{ và } x_{n+1} = \frac{x_n}{2(2n+1)x_n + 1}$$

với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Hãy tính tổng của 2001 số hạng đầu tiên của dãy $\{x_n\}$.

($\mathbb{N}^*$ là tập hợp các số nguyên dương).

Bài 5: Xét các số thực dương x, y, z thỏa mãn hệ điều kiện sau:

$$\frac{2}{5} \leq z \leq \min\{x, y\} \quad (1)$$

$$xz \geq \frac{4}{15} \quad (2)$$

$$yz \geq \frac{1}{5} \quad (3)$$

Hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P(x, y, z) = \frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z}$$

Bài 6: Cho bảng ô vuông kích thước 2000×2001 (bảng gồm 2000 hàng và 2001 cột). Hãy tìm số nguyên dương k lớn nhất sao cho ta có thể tô màu k ô vuông con của bảng thỏa mãn điều kiện: hai ô vuông con nào được tô màu cũng không có đỉnh chung.

ĐÁP ÁN

Bài 1: Điều kiện có nghĩa của hpt:

$$\min\{7x, 2x\} \geq -y.$$

Đặt: $\sqrt{7x+y} = a$ và $\sqrt{2x+y} = b$. Từ hpt đã cho ta có hệ:

$$\begin{cases} a+b=5 & (1) \\ b+x-y=2 & (2) \end{cases}$$

Nhận thấy: $a^2 - b^2 = 5x$. Kết hợp với (1) suy ra: $b = (5 - x)/2$. Thế vào (2) ta được:

$$\frac{5-x}{2} + x - y = 2 \Leftrightarrow x = 2y - 1. \quad (3)$$

Thế (3) vào (2) ta có: $\sqrt{5y-2} + y - 1 = 2$
 $\Leftrightarrow \sqrt{5y-2} = 3 - y$

$$\Leftrightarrow (y \leq 3 \text{ \& } y^2 - 11y + 11 = 0)$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{11 - \sqrt{77}}{2}.$$

Thế vào (3) ta được $x = 10 - \sqrt{77}$.

Thử lại: Ta có:

$$\sqrt{7x+y} = \frac{15 - \sqrt{77}}{2}; \sqrt{2x+y} = \frac{\sqrt{77} - 5}{2}.$$

$$x - y = \frac{9 - \sqrt{77}}{2} \text{ thỏa mãn hpt ở đề bài.}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất:

$$x = 10 - \sqrt{77}, y = \frac{11 - \sqrt{77}}{2}$$

Bài 2 (bạn đọc tự vẽ hình): Gọi R_1 và R_2 tương ứng là bán kính của (O_1) và (O_2) . Xảy ra:

+ Trường hợp 1: $R_1 = R_2$. Khi đó: $Q_1 \equiv O_1$ và $Q_2 \equiv O_2$. Dẫn tới: $\angle M_1BA = \angle M_2BA = 90^\circ$. Do đó ba điểm M_1, B, M_2 thẳng hàng. (Đpcm).

+ Trường hợp 2: $R_1 \neq R_2$. Không mất tổng quát, giả sử $R_1 > R_2$. Khi đó Q_1 nằm trong đoạn O_1O_2 và Q_2 nằm trên tia đối của tia O_2O_1 . Dẫn tới:

$$\begin{aligned} \angle M_1BA + \angle M_2BA &= \\ = 180^\circ - \frac{1}{2} \angle MO_1A + \angle M_2O_2A \end{aligned} \quad (4)$$

trong đó $\angle M_1O_1A < 180^\circ$

Gọi S là giao điểm của đường thẳng P_1P_2 và đường thẳng O_1O_2 . Ta có S là tâm của phép vị tự V_S biến (O_1) thành (O_2) . Gọi A_1 là giao điểm thứ hai của SA và (O_1) . Ta có: $V_S: A_1 \rightarrow A, O_1 \rightarrow O_2, Q_1 \rightarrow Q_2$ nên $\angle O_1A_1Q_1 = \angle O_2AQ_2$ (5)

Dễ thấy $SO_1 \cdot SQ_1 = SA \cdot SA_1 (= SP_1^2)$. Do đó 4 điểm A, Q_1, O_1, A_1 cùng nằm trên một đường tròn. Dẫn tới: $\angle O_1A_1Q_1 = \angle O_1AQ_1$. Kết hợp với (5) suy ra: $\angle O_1AQ_1 = \angle O_2AQ_2$.

Do đó: $\angle M_1O_1A = \angle M_2O_2A$. (6)

Từ (4) và (6) ta được: $\angle M_1BA + \angle M_2BA = 180^\circ$, và vì thế ba điểm M_1, B, M_2 thẳng hàng. (Đpcm).

Bài 3: Xét các trường hợp sau:

+ Trường hợp 1: $a = k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Khi đó $x_n = a \forall n \in \mathbb{N}$. Vì thế dãy $\{x_n\}$ có giới hạn hữu hạn khi $n \rightarrow \infty$, và $\lim x_n = a$ (7)

+ Trường hợp 2: $a \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Xét hàm số $f(x) = x + \sin x, x \in \mathbb{R}$. Khi đó, dãy $\{x_n\}$ được viết lại dưới dạng:

$$x_0 = a \text{ và } x_{n+1} = f(x_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ta có: $f'(x) = 1 + \cos x \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Suy ra $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ và do đó $\{x_n\}$ là dãy đơn điệu. Xảy ra các trường hợp sau:

i) $a \in (2k\pi; (2k+1)\pi), k \in \mathbb{Z}$. Khi đó $\sin a > 0$. Dẫn tới $x_0 < x_1$, và $\{x_n\}$ là dãy đơn điệu tăng.

Bằng phương pháp quy nạp theo n , ta sẽ chứng minh:

$$x_n \in (2k\pi; (2k+1)\pi) \quad (8)$$

với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Thật vậy, hiển nhiên ta có (8) với $n = 0$. Giả sử đã có (8) với $n = m, m \in \mathbb{N}$. Khi đó, do $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên:

$$\begin{aligned} 2k\pi &= f(2k\pi) < f(x_m) = x_{m+1} < f((2k+1)\pi) \\ &= (2k+1)\pi \end{aligned}$$

nghĩa là ta có (8) với $n = m+1$. Do đó, theo nguyên lý quy nạp, ta có (8) với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Trong trường hợp này $\{x_n\}$ là dãy đơn điệu tăng và bị chặn trên bởi $(2k+1)\pi$. Do đó dãy $\{x_n\}$ có giới hạn hữu hạn khi $n \rightarrow \infty$.

Đặt $\lim x_n = b$ ta có $2k\pi < a \leq b \leq (2k+1)\pi$ và $\sin b = 0$. Từ đó suy ra:

$$b = (2k+1)\pi. \quad (9)$$

ii) $a \in ((2k-1)\pi; 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$. Khi đó $\sin a < 0$. Dẫn tới $x_0 > x_1$, và $\{x_n\}$ là dãy đơn điệu giảm.

Chứng minh tương tự phần i) được

$$x_n \in ((2k-1)\pi; 2k\pi) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Trong trường hợp này $\{x_n\}$ là dãy đơn điệu giảm và bị chặn dưới bởi $(2k-1)\pi$. Do đó dãy $\{x_n\}$ có giới hạn hữu hạn khi $n \rightarrow \infty$.

Đặt $\lim x_n = b$ ta có $(2k-1)\pi \leq b \leq a < 2k\pi$ và $\sin b = 0$. Từ đó suy ra:

$$b = (2k-1)\pi. \quad (10)$$

Tóm lại, từ (7), (9) và (10) ta có $\forall a \in \mathbb{R}$ dãy $\{x_n\}$ có giới hạn hữu hạn khi $n \rightarrow \infty$ và

$\lim x_n = (2[a/2\pi] + \text{sign}(\{a/2\pi\}))\pi$
($[x], \{x\}, \text{sign}(x)$ tương ứng kí hiệu hàm phần nguyên, hàm phần lẻ, hàm dấu của biến số thực x).

Bài 4: Dễ thấy $x_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Đặt $u_n = 2/x_n, n \in \mathbb{N}^*$. Từ công thức xác định dãy $\{x_n\}$ của đề bài ta có:

$$u_1 = 3 \text{ và } u_{n+1} = 4(2n+1) + u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \quad (11)$$

Từ (11) dễ dàng suy ra: $u_n = (2n-1)(2n+1) \forall n \in \mathbb{N}^*$. Do đó:

$$x_n = \frac{2}{u_n} = \frac{2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Vì vậy:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{2001} = 1 - 1/4003 = 4002/4003$$

Bài 5: Từ điều kiện thứ nhất của đề bài ta có:

$$x > z \geq \frac{2}{5}. \quad (12)$$

Từ điều kiện thứ 2 của đề bài suy ra:

$$\frac{1}{xz} \leq \frac{15}{4} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} \leq \frac{\sqrt{15}}{2} \sqrt{z}. \quad (13)$$

Từ (12) và (13) suy ra:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} + \frac{1}{z} &= \frac{2}{x} + \frac{1}{z} - \frac{1}{x} = \frac{2}{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{z} \left(1 - \frac{z}{x}\right) \\ &\leq \frac{2}{\sqrt{x}} \frac{\sqrt{15}}{2} \sqrt{z} + \frac{5}{2} \left(1 - \frac{z}{x}\right) \end{aligned} \quad (14)$$

(Xem tiếp trang 11)



Kết quả

CUỘC CHƠI ĐẤU THIÊN NIÊN KỲ

Lần này quả là hơi khó nên chỉ có 4 bạn đoán ra người trong ảnh là PGS. TS Đào Tam (Khoa Toán – Đại học Vinh, đã từng là Chủ nhiệm Khối Chuyên Toán trong nhiều năm).

Đây là tấm ảnh mà thầy chụp khi đang chuẩn bị bảo vệ luận án ở Nga năm 1981. Khi đó thầy mới có 36 tuổi.

Xin trao tặng phẩm cho các bạn

1) Lê Thanh Nga, 286 Nguyễn Văn Cừ, Tp. Vinh, Nghệ An.

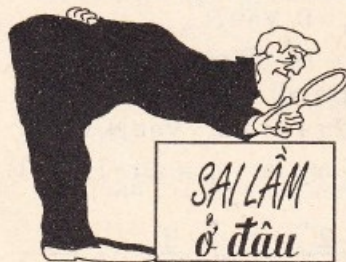
2) Phạm Quang Điệp, 11T1, THPT Lê Việt Thuật, Tp. Vinh, Nghệ An.

3) Đào Khả Tuấn, 11B2, THPT Triệu Sơn II, Thanh Hóa.

4) Lê Văn Đức, 11 Tin 2, THPT Lê Việt Thuật, Tp. Vinh, Nghệ An.

Cảm ơn các bạn và xin mời tiếp tục chơi.

CLB



Kết quả :

VỀ MỘT BÀI TOÁN

THI HỌC SINH GIỎI

Hầu như tất cả các bạn đều thấy cách 1 "bị" ngay từ dòng thứ hai, vì $\frac{x^2 - yz}{a} = k$ chỉ suy ra

được $a = \frac{x^2 - yz}{k}$ với $k \neq 0$. Do đó để lời giải

được "êm trôi" thì giả thiết bài toán phải đảm bảo $x^2 - yz \neq 0$; $y^2 - zx \neq 0$; $z^2 - xy \neq 0$. Cũng phải có giả thiết như vậy thì ở cách 2 mới viết được

$$\frac{a}{x^2 - yz} = \frac{b}{y^2 - zx} = \frac{c}{z^2 - xy}$$

Nếu không thêm giả thiết như vậy thì bài toán ra ban đầu là sai (đã có phản thí dụ khi $x = y = z = 3$ và $a = 1$; $b = 2$; $c = 3$).

Cả hai lời giải sẽ đúng nếu đề bài cho thêm giả thiết, khi đó vụn cả ... ba đường.

Một số bạn "bắt bẻ" sai :

1) Từ $A = B$ không được suy ra $A^2 = B^2$

2) Từ $\frac{1}{AC} = \frac{1}{BC}$ không được suy ra $\frac{1}{A} = \frac{1}{B}$

Lưu ý rằng : cả hai phép "suy ra" trên đều đúng !

Còn hai lỗi "chế bản" của các sách đó ở những dòng gần cuối của cách 1, nhiều bạn đã "tình tượng" phát hiện ra.

Bạn Trần Tuấn Anh, 12A1, THPT Quốc Oai, Hà Tây còn lưu ý (khi phân tích cách 2) : Chỉ được viết

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} = \frac{A-C}{B-D} \Leftrightarrow B \neq D.$$

Xin trao tặng phẩm cho các bài phân tích tốt của các bạn : Nguyễn Trường Khanh, 10 chuyên Toán, Quốc học Huế, Trần Đức Trường, 22 tổ 17, cụm 3, phường Đông Khê, Ngô Quyền, Hải Phòng; Võ Thông Thái, 8³ trường cấp 2-3 Ngô Gia Tự, Cam Nghĩa, Cam Ranh, Khánh Hòa; Phạm Trọng Quỳnh, 10A₂ khối PT chuyên Toán – Tin, ĐH Vinh, Nguyễn Thị Huyền, 11 Toán, THPT chuyên Thái Bình.

Cảm ơn tất cả các bạn.

KIHIVI

LỜI GIẢI NGẮN GỌN ?

Bài toán : Với a, b, c là các số dương, hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \left(1 + \frac{a}{5b}\right) \left(1 + \frac{b}{5c}\right) \left(1 + \frac{c}{5a}\right)$$

Một bạn đã giải như sau :

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có

$$1 + \frac{a}{5b} \geq 2 \sqrt{\frac{a}{5b}} \quad (1) \quad 1 + \frac{b}{5c} \geq 2 \sqrt{\frac{b}{5c}} \quad (2)$$

$$1 + \frac{c}{5a} \geq 2 \sqrt{\frac{c}{5a}} \quad (3)$$

Nhân từng vế của (1), (2), (3) dẫn đến

$$P \geq 8 \sqrt{\frac{a}{5b}} \cdot \sqrt{\frac{b}{5c}} \cdot \sqrt{\frac{c}{5a}} = \frac{8\sqrt{5}}{25}$$

Do đó P nhỏ nhất là $\frac{8\sqrt{5}}{25}$.

Thế nào ? Các bạn thấy lời giải thật ngắn gọn chứ ? Tuyệt vời chưa ?

TRẦN ĐĂNG QUÂN (Bắc Ninh)



Giải đáp : ANH EM SINH ĐÔI

Đây là bài toán suy luận logic có nhiều cách giải quyết.

Cách 1. Giả sử Trí là người đã nói : "Tôi là Trí", vậy Trí nói đúng nên câu tiếp theo : "Hôm qua là chủ nhật" cũng đúng. Do đó hôm nay là thứ hai, điều này mâu thuẫn vì Trí không nói đúng vào thứ hai. Suy ra người trả lời : "Tôi là Trí" phải là Dũng và ngày hôm nay Dũng nói sai. Mặt khác nếu vậy thì người nói : "Ngày thứ tư tôi luôn nói thật" phải là Trí, nhưng Trí lại không nói thật vào thứ tư nên câu đó sai và ngày đó Trí nói sai. Chỉ có ngày thứ ba thì cả hai bạn đều nói sai. Do đó, Toàn biết được hôm đó là thứ ba, người trả lời trước là Dũng và người trả lời sau là Trí.

Cách 2. Giả sử Dũng nói câu : "Ngày mai là thứ sáu" là nói đúng thì hôm nay là thứ năm nên Dũng phải nói sai. Mâu thuẫn này chứng tỏ Trí phải nói câu này và câu : "Ngày thứ tư tôi luôn nói thật" là hai câu mâu thuẫn nhau nên ngày hôm đó Trí nói sai. Mặt khác người nói "Tôi là Trí" phải là Dũng nên ngày đó Dũng cũng nói sai. Từ đó suy ra kết quả như cách 1.



✉ Trong một kì thi học sinh giỏi dành cho lớp 8 của tỉnh T.B vừa qua có bài toán : "Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $A = 4x - 2y$ nếu $4x^2 + y^2 = 1$ " và văn bản hướng dẫn chấm như sau:

" + Ta có : $2(4x^2 + y^2) - (2x - y)^2 = (2x + y)^2 \geq 0$

+ Suy ra : $(2x - y)^2 \leq 2$ do $4x^2 + y^2 = 1$

+ Xét x, y là các số hữu tỉ thì không có số hữu tỉ nào bình phương bằng 8 nên không tìm được giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của A.

+ Nếu chấp nhận tồn tại a để $a^2 = 2$, khi đó $2x - y$ lớn nhất bằng $|a|$ và nhỏ nhất bằng $-|a|$, do đó $4x - 2y$ lớn nhất bằng $2|a|$ và nhỏ nhất bằng $-2|a|$."

Tòa soạn có ý kiến thế nào ?

HOÀNG TUẤN ANH (Hưng Hà - TB)

Quá nhiều bạn giải đúng nên ưu tiên các bạn giải hơn một cách sẽ được tặng phẩm : Dương Đức Kiên, 11A₂, THPT Yên Lạc 2, Vĩnh Phúc, Nguyễn Ánh Nguyệt, tổ 28, phố Tân Phú, phường Tân Dân, Tp. Việt Trì, Phú Thọ.

Nhiều bạn lí luận vài trang bằng cách lần lượt xem tất cả các ngày trong tuần. Có thể nhận xét câu 1, câu 2 cùng đúng cùng sai nhưng không thể cùng đúng nên cùng sai, tương tự câu 3, câu 4 cùng đúng, cùng sai nhưng không thể cùng đúng nên cùng sai. Từ đó suy ra kết quả.

Cảm ơn các bạn và xin mời xem xét hai chiếc đồng hồ trong bài toán dưới đây.

LTN

HAI CHẾC ĐỒNG HỒ

Đồng hồ của Minh và Tuấn đều chạy nhanh. Đồng hồ của Tuấn chạy nhanh hơn đồng hồ của Minh 0,5 phút một ngày. Vào 12 giờ trưa ngày chủ nhật, khi cả 2 đồng hồ đã chỉ đúng, Minh vặn đồng hồ của mình chậm lại 2 phút, Tuấn vặn đồng hồ của mình chậm lại 3 phút. Vài ngày sau đồng hồ của Tuấn chỉ đúng vào 12 giờ trưa, còn đồng hồ của Minh chỉ đúng vào 12 giờ trưa ngày hôm sau đó.

Hỏi đồng hồ của mỗi bạn chạy nhanh bao nhiêu phút một ngày và chỉ đúng vào ngày nào?

TRẦN XUÂN TIỆP

(12A9, THPT Ngô Quyền, Hải Phòng)

☛ Nói cho chính xác thì bài toán này học sinh lớp 8 không "xơi" được ! Bài toán bảo "tìm" mà đáp án lại dăm trả lời là "không tìm được" thì còn gọi là *đáp án* làm sao được ? Bằng các kiến thức của cấp THPT thì mới chứng minh nổi: không tồn tại giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của A nếu x, y là số hữu tỉ. Lời giải khác mà bạn gửi về cũng không đúng. Nếu bài toán này dùng cho học sinh lớp 9 thì lại quá bình thường. Mong các nhà làm đề thi lưu ý. Cảm ơn bạn.

✉ Chúng em được biết từ kì thi năm học 2000-2001 sẽ không được dùng phương pháp nghiệm kép để làm các bài toán tiếp tuyến và sự tiếp xúc của hai đồ thị. Tại sao Đài THVN phát bằng chương trình ôn thi của thầy giáo Nguyễn Thượng Võ thấy vẫn dùng được ?

(Học sinh trường THPT Bạch Đằng, Quảng Yên, Yên Hưng, Quảng Ninh)

☛ Các bạn phải chấp hành quy định của Bộ GD-ĐT là không được dùng. Đài THVN phát lại bằng bài giảng của thầy NTV các năm trước nên mới thế. Mong Đài THVN lưu ý chính lí các bài giảng theo quy định mới.

LTS

35 NĂM - KHỐI THPT CHUYÊN TOÁN - TIN TRƯỜNG ĐẠI HỌC VINH

Vào tháng 10 năm 1966 theo quyết định của Bộ Giáo dục, 15 em nam nữ học sinh từ Quảng Bình đến Nam Hà đã vượt qua bao chặng đường gian nan vất vả do chiến tranh phá hoại của kẻ thù để tụ hội về miền quê Yên Dã, xã Thạch Bình, huyện miền núi Thạch Thành tỉnh Thanh Hóa dự khai giảng lớp 8 - toán đầu tiên của khối Toán đặc biệt, nay là khối THPT chuyên Toán - Tin trường ĐH Vinh.

Từ 1969 - 1970, thầy trò các lớp Toán đặc biệt cùng với khoa Toán chuyển về vùng biển Quỳnh Nghĩa, Quỳnh Minh, Quỳnh Diễn huyện Quỳnh Lưu và xã Diễn Trường huyện Diễn Châu tỉnh Nghệ An.

Năm 1972 do chiến tranh ác liệt, để tiếp tục sự nghiệp đào tạo, đảm bảo an toàn, khối chuyên Toán được lệnh chuyển đến Phú Thành, Hậu Thành, huyện Yên Thành và từ năm học 1973-1974 khối chuyên Toán - Tin cùng trường đại học Vinh trở về thành phố Vinh.

Từ năm học 1975-1976 đến nay, khối THPT chuyên Toán trở thành một đơn vị độc lập và năm 1996 khối mở thêm hệ chuyên Tin.

Trải qua 35 năm xây dựng và phát triển khối THPT chuyên Toán - Tin đã đào tạo được gần hai ngàn học sinh tốt nghiệp THPT và hầu hết các em đã được tuyển chọn vào các trường ĐH có uy tín ở trong và ngoài nước. Theo con số thống kê chưa đầy đủ nhiều học sinh đã bảo vệ thành công luận án TSKH: Phạm Thế Long, Lê Tuấn Hoa, Đinh Nho Hào... Hơn chục người đã được nhà nước phong tặng GS, PGS như: Phạm Thế Long, Trần Ngọc Giao, Lê Mỹ Tú, Lê Công Triêm, Lê Tuấn Hoa... TS Trần Quyết Thắng (học sinh chuyên toán khóa 5) hiện là Phó Chủ tịch UBND tỉnh Hà Tĩnh. Hàng trăm học sinh của khối đã bảo vệ thành công luận án TS, ThS, là giảng viên trong các trường ĐH, CĐ, là giáo viên của các trường năng khiếu ở nhiều tỉnh, là chuyên viên giỏi trong các Viện nghiên cứu, Nhà xuất bản, các Bộ, các Công ty, Tổng công ty trên mọi miền của đất nước.

Gần 50 thầy cô giáo của trường ĐH Vinh đã trưởng thành từ khối chuyên Toán góp một phần

quan trọng vào công tác đào tạo, nghiên cứu và quản lý của nhà trường. Cho đến nay khối có 8 HS đoạt giải Quốc tế và khu vực, gần 50 HS đoạt giải Quốc gia, hàng chục HS đoạt giải báo THPT. Trong 5 năm gần đây, năm nào cũng có HS đoạt giải Olympic Toán Châu Á - Thái Bình Dương, từ 5 đến 7 em đoạt giải toán Quốc gia, 100% học sinh hệ chuyên đã thi đậu vào các trường đại học, trong đó có nhiều em đỗ thủ khoa, mỗi năm có hàng chục em được cử đi ở nước ngoài hoặc được chọn vào các lớp tài năng của các trường đại học lớn ở trong nước.

Khối luôn ghi nhớ công lao của các thầy giáo dạy toán nhiều năm ở khối: Nguyễn Thúc Hào, Nguyễn Văn Bằng, Trần Văn Hạo, Nguyễn Văn Ân, Kiều Huy Luân, Hoàng Kỳ, Trương Đức Hình, Hà Huy Hân, Trần Đức Mai, Văn Như Cương, Nguyễn Tường Quân, Lê Huy Hùng, Lê Quang Phan, Nguyễn Thái Hòa, Bùi Tường Trí, Nguyễn Đình Nhân, Trần Đình Viên, Hoàng Trọng Thái, Nguyễn Văn Đàm, Đỗ Mạnh Hùng, Đào Tam, Nguyễn Việt Hải, Nguyễn Quang Vinh, Hồ Bính, Lê Thống Nhất...

Hiện nay khối THPT chuyên Toán - Tin có 35 giáo viên, trong đó có 8 giáo viên toán (1 TS và 7 ThS). Trường ĐH Vinh thường xuyên cử các giáo viên có nhiều kinh nghiệm ở các khoa Toán, Lý, Công nghệ thông tin... về dạy chuyên để cho các học sinh.

Với những đóng góp to lớn của bao thế hệ thầy trò trong 35 năm qua, đơn vị đã được tặng nhiều Bằng khen của UBND tỉnh Nghệ An, Bằng khen của Tổng Liên đoàn Lao động Việt Nam, Bằng khen của Bộ trưởng Bộ Giáo dục và Đào tạo, Bằng khen của Thủ tướng Chính Phủ về thành tích xuất sắc trong công tác đào tạo, NCKH, bồi dưỡng học sinh giỏi. Đặc biệt tháng 10 năm 2001 Chủ tịch nước Cộng hòa Xã hội Chủ nghĩa Việt Nam đã ký quyết định tặng Huân chương Lao động hạng Ba cho khối THPT chuyên Toán - Tin trường Đại học Vinh.

ISBN : 0866-0853

Chỉ số : 12884

Mã số : 8BT94M1

Chế bản tại Tòa soạn

In tại Nhà máy in Diên Hồng, ngõ 187 phố Giảng Võ

In xong và nộp lưu chiểu tháng 10 năm 2001

Giá : 3000đ

Ba nghìn đồng