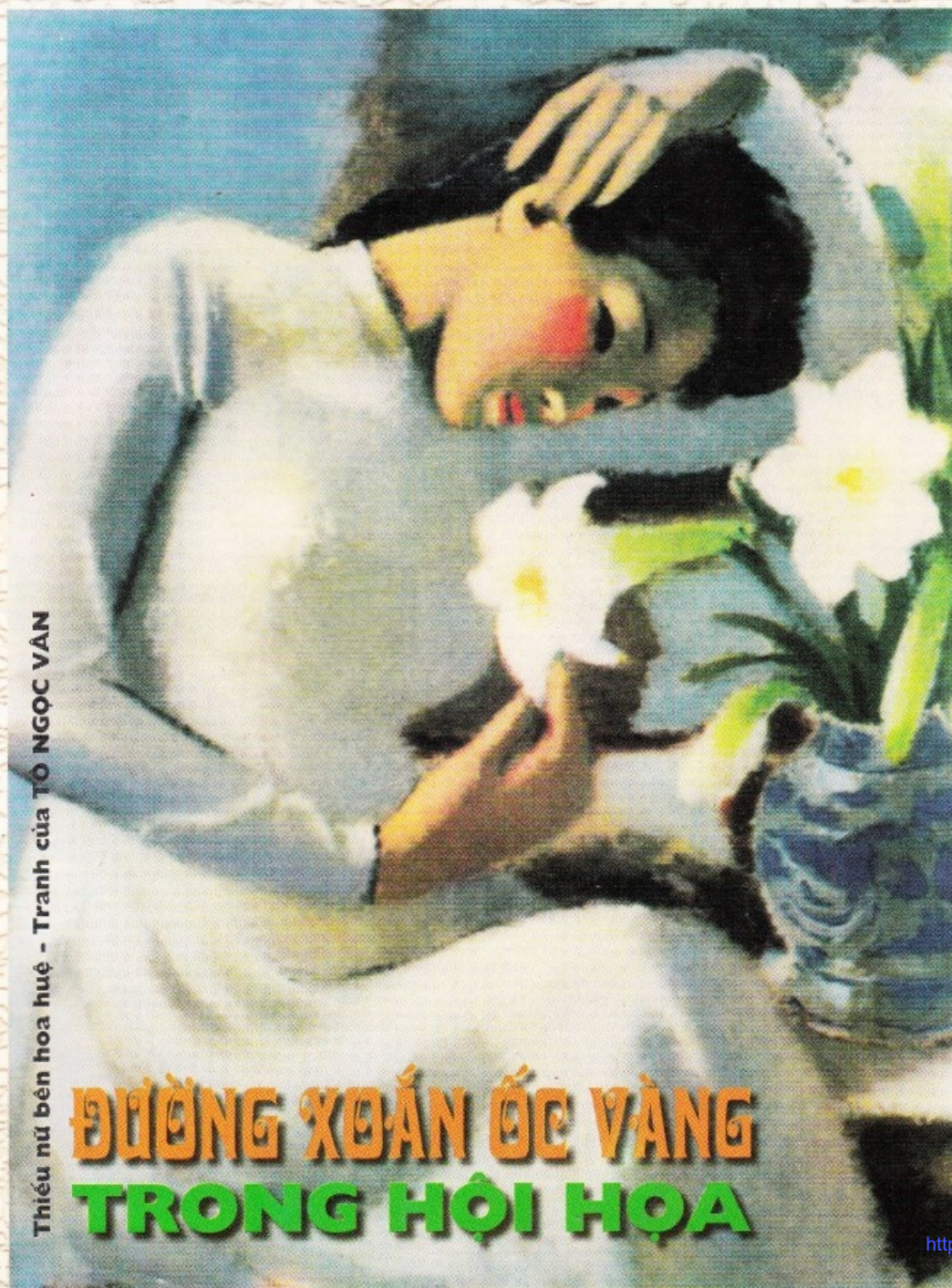


BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO * HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

Toán học & Tuổi trẻ

7
2001

SỐ 289 - NĂM THỨ 38 - TẬP CHÍ RA HÀNG THÁNG



Thiếu nữ bẽn lẽn hoa huệ - Tranh của TÔ NGỌC VÂN

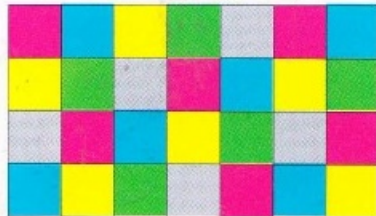
ĐƯỜNG XẺM ỐC VÀNG
TRONG HỘI HỌA



MÀU NÀO CHO HỢP

Cứ tưởng các bạn "hoa mắt" bởi 5 màu dán xem nhau thì khó mà nhận ra được logic của sự bố trí các màu.

Ài ngờ, bạn Nguyễn Đức Thao, 7A, THCS Lê Quý Đôn, Bim Sơn, Thanh Hóa đã nêu ra 19



cách lí luận khác nhau để xếp đúng 4 màu vào 4 ô trông như hình bên. Cách đơn giản nhất là các bạn cứ đi lần lượt các ô ở mỗi hàng từ trái sang phải, theo thứ tự từ trên xuống dưới sẽ thấy sự "tuần hoàn" của các màu. Nhiều bạn còn nhận xét được: các ô cùng màu được bố trí thành đường đi của quân mã trên bàn cờ.

Tất cả đều đúng, nhưng chỉ khen được các nhà vô địch về số cách lí luận

Sau bạn Nguyễn Đức Thao là các bạn: Trần Cảnh Tùng, 10 Tin, THPT NK Hưng Yên, Nguyễn Thế Anh, Phương Mỹ, Mỹ Hưng, Thanh Oai, Hà Tây, Thủy Trang, tổ 50, An Cư, Hải Bắc, quận Sơn Trà, Tp. Đà Nẵng, Phan Thành Việt, 6D, THCS Lương Thế Vinh, thị xã Tuy Hòa, Phú Yên.

NGỌC MAI



Kết quả : NHỮNG CON SỐ ĐẸP

Nhiều bạn, tuy không nói ra được lời giải, nhưng cho thêm 3 số đẹp như số 153 là:

$$370 = 3^3 + 7^3 + 0^3$$

$$371 = 3^3 + 7^3 + 1^3$$

$$407 = 4^3 + 0^3 + 7^3$$

Một số bạn trình bày lời giải khá phức tạp (có một vài lời giải sai nên không đưa ra những con số đẹp).

Các bạn Trương Phước Giang, 10T, THPT Bến Tre, Bến Tre; Lê Đăng Tâm, 11C, THPT Đồng Hà, Quảng Trị; Nguyễn Quang Tùng, 9H, THCS Trưng Vương, Hà Nội đã "giải quyết" khá đơn giản nhờ sự "cần cù" của máy tính qua ngôn ngữ lập trình Pascal.

Program Tim số ;

Var a, b, c : Tinteger

Begin

For a := 1 to 9 do

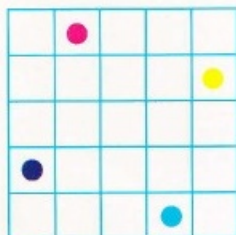
For b := 0 to 9 do

For c := 0 to 9 do (Xem tiếp trang 23)

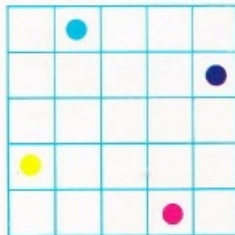
CUỘC THI VUI HÈ 2001 ĐỀ THI VÒNG THỨ HAI

Bài 1. CHUYỂN QUÂN

Trên một bàn cờ như hình 1 có 4 quân cờ Đỏ, Vàng, Lam, Tím. Mỗi quân có thể chuyển (một



Hình 1



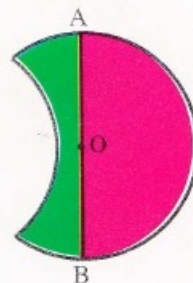
Hình 2

bước) từ ô này sang ô trống khác theo đường chéo của hình chữ nhật 3×4 ô hoặc 4×3 ô. Hỏi cần ít nhất là bao nhiêu bước để chuyển 4 quân từ hình 1 sang hình 2 và hãy chỉ ra cách chuyển.

Bài 2. VƯỜN HOA

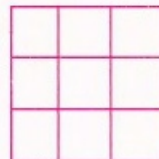
Một khu vườn hình trăng khuyết tạo bởi hai cung của hai đường tròn bằng nhau (xem hình). Một con đường nhỏ đi từ A đến B qua tâm O của hình tròn chia vườn thành hai phần: nửa hình tròn bên

phải trồng hoa, phần bên trái trồng rau. Biết tổng độ dài đường dạo quanh vườn và đường AB là 348m. Hỏi diện tích trồng hoa là bao nhiêu mét vuông?



Bài 3. ĐIỂN SỐ

Hãy điền đủ các số 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256 vào các ô vuông của hình bên sao cho tích các số theo các hàng ngang, hàng dọc và đường chéo đều bằng nhau.



Hạn nhận bài là không chậm hơn ngày 31.8.2001 (căn cứ vào dấu bưu điện). Kết quả cuộc thi sẽ công bố trên THIT số 292 ra ngày 15.10.2001. Phía trên mỗi bài giải, bạn cần ghi đầy đủ địa chỉ nơi ở và địa chỉ lớp, trường, huyện, tỉnh hoặc cơ quan mình. Ngoài phong bì cần ghi rõ:

ĐU THI VUI HÈ
Tập chí Toán học và Tuổi trẻ
187 phố Giảng Võ,
Hà Nội

Toán học và Tuổi trẻ Mathematics and Youth

Năm thứ 38

Số 289 (7-2001)

Tòa soạn : Ngõ 187, phố Giảng Võ, Hà Nội

ĐT : 04.5142648 – 04.5142650. FAX : 04.5142648

Email : toantt@hotmail.com

TRONG SỐ NÀY

- 2** **Dành cho Trung học cơ sở – For Lower Secondary Schools**
Nguyễn Đức Tấn - Một hướng tổng quát của bất đẳng thức Nesbit
- 4** **Tìm hiểu sâu thêm toán học sơ cấp – Advanced Elementary Mathematics**
Trần Tuấn Anh - Áp dụng bất đẳng thức Ptolômê để thiết lập bất đẳng thức mới
- 6** **Diễn đàn dạy học toán – Math Teaching Forum**
Nguyễn Đức Hồng - Về cách giải một bài toán viết phương trình đường thẳng trong không gian
- 7** *Nguyễn Khắc Minh* - Kết quả kì thi chọn học sinh giỏi toán quốc gia THPT năm học 2000–2001
- 9** **Bạn có biết - Do you know ?**
Việt Tiến - Giải thưởng Wolf
- 10** **Nhìn ra thế giới – Around the World**
Vũ Kim Thủy - Kì thi Olympic toán Singapore 2001
- 11** *Phạm Thế Long* - Olympic toán sinh viên toàn quốc
- 11** **Tiếng Anh qua các bài toán – English through Math Problems**
Ngô Việt Trung - Bài số 43
- 12** **Đề ra kì này - Problems in this Issue**
T1/289, ..., T10/289, L1, L2/289
- 14** **Giải bài kì trước - Solutions to Previous Problems**
Giải các bài của số 285
- 21** **Toán học và đời sống – Mathematics and Life**
Phùng Hồng Kổn - Đường xoắn ốc vàng trong hội họa
- 24** **Câu lạc bộ - Math Club**
Sai lầm ở đâu? Where's the Mistakes?

Bìa 2 : Toán học muôn màu – Multifarious Mathematics

Đong ít lần nhất

Bìa 3 : Giải trí toán học – Math Recreation
Cuộc thi Vui hè 2001 - vòng 2

Bìa 4 : Chúc mừng GS. Nguyễn Thúc Hào
thượng thọ 90

Tổng biên tập :
NGUYỄN CẢNH TOÀN
Phó tổng biên tập :
NGÔ ĐẠT TỨ
HOÀNG CHÚNG

Chịu trách nhiệm xuất bản :
Giám đốc NXB Giáo dục :
NGÔ TRẦN ÁI
Tổng biên tập NXB Giáo dục :
VŨ DƯƠNG THỤY

Hội đồng biên tập :

NGUYỄN CẢNH TOÀN, HOÀNG CHÚNG, NGÔ ĐẠT TỨ, LÊ KHẮC BẢO, NGUYỄN HUY ĐOAN, NGUYỄN VIỆT HẢI, ĐINH QUANG HẢO, NGUYỄN XUÂN HUY, PHAN HUY KHÁI, VŨ THANH KHIẾT, LÊ HẢI KHÔI, NGUYỄN VĂN MẬU, HOÀNG LÊ MINH, NGUYỄN KHẮC MINH, TRẦN VĂN NHUNG, NGUYỄN ĐĂNG PHÁT, PHAN THANH QUANG, TÀ HỒNG QUẢNG, ĐẶNG HÙNG THẮNG, VŨ DƯƠNG THỤY, TRẦN THÀNH TRẠI, LÊ BÁ KHÁNH TRÌNH, NGÔ VIỆT TRUNG

Trưởng ban biên tập : NGUYỄN VIỆT HẢI. Thư ký tòa soạn : LÊ THỐNG NHẤT. Thực hiện : VŨ KIM THỤY.

Trị sự : VŨ ANH THU. Trình bày : NGUYỄN THỊ OANH.

Đại diện*phía Nam : TRẦN CHÍ HIẾU, 231 Nguyễn Văn Cừ, TP. Hồ Chí Minh. ĐT : 08.8323044.



Dành cho các bạn

TRUNG HỌC CƠ SỞ

MỘT HƯỚNG TỔNG QUÁT CỦA BẤT ĐẲNG THỨC

NESBIT

NGUYỄN ĐỨC TẤN
(Tp. Hồ Chí Minh)

Chắc các bạn đã biết bất đẳng thức sau do nhà toán học Anh Nesbit (Nashbitt) đưa ra năm 1905 : "Với các số dương a, b, c thì

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

Trong cuốn sách "500 bài toán chọn lọc về bất đẳng thức" của PGS. Phan Huy Khải, tôi gặp bài toán tổng quát :

Bài toán 1. Cho các số dương a, b, c và số nguyên dương n , chứng minh rằng

$$\frac{a^n}{b+c} + \frac{b^n}{c+a} + \frac{c^n}{a+b} \geq \frac{3}{2} \left(\frac{a+b+c}{3} \right)^{n-1} \quad (*)$$

Ta coi $x^0 = 1$ với $x \neq 0$

Tác giả đã sử dụng bất đẳng thức Bunhiacôpxki mở rộng để giải bài toán này.

Tôi thử tìm một lời giải khác, sử dụng kiến thức lớp 9 và thật tuyệt vời khi phát hiện ra kết quả tốt hơn :

Bài toán 2. Cho các số dương a, b, c và số nguyên dương n , chứng minh rằng

$$\frac{a^n}{b+c} + \frac{b^n}{c+a} + \frac{c^n}{a+b} \geq \frac{1}{2} (a^{n-1} + b^{n-1} + c^{n-1}) \quad (**)$$

Lời giải.

a) Nếu $n = 1$ ta có bất đẳng thức Nesbit.

b) Nếu $n \geq 2$ vì $a, b > 0$ nên

$$\begin{aligned} (a^{n-2} - b^{n-2})(a-b) &\geq 0 \\ \Rightarrow a^{n-1} - a^{n-2}b - ab^{n-2} + b^{n-1} &\geq 0 \\ \Rightarrow a^{n-1} + b^{n-1} &\geq a^{n-2}b + b^{n-2}a \end{aligned} \quad (1)$$

Tương tự có

$$b^{n-1} + c^{n-1} \geq b^{n-2}c + c^{n-2}b \quad (2)$$

$$a^{n-1} + c^{n-1} \geq a^{n-2}c + c^{n-2}a \quad (3)$$

Mặt khác theo bất đẳng thức Côsi cho hai số không âm, ta có

$$\begin{aligned} \frac{a^n}{b+c} + \frac{a^{n-2}(b+c)}{4} &\geq 2 \sqrt{\frac{a^n}{b+c} \cdot \frac{a^{n-2}(b+c)}{4}} \\ \Rightarrow \frac{a^n}{b+c} + \frac{a^{n-2}b + a^{n-2}c}{4} &\geq a^{n-1} \end{aligned} \quad (4)$$

Tương tự, có

$$\frac{b^n}{c+a} + \frac{b^{n-2}c + b^{n-2}a}{4} \geq b^{n-1} \quad (5)$$

$$\frac{c^n}{a+b} + \frac{c^{n-2}a + c^{n-2}b}{4} \geq c^{n-1} \quad (6)$$

Từ (1), (2), (3), (4), (5), (6) có

$$\begin{aligned} \frac{a^n}{b+c} + \frac{b^n}{c+a} + \frac{c^n}{a+b} + \frac{a^{n-1} + b^{n-1}}{4} + \\ + \frac{b^{n-1} + c^{n-1}}{4} + \frac{c^{n-1} + a^{n-1}}{4} &\geq a^{n-1} + b^{n-1} + c^{n-1} \end{aligned}$$

suy ra

$$\frac{a^n}{b+c} + \frac{b^n}{c+a} + \frac{c^n}{a+b} \geq \frac{1}{2} (a^{n-1} + b^{n-1} + c^{n-1}) \quad (\text{đpcm}).$$

Bạn đọc hãy chứng minh bất đẳng thức sau bằng quy nạp và dựa vào (1) :

$$a^{n-1} + b^{n-1} + c^{n-1} \geq 3 \left(\frac{a+b+c}{3} \right)^{n-1}$$

Từ đó bất đẳng thức (**) chặt hơn bất đẳng thức (*)

Tôi thật sự sung sướng, nhưng ... lại phát hiện trong quyển sách "10000 bài toán sơ cấp bất đẳng thức" của PGS Phan Huy Khải có một kết quả chặt hơn nữa như sau :

Bài toán 3. Cho các số dương a, b, c và số nguyên dương n , chứng minh rằng :

$$\frac{a^n}{b+c} + \frac{b^n}{c+a} + \frac{c^n}{a+b} \geq \frac{3}{2} \left(\frac{a^n + b^n + c^n}{a+b+c} \right) \quad (***)$$

Lời giải. Vai trò a, b, c như nhau, không mất tính tổng quát giả sử $a \leq b \leq c$.

Ta có $a + b \leq a + c \leq b + c$ và

$$\frac{c^n}{a+b} \geq \frac{b^n}{a+c} \geq \frac{a^n}{b+c}$$

Áp dụng bất đẳng thức Trêbusép ta có

$$[(a+b) + (a+c) + (b+c)] \left(\frac{c^n}{a+b} + \frac{b^n}{a+c} + \frac{a^n}{b+c} \right) \geq 3(a^n + b^n + c^n)$$

$$\Rightarrow \frac{a^n}{b+c} + \frac{b^n}{a+c} + \frac{c^n}{a+b} \geq \frac{3}{2} \left(\frac{a^n + b^n + c^n}{a+b+c} \right)$$

Mà theo (1), (2), (3) khi thay n bởi $n+1$ thì

$$3 \left(\frac{a^{n+1} + b^{n+1} + c^{n+1}}{a+b+c} \right) \geq a^{n+1} + b^{n+1} + c^{n+1} \text{ nên bất}$$

đẳng thức (***) chặt hơn bất đẳng thức (**)

Lời giải thật độc đáo, tuy nhiên bất đẳng thức Trêbusép không được học ở trường phổ thông nên để có lời giải trên phải giải bài toán phụ là chứng minh bất đẳng thức Trêbusép. Do vậy lời giải bài toán trở nên dài dòng và khó khăn.

Đặc biệt, từ lời giải bài toán 2, tôi đã tìm được lời giải khác của bài toán 3 như sau :

Cho $a, b, c > 0$ và n nguyên dương. Thay n bởi $n+1$ trong (4) ta có :

$$\begin{aligned} \frac{a^{n+1}}{b+c} + \frac{a^{n-1}b + a^{n-1}c}{4} &\geq a^n \\ \Rightarrow \frac{a^n(b+c)}{b+c} + \frac{a^{n+1}}{b+c} + \frac{a^{n-1}b + a^{n-1}c}{4} &\geq a^n + a^n \\ \Rightarrow \frac{a^n(a+b+c)}{b+c} + \frac{a^{n-1}b + a^{n-1}c}{4} &\geq 2a^n \quad (7) \end{aligned}$$

Tương tự

$$\frac{b^n(a+b+c)}{c+a} + \frac{b^{n-1}c + b^{n-1}a}{4} \geq 2b^n \quad (8)$$

$$\frac{c^n(a+b+c)}{a+b} + \frac{c^{n-1}a + c^{n-1}b}{4} \geq 2c^n \quad (9)$$

Từ (7), (8), (9) với chú ý rằng theo (1) có $a^n + b^n \geq a^{n-1}b + b^{n-1}a$, $b^n + c^n \geq b^{n-1}c + c^{n-1}b$, $c^n + a^n \geq c^{n-1}a + a^{n-1}c$, suy ra

$$\begin{aligned} (a+b+c) \left(\frac{a^n}{b+c} + \frac{b^n}{a+c} + \frac{c^n}{a+b} \right) &\geq \\ &\geq \frac{3}{2} (a^n + b^n + c^n) \\ \Rightarrow \frac{a^n}{b+c} + \frac{b^n}{a+c} + \frac{c^n}{a+b} &\geq \frac{3}{2} \left(\frac{a^n + b^n + c^n}{a+b+c} \right) \end{aligned}$$

Như vậy, chúng ta đã tìm được một hướng tổng quát của bất đẳng thức Nesbit chỉ bằng kiến thức toán của THCS :

Với các số dương a, b, c và số nguyên dương n thì

$$\begin{aligned} \frac{a^n}{b+c} + \frac{b^n}{a+c} + \frac{c^n}{a+b} &\geq \frac{3}{2} \left(\frac{a^n + b^n + c^n}{a+b+c} \right) \geq \\ &\geq \frac{1}{2} (a^{n-1} + b^{n-1} + c^{n-1}) \geq \frac{3}{2} \left(\frac{a+b+c}{3} \right)^{n-1} \end{aligned}$$

Lời Tòa soạn : * Bài viết trên cho chúng ta một hướng tổng quát bất đẳng thức Nesbit. Bài toán 2 đã được phát biểu trong cuốn "Các bài giảng luyện thi môn Toán", tập I, NXB Giáo dục, 1993.

* Một hướng tổng quát khác đã được giới thiệu trên THPT năm 1979 là :

"Phải chăng với $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ thì

$$\frac{a_1}{a_2+a_3} + \frac{a_2}{a_3+a_4} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n+a_1} + \frac{a_n}{a_1+a_2} \geq \frac{n}{2} \text{ ?}"$$

Câu hỏi đó nêu ra từ năm 1908 và 50 năm sau, nhà toán học Anh Môden (Mordel) mới chứng minh được đối với $n = 4, 5, 6$.

Trên THPT (1/1976) tác giả Lê Quốc Hán chứng minh với $n = 4$, các tác giả Ngô Cảnh Hưng, Trần Quang, Lê Thống Nhất đã chứng minh với $n = 4, 5, 6$ (THPT 1/1979) Các bạn có thể tìm thấy các lời giải này trong quyển Bất đẳng thức của PGS Phan Đức Chính, NXB GD - 1993.

Đến nay người ta đã khẳng định được :

1) Kết quả đúng với $n \leq 12$

2) Kết quả không đúng với số chẵn $n \geq 14$ và số lẻ $n \geq 27$.

CÂU LẠC BỘ THPT

CUỘC CHƠI ĐAU THIÊN NIÊN KỈ MỚI

Mời các bạn tham gia cuộc chơi hàng tháng

ĐOÁN TUỔI VÀ BIẾT AI QUA ẢNH

Bạn hãy cắt phiếu cuộc chơi và dán ở bên ngoài phong bì gửi Tòa soạn THPT sau khi đã điền câu trả lời. Bên trong phong bì bạn có thể viết cảm tưởng về cuộc chơi nhưng không gửi bài khác. Nhớ ghi địa chỉ của bạn !

THAM GIA CUỘC CHƠI ĐAU THIÊN NIÊN KỈ

Người trong ảnh ?

Họ và tên :

Ảnh chụp khi tuổi.



TÌM HIỂU SÂU THÊM TOÁN HỌC SƠ CẤP

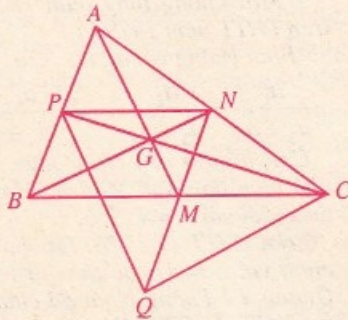
ÁP DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC PTÔLÊMÊ ĐỂ THIẾT LẬP BẤT ĐẲNG THỨC MỚI

TRẦN TUẤN ANH

(SV lớp Toán – Tin 2000 – ĐHKHTN – ĐHQG Tp. Hồ Chí Minh)

Bất đẳng thức Ptôlê-mê là bất đẳng thức rất hay trong hình học. Việc chứng minh bất đẳng thức này đã được đề cập trong nhiều sách, trên Toán học và Tuổi trẻ (THTT số 263/ 5-1999). Ở đây tôi xin trình bày một số áp dụng của nó để thiết lập các bất đẳng thức khác.

A. Trước hết ta xét $\triangle ABC$ có các trung tuyến AM , BN , CP và trọng tâm G . Đặt $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $AM = m_a$, $BN = m_b$, $CP = m_c$ (hình vẽ). Gọi Q là điểm đối xứng của N qua M . Để thấy $\triangle PQC$ có các cạnh chính là các trung tuyến của $\triangle ABC$ với độ dài các trung tuyến lần lượt là $\frac{3}{4}a$, $\frac{3}{4}b$, $\frac{3}{4}c$.



Hình 1

Đón đọc THTT SỐ 290 (8-2001)

Các bạn hãy đón xem những thông tin về :

- ◆ Cuộc thi Toán quốc tế lần thứ 42 (7/2001) tại Mỹ.
- ◆ Giải đáp một số thắc mắc về các bài toán thi Đại học (7/2001) để rút kinh nghiệm cho các bạn dự thi năm sau.
- ◆ Một sai lầm phổ biến khi xét phương trình có đúng 1 nghiệm trong một khoảng.
- ◆ Khai thác bất đẳng thức Ptôlê-mê cùng với định lí Mê-nê-la-uyt.
- ◆ Định lí Ô-le của tứ giác nội tiếp
- ◆ Lí thuyết tương đối được xây dựng trên cơ sở toán học nào ?

và các mục Câu lạc bộ, Giải trí toán học... thường lệ.

THTT

Áp dụng BĐT Ptôlê-mê vào tứ giác $BPNC$ ta có : $PC \cdot NB \leq BC \cdot PN + BP \cdot NC$ hay

$$m_b m_c \leq \frac{a^2}{2} + \frac{bc}{4} \Rightarrow 4m_b m_c \leq 2a^2 + bc$$

$$\text{Tương tự ta có : } 4m_a m_b \leq 2c^2 + ab \\ 4m_a m_c \leq 2b^2 + ac \quad (1)$$

$$\text{Từ (1) suy ra } (4m_a^2)(4m_b^2)(4m_c^2) \leq \\ \leq (2a^2 + bc)(2b^2 + ac)(2c^2 + ab)$$

$$\text{Áp dụng công thức tính độ dài đường trung tuyến ta được} \\ (2b^2 + 2c^2 - a^2)(2a^2 + 2c^2 - b^2)(2a^2 + 2b^2 - c^2) \leq \\ \leq (2a^2 + bc)(2b^2 + ac)(2c^2 + ab) \quad (A1)$$

Dựa vào cách thiết lập bằng hình học, ta có thể chứng minh BĐT (A1) bằng đại số như sau :

$$(2a^2 + 2c^2 - b^2)(2a^2 + 2b^2 - c^2) - (2a^2 + bc)^2 \\ = (2a^2)^2 + 2a^2(b^2 + c^2) + (2c^2 - b^2)(2b^2 - c^2) - \\ - 2a^2 \cdot 2bc - (bc)^2 - (2a^2)^2 = \\ = 2a^2(b^2 + c^2 - 2bc) - 2(b^2 - c^2)^2 \\ = 2(b-c)^2[a^2 - (b+c)^2] \leq 0 \quad (\text{vì } b+c > a)$$

Do đó :

$$(2a^2 + 2c^2 - b^2)(2a^2 + 2b^2 - c^2) \leq (2a^2 + bc)^2$$

Tương tự :

$$(2a^2 + 2c^2 - b^2)(2b^2 + 2c^2 - a^2) \leq (2c^2 + ac)^2$$

$$(2a^2 + 2b^2 - c^2)(2b^2 + 2c^2 - a^2) \leq (2b^2 + ac)^2$$

Nhân theo từng vế các BĐT trên với chú ý

$$2a^2 + 2b^2 - c^2 \geq (a+b)^2 - c^2 > 0$$

$2a^2 + 2c^2 - b^2 > 0$, $2b^2 + 2c^2 - a^2 > 0$ ta được BĐT cần chứng minh.

$$\bullet \text{ Từ (1) suy ra } 4(m_a m_b + m_b m_c + m_c m_a) \leq \\ \leq 2(a^2 + b^2 + c^2) + (ab + bc + ca)$$

Chú ý $4(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) = 3(a^2 + b^2 + c^2)$ ta thu được

$$4(m_a + m_b + m_c)^2 \leq 7(a^2 + b^2 + c^2) + 2(ab + bc + ca) \\ \Rightarrow 2(m_a + m_b + m_c) \leq$$

$$\leq \sqrt{7(a^2 + b^2 + c^2) + 2(ab + bc + ca)} \quad (A2)$$

• Áp dụng (1) cho $\triangle PQC$ ta được :

$$4\left(\frac{3}{4}b\right)\left(\frac{3}{4}c\right) \leq 2m_a^2 + m_a m_b$$

$$\Rightarrow 9bc \leq 8m_a^2 + 4m_b m_c$$

$$\text{Tương tự: } 9ac \leq 8m_b^2 + 4m_a m_c$$

$$9ab \leq 8m_c^2 + 4m_a m_b \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \text{Từ (2) có } 9(ab + bc + ca) &\leq 8(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) \\ &+ 4(m_a m_b + m_b m_c + m_c m_a) \\ \Rightarrow 4(m_a m_b + m_b m_c + m_c m_a) &\geq \\ &\geq 9(ab + bc + ca) - 8(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) = \\ &= 9(ab + bc + ca) - 6(a^2 + b^2 + c^2) \\ \Rightarrow (m_a + m_b + m_c)^2 &= \\ &= m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 + 2(m_a m_b + m_b m_c + m_c m_a) \\ &\geq \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{9}{2}(ab + bc + ca) - 3(a^2 + b^2 + c^2) \\ &= \frac{9}{4}[2(ab + bc + ca) - (a^2 + b^2 + c^2)] \\ \Rightarrow 2(m_a m_b + m_b m_c + m_c m_a) &\geq 3\sqrt{2(ab + bc + ca) - (a^2 + b^2 + c^2)} \quad (A2) \end{aligned}$$

Vậy:

Trong tam giác có ba cạnh là a, b, c và 3 trung tuyến tương ứng là m_a, m_b, m_c ta có các bất đẳng thức sau:

$$(A1) (2a^2 + 2b^2 - c^2)(2a^2 + 2c^2 - b^2)(2b^2 + 2c^2 - a^2) \leq (2a^2 + bc)(2b^2 + ac)(2c^2 + ab)$$

$$\begin{aligned} (A2) 3\sqrt{2(ab + bc + ca) - (a^2 + b^2 + c^2)} &\leq \\ &\leq 2(m_a + m_b + m_c) \leq \\ &\leq \sqrt{7(a^2 + b^2 + c^2) + 2(ab + bc + ca)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (A3) \frac{1}{4}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] &\leq \\ &\leq (m_a - m_b)^2 + (m_b - m_c)^2 + (m_c - m_a)^2 \leq \\ &\leq \frac{9}{4}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] \end{aligned}$$

Việc chứng minh (A3) dành cho bạn đọc

B. Áp dụng BĐT Ptolômê cho tứ giác APGN

(h.1) ta có: $AG.PN \leq AP.GN + AN.GP$

$$\Rightarrow 2am_a \leq bm_c + cm_b$$

$$\text{Tương tự: } 2bm_b \leq am_c + cm_a$$

$$2cm_c \leq am_b + bm_a \quad (3)$$

$$\text{Suy ra: } 2am_a^2 \leq bm_c m_a + cm_b m_a$$

$$2bm_b^2 \leq am_c m_b + cm_a m_b$$

$$2cm_c^2 \leq am_b m_c + bm_a m_c$$

Cộng theo từng vế các BĐT trên ta được:

$$\begin{aligned} am_b m_c + bm_a m_c + cm_a m_b &\geq \\ &\geq am_a^2 + bm_b^2 + cm_c^2 \end{aligned}$$

$$\text{Từ (3) có: } 2a^2 m_a \leq ab m_c + ac m_b$$

$$2b^2 m_b \leq ab m_c + bc m_a$$

$$2c^2 m_c \leq ac m_b + bc m_a$$

Cộng theo từng vế các BĐT trên ta được:

$$abm_c + bcm_a + cam_b \geq a^2 m_a + b^2 m_b + c^2 m_c$$

Từ đó và do (3) $abm_c + ac m_b \geq 2a^2 m_a$ có

$$\begin{aligned} abm_c + acm_b + bcm_a &\geq (2a^2 + bc) m_a \geq \\ &\geq 4 m_b m_c m_a \quad (\text{vì } 4 m_b m_c \leq 2a^2 + bc) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{ab}{m_a m_b} + \frac{bc}{m_b m_c} + \frac{ca}{m_c m_a} \geq 4$$

Áp dụng BĐT này cho tam giác $\triangle PQC$ ta thu được BĐT:

$$\frac{m_a m_b}{ab} + \frac{m_b m_c}{bc} + \frac{m_c m_a}{ca} \geq \frac{9}{4}$$

Tóm lại:

Trong tam giác có 3 cạnh là a, b, c và 3 trung tuyến tương ứng là m_a, m_b, m_c ta có các bất đẳng thức sau:

$$(B1) \frac{ab}{m_a m_b} + \frac{bc}{m_b m_c} + \frac{ca}{m_c m_a} \geq 4$$

$$(B2) \frac{m_a m_b}{ab} + \frac{m_b m_c}{bc} + \frac{m_c m_a}{ca} \geq \frac{9}{4}$$

$$\begin{aligned} (B3) am_a m_b + bm_a m_c + cm_a m_b &\geq \\ &\geq am_a^2 + bm_b^2 + cm_c^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (B4) abm_c + bcm_a + cam_b &\geq \\ &\geq a^2 m_a + b^2 m_b + c^2 m_c \end{aligned}$$

Mời các bạn vận dụng bất đẳng thức Ptolômê để giải một số bài tập sau:

Bài tập: Chứng minh rằng trong $\triangle ABC$ với 3 cạnh là a, b, c và 3 trung tuyến tương ứng là m_a, m_b, m_c ta có các bất đẳng thức

$$1) (a^2 + b^2 + (n-1)c^2)(a^2 + c^2 + (n-1)b^2)(b^2 + c^2 + (n-1)a^2) \leq$$

$$\leq (a^2 + nbc)(b^2 + nac)(c^2 + nab) \quad \text{với } 0 \leq n \leq \frac{1}{2}$$

(xem bài T8/285)

$$\begin{aligned} 2) \frac{3}{4}[6abc - (a^3 + b^3 + c^3)] &\leq am_b m_c + bm_a m_c + \\ &+ cm_a m_b \leq \frac{3}{4}abc + \frac{1}{2}(a^3 + b^3 + c^3) \end{aligned}$$

$$3) \frac{a}{m_a} + \frac{b}{m_b} + \frac{c}{m_c} \geq 2\sqrt{3}$$

$$4) \frac{m_a}{a} + \frac{m_b}{b} + \frac{m_c}{c} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$



Gọi $N = d \cap (\alpha)$ thì tọa độ của N là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} 3x + y + z - 2 = 0 \\ x + y - z + 2 = 0 \\ x + 1 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Giải hệ (1) có nghiệm là $x = -1, y = 2, z = 3$.

Về cách giải một bài toán VIẾT PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG TRONG KHÔNG GIAN

NGUYỄN ĐỨC HỒNG
(GV trường THPT Yên Mỹ, Hưng Yên)

Trong sách giáo khoa Hình học lớp 12 xuất bản năm 2000 có bài tập 10 mục 9, chương II :

Bài tập : Viết phương trình của đường thẳng qua điểm $M(0, 1, 1)$ vuông góc với đường thẳng d_1 và cắt đường thẳng d_2 được cho bởi các phương trình sau :

$$(d_1) \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{1}; \quad (d_2) \begin{cases} x + y - z + 2 = 0 \\ x + 1 = 0 \end{cases}$$

Sách bài tập đã hướng dẫn giải như sau :

Gọi d là đường thẳng cần tìm thì $d = (\alpha) \cap (\beta)$, trong đó (α) là mặt phẳng đi qua M và vuông góc với d_1 , còn (β) là mặt phẳng đi qua M và chứa đường thẳng d_2 .

Lời giải trên là đầy đủ nếu trong đề bài có ngụ ý tồn tại duy nhất đường thẳng d , tuy nhiên trong trường hợp tổng quát chưa chứng tỏ chắc chắn rằng d tồn tại và d cắt d_2 : có thể $d \parallel d_2$ trong mặt phẳng (β) hoặc $(\alpha) \parallel (\beta)$ hoặc (α) trùng với (β) .

Nếu xét thêm vị trí tương đối của d và d_2 thì lời giải trở nên "cồng kềnh" và đôi khi cách làm trên tỏ ra không hiệu lực trong trường hợp bài toán có vô số nghiệm (khi $d_2 \in (\alpha)$ tức là (α) trùng với (β)) hoặc bài toán vô nghiệm (khi $d_2 \parallel (\alpha)$ tức là $(\alpha) \parallel (\beta)$)

Tôi xin đưa ra cách giải quyết bài toán trên trong trường hợp tổng quát như sau :

Phương pháp 1. Mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(0, 1, 1)$ và vuông góc với d_1 sẽ nhận vectơ chỉ phương của d_1 là $\vec{u} = (3, 1, 1)$ làm vectơ pháp tuyến nên phương trình (α) có dạng :

$$3(x-0) + 1(y-1) + 1(z-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x + y + z - 2 = 0.$$

Gọi d là đường thẳng cần tìm.

Đường thẳng d cần tìm đi qua M, N và nhận $\vec{MN} = (-1, 1, 2)$ làm vectơ chỉ phương nên d có phương trình là :

$$\frac{x}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{2}$$

Phương pháp 2. Gọi d là đường cần tìm. Giả sử $P(x_0, y_0, z_0)$ là giao điểm của d và d_2 thì ta có $P \in d_2$ nên

$$\begin{cases} x_0 + y_0 + z_0 + 2 = 0 \\ x_0 + 1 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Vì $M \notin d_2$ nên $M \neq P \Rightarrow \vec{MP} = (x_0, y_0 - 1, z_0 - 1)$ là một vectơ chỉ phương của d . Vectơ chỉ phương của d_1 là $\vec{u} = (3, 1, 1)$. Mà $d \perp d_1$ nên $\vec{u} \perp \vec{MP}$ hay $\vec{u} \cdot \vec{MP} = 0$

$$\Leftrightarrow 3x_0 + 1(y_0 - 1) + 1(z_0 - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x_0 + y_0 + z_0 - 2 = 0 \quad (3)$$

Từ (2) và (3) ta có :

$$\begin{cases} 3x_0 + y_0 + z_0 - 2 = 0 \\ x_0 + y_0 - z_0 = 0 \\ x_0 + 1 = 0 \end{cases} \quad (4)$$

Giải (4) có nghiệm là $x_0 = -1, y_0 = 2, z_0 = 3$ nên tìm được $M(-1, 2, 3) \Rightarrow \vec{MP} = (-1, 1, 2)$

Vậy phương trình d là:

$$\frac{x}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{2}$$

Trong cả 2 phương pháp trên hệ phương trình (1) hoặc (4) có thể vô nghiệm, có 1 nghiệm, có vô số nghiệm suy ra bài toán có thể vô nghiệm, có 1 nghiệm, có vô số nghiệm.

Chẳng hạn với các bài toán sau cách giải theo hướng dẫn của sách bài tập là không hiệu quả.

KẾT QUẢ KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN QUỐC GIA THPT NĂM HỌC 2000-2001

NGUYỄN KHẮC MINH
(Vụ Trung học Phổ thông)

Kì thi chọn học sinh giỏi toán Quốc gia lớp 12 THPT năm học 2000-2001 đã diễn ra trong hai ngày 12/3 và 13/3/2001. Tham dự kì thi có 274 thí sinh ở Bảng A và 227 thí sinh ở Bảng B. Trong mỗi ngày thi, mỗi thí sinh phải làm 03 bài toán thi trong thời gian 180 phút.

Về chất lượng làm bài thi của các thí sinh trong kì thi năm nay, các giám khảo nhất trí nhận định: "Nhiều thí sinh tỏ ra chưa nắm vững các kiến thức cơ bản trong phạm vi chương trình THPT hiện hành".

Kết quả của kì thi: ở Bảng A có 91 thí sinh đạt giải (gồm 01 thí sinh đạt giải nhất, 22 thí sinh đạt giải nhì, 38 thí sinh đạt giải ba và 30 thí sinh đạt giải khuyến khích), đạt tỉ lệ 33,2%; ở Bảng B có 99 thí sinh đạt giải (gồm 01 thí sinh đạt giải nhất, 22 thí sinh đạt giải nhì, 43 thí sinh đạt giải ba và 33 thí sinh đạt giải khuyến khích), đạt tỉ lệ 43,6%. Dưới đây là danh sách các thí sinh đạt giải.

BẢNG A

Giải nhất: Lưu Tiến Đức (khối PTCT-Tin, ĐHSP Hà Nội).

Giải nhì: Bùi Duy Hiếu, Lê Anh Vinh (khối PTCT-Tin, ĐHKHTN-ĐHQG Hà Nội); Phạm Gia Vinh Anh, Vũ Hoàng Hiệp (khối PTCT-Tin, ĐHSP Hà Nội); Đỗ Việt Cường, Nguyễn Minh Đức (THPT Nguyễn Huệ, Hà Tây); Phan Mỹ Tiến (THPT NK, Hà Tĩnh); Phạm Minh Đức, Nguyễn Anh Quân (THPT NK Trần Phú, Hải Phòng); Phạm Đình Quốc Hưng, Vũ Thanh Tùng (THPT Lê Hồng Phong, Nam Định); Nguyễn Kiên Cường, Nguyễn Tất Thắng (THPT

Chuyên Hùng Vương, Phú Thọ); Nguyễn Thanh Bình, Lê Thành Công, Bùi Việt Hà, Vũ Thị Đức Hạnh (nữ), Trần Thế Hùng, Lưu Thị Linh Nhâm (nữ), Phạm Lê Minh, Đào Quang Tuấn (THPT Chuyên, Thái Bình); Phan Văn Tiến (THPT Lam Sơn, Thanh Hoá).

Giải ba: Lê Minh Hoàng, Phạm Hồng Việt (khối PTCT-Tin, ĐHKHTN-ĐHQG Hà Nội); Nguyễn Anh Hào (THPT Lê Quý Đôn, Đà Nẵng); Trần Đình Tuấn (THPT Chuyên, Hà Nam); Phạm Quang Bình, Vũ Ngọc Minh, Trần Khánh Toàn (khối PTCT-Tin, ĐHSP Hà Nội); Nguyễn Hoàng Dũng, Nguyễn Hải Đăng, Phan Vũ Toàn (THPT Hà Nội-Amsterdam, Hà Nội); Nguyễn Thành Khiêm, Phan Lạc Linh, Nguyễn Văn Viên (THPT Nguyễn Huệ, Hà Tây); Dương Tuấn Anh, Trương Quốc Hải, Nguyễn Nhật Tân (THPT NK, Hà Tĩnh); Nguyễn Xuân Cường, Tô Minh Hoàng, Trần Vĩnh Lộc, Phùng Văn Thuỷ, Phạm Tiến Toàn (THPT Nguyễn Trãi, Hải Dương); Vũ Thành Nam (THPT NK Trần Phú, Hải Phòng); Trần Trung Hiếu, Đoàn Thái Sơn (THPT Lê Hồng Phong, Nam Định); Nguyễn Hữu Giang, Mai Thanh Hoàng, Phan Đăng Khoa, Lê Tất Thắng, Võ Đình Tùng (khối PTCT-Tin, ĐHSP Vinh); Lê Thị Minh Hạnh (nữ), Nguyễn Việt Hải (THPT Lương Văn Tụy, Ninh Bình); Đào Ngọc Vũ (THPT Chuyên Hùng Vương, Phú Thọ); Nguyễn Hải Sơn (THPT Chuyên, Quảng Ninh); Lê Hoàng, Lê Đình Hùng, Lưu Đức Thi, Lê Quang Thuận (THPT Lam Sơn, Thanh Hoá); Nguyễn Đình Hoàng (PTNK, ĐHQG Tp. Hồ Chí Minh).

Bài 1. Viết phương trình của đường thẳng đi qua $M(1, 3, 0)$ vuông góc với đường thẳng d_1 và cắt đường thẳng d_2 được xác định bởi các phương trình sau:

$$(d_1): \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{-2}, (d_2): \begin{cases} x=1+2t \\ y=2-2t \\ z=-1-t \end{cases}$$

Kết quả: có vô số đường thẳng $d \in (\alpha)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán, các đường thẳng này có

phương trình dạng
$$\begin{cases} x=1+at \\ y=3+bt \\ z=ct \end{cases}$$
 với $a+2b-2c=0$

$$\text{và } a:b:c \neq (-2):2:1.$$

Bài 2. Viết phương trình của đường thẳng đi qua điểm $M(2, 1, 1)$, vuông góc với đường thẳng d_1 và cắt đường thẳng d_2 được xác định bởi các phương trình sau:

$$(d_1): \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{1}, (d_2): \begin{cases} x=2-3t \\ y=3+2t \\ z=2+5t \end{cases}$$

Kết quả: không tồn tại đường thẳng theo yêu cầu bài toán (bài toán vô nghiệm)./.

Giải khuyến khích: Nguyễn Đắc Trung (THPT Yên Phong I, Bắc Ninh), Nguyễn Đức Hạnh, Trần Minh Quân, Vũ Thái Sơn (khối PTCT-Tin, ĐHKHTN-ĐHQG Hà Nội); Phạm Thị Mai Hoà (nữ) (THPT Lương Thế Vinh, Đồng Nai); Nguyễn Xuân Lộc (khối PTCT-Tin, ĐHSP Hà Nội); Nguyễn Đình Hà, Nguyễn Hoài Anh (THPT Hà Nội-amsterdam, Hà Nội); Trần Ngọc Diệp, Phạm Văn Thắng, Nghiêm Xuân Toàn (THPT Nguyễn Huệ, Hà Tây); Đào Văn Huy (THPT Nguyễn Trãi, Hải Dương); Phạm Đức Hiệp, Hoàng Thanh Tùng (THPT NK Trần Phú, Hải Phòng); Đoàn Chiến Thắng (THPT Lê Hồng Phong, Nam Định); Nguyễn Thái Hà (THPT Phan Bội Châu, Nghệ An); Nguyễn Lương Sáng, Nguyễn Đức Trường (khối PTCT-Tin, ĐHSP Vinh); Lê Mạnh Cường, Nguyễn Đình Hoà, Lại Minh Trí (THPT Chuyên Hùng Vương, Phú Thọ); Hoàng Xuân Linh (PTNK, Quảng Bình); Trần Thái An Nghĩa (THPT Chuyên Lê Khiết, Quảng Ngãi); Mai Nguyên Dũng (THPT Chuyên, Thái Nguyên); Nguyễn Khắc Thập (THPT Lam Sơn, Thanh Hoá); Ngô Trung Hiếu, Nguyễn Văn Thắng (THPT Lê Hồng Phong, Tp. Hồ Chí Minh); Trần Huy Lập, Hà Thúc Việt (Quốc học, Huế); Lê Mạnh Hùng (THPT Chuyên, Vinh Phúc).

BẢNG B

Giải nhất: Trần Quốc Tuấn (THPT Chuyên, Bạc Liêu).

Giải nhì: Nguyễn Minh Hải, Trần Quang Vinh (THPT Lê Quý Đôn, Vũng Tàu); Nguyễn Anh Tuấn (THPT Chuyên, Bạc Liêu); Nguyễn Tạ Toàn Khoa (Quốc học, Bình Định); Thiều Quang Trung, Tạ Hoàng Thông (THPT Trần Hưng Đạo, THPT Phan Bội Châu - Bình Thuận); Võ Quốc Việt (THPT Bến Tre, Bến Tre); Hồ Thị Thanh Trang (nữ) (THPT Chuyên Nguyễn Du, Daklak); Ngô Đức Thuận, Ngô Minh Trí (THPT Cao Lãnh, THPT Sa Đéc - Đồng Tháp); Hoàng Việt Cường (THPT Hùng Vương, Gia Lai); Dương Thị Hương (nữ) (THPT Hoàng Văn Thụ, Hoà Bình); Nguyễn Trung Hiến, Nguyễn Thị Liên Chi (nữ), Nguyễn Thái Vinh, Nguyễn Đình Long Vân (nữ), Nguyễn Khánh Minh, Lê Anh Tuấn (THPT Chuyên, Lâm Đồng); Nguyễn Tiến Quang (THPT Lào Cai, Lào Cai); Nguyễn Chí Trung Kiên (THPT Nguyễn Bình Khiêm, Vĩnh Long); Nguyễn Việt Hằng (nữ), Lê Đình Thịnh (THPT Chuyên, Yên Bái).

Giải ba: Lương Đăng Kỳ, Trần Thanh Tuyền (Quốc học, Bình Định); Phạm Lê Phương Duy, Trần Hiếu Nam (THPT Trần Hưng Đạo, Bình Thuận); Phạm Hoài An, Thái Anh Đức, Trần Quốc Nam (THPT Lộc Thuận, THPT Bến Tre -

Bến Tre); Trần Vũ Khanh (THPT Chuyên Phan Ngọc Hiển, Cà Mau); Nguyễn Thị Kim Liên (nữ) (THPT Lý Tự Trọng, Cần Thơ); Trần Viễn Phương (THPT Sa Đéc, Đồng Tháp); Lê Tiến Hoàng, Huỳnh Vy Quang, Nguyễn Minh Tuấn (THPT Hùng Vương, Gia Lai); Nguyễn Kim Cương (THPT Chuyên, Hà Giang); Nguyễn Xuân Bách, Phạm Thanh Nhân (nữ), Đào Mạnh Tùng (THPT Hoàng Văn Thụ, Hoà Bình); Phan Thị Thanh Vân (nữ), Bảo Thuận (THPT Chuyên, Lâm Đồng); Bùi Mạnh Huân (THPT Lào Cai, Lào Cai); Nông Tuấn Linh, Nguyễn Mạnh Tuấn, Bùi Thanh Tuấn, Bùi Đức Trung (THPT Chu Văn An, Lạng Sơn); Trần Quốc Tuấn (THPT Tân An, Long An); Đào Đại Dương (THPT Chu Văn An, Ninh Thuận); Lục Bích Phương (nữ), Chu Tiến Dũng (THPT NK, Sơn La); Lê Thị Ngọc Bích (nữ), Lê Thành Dương, Hoàng Thị Lan Phương (nữ), Tạ Đức Phương, Nguyễn Văn Quảng, Nguyễn Thái Quang, Phạm Đức Sinh, Nguyễn Thanh Tùng (THPT Chuyên, Tuyên Quang); Phan Huy Nhật (THPT Trương Định, Tiền Giang); Nguyễn Thị Mỹ Hạnh (nữ) (THPT Chuyên, Trà Vinh); Võ Huy Minh, Trần Xuân Trường (THPT Nguyễn Bình Khiêm, Vĩnh Long); Triệu Thanh Hải, Nguyễn Khánh, Lê Đình Minh (THPT Chuyên, Yên Bái).

Giải khuyến khích: Liễu Thái Chương (THPT Thoại Ngọc Hầu, An Giang); Nguyễn Hoàng Anh, Trần Văn Thành (THPT Chuyên, Bạc Liêu); Phạm Ngọc Huy (THPT Trần Hưng Đạo, Bình Thuận); Lê Mai Phương (nữ), Nguyễn Ngọc ái Vân (nữ), Nguyễn Văn Tài (THPT Bến Tre, Bến Tre); Nguyễn Thị Hồng Hạnh (nữ), Tăng Thị Hà Yên (nữ) (THPT Chuyên Nguyễn Du, Daklak); Lê Nguyễn Minh Tuấn (THPT Sa Đéc, Đồng Tháp); Hoàng Đức Nguyên (THPT Chuyên, Hà Giang); Nguyễn Mạnh Cường, Hoàng Ngọc Dũng, Nguyễn Lâm Tuyền (THPT Hoàng Văn Thụ, Hoà Bình); Đỗ Lư Công Minh (THPT Châu Thành, Kiên Giang); Vũ Thị Thanh (nữ), Lê Nguyễn Bá Duy (THPT Chuyên, Kon Tum); Nguyễn Đức Cường, Trần Tuấn Anh, Đào Ngọc Mạnh (THPT Lào Cai, THPT Cam Đường, Lào Cai); Nông Quang Duy, Tô Ngọc Long, Hoàng Hồng Mai (nữ), Mông Thanh Thủy (THPT Chu Văn An, Lạng Sơn); Bùi Thị Thiện Mỹ (nữ) (THPT Lê Quý Đôn, Long An); Nguyễn Xuân Thắng (THPT Tô Hiệu, Sơn La); Trần Quốc Trung (THPT Hoàng Lê Kha, Tây Ninh); Nguyễn Quốc Chí, Phạm Trường Huy, Đinh Nguyễn Anh Trung, Nguyễn Lê Quốc Dũng (THPT Chuyên, THPT Nguyễn Đình Chiểu, Tiền Giang); Nguyễn Hải Long (THPT Nguyễn Bình Khiêm, Vĩnh Long); Lục Trí Tuyền (THPT Chuyên, Yên Bái).

BẠN CÓ BIẾT

GIẢI THƯỞNG WOLF

VIỆT TIẾN

(ĐH An Ninh, Hà Nội)

Thế giới có nhiều giải thưởng dành cho các nhà toán học. Giải thưởng Fields là giải thưởng lớn nhất trao cho các nhà toán học xuất sắc không quá 40 tuổi. Có lẽ giải thưởng lớn thứ hai trao cho các nhà toán học là giải thưởng Wolf (không hạn chế tuổi).

Quỹ tài trợ Wolf bắt đầu hoạt động từ năm 1976 với ngân quỹ ban đầu là 10 triệu USD. Toàn bộ số tiền này do dòng họ Wolf cống hiến. Tiến sĩ Ricardo Subirana Lobo Wolf và bà Francisca (vợ ông) là những người thành lập và tài trợ chính cho quỹ. Số tiền trên được đầu tư và dùng thu nhập hàng năm để trao giải, cấp học bổng và trang trải các khoản chi phí cho quỹ.

Mỗi năm có 5 hoặc 6 giải thưởng Wolf được trao cho các nhà khoa học hoặc nghệ sĩ không phân biệt quốc tịch, sắc tộc, tôn giáo, giới tính hoặc quan điểm chính trị, vì những cống hiến phục vụ loài người và vì tình hữu nghị giữa các dân tộc. Các lĩnh vực khoa học được xét trao giải là: nông nghiệp, hóa học, toán học, y học và vật lý. Các lĩnh vực nghệ thuật được xét trao giải luân phiên hàng năm là: âm nhạc, hội họa, điêu khắc và kiến trúc. Giải thưởng cho mỗi lĩnh vực gồm có bằng và 10 nghìn USD.

Những người được giải thưởng Wolf do một hội đồng giải thưởng quốc tế lựa chọn. Hội đồng này gồm 3 hoặc 5 thành viên là những nhà khoa học và chuyên môn nổi tiếng trong mỗi lĩnh vực. Mỗi năm có một hội đồng giải thưởng mới được chỉ định. Công việc của hội đồng, biên bản và nhận xét của mỗi thành viên được giữ hoàn toàn bí mật. Chỉ công bố công khai tên của những người được giải và lý do dẫn đến quyết định của hội đồng. Các quyết định của hội đồng giải thưởng là tối cao và không được thay đổi.

Buổi chính thức giới thiệu giải thưởng được tổ chức tại tòa nhà Quốc hội Israel và đích thân tổng thống nhà nước Israel trao giải thưởng tận tay những người được giải trong một buổi lễ trọng thể.

Tính từ năm 1978 đến năm 1997 đã có 165 người được nhận giải thưởng Wolf, trong số đó có 33 người thuộc lĩnh vực toán học.

Quỹ tài trợ Wolf còn cấp học bổng, trợ cấp cho sinh viên và các nhà khoa học Israel.

Tiến sĩ Ricardo Wolf sinh năm 1887 tại Hanover, Đức, là một trong 14 người con của Moritz Wolf, người trụ cột của cộng đồng Do Thái ở thành phố này. Tôn trọng giáo dục, đạo lý và các giá trị thẩm mỹ là di sản quý giá mà người cha để lại cho các con. Ricardo Wolf đã giữ gìn di sản này trong suốt cuộc sống rất thọ của ông.

Ricardo Wolf tốt nghiệp đại học hóa học ở Đức và trước chiến tranh thế giới lần thứ nhất ông di cư sang Cuba, đất nước này đã trở thành quê hương thứ hai của ông. Năm 1924 ông lấy bà Francisca Subirana, nữ vô địch quần vợt của những năm 1920.

Suốt gần 20 năm Ricardo Wolf làm việc để phát triển quá trình lấy sắt ra từ chất thải của quá trình luyện kim. Cuối cùng ông đã thành công và phát kiến của ông được dùng trong các nhà máy thép trên toàn thế giới. Điều này mang lại cho Ricardo Wolf một nguồn thu nhập lớn.

Ngay từ buổi đầu của cách mạng Cuba, Fidel Castro thường trao đổi thư từ với ông. Năm 1961, theo yêu cầu của tiến sĩ Ricardo Wolf, Fidel Castro cử ông làm đại sứ Cuba ở Israel. Ông giữ chức vụ này cho đến năm 1973, thời kỳ đó Cuba có quan hệ khăng khít với Israel. Sau khi hoàn thành nhiệm vụ ngoại giao của mình, tiến sĩ Ricardo Wolf quyết định ở lại Israel và sống đến cuối đời ở đó.

Quỹ tài trợ Wolf do ông lập ra năm 1975. Đối với tiến sĩ Ricardo Wolf đây là một dự án hoạt động từ thiện vì loài người không phân biệt chủng tộc, điều này không nằm ngoài lẽ sống của ông.

Tháng hai năm 1981 tiến sĩ Ricardo Wolf từ trần tại biệt thự của ông ở Herzlia và gần một tháng sau vợ ông, bà Francisca cũng qua đời.

NHẮN TIN

* Đề bài toán T5/287 trên THPT tháng 5-2001 xin sửa lại như sau: *Đường thẳng EF cắt đường thẳng AH tại K* (thay cho *EF cắt AC tại K* như đã in). Thành thật xin lỗi tác giả và bạn đọc.

* Các bạn có trong danh sách được nhận tặng phẩm trên mục *Toán học muôn màu* và *Câu lạc bộ* mà thay đổi địa chỉ xin gửi địa chỉ chính xác về Tòa soạn. Cảm ơn.

THTT



KÌ THI OLYMPIC TOÁN SINGAPORE 2001

ĐỀ THI CHUNG CHO HỌC SINH CHƯA VÀO ĐẠI HỌC
TỪ 16 TUỔI TRỞ LÊN

Thời gian : 180 phút. Ngày thi : 30 tháng 5 năm 2001
Trả lời tất cả các câu hỏi. Không được sử dụng máy tính

PHẦN A

Mỗi câu trong phần A được 4 điểm

Ở phần A này chỉ cần viết đáp số cho từng câu hỏi

1. Cho $a_1 = 2000$, $a_2 = 2001$ và $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 3$ với $n = 1, 2, 3, \dots$. Tìm giá trị của a_{100} .
2. Tìm số các số nguyên dương có ba chữ số abc thỏa mãn $a \leq b \leq c$.
3. Tìm giá trị của $384\sin 6^\circ \sin 42^\circ \sin 66^\circ \sin 78^\circ$.
4. Mỗi ô vuông trong số 48 ô vuông nhỏ của một tấm bìa chữ nhật 8×6 được tô màu đen hoặc màu trắng và số ô vuông được tô đen trong mỗi hàng và mỗi cột đều là số chẵn. Gọi N là số cách mà tấm bìa hình chữ nhật có thể được tô. Tìm giá trị của $\log_2 N$.
5. Cho a, b là hai số thực. Giả sử rằng phương trình bậc hai $x^2 + ax + b - 2 = 0$ với ẩn số x có một nghiệm thực α sao cho $\alpha \geq 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất có thể được của $100(a^2 + b^2)$.
6. Giả sử x và n là các số nguyên dương sao cho x^4 được biểu diễn là 777 khi viết trong hệ cơ số n . Tìm giá trị nhỏ nhất của n (ví dụ 45 được biểu diễn là 231 trong hệ cơ số 4, vì $45 = 2 \times 4^2 + 3 \times 4 + 1$).
7. Gọi x là số thực thỏa mãn phương trình $\sqrt{4x-7-12\sqrt{x-4}} + \sqrt{4x-16\sqrt{x-4}} =$
 $= \log_1 \left(x - \frac{25}{4} \right)$
Tìm giá trị của $x + \frac{1}{4}$.
8. Có 12 cái hộp rỗng phân biệt được đánh số từ 1 đến 12 tương ứng. Tìm số cách phân chia 8 quả bóng giống nhau vào 12 cái hộp khác nhau đó sao cho tổng số bóng trong các hộp 1, 2 và 3 là chẵn và tổng số bóng trong các hộp 4, 5 và 6 là lẻ.
9. Tìm số các số nguyên N sao cho $1 \leq N \leq 1400$ và $N = [2x] + [4x] + [6x] + [8x]$ với một số thực x nào đó. Ở đây $[a]$ kí hiệu số nguyên lớn nhất $\leq a$.

10. Tìm số nguyên dương nhỏ nhất N sao cho 4 chữ số tận cùng của N^2 là 6004.

PHẦN B

Mỗi câu trong phần B được 15 điểm

Ở phần B này phải trình bày đầy đủ lời giải cho từng câu hỏi

1. Trong hình bình hành $ABCD$, các đường cao hạ từ A xuống BC và CD cắt các đoạn BC và CD tại các điểm E và F tương ứng. Giả sử $AC = 37\text{cm}$ và $EF = 35\text{cm}$. Gọi H là trực tâm $\triangle AEF$. Tìm độ dài của AH bằng cm. Trình bày các bước tính toán. (Nhớ rằng trực tâm của tam giác là giao điểm của các đường cao hạ từ các đỉnh của tam giác).

2. Cho n là một số nguyên dương và cho $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ là n số thực dương sao cho $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = 1$. Hỏi bất đẳng thức sau có đúng không

$$\frac{a_1^4}{a_1^2 + a_2^2} + \frac{a_2^4}{a_2^2 + a_3^2} + \frac{a_3^4}{a_3^2 + a_4^2} + \dots$$
$$\dots + \frac{a_{n-1}^4}{a_{n-1}^2 + a_n^2} + \frac{a_n^4}{a_n^2 + a_1^2} \geq \frac{1}{2n} ?$$

Hãy giải thích.

3. Giả sử có 2001 quả bóng gôn được ghi số từ 1 đến 2001 tương ứng và một số quả trong số đó được đặt trong một cái hộp. Biết rằng hiệu của hai số trên hai quả bóng bất kì trong hộp không phải là 5 và 8. Hỏi có thể có nhiều nhất bao nhiêu quả bóng gôn trong hộp. Hãy giải thích.

4. Một số nguyên dương n được gọi là có tính chất (A) nếu tồn tại một số nguyên dương N sao cho N^2 có thể được viết thành tổng của các bình phương của n số nguyên dương liên tiếp. Hỏi có phải có vô hạn các số nguyên dương có tính chất (A) ? Hãy giải thích. (Ví dụ số $n = 2$ có Tính chất A vì $5^2 = 3^2 + 4^2$).

VŨ KIM THUY

OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN TOÀN QUỐC

PHẠM THẾ LONG

(Tổng thư kí Hội Toán học VN)

Bắt đầu từ năm 1993, ngọn lửa Olympic Toán sinh viên đã được nhóm lên lần đầu tiên tại Trường Đại học Tổng hợp Hà Nội (nay là Trường đại học Khoa học Tự nhiên thuộc Đại học Quốc gia Hà Nội).

Olympic Toán sinh viên toàn quốc lần thứ 9 năm nay do trường Đại học Ngoại thương đăng cai dưới sự đồng bảo trợ về mặt tổ chức của Hội Toán học Việt Nam, Bộ Giáo dục và Đào tạo, Hội Sinh viên Việt Nam. Đây cũng là năm thứ 3 Olympic được tổ chức đồng thời tại 2 khu vực: Hà Nội và Tp. Hồ Chí Minh. Với 35 trường và gần 570 sinh viên dự thi (mỗi trường được cử 2 đội dự thi 2 môn Giải tích và Đại số, số thí sinh chính thức mỗi đội không quá 10 người), Olympic Toán sinh viên lần này đã thu hút số lượng trường và số sinh viên dự thi đông nhất từ trước đến nay. Năm nay đã xuất hiện thêm nhiều gương mặt mới như Đại học An ninh, Học viện Quân Y, Đại học Đà Nẵng, Đại học Cần Thơ, ĐHSP Thái Nguyên... trong đó có cả một trường Cao đẳng là Cao đẳng Sư phạm Hà Nội.

Do một trong những mục đích chính của kỳ thi là khuyến khích, động viên phong trào học toán trong sinh viên, nhất là sinh viên các trường đại học kỹ thuật, kinh tế... nên chương

trình thi đã được cô đọng tới mức tối đa, phạm vi kiến thức giới hạn trong năm thứ nhất các trường đại học nhằm thu hút ngày càng nhiều sinh viên của các trường đại học khác nhau trong cả nước. Theo truyền thống, Olympic năm nay cũng gồm 2 môn thi: Giải tích và Đại số. Nội dung thi môn Giải tích xoay quanh những kiến thức cơ bản về giới hạn, liên tục, vi phân, tích phân hàm một biến. Môn Đại số nhằm kiểm tra những kiến thức cốt lõi về ma trận, định thức, hệ phương trình tuyến tính, giá trị riêng của đa thức đặc trưng của ma trận. Giải thưởng đã được trao riêng cho từng môn thi và, theo thông lệ như các kỳ thi Toán quốc tế, khoảng 50% số sinh viên dự thi sẽ được trao các giải nhất, nhì, ba và khuyến khích theo thứ tự điểm từ cao xuống thấp.

Sự tham gia đông đảo của sinh viên nhiều trường đại học hai miền Nam Bắc cùng sự chuẩn bị chu đáo của cơ sở đăng cai tổ chức - Trường Đại học Ngoại thương - đã làm cho Olympic Toán sinh viên lần này thành công tốt đẹp. Hy vọng ngọn lửa Olympic Toán sinh viên ngày một được toả sáng hơn, lan rộng hơn, thu hút nhiều hơn sự tham gia của các trường đại học trong cả nước và sự quan tâm, khuyến khích, ủng hộ, động viên cả về tinh thần và vật chất của các cơ quan chức năng.

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

BÀI SỐ 43

Problem. Teams $T_1, T_2, \dots, T_n$ take part in a tournament in which every team plays every other team just once. One point is awarded for each win, and it is assumed that there are no draws. Let $s_1, s_2, \dots, s_n$ denote the scores of $T_1, T_2, \dots, T_n$ respectively. Show that, for $1 < k < n$,

$$s_1 + s_2 + \dots + s_n \leq nk - \frac{1}{2}k(k+1).$$

Solution. The teams $T_1, T_2, \dots, T_k$ play $\frac{1}{2}k(k-1)$ games among themselves and $k(n-k)$ games against the other teams $T_{k+1}, T_{k+2}, \dots, T_n$. The score won by $T_1, T_2, \dots, T_k$ for the games among themselves is exactly $\frac{1}{2}k(k-1)$. Therefore, their total score is greatest when they win all the $k(n-k)$ games against the other teams. This implies $s_1 + s_2 + \dots + s_n \leq \frac{1}{2}k(k-1) + k(n-k) = nk - \frac{1}{2}k(k+1)$.

Từ mới :

team	= đội
take part	= tham gia (động từ)
tournament	= cuộc thi đấu
play	= chơi, đấu (động từ)
once	= chỉ một lần (phó từ)
point	= điểm
award	= thưởng (động từ)
win	= trận thắng
assume	= giả sử (động từ)
draw	= trận hòa
denote	= ký hiệu (động từ)
score	= điểm số
respectively	= tương ứng (phó từ)
game	= trận đấu
against	= chống lại (giới từ)
exactly	= chính xác (phó từ)
imply	= suy ra (động từ)

NGÔ VIỆT TRUNG



ĐỀ RA KÌ NÀY

CÁC LỚP THCS

Bài T1/289. Tìm mọi số nguyên n thỏa mãn

$$(n+5)^2 = (4(n-2))^3$$

PHẠM HÙNG
(Hà Nội)

Bài T2/289. Giải phương trình

$$x^2 + \sqrt{2-x} = 2x^2 \cdot \sqrt{2-x}$$

PHẠM CÔNG MINH
(GV THPT Hồng Quang, Hải Dương)

Bài T3/289. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau, trong đó x là số thực :

$$(x^2 + 1)^{2001}$$

$$\left(x^2 + \frac{1}{2}\right) \left(x^2 + \frac{1}{3}\right) \dots \left(x^2 + \frac{1}{2001}\right) (x^2 + 1.2.3 \dots 2001)$$

ĐẶNG THANH HẢI
(GV Học viện Phòng không - Không quân
Sơn Tây, Hà Tây)

Bài T4/289. Cho tam giác ABC vuông cân tại A . Gọi M là trung điểm của BC , G là điểm trên cạnh AB sao cho $GB = 2GA$. Các đường thẳng GM và CA cắt nhau tại D . Đường thẳng qua M vuông góc với CG tại E và cắt AC tại K . Gọi P là giao điểm của DE và GK . Chứng minh rằng :

a) $DE = BC$;

b) $PG = PE$.

THÁI NHẬT PHƯƠNG
(GV THCS Cam Nghĩa, Cam Ranh,
Khánh Hòa)

Bài T5/289. Cho tứ giác lồi $ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và BC , P là giao điểm của AN và BM , Q là giao điểm của DN và CM . Chứng minh rằng :

$$\frac{PA}{PN} + \frac{PB}{PM} + \frac{QC}{QM} + \frac{QD}{QN} \geq 4$$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

HỒ QUANG VINH
(GV khối PTC Toán - Tin ĐHSPT Vinh)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/289. Cho các số nguyên dương $a_1, a_2, \dots, a_n$ ($n \geq 2$) lớn hơn 1. Đặt tích

$$\prod_{i=1}^n (a_i^2 - 1) = A$$

Biết rằng tổng $\sum_{i=1}^n \frac{A}{(a_i^2 - 1)(a_i + 1)}$ là một số tự

nhiên. Chứng minh rằng số $\frac{A}{(a_i^2 - 1)(a_i + 1)}$ cũng là số tự nhiên với mỗi $i = 1, 2, \dots, n$.

LÊ QUANG NĂM
(SV ĐHKHTN-ĐHQG Tp. Hồ Chí Minh)

Bài T7/289. Giải phương trình

$$3^x + 3^{x^2} = 2^x + 4^{x^2}$$

TA MINH ĐỨC
(SV 26G khoa Toán ĐHSPT Hà Nội 2)

Bài T8/289. Cho hai dãy số dương $(x_n), (y_n)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) được xác định bởi :

$$\begin{cases} x_1 = y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ x_{n+1} = \frac{x_n}{4y_{n+1}^2 - 1} \\ y_{n+1} = \frac{y_n}{1 - 4x_{n+1}^2} \end{cases} \text{ với mọi } n = 1, 2, 3, \dots$$

Tìm giới hạn của dãy (x_n) và dãy (y_n) .

KIỀU PHƯƠNG CHI
(Cao học 8 ĐHVinh, Nghệ An)

Bài T9/289. Trên mặt phẳng cho tam giác ABC và một đường thẳng d . Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là hình chiếu (vuông góc) của A, B, C trên đường thẳng d . Gọi A_2, B_2, C_2 là hình chiếu của A_1, B_1, C_1 trên đường thẳng BC, CA, AB tương ứng. Chứng minh rằng các đường thẳng A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 đồng quy.

HA VŨ ANH
(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

Bài T10/289. Cho tứ diện $ABCD$ nội tiếp một mặt cầu tâm O . Gọi M là một điểm nằm trong tứ diện. Các tia AM, BM, CM, DM cắt mặt cầu lần nữa ở các điểm A_1, B_1, C_1, D_1 tương ứng.

Chứng minh rằng :

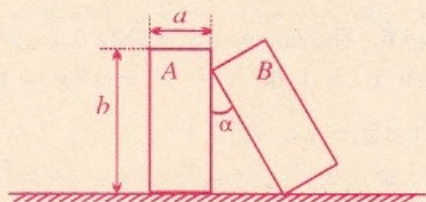
$$\frac{V(A_1B_1C_1D_1)}{V(ABCD)} = \frac{MA_1 \cdot MB_1 \cdot MC_1 \cdot MD_1}{MA \cdot MB \cdot MC \cdot MD}$$

trong đó kí hiệu $V(XYZT)$ là thể tích khối tứ diện $XYZT$.

THÁI VIỆT THẢO
(GV THPT Phan Bội Châu, Vĩnh, Nghệ An)

CÁC ĐỀ VẬT LÝ

Bài L1/289. Hai khối gỗ hình hộp giống nhau A và B đặt trên mặt phẳng ngang như hình vẽ, góc giữa 2 mặt bên là α . Hệ số ma sát trượt giữa 2 khối và mặt phẳng ngang đều là k .

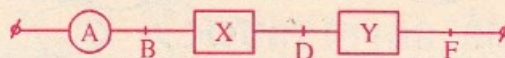


Tìm điều kiện của α theo a , b và k để hệ cân bằng (bỏ qua ma sát giữa hai khối)

NGUYỄN XUÂN QUANG
(GV THPT chuyên Vĩnh Phúc)

Bài L2/289. Một mạch điện xoay chiều như sơ đồ bên. Trong mỗi hộp X và Y chỉ có một linh

kiện hoặc là điện trở, hoặc là cuộn cảm hoặc là tụ điện. Ampe kế nhiệt A trở 1 ampe, $U_{BD} = U_{DF} = 10V$; $U_{BF} = 10\sqrt{3} V$. Công suất tiêu thụ



của đoạn mạch BF là $P = 5\sqrt{6} W$. Hãy xác định linh kiện trong X và Y và độ lớn của các đại lượng đặc trưng của các linh kiện đó. Cho biết tần số dòng điện xoay chiều là $f = 50Hz$.

NGUYỄN QUANG HẬU
(Hà Nội)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/289. Find all integers n satisfying

$$(n+5)^2 = (4(n-2))^3$$

T2/289. Solve the equation

$$x^2 + \sqrt{2-x} = 2x^2 \cdot \sqrt{2-x}$$

T3/289. Find the greatest value of the expression

$$(x^2 + 1)^{2001}$$

$$\frac{\left(x^2 + \frac{1}{2}\right)\left(x^2 + \frac{1}{3}\right) \dots \left(x^2 + \frac{1}{2001}\right)(x^2 + 1.2.3 \dots 2001)}{(x^2 + 1)^{2001}}$$

where x is arbitrary real number.

T4/289. Let ABC be an isosceles right triangle, right at A . Let M be the midpoint of BC , G be the point of BC , G be the point on side AB such that $GB = 2GA$. The lines GM and CA intersect at D . The line passing through M , perpendicular to CG , cuts CG at E and cuts AC at K . The lines DE and GK intersect at P . Prove that :

a) $DE = BC$; b) $PG = PE$

T5/289. Let $ABCD$ be a convex quadrilateral, M and N be the midpoints respectively of AD and BC , P be the point of intersection of AN and BM , Q be the point of intersection of DN and CM . Prove that :

$$\frac{PA}{PN} + \frac{PB}{PM} + \frac{QC}{QM} + \frac{QD}{QN} \geq 4$$

When does equality occur ?

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/289. Let be given positive integers $a_1, a_2, \dots, a_n$ ($n \geq 2$) greater than 1. Put

$$\prod_{i=1}^n (a_i^2 - 1) = A$$

Knowing that the sum $\sum_{i=1}^n \frac{A}{(a_i^2 - 1)(a_i + 1)}$ is a natural number, prove that the numbers $\frac{A}{(a_i^2 - 1)(a_i + 1)}$ are also natural numbers ($i = 1, 2, \dots, n$).

T7/289. Solve the equation

$$3^x + 3^{x^2} = 2^x + 4^{x^2}$$

T8/289. Let be given two sequences of positive numbers $(x_n), (y_n)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) defined by :

$$\begin{cases} x_1 = y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ x_{n+1} = \frac{x_n}{4y_{n+1}^2 - 1} \\ y_{n+1} = \frac{y_n}{1 - 4x_{n+1}^2} \end{cases} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

Find the limits of (x_n) and of (y_n) .

T9/289. In plane, let be given a triangle ABC and a line d . Let A_1, B_1, C_1 be respectively the orthogonal projections of A, B, C on the line d . Let A_2, B_2, C_2 be the orthogonal projections of A_1, B_1, C_1 respectively on the lines BC, CA, AB . Prove that the lines A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 are concurrent.

T10/289. Let be given a tetrahedron $ABCD$ inscribed in a sphere with center O and let M a point inside the tetrahedron. The rays AM, BM, CM, DM cut again the sphere respectively at A_1, B_1, C_1, D_1 . Prove that

$$\frac{V(A_1B_1C_1D_1)}{V(ABCD)} = \frac{MA_1 \cdot MB_1 \cdot MC_1 \cdot MD_1}{MA \cdot MB \cdot MC \cdot MD}$$

where $V(XYZT)$ denotes the volume of tetrahedron $XYZT$.



Bài T1/285. Cho số tự nhiên lẻ p và các số nguyên a, b, c, d, e thỏa mãn các điều kiện: tổng $a+b+c+d+e$ và tổng $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2$ đều chia hết cho p . Chứng minh rằng số $a^5+b^5+c^5+d^5+e^5-5abcde$ cũng chia hết cho p .

Lời giải. Xét đa thức

$$f(x) = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)(x-e).$$

Ta đặt

$$f(x) = x^5 - Ax^4 + Bx^3 - Cx^2 + Dx - abcde \quad (*)$$

với $A = a + b + c + d + e$,

$$B = ab+ac+ad+ae+bc+bd+be+cd+ce+de$$

Lưu ý rằng

$$2B = (a+b+c+d+e)^2 - (a^2+b^2+c^2+d^2+e^2)$$

là bội của p , và do p là số lẻ, cho nên B là bội của p .

Thay $x = a, b, c, d, e$ vào $(*)$ và cộng theo vế, chú ý rằng $f(a) = f(b) = f(c) = f(d) = f(e) = 0$ được:

$$\begin{aligned} & a^5 + b^5 + c^5 + d^5 + e^5 - 5abcde = \\ & = A(a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + e^4) - \\ & \quad - B(a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + e^3) + \\ & \quad + C(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2) - D(a+b+c+d+e) \end{aligned}$$

Do các hệ số $A, B, a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2, a + b + c + d + e$ là bội của p , nên vế trái cũng là bội của p (đpcm).

Nhận xét. Có ít bạn giải được bài toán này, các bạn sau đây có lời giải ngắn gọn tương tự như trên.

Vĩnh Phúc: Trần Thị Tố Linh, 8B, THCS Yên Lạc;
Hà Nam: Vũ Quang Thanh, 9B, THCS Nguyễn Hữu Tiến, Duy Tiên; **Nam Định:** Nguyễn Đức Tâm, 8A7, THCS Trần Đăng Ninh, Tp Nam Định; **Phú Yên:** Nguyễn Kim Duân, 9C, THCS Lương Thế Vinh, Tuy Hòa; **Khánh Hòa:** Nguyễn Tân Việt, 9B, THCS Thái Nguyên, Tp. Nha Trang; **Thanh Hóa:** Trần Thanh Hưng, 9A, THCS Lê Hữu Lập, Hậu Lộc; **Quảng Ngãi:** Phạm Minh Vương, 8/3, THCS Bình Châu, Bình Sơn.

VŨ ĐÌNH HÒA

Bài T2/285. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^5 - x^4 + 2x^2y = 2 & (1) \\ y^5 - y^4 + 2y^2z = 2 & (2) \\ z^5 - z^4 + 2z^2x = 2 & (3) \end{cases}$$

Lời giải. Thấy ngay x, y, z khác 0.

* Nếu $x > 1$ thì $x^5 - x^4 = x^4(x - 1) > 0$

$$\Rightarrow 2x^2y < 2 \Rightarrow y < \frac{1}{x^2} < 1$$

$$\Rightarrow y^5 - y^4 = y^4(y - 1) < 0 \Rightarrow 2y^2z > 2$$

$$\Rightarrow z > \frac{1}{y^2} > 1 \Rightarrow z^5 - z^4 = z^4(z - 1) > 0$$

$$\Rightarrow 2z^2x < 2 \Rightarrow x < \frac{1}{z^2} < 1, \text{ mâu thuẫn.}$$

* Nếu $x < 1$ thì tất cả các bất đẳng thức ở trên cùng đổi chiều nên cũng mâu thuẫn.

* Nếu $x = 1$ thì dễ dàng có $y = 1$ và $z = 1$.

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $x = y = z = 1$.

Nhận xét. 1) Hầu hết các bạn đều giải đúng. Một số

bạn xét hàm $f(t) = \frac{-t^5 + t^4 + 2}{2t^2}$ quá phức tạp. Nhiều bạn xét quá nhiều khả năng.

2) Các bạn lập luận chặt chẽ và giải ngắn gọn là: **Bùi Đăng Lương**, 9B, THCS Bạch Liên, Yên Thành, và **Phan Thị Ngọc Mai**, 8A, THCS Lí Nhật Quang, Đô Lương, **Nghe An**, **Nguyễn Đức Duy**, 8B, THCS Yên Phong, **Bắc Ninh**; **Nguyễn Tiến Việt**, 9¹³, THCS Thái Nguyên, Nha Trang, **Khánh Hòa**; **Phạm Văn Hoàng** và **Trần Thị Sinh**, 8B, THCS Yên Lạc, **Vĩnh Phúc**; **Nguyễn Đức Tâm**, 8A7, THCS Trần Đăng Ninh, **Nam Định**; **Văn Bằng**, 8A, THCS Thạch Thất, **Hà Tây**; **Nguyễn Anh Tuấn**, 9B, THCS Nguyễn Hữu Tiến, Duy Tiên, **Hà Nam**.

3) Xin lưu ý một số lập luận mắc sai lầm:

+ Xét hai trường hợp $x = y = z$ và $x \neq y \neq z \neq x$ (nếu $x = y \neq z$ thì sao?)

+ Xét $x = y = z = 1$ thỏa mãn, còn lại trường hợp $x \neq 1; y \neq 1; z \neq 1$ ($x = 1; y \neq 1; z \neq 1$ thì sao?)

+ Do vai trò bình đẳng nên $x = y = z$ (?)

LTN

Bài T3/285. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{2x^2 + 3y^2}{2x^3 + 3y^3} + \frac{2y^2 + 3x^2}{2y^3 + 3z^3} \leq \frac{4}{x+y}$$

trong đó x, y là các số dương. Đẳng thức xảy ra khi nào?

Lời giải. của Nguyễn Thanh Tùng B, 7A1, THCS Láng Thượng, Hà Nội.

$$\frac{2x^2 + 3y^2}{2x^3 + 3y^3} + \frac{2y^2 + 3x^2}{2y^3 + 3z^3} \leq \frac{4}{x+y} \quad (1)$$

Đặt $\frac{x}{y} = t$. Do $x, y > 0 \Rightarrow t > 0$, ta có

$$(1) \Leftrightarrow \frac{2t^2 + 3}{2t^3 + 3} + \frac{2 + 3t^2}{2 + 3t^3} \leq \frac{4}{t+1}$$

GIẢI BÀI KÌ TRƯỚC

$$\Leftrightarrow (t+1)(12t^5+13t^3+13t^2+12) \leq 4(6t^6+13t^3+6)$$

$$\Leftrightarrow 12(t^6-t^5-t+1) - 13t^2(t^2-2t+1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 12(t-1)^2(t^4+t^3+t^2+t+1) - 13t^2(t-1)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (t-1)^2[12(t^4+t^3+t^2+t+1) - 13t^2] \geq 0 \quad (2)$$

Nhưng ta có

$$12(t^4+t^3+t^2+t+1) - 13t^2$$

$$= 12t^4 + 12t(t-1)^2 + 11t^2 + 12 > 0$$

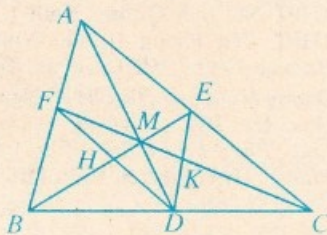
Vậy (2) đúng với mọi x, y dương. Từ đó suy ra
(1) đúng với mọi x, y dương. Đẳng thức ở (2),
(1) xảy ra khi $t = 1 \Leftrightarrow x = y$.

Nhận xét. Có rất nhiều lời giải đúng gửi đến tòa soạn.

TỔ NGUYỄN

Bài T4/285. Cho tam giác ABC với điểm M nằm trong tam giác. Các tia AM, BM, CM cắt các cạnh BC, CA, AB tương ứng tại D, E, F . Gọi K là giao điểm của DE và CM , gọi H là giao điểm của DF và BM . Chứng minh rằng các đường thẳng AD, BK, CH đồng quy.

Lời giải. Áp dụng định lý Menelaus cho $\triangle AMC$ (với bộ ba điểm thẳng hàng E, K, D) và $\triangle BMC$ (với bộ ba điểm thẳng hàng F, H, D) ta có:



$$\frac{KM}{KC} \times \frac{EC}{EA} \times \frac{DA}{DM} = 1, \quad \frac{BH}{HM} \times \frac{DM}{DA} \times \frac{FA}{FB} = 1$$

Suy ra

$$\frac{KM}{KC} = \frac{EA}{EC} \times \frac{DM}{DA}, \quad \frac{BH}{HM} = \frac{FB}{FA} \times \frac{DA}{DM} \quad (1)$$

Áp dụng định lý Xêva cho $\triangle ABC$ với bộ ba đường thẳng đồng quy AD, BE, CF :

$$\frac{CD}{BD} \times \frac{BF}{FA} \times \frac{AE}{EC} = 1.$$

$$\text{Từ đó } \frac{CD}{BD} = \frac{FA}{BF} \times \frac{EC}{AE} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có } \frac{KM}{KC} \times \frac{BH}{HM} \times \frac{CD}{BD} = 1.$$

Vậy theo phân đảo của định lý Xêva BK, CH, MD đồng quy tức AD, BK, CH đồng quy.

Nhận xét. Giải tốt bài này có các bạn: **Phú Thọ:** Lại Trường Xuân, 8A2, THCS Giấy, Phong Châu; **Hải Dương:** Lê Đình Huy, 8A, THCS Nguyễn Trãi, Nam Sách; **Hải Phòng:** Phạm Anh Minh, 8A, THPT NK Trần Phú; **Nam Định:** Trần Trung Kiên, Nguyễn Đăng

Hợp, 9A2, THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên; **Nghệ An:** Bùi Danh Nam, 8B, THCS thị trấn Nam Đàn; **Nguyễn Thị Nhung,** 9H, THCS thị trấn Quỳnh Hợp; **Hà Tĩnh:** Lê Minh Quang, 9A, THCS Phan Huy Chú, Thạch Hà.

VŨ KIM THỦY

Bài T5/285. Cho tam giác ABC . Gọi MN, PR, QS là hình chiếu vuông góc của AB, BC, CA lên các đường phân giác ngoài của các góc C, A, B tương ứng. Gọi S, r lần lượt là diện tích và bán kính đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$. Chứng minh rằng $MN + PR + QS \geq 6\sqrt[3]{Sr}$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Lời giải.

(của bạn Nguyễn Tiến Việt, 9/13, THCS Thái Nguyên, Nha Trang, Khánh Hòa)

Gọi AD là đường phân giác trong của $\triangle ABC$

và AP, AR là đường phân giác ngoài. Dễ thấy $PR \perp AD$. Đặt $AB = c, AC = b, BC = a, 2p = a + b + c$.

Giả sử $AC \geq AB$. Từ B kẻ $BE \perp CR$ tại E, BE cắt AC tại M . Dễ thấy $AB = AM$ và $CM = AC - AB = b - c$ (nếu $AB > AC$ thì kẻ $CF \perp BP$)

Áp dụng định lý Pitago được:

$$PR^2 = BE^2 = BC^2 - CE^2 \geq BC^2 - CM^2 =$$

$$= a^2 - (b - c)^2 = 4(p - b)(p - c) \text{ hay}$$

$$PR \geq 2\sqrt{(p - b)(p - c)}. \text{ Tương tự có}$$

$$MN \geq 2\sqrt{(p - a)(p - b)},$$

$$QS \geq 2\sqrt{(p - a)(p - c)}, \text{ do đó}$$

$$MN + PR + QS$$

$$\geq 2(\sqrt{(p - a)(p - b)} + \sqrt{(p - b)(p - c)} + \sqrt{(p - c)(p - a)})$$

$$\geq 6\sqrt[3]{(p - a)(p - b)(p - c)} = 6\sqrt[3]{\frac{S^2}{p}} =$$

$$= 6\sqrt[3]{S \cdot \frac{S}{p}} = 6\sqrt[3]{Sr} \text{ (đpcm)}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$(p - a)(p - b) = (p - b)(p - c) = (p - c)(p - a) \Leftrightarrow$$

$$a = b = c \Leftrightarrow \triangle ABC \text{ đều.}$$

GIẢI BÀI KÌ TRƯỚC

Nhận xét: 1) Một số bạn làm cách khác dài hơn hoặc phải sử dụng các công thức phụ. Chẳng hạn: Kẻ BH và CK vuông góc với đường phân giác trong AD. Ta có PR

$$= AP + AR = BH + CK = \frac{2S}{AD} \quad (*)$$

Thay công thức độ dài đường phân giác $AD = \frac{2\sqrt{bc}}{b+c} \sqrt{p(p-a)} \leq \sqrt{p(p-a)}$ vào (*) được

$$PR \geq \frac{2S}{\sqrt{p(p-a)}}. \text{ Tương tự, ta có } MN, PQ, RS \geq$$

$$\frac{8S^3}{\sqrt{p^3(p-a)(p-b)(p-c)}} = \frac{8S^2}{p}. \text{ Từ đó}$$

$$MN + PR + QS \geq 3\sqrt[3]{MN \cdot PR \cdot QS} \geq 6 \sqrt[3]{\frac{S^2}{p}} = 6\sqrt[3]{S_r}.$$

2) Các bạn sau có lời giải tương đối gọn:

Bác Ninh: Nguyễn Chí Bảo, THCS Đại Lai, Gia Bình; **Nam Đình:** Trần Trung Kiên, Nguyễn Đăng Hợp, Lương Hữu Long, 9A2, THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên; **Hải Dương:** Lê Đình Huy, 8A, THCS Nguyễn Trãi, Nam Sách, Phạm Huy Hoàng, 9/3, THCS Lê Quý Đôn, Tp Hải Dương; **Hà Tây:** Phan Lạc Dũng, 8A, THCS Thạch Thất, Nguyễn Trung Nghĩa, 9B, THCS Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hòa; **Thanh Hóa:** Trương Nho Đại, Trần Thanh Hưng, 9A, THCS Lê Hữu Lập, Hậu Lộc.

VIỆT HẢI

Bài T6/285. Tìm số nguyên dương k sao cho dãy số sau gồm toàn số nguyên: $a_1 = 1, a_{n+1} = 5a_n + \sqrt{ka_n^2 - 8}$ với mọi $n = 1, 2, 3, \dots$

Lời giải. (của Nguyễn Tuấn Dương, lớp 11A Toán, ĐHKHTN-ĐHQG Hà Nội)

Ta có: $a_2 = 5 + \sqrt{k-8}$.

Đặt $\sqrt{k-8} = t$ ($t \in \mathbb{N}$) và khi đó

$$a_3 = 5(5+t) + \sqrt{(t^2+8)(5+t)^2-8}$$

Để $a_3 \in \mathbb{Z}$ thì phải có

$$f(t) = (t^2+8)(5+t)^2 - 8 = q^2 \quad (q \in \mathbb{N}).$$

Ta có: $f(t) = t^4 + 10t^3 + 33t^2 + 8t + 192$

$$(t^2 + 5t + 4)^2 < f(t) < (t^2 + 5t + 14)^2 \text{ và } f(t) : 2$$

$$\Rightarrow q = t^2 + 5t + v \quad (5 \leq v \leq 13, v \in \mathbb{N}).$$

Suy ra $v \in \{6, 8, 10, 12\}$. Thử trực tiếp ta được $v = 8$ và $q = t^2 + 5t + 8 \Rightarrow t = 4 \Rightarrow k = 24$.

Ngược lại, với $k = 24$ thì

$$a_{n+1} = 5a_n + \sqrt{24a_n^2 - 8}$$

$$\Rightarrow a_{n+1}^2 - 10a_n a_{n+1} + a_n^2 + 8 = 0 \quad (*)$$

Thay n bởi $n+1$ ta có:

$$a_{n+2}^2 - 10a_{n+1}a_{n+2} + a_{n+1}^2 + 8 = 0 \quad (**)$$

Trừ theo vế (*) và (**) ta được

$$(a_n - a_{n+2})(a_{n+2} + a_n - 10a_{n+1}) = 0 \quad (***)$$

Do $\{a_n\}$ là dãy tăng nên $a_{n+2} = 10a_{n+1} - a_n$ với $a_1 = 1, a_2 = 9$.

Do vậy dãy $\{a_n\}$ gồm toàn số nguyên $\Leftrightarrow k=24$

Nhận xét. Có thể tổng quát hóa bài toán như sau: "Cho $a, b \in \mathbb{Z}$. Tìm số nguyên k sao cho dãy sau gồm toàn số nguyên:

$$a_1 = 1; a_{n+1} = aa_n + \sqrt{ka_n^2 - b}; n = 1, 2, 3, \dots$$

Đa số các bạn gửi bài đều có lời giải đúng. Các bạn sau đây có lời giải ngắn gọn hơn cả:

Nguyễn Hoàng Hải, 10CT, THPT Lê Hồng Phong, Phạm Tuấn Anh, 12T, ĐHKHTN Tp HCM; Phạm Quang Nhật, Phạm Văn Hùng, 11A, Chuyên toán ĐHS, Hà Nội; Vũ Đình Đầu, 11T, THPT Trần Phú, Hải Phòng; Lê Văn Bắc, 8A, THCS Quảng Lĩnh, Thanh Hóa; Đặng Ngọc Mạnh, Phạm Văn Hùng, 11CT, THPT Nguyễn Trãi, Bùi Bắc Phong, 10A12, THPT Hồng Quang, Hải Dương; Hà Nhật Sang, 11T, THPT NK tỉnh Quảng Bình; Ngô Quý Hòa, 10A1, THPT Yên Phong I, Bắc Ninh; Hà Ngọc Quỳnh Hương, 11T1, THPT Lương Thế Vinh, Đồng Nai; Dương Minh Sơn, 9B, THCS Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hòa, Hà Tây; Nguyễn Xuân Trường, Nguyễn Việt Linh, Phan Bá Lê Biền, Cao Việt Dũng, Nguyễn Đức Phùng, THPT chuyên Vĩnh Phúc

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T7/285. Xét dãy số (x_n) ($n = 1, 2, 3, \dots$) được xác định bởi:

$$x_1 = a \geq 1, x_{n+1} = \frac{x_n^2 - 2\{x_n\}^2}{[x_n]^2}, \text{ trong đó } [x] \text{ là}$$

phần nguyên của x và $\{x\}$ là phần thập phân của x . Chứng minh rằng dãy số (x_n) có giới hạn khi n tăng vô hạn và tìm giới hạn đó.

Lời giải. (của Trần Võ Huy, 10T, THPT NK Tp Hồ Chí Minh và một số bạn khác).

Ta xét hai trường hợp sau:

Trường hợp 1: a là số nguyên. Trong trường hợp này $x_n = 1 \quad \forall n \geq 2$.

Nói riêng $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$.

Trường hợp 2: Số a không nguyên. Ta có

$$x_2 = \frac{([a] + \{a\})^2 - 2\{a\}^2}{[a]^2} = 2 - \left(1 - \frac{\{a\}}{[a]}\right)^2$$

thuộc khoảng $(1, 2)$ vì $0 < \frac{\{a\}}{[a]} < 1$

GIẢI BÀI KÌ TRƯỚC

Chúng minh bằng quy nạp theo n được

$1 < x_n < 2$ với mọi $n = 2, 3, 4, \dots$

Từ đó $\forall n \geq 2$

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 - 2(x_n - 1)^2}{1}$$

Suy ra $2 - x_{n+1} = (2 - x_n)^2 = \dots$

$$= (2 - x_2)^{2^{n-1}} \rightarrow 0 \text{ do } 0 < 2 - x_2 < 1$$

Vậy khi a không nguyên thì $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$.

Nhận xét. Tòa soạn nhận được lời giải của hơn 100 bạn, hầu hết các bạn giải đúng. Do không lập luận cẩn thận một số bạn chỉ có một kết luận $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ hoặc $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$ (trong mọi trường hợp!).

Các bạn sau có lời giải tốt: **Bắc Ninh:** Lại Đức Khải, Nguyễn Văn Thảo, 10T, THPT NK Hàn Thuyên; **Hà Nội:** Đinh Ngọc Thắng, Nguyễn Hữu Thuận, 10A, ĐHKHTN - ĐHQG, Đặng Đình Khánh, 10A1, ĐHSPT; **Ninh Bình:** Trịnh Mỹ Châu, 10T, THPT Lương Văn Tụy; **Thanh Hóa:** Trần Anh Quang, Lê Hữu Tuấn, 10T1, THPT Lam Sơn; **Nghệ An:** Phạm Thái Khánh Hiệp, Trương Bình Nguyên, 10A, ĐHSPT Vinh; **Quảng Ngãi:** Nguyễn Văn Thắng, Phạm Văn Trung, 10T, THPT Lê Khiết; **Phú Yên:** Phan Thành Nam, 10T2, THPT chuyên Lương Văn Chánh, v.v...

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T8/285. Tìm tất cả các giá trị thực của x sao cho bất đẳng thức sau đúng với mọi số không âm a, b, c

$$[a^2 + b^2 + (x-1)c^2] \times [a^2 + c^2 + (x-1)b^2] \times [b^2 + c^2 + (x-1)a^2] \leq (a^2 + bcx)(b^2 + acx)(c^2 + abx)$$

Lời giải. (của bạn Phan Thành Nam, 10T2, THPT chuyên Lương Văn Chánh, Phú Yên).

Cho $a = b, c = 0$ ta có

$$2x^2a^6 \leq xa^6 \Leftrightarrow 2x^2 \leq x \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \frac{1}{2}.$$

Đảo lại giả sử $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$. Không giảm tổng quát giả sử $a \geq b \geq c \geq 0$.

Đặt $b^2 + c^2 + (x-1)a^2 = A, a^2 + xbc = A_1$

$$a^2 + c^2 + (x-1)b^2 = B, b^2 + xac = B_1$$

$$a^2 + b^2 + (x-1)c^2 = C, c^2 + xab = C_1$$

Dễ thấy $B, C, A_1, B_1, C_1 \geq 0$

Nếu $A \leq 0$ thì BĐT ở đề bài đúng nên chỉ cần xét trường hợp $A > 0$.

Ta có $AB - C_1^2 = (a-b)^2[xc^2 + (x-1)(a+b)^2] \leq 0$ vì $xc^2 \leq (1-x)c^2 \leq (1-x)(a+b)^2$

$$\text{Vậy } AB \leq C_1^2 \quad (1)$$

Tương tự

$$AC - B_1^2 = (a-c)^2[xb^2 + (x-1)(a+c)^2] = k \leq 0 \quad (2)$$

$$BC - A_1^2 = (b-c)^2[xa^2 + (x-1)(b+c)^2] \quad (3)$$

$$\text{Ta sẽ chứng minh } BC - A_1^2 \leq -k \quad (4)$$

hay về phải của (3) $\leq -k$

Thật vậy vì $0 \leq x \leq 1-x \Rightarrow xa^2 \leq (1-x)(a+c)^2, xb^2 \leq (1-x)(b+c)^2$. Do đó $xa^2 + (x-1)(b+c)^2 \leq (1-x)(a+c)^2 - xb^2$

Hơn nữa $a-c \geq b-c \geq 0$

$$\text{mà } (1-x)(a+c)^2 \geq (1-x)b^2 \geq xb^2$$

$$\text{do đó } (b-c)^2[xa^2 + (x-1)(b+c)^2] \leq (a-c)^2[(1-x)(a+c)^2 - xb^2] = -k$$

Thành thử từ (2), (4) có

$$\begin{aligned} AC \cdot BC &\leq (B_1^2 + k)(A_1^2 - k) = \\ &= A_1^2 B_1^2 + kA_1^2 - kB_1^2 - k^2 \leq A_1^2 B_1^2 \end{aligned}$$

(do $A_1 \geq B_1 \geq 0 \geq k$)

Nhân (1) và (5) theo từng vế ta có đpcm.

$$\text{Đáp số: } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right].$$

Nhận xét. Đây là một bài toán khó về mặt kĩ thuật. Phần lớn các lời giải gửi đến đều làm sai. Ngoài lời giải ngắn gọn và đẹp đẽ ở trên, các bạn sau cũng có lời giải đúng: Nguyễn Tuấn Dương, 11A, ĐHKHTN, Kim Đình Thái, 11A, ĐHSPT Hà Nội; Phạm Tuấn Anh, 12T, PTNK - ĐHQG TP. Hồ Chí Minh.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

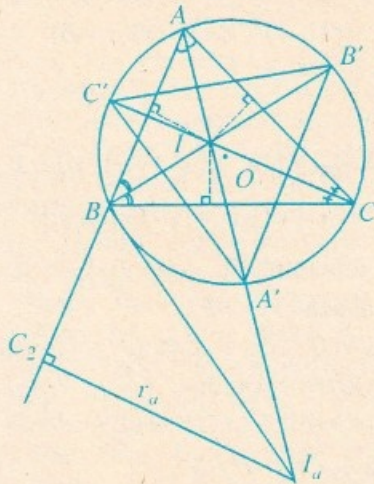
Bài T9/285. Gọi I và O lần lượt là tâm các đường tròn nội tiếp và ngoại tiếp của một tam giác ABC . Các tia AI, BI và CI cắt lại đường tròn tâm O tương ứng ở A', B' và C' . Gọi r_a, r_b, r_c lần lượt là bán kính đường tròn bàng tiếp của tam giác ABC ứng với các góc A, B, C . Gọi r'_a, r'_b, r'_c lần lượt là bán kính đường tròn bàng tiếp của tam giác $A'B'C'$ ứng với các góc A', B', C' . Chứng minh rằng:

$$r'_a + r'_b + r'_c \geq r_a + r_b + r_c (*)$$

Lời giải. (của Phạm Trung Hiếu, 11A1, PTCT-T, ĐHSPT Vinh, Nghệ An)

Gọi p là nửa chu vi tam giác ABC ; R là bán kính đường tròn ngoại tiếp (chung) của hai tam

GIẢI BÀI KÌ TRƯỚC



giác ABC và $A'B'C'$. Trên hình vẽ ta kí hiệu I_a là tâm và C_2 là tiếp điểm trên tia AB của đường tròn bàng tiếp của tam giác ABC ứng với góc A thì: $I_a C_2 = r_a$ và $AC_2 = p$.

Ta có hệ thức: $r_a = p \operatorname{tg} \frac{A}{2}$ (1)

Vì $A + B + C = \pi$, áp dụng định lí hàm số sin và các công thức góc nhân đôi, công thức biến đổi tổng thành tích, tích thành tổng, ta được:

$$\begin{aligned} r_a &= p \operatorname{tg} \frac{A}{2} = R(\sin A + \sin B + \sin C) \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \\ &= R \left(2 \sin^2 \frac{A}{2} + 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{B-C}{2} \right) \\ &= R \left(2 \sin^2 \frac{A}{2} + 2 \cos \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2} \right) \\ \Rightarrow r_a &= R(1 - \cos A + \cos B + \cos C) \quad (2) \end{aligned}$$

Chúng minh tương tự, ta được:

$$r_b = R(1 + \cos A - \cos B + \cos C) \quad (3)$$

$$\text{và } r_c = R(1 + \cos A + \cos B - \cos C); \quad (4)$$

Cộng theo vế các đẳng thức (2), (3) và (4), ta được:

$$r_a + r_b + r_c = R(3 + \cos A + \cos B + \cos C); \quad (5)$$

Đối với tam giác $A'B'C'$ nội tiếp đường tròn (O, R) ta cũng có hệ thức tương tự:

$$r_a' + r_b' + r_c' = R(3 + \cos A' + \cos B' + \cos C') \quad (5')$$

Đối chiếu (5) và (5') ta thấy rằng BĐT (*) cần chứng minh tương đương với BDĐT (**) sau đây:

$$\cos A + \cos B + \cos C \leq \cos A' + \cos B' + \cos C' \quad (**)$$

Nhưng dễ thấy rằng: $\hat{A}' = \frac{1}{2}(\hat{B} + \hat{C})$,

$$\hat{B}' = \frac{1}{2}(\hat{C} + \hat{A}) \text{ và } \hat{C}' = \frac{1}{2}(\hat{A} + \hat{B}) \quad (6)$$

Từ đó suy ra: $\cos A' = \sin \frac{A}{2}$, $\cos B' = \sin \frac{B}{2}$

$$\text{và } \cos C' = \sin \frac{C}{2}; \quad (7)$$

Mặt khác,

$$\begin{aligned} \cos A + \cos B &= 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} \leq \\ &\leq 2 \cos \frac{A+B}{2} = 2 \sin \frac{C}{2} \quad (8) \end{aligned}$$

Chúng minh tương tự, ta được hai BDĐT nữa:

$$\cos B + \cos C \leq 2 \sin \frac{A}{2} \quad (9)$$

$$\cos C + \cos A \leq 2 \sin \frac{B}{2} \quad (10)$$

Cộng theo vế các BDĐT (8), (9), (10) rồi đối chiếu với các hệ thức (7) ta thu được BDĐT (**) cần tìm, và do đó được (*) (đpcm).

Dấu đẳng thức ở (*) xảy ra khi và chỉ khi dấu đẳng thức xảy ra ở (**). Muốn vậy, các BDĐT (8), (9) và (10) đều trở thành đẳng thức, nghĩa là:

$$\cos \frac{A-B}{2} = \cos \frac{B-C}{2} = \cos \frac{C-A}{2} = 1$$

và do đó: $A - B = B - C = C - A = 0$, hay là $A = B = C$ và tam giác ABC là một tam giác đều.

Nhận xét. 1) Trong số 260 lời giải gửi đến tòa soạn, chỉ có lời giải nêu trên đây của bạn Hiếu vừa ngắn gọn nhất, vừa chỉ sử dụng kiến thức cơ bản trong SGK để đến được kết quả cần tìm.

Một số bạn khác cũng có lời giải ngắn gọn nhưng có sử dụng hệ thức sau đây giữa các góc của một tam giác ABC bất kì:

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$$

2) Cũng có nhiều bạn sử dụng hoặc chứng minh hệ thức sau giữa các bán kính r, R, r_a, r_b và r_c của các đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp và bàng tiếp các góc A, B và C của một tam giác ABC bất kì:

$$r_a + r_b + r_c = 4R + r$$

Từ đó suy ra BDĐT (*) cần chứng minh tương đương với BDĐT sau đây:

$$r' \geq r \quad (***)$$

trong đó r' là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác $A'B'C'$.

GIẢI BÀI KÌ TRƯỚC

Tuy nhiên, các bạn này đều phải sử dụng (không chứng minh lại) hệ thức sau đây liên hệ giữa r, R và các góc của tam giác ABC :

$$r = 4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

Đáng tiếc, có một bạn đã huy động cả hệ thức Ôle ($OI^2 = R^2 - 2Rr$) để chứng minh BĐT (***) mà vẫn giải sai. Chú ý rằng: đường thẳng Ôle của tam giác chứa trọng tâm, trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp và tâm đường tròn Ôle chứ không chứa tâm đường tròn nội tiếp.

3) Các bạn sau đây cũng có lời giải tương đối ngắn gọn:

Hà Nội: Trần Anh Tuấn, 10B Toán, ĐHKHTN – ĐHQG Hà Nội; **Hải Dương:** Tạ Ngọc Anh, 11A₆, THPT Chí Linh, Lưu Văn Hiến, Nguyễn Xuân Hòa, 10T, THPT chuyên Nguyễn Trãi; **Hải Phòng:** Vũ Đình Đẩu, 11T, THPT NK Trần Phú; **Ninh Bình:** Nguyễn Quang Vinh, 8C, THCS Trương Hán Siêu, Tx. Ninh Bình; **Nghe An:** Lê Trung Kiên, 10N, THPT Quỳnh Lưu I; **Quảng Trị:** Nguyễn Hồng Phong, 11D, THPT Hải Lăng; **Quảng Ngãi:** Phạm Văn Trung, 10T, Nguyễn Thiện Tâm, 11A₄; **Phú Yên:** Phùng Trọng Thực, 10T₂, THPT chuyên Lương Văn Chánh; **Tp. Hồ Chí Minh:** Phạm Tuấn Anh, 12T, PTNK – ĐHQG Tp HCM.

4) Ngoài ra một số bạn đã đề xuất và chứng minh đúng một số BĐT khác có liên quan đến r_a, r_b, r_c và r_a', r_b', r_c' . Chẳng hạn:

$$r_a' r_b' r_c' \geq r_a r_b r_c \quad (\text{Phạm Trung Hiếu, Nguyễn Xuân Hòa, Phạm Văn Trung}).$$

$$r_a' r_b' + r_b' r_c' + r_c' r_a' \geq r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a \quad (\text{Hiếu, Trung})$$

$$\frac{1}{r_a'} + \frac{1}{r_b'} + \frac{1}{r_c'} \leq \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} \quad (\text{Trung})$$

Riêng bạn Lưu Văn Hiến còn tổng quát hóa bài toán T9/285 như sau:

Gọi A' là điểm trên cung $\widehat{BC}$ không chứa A của đường tròn (ABC) sao cho $\widehat{BAA'} = k\widehat{BAC}$ (với k là một số hữu tỉ, và $0 < k \leq 1$); $B' \in \widehat{CA}$ không chứa B ; $C' \in \widehat{AB}$ không chứa C sao cho: $\widehat{CBB'} = k\widehat{CBA}$ và $\widehat{ACC'} = k\widehat{ACB}$. Thế thì ta cũng có BĐT (*) như bài toán đã nêu ra.

Khi $k = \frac{1}{2}$, ta thu được kết quả đã nêu trong bài toán T9/285. Sử dụng phương pháp chứng minh quy nạp, bạn Hiến đã chứng minh đúng BĐT sau đây:

$$\frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n \sin \alpha_k \right) \leq \sin \left(\frac{\sum_{k=1}^n \alpha_k}{n} \right); \quad (\forall k, 0 < \alpha_k < \frac{\pi}{2})$$

Sau đó áp dụng vào bài toán mà bạn đề xuất, đặt $k = \frac{x}{y}$ ($x < y$ và $x, y \in \mathbb{N}^*$) suy ra rằng:

$$\sin \frac{(1-k)A + kB}{2} \geq (1-k) \sin \frac{A}{2} + k \sin \frac{B}{2}$$

Từ đó, sử dụng BĐT Côsi, cuối cùng chứng minh được BĐT:

$$\sin \frac{(1-k)A + kB}{2} \cdot \sin \frac{(1-k)B + kC}{2} \cdot \sin \frac{(1-k)C + kA}{2} \geq \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}.$$

rồi suy ra BĐT (*) cần tìm.

NGUYỄN ĐĂNG PHÁT

Bài T10/285. Cho 5 điểm phân biệt A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 không đồng phẳng nhưng cùng nằm trên một mặt cầu. Chứng minh rằng các mặt phẳng, mỗi mặt đi qua trọng tâm của tam giác có các đỉnh là 3 trong 5 điểm nói trên và vuông góc với đường thẳng nối hai điểm còn lại, thì đồng quy.

Lời giải. (dựa theo lời giải của các bạn Cao Việt Dũng, Hoàng Xuân Quang, 11A₁, THPT chuyên Vĩnh Phúc). Ta kí hiệu như sau:

O là tâm của mặt cầu nói trong đề bài, G là trọng tâm của hệ năm điểm A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 .

G_{ij} là trọng tâm của tam giác nói trong đề bài và không nhận A_i, A_j là đỉnh ($1 \leq i \neq j \leq 5$),

(P_{ij}) là mặt phẳng qua G_{ij} và vuông góc với $A_i A_j$ ($1 \leq i \neq j \leq 5$), H_{ij} là trung điểm đoạn $A_i A_j$ ($1 \leq i \neq j \leq 5$). Với mọi i, j sao cho $1 \leq i \neq j \leq 5$ ta có:

$$\begin{aligned} & (\overrightarrow{OG} - 3\overrightarrow{OG_{ij}}) \cdot \overrightarrow{A_i A_j} = \\ & = \left(\sum_{1 \leq k \leq 5} \overrightarrow{OA_k} - \left(\sum_{1 \leq k \leq 5} \overrightarrow{OA_k} - (\overrightarrow{OA_i} + \overrightarrow{OA_j}) \right) \right) \cdot \overrightarrow{A_i A_j} \\ & = (\overrightarrow{OA_i} + \overrightarrow{OA_j}) \cdot \overrightarrow{A_i A_j} = 2\overrightarrow{OH_{ij}} \cdot \overrightarrow{A_i A_j} = 0 \quad (1) \end{aligned}$$

vì $OH_{ij} \perp A_i A_j$.

Lấy điểm X sao cho $\overrightarrow{OX} = \frac{3}{5} \overrightarrow{OG}$, ta có:

$$\begin{aligned} & 5\overrightarrow{OG} - 3\overrightarrow{OG_{ij}} = 5\overrightarrow{OG} - 3(\overrightarrow{XG_{ij}} - \overrightarrow{XO}) = \\ & = (5\overrightarrow{OG} - 3\overrightarrow{OX}) - 3\overrightarrow{XG_{ij}} = 3\overrightarrow{G_{ij}X} \quad (2) \end{aligned}$$

Từ (1), (2) suy ra: $\overrightarrow{G_{ij}X} \cdot \overrightarrow{A_i A_j} = 0$

$$\Rightarrow G_{ij}X \perp A_i A_j \Rightarrow X \in (P_{ij})$$

GIẢI BÀI KÌ TRƯỚC

Từ đó suy ra các mặt phẳng (P_{ij}) đồng quy tại điểm X.

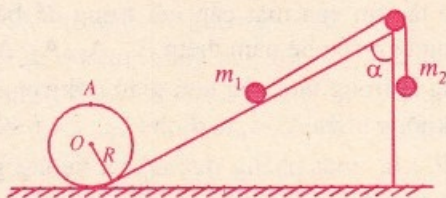
Nhận xét. 1) Ngoài lời giải bằng vectơ như đã nêu trên, một số bạn đã cho lời giải thuần túy bằng phương pháp tổng hợp. Bạn Nguyễn Tiến Linh, 10T, THPT NK Trần Phú, **Hải Phòng** đã cho một lời giải tốt theo hướng này. Một số bạn khác đã cho những lời giải mà trong đó có sự phối hợp của hai phương pháp: vectơ và tổng hợp. Đặc biệt có vài bạn còn dùng phương pháp hình học giải tích.

2) Bạn Phạm Văn Hùng, 11A1, PTCTT-ĐHSP Hà Nội cùng một số bạn khác đã đề xuất bài toán tổng quát cho trường hợp n điểm

3) Các bạn sau đây có lời giải tốt: **Bắc Ninh:** Đỗ Đức Lâm, 12T, THPT NK Hàn Thuyên; **Quảng Bình:** Hà Nhật Sang, 11T, THPT NK Quảng Bình; **Vĩnh Phúc:** Nguyễn Xuân Trường, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **ĐHSP Hà Nội:** Kim Đình Thái, 11A1, PTCTT; **ĐHQG Tp Hồ Chí Minh:** Trần Việt Cường, 11T, PTNK; **ĐHQG Hà Nội:** Ngô Quốc Anh, 12A, PTTC-Tin; **Bạc Liêu:** Nguyễn Văn Tâm, 11A1, THPT Giá Rai...

NGUYỄN MINH HÀ

Bài L1/285. Máng nghiêng gồm phần thẳng và phần hình tròn bán kính R như hình vẽ: góc



$\alpha = 60^\circ$. Hai quả cầu $m_1 = 1,2\text{kg}$, $m_2 = 0,8\text{kg}$ nối với nhau bằng sợi dây vắt qua ròng rọc cố định. Lúc đầu m_2 cách sàn một khoảng $h = 5,2\text{m}$ và m_1 ở thấp hơn m_2 một khoảng $h_0 = 1,6\text{m}$. Sau khi 2 quả cầu bắt đầu chuyển động được 2 giây thì m_2 đột ngột bị tuột khỏi dây nối. Bỏ qua mọi ma sát, khối lượng dây, ròng rọc và kích thước của vật. Lấy $g = 10\text{m/s}^2$. Tính trị số lớn nhất của R để quả cầu m_1 không rời máng khi chuyển động.

Lời giải. Ta kí hiệu T là lực căng của dây. Chọn chiều dương hướng lên phía trên, dọc theo phần thẳng của máng, và áp dụng định luật II Niuton cho m_1 và m_2 ta có:

$$T - m_1 g \cos \alpha = m_1 a; \quad m_2 g - T = m_2 a$$

$$\Rightarrow a = \frac{m_2 g - m_1 g \cos \alpha}{m_1 + m_2} = 1\text{m/s}^2.$$

Ta thấy $a > 0$ nên m_1 đi lên; sau 2s, m_1 đi lên dọc theo phần thẳng của máng được một đoạn

$$x = \frac{at^2}{2} = 2\text{m}, \text{ nghĩa là, theo phương thẳng đứng}$$

$$\text{độ cao của } m_1 \text{ tăng thêm: } \Delta h = x \cos \alpha = 1\text{m}.$$

$$\text{Vận tốc của } m_1 \text{ khi dây đứt: } v = at = 2(\text{m/s}).$$

Chọn gốc thế năng tại chân máng, cơ năng của m_1 khi dây đứt là:

$$E = \frac{m_1 v^2}{2} + m_1 g(h - h_0 + \Delta h) = 57,6 (\text{J}).$$

Muốn m_1 không rời khỏi máng, m_1 phải lên tới đỉnh A của phần tròn của máng, muốn vậy phải có:

$$\frac{m_1 v_1^2}{R} \geq m_1 g, \text{ hay } v_1^2 \geq Rg \quad (1), \text{ với } v_1 \text{ là vận tốc}$$

của m_1 tại A. Mặt khác, theo định luật bảo toàn

$$\text{cơ năng: } \frac{m_1 v_1^2}{2} + m_1 g \cdot 2R = E \quad (2).$$

$$\text{Từ (1) và (2) rút ra: } R \leq \frac{2E}{5mg} = 1,92(\text{m}).$$

Nghĩa là $R_{\max} = 1,92\text{m}$.

Nhận xét. Các em có lời giải đúng và gọn:

Hà Nội: Trần Xuân Anh, B₀, 10A, ĐHKHTN – ĐHQG Hà Nội, Phùng Thúy Nhung, 10 Lí 1, Hà Nội Amsterdam, Nguyễn Thúy Nhung, 10A2, PTCTT-ĐHSP Hà Nội; **Hải Phòng:** Trần Đức Trường, 12 Lí, THPT NK Hải Phòng; **Thừa Thiên – Huế:** Vũ Phương Nam, 10 chuyên Lí, THPT Quốc học Huế; **Tuyên Quang:** Nguyễn Trung Hiếu, 12C2, THPT chuyên Tuyên Quang; **Yên Bái:** Vũ Lê Duy, 10P, THPT Nguyễn Huệ, Nguyễn Thị Nam, 10A2, Phan Kim Hoa, 10A1, THPT chuyên Yên Bái; **Hà Tĩnh:** Lê Đức Đạt, Nguyễn Văn Đức, 10 Lí, THPT NK tỉnh Hà Tĩnh; **Phú Thọ:** Nguyễn Kim Ngọc, Vũ Văn Trung, 10B1, THPT chuyên Hùng Vương, Bùi Tiến Linh, 10A5, Hoàng Tuấn Anh, 12H, THPT Công nghiệp Việt Trì; **Hà Tây:** Trần Văn Chính, 11 Lí 2, THPT Nguyễn Huệ, Hà Đông; **Quảng Ngãi:** Nguyễn Lê Hồng Sinh, 11A7, Trần Duy Khiêm, 10 Lí, Nguyễn Văn Thắng, 10T, THPT chuyên Lê Khiết; **Quảng Nam:** Huỳnh Nguyễn Toán, 10/4, THPT Trần Quý Cáp, Hội An, Trần Đình Hùng, 10/1, THPT Đỗ Đăng Truyền, Đại Lộc; **Tiền Giang:** Trần Tấn Lộc, 12 Lí, Huỳnh Minh Thảo, 10 Toán, THPT chuyên Tiền Giang; **Đồng Nai:** Ma Nam, 11 Lí 1, THPT Lương Thế Vinh, Biên Hòa; **Nam Định:** Trần Vũ Diệu, 10 Toán 1, THPT Lê Hồng Phong; **Bắc Ninh:** Nguyễn Ngọc Tuấn, 11 Lí, THPT Hàn Thuyên, Ngô Quý Hoàn, 10A, THPT Yên Phong I; **Hưng Yên:** Đào Ngọc Thủy, 11 Lí, THPT NK Hưng Yên; **Hải Dương:** Nguyễn Anh Ngọc, 10A1, THPT chuyên Nguyễn Trãi, Hoàng Thao, 10A1, THPT Tuệ Tĩnh,

GIẢI BÀI KÌ TRƯỚC

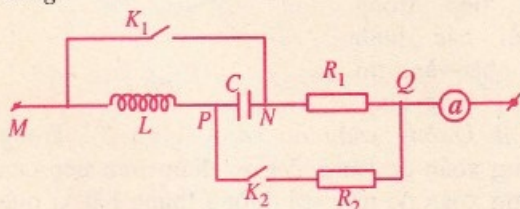
Cầm Giàng: **Thanh Hóa:** Vũ Thị Nga, 10F, THPT Lam Sơn; **Nghệ An:** Hồ Quốc Huy, 10A7, Đặng Hồng Lê, 10 Lí, Nguyễn Thị Thu Hiền, Nguyễn Quốc Việt, Phạm Cung Sơn, Nguyễn Việt Hùng, Lê Đình Nam, 10A3, Hồ Việt Hùng, K28 Lí, THPT Phan Bội Châu, Vinh, Bùi Song Toàn, 10M, THPT Đô Lương; **Vinh Phúc:** Lương Anh Tài, 10A3, Trần Bá Bách, 11A2, Dương Quốc Huy, Dương Mạnh Cường, Trần Minh Khuê, 11A3, Kiều Ngọc Thanh, 10B3, Dương Ngọc Quang, 11B2, THPT chuyên Vinh Phúc, Nguyễn Văn Dũng, 11A8, THPT Ngô Gia Tự, Lập Thạch

MAI ANH

Bài L2/285. Cho một mạch điện như sơ đồ bên: $R_1 = 10\Omega$, $C = 100\mu F$, cuộn dây thuần cảm có độ tự cảm L ; $R_a \approx 0$; $u_{MQ} = 100\sqrt{2} \sin 100\pi$ (V). Tìm R_2 và L , biết rằng ampe kế đều chỉ 10A khi:

- khóa K_1 và K_2 đều mở
- khóa K_1 đóng, K_2 mở.

Tìm số chỉ ampe kế khi khóa K_1 và K_2 đều đóng.



Hướng dẫn giải. $Z_C = \frac{100}{\pi}$ (Ω). Khi khóa K_1 và K_2 mở, tổng trở của mạch bằng: $Z = \frac{U}{I} = \frac{100}{10} = 10$; mặt khác $Z = \sqrt{R_1^2 + (Z_L - Z_C)^2}$, với $R_1 = 10\Omega$. Suy ra $Z_L = Z_C = \frac{100}{\pi}$ (Ω) và $L = \frac{Z_L}{\omega} = \frac{1}{\pi^2} \approx 0,1$ (H). Khi khóa K_1 , K_2 đều đóng do $Z_L = Z_C$ nên $I_L = I_C \Rightarrow \vec{I}_L = -\vec{I}_C \Rightarrow \vec{I}_2 = \vec{I}_L + \vec{I}_C = \vec{0}$, nghĩa là không có dòng điện qua R_2 , do đó số chỉ ampe kế bây giờ là: $I_a = I_1 = \frac{U_{MQ}}{R_1} = 10A$. Ta thấy trong cả 3 trường hợp đều không có dòng điện qua R_2 , như vậy các kết quả trên là đúng với mọi giá trị của R_2 (!).

Nhận xét. Các em có lời giải gọn và đúng:

Tiền Giang: Trần Tấn Lộc, 12 Lí, THPT chuyên Tiền Giang; **Nghệ An:** Hồ Việt Hùng, K28 Lí, THPT Phan Bội Châu, Vinh; **Hà Nội:** Nguyễn Hữu Thuận, B₀10A, ĐHKHTN – ĐHQG Hà Nội; **Quảng Ngãi:** Nguyễn Lê Hồng Anh, 11A7, THPT Lê Khiết; **Hải Phòng:** Trần Đức Trường, 12 Lí, THPT NK Trần Phú; **Đồng Nai:** Nguyễn Kim Huy, Ma Nam, Trần Hữu Hiếu, 11 Lí 1, THPT chuyên Lương Thế Vinh, Biên Hòa.

MAI ANH

Kết quả NHỮNG CON SỐ ĐẸP (Tiếp bài 3)

If $(100*a + 10*b + c = a*a*a + b*b*b + c*c*c)$ then

Writeln ('a = ', a, 'b = ', b, 'c = ', c);

end;

edn;

end;

Readln;

End.

Kết quả chạy chương trình là 153; 370 ; 371 ; 407.

Bạn **Trần Đức Phương**, K24E Toán Tin, ĐHSPT Hà Nội II còn giải quyết một loạt bài toán tương tự: "Tìm số $x_1x_2...x_n$ thỏa mãn: $x_1x_2...x_n = x_1^n + x_2^n + ... + x_n^n$ với $n \geq 3$; $n \in \mathbb{N}$ " và cho kết quả:

* $n = 4$: 1634 ; 8208 ; 9474

* $n = 5$: 54748 ; 92727 ; 93084

* $n = 6$: 548834

* $n = 7$: 1741725 ; 4210818 ; 9800817 ; 9926315

* $n = 8$: 24678050 ; 24678051 ; 88593477

* $n = 9$: 146511208; 472335975; 534494836 ; 912985153

* $n = 10$: 4679307774

Các bạn **Nguyễn Thanh Thủy**, 10E, trường Dân tộc nội trú Tân Kỳ, Nghệ An; **Trần Trung Dũng**, 9A, THCS Định Công, Yên Định, Thanh Hóa; **Nguyễn Đức Việt**, xóm chợ Khu, xã Xuân Vinh, Thọ Xuân, Thanh Hóa; **Trần Đăng Ngọc**, khu tập thể quân nhân, tổ 7B, miền 1A, phường Trường Thi, Tp. Nam Định; **Ngô Ngọc Hưng**, 11A6, THPT Lê Hoàn, Thọ Xuân Thanh Hóa đã phát hiện thêm một lí thú để tìm ra các con số đẹp: "Nếu lấy một số tự nhiên bất kì và tính tổng các lập phương các chữ số, tiếp tục tính tổng các lập phương các chữ số của kết quả, cứ thế cho đến khi nào dừng lại, thì sẽ dừng lại ở các con số 1, 407, 153, 370, 371 hoặc đi vào chu kì $919 \rightarrow 1459, 135 \rightarrow 244 ; 55 \leftrightarrow 250 \leftrightarrow 133 \leftrightarrow 55 ; 16 \leftrightarrow 127 \leftrightarrow 252 \leftrightarrow 16$. Trong toán học, người ta gọi những chu kì tuần hoàn này là những "hố đen" không thoát ra được.

Cảm ơn các bạn đã có nhiều suy nghĩ về bài toán giải trí rất thú vị này.

NGỌC MAI

21

TOÁN HỌC VÀ ĐỜI SỐNG

ĐƯỜNG XOẮN ỐC VÀNG

"Hãy đo tất cả những gì có thể
đo được và thậm chí cả những
cái không thể đo được"

GALILÊO GALILÊ

Tiếp theo bài "Tỉ lệ vàng trong hội họa" xin giới thiệu với các bạn về "Đường xoắn ốc vàng trong hội họa".

Trước hết mời các bạn thưởng thức bức tranh sơn dầu nổi tiếng *Thiếu nữ bên hoa huệ* do họa sĩ Tô Ngọc Vân vẽ năm 1943. Trong màu trắng phớt xanh, phớt hồng, cô gái nhìn hơi nghiêng, đầu ngả trên cánh tay đang ngắm hoa. Dáng mềm mại của cô gái được tôn thêm bằng tư thế đặc biệt của hai tay: Cánh tay trái vòng qua đầu, đặt hồ lên mái tóc; cánh tay phải co tự nhiên, bàn tay hơi khum, ngón tay đỡ lấy cánh hoa nâng niu, gượng nhẹ. Gương mặt cô gái như phảng phất một nỗi buồn man mác. Màu xanh ở các sắc độ cùng với trắng ngả xanh gây cho người xem cảm giác hơi buồn, lạnh. Hai bông huệ to (huệ tây - loa kèn), nổi bật bởi màu trắng tinh khiết như mang theo hương thơm thoang thoảng cùng cái thanh tao, huyền diệu của loài hoa này. Toàn bộ bức tranh như thâm thì kể với người xem về một cô gái trong trắng, thơ ngây nhưng cũng đầy ưu tư, day dứt trước cuộc sống.

Trước Tô Ngọc Vân, và cả sau này, các họa sĩ vẽ thiếu nữ với hoa rất nhiều, nhiều bức rất đẹp - như các bức của Trần Văn Cẩn, Nguyễn Sáng, Mai Trung Thứ v.v... nhưng không có một thiếu nữ trong tranh nào có tư thế lạ như thiếu nữ trong tranh bên hoa huệ của Tô Ngọc Vân.

Hình dáng khác thường này có lẽ liên quan đến *Đường xoắn ốc vàng*.

Đường xoắn ốc là đường vạch trên mặt phẳng của một chất điểm chuyển động xa dần điểm gốc trên một tia, theo một quy tắc nhất định, khi chính tia này cũng quay quanh điểm gốc đó.

Nếu chất điểm chuyển động xa dần gốc theo hàm số mũ: $r = ke^{s\varphi}$ (k, s là tham số) thì ta sẽ có đường xoắn ốc lôgarit. Đường xoắn ốc này do nhà toán học Pháp Đêcác (Descartes) tìm ra vào năm 1638, nó có tính chất kì diệu: Dù bạn phóng to hay thu nhỏ đường xoắn ốc lôgarit thì hình dạng của nó không hề thay đổi - cũng như ta không thể phóng to hay thu nhỏ một góc vậy.

TRONG HỘI HỌA

PHÙNG HỒNG KỖN
(Hà Nội)

Nhà toán học Thụy Sĩ Đanôli (Danoly) rất thích thú với đường xoắn ốc lôgarit, ông đã cho làm trên mộ của ông một tấm bia có đường xoắn ốc lôgarit và dòng chữ: "Eadem mutata resurgo" có nghĩa là: "Ta sẽ lấy nguyên hình dạng cũ (hình 1).



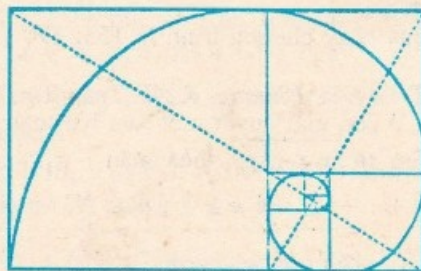
Hình 1

Khi đường xoắn lôgarit đi qua 3 trong số 4 đỉnh của các hình chữ nhật vàng liên tiếp trong chuỗi các hình chữ nhật vàng thì đường cong được

gọi là *Đường xoắn ốc vàng* (hình 2). Trong đường xoắn ốc vàng, 3 giao điểm liên tiếp của đường xoắn ốc này với đường thẳng bất kì qua gốc tạo thành 2 đoạn thẳng tỉ lệ với nhau theo tỉ lệ vàng.

Bây giờ chúng ta cùng tìm hiểu bố cục kì lạ của bức tranh *Thiếu nữ bên hoa huệ*.

Trên bức tranh, tay hãy vạch một đường cong tự nhiên theo cơ thể cô gái và qua các điểm: một ở nhụy bông hoa bên phải, một ở đài nụ



Hình 2

CHÚC MỪNG GS. NGUYỄN THỨC HÀO.... (Tiếp hì 4)

... Thừa thầy, có lẽ hạnh phúc lớn lao của một người thầy là khi học trò của mình thành đạt. Đối với thầy, học trò không phải chỉ giới hạn là người trực tiếp học Toán với thầy, mà còn là tất cả những học sinh trường ĐHSP Vinh khi thầy là hiệu trưởng. Không ai trong họ tự dám cho mình là người thành đạt, nhưng cái tập thể học trò đó của Thầy, có quyền tự hào rằng họ rất xứng đáng ở sự trông đợi của Thầy..."

Kết thúc bài phát biểu PGS. Văn Như Cương đọc một bài thơ Đường mừng NGND GS Nguyễn Thức Hào. Chúng tôi xin mời bạn đọc xa gần cùng họa bài thơ này và gửi về tòa soạn.

MỘT THỜI ĐỂ NHỚ

Mới đó mà Thầy đã chín mươi
Thì ra thời khắc chẳng ngừng trôi.
Nghệ An ngày ấy bom cày đất,
Thanh Hóa năm nao đạn xé trời
Hiệu trưởng nhiều kì đầu có nán
"Cảm tình" mấy khóa dễ gì thôi?
Học trò lứa ấy về hưu hết.
Gặp lại Thầy Cô : Nhớ một thời !

CÁC BÀI HỌA

MỪNG THẦY

Vàng son một khối vẹn mười mười,
Chín chục xuân kia, quá vội trôi.
Vách nửa Quỳnh Văn giăng gió biển,
Nhà tranh Ấn Độ đón sao trời.
Đa môi, với nước, công không giảm,
Tóc bạc, vì dân, việc chẳng thôi.
Ngọc sáng ngàn năm ngời ánh tỏa,
Quang trong soi bóng sáng muôn thời

PHẠM NGỌC BỘI
(Khoa Toán, ĐH Vinh)

THƯỚC NGỌC

Kính chúc Thầy sang tuổi chín mươi,
Đẹp đời nghề giáo chẳng ngừng trôi.
Thời xưa Quốc học tròn danh tiết,
Thủa ấy trường Vinh vẹn đạo trời.
Vạn thế môn sinh yêu quý mãi,
Trăm đời bạn hữu nhớ không thôi.
Quang trong để lại ngày thêm sáng,
Thước ngọc Thầy gieo tỏa một thời

TẠ QUANG HẢI
(ĐH Vinh)



Hình 3

cong xuống, một ở đầu ngón tay phải, và điểm cuối cùng ở trung tâm bố cục có ý nghĩa nhất của bức tranh đó là nhụy bông hoa ở giữa. Đường cong vừa tạo ra chính là Đường xoắn ốc vàng (Golden Spiral) (hình 3).

Chính bố cục xoắn ốc vàng đã tạo nên hiệu quả thẩm mỹ của tác phẩm. Tính xoắn ốc của đường cong cho ta cảm nhận tâm trạng ưu tư, day dứt của cô gái; còn Tỷ lệ vàng là tỉ số quy định độ mở của đường xoắn ốc đó cho ta cảm giác hài hòa, cân đối của bức tranh mặc dù tư thế của cô gái có thể nói là hiếm thấy.

Chúng ta không biết khi vẽ bức tranh Thiếu nữ bên hoa huệ, họa sĩ Tô Ngọc Vân có hình dung ra đường xoắn ốc vàng không nhưng đường xoắn ốc vàng trên bức tranh giúp ta cảm thụ bức tranh một cách đầy đủ hơn và do đó thấy được sâu hơn vẻ đẹp của tác phẩm.



CUỘC CHƠI ĐAU THIÊN NIÊN KỶ

Quá nhiều bạn nhận ra chân dung của GS. TSKH Hà Huy Khoái (Viện trưởng Viện toán học Việt Nam). Ưu thế nghiêng hẳn về các bạn sinh viên các trường Đại học ở Huế vì các bạn vừa được giao lưu với giáo sư vào dịp cuối tháng 4. Bạn Nguyễn Văn Hạnh, đội 13, An Lộc, Bình Trị, Bình Sơn, Quảng Ngãi không những đoán trúng tên, trúng tuổi 55 của giáo sư lại đoán đúng cả người chụp ảnh (vì người chụp ảnh cũng tham gia cuộc giao lưu thú vị này).

Ngoài bạn Hạnh xin trao thưởng cho các bạn đoán đúng 1000%:

- 1) Hà Chí Công (chuyển qua bác Nguyễn Tấn, Bảo hiểm Xã hội huyện Nghĩa Hành, Quảng Ngãi)
- 2) Lê Văn Hùng, Toán 3A, ĐHSP Huế
- 3) Đặng Thị Hải Yến, 88/2 Phan Bội Châu, Huế.
- 4) Phạm Đăng Minh, Toán 1A, ĐHSP Huế
- 5) Nguyễn Thu Phương, 5/62 Nguyễn Du, Tp. Nam Định, 10A, THPT Nguyễn Khuyến, Nam Định.
- 6) Bùi Thị Nga, 137A Bà Triệu, Huế.

Bạn Hạnh còn tâm sự: "Lần đầu tiên được nghe bài giảng của GS. Hà Huy Khoái, em mới cảm nhận được một năng lực sư phạm tuyệt vời của thầy. Xin bái phục và xin tôn thầy là ĐẠI SU PHỤ!"

Cảm ơn các bạn, nào hãy tiếp tục với cuộc chơi kì này nhé!

CLB.



**Kết quả:
SƠ HỎ
GÌ KHÔNG?**

Có bạn "kết tội" oan cho lời giải: Làm gì có $\{x_n\}$ gồm các số vô tỉ mà $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ hữu tỉ (!).

Giả sử p_i là số nguyên dương thứ i không phải là số chính phương thì ta có $\{x_n\}$ với $x_n = \frac{1}{\sqrt{p_n}}$ gồm các số vô tỉ

$(x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}; x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}; x_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}; \dots)$ mà $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$

hữu tỉ. Một thí dụ khác: $x_n = \frac{2n\sqrt{2}}{n^2}$ vô tỉ nhưng $\{x_n\} \rightarrow 1$. Vậy "căn bệnh" của lời giải ở đâu? Đó chính là lập luận: " $f(x_n)$ hữu tỉ, suy ra $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ là số hữu tỉ"! Thật vậy, nhiều dãy số gồm các số hữu tỉ nhưng giới hạn lại là số vô tỉ,

chẳng hạn $\{x_n\}$ với $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ hữu tỉ nhưng

$\{x_n\} \rightarrow e$ là số vô tỉ, hoặc $x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots$

$+\frac{1}{n+n}$ hữu tỉ nhưng $\{x_n\} \rightarrow \ln 2$ vô tỉ.

Lời giải đúng của bài toán này như thế nào? Trong tay KIHIVI đang có 3 lời giải của bài toán này, nhưng ... xin treo giải thưởng cho bạn nào có lời giải đúng và hay nhất! Nào các bạn gửi gấp về cho KIHIVI và ghi rõ ngoài phong bì là: "Gửi gấp cho KIHIVI" nhé! Lần này thật sự chưa khen được ai. Tiếc quá!

KIHIVI

HƯỚNG DẪN ĐÚNG HAY SAI?

Trong cuốn sách "Hướng dẫn ôn thi tốt nghiệp THCS năm học 2000-2001 - môn Toán" có hướng dẫn giải bài toán: "Với giá trị nào của x thì

$A = \frac{1}{\sqrt{x(1-\sqrt{x})}}$ đạt giá trị nhỏ nhất" như sau:

A nhỏ nhất khi $\sqrt{x}(1-\sqrt{x})$ đạt giá trị lớn nhất.

Đặt $t = \sqrt{x}$ ta có $t(1-t) = -t^2 + t = -(t^2 - t)$

$$= -\left(t^2 - t + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) = -\left[\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right]$$

với $t \geq 0$ và $t \neq 1$

Để thấy rằng $-\left[\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right]$ lớn nhất khi

$\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$ nhỏ nhất, khi đó $t = \frac{1}{2}$ hay $\sqrt{x} = \frac{1}{2}$.

Từ đó tính được $x = \frac{1}{4}$; $A = 4$. Vậy giá trị nhỏ nhất của A là 4.

Theo các bạn, hướng dẫn trên đúng hay sai? Sai ở đâu? Giải đúng phải như thế nào?

Cảm ơn phát hiện của thầy giáo Nguyễn Phước, trường THCS Kim Long, thành phố Huế và bạn Hoàng Tuấn Đức, lớp 9, trường THCS Lê Lợi, Vinh, Nghệ An

KIHIVI

MÀU NÀO CHO HỢP

Cứ tưởng các bạn "hoa mắt" bởi 5 màu đan xen nhau thì khó mà nhận ra được logic của sự bố trí các màu.

Ài ngờ, bạn Nguyễn Đức Thao, 7A, THCS Lê Quý Đôn, Bim Sơn, Thanh Hóa

đã nêu ra 19 cách lí luận khác nhau để xếp đúng 4 màu vào 4 ô trống như hình bên. Cách đơn giản nhất là các bạn cứ đi lần lượt các ô ở mỗi hàng từ trái sang phải, theo thứ tự từ trên xuống dưới sẽ thấy sự "tuần hoàn" của các màu. Nhiều bạn còn nhận xét được: các ô cùng màu được bố trí thành đường đi của quân mã trên bàn cờ.

Tất cả đều đúng, nhưng chỉ khen được các nhà vô địch về số cách lí luận

Sau bạn Nguyễn Đức Thao là các bạn: Trần Cảnh Tùng, 10 Tin, THPT NK Hưng Yên, Nguyễn Thế Anh, Phương Mỹ, Mỹ Hưng, Thanh Oai, Hà Tây, Thùy Trang, tổ 50, An Cư, Hải Bắc, quận Sơn Trà, Tp. Đà Nẵng, Phan Thành Việt, 6D, THCS Lương Thế Vinh, thị xã Tuy Hòa, Phú Yên.

NGỌC MAI



Kết quả : NHỮNG CON SỐ ĐẸP

Nhiều bạn, tuy không nói ra được lời giải, nhưng cho thêm 3 số đẹp như số 153 là:

$$370 = 3^3 + 7^3 + 0^3$$

$$371 = 3^3 + 7^3 + 1^3$$

$$407 = 4^3 + 0^3 + 7^3$$

Một số bạn trình bày lời giải khá phức tạp (có một vài lời giải sai nên không đưa ra những con số đẹp).

Các bạn Trương Phước Giang, 10T, THPT Bến Tre, Bến Tre; Lê Đăng Tâm, 11C, THPT Đông Hà, Quảng Trị; Nguyễn Quang Tùng, 9H, THCS Trung Vương, Hà Nội đã "giải quyết" khá đơn giản nhờ sự "cần cù" của máy tính qua ngôn ngữ lập trình Pascal.

Program Tìm số ;

Var a, b, c : Tinteger

Begin

For a : = 1 to 9 do

For b : = 0 to 9 do

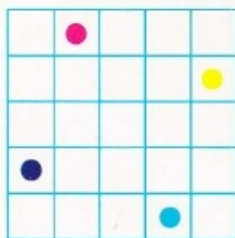
For c : = 0 to 9 do (Xem tiếp trang 23)

CUỘC THI VUI HÈ 2001

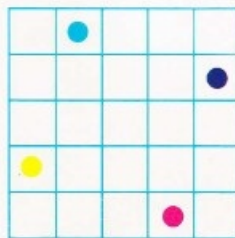
ĐỀ THI VÒNG THỨ HAI

Bài 1. CHUYỂN QUÂN

Trên một bàn cờ như hình 1 có 4 quân cờ Đỏ, Vàng, Lam, Tím. Mỗi quân cờ có thể chuyển (một



Hình 1



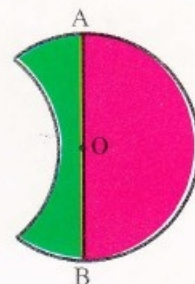
Hình 2

bước) từ ô này sang ô trống khác theo đường chéo của hình chữ nhật 3 x 4 ô hoặc 4 x 3 ô. Hỏi cần ít nhất là bao nhiêu bước để chuyển 4 quân từ hình 1 sang hình 2 và hãy chỉ ra cách chuyển.

Bài 2. VƯỜN HOA

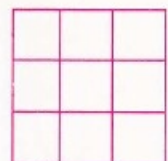
Một khu vườn hình trăng khuyết tạo bởi hai cung của hai đường tròn bằng nhau (xem hình). Một con đường nhỏ đi từ A đến B qua tâm O của hình tròn chia vườn thành hai phần: nửa hình tròn bên

phải trồng hoa, phần bên trái trồng rau. Biết tổng độ dài đường dạo quanh vườn và đường AB là 348m. Hỏi diện tích trồng hoa là bao nhiêu mét vuông?



Bài 3. ĐIỂN SỐ

Hãy điền đủ các số 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256 vào các ô vuông của hình bên sao cho tích các số theo các hàng ngang, hàng dọc và đường chéo đều bằng nhau.



Hạn nhận bài là không chậm hơn ngày 31.8.2001 (căn cứ vào dấu bưu điện). Kết quả cuộc thi sẽ công bố trên THIT số 292 ra ngày 15.10.2001. Phía trên mỗi bài giải, bạn cần ghi đầy đủ địa chỉ nơi ở và địa chỉ lớp, trường, huyện, tỉnh hoặc cơ quan mình. Ngoài phong bì cần ghi rõ:

DỰ THI VUI HÈ

Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ

187 phố Giảng Võ,

Hà Nội

CHÚC MỪNG GIÁO SƯ NGUYỄN THỨC HÀO

THƯỢNG THỌ 90



Sáng 1.7.2001 tại Hà Nội, các cán bộ giáo viên trường ĐH Vinh, ĐHSPT Hà Nội 1, các cựu sinh viên Khóa 1, 2 Khoa Toán, Khoa Văn, các cựu học sinh Chuyên Toán ĐHSPT Vinh đã tổ chức buổi gặp gỡ mừng Nhà giáo Nhân dân GS. Nguyễn Thức Hào thượng thọ 90 tuổi.

PGS Văn Như Cương, học trò cũ của GS Nguyễn Thức Hào đã thay mặt các thế hệ học trò phát biểu chúc mừng thầy học của mình. Dưới đây chúng tôi xin trích đăng một số đoạn trong bài phát biểu này.

"... Thầy Nguyễn Thức Hào là một nhà giáo lão thành, đã cống hiến cả cuộc đời cho sự nghiệp giáo dục của đất nước ta. Thầy quy tụ được những đức tính cao đẹp nằm trong một chữ Thầy đơn giản, mà nhân dân ta bao giờ cũng tôn vinh, như là một biểu tượng của một Trí tuệ cao, một Nhân cách lớn, một Tâm hồn trong sáng...

Thầy bước vào nghề dạy học lúc 23 tuổi tại Trung học Khải Định Huế, đó là vào năm 1935. Sau Cách mạng tháng Tám 1945, thầy vừa dạy học tại trường Khải Định, vừa giữ chức vụ Giám đốc Vụ Trung học Trung bộ, thành viên Hội đồng Học chính của Bộ Quốc gia Giáo dục. Tháng 8 năm 1946 thầy rời Huế chuyển hẳn ra Thủ đô, nhận chức Tổng thư ký kiêm Quyền Giám đốc Đại học Khoa học Hà Nội.

... Chỉ vài tháng sau tiếng súng đầu tiên trường kì kháng chiến, tại một miền quê của tỉnh Nghệ, đã ra đời một trường Đại học khá lạ lùng, không thể có ở bất cứ nơi đâu trên thế

giới: trường chỉ có một lớp, một thầy và 5 sinh viên. Đó là Khóa 1. Các khóa 2, 3, 4 về sau mỗi khóa có trên 20 sinh viên... Trong lịch sử ngành giáo dục Đại học của nước Việt Nam dân chủ cộng hòa, cái nhà thờ họ bé nhỏ của cụ Nguyễn Thức Phi phải được xếp là giảng đường đầu tiên... Từ năm 1951 đến 1954, trường Dự bị Đại học, rồi trường Sư phạm cao cấp được mở ra ở vùng tự do liên khu 4, và thầy được cử là thành viên của ban Giám đốc.

Hòa bình lập lại, miền Bắc được giải phóng, thầy trở về Hà Nội, dạy ở trường đại học Khoa học, và sau đó làm hiệu trưởng trường ĐHSPT Hà Nội.

Giai đoạn từ 1959 đến 1974 có lẽ là thời kì đáng ghi nhớ trong cuộc đời hoạt động của thầy. Đó là thời gian thầy được cử làm Hiệu trưởng trường ĐHSPT Vinh, trường ĐHSPT đầu tiên không đặt tại Hà Nội. Mọi công việc lại bắt đầu từ chấm xuất phát với biết bao công việc bộn bề và khó khăn. Trong 15 năm ấy một nửa thời gian là lo xây dựng ngôi trường từ đồng cỏ nát của thành Vinh qua cuộc kháng chiến chống Pháp, nửa sau là từ già ngôi trường vừa mới xây xong để sơ tán về vùng nông thôn của tỉnh Nghệ, rồi tiếp đến tỉnh Thanh. Ngôi trường vừa mới xây tạm xong đã trở thành mục tiêu đánh phá của máy bay Mỹ và nhanh chóng trở thành đổ nát. Trách nhiệm của thầy thật là nặng nề: lo tổ chức dạy và học, lo ăn lo ở cho thầy và trò, lo bảo vệ tính mạng và tài sản cho mọi người, lo tuyển quân cung cấp cho chiến trường... Như vậy, Thầy đâu chỉ đơn thuần là một nhà giáo, một nhà toán học. Sự kết hợp giữa các phẩm chất của một người thầy và phẩm chất của một nhà toán học, điều mà không phải ai cũng có thể làm được, đã làm cho thầy trở thành một nhà quản lí năng động, sáng tạo, thông minh, nhạy bén, cương trực và nhân ái. Đó là điều mà các thế hệ cán bộ và học trò trường ĐHSPT Vinh đều cảm nhận được.

(Xem tiếp trang 23)

ISBN : 0866-0853

Chỉ số : 12884

Mã số : 8BT91M1

Chế bản tại Tòa soạn

In tại Nhà máy in Diên Hồng, ngõ 187 phố Giảng Võ

In xong và nộp lưu chiểu tháng 7 năm 2001

Giá : 3000đ

Ba nghìn đồng