

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO * HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

Toán học & Tuổi trẻ

5
2001

SỐ 287 - NĂM THỨ 38 - TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG



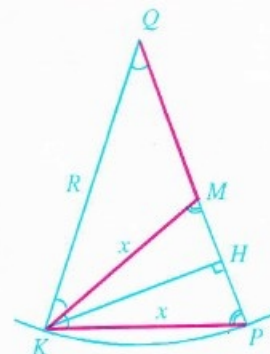
TOÁN HỌC MUÔN MÀU

DỤNG NGŨ GIÁC ĐỀU BẰNG PHÉP CHIA HOÀNG KIM

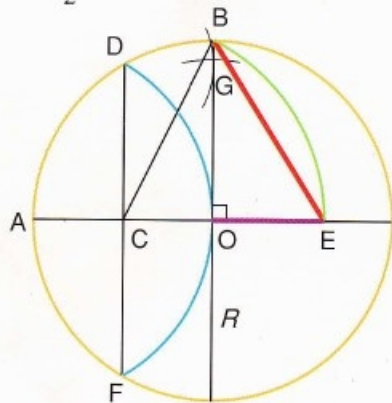
Dùng thước và compa dễ dàng dựng được tam giác đều, hình vuông. Nếu đã dựng được đa giác đều n cạnh nội tiếp trong một đường tròn thì bằng cách dựng đường trung trực của các cạnh ta được đa giác đều nội tiếp $2n$ cạnh. Như vậy dựng được lục giác đều, bát giác đều... Bằng thước và compa cũng dựng được ngũ giác đều, thập giác đều như sau :

Xét thập giác đều có $KP = x$ nội tiếp đường tròn tâm Q bán kính $QK = QP = R$ với $\angle KQP = 36^\circ = \angle QKM = \angle PKM$. Suy ra $QM = KM = KP = x$ (h.1). Ta có $\triangle KMP \sim \triangle QKP$

$$\Rightarrow \frac{MK}{MP} = \frac{KQ}{KP} \text{ hay } \frac{x}{R-x} = \frac{R}{x} \Leftrightarrow x^2 + Rx - R^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{5}R}{2} - \frac{R}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} R \approx 0,6180R.$$



Hình 1



Hình 2

Cách chia đoạn thẳng $QP = R$ bởi điểm M sao cho $\frac{MQ}{MP} = \frac{QP}{QM}$

hay $\frac{x}{R-x} = \frac{R}{x}$ gọi là *phép chia vàng* hay *phép chia hoàng kim* (golden section)

Trên hình 2, cạnh OE của thập giác đều và cạnh BE của ngũ giác đều dựng được theo thứ tự sau : $OA = R = AD = AF \Rightarrow C \Rightarrow DG = OC, OG = CD \Rightarrow B \in$ tia $OG, OB = R \Rightarrow CE = CB$.

Từ TK VI trước công nguyên các nhà toán học Ai Cập, Hy Lạp đã biết sử dụng phép chia hoàng kim trong dựng hình.

Dành cho bạn đọc

1) Chứng minh rằng $BE = 2KH$ là cạnh của ngũ giác đều nội tiếp đường tròn bán kính R .

2) Hãy dựng cạnh của đa giác đều 15 cạnh bằng thước và compa. Giải thích cách dựng.
5 tặng phẩm đang chờ các bạn có lời giải tốt.

Giải đáp bài: MẬT MÃ HÌNH VUÔNG

1) Nội dung thư của bạn trai gửi bạn gái :

Chúc mừng bạn gái nhân ngày quốc tế phụ nữ. Hình ảnh bạn luôn ở trong trái tim mình.

2) Phương pháp chọn khóa mật mã : Chia hình vuông $MNPQ$ tâm O thành 4 hình vuông 4×4 ô và điền số từ 1 đến 16 vào hình vuông $MYOU$ như hình bên. Sau mỗi lần quay một góc 90° quanh tâm O thì hình vuông $MYOU$ lần lượt trùng với các hình vuông $NXOY, PVOX, QUOV$. Từ đó ta điền được các số từ 1 đến 16 vào các hình vuông $NXOY, PVOX, QUOV$ như hình vẽ, lúc đó 4 ô cùng một số (số 7 chẳng hạn) tạo thành hình vuông với tâm O .

Ta sẽ chọn mật mã là 16 ô ứng với 16 số khác nhau bất kì trong hình vuông $MNPQ$. Để khóa mật mã khó đọc hơn, bạn có thể thay dãy chữ cái liên tiếp (kể cả dấu) bằng dãy số tự nhiên (có 2 chữ số) liên tiếp và chỉ ra 1 chữ cái với 1 số tương ứng. Chẳng hạn $b = 15 \Rightarrow a = 14, c = 16, \dots$

Xin gửi tặng phẩm cho 5 bạn có lời giải rõ ràng :

- 1) Nguyễn Tiến Yết, 11T1, THPT chuyên Nguyễn Huệ, Hà Tây
- 2) Nguyễn Duy Phương, 8B, THCS Lê Quý Đôn, Bím Sơn, Thanh Hóa
- 3) Hà Văn Quý, 12T, THPT năng khiếu Quảng Bình
- 4) Phạm Thị Duy Thanh, 11B15, THPT Lý Tự Trọng, Nha Trang, Khánh Hòa
- 5) Nguyễn Minh Quang, 9A1, THCS Chu Văn An, Tp. Thái Nguyên.

M	Y																N
	1	2	3	4	13	9	5	1									
	5	6	7	8	14	10	6	2									
	9	10	11	12	15	11	7	3									
U	13	14	15	16	16	12	8	4									P
	4	8	12	16	16	15	14	13									
	3	7	11	15	12	11	10	9									
	2	6	10	14	8	7	6	5									
Q	1	5	9	13	4	3	2	1									

PHI PHI

Toán học và Tuổi trẻ

Mathematics and Youth

Năm thứ 38
Số 287 (5-2001)
Tòa soạn : Ngõ 187, phố Giảng Võ, Hà Nội
ĐT : 04.5142648-04.5142650
FAX: 04.5142648

TRONG SỐ NÀY

- 2 **Dành cho Trung học cơ sở – For Lower Secondary Schools**
Đặng Thanh Hải – Sử dụng phản chứng trong chứng minh bất đẳng thức
- 4 **Đề thi tuyển sinh lớp 10 hệ THPT chuyên trường ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội - năm 2000**
- 5 **Tiếng Anh qua các bài toán – English through Math Problems – Ngô Việt Trung**
- 6 **Đề thi tuyển sinh môn toán vào Học viện Kỹ thuật Quân sự năm 2000**
- 8 **Chuẩn bị thi vào đại học – University Entrance Preparation**
Bùi Minh Duy – Các tính chất của một tam giác đặc biệt
- 9 **Diễn đàn dạy học toán – Math Teaching Forum**
Lê Quang Trung – Một số bài toán tìm tập hợp điểm liên quan đến tích vô hướng
- 10 **Bạn đọc tìm tòi - Reader's Contributions**
Phạm Gia Vinh Anh - Suy nghĩ về một bài toán của Jack Garfunkel
- 12 **Đề ra kì này – Problems in this Issue**
T1/287, ..., T10/287, L1,L2/287
- 14 **Giải bài kì trước – Solutions to Previous Problems**
Giải các bài của số 283
- 21 **Giới thiệu về Toán học cao cấp – Introduction to Higher Mathematics**
Nguyễn Cảnh Toàn – Làm quen với một hình học lạ
- 22 **Toán học và đời sống – Math and Life**
Phùng Hồng Kôn – Tỷ lệ vàng trong hội họa
- 24 **Câu lạc bộ – Math Club**
Sai lầm ở đâu ? Where's the Mistakes ?

Bìa 2 : Toán học muôn màu – Dụng ngũ giác đều bằng phép chia hoàng kim
Bìa 3 : Giải trí toán học – Math Recreation
Bìa 4 : Đại học Huế

Tổng biên tập :
NGUYỄN CẢNH TOÀN

Phó tổng biên tập :
NGÔ ĐẠT TỬ
HOÀNG CHỨNG

Chịu trách nhiệm xuất bản :
Giám đốc NXB Giáo dục
NGÔ TRẦN ÁI
Tổng biên tập NXB Giáo dục
VŨ DƯƠNG THỤY

Hội đồng biên tập :

NGUYỄN CẢNH TOÀN, HOÀNG CHỨNG, NGÔ ĐẠT TỬ, LÊ KHẮC BẢO, NGUYỄN HUY ĐOAN, NGUYỄN VIỆT HẢI, ĐINH QUANG HẢO, NGUYỄN XUÂN HUY, PHAN HUY KHẢI, VŨ THANH KHIẾT, LÊ HẢI KHÔI, NGUYỄN VĂN MẬU, HOÀNG LÊ MINH, NGUYỄN KHẮC MINH, TRẦN VĂN NHUNG, NGUYỄN ĐĂNG PHÁT, PHAN THANH QUANG, TẠ HỒNG QUẢNG, ĐẶNG HÙNG THẮNG, VŨ DƯƠNG THỤY, TRẦN THÀNH TRẠI, LÊ BÁ KHÁNH TRINH, NGÔ VIỆT TRUNG

Trưởng Ban biên tập : NGUYỄN VIỆT HẢI. Thu ký Tòa soạn : LÊ THỐNG NHẤT. Thực hiện : VŨ KIM THỦY.

Trị sự : VŨ ANH THU. Trình bày : NGUYỄN THỊ OANH.

Đại diện phía Nam : TRẦN CHÍ HIẾU, 231 Nguyễn Văn Cừ, TP Hồ Chí Minh, ĐT : 08.8323044.

Dành cho các bạn TRUNG HỌC CƠ SỞ



SỬ DỤNG PHẢN CHỨNG TRONG CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

ĐẶNG THANH HẢI

(GV Học viện Phòng không – Không quân,
Hà Tây)

Trong bài toán chứng minh một bất đẳng thức (BĐT) ta thường biến đổi tương đương hoặc biến đổi hệ quả từ BĐT đã biết, đã cho đến BĐT cần phải chứng minh. Nếu trong giả thiết hoặc kết luận của bài toán có nhiều bất đẳng thức thì nhiều khi dùng phương pháp phản chứng sẽ thuận lợi hơn. Xét các biểu thức A và B.

• Giả sử điều kiện (*) cho các BĐT $A > 0$ và $B > 0$ đều đúng thì phủ định điều kiện (*) là ít nhất một trong hai BĐT trên là sai, nghĩa là hoặc $A \leq 0$ hoặc $B \leq 0$.

• Giả sử điều kiện (**) cho ít nhất một trong hai BĐT $A > 0$, $B > 0$ là đúng thì phủ định điều kiện (**) là cả hai BĐT trên đều sai, nghĩa là $A \leq 0$ và $B \leq 0$.

Bài này giới thiệu việc sử dụng phương pháp phản chứng trong chứng minh BĐT thông qua một số ví dụ.

Ví dụ 1. Cho các số thực a, b, c thỏa mãn điều kiện

$$\begin{cases} a + b + c > 0 & (1) \\ ab + bc + ca > 0 & (2) \\ abc > 0 & (3) \end{cases}$$

Chứng minh rằng : $a, b, c > 0$ (4)

(Đề thi Vô địch Tiếp Khắc – 1959).

Giải. Giả sử (4) không đúng $\Rightarrow$ ít nhất 1 trong 3 số a, b, c phải ≤ 0 , không mất tính tổng quát, giả sử $a \leq 0$. Do $abc > 0$ (3)

$$\Rightarrow \begin{cases} a < 0 \\ bc < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a < 0 \\ b < 0 \text{ hoặc } c > 0 \end{cases} \begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \\ c < 0 \end{cases}$$

Xét trường hợp $a < 0, b < 0, c > 0$ (6)
(Trường hợp $a < 0, b > 0, c < 0$ làm tương tự)

Từ (6) $\Rightarrow a + b < 0$

Từ đó và (1) có $c > -a - b \Rightarrow c(a+b) < -(a+b)^2$
 $\Rightarrow ab + c(a+b) < ab - (a+b)^2 = -(a^2 + b^2 + ab)$

$$\Rightarrow ab + bc + ca < -\left[\left(b + \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{3a^2}{4}\right] < 0 \text{ (mâu thuẫn với (2))}$$

Vậy (4) đúng, tức là $a, b, c > 0$ (đpcm).

Ví dụ 2. Chứng minh rằng có ít nhất một trong ba bất đẳng thức sau là sai

$$|x| < |y - z|, |y| < |z - x|, |z| < |x - y|$$

với mọi $x, y, z \in \mathbf{R}$.

(Đề thi học sinh giỏi Matxcova – 1986)

Giải. Giả sử cả 3 bất đẳng thức đã cho là đúng

$$\Rightarrow \begin{cases} |x| < |y - z| \\ |y| < |z - x| \\ |z| < |x - y| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 < (y - z)^2 \\ y^2 < (z - x)^2 \\ z^2 < (x - y)^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - (y - z)^2 < 0 \\ y^2 - (z - x)^2 < 0 \\ z^2 - (x - y)^2 < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x + y - z)(x + z - y) < 0 \\ (y + z - x)(y + x - z) < 0 \\ (z + x - y)(z + y - x) < 0 \end{cases}$$

Nhân theo từng vế của 3 BĐT trên ta được :

$$(x + y - z)^2 (y + z - x)^2 (z + x - y)^2 < 0 \text{ điều này là vô lí.}$$

Vậy điều giả sử sai $\Rightarrow$ đpcm.

Ví dụ 3. Cho $0 < a, b, c < 2$

Chứng minh rằng :

$$\min\{a(2-b), b(2-c), c(2-a)\} \leq 1.$$

Giải. Giả sử $\min\{a(2-b), b(2-c), c(2-a)\} > 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} a(2-b) > 1 \\ b(2-c) > 1 \\ c(2-a) > 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a(2-a) b(2-b) c(2-c) > 1$$

Mặt khác theo bất đẳng thức Côsi cho 2 số dương ta có :

$$\begin{cases} 0 < a(2-a) \leq \left(\frac{a+2-a}{2}\right)^2 = 1 \\ 0 < b(2-b) \leq \left(\frac{b+2-b}{2}\right)^2 = 1 \\ 0 < c(2-c) \leq \left(\frac{c+2-c}{2}\right)^2 = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow a(2-a)b(2-b)c(2-c) \leq 1$ (mâu thuẫn với (1)).

Vậy điều giả sử sai $\Rightarrow$ đpcm.

Ví dụ 4. Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$

Chứng minh rằng :

$$S = \left(a - 1 + \frac{1}{b}\right) \left(b - 1 + \frac{1}{c}\right) \left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \leq 1$$

(Đề thi vô địch toán quốc tế - 2000)

Giải. Giả sử $S > 1 \Rightarrow S^2 > 1$

$$\text{Ta có : } S = \left(a - 1 + \frac{1}{b}\right) \left(b - 1 + \frac{1}{c}\right) \left(c - 1 + \frac{1}{a}\right)$$

$$\begin{aligned} &= (a-1+ac)(b-1+ab)(c-1+bc) \\ &= (a-abc+ac)(b-abc+ab)(c-abc+bc) \\ &= a(1-bc+c) b(1-ac+a) c(1-ab+b) \\ &= (1-bc+c) (1-ac+a) (1-ab+b) \quad (1) \\ &= (abc-bc+c)(abc-ac+a)(abc-ab+b) \\ &= c(ab-b+1) a(bc-c+1) b(ac-a+1) \\ &= (ab-b+1) (bc-c+1) (ac-a+1) \quad (2) \end{aligned}$$

Tách riêng (1) (2) được

$$\begin{cases} S = (1-bc+c)(1-ac+a)(1-ab+b) & (1) \\ S = (1+bc-c)(1+ac-a)(1+ab-b) & (2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow S^2 = [1 - (bc-c)^2] [1 - (ac-a)^2] [1 - (ab-b)^2]$$

Do

$$\begin{cases} S^2 > 1 \\ 1 - (bc-c)^2 \leq 1, 1 - (ac-a)^2 \leq 1, 1 - (ab-b)^2 \leq 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Trong 3 số : $1 - (bc-c)^2, 1 - (ac-a)^2,$

$1 - (ab-b)^2$ phải có 2 số âm và 1 số dương (vì nếu có cả 3 số dương thì $S^2 \leq 1$). Không mất tính tổng quát giả sử :

$$\begin{cases} 1 - (bc-c)^2 > 0 & (3) \\ 1 - (ac-a)^2 < 0 & (4) \\ 1 - (ab-b)^2 < 0 \end{cases}$$

$$\text{Từ (3)} \Rightarrow \begin{cases} (1+bc-c)(1-bc+c) > 0 \\ (1+bc-c) + (1-bc+c) = 2 > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 + bc - c > 0 & (5) \\ 1 - bc + c > 0 & (6) \end{cases}$$

$$\text{Từ (5)} \Rightarrow abc + bc - c > 0$$

$$\Rightarrow c(ab + b - 1) > 0 \Rightarrow ab + b - abc > 0$$

$$\Rightarrow b(a+1-ac) > 0 \Rightarrow a+1-ac > 0.$$

Từ đó và (4)

$$\begin{aligned} (1+a-ac)(1-a+ac) &< 0 \\ \Rightarrow 1-a+ac &< 0 \end{aligned} \quad (7)$$

$$\text{Từ (5) (7)} \Rightarrow (1-c+bc)(1-a+ac) < 0.$$

Từ đó và (2) có

$$S = (1-c+bc)(1-a+ac)(1-b+ab) > 1 > 0$$

$$\Rightarrow 1-b+ab < 0 \Rightarrow abc - b + ab < 0$$

$$\Rightarrow b(ac - 1 + a) < 0$$

$$\Rightarrow ac - abc + a < 0 \Rightarrow a(c - bc + 1) < 0$$

$$\Rightarrow 1 - bc + c < 0 \text{ (mâu thuẫn với (6))}$$

Vậy phải có $S \leq 1$ (đpcm).

BÀI TẬP

1) Cho $0 < a, b, c < 1$. Chứng minh rằng có ít nhất một bất đẳng thức sau là sai :

$$a(1-b) > \frac{1}{4}, \quad b(1-c) > \frac{1}{4}, \quad c(1-a) > \frac{1}{4}.$$

2) Cho $a + b = 2cd$. Chứng minh rằng ít nhất một bất đẳng thức sau là đúng : $c^2 \geq a, d^2 \geq b$.

3) Giải hệ bất phương trình :

$$\begin{cases} |x| < |y-z+t| \\ |y| < |x-z+t| \\ |z| < |x-y+t| \\ |t| < |x-y+z| \end{cases}$$

(Đề thi HS giỏi Matxcova - 1986)

4) Các số thực a, b, c, x, y, z thỏa mãn điều kiện

$$\begin{cases} a > 0 \\ (b-1)^2 - 4ac < 0 \end{cases}$$

Chứng minh rằng có ít nhất một trong các bất đẳng thức sau là sai :

$$ax^2+bx+c \leq y, ay^2+by+c \leq z, az^2+bz+c \leq x.$$

5) Cho các số a, b, c, A, B, C thỏa mãn

$$\begin{cases} aC - 2bB + cA = 0 \\ ac - b^2 > 0 \end{cases}$$

Chứng minh rằng : $AC - B^2 \leq 0$

ĐÍNH CHÍNH

Trong bài *Phương pháp đơn giản giải bài toán quân mã di tuần* THPT số 286 (4-2001) có một số lỗi do biên tập. Xin bạn đọc vui lòng sửa lại theo chữ in đậm.

• Trang 23 dòng 3-6 : "Nếu CT (α) có hai đầu mút a và b của một cạnh lần lượt kề với hai đỉnh c, d không thuộc (α) (h.2), thì bằng cách lập **cạnh** ($a-c$) và **cạnh** ($b-d$) sau đó cắt **cạnh** ($a-b$), ta được LT($c-d$)..."

• Trang 23 dòng 8-10 : "...Ta gọi đây là **phép cắt nối** ở cắt CT(α) và nối với các đỉnh c, d thành LT($c-d$)..."

• Bia 3 hình 5 : Đề nghị xóa bỏ các số ở bên phải và ở phía dưới hình vuông bàn cờ.

Thành thật xin lỗi tác giả và bạn đọc.

THTT

ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 HỆ THPT CHUYÊN TRƯỜNG ĐHKHTN-ĐHQG HÀ NỘI NĂM 2000

MÔN : TOÁN

VÒNG 1.

(cho mọi thí sinh)
Thời gian : 150 phút

Câu I. 1) Tính

$$S = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \dots + \frac{1}{1999.2000}$$

2) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + \frac{1}{y^2} + \frac{x}{y} = 3 \\ x + \frac{1}{y} + \frac{x}{y} = 3 \end{cases}$$

Câu II. 1) Giải phương trình

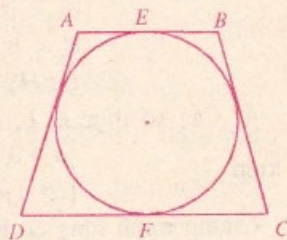
$$\sqrt{x-1} + \sqrt{x^3+x^2+x+1} = 1 + \sqrt{x^4-1}$$

2) Tìm tất cả các giá trị của a (a là số thực) để phương trình

$$2x^2 - (4a + \frac{11}{2})x + 4a^2 + 7 = 0,$$

có ít nhất một nghiệm nguyên.

Câu II. Cho đường tròn tâm O nội tiếp trong hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$), tiếp xúc với cạnh AB tại E và với cạnh CD tại F (như hình vẽ).



1) Chứng minh rằng $\frac{BE}{AE} = \frac{DF}{CF}$

2) Cho biết $AB = a$, $CB = b$ ($a < b$), $BE = 2AE$. Tính diện tích hình thang $ABCD$.

Câu IV. Cho x, y là hai số thực bất kì khác không. Chứng minh rằng $\frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} \geq 3$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi nào ?

VÒNG 2.

(cho thí sinh thi vào chuyên Toán và chuyên Tin)
Thời gian : 150 phút

Câu V.

1) Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn đẳng thức $y(x-1) = x^2 + 2$.

2) Cho cặp số (x, y) thỏa mãn các điều kiện

$$-1 \leq x+y \leq 1, -1 \leq xy+x+y \leq 1.$$

Chứng minh rằng $|x| \leq 2, |y| \leq 2$.

Câu VI.

1) Giải phương trình

$$\frac{4}{x} + \sqrt{x - \frac{1}{x}} = x + \sqrt{2x - \frac{5}{x}}.$$

2) Cho $f(x) = ax^2 + bx + c$ có tính chất : $f(1), f(4)$ và $f(9)$ là các số hữu tỉ. Chứng minh rằng khi đó a, b và c là các số hữu tỉ.

Câu VII.

1) Cho tứ giác lồi $ABCD$. Chứng minh rằng nếu các góc B và D của tứ giác là vuông hoặc tù thì $AC \geq BD$.

2) Cho đoạn thẳng AC cố định và điểm B di động. Hãy tìm tập hợp tất cả các điểm B để tam giác ABC là tam giác không tù và góc $\angle BAC$ là góc bé nhất của tam giác ABC .

Câu VIII. Trên mặt phẳng cho 6 điểm sao cho không có 3 điểm nào thẳng hàng và khoảng cách giữa các cặp điểm là các số khác nhau. Ta nối mỗi cặp điểm bởi một đoạn thẳng. Chứng minh rằng trong các đoạn thẳng thu được có một đoạn thẳng là cạnh bé nhất của một tam giác có 3 đỉnh là 3 trong 6 điểm đã cho, đồng thời là cạnh lớn nhất của một tam giác khác cũng có 3 đỉnh là 3 trong 6 điểm đã cho.

THAM GIA CUỘC CHƠI ĐẤU THIÊN NIÊN KỈ

Người trong ảnh ?

Họ và tên :

Ảnh chụp khi . . . tuổi.



CÂU LẠC BỘ THPT

CUỘC CHƠI ĐẤU THIÊN NIÊN KỈ MỚI

Mời các bạn tham gia cuộc chơi hàng tháng
ĐOÁN TUỔI VÀ BIẾT AI QUA ẢNH

Bạn hãy cắt phiếu cuộc chơi và dán ở bên ngoài phong bì gửi Tòa soạn THPT sau khi đã điền câu trả lời. Bên trong phong bì bạn có thể viết cảm tưởng về cuộc chơi nhưng không gửi bài khác. Nhớ ghi địa chỉ của bạn !

THÔNG TIN

HỘI NGHỊ TOÁN - TIN HỌC CMI 4

Trong các ngày 26 và 27 tháng 4 vừa qua, Hội Toán học Thừa Thiên Huế đã phối hợp với Đại học Huế (trường Đại học Sư phạm, trường Đại học Khoa học) và trường Cao đẳng sư phạm Huế tổ chức Hội nghị Toán - Tin học lần thứ IV (CMI 4). Gần 200 cán bộ nghiên cứu Toán học, Tin học và Phương pháp giảng dạy Toán của nhiều trường đại học, cao đẳng ở Thừa Thiên - Huế, Tây Nguyên, Nghệ An, Nha Trang đã về dự Hội nghị. Ban tổ chức đã mời GS. TSKH Hà Huy Khoái, GS. TSKH Nguyễn Khoa Sơn (Viện Toán học Việt Nam), TS. Lê Thống Nhất (Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ), TS. Vũ Quốc Hùng (Công ty eDT) đọc báo cáo tại phiên họp toàn thể.



Các nhà "làm toán" đã có cuộc giao lưu thú vị với sinh viên Toán - Tin học của các trường Đại học Sư phạm, trường Đại học Khoa học, trường Cao đẳng Sư phạm Huế.

TS. Lê Viết Ngự, Hội trưởng Hội Toán học Thừa Thiên - Huế, Phó Giám đốc Đại học Huế, trưởng ban Tổ chức CMI còn cho biết: Huế nhận đăng cai Hội nghị Toán học toàn quốc vào năm 2002.

P.V

chào mừng giáo sư ngô việt trung

Mới đây, Viện Hàn lâm Khoa học thế giới thứ ba đã bầu GS. Ngô Việt Trung làm Viện sĩ của Viện. Giáo sư Ngô Việt Trung là Chủ tịch Hội đồng Khoa học Viện Toán học Việt Nam, Hội viên Hội Toán học Việt Nam... Giáo sư là ủy viên Hội đồng Biên tập Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ. Viện Hàn lâm Khoa học thế giới thứ ba bao gồm các viện sĩ từ 63 nước đang phát triển và 14 nước phát triển. Giáo sư Ngô Việt Trung là nhà khoa học thứ 7 của Việt Nam được bầu làm Viện sĩ của Viện này.

THTT

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN BÀI SỐ 41

Problem. What is the last digit of 3^{4798} ?

Solution. Notice that $3^1 = 3$, $3^2 = 9$, $3^3 = 27$, $3^4 = 81$, $3^5 = 243$, etc. The only possible last digits are 3, 9, 7, and 1; then the pattern repeats. In this list, the digit 1 is special because $1.1 = 1$, and the digit 1 occurs when we raise 3 to the fourth power. That suggests that we write

$$3^{4798} = (3^4)^{1199} \cdot 3^2.$$

Here we simply divide the exponent 4798 by 4, obtaining a quotient of 1199 and a remainder of 2. Then we use elementary law of exponents. Now, by what we have already observed, the expression in brackets will terminate with a 1. On the other hand, 3^2 is 9. So we can conclude that 3^{4798} terminates with a 9.

Từ mới:

digit	= chữ số
notice	= chú ý, để ý (động từ)
pattern	= khuôn mẫu, mẫu
repeat	= lặp lại, nhắc lại (động từ)
list	= danh sách
special	= đặc biệt (tính từ)
occur	= xuất hiện, xảy ra (động từ)
raise	= nâng, đưa (động từ)
power	= lũy thừa
suggest	= gợi ý, đề xuất (động từ)
exponent	= số mũ
elementary	= sơ cấp (tính từ)
law	= quy tắc, luật, định luật
observe	= nhận xét, quan sát
expression	= biểu thức
bracket	= dấu ngoặc
terminate	= kết thúc
conclude	= kết luận

NGÔ VIỆT TRUNG

ĐỀ THI TUYỂN SINH MÔN TOÁN VÀO HỌC VIỆN KỸ THUẬT QUÂN SỰ NĂM 2000

Câu 1. 1) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số

$$y = \frac{x^2 + 4x + 5}{x + 2}$$

Tìm các điểm trên đồ thị có khoảng cách đến đường thẳng $y + 3x + 6 = 0$ là nhỏ nhất.

2) Tính diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đường:

$$y = \frac{1}{\sin^2 x}, \quad y = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad x = \frac{\pi}{6}, \quad x = \frac{\pi}{3}$$

Câu 2. 1) Giải phương trình:

$$x - 2\sqrt{x-1} - (x-1)\sqrt{x} + \sqrt{x^2-x} = 0$$

2) Tìm a để bất phương trình $x^2 + |x-a| < 3$ có nghiệm âm (a là tham số)

Câu 3. Cho phương trình:

$$\cos 2x = m(\cos^2 x) \sqrt{1 + \tan x} \quad (m \text{ là tham số})$$

1. Giải phương trình với $m = 1$.

2. Tìm m để phương trình có nghiệm trong đoạn $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$.

Câu 4. Cho 2 đường thẳng:

$$(d_1): \frac{x}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+4}{2}$$

$$(d_2): \frac{x+8}{2} = \frac{y-6}{1} = \frac{z-10}{-1}$$

1) Viết phương trình đường thẳng (d) song song với Ox và cắt (d_1) tại M , cắt (d_2) tại N . Tìm tọa độ M, N .

2) A là điểm trên (d_1) , B là điểm trên (d_2) , AB vuông góc với cả (d_1) và (d_2) . Viết phương trình mặt cầu đường kính AB .

Câu 5a. (Dùng cho thí sinh theo chương trình chưa phân ban)

$$\text{Tìm } m \text{ để hệ } \begin{cases} xy + x + y = m + 2 \\ x^2y + y^2x = m + 1 \end{cases}$$

có nghiệm duy nhất.

Câu 5b. (Dùng cho thí sinh theo chương trình phân ban)

1. Một đồn cảnh sát khu vực có 9 người. Trong ngày cần cử 3 người làm nhiệm vụ ở địa điểm A, 2 người ở địa điểm B, còn 4 người thường trực tại đồn. Hỏi có bao nhiêu cách phân công.

2. Khai triển đa thức:

$$P(x) = (1 + 2x)^{12} \text{ thành dạng } a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{12}x^{12}.$$

Tìm $\max(a_1, a_2, \dots, a_{12})$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. 1) Bạn đọc tự giải.

2) Giả sử M thuộc đồ thị và $x_M = x_0$ thì

$$y_M = \frac{x_0^2 + 4x_0 + 5}{x_0 + 2}$$

Khoảng cách từ M tới đường thẳng

$$y + 3x + 6 = 0 \text{ là:}$$

$$\begin{aligned} d &= \frac{1}{\sqrt{10}} \left| \frac{4x_0^2 + 16x_0 + 17}{x_0 + 2} \right| \\ &= \frac{1}{\sqrt{10}} \left| 4(x_0 + 2) + \frac{1}{x_0 + 2} \right| \\ &= \frac{1}{\sqrt{10}} \left[4|x_0 + 2| + \frac{1}{|x_0 + 2|} \right] \geq \frac{4}{\sqrt{10}} \end{aligned}$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow 4|x_0 + 2| = \frac{1}{|x_0 + 2|}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -\frac{3}{2} \\ x_0 = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

$$\text{Từ đó } d = \frac{4}{\sqrt{10}}$$

$$\Leftrightarrow M_1\left(-\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right); M_2\left(-\frac{5}{2}; -\frac{5}{2}\right).$$

2) Dễ dàng có:

$$\begin{aligned} S &= \int_{\pi/6}^{\pi/4} \left[\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} \right] dx + \int_{\pi/4}^{\pi/3} \left[\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x} \right] dx \\ &= (-\cot x - \tan x) \Big|_{\pi/6}^{\pi/4} + (\tan x + \cot x) \Big|_{\pi/4}^{\pi/3} \\ &= 4 \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} - 1 \right) \text{ (dvdt)}. \end{aligned}$$

Câu II. 1) Với điều kiện $x \geq 1$ ta có:

$$(\sqrt{x-1} - 1)(\sqrt{x-1} - 1 - \sqrt{x(x-1)}) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 1 \quad (1)$$

$$\text{hoặc } \sqrt{x-1} - 1 - \sqrt{x(x-1)} = 0 \quad (2)$$

Ta có (1) $\Leftrightarrow x = 2$.

$$\begin{aligned} \text{Mặt khác (2)} &\Leftrightarrow x - 1 = 1 + x(x-1) + 2\sqrt{x(x-1)} \\ &\Leftrightarrow (x-1)^2 + 2\sqrt{x(x-1)} + 1 = 0 \text{ vô nghiệm.} \end{aligned}$$

Do đó phương trình có nghiệm duy nhất $x = 2$.

2) Viết bất phương trình về dạng

$$x^2 + lx - a - 3 < 0$$

$$\text{Xét } f(x) = x^2 + lx - a - 3$$

$$= \begin{cases} x^2 + x - a - 3 & \text{với } x \geq a \\ x^2 - x + a - 3 & \text{với } x < a \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{với } x \geq a \\ 2x - 1 & \text{với } x < a \end{cases}$$

So sánh a với $\pm \frac{1}{2}$ và 0, chia từng trường hợp

để xét $f(x)$ và từ đó dẫn đến kết quả $-\frac{13}{4} < a < 3$.

Câu III.1) Đặt $t = \tan x$ dẫn đến :

$$\sqrt{1+t} = 1 - t^2 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 0 \\ t = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$\text{Từ đó : } x = -\frac{\pi}{4} + k\pi; x = k\pi;$$

$$x = \arctg\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right) + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$2) \text{ Đặt } t = \tan x \text{ thì } x \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right] \Leftrightarrow t \in [0; \sqrt{3}]$$

Đưa phương trình về dạng

$$f(t) = \frac{1 - t^2}{\sqrt{1+t}} = m.$$

$$\text{Ta có : } f'(t) = \frac{-3t^2 - 4t - 1}{2(t+1)\sqrt{1+t}} < 0 \text{ với } t \in [0; \sqrt{3}]$$

$$\text{Do đó : } f(\sqrt{3}) \leq m \leq f(0) \Leftrightarrow \frac{-2}{\sqrt{1+\sqrt{3}}} \leq m \leq 1.$$

Câu IV.

1) Đường thẳng d_1 có vector chỉ phương $\vec{u}_1 = (1; -1; 2)$ và đi qua $T_1(0; 2; -4)$, đường thẳng d_2 có vector chỉ phương $\vec{u}_2 = (2; 1; -1)$ và đi qua $T_2(-8; 6; 10)$.

Phương trình tham số của d_1, d_2 :

$$(d_1): \begin{cases} x = t_1 \\ y = 2 - t_1 \\ z = -4 + 2t_1 \end{cases} \quad (d_2): \begin{cases} x = -8 + 2t_2 \\ y = 6 + t_2 \\ z = 10 - t_2 \end{cases}$$

$$\text{Vì } d // Ox \text{ nên } d \text{ có phương trình : } \begin{cases} x = \alpha \\ y = y_0 \\ z = z_0 \end{cases}$$

Tọa độ giao điểm M thỏa mãn :

$$\begin{cases} \alpha_1 = t_1 \\ y_0 = 2 - t_1 \\ z_0 = -4 + 2t_1 \end{cases}$$

$$\text{Tọa độ } N \text{ thỏa mãn } \begin{cases} \alpha_2 = -8 + 2t_2 \\ y_0 = 6 + t_2 \\ z_0 = 10 - t_2 \end{cases}$$

Từ đó ta có :

$$\begin{cases} 2 - t_1 = 6 + t_2 \\ -4 + 2t_1 = 10 - t_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = 18 \\ t_2 = -22 \end{cases}$$

Do đó : $M(18; -16; 32)$ và $N(-52; -16; 32)$.

$$\text{Phương trình } d \text{ là } \begin{cases} x = 18 + 70t \\ y = -16 \\ z = 32 \end{cases}$$

$$2) A(t_1, 2 - t_1, -4 + 2t_1); B(-8 + 2t_2, 6 + t_2, 10 - t_2)$$

Ta có $AB(-8 + 2t_2 - t_1, 4 + t_2 + t_1,$

$$14 - t_2 - 2t_1)$$

Vì $AB \perp \vec{u}_1$ và $AB \perp \vec{u}_2$ nên :

$$\begin{cases} 6t_1 + t_2 = 16 \\ t_1 + 6t_2 = 26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = 2 \\ t_2 = 4 \end{cases}$$

Từ đó : $A(2; 0; 0)$ và $B(0; 10; 6)$

Ta có tâm mặt cầu là $I(1; 5; 3)$

Từ đó : phương trình mặt cầu là :

$$(x-1)^2 + (y-5)^2 + (z-3)^2 = 35$$

$$\text{Câu Va. } \begin{cases} S = m+1 \\ P = 1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} S = 1 \\ P = m+1 \end{cases}$$

với $S = x + y; P = xy$.

Một con đường khác, nếu lưu ý hệ đối xứng thì $(x_0; y_0)$ là nghiệm $\Rightarrow (y_0; x_0)$ cũng là nghiệm. Nếu nghiệm duy nhất thì $x_0 = y_0$. Thay vào hệ

dẫn tới $m = 1; m = -\frac{3}{4}$. Thử lại ta có $m = 1; m =$

$-\frac{3}{4}$ thỏa mãn.

Câu Vb. 1) Dễ dàng chọn người cho 2 địa điểm nào đó trước, số còn lại ở địa điểm còn lại. Các bạn sẽ có số cách bố trí trong ngày là :

$$C_9^2 \cdot C_6^2 \text{ hoặc } C_9^4 \cdot C_5^2 \text{ hoặc } C_9^2 C_7^4$$

Kết quả là : 1260 cách.

$$2) \text{ Ta có } P(x) = (1 + 2x)^{12} = \sum_{i=0}^{12} a_i x^i$$

Với $a_k = C_{12}^k \cdot 2^k$.

Nhận xét.

$$a_k < a_{k+1} \Leftrightarrow k < \frac{23}{3} \Rightarrow \max(a_1, a_2, \dots, a_n) = a_8 = C_{12}^8 \cdot 2^8 = 126720.$$

Hướng dẫn giải
P.T.L

CHUẨN BỊ THI VÀO ĐẠI HỌC**CÁC TÍNH CHẤT CỦA MỘT TAM GIÁC ĐẶC BIỆT**

BÙI MINH DUY

(SV 33B, khoa Toán ĐHSP Thái Nguyên)

Nhằm giúp các bạn đọc đang ôn thi đại học bớt lúng túng và có cách nhìn toàn vẹn hơn, chúng tôi xin giới thiệu một dạng tam giác đặc biệt với nhiều tính chất mà các tính chất này đã được nhiều trường sử dụng để ra đề thi đại học.

Đó là tam giác ABC , có $\hat{C} = 2\hat{B} = 4\hat{A}$.

Tính chất 1. $\frac{1}{BC} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}$

(Đề thi ĐH Hàng Hải - 1996)

Đây cũng là đề 137.III₂ - Bộ đề thi TS Đại học

Chứng minh: Từ giả thiết suy ra

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \hat{A} + 2\hat{A} + 4\hat{A} = 7\hat{A}$$

$$\text{Vậy } \hat{A} = \frac{\pi}{7} \Rightarrow \hat{B} = \frac{2\pi}{7}, \hat{C} = \frac{4\pi}{7}$$

Bây giờ áp dụng định lý hàm số sin và biến đổi về trái biểu thức

$$\begin{aligned} \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} &= \frac{1}{2R\sin C} + \frac{1}{2R\sin B} \\ &= \frac{1}{2R} \left(\frac{\sin C + \sin B}{\sin B \cdot \sin C} \right) = \frac{1}{2R} \left(\frac{\sin \frac{4\pi}{7} + \sin \frac{2\pi}{7}}{\sin \frac{2\pi}{7} \cdot \sin \frac{4\pi}{7}} \right) \\ &= \frac{1}{2R} \cdot \frac{2\sin \frac{3\pi}{7} \cdot \cos \frac{\pi}{7}}{\sin \frac{2\pi}{7} \cdot \sin \frac{3\pi}{7}} = \frac{1}{2R \sin \frac{\pi}{7}} = \frac{1}{BC} \end{aligned}$$

Tính chất 2. $\cos A \cdot \cos B \cdot \cos C = -\frac{1}{8}$

(Đề thi Cao đẳng SP Thái Nguyên 1997)

Bài toán quy về tính giá trị của tích

$$M = \cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{7}$$

Dễ dàng tính được trị số của tích này nếu nhân $8 \sin \frac{\pi}{7}$ vào biểu thức trên.

Bây giờ ta sử dụng tính chất 2, để suy ra các tính chất sau:

Tính chất 3. $\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = \frac{5}{4}$

(Đề 137, III_p, Bộ đề thi TSDH)

Sử dụng công thức hạ bậc và đẳng thức:

$$\begin{aligned} \cos 2A + \cos 2B + \cos 2C &= \\ &= -1 - 4\cos A \cos B \cos C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C &= \\ &= \frac{1 + \cos 2A + 1 + \cos 2B + 1 + \cos 2C}{2} \end{aligned}$$

$$= \frac{3 + (-1 - 4\cos A \cos B \cos C)}{2} = \frac{5}{4}$$

Từ đó áp dụng định lý hàm số sin ta có:

Tính chất 4. $a^2 + b^2 + c^2 = 7R^2$, trong đó

R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác

Đề thi chọn đội tuyển học sinh giỏi 10, tỉnh Thái Bình)

Các bạn hãy tự chứng minh các tính chất sau:

Tính chất 5. $\cos A - \cos B - \cos C = \frac{1}{2}$

(Đề thi ĐH Đà Nẵng 1998)

Tính chất 6. $\sin A - \sin B + \sin C = \frac{1}{2}$

Tính chất 7. $\sin A + \sin B + \sin C = \frac{1}{2} \cot \frac{A}{2}$

Tính chất 8. $h_a = h_b + h_c$ với h_a, h_b, h_c là các đường cao tương ứng với các đỉnh A, B, C

Tính chất 9. $bc = a(b+c)$

Tính chất 10. $c^2 = a^2 + bc$.

Bây giờ ta xét một tính chất phức tạp và khó khăn hơn.

Tính chất 11. Gọi O, H lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp và trực tâm $\triangle ABC$ thì $OH = R\sqrt{2}$

Bằng công cụ vectơ và hệ thức Leibnitz, ta có kết quả sau:

$$OH^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$$

(Bạn đọc có thể coi đây là đề tham khảo, tự tìm tòi và chứng minh lại).

Đến đây lại áp dụng tính chất 4, ta được

$$OH^2 = 9R^2 - 7R^2 = 2R^2 \Rightarrow OH = R\sqrt{2}$$

Các bạn thấy đấy! Từ một đề toán và một vài tính chất đơn giản, ta có thể suy ra nhiều tính chất mới và các đề toán tương tự. Kỳ thi của các bạn đang tới gần. Chúc các bạn luôn tìm tòi được nhiều điều lí thú khi học tập và ôn thi.

Các bạn có thể tự luyện khả năng với các đề kiểu tương tự:

Với giả thiết của $\triangle ABC$ như trên tính giá trị biểu thức:

a) $P = \operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C$; b) $Q = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$

Chúc các bạn thành công!



Trong nhiều kì, tạp chí Toán học và Tuổi trẻ đã đề cập phương pháp tọa độ trong mặt phẳng để giải quyết các bài toán hình học và đại số. Trong bài viết này, tôi trao đổi tiếp với bạn đọc về việc sử dụng triệt để biểu thức tọa độ của tích vô hướng trong việc giải quyết các bài toán tìm tập hợp điểm.

$$\begin{aligned}\vec{MA} &= (a_1 - x, a_2 - y), \quad \vec{MB} = (-b - x, -y), \\ \vec{MC} &= (b - x, y) \\ \vec{MA} + \vec{MB} &= (a_1 - b - 2x, a_2 - 2y) \\ \vec{MA} + \vec{MC} &= (a_1 + b - 2x, a_2 - 2y) \\ (2) \Leftrightarrow (a_1 - b - 2x)(a_1 + b - 2x) + (a_2 - 2y)(a_2 - 2y) &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 - a_1x + \frac{a_1^2 - b^2}{4} + \left(y - \frac{a_2}{2}\right)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(x - \frac{a_1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{a_2}{2}\right)^2 &= \frac{b^2}{4} \\ \Leftrightarrow M \text{ thuộc đường tròn tâm } I\left(\frac{a_1}{2}, \frac{a_2}{2}\right), \text{ bán} \\ \text{kính } R &= \frac{b}{2}\end{aligned}$$

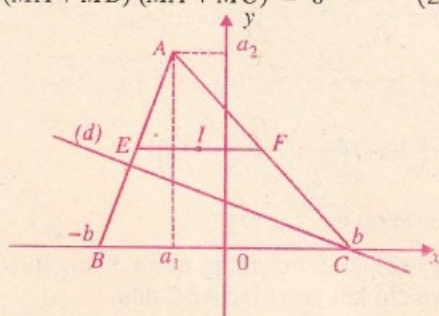
MỘT SỐ BÀI TOÁN TÌM TẬP HỢP ĐIỂM LIÊN QUAN ĐẾN TÍCH VÔ HƯỚNG

LÊ QUANG TRUNG
(GV CDSP Bạc Liêu)

Ta biết nếu $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$ thì
 $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$.

Bài toán 1. Cho tam giác ABC . Tìm tập hợp các điểm M thỏa mãn mỗi điều kiện sau :

- a) $\vec{AM} \cdot \vec{AB} = \vec{AC} \cdot \vec{AB}$ (1)
b) $(\vec{MA} + \vec{MB})(\vec{MA} + \vec{MC}) = 0$ (2)



Giải : a) Lập hệ tọa độ Oxy : $B, C \in Ox$, $OB = OC$. Giả sử $A(a_1, a_2)$, $B(-b, 0)$, $C(0, b)$, $M(x, y)$.

$$\begin{aligned}(1) \Leftrightarrow (x - a_1)(-b - a_1) - a_2(y - a_2) \\ = (-b - a_1)(b - a_1) + a_2^2 \\ \Leftrightarrow (b + a_1)x + a_2y - a_1b - b^2 = 0 \quad (3)\end{aligned}$$

(3) là phương trình đường thẳng (d) có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (-a_2, b + a_1)$, $\vec{AB} = (-b - a_1, -a_2)$

Để thấy $\vec{a} \perp \vec{AB}$ và (d) đi qua C

Vậy tập hợp M là đường thẳng (d) đi qua C vuông góc với AB .

b) Chọn hệ tọa độ như trên :

Để thấy I là trung điểm EF . Vậy tập hợp M là đường tròn đường kính EF (E, F là trung điểm AB, AC tương ứng).

Bài toán 2. Cho tam giác ABC . Tìm tập hợp những điểm M sao cho $\vec{AB} \cdot \vec{AM} = \vec{AC} \cdot \vec{AM} = 0$

Giải. Chọn hệ trục tọa độ như trên ta có :

$$\begin{aligned}\vec{AB} &= (-c - a_1, -a_2), \quad \vec{AC} = (c - a_1, -a_2), \\ \vec{AM} &= (x - a_1, y - a_2), \quad \begin{cases} \vec{AB} \cdot \vec{AM} = 0 \\ \vec{AC} \cdot \vec{AM} = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} -(c + a_1)(x - a_1) - a_2(y - a_2) = 0 \\ (c - a_1)(x - a_1) - a_2(y - a_2) = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = a_1 \\ y = a_2 \end{cases}\end{aligned}$$

Vậy tập hợp những điểm M sao cho :

$$\vec{AB} \cdot \vec{AM} = \vec{AC} \cdot \vec{AM} = 0 \text{ là điểm } A.$$

Sau đây là một số bài tập để các bạn thử áp dụng.

Bài 1. Cho tam giác ABC , tìm tập hợp các điểm M thỏa mãn :

$$(\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC})(2\vec{MA} + \vec{MC}) = 0$$

Bài 2. Giả sử A, B, C cố định. M thay đổi sao cho : $\vec{AB} \cdot \vec{CM} + \vec{AC} \cdot \vec{MB} = 0$

Tìm tập hợp các điểm M .

Bài 3. Cho tam giác ABC . Tìm tập hợp các điểm M sao cho $\vec{AB} \cdot \vec{BM} = \vec{AC} \cdot \vec{CM} = 0$

Bài 4. Giả sử A, B, C cố định, M thay đổi sao cho $\vec{AB} \cdot \vec{CM} + \vec{AC} \cdot \vec{MB} = 0$

Tìm tập hợp các điểm M .

BẠN ĐỌC TÌM TÒI

Suy nghĩ về một bài toán của JACK GARFULKEL

PHẠM GIA VĨNH ANH
(Lớp 11A1, Khối PTC Toán-Tin,
ĐHSP Hà Nội)

Trong báo THIT số 206 (8/1999) có bài "Lời giải một bài toán mở của Jack Garfulkel" của TS. Nguyễn Minh Hà. Ở phần cuối của bài báo, tác giả đã giới thiệu một loạt các bất đẳng thức hình học do Jack Garfulkel nêu ra, trong đó có bất đẳng thức sau :

Bài toán 1. Cho tam giác ABC , chứng minh rằng

$$m_a + l_b + h_c \leq \frac{\sqrt{3}}{2} (a+b+c) \quad (1)$$

Ta sử dụng các kí hiệu quen thuộc đối với tam giác ABC : a, b, c là độ dài các cạnh đối diện với các đỉnh A, B, C ; m_a, m_b, m_c là độ dài các trung tuyến xuất phát từ các đỉnh A, B, C ; l_a, l_b, l_c là độ dài các phân giác xuất phát từ các đỉnh A, B, C ; h_a, h_b, h_c là độ dài các đường cao xuất phát từ các đỉnh A, B, C .

Bất đẳng thức (1) đã được chứng minh bởi nhà toán học Mỹ C.S. Gardner. Tuy nhiên, phép chứng minh của C.S. Gardner quá dài và phức tạp (có thể tìm thấy phép chứng minh này ở các trang 321-323 trong cuốn "1000 bài toán sơ cấp - bất đẳng thức hình học" của TS. Phan Huy Khải, NXB Hà Nội - 1998). Hơn nữa phép chứng minh này còn dùng những kiến thức về giải tích mà không phải học sinh phổ thông nào cũng biết.

Bài viết này sẽ giới thiệu với bạn đọc một bất đẳng thức mới, mạnh hơn (1), cùng với một phép chứng minh ngắn gọn và sơ cấp hơn phép chứng minh của C. S. Gardner.

Bài toán 2. Cho tam giác ABC . Chứng minh rằng :

$$m_a + l_b + l_c \leq \frac{\sqrt{3}}{2} (a+b+c) \quad (2)$$

Hiển nhiên $h_c \leq l_c$ nên (2) mạnh hơn (1). Ta chứng minh (2) như sau :

$$\text{Đặt } x = \frac{b+c-a}{2} ; y = \frac{c+a-b}{2} ; z = \frac{a+b-c}{2}.$$

Dễ thấy $x, y, z > 0$ và $x+y=c, x+z=b, y+z=a$. Ta có :

$$\begin{aligned} m_a &= \frac{1}{2} \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{2(x+z)^2 + 2(x+y)^2 - (y+z)^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{4x^2 + 4x(y+z) + y^2 - 2yz + z^2} \\ &= \sqrt{\left(x + \frac{y+z}{2}\right)^2 - yz} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{3\left(x + \frac{y+z}{2} - \sqrt{yz}\right)\left(x + \frac{y+z}{2} + \sqrt{yz}\right)} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{3\left(x + \frac{y+z}{2} - \sqrt{yz}\right) + \left(x + \frac{y+z}{2} + \sqrt{yz}\right)}{2} \\ &= \frac{2x+y+z-\sqrt{yz}}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Ta đã biết

$$l_b = \frac{2\sqrt{ac}}{a+c} \sqrt{p(p-b)} \leq \sqrt{p(p-b)} = \sqrt{(x+y+z)y}$$

Tương tự :

$$l_c \leq \sqrt{(x+y+z)z}$$

Vậy : $m_a + l_b + l_c \leq$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{2x+y+z-\sqrt{yz}}{\sqrt{3}} + \sqrt{x+y+z} (\sqrt{y} + \sqrt{z}) \\ &= \frac{2x+y+z-\sqrt{yz}}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}} (\sqrt{x+y+z}) \frac{\sqrt{3}(\sqrt{y} + \sqrt{z})}{2} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{3}} \left(2x+y+z-\sqrt{yz} + x+y+z + \frac{3}{4}(\sqrt{y} + \sqrt{z})^2 \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left(3(x+y+z) - \left(\frac{\sqrt{y}-\sqrt{z}}{2}\right)^2 \right) \\ &\leq \sqrt{3}(x+y+z) = \frac{\sqrt{3}}{2} (a+b+c) \end{aligned}$$

Vậy (2) đã được chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

Vì $l_a \leq m_a$ nên từ (2) ta có ngay bất đẳng thức sau :

$$l_a + l_b + l_c \leq \frac{\sqrt{3}}{2} (a+b+c) \quad (3)$$

Cũng nên chú ý rằng (3) có thể được chứng minh khá dễ dàng mà không cần thông qua (2).

Một cách rất tự nhiên, người ta hi vọng rằng bất đẳng thức sau đúng :

$$m_a + m_b + m_c \leq \frac{\sqrt{3}}{2} (a+b+c) \quad (4)$$

Thật đáng tiếc, (4) không đúng, kiểm tra điều này không mấy khó khăn. Xin dành cho bạn đọc.

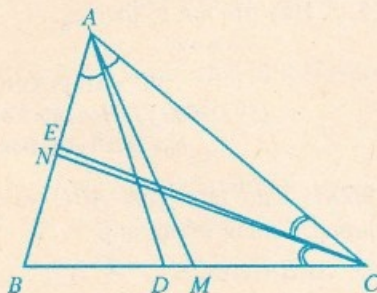
Trong cuốn sách mà tôi đã giới thiệu ở phần đầu bài báo này, TS. Phan Huy Khải đã giới thiệu với bạn đọc một chi tiết khá thú vị. Jack Garfunkel đã chọn ngẫu nhiên 500 tam giác để kiểm tra tính đúng đắn của (1) bằng máy tính điện tử. Chắc rằng trước đó Jack Garfunkel đã chiêm nghiệm rất nhiều, đã thử so sánh các vế của (3) và (4) rất kĩ thì mới có thể đi đến phỏng đoán : phải chăng (1) đúng và (4) không đúng. Tuy nhiên nhờ có (2) ta thu được một bất đẳng thức rất "gần" với (4).

Bài toán 3. Cho tam giác ABC . Chứng minh rằng

$$m_a + m_b + m_c \leq \frac{\sqrt{3}}{2}(a+b+c) + \frac{|b-c| + |c-a| + |a-b|}{4} \quad (5)$$

Chứng minh

Không mất tính tổng quát giả sử $a \geq b \geq c$. Gọi AM, AD lần lượt là các đường trung tuyến và phân giác xuất phát từ A . Gọi CN, CE lần lượt là các đường trung tuyến và phân giác xuất phát từ C



Để thấy :

$$MD = MB - BD = \frac{a}{2} - \frac{ac}{b+c} = \frac{a(b-c)}{2(b+c)} \leq \frac{b-c}{2}.$$

$$\text{Tương tự } NE = \frac{c(a-b)}{2(a+b)} \leq \frac{a-b}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m_a = AM \leq AD + MD \leq l_a + \frac{b-c}{2} & (6) \\ m_c = CN \leq CE + NE \leq l_c + \frac{a-b}{2} & (7) \end{cases}$$

Theo (2), ta có :

$$l_a + m_b + l_c \leq \frac{\sqrt{3}}{2}(a+b+c)$$

Từ đó và (6), (7) suy ra

$$m_a + m_b + m_c \leq \frac{\sqrt{3}}{2}(a+b+c) + \frac{(b-c) + (a-c) + (a-b)}{4}$$

Với $\triangle ABC$ bất kì ta có $m_a + m_b + m_c$

$$\leq \frac{\sqrt{3}}{2}(a+b+c) + \frac{|b-c| + |c-a| + |a-b|}{4}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

Để kết thúc, xin giới thiệu với bạn đọc ba bất đẳng thức khác của Jack Garfunkel đã có lời giải nhưng tôi vẫn chưa hề biết lời giải của chúng. Rất mong bạn đọc quan tâm tới việc giải các bài toán này.

Bài toán 4. Cho tam giác ABC . Chứng minh rằng :

$$\cos \frac{B-C}{2} + \cos \frac{C-A}{2} + \cos \frac{A-B}{2} \geq \frac{2}{\sqrt{3}}(\sin A + \sin B + \sin C)$$

Bài toán 5. Cho tam giác ABC nhọn, hãy khẳng định hoặc phủ định các bất đẳng thức sau :

$$\begin{aligned} & \text{a) } \sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} \\ & \geq \frac{4}{3} \left(1 + \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \right) \\ & \text{b) } \cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2} \\ & \geq \frac{4}{\sqrt{3}} \left(1 + \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \right) \end{aligned}$$

Đón đọc THPT Số 288 (6-2001)

Dành cho các bạn THPT và chuẩn bị thi ĐH :

- Hai bài thi toán quốc tế trong một bài toán
- Một dạng bất đẳng thức về tổng các lũy thừa

Dành cho các bạn THCS :

- Tìm hiểu thêm về các đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp
- Đề thi tuyển sinh lớp 10 PT chuyên toán ĐHSP Vinh 2000

Mở rộng kiến thức :

- Giả thuyết về dãy số Collatz
- Thuật toán chia đa thức nhiều biến
- Dùng máy tính để chứng minh định lý hình học ?

Mùa hè sắp tới... các bạn hãy thư giãn với các câu đố trong mục VUI HÈ 2001 nhé ! và... các chuyên mục thú vị : Câu lạc bộ, Đoán người qua ảnh, Sai lầm ở đâu, Giải trí toán học...

THPT



ĐỀ RA KÌ NÀY

CÁC LỚP THCS

Bài T1/287. Giả sử a và b là các số nguyên dương sao cho $2a - 1$, $2b - 1$ và $a + b$ đều là các số nguyên tố. Chứng minh rằng $a^b + b^a$ và $a^a + b^b$ đều không chia hết cho $a + b$.

TRẦN NAM DŨNG
(GV khoa toán ĐHKHTN – ĐHQG Tp Hồ Chí Minh)

Bài T2/287. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$\frac{x-t}{t+y} + \frac{t-y}{y+z} + \frac{y-z}{z+x} + \frac{z-x}{x+t}$$

trong đó x, y, z, t là các số dương

NGUYỄN ĐỨC TẤN
(GV Tp Hồ Chí Minh)

Bài T3/287. Giải phương trình

$$\sqrt[4]{17-x^8} - \sqrt[3]{2x^8-1} = 1$$

ĐỖ THANH HÂN
(GV THPT chuyên Bạc Liêu)

Bài T4/287. Cho hình vuông $ABCD$. Hai đường chéo cắt nhau tại E . Một đường thẳng nào đó đi qua A , cắt đường thẳng BC tại M và cắt đường thẳng CD tại N . Gọi K là giao điểm của các đường thẳng EM và BN . Chứng minh rằng $CK \perp BN$.

PHẠM ĐÌNH TRƯỜNG
(SV K41 Khoa Toán Tin, ĐHKHTN – ĐHQG Hà Nội)

Bài T5/287. Cho tam giác vuông cân ABC với $\angle A = 90^\circ$. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác, M là trung điểm của AC . Đường thẳng MI cắt AB tại N . Gọi E là trung điểm của IN , F là điểm trên cạnh BC sao cho $FC = 3FB$. Đường thẳng EF cắt AB tại D , cắt đường thẳng AC tại K . Chứng minh rằng tam giác ADK cân.

NGUYỄN XUÂN HÙNG
(GV THPT Lam Sơn, Thanh Hóa)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/287. Chứng minh rằng phương trình sau có vô số nghiệm nguyên

$$x^3 + y^3 + z^3 + t^3 = 3S^3 - 1$$

trong đó S là tổng của n số nguyên dương đầu tiên, n là một số nguyên dương cho trước.

HOÀNG HOA TRẠI
(GV THPT Lê Khiết, Quảng Ngãi)

Bài T7/287. Cho các số thực $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$.

Chứng minh rằng phương trình

$$\log_a^4 y + \log_b^4 x + 3 \log_a^2 x \cdot \log_b^2 y$$

$$- 8 \log_a y \cdot \log_b x - 16 (\log_a^2 y + \log_b^2 x) + 80 = 0$$

có hai nghiệm, và gọi hai nghiệm đó là (x_1, y_1) , (x_2, y_2) thì $x_1 + x_2 + y_1 + y_2 > 4$

TRẦN XUÂN BANG
(GV THPT BC Đồng Hới, Quảng Bình)

Bài T8/287. Giả sử phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có hai nghiệm phân biệt. Xét dãy số (x_n) ($n = 0, 1, 2, \dots$) được xác định bởi số x_0 cho trước và các điều kiện $x_n(ax_{n-1} + b) + c = 0$ với $n = 1, 2, 3, \dots$. Hãy tìm $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

VŨ VĂN PHONG
(SV D2000 VT, Học viện Công nghệ bưu chính viễn thông)

Bài T9/287. Cho tam giác ABC và n là số nguyên dương. Chứng minh rằng

$$a) \cos A + \cos B + \cos C \leq 1 + \frac{1}{6} \left(\cos^2 \frac{A-B}{n} + \cos^2 \frac{B-C}{n} + \cos^2 \frac{C-A}{n} \right) \leq \frac{3}{2}$$

với $n \geq 2$.

$$b) \sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} \leq 1 + \frac{1}{6} \left(\cos^2 \frac{A-B}{n} + \cos^2 \frac{B-C}{n} + \cos^2 \frac{C-A}{n} \right) \leq \frac{3}{2}$$

với $n \geq 4$.

VŨ TIẾN VIỆT
(GV Toán – Tin ĐH An Ninh)

Bài T10/287. Giả sử M là một điểm nằm trong tứ diện $ABCD$. Các đường thẳng AM , BM , CM , DM theo thứ tự cắt các mặt phẳng (BCD) , (CDA) , (DAB) , (ABC) tại A' , B' , C' , D' . Mặt phẳng (α) qua M , song song với mặt phẳng (BCD) lần lượt cắt $A'B'$, $A'C'$, $A'D'$ tại X , Y , Z . Chứng minh rằng M là trọng tâm của tam giác XYZ .

NGUYỄN MINH HÀ
(GV PTCT ĐHSPT Hà Nội)

CÁC ĐỀ VẬT LÝ

Bài T1/287. Một giọt mưa nhỏ rơi khỏi đám mây trong thời tiết không có gió, ở độ cao lớn. Tại thời điểm gia tốc của giọt mưa bằng $7,5 \text{ m/s}^2$ thì vận tốc của nó bằng 20 m/s . Đến gần mặt đất nó rơi với vận tốc không đổi và rơi vào tấm kính bên của một ô tô tạo thành một vết nghiêng 30° so với phương thẳng đứng.

Hỏi người lái xe có bị phạt vì đã chạy quá nhanh hay không nếu tốc độ cho phép là 60 km/h cho biết lực cản của không khí tỉ lệ với bình phương của vận tốc và lấy $g = 10 \text{ m/s}^2$.

TÔ GIANG (ST)

Bài T2/207. Tại trung điểm khoảng cách giữa 2 bản của một tụ điện phẳng có một electron đang đứng yên. Tụ được nạp điện bởi một nguồn có hiệu điện thế $U = U_0 \sin \omega t$. Trong thời gian bao lâu electron đến được một trong 2 bản tụ. Cho biết giữa 2 bản tụ là chân không, khoảng cách giữa 2 bản tụ là d . Bỏ qua tác dụng của trọng lực. Cho rằng trong một chu kỳ biến đổi của hiệu điện thế, electron dịch chuyển được một đoạn rất nhỏ so với d .

NGUYỄN QUANG MINH
(GV THPT chuyên Vinh Phúc)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/287. Let a and b be positive integers such that $2a - 1$, $2b - 1$ and $a + b$ are prime numbers. Prove that $a^b + b^a$ and $a^a + b^b$ are not divisible by $a + b$.

T2/287. Find the least value of the expression

$$\frac{x-t}{t+y} + \frac{t-y}{y+z} + \frac{y-z}{z+x} + \frac{z-x}{x+t}$$

where x, y, z, t are positive numbers.

T3/287. Solve the equation

$$\sqrt[4]{17-x^8} - \sqrt[3]{2x^8-1} = 1$$

T4/287. Let $ABCD$ be a square and E be the point of intersection of its diagonals. A line passing through A cuts the lines BC and CD respectively at M and N . Let K be the point of intersection of the lines EM and BN . Prove that $CK \perp BN$.

T5/287. Let ABC be an isosceles triangle with $\angle A = 90^\circ$, I be its incenter and M be the midpoint of AC . The line MI cuts AB at N . Let E be the midpoint of IN and F be the point on the segment BC such that $FC = 3FB$. The line EF cuts AB and AC respectively at D and K . Prove that the triangle ADK is isosceles.

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/287. Prove that the equation

$$x^3 + y^3 + z^3 + t^3 = 3S^3 - 1$$

(where S is the sum of the n first positive integers, n is a given positive integer) has an infinite number of integer-roots.

T7/287. Let be given real numbers $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$. Prove that the equation

$$\log_a^4 y + \log_b^4 x + 3 \log_a^2 x \cdot \log_b^2 y$$

$$- 8 \log_a y \cdot \log_b x - 16 (\log_a^2 y + \log_b^2 x) + 80 = 0$$

has two roots and let them be (x_1, y_1) and (x_2, y_2) , prove that $x_1 + x_2 + y_1 + y_2 > 4$.

T8/287. Suppose that the equation

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$$

has two distinct roots. Consider the sequence of numbers (x_n) ($n = 0, 1, 2, \dots$) defined by given number x_0 and by the conditions $x_n(ax_{n-1} + b) + c = 0$ for $n = 1, 2, 3, \dots$. Find $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ in terms of x_0 .

T9/287. Let be given a triangle ABC and a positive integer n . Prove that :

$$a) \cos A + \cos B + \cos C \leq$$

$$\leq 1 + \frac{1}{6} \left(\cos^2 \frac{A-B}{n} + \cos^2 \frac{B-C}{n} + \cos^2 \frac{C-A}{n} \right) \leq \frac{3}{2}$$

for $n \geq 2$.

$$b) \sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} \leq$$

$$\leq 1 + \frac{1}{6} \left(\cos^2 \frac{A-B}{n} + \cos^2 \frac{B-C}{n} + \cos^2 \frac{C-A}{n} \right) \leq \frac{3}{2}$$

for $n \geq 4$.

T10/287. Let M be a point inside a tetrahedron $ABCD$. The lines AM , BM , CM , DM cut respectively the planes (BCD) , (CDA) , (DAB) , (ABC) at A' , B' , C' , D' . The plane (α) passing through M , parallel to the plane (BCD) , cuts $A'B'$, $A'C'$, $A'D'$ respectively at X , Y , Z . Prove that M is the centroid of triangle XYZ .



T1/283. Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương n thì số $(3^n + n^3)(3^n n^3 + 1)$ hoặc chia hết cho 49 hoặc không chia hết cho 7.

Lời giải. của Lê Đình Huy, 8A, THCS Nguyễn Trãi, Nam Sách, Hải Dương và Nguyễn Đình Khuông, 8A1, THCS Ngô Tất Tố, Phú Nhuận, Tp. Hồ Chí Minh

Đặt $A = (3^n + n^3)(3^n n^3 + 1)$ ta có

* Với $n \not\equiv 7$ thì $(3^n + n^3)$ và $(3^n n^3 + 1)$ đều không chia hết cho 7:

Vậy $A \not\equiv 7$

* Với $n \equiv 7$. Theo định lý Phécma nhỏ ta có $n^6 - 1 = (n^3 - 1)(n^3 + 1) \equiv 7$ (1)

Xét $(3^n n^3 + 1) - (3^n + n^3) = (3^n - 1)(n^3 - 1)$ (2)

$(3^n n^3 + 1) + (3^n + n^3) = (3^n + 1)(n^3 + 1)$ (3)

Vì 7 là số nguyên tố nên từ (1) có hoặc $(n^3 - 1) \equiv 7$ hoặc $(n^3 + 1) \equiv 7$. Xét 2 trường hợp:

• Giả sử $(n^3 - 1) \equiv 7$. Nếu $(3^n n^3 + 1) \equiv 7$ thì từ (2) suy ra $(3^n + n^3) \equiv 7$ và $A \equiv 49$.

Nếu $(3^n n^3 + 1) \not\equiv 7$ thì từ (2) suy ra $(3^n + n^3) \equiv 7$ và $A \not\equiv 7$.

• Giả sử $(n^3 + 1) \equiv 7$. Nếu $(3^n n^3 + 1) \equiv 7$ thì từ (3) suy ra $(3^n + n^3) \equiv 7$ và $A \equiv 49$.

Nếu $(3^n n^3 + 1) \not\equiv 7$ thì từ (3) suy ra $(3^n + n^3) \equiv 7$ và $A \not\equiv 7$.

Tóm lại ta có $A = (3^n + n^3)(3^n n^3 + 1)$ hoặc chia hết cho 49 hoặc không chia hết cho 7.

Nhận xét. 1. Có rất nhiều bạn giải đúng bài này.

2. Các bạn sau có lời giải tốt: **Yên Bái:** Trần Mạnh Cường, 8B, THCS Lê Hồng Phong, Tx. Yên Bái; **Phú Thọ:** Hà Tuấn Anh, Nguyễn Đức Chính, 9B, Lê Thanh Tùng, 9C, THCS Việt Trì; **Vĩnh Phúc:** Khổng Đức Kiên, 9A, THCS Hương Canh, Bình Xuyên, Bùi Văn Vũ, 9B, THCS Yên Lạc; **Hải Phòng:** Trần Xuân Dâng, 8A, THPT Trần Phú; **Nam Định:** Nguyễn Quốc Khánh, 8A, THCS Trần Đăng Ninh, Tp. Nam Định; **Thanh Hóa:** Trịnh Thị Ngoan, 9A, THCS Như Bá Sĩ, Hoằng Hóa; **Nghệ An:** Vũ Minh Triều, 9A, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu, Đặng Thành Dâng, 9B, THCS Bạch Liên, Yên Thành

TỔNG NGUYỄN

Bài T2/283. Tính giá trị biểu thức

$$\sqrt{x(4-y)(4-z)} + \sqrt{y(4-z)(4-x)} + \sqrt{z(4-x)(4-y)} - \sqrt{xyz}$$

trong đó x, y, z là các số dương thỏa mãn

$$x + y + z + \sqrt{xyz} = 4$$

Lời giải. (của hầu hết các bạn)

Từ giả thiết ban đầu ta có

$$4(x+y+z) + 4\sqrt{xyz} = 16 \text{ và do đó:}$$

$$\sqrt{x(4-y)(4-z)} = \sqrt{x(16-4y-4z+yz)}$$

$$= \sqrt{x(yz+4\sqrt{xyz}+4x)} = \sqrt{x} \sqrt{(\sqrt{yz}+2\sqrt{x})^2}$$

$$= 2x + \sqrt{xyz}.$$

Tương tự ta có:

$$\sqrt{y(4-x)(4-z)} = 2y + \sqrt{xyz}$$

$$\sqrt{z(4-y)(4-x)} = 2z + \sqrt{xyz}.$$

Cộng ba đẳng thức trên theo từng vế, ta có

$$\sqrt{x(4-y)(4-z)} + \sqrt{y(4-z)(4-x)} + \sqrt{z(4-x)(4-y)} - \sqrt{xyz} = 2(x+y+z+\sqrt{xyz}) = 8.$$

Nhận xét. Tất cả các bạn tham gia giải bài toán này đều có kết quả đúng và lời giải ngắn gọn, nhưng cũng có vài bạn tính toán hơi dài dòng.

VŨ ĐÌNH HÒA

Bài T3/283. Các số thực không âm a, b, c thỏa mãn điều kiện: $a + 2b + 3c = 1$. Chứng minh rằng ít nhất một trong hai phương trình sau có nghiệm thực:

$$4x^2 - 4(2a+1)x + 4a^2 + 192abc + 1 = 0$$

$$4x^2 - 4(2b+1)x + 4b^2 + 96abc + 1 = 0$$

Lời giải. Lần lượt xét các biệt thức Δ' của hai phương trình ta có:

$$\Delta'_1 = 16a(1-48bc) \text{ và } \Delta'_2 = 16b(1-24ac)$$

Mặt khác:

$$(1-48bc) + (1-24ac)$$

$$= 2[1-12c(a+2b)] = 2[1-12c(1-3c)]$$

$$= 2(6c-1)^2 \geq 0$$

Chúng ta thấy trong 2 biểu thức $1-48bc$ và $1-24ac$ ít nhất có 1 biểu thức không âm, mà $a, b \geq 0$ nên trong 2 biệt thức Δ'_1, Δ'_2 ít nhất có 1 biệt thức không âm nên luôn có ít nhất 1 phương trình có nghiệm.

Nhận xét. 1) Nhiều bạn sử dụng phương pháp phản chứng để giải bài toán này. Trong quá trình dẫn tới các bất đẳng thức, nhiều bạn còn làm quá phức tạp. Lời giải trình bày trên là đơn giản nhất.

2) Các bạn có lời giải "giản dị" nhất là:

Yên Bái: Trần Mạnh Cường, 8B, THCS Lê Hồng Phong, Tx. Yên Bái; **Khánh Hòa:** Nguyễn Ngọc Nga Sơn, 9B, THCS Thái Nguyên, Nha Trang; **Nghệ An:** Phạm Trọng Quỳnh, 9B, THCS Đặng Thai Mai, Vinh, Võ Huyền Trang, 9A, THCS Nghi Hương, Cửa Lò; **Nam Định:** Nguyễn Quốc Khánh, 8A7, THCS Trần Đăng Ninh, Nguyễn Đăng Hợp, 9A2, THCS Lê Quý

GIẢI BÀI KÌ TRƯỚC

Đôn, Ý Yên; **Hà Nam:** Vũ Quang Thanh, 9B, THCS Nguyễn Hữu Tiến, Duy Tiên; **Thanh Hóa:** Nguyễn Đình Dũng, 9A, THCS Như Bá Sĩ, Hoàng Hóa, Ninh Thị Hồng, 9B, THCS Lê Quý Đôn, Bim Sơn; **Vinh Phúc:** Nguyễn Vinh Hà, Nguyễn Hoàng, 9B, THCS Vinh Yên; **Phú Thọ:** Hà Tuấn Anh, Nguyễn Đức Chính, 9B, THCS Việt Trì; **Quảng Bình:** Đinh Hồng Đức, 9A, THCS Nam Lý, Đồng Hới; **Đồng Nai:** Lý Huệ Thủy, 8/1, THCS Nguyễn Bình Khiêm, Biên Hòa; **Hải Phòng:** Nguyễn Xuân Dũng, Nguyễn Đức Phương, 8A, NK Trần Phú; **Bắc Ninh:** Nguyễn Tất Việt, 6A, THCS Từ Sơn, Nguyễn Văn Thờ, 9B, THCS Yên Phong; **Đắk Lắk:** Hoàng Tuấn Anh, 9A6, THCS Phan Chu Trinh, Buôn Ma Thuột; **Hòa Bình:** Nguyễn Bảo Thịnh, 9A, THCS Sông Đà; **Thái Bình:** Phạm Việt Hùng, 9B1, THCS Lương Thế Vinh, Tx. Thái Bình, ...

3) Một số bạn sai lầm khi lí luận: $M.N \geq 0$ mà $M \geq 0$ nên $N \geq 0$ (!). Lưu ý: khi $M = 0$ thì N tùy ý.

L.T.N

Bài T4/283. Cho tứ giác (lồi) ABCD và M là trung điểm của AB. Xét điểm P thuộc đoạn thẳng AC sao cho hai đường thẳng MP và BC cắt nhau, gọi giao điểm đó là T. Gọi Q là điểm thuộc đoạn thẳng BD sao cho $\frac{BQ}{QD} = \frac{AP}{PC}$. Chứng minh rằng đường thẳng TQ luôn đi qua một điểm cố định khi P chạy trên đoạn AC.

Lời giải. Từ C kẻ CI ($I \in TQ$) và CK ($K \in MT$) lần lượt song song với BD và AB. Theo định lí Talet ta có:

$$\begin{aligned} \frac{BQ}{QD} &= \frac{TB}{TC} \\ \frac{CI}{IT} &= \frac{CK}{KT} \\ &= \frac{BM}{MT} = \frac{AM}{MC} \\ &= \frac{PA}{PC} = \frac{QB}{QD} \end{aligned}$$

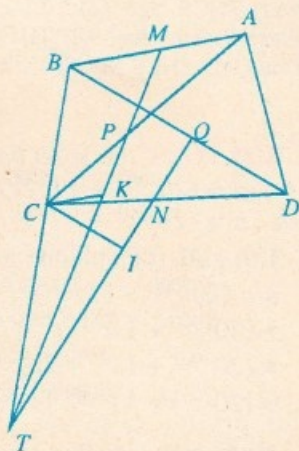
Suy ra
 $CI = DQ$.
Mà $CI \parallel DQ$.

Do đó CIDQ là hình bình hành. Vậy N là trung điểm của CD tức TQ luôn đi qua điểm N cố định khi P chạy trên đoạn AC.

Nhận xét.

- Một số bạn dùng định lí Mênêlaút chứng minh.
- Các bạn có lời giải đúng và gọn là

Yên Bái: Trần Mạnh Cường, 8B, Lê Hồng Phong;
Hòa Bình: Nguyễn Bảo Thịnh, 9A, THCS Sông Đà,



Lê Thái Hoàng, 9A1, THCS Hữu Nghị, **Phú Thọ:** Nguyễn Đức Chính, 9B, THCS Việt Trì, **Vinh Phúc:** Phạm Quang Chiến, 9B, THCS Yên Lạc, Nguyễn Thị Thúy Hồng, 8B, THCS Yên Lạc, Nguyễn Thị Hoài Lê, 9A, THCS Vinh Tường, **Khổng Đức Kiên,** 9A, THCS Hương Canh, Bình Xuyên; **Hà Tây:** Nguyễn Ngọc Tuấn, 8A, THCS Thạch Thất, Dương Minh Sơn, 9B, THCS Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hòa, Lê Bảo Khánh, 9E, THCS Lê Lợi, Hà Đông; **Hải Phòng:** Trần Xuân Dũng, 8A, TH NK Trần Phú; **Hà Nội:** Nguyễn Thanh Tùng B, 7A1, THCS Láng Thượng; **Nam Định:** Nguyễn Nhị Long, 9A1, Phùng Chí Kiên, Nguyễn Thành Trung, 9A, THCS Nguyễn Hiền, Nam Trực, Vũ Đức Luân, 8A2, Ngô Huy Hoàng, Hoàng Văn Trường, Nguyễn Đăng Hợp, 9A2 Lê Quý Đôn, Ý Yên; **Thanh Hóa:** Nguyễn Ngọc Tú, 8B, THCS Lê Đình Kiên, Yên Định; **Nghệ An:** Bùi Danh Nam, 8B, THCS TT Nam Đàn; **Hà Tĩnh:** Lê Minh Quang, 9A, THCS Phan Huy Chú, Thạch Hà; **Quảng Bình:** Đinh Hồng Đức, 9A, THCS Nam Lý, Đồng Hới; **Tp. Hồ Chí Minh:** Nguyễn Đình Khuông, 8A1, THCS Ngô Tất Tố, Q. Phú Nhuận; **Bến Tre:** Nguyễn Tiến Dũng, 9², THCS Mỹ Hóa.

VŨ KIM THỦY

Bài T5/283. Cho tam giác ABC có diện tích bằng 1 (đơn vị). Gọi R và r tương ứng là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng

$$\frac{2}{R} + \frac{3}{r} \geq 4\sqrt[4]{27}$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Lời giải. Gọi a, b, c là các cạnh, p là nửa chu vi, S là diện tích của $\triangle ABC$.

Để dễ dàng chứng minh được hai công thức diện tích sau:

$$S = \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr = \frac{1}{2}(a+b+c)r = pr \quad (1)$$

$$S = \frac{1}{2}a \cdot h_a = \frac{1}{2}a \cdot \frac{bc}{2R} \quad (2)$$

(do $\triangle ABH \sim \triangle ADC$ với $AH = h_a$, $AD = 2R$)

$$\text{Từ (1), (2) có: } \frac{2}{R} + \frac{3}{r} = \frac{8S}{abc} + \frac{3(a+b+c)}{2S}$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 4 số dương ta có:

$$\begin{aligned} \frac{2}{R} + \frac{3}{r} &= \frac{8S}{abc} + \frac{3a}{2S} + \frac{3b}{2S} + \frac{3c}{2S} \\ &\geq 4 \sqrt[4]{8S \cdot \frac{3a \cdot 3b \cdot 3c}{abc \cdot 2S \cdot 2S \cdot 2S}} = 4 \sqrt[4]{\frac{27}{S^2}} \end{aligned}$$

GIẢI BÀI KÌ TRƯỚC

$$\text{Vậy } \frac{2}{R} + \frac{3}{r} \geq 4 \sqrt[4]{\frac{27}{S^2}}$$

Đẳng thức xảy ra khi $\frac{8S}{abc} = \frac{3a}{2S} = \frac{3b}{2S} = \frac{3c}{2S} \Leftrightarrow a = b = c \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều.

$$\text{Nói riêng khi } S = 1 \text{ thì } \frac{2}{R} + \frac{3}{r} \geq 4\sqrt[4]{27}$$

Đẳng thức xảy ra khi ΔABC đều với $a = b = c = \frac{2\sqrt[4]{27}}{3}$

Nhận xét.

1) Có thể tính $abc \leq \frac{(a+b+c)^3}{27} = \frac{8p^3}{27}$ rồi áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 4 số:

$$\frac{2}{R} + \frac{3}{r} = \frac{8S}{abc} + \frac{3p}{S} \geq \frac{27S}{p^3} + \frac{p}{S} + \frac{p}{S} + \frac{p}{S} \geq 4\sqrt[4]{\frac{27}{S^2}}$$

Có bạn tính $\frac{2}{R} + \frac{1}{r} + \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \geq 4\sqrt[4]{\frac{2}{Rr^3}}$ rồi sử dụng (1)

và (2) để xét tiếp.

Bạn **Nguyễn Thanh Hải**, 9Z, THCS Lý Thường Kiệt, **Hà Nội** đã giải trường hợp tổng quát:

$$\frac{m}{R} + \frac{n}{r} \geq 4 \sqrt[4]{\frac{mn^3}{2S^2}}$$

2) Với $S = 1$ thì đẳng thức xảy ra với giá trị cụ thể $a = b = c = \frac{2\sqrt[4]{27}}{3}$. Khá nhiều bạn không nêu giá trị này.

3) Rất nhiều bạn có lời giải tốt, tiêu biểu là:

Yên Bái: Nguyễn Đức Tâm, 9C, THCS Lương Thế Vinh, Mậu A, Văn Yên, **Trần Mạnh Cường**, 8B, THCS Lê Hồng Phong, Tx. Yên Bái; **Phú Thọ:** Trần Đăng Vinh, 8A1, **Triệu Văn Tiến**, 9A1, THCS Lâm Thao, **Trương Hồng Khanh**, 9A1, THCS Giầy, Phong Châu, Phù Ninh, **Lê Thị Ngọc Chung**, 9B, THCS Việt Trì; **Vĩnh Phúc:** Lê Hữu Phúc, 9A, THCS Vĩnh Tường, Nguyễn Hoàng, 9B, THCS Vĩnh Yên, **Chu Văn Sà**, 9B, THCS Yên Lạc, **Vân Thị Lan**, 8A5, THCS Hồng Châu, Yên Lạc, **Trần Thị Lệ Hằng**, 9A, THCS Hương Canh, Bình Xuyên, **Nguyễn Thị Thanh**, 9A, THCS DTNT Lập Thạch; **Hà Tây:** Nguyễn Đức Thuận, 9A, THCS Nguyễn Trục, Thanh Oai, **Lê Bảo Khánh**, 9E, THCS Lê Lợi, Hà Đông, **Lê Quý Lợi**, 9B, THCS Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hòa; **Bắc Giang:** Nguyễn Tuyết Mai, 9A, THCS Lê Quý Đôn, Tx. Bắc Giang; **Bắc Ninh:** Nguyễn Chí Bảo, 9B, THCS Đại Lai, Gia Bình, **Phạm Thái Sơn**, 9A, THCS Nguyễn Đăng Đạo, Tx. Bắc Ninh, **Nguyễn Hữu Bình Minh**, 9A, THCS Yên Phong; **Hải Dương:** Nguyễn Văn Khiết, 8A, THCS Phạm Trấn, Gia Lộc; **Hải Phòng:** Lê Hoàng Vũ, 8B1, THCS Trần Phú; **Thái Bình:** Đặng Lam Sơn, 9B1,

THCS Lương Thế Vinh, Tx. Thái Bình; **Nam Định:** Trần Trung Kiên, 9A2, THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên, **Phạm Ngọc Lịch**, 8D, THCS Giao Hà, Giao Thủy, **Bùi Minh Phương**, 9A6, THCS Trần Đăng Ninh, Tp. Nam Định; **Ninh Bình:** Nguyễn Quang Vinh, 8C, THCS Trương Hán Siêu, Tx. Ninh Bình, **Đinh Văn Tùng**, 9A, THCS TT. Yên Ninh; **Thanh Hóa:** Trịnh Đức Anh, 9A, THCS Yên Thọ, Yên Định, **Nguyễn Văn Thanh**, 9A, THCS Lê Quý Đôn, Bim Sơn, **Nguyễn Đình Dũng**, 9A, THCS Như Bá Sĩ, Hoàng Hóa, **Bùi Đức Huy**, 9C, THCS Thiệu Văn, Thiệu Yên; **Nghệ An:** Trần Mạnh Tiến, 9B, THCS Bạch Liêu, Yên Thành, **Trần Thị Tuấn Anh**, 9B, THCS Quán Hành, Nghi Lộc, **Hoàng Chí Linh**, 9A, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu, **Bùi Danh Nam**, 8B, THCS TT. Nam Đàn; **Hà Tĩnh:** Tôn Hiền Trình, 9A4, THCS Bình An, Can Lộc, **Lê Minh Quang**, 9A, THCS Phan Huy Chú, Thạch Hà, **Bùi Đình Hợp**, 9B, THCS Nguyễn Trãi, Nghi Xuân, **Trần Thị Thùy Minh**, 9/2, THCS Lê Văn Thiêm, Tx. Hà Tĩnh; **Quảng Bình:** Lê Đức Anh, 9/1, THCS Đồng Mỹ, Đồng Hới; **Kon Tum:** Nguyễn Lương Thùy Viên, 8A, TH chuyên Kon Tum; **Đắk Lắk:** Ngô Thị Huyền Trang, 7A1, THCS Trần Hưng Đạo, Tp. Buôn Ma Thuột; **Phú Yên:** Nguyễn Kim Duân, 9C, THCS Lương Thế Vinh, Tuy Hòa; **Khánh Hòa:** Phạm Đăng Quang, 9/13, THCS Thái Nguyên, Nha Trang, **Phan Nguyễn Báu**, 9/4, THCS Đinh Tiên Hoàng, Ninh Hòa; **Quảng Ngãi:** Ngô Ngọc Khiêm, 9/2, THCS Nguyễn Tự Tân, Bình Sơn; **Tp. Hồ Chí Minh:** Nguyễn Đình Khuông, 8A1, THCS Ngô Tất Tố, Q. Phú Nhuận; **Bến Tre:** Phạm Thành Huy, 9/1, THCS Sơn Phú, Nguyễn Tiến Dạng, 9/2, THCS Mỹ Hóa, Tx. Bến Tre.

VIỆT HẢI

Bài T6/283. So sánh hai số

$$a = (20^{2000} + 11^{2000})^{2001} \text{ và } b = (20^{2001} + 11^{2001})^{2000}$$

Lời giải. (của nhiều bạn)

$$\begin{aligned} a &= (20^{2000} + 11^{2000})^{2000} (20^{2000} + 11^{2000}) \\ &> (20^{2000} + 11^{2000})^{2000} \cdot 20^{2000} \\ &= (20^{2001} + 11^{2000} \cdot 20)^{2000} \\ &> (20^{2001} + 11^{2000} \cdot 11)^{2000} = b. \end{aligned}$$

Nhận xét. Các bạn sau đây có lời giải tốt

Vũ Đình Đầu, Phạm Duy Thành, 8A, PTNK Trần Phú, **Hải Phòng:** Lê Bảo Khánh, 9E, THCS Lê Lợi, Hà Đông, **Hà Tây:** Hoàng Thị Bích Ngọc, 10T, THPT Lê Quý Đôn, Đông Hà, **Quảng Trị:** Phạm Văn Hùng, 11A1, chuyên Toán - Tin, ĐHSPT Hà Nội, **Lê Hùng Việt Bảo**, 9A, THCS Nguyễn Trường Tộ, **Trần Anh Tuấn**, **Trần Việt Hương**, **Phạm Hồng Thái**, 10A Toán, ĐHKHTN, **Nguyễn Quang Tùng**, 9E, THCS Trưng Vương, **Hà Nội:** Đỗ Thành Phương, 10A3, THPT chuyên Vĩnh Phúc, **Đại Quốc Huy**, 9B, THCS Yên Lạc, **Vĩnh Phúc:** Nguyễn Văn Lang, **Thế Thủy**, 11CT,

GIẢI BÀI KÌ TRƯỚC

THPT Hàn Thuyên, Lê Đăng Nam, 9A, THCS Yên Phong, **Bắc Ninh**; Nguyễn Quốc Hưng, 10, THPT Kim Sơn, **Ninh Bình**; Nguyễn Thiên Ban, 11A2, THPT Bắc Kiên Xương, **Thái Bình**; Phạm Văn Chiến, 10T, NK Hà Tĩnh; Trần Hoài Thu, 8A, THCS Trần Mai Ninh, Dương Đình Thiện, 9C, THCS Đồng Cương, **Thanh Hóa**; Nguyễn Khắc Tập, 10A12, THPT Đồng Hỷ, **Thái Nguyên**; Đặng Thanh Mai, 8B, THCS Lê Quý Đôn, **Hải Dương**; Đào Lê Trung, 7E, THCS Đặng Thai Mai, Vinh, **Nghe An**; Nguyễn Văn Thắng, 10T, THPT Lê Khiết, **Quảng Ngãi**; Nguyễn Phương Nam, 10T, ĐHKHTN, Nguyễn Hoàng Hiến, 10CT, THPT Lê Hồng Phong, **Tp. Hồ Chí Minh**; Nguyễn Văn Tâm, 11/1, THPT Gia Rai, **Bạc Liêu**; Huỳnh Lâm Linh, 10T2, THPT Lương Văn Chánh, **Phú Yên**; Lê Đức Trí, 11, THPT Nguyễn Bình Khiêm, **Vĩnh Long**; Nguyễn Thành Nam, 10T, THPT Nguyễn Du, **Đắk Lắk**; Nguyễn Cảnh Lâm, 10T, THPT Lương Thế Vinh, **Đồng Nai**; Nguyễn Du Thái, 12CT, ĐHKH Huế, **Thừa Thiên - Huế**; Lê Thanh Bình, 10T, THPT chuyên Quy Nhơn, **Bình Định**; Nguyễn Hoàng Hải, 9A2, THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên, **Nam Định**; Nguyễn Tuấn Ngọc, 11T, THPT chuyên Tiền Giang; Nguyễn Mai Ngân, 10T, THPT Lê Quý Đôn, **Khánh Hòa**; Bùi Thị Bích Hậu, 10A5, THPT Kon Tum

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T7/283. Cho k ($k \geq 2$) số thực dương $a_1, a_2, \dots, a_k$. Chứng minh rằng

$$\frac{a_1^m}{a_2^n} + \frac{a_2^m}{a_3^n} + \dots + \frac{a_{k-1}^m}{a_k^n} + \frac{a_k^m}{a_1^n} \geq a_1^{m-n} + a_2^{m-n} + \dots + a_k^{m-n}$$

trong đó m, n là các số nguyên dương.

Lời giải. Có ba trường hợp :

Trường hợp 1. $m = n$. Theo bất đẳng thức Côsi ta có

$$\frac{a_1^m}{a_2^m} + \frac{a_2^m}{a_3^m} + \dots + \frac{a_k^m}{a_1^m} \geq k.$$

Trường hợp 2. $m > n$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } (m-n) \frac{a_1^m}{a_2^n} + na_2^{m-n} &\geq \\ &\geq m \sqrt[n]{\left(\frac{a_1^m}{a_2^n}\right)^{m-n} \cdot (a_2^{m-n})^n} = ma_1^{m-n} \end{aligned}$$

Tương tự :

$$(m-n) \frac{a_2^m}{a_3^n} + na_3^{m-n} \geq m a_2^{m-n}$$

.....

$$(m-n) \frac{a_k^m}{a_1^n} + na_1^{m-n} \geq m a_k^{m-n}$$

Cộng theo từng vế rồi rút gọn ta có BĐT (*).

Trường hợp 3. $m < n$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } (n-m) \frac{a_1^m}{a_2^n} + ma_1^{m-n} &\geq n \sqrt[n]{\left(\frac{a_1^m}{a_2^n}\right)^{n-m} \cdot (a_1^{m-n})^m} = na_2^{m-n}. \end{aligned}$$

$$\text{Tương tự } (n-m) \frac{a_2^m}{a_3^n} + ma_2^{m-n} \geq na_3^{m-n}$$

...

$$(n-m) \frac{a_k^m}{a_1^n} + ma_k^{m-n} \geq na_1^{m-n}$$

Cộng theo từng vế rồi rút gọn ta có BĐT (*)

Nhận xét. Đây là bài bất đẳng thức cổ điển, cơ bản. Tòa soạn nhận được lời giải của 255 bạn, hầu hết các bạn giải đúng. Các bạn sau có lời giải tốt : **Hà Tây:** Nguyễn Đức Thuận, 9A, THCS Nguyễn Trục; **Lê Quý Lợi,** Trần Ngọc Phương, 9B, THCS Nguyễn Thượng Hiền, **Vĩnh Phúc:** Phạm Văn Hoàng, Chu Văn Sà, 9B, THCS Yên Lạc, **Hải Dương:** Phan Tuấn Thành, 9/3, THCS Lê Quý Đôn, **Nam Định:** Nguyễn Đức Tâm, 8A7, THCS Trần Đăng Ninh, **Ninh Bình:** Đinh Văn Tường, 9A, THCS thị trấn Yên Ninh, Nguyễn Thành Luân, 9A, THCS Đình Tiên Hoàng, **Phạm Thị Phương Thúy,** 9B, THCS Trương Hán Siêu; **Thanh Hóa:** Nguyễn Văn Thanh, 9A, THCS Lê Quý Đôn, Nguyễn Đình Dũng, Lê Đức Tâm, 9A, THCS Như Bá Sĩ; **Đà Nẵng:** Lê Lang, 8, THCS Trần Hưng Đạo; **Đắk Lắk:** Nguyễn Văn Mẫn, 9A1, THCS Hùng Vương v.v...

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T8/283. Xét dãy số thực $a_1, a_2, a_3, \dots$ thỏa mãn các điều kiện : $0 < a_n < 1$ và

$$a_{n+1}(1 - a_n) \geq \frac{1}{4} \text{ với mọi } n = 1, 2, 3, \dots$$

Chứng minh rằng $\frac{1}{2} - \frac{1}{2n} < a_n \leq \frac{1}{2}$ với mọi $n = 1, 2, 3, \dots$

Lời giải. (của bạn Đặng Thành Long, 10A Toán, ĐHQG Hà Nội)

+ Ta chứng minh BĐT $a_n > \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}$ bằng quy nạp

Với $n = 1$ đúng.

GIẢI BÀI KÌ TRƯỚC

Giả sử đúng với $n = k$. Vì $a_k > \frac{1}{2} - \frac{1}{2k}$
 $\Rightarrow 1 - a_k < \frac{1}{2} + \frac{1}{2k} = \frac{k+1}{2k}$.

Lại có: $a_{k+1}(1-a_k) \geq \frac{1}{4}$
 $\Rightarrow a_{k+1} > \frac{2k}{4(k+1)} = \frac{k}{2(k+1)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2(k+1)}$.

BĐT đúng với $n = k + 1$. Vậy BĐT đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

+ Tiếp theo ta chứng minh $a_n \leq \frac{1}{2}$. Thật vậy
 có $a_n(1-a_n) \leq \frac{1}{4} \leq a_{n+1}(1-a_n) \Rightarrow a_n \leq a_{n+1}$.

Vậy dãy (a_n) tăng và bị chặn ($a_n < 1$). Do đó tồn tại $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. Qua giới hạn ở BĐT

$a_{n+1}(1-a_n) \geq \frac{1}{4}$ ta được $a(1-a) \geq \frac{1}{4} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$.

Do dãy a_n đơn điệu tăng và $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2}$ nên
 $a_n \leq \frac{1}{2}$.

Nhận xét. 1) Rất nhiều bạn nhận xét rằng vì dãy $a_n = \frac{1}{2}$ thỏa mãn điều kiện bài toán nên kết luận như đầu bài $a_n < \frac{1}{2}$ là không đúng. Đây là lỗi khi biên tập in. Để in lần này đã sửa là: $a_n \leq \frac{1}{2}$.

2) Bài này có nhiều bạn tham gia giải. Lời giải tốt có các bạn:

Hà Nội: Nguyễn Quang Tùng, 9H, THCS Trung Vương, Nguyễn Hoàng Thạch, 11, THPT Amsterdam, Nguyễn Trung Kiên, 11, PTCT, ĐHSP Hà Nội, Phạm Nhật Minh, 12A1, THPT Chu Văn An; **Quảng Trị:** Trần Tiến Hoàng, 11 chuyên tỉnh; **Phú Thọ:** Vũ Chí Công, 11A, THPT Hùng Vương; **Tp. Hồ Chí Minh:** Nguyễn Vũ T. Hiền Nga, 11CT, THPT Lê Hồng Phong; **Thừa Thiên - Huế:** Nguyễn Hữu Hùng, 11 Quốc học Huế; **Hà Tây:** Lê Bảo Khánh, 9E, Hà Đông; **Tây Ninh:** Nguyễn Thị Kim Vinh, 11A2, THPT Hoàng Lê Kha; **Đồng Nai:** Nguyễn Cảnh Lâm, 10T, Lương Thế Vinh; **Hà Giang:** Nguyễn Kim Cương, 12CT THPT NK tỉnh; **Đắk Lắk:** Mai Trọng Mẫn, 11T, THPT NK tỉnh; **Hải Phòng:** Đoàn Duy Trung, 11T, THPT Trần Phú; **Yên Bái:** Lê Đình Minh, 12A, THPT Yên Bái

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T9/283. Gọi A, B, C là ba góc của tam giác ABC. Chứng minh rằng

$$\left(1 + \cos^2 \frac{A}{2}\right) \left(1 + \cos^2 \frac{B}{2}\right) \left(1 + \cos^2 \frac{C}{2}\right) < \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)^{3\sqrt{3}}$$

Lời giải. (của bạn Đặng Thành Long, 10T-ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội)

Theo bất đẳng thức Côsi ta có:

$$\left(1 + \cos^2 \frac{A}{2}\right) \left(1 + \cos^2 \frac{B}{2}\right) \left(1 + \cos^2 \frac{C}{2}\right) \leq \frac{1}{27} \left(3 + \cos^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{B}{2} + \cos^2 \frac{C}{2}\right)^3 \quad (1)$$

Trong tam giác ta có bất đẳng thức quen thuộc:

$$\cos^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{B}{2} + \cos^2 \frac{C}{2} \leq \frac{9}{4} \quad (2)$$

Theo bất đẳng thức Bernoulli mở rộng ta có:

$$1 + \frac{3}{4} = 1 + \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} < \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)^{\sqrt{3}} \Rightarrow \left(1 + \frac{3}{4}\right)^3 < \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)^{3\sqrt{3}} \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) ta có:

$$\left(1 + \cos^2 \frac{A}{2}\right) \left(1 + \cos^2 \frac{B}{2}\right) \left(1 + \cos^2 \frac{C}{2}\right) \leq \left(\frac{3 + \frac{9}{4}}{3}\right)^3 = \left(1 + \frac{3}{4}\right)^3 < \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)^{3\sqrt{3}}$$

Nhận xét. Đây là bài toán có nhiều bạn tham gia giải. Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Hòa Bình: Hà Hữu Cao Trinh, THPT Hoàng Văn Thụ; **Đồng Nai:** Nguyễn Hải Phong, 11T1, THPT Lương Thế Vinh; **Trà Vinh:** Trần Quang Khải, 9T, Trung tâm GDTX, **Thanh Hóa:** Phạm Đình Việt, 10C3, THPT Bim Sơn; **Vĩnh Phúc:** Nguyễn Thành Trung, 10A1 THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Phú Thọ:** Vũ Chí Công, 11A1, THPT chuyên Hùng Vương; **Đắk Lắk:** Mai Trọng Mẫn, 11T, THPT Nguyễn Du; **Hải Phòng:** Cao Đình Bằng, THPT Toàn Thắng; **Hà Nội:** Nguyễn Tuấn Học, 10A1, THPT Nguyễn Tất Thành; **Hà Nội:** Nguyễn Tuấn Minh, 10A3, PTCT-Tin, ĐHSP Hà Nội.

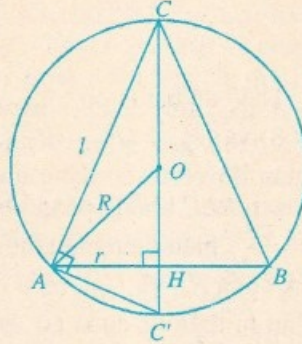
NGUYỄN MINH HÀ

Bài T10/283. Chứng minh rằng nếu hai hình nón cùng nội tiếp một hình cầu và có diện tích xung quanh bằng nhau thì thể tích của chúng cũng bằng nhau. Điều ngược lại có đúng không?

GIẢI BÀI KÌ TRƯỚC

Lời giải. (Nguyễn Xuân Trường, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc, Lê Quốc Thành, 11/1, THPT Nguyễn Duy Hiệu, Điện Bàn, Quảng Nam, Trần Thế Phiên, 11A1, THPT Bình Sơn, Quảng Ngãi; Nguyễn Thị Thanh Thảo, 10T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Bình Định và một số bạn khác).

Gọi O, R lần lượt là tâm và bán kính của hình cầu; h, r và l lần lượt là chiều cao, bán kính đáy và độ dài đường sinh của một hình nón (tròn xoay) nội tiếp hình cầu nói trên. Ta xét một thiết



diện qua trục của hình nón nội tiếp hình cầu. Thiết diện này là một tam giác cân CAB đỉnh C , nội tiếp một đường tròn (O, R) , có đáy $AB = 2r$, chiều cao $CH = h$ và cạnh bên $CA = CB = l$ (xem hình vẽ). Gọi C' là điểm xuyên tâm - đối của C trên mặt cầu, thế thì trong tam giác ACC' vuông ở A , đường cao $AH = r$ ta có hệ thức:

$$CA^2 = CC' \cdot CH, \text{ tức là: } l^2 = 2Rh; \quad (1)$$

Kí hiệu S và V lần lượt là diện tích xung quanh và thể tích của hình nón nội tiếp hình cầu (O, R) , ta có các công thức sau:

$$S = \pi r l; \quad (2)$$

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h \quad (3)$$

Từ các hệ thức (1), (2) và (3) ta thu được hệ thức sau:

$$S^2 = (6\pi R) V \quad (4)$$

Hệ thức (4) chứng tỏ rằng:

Nếu hai hình nón cùng nội tiếp một hình cầu có diện tích xung quanh S_1, S_2 và thể tích V_1, V_2 thì:

$$S_1 = S_2 \Leftrightarrow V_1 = V_2$$

Hai hình nón có diện tích xung quanh bằng nhau khi và chỉ khi thể tích của chúng bằng nhau (tức là chúng tương đương với nhau).

Nhận xét. 1) Bài toán trên đây thuộc loại dễ, không đòi hỏi tính toán phức tạp, chỉ cần biết sử dụng các công thức về diện tích xung quanh và thể tích của hình nón (tròn xoay). Tuy nhiên cũng đòi hỏi phải có sáng

tạo thì lời giải mới ngắn gọn (như lời giải nêu trên đây khi thiết lập hệ thức (1)), không cần phải xét hai trường hợp: O nằm trong hay nằm ngoài đường cao CH của hình nón).

2) Đáng tiếc cũng còn một số bạn không đọc kĩ đề bài đã vội vàng kết luận ngược lại không đúng hoặc chưa chắc đúng !!!

Nhiều bạn trình bày lời giải còn rườm rà, không gọn.

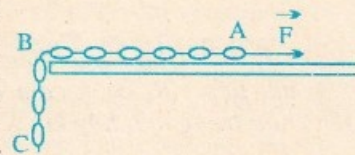
3) Ngoài các bạn đã nêu tên ở trên, các bạn sau đây có lời giải tốt:

Hà Nội: Phạm Văn Hùng, 11A1, PTCT-T-ĐHSP Hà Nội; Nguyễn Hoàng Thạch, 11T, THPT Hà Nội - Amsterdam; **Vĩnh Phúc:** Cao Việt Dăng, 11A1, Trần Bá Bách, 11A2, THPT chuyên Vĩnh Phúc, Trần Văn Sơn Hà, 11A4, THPT Bình Xuyên, V.P. **Phú Thọ:** Bùi Quang Nha, 10A1, Trần Thanh Hải, 10A1, Vũ Chí Công, 11A1, THPT chuyên Hùng Vương; **Hải Dương:** Lê Hải Yến, 11T, THPT Nguyễn Trãi; **Yên Bái:** Trần Bình Minh, 10A1, THPT chuyên Yên Bái; **Tp. Hồ Chí Minh:** Phạm Tuấn Anh, 12T, PTNK-ĐHQG Tp. HCM; **Tiền Giang:** Nguyễn Tuấn Ngọc, 11T, THPT chuyên Tiền Giang; **Hòa Bình:** Hà Hữu Cao Trình, 11T, THPT Hoàng Văn Thụ, Hòa Bình;

NGUYỄN ĐĂNG PHÁT

Bài L1/283. Một cái xích được giữ trên mặt bàn nằm ngang không ma sát mà $\frac{1}{4}$ độ dài của

xích được thả thông bên cạnh bàn. Xích có chiều dài là l , có khối lượng là m được phân bố



đều cho mọi mắt xích. Tính công cần thiết để kéo phần xích bị thông xuống trở lại mặt bàn.

Hướng dẫn giải. Để kéo xích lên phải tác dụng vào A một lực F tối thiểu cũng bằng trọng lượng $P_{BC} = m_{BC} \cdot g$ của đoạn BC bị thông xuống. Khối lượng tính cho một đơn vị dài của xích là $\mu = \frac{m}{L}$.

Đặt $BC = x$ thì $m_{BC} = \mu x = \frac{m}{L} x$, và

$$F = P_{BC} = \frac{mg}{L} x.$$

Công dA cần thiết để kéo một đoạn xích là:

$$dA = F dx = \frac{mg}{L} x dx.$$

Công A cần thiết để kéo đoạn xích $\frac{L}{4}$ lên mặt bàn là:

GIẢI BÀI KÌ TRƯỚC

$$A = \int_0^{L/4} \frac{mg}{L} x dx = \frac{1}{32} mgL$$

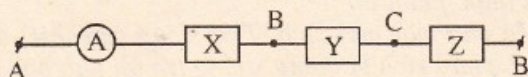
Cũng có thể giải bài toán bằng cách áp dụng định luật bảo toàn cơ năng.

Nhận xét. Các em có lời giải đúng và gọn :

Hải Dương: Hoàng Trung Trí, 10 Lí, THPT Nguyễn Trãi; **Hải Phòng:** Nguyễn Đức Trường, 12 Lí, THPT NK Trần Phú; **Hưng Yên:** Nguyễn Hải Hà, 10 Lí, THPT NK Hưng Yên; **Yên Bái:** Nguyễn Quang Thắng, 10A1, THPT chuyên Yên Bái; **Phú Thọ:** Vũ Quốc Hiến, 10B1, (CL), THPT chuyên Hùng Vương; **Hà Tây:** Chu Hoàng Thiện, 11 Lí 2, THPT chuyên Nguyễn Huệ; **Nam Định:** Trần Đức Sinh, 11 Lí, THPT chuyên Lê Hồng Phong; **Hà Nội:** Bạch Ngọc Đường, 11L, PTDL Huỳnh Thúc Kháng, Từ Liêm; **Quảng Nam:** Hoàng Anh Vũ, 12T, THPT Trần Cao Vân, Tam Kỳ; **Thừa Thiên - Huế:** Nguyễn Ngọc Linh, 11 chuyên Lí, Quốc học Huế; **Bắc Ninh:** Nguyễn Trọng Tùng, 11 Lí, THPT NK Hàn Thuyên; **Phú Yên:** Lê Ngọc Thiên, 12 Lí, THPT Lương Văn Chánh, Tuy Hòa; **Tiền Giang:** Nguyễn Phú Cường, 55A, Lê Thị Hồng Gấm, Mỹ Tho; **Đồng Nai:** Ma Nam, 11 Lí 1, THPT chuyên Lương Thế Vinh; **Quảng Trị:** Nguyễn Văn Sáu, 12H, THPT Hải Lăng; **Nghệ An:** Lê Minh Nguyên, 12A3, Hồ Việt Hùng, K28 Lí, THPT Phan Bội Châu, Vinh

MAI ANH

Bài L2/283. Cho mạch điện chứa 3 linh kiện ghép nối tiếp : R, cuộn cảm L và C, mỗi linh kiện chứa trong một hộp kín X, Y, Z (hình vẽ).



Đặt vào 2 đầu A, B của mạch điện 1 hiệu điện thế xoay chiều $u = 8\sqrt{2} \sin 2\pi ft$. Khi $f = 50\text{Hz}$, dùng một vôn kế đo lần lượt được $U_{AB} = U_{BC} = 5\text{V}$; $U_{CD} = 4\text{V}$; $U_{BD} = 3\text{V}$.

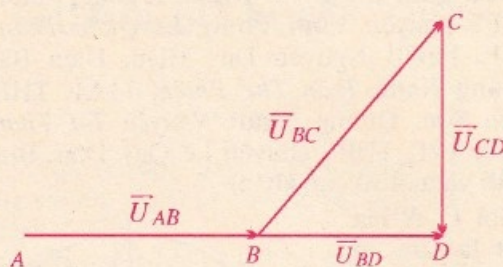
Dùng oát kế đo công suất mạch được $P = 1,6\text{W}$. Khi $f > 50\text{Hz}$ thì số chỉ ampe kế giảm. Biết $R_A \approx 0$; $R_V \approx \infty$.

a) Mỗi hộp kín X, Y, Z chứa linh kiện gì ?

b) Tìm giá trị của các linh kiện.

Hướng dẫn giải.

a) Dựa vào dữ kiện cho trong đề bài để lập luận cụ thể xem mỗi hộp X, Y, Z có thể chứa linh kiện gì. Cũng có thể lập luận đơn giản như sau.



Theo đề bài ta có : $U_{AD} = U_{AB} + U_{BD} (= 5 + 3 = 8)$ và $U_{BC}^2 = U_{CD}^2 + U_{BD}^2$ ($5^2 = 4^2 + 3^2$), suy ra giản đồ vectơ có dạng như hình vẽ. Biết trong mạch RLC không phân nhánh luôn có $U_C \perp U_R \Rightarrow \vec{U}_{AB}$ biểu diễn hiệu điện thế 2 đầu điện trở R (X chứa R), và $\vec{U}_{CD}$ biểu diễn hiệu điện thế hai đầu tụ điện (Z chứa C). Ngoài ra $\vec{U}_{BC}$ sớm pha so với $\vec{U}_{AB}$, chứng tỏ cuộn cảm L có điện trở thuần r , $\vec{U}_{BD}$ biểu diễn $\vec{U}_r$, và Y chứa cuộn cảm có độ tự cảm L và điện trở thuần r .

b) Theo đề bài thì mạch có cộng hưởng, do đó $I = \frac{P}{U_R + U_r} = 0,2\text{A} \Rightarrow R = \frac{U_{AB}}{I} = 25\Omega$. Khi

đó $Z_L = Z_C = \frac{U_{CD}}{I} = 20\Omega$

$\Rightarrow L = \frac{1}{5\pi} \text{H}; C = \frac{1}{2\pi} \cdot 10^{-3} \text{F}$; và

$r = \frac{U_r}{I} = \frac{U_{BD}}{I} = 15\Omega$.

Nhận xét. Các em có lời giải gọn và đúng :

Vĩnh Phúc: Nguyễn Duy Hưng, 11A3 và Dương Quốc Huy, 11A3, THPT chuyên Vĩnh Phúc;

Hà Nội: Phạm Nhật Minh, 12A1, THPT Chu Văn An; **Đồng Nai:** Ma Nam, 11 Lí 1, THPT chuyên Lương Thế Vinh; **Đồng Tháp:** Châu Hoàng Huy, 12T, THPT Tx. Cao Lãnh; **Nghệ An:** Hồ Việt Hùng, K28 Lí, THPT Phan Bội Châu; **Bắc Ninh:** Nguyễn Ngọc Tuấn, 11 Lí, THPT NK Hàn Thuyên; **Tuyên Quang:** Nguyễn Trung Hiếu, 12C2, Lí, THPT chuyên Tuyên Quang; **Yên Bái:** Hoàng Tiến Dũng, 12A1, THPT chuyên Yên Bái; **Hải Phòng:** Trần Đức Trường, 12 Lí, THPT NK Trần Phú; **Thái Nguyên:** Nguyễn Hoàng Cường, 12₁, THPT Trương Định; **Quảng Nam:** Hoàng Anh Vũ, 12, THPT Trần Cao Vân, Tam Kỳ; **Hòa Bình:** Giang Sơn Đạt, 11 Toán, Hoàng Văn Thụ; **Thanh Hóa:** Nguyễn Thị Thanh Hà, 11A, THPT Hà Trung; **Hải Dương:** Nguyễn Thị Thu Hằng, 11B3, và Bạch Dương, 11B2, THPT Nhị Chiểu, Kinh Môn.

MAI ANH

GIỚI THIỆU VỀ TOÁN HỌC CAO CẤP

LÀM QUEN VỚI MỘT HÌNH HỌC LẠ

GS. NGUYỄN CẢNH TOÀN

Tạp chí THHT số 10 (268) năm 1999 giới thiệu sách "Ultra non Euclidian Geometry" của giáo sư Nguyễn Cảnh Toàn. Sau đó, thỉnh thoảng giáo sư lại nhận được thư của một bạn đọc ngỏ ý muốn biết sơ qua thế nào là "Hình học siêu phi Oclit". Thỏa mãn được yêu cầu này thật là khó. Tuy nhiên giáo sư cũng cố gắng lấy ra ba ví dụ đơn giản nhất về một không gian siêu phi Oclit hai chiều. Qua ba ví dụ này, độc giả có thể thấy cái "lạ" mà chưa thấy được cái "lì" vì muốn thấy được cái "lì" của hình học siêu phi Oclit trước hết phải thấy được cái "lì" của hình học phi Oclit đã. Trong một bài báo, khó có thể làm cho những người chỉ mới có học vấn phổ thông hiểu được cái "lì" của hình học phi Oclit.

Sau đây, ta sẽ dùng các khái niệm trong hình học thông thường (hình học Oclit) để xây dựng nên những khái niệm của một thứ hình học lạ. Để phân biệt các khái niệm (như khoảng cách, đường thẳng, vòng tròn) trong hình học thông thường với hình học lạ ta sử dụng danh từ chỉ khái niệm đó có thêm chữ L và gạch nối đứng trước. Ví dụ L - vòng tròn là vòng tròn trong hình học lạ chứ không phải vòng tròn trong hình học thông thường.

Định nghĩa L - khoảng cách

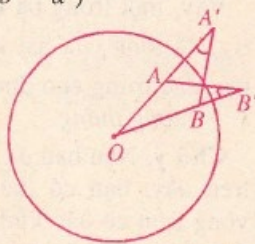
Trong một hệ tọa độ Descartes vuông góc, khoảng cách d_{AB} giữa hai điểm $A(a, a')$ và $B(b, b')$ được cho bởi công thức:

$$d_{AB} = \sqrt{(b-a)^2 + (b'-a')^2}$$

Nay ta chọn một quy ước khác về khoảng cách giữa hai điểm A, B (trong hình học lạ) gọi là L - khoảng cách, kí hiệu là σ_{AB} và được xác định trong hình học lạ nhờ các khái niệm trong hình học Oclit như sau:

Cho một vòng tròn (K) tâm O bán kính 1 gọi là vòng tròn cơ sở. Ta lấy điểm A' thẳng hàng với O, A sao cho $\overline{OA} \cdot \overline{OA'} = 1$.

Ai đã biết phép nghịch đảo thì thấy rõ A' là ảnh của A trong phép nghịch đảo với vòng tròn nghịch đảo là (K).



Hình 1

σ_{AB} là giá trị (tính bằng radian) nằm trong đoạn $[0, \pi]$ của góc định hướng giữa hai đường thẳng $A'A$ và $A'B$ lấy theo thứ tự đó (góc này xác định ly lai $k\pi$). Nói nôm na (nhưng không chính xác lắm), đó là góc mà đứng ở A' ta nhìn đoạn AB.

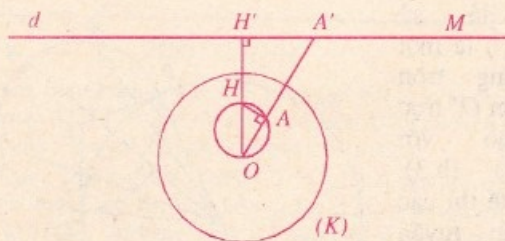
Định nghĩa này chỉ có nghĩa khi mà nó không phụ thuộc vào thứ tự A, B nghĩa là ta phải có $\sigma_{BA} = \sigma_{AB}$. Quả vậy, nếu ta lấy điểm B' thẳng hàng với O, B sao cho $\overline{OB} \cdot \overline{OB'} = 1$ thì tứ giác $AA'BB'$ là nội tiếp (do $\overline{OA} \cdot \overline{OA'} = \overline{OB} \cdot \overline{OB'}$) và ta có hai góc định hướng bằng nhau $(A'A, A'B) = (B'A, B'B)$ và giá trị thuộc đoạn $[0, \pi]$ của hai vế bằng nhau.

Chú ý. Ta xét A, B khác điểm O. Nếu một trong hai điểm A, B (ví dụ A) nằm trên vòng tròn cơ sở (K) thì A' trùng với A và đường thẳng AA' không xác định. Khi đó ta xác định σ_{AB} bằng góc $(B'A, B'B)$. Nếu cả A và B đều nằm trên vòng tròn cơ sở (K) thì σ_{AB} không xác định.

Bây giờ ta xét tương quan giữa các khái niệm thông thường với các L - khái niệm.

Định lí 1. Mọi đường thẳng đi qua O sẽ là một L - đường thẳng đẳng hướng, nghĩa là khoảng cách σ_{AB} giữa bất cứ hai điểm A, B nào của đường đó cũng bằng không. Điều này là hiển nhiên vì khi đó hai đường thẳng $A'A$ và $A'B$ luôn trùng nhau.

Định lí 2. Mọi đường thẳng không đi qua O sẽ là một L - vòng tròn có vô số L - tâm ứng với vô số L - bán kính. Quỹ tích tất cả các L - tâm là một vòng tròn (thông thường) đi qua O.



Hình 2

Quả vậy, giả sử d là một đường thẳng không đi qua O. Trên d ta lấy một điểm A' cố định bất kì và một điểm M di động. Gọi A là điểm

TOÁN HỌC VÀ ĐỜI SỐNG

TỈ LỆ VÀNG TRONG HỘI HỌA

PHÙNG HỒNG KỶ
(Hà Nội)

"Hãy đo tất cả những gì có thể
đo được và thậm chí cả những
cái không thể đo được".

GALILEO GALILEI

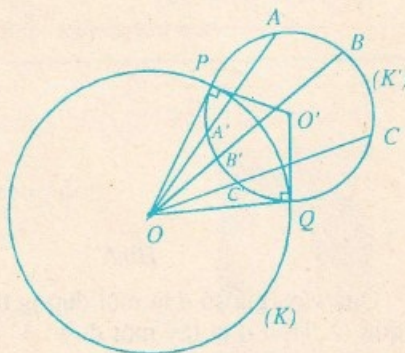
Khi vẽ tranh người họa sĩ thường để ngọn bút cuốn hút theo sự rung động của tâm hồn trước cảnh vật, con người. Nhưng khi nghiên cứu tranh, các nhà phê bình mới làm sáng tỏ các dạng bố cục của nó, qua đó hiểu thêm

thẳng hàng với O, A' sao cho $\overline{OA} \cdot \overline{OA'} = 1$. Từ O ta hạ đường vuông góc OH' và lấy H thẳng hàng với O, H' sao cho $\overline{OH} \cdot \overline{OH'} = 1$.

σ_{AM} được xác định nhờ góc $(A'A, A'M)$ mà góc này không đổi khi M chạy trên d . Vậy σ_{AM} không đổi khi M chạy trên d nên d là một L -vòng tròn tâm A , bán kính bằng giá trị thuộc đoạn $[0, \pi]$ của góc $(A'A, A'M)$. Vì $\overline{OA} \cdot \overline{OA'} = \overline{OH} \cdot \overline{OH'} = 1$ nên tứ giác $AA'H'H$ nội tiếp, do đó $\angle HAA' = \angle HH'A' = \frac{\pi}{2}$. Vậy điểm A nằm trên vòng tròn đường kính OH . Bất cứ điểm nào trên vòng tròn này cũng đều có thể lấy làm L -tâm cho L -vòng tròn d . Ứng với mỗi L -tâm, L -vòng tròn d lại có một L -bán kính tương ứng. Ví dụ, nếu lấy H làm L -tâm thì L -bán kính tương ứng là $\frac{\pi}{2}$.

Định lý 3. Mọi vòng tròn (K') trục giao với vòng tròn cơ sở (K) là một L -đường thẳng.

Giả sử (K') là một vòng tròn tâm O' trục giao với (K) (h.3). Thế thì các tiếp tuyến của (K) xuất phát từ O' sẽ tiếp xúc



Hình 3

nguyên nhân tạo ra sức truyền cảm của bức tranh.

Những cấu trúc hình học thường có mặt trong các tác phẩm của các nhà danh họa. Các biểu đồ với các mức độ hiện diện khác nhau trong bố cục bức tranh cũng thường được xét đến khi xem tranh, tùy thuộc vào hình dáng của hình hình học được lấy làm cơ sở cho bố cục bức tranh mà người ta gọi tên các loại bố cục như : bố cục hình chóp, bố cục hình tròn, bố cục hình xoắn ốc... Chúng ta bắt đầu từ tỉ lệ vàng :

TỈ LỆ VÀNG

Cách nói : "Tỉ lệ vàng" là do nhà danh họa, nhà khoa học người Italia Leonacdo da Vinci (1452 - 1519) phát biểu đầu tiên.

Bài toán : Chia một đoạn AB bởi điểm M thành hai phần không bằng nhau sao cho tỉ số

với (K) ở các giao điểm P, Q của (K) và (K') .

Cho ba điểm A, B, C trên (K') . Ta lấy các điểm A', B', C' theo thứ tự thẳng hàng với các cặp $(O, A), (O, B), (O, C)$ sao cho $\overline{OA} \cdot \overline{OA'} = \overline{OB} \cdot \overline{OB'} = \overline{OC} \cdot \overline{OC'} = 1$ thì A', B', C' đều nằm trên (K') vì $\overline{OA} \cdot \overline{OA'} = \overline{OB} \cdot \overline{OB'} = \overline{OC} \cdot \overline{OC'} = \overline{OP}^2 = \overline{OQ}^2 = 1$.

$\sigma_{AB}, \sigma_{AC}, \sigma_{BC}$ theo thứ tự được xác định nhờ các góc $(A'A, A'B), (A'A, A'C), (B'B, B'C)$ mà các góc nội tiếp đó (trong K') theo thứ tự bằng nửa các góc ở tâm $(O'A, O'B), (O'A, O'C), (O'B, O'C)$ (sai khác $k\pi$) ; giữa ba góc này, ta có hệ thức Chasles :

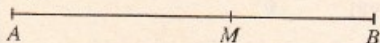
$(\vec{O'A}, \vec{O'B}) + (\vec{O'B}, \vec{O'C}) = (\vec{O'A}, \vec{O'C})$
ly lại $2k\pi$.

Vậy, một trong ba L -khoảng cách $\sigma_{AB}, \sigma_{AC}, \sigma_{BC}$ là tổng của hai khoảng cách kia. Tính chất này đặc trưng cho đường thẳng. Vậy (K') là một L -đường thẳng.

Chú ý. Nếu bạn đã học số phức thì trong ví dụ trên đây, bạn có thể chọn vòng tròn cơ sở là vòng tròn có bán kính $i = \sqrt{-1}$. Hoặc giả bạn có thể lấy bán kính vòng tròn cơ sở là một số thực hay một số thuần ảo bất kì. Đặc biệt có thể lấy bán kính đó là vô tận. Khi đó phép nghịch đảo đối với vòng tròn cơ sở sẽ biến thành một phép đối xứng trục và các định lý 1, 2, 3 vẫn đúng. Tuy nhiên trong trường hợp này, ở định lý 2, quỹ tích các L -tâm là đường thẳng đối xứng với d (trong phép đối xứng trục), còn L -bán kính thì không thay đổi theo L -tâm.

giữa đoạn nhỏ MB và đoạn lớn AM bằng tỉ số giữa đoạn lớn và cả đoạn, nghĩa là $\frac{MB}{MA} = \frac{AM}{AB}$.

Tỉ số này xấp xỉ bằng 0,618, gọi là tỉ lệ vàng. M được gọi là điểm chia vàng (xem bìa 2). Một hình chữ nhật có tỉ lệ giữa chiều rộng và chiều dài bằng 0,618 gọi là hình chữ nhật vàng.

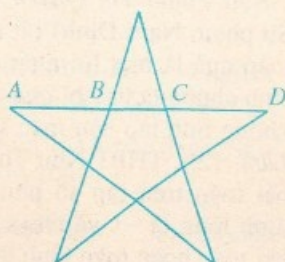


Các bậc thầy về nghệ thuật cổ Ai Cập, cổ La Mã đã ý thức được tỉ lệ đẹp này từ lâu đời. Tỉ lệ vàng thống trị trong nghệ thuật kiến trúc, điêu khắc, hội họa từ các miếu tế thần ở Athen đến các thành cổ La Mã, rồi lăng các công nương Ấn Độ, cho tới tháp Eiffel ở Paris... khắp nơi đều thấy xuất hiện tỉ lệ vàng.

Trên một ngôi sao 5 cánh đều cũng chứa nhiều tỉ lệ vàng:

$$\frac{BC}{AB} = \frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD} \approx 0,618.$$

Trường phái Pythagoras cổ Hy



Lập đã lấy ngôi sao năm cánh làm biểu trưng của mình.

BỨC TRANH RỪNG THÔNG CỦA SISKIN

Bạn đọc yêu hội họa chắc hẳn không thể quên mảng tranh phong cảnh Nga cuối thế kỉ XIX với những tên tuổi lừng danh thế giới như Siskin, Vaxiliev, Aivazốpski, Kuinji, Lêvitan... Đó là những bài thơ bằng màu sắc ca ngợi thiên nhiên Nga tươi đẹp, tâm hồn Nga chứa chan với những cây đại thụ sừng sững, quên thời gian, những sóng biển trào dâng khát vọng, những con suối lang thang róc rách, những tiếng vọng xa xăm từ những cánh rừng bạch dương lặng ngắt...

Trong bức tranh "Rừng thông" nổi tiếng của Siskin (1832-1898) có thể thấy rõ tỉ lệ vàng.

Cây thông đứng ở phía trước bức tranh được mặt trời chiếu sáng chia chiều dài bức tranh theo tỉ lệ vàng. Bên phải cây thông này một gò đất rực nắng chia mảng bên phải bức tranh theo tỉ lệ vàng. Phía trái cây thông lớn lại có một cây nữa chia mảng này theo tỉ lệ vàng. Sự có mặt của các nét dọc và ngang trong bức tranh theo tỉ lệ vàng đem đến một cảm giác bình ổn, yên tĩnh.





CUỘC CHƠI ĐÁU THIÊN NIÊN KỲ

Kì này các bạn đều nhận ra chân dung của Tổng biên tập Nguyễn Cảnh Toàn. Có bạn nhìn thế nào mà "đám" là ảnh chụp khi 22 tuổi.

Có 8 bạn trúng 100% (khẳng định ảnh này chụp khi Tổng biên tập đúng 52 tuổi) :

- 1) *Trần Tiến Hoàng*, 11 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Quảng Trị
- 2) *Lê Quý Lợi*, 9B, THCS Nguyễn Thượng Hiền, Hà Tây.
- 3) *Phạm Thị Quỳnh Trang*, K24C, khoa Toán, ĐHSP Hà Nội II.
- 4) *Vương Quang Trọng*, 10A, THPT thị xã Lào Cai, Lào Cai.
- 5) *Hoàng Thao*, 10A1, THPT Tuệ Tĩnh, Cẩm Giàng, Hải Dương
- 6) *Lê Anh Vũ*, 11A2, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Đà Nẵng
- 7) *Nguyễn Minh Hải*, 10T2, THPT NK Quảng Bình
- 8) *Cao Việt Dũng*, 11B3, THPT Nhị Chiểu, Phú Thử, Kinh Môn, Hải Dương.

Còn đây là lời các bạn trúng giải :

- "Rất khó khăn và đầy bất ngờ" (*Nguyễn Minh Hải*)

- "Thật hóc búa nhưng cũng thật thú vị" (*Hoàng Thao*)

- "Tuy khó nhưng rất bổ ích" (*Vương Quang Trọng*).

Bí quyết đoán đúng tuổi được bạn *Trần Tiến Hoàng* "tiết lộ" : "Nhờ một bạn đoán là 47, bố đoán 56 nên em lấy trung bình cộng là... 52 !" Thật là "con nhà toán có khác."

Cảm ơn tất cả các bạn và... hãy cùng tham gia cuộc chơi tháng này.

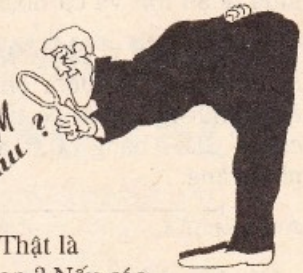
CLB

KẾT QUẢ NÀO ... SAI ?

Tất cả các bạn đều chỉ ra rằng : "Làm gì có số a nào thỏa mãn $a^2 + a + 1 = 0$ nên tổng

$$a^{1981} + \frac{1}{a^{1981}}$$

SAI LẦM ở đâu ?



sao mà tồn tại được !" Thật là chí lí phải không các bạn ? Nếu các bạn biết thêm các số ảo thì lại phải giật mình đấy ! Khi đó kết quả thứ nhất sẽ đúng, còn cách làm thứ hai vẫn sai vì dù có cả các số ảo thì từ $a^2 + a + 1 = 0$ cũng không thể suy ra $a = 1$.

Không hiểu thời... 1981, đáp án của bài thi này sẽ như thế nào ?

Bạn *Phạm Thị Quyên* (Toán - Tin, Cao đẳng Sư phạm Nam Định) rất thú vị khi tâm sự : "Bài toán quả là một lời nhắc nhở lí thú, các bạn học sinh chúng ta hay bị *quá nhiệt huyết* làm toán mà không tính tảo nên mắc sai lầm". Bạn *Đào Minh Lâm*, 12E, THPT Như Thanh, Thanh Hóa đã giải bài toán trên tập số phức C ($R \subset C$) để khẳng định tổng là -1 và cho rằng trên tập số phức thì bài toán hoàn toàn bình thường.

Riêng KIHIVI xin bàn thêm : "Tác giả đề toán cũng bị *quá nhiệt huyết* đến mức quên rằng ở phổ thông chưa học đến số ảo". Cảm ơn các bạn.

KIHIVI

SƠ HỒ GÌ KHÔNG ?

Bài toán: Tồn tại hay không hàm số liên tục $f: R \rightarrow R$ sao cho khi x vô tỉ thì $f(x)$ nhận giá trị hữu tỉ, còn khi x hữu tỉ thì $f(x)$ nhận giá trị vô tỉ ?

Lời giải. Giả sử tồn tại hàm số f thỏa mãn bài toán. Xét $\{x_n\}$ gồm các số vô tỉ và $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x_0$ là

số hữu tỉ. Do f liên tục trên R nên $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(x_0)$

với $f(x_0)$ là số vô tỉ. Nhưng x_n vô tỉ nên $f(x_n)$ hữu tỉ, suy ra $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n)$ là số hữu tỉ. Vậy $f(x_0)$ vừa là

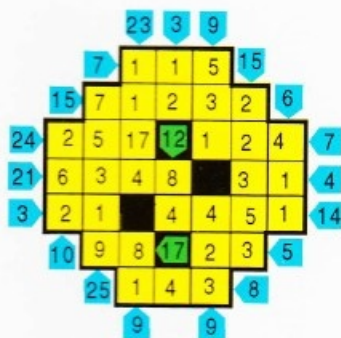
số vô tỉ, vừa là số hữu tỉ nên mâu thuẫn. Chứng tỏ không tồn tại f thỏa mãn bài toán.

Bạn thấy lời giải trên có sơ hở gì không ? Nếu sơ hở thì bạn có thể giải quyết bài toán trên như thế nào ?

TRẦN NGỌC THẮNG

(SV K50, Khoa Toán - Tin, ĐHSP Hà Nội)

Kết quả ĐIỀN VÀO Ô TRỐNG



Hầu hết các bạn đều thấy "ngon" quá vì điền được ngay và gửi cách điền đi ngay. Thế thì... làm sao được thưởng ? Bạn **Lê Khánh Phi**, 11A6, THPT Lê Hoàn, Thọ Xuân, Thanh Hóa đã liệt kê đến 233 cách điền. Bạn **Thái Duy Hưng**, (Toán B, K33, ĐHSP Thái Nguyên) "chơi" được 70 cách.

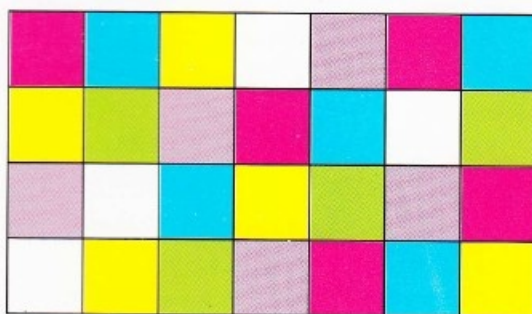
Xin trao tặng phẩm cho 2 bạn và giới thiệu một chút ... đáp án.

Cảm ơn các bạn

NGỌC MAI

MÀU NÀO CHO HỢP

Hãy xếp 4 ô vuông đã có màu vào 4 ô trắng sao cho màu sắc trong hình hợp logic.



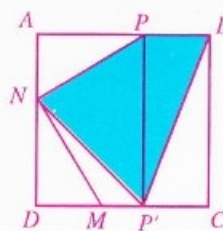
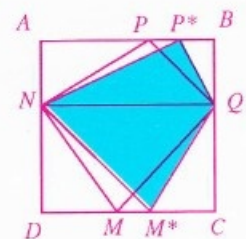
BC



Kết quả : BÀI TOÁN CHIA ĐẤT

Nhiều bạn chưa nhìn thấy ao bao giờ vẫn hồ hởi giúp anh nông dân đào ao. Chỉ cần biết kiến thức về diện tích một chút là có thể sáng tạo ra một số kiểu sau đây :

Kiểu 1. Từ N kẻ đường thẳng song song với AB cắt BC tại Q và chọn P^* thuộc đoạn thẳng PB , chọn M^* thuộc đoạn thẳng MC thì tứ giác NP^*QM^* có diện tích bằng diện tích tứ giác $NPQM$ và đúng bằng nửa diện tích thửa ruộng hình vuông $ABCD$. Như vậy, đối với kiểu 1 đã có vô số cách đào ao thỏa mãn nguyện vọng của anh nông dân.



Kiểu 2. Nếu $PB \leq MC$ thì gọi P' là hình chiếu vuông góc của P trên DC thì cái ao cần đào là hình tứ giác $NPBP'$

Còn một vài cách khác nữa, nhưng đưa thử cho anh nông dân,

giảng mãi mà anh ấy chả hiểu phải làm thế nào, chẳng hạn có bạn "tham mưu" : lấy G thuộc NC sao cho khoảng cách từ G đến BC đúng bằng $\frac{NA \cdot PB}{BC}$ (?) Các bạn nên nhớ là bài toán thực tế

thì cũng phải cho lời giải thực tế nhé ! Xin cảm ơn và "hậu tạ" ít lạc, bấp vừa thu hoạch được cho bạn **Phạm Trọng Hiếu**, 11A1, khối phổ thông chuyên Toán - Tin, Đại học Sư phạm Vinh.

ANH HAI LỬA

NHỮNG CON SỐ ĐẸP

Các bạn thử kiểm tra xem :

$$153 = 1^3 + 5^3 + 3^3$$

Liệu có con số nào có 3 chữ số cũng đẹp như thế không ? Các bạn còn suy tư gì thêm về vấn đề này không ?

NGUYỄN VĂN THIÊM

ĐẠI HỌC HUẾ



GS.TS Nguyễn Viên Thọ
Hiệu trưởng ĐH Huế

Tháng 3 năm 1957, viện Đại học Huế được thành lập gồm 4 phân khoa đại học : Sư phạm, Khoa học, Văn Khoa, Luật Khoa. Năm 1959-1960 có thêm phân khoa Y Khoa. Thời kì này còn có Viện Hán học và các trường

Cao đẳng chuyên môn trực thuộc : Nghệ thuật, Nữ hệ sinh Quốc gia và Trường cán sự Y tế và Điều dưỡng.

Theo Nghị định 30/CP ngày 4 tháng 4 năm 1994 của Chính phủ nước Cộng hòa xã hội chủ nghĩa Việt Nam, để hội nhập với xu thế phát triển của nền giáo dục đại học các nước tiên tiến trên thế giới Đại học Huế được thành lập như một đại học vùng trên cơ sở hợp nhất các trường đại học trên địa bàn thành phố Huế. Hiện nay Đại học Huế có 5 trường thành viên : Đại học Sư phạm, Đại học Khoa học, Đại học Y Khoa, Đại học Nông Lâm, Đại học Nghệ thuật và Khoa Kinh tế (trực thuộc). Ngoài ra còn có : Trung tâm Đào tạo từ xa, Trung tâm Khoa học xã hội và Nhân văn, Trung tâm Tài nguyên môi trường và Công nghệ sinh học, Trung tâm Phân tích, Trung tâm Giáo dục thể chất, Trung tâm giáo dục quốc phòng, Trung tâm Công nghệ thông tin và Trung tâm Đào tạo Quốc tế.

Đại học Huế là một đại học đa ngành, hiện đang có 59 ngành đào tạo cử nhân, 42 ngành đào tạo thạc sĩ, 9 ngành đào tạo tiến sĩ.

Hiện nay Đại học Huế có trên 42000 sinh viên bao gồm các hệ đào tạo chính quy, tại

chức, từ xa... Tổng số cán bộ công chức gần 1.600 người, trong đó trên 1100 là cán bộ giảng dạy và nghiên cứu, 45% cán bộ giảng dạy và nghiên cứu có trình độ thạc sĩ, tiến sĩ, tiến sĩ khoa học, phó giáo sư, giáo sư...

Trong ĐH Huế có Khối phổ thông chuyên Toán thuộc trường ĐH Khoa học, tuyển sinh từ 1995, hiện có 82 học sinh của các lớp 10, 11, 12. Đã có học sinh đoạt giải Toán quốc gia, và hàng năm 100% học sinh của khối thi đỗ Đại học.

Đại học Huế là một trong những trung tâm đào tạo, nghiên cứu, giao lưu khoa học, giáo dục và văn hóa lớn của miền Trung. Đại học Huế đã triển khai 74 nhiệm vụ cơ bản cấp Nhà nước, 322 đề tài cấp Bộ, đăng cai tổ chức nhiều hội nghị, hội thảo quốc gia, quốc tế... Nhiều đề tài đã được hoàn thành và nghiệm thu với chất lượng tốt. Một số đề tài được chuyển giao ứng dụng vào sản xuất và đời sống đạt hiệu quả cao. Đại học Huế đã có quan hệ hợp tác quốc tế với trên 50 trường đại học, viện nghiên cứu và các tổ chức khác trên thế giới. Đã thực hiện trên 100 chương trình dự án hợp tác nghiên cứu khoa học thuộc nhiều lĩnh vực...

Trong định hướng chiến lược phát triển giai đoạn 2000-2010, Đại học Huế là một đại học đa ngành, có phương thức đào tạo đa dạng với hệ thống ngành nghề phong phú mang đặc trưng của khu vực, nhằm đào tạo đội ngũ cán bộ khoa học và cán bộ quản lí có trình độ cao cho đất nước, có khả năng giao lưu hợp tác bên ngoài, có khả năng gắn kết giữa nghiên cứu khoa học cơ bản và công nghệ, giữa nghiên cứu với ứng dụng nhằm đáp ứng tốt nhất cho sự nghiệp công nghiệp hóa, hiện đại hóa đất nước.

ISBN : 0866-0853

Chỉ số : 12884

Mã số : 8BT89M1

Chế bản tại Tòa soạn

In tại Nhà máy in Diên Hồng, ngõ 187 phố Giảng Võ

In xong và nộp lưu chiểu tháng 5 năm 2001

Giá : 3.000đ

Ba nghìn đồng