

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO * HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

Toán học & Tuổi trẻ

11

2000

SỐ 281 - NĂM THỨ 37 - TẬP CHÍ RA HÀNG THÁNG

TOÁN TUỔI THƠ đã đến với bạn đọc



TOÁN HỌC MUÔN MÀU

Chuyện chứng minh ĐỊNH LÍ PITAGO

Có một giai thoại toán học kể rằng người ta đã giết bò đực làm lễ mừng định lý Pitago. Thực ra định lý này đã được biết ở Ai Cập, Hy Lạp, Trung Quốc, Ấn Độ trước thời Pitago khoảng vài trăm năm, nhưng Pitago (khoảng 580 – 500 trước CN) là người đầu tiên đã chứng minh được định lý này. Tóm tắt cách chứng minh định lý Pitago trong quyển *Cơ sở của Oclic* (khoảng 300 năm trước CN) như sau (hình 1)

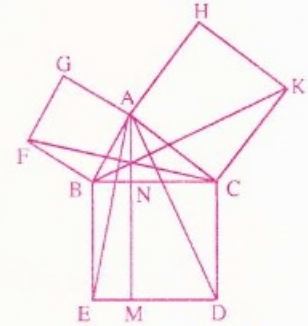
$$\begin{aligned} \text{Cho } \triangle ABC \text{ vuông ở } A \text{ thì } AB^2 + AC^2 &= S_{ABFG} + S_{ACKH} = \\ &= 2S_{FBC} + 2S_{KCB} = 2S_{ABE} + 2S_{ACD} = S_{BEMN} + S_{CDMN} = S_{BCDE} = BC^2 \end{aligned}$$

Đây là cách chứng minh bằng công thức tính diện tích và biến đổi đại số.

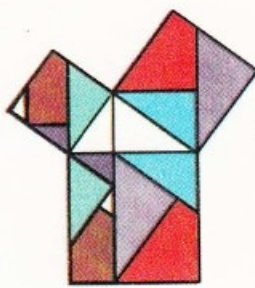
Cách chứng minh thứ hai dựa vào việc phân chia hai hình vuông nhỏ thành nhiều mảnh rồi ghép lại để vừa đúng bằng hình vuông lớn (hình 2a, 2b, 2c, 2d và hình ở Giải trí toán học THPT số 275 tháng 5-2000).

Còn cách chứng minh thứ ba : cùng ghép thêm (hoặc bớt đi) một số hình mới vào hai hình vuông nhỏ và hình vuông lớn (hình 3 a, b).

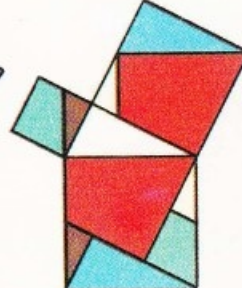
Đến nay người ta đã tìm được trên một trăm cách chứng minh định lý Pitago.



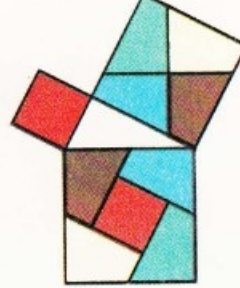
Hình 1



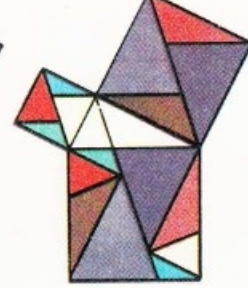
Hình 2a



Hình 2b



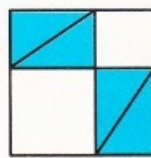
Hình 2c



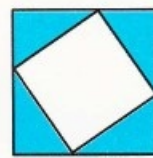
Hình 2d

DÀNH CHO BẠN ĐỌC

Các bạn hãy chứng minh định lý Pitago bằng cả 3 cách nói trên. Sẽ có 5 tặng phẩm dành cho các bạn đưa ra nhiều cách ghép khác nhau tương đối đơn giản (ngoài các cách ghép trên).



Hình 3a



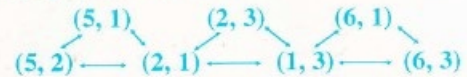
Hình 3b

Giải đáp bài :

LỤC GIÁC ĐỐI MÀU

Chú ý rằng sau khi gấp thành lục giác, cần dán hai tam giác không màu vào nhau, đẩy ba đỉnh không kề nhau xuống dưới vào phía trong, rồi mở 3 cánh ra để được lục giác có màu mới.

Kí hiệu 2 màu ứng với 2 mặt của lục giác là (x, y), ta có thể biến đổi theo chiều mũi tên để được lục giác có màu mới theo sơ đồ bên :



Các bạn sau giải đúng (tuy chưa đầy đủ như sơ đồ) sẽ nhận được tặng phẩm của Tòa soạn :

- 1) Phạm Quang Vương, 11E, THPT Kê Sặt, Bình Giang, Hải Dương,
- 2) Phạm Tiến Dũng, 11A1, THPT Triệu Sơn 2, Thanh Hóa
- 3) Hoàng Trung Hân, 10C, THPT Ngô Quyền, Tp Nam Định
- 4) Chu Viết Ký, số 3 ngõ 8 phố Cây Tháp phường Hòn Gai, Tp Hạ Long, Quảng Ninh

PHI PHI

Toán học và Tuổi trẻ

Mathematics and Youth

Năm thứ 37
Số 281 (11-2000)
Tòa soạn : 57 Giảng Võ, Hà Nội
ĐT : 04.5142648-04.5142650
FAX: (84).4.5142648

Tổng biên tập :
NGUYỄN CẢNH TOÀN

Phó tổng biên tập :
NGÔ ĐẠT TỬ
HOÀNG CHÚNG

Hội đồng biên tập :

NGUYỄN CẢNH TOÀN,
HOÀNG CHÚNG, NGÔ ĐẠT TỬ,
LÊ KHẮC BẢO,
NGUYỄN HUY ĐOAN,
NGUYỄN VIỆT HẢI, ĐINH
QUANG HẢO, NGUYỄN
XUÂN HUY, PHAN HUY
KHẢI, VŨ THANH KHIẾT, LÊ
HẢI KHÔI, NGUYỄN VĂN
MẬU, HOÀNG LÊ MINH,
NGUYỄN KHẮC MINH, TRẦN
VĂN NHUNG, NGUYỄN
ĐĂNG PHÁT, PHAN THANH
QUANG, TẠ HỒNG QUẢNG,
ĐẶNG HÙNG THẮNG,
VŨ DƯƠNG THỤY,
TRẦN THÀNH TRẠI,
LÊ BÁ KHÁNH TRÌNH,
NGÔ VIỆT TRUNG

Trưởng Ban biên tập :
NGUYỄN VIỆT HẢI

Thư ký Tòa soạn :
LÊ THỐNG NHẤT

Thực hiện :
VŨ KIM THỦY

Trị sự :
VŨ ANH THƯ

Trình bày :
NGUYỄN THỊ OANH

Đại diện phía Nam :
TRẦN CHÍ HIẾU
231 Nguyễn Văn Cừ,
TP Hồ Chí Minh
ĐT : 08.8323044

TRONG SỐ NÀY

- 2 Dành cho Trung học cơ sở – For Lower Secondary Schools
Vũ Đức Cảnh – Một số bài toán về giá trị tuyệt đối
- 4 Lịch sử Toán học - History of Math
Đặng Hùng Thắng – Hoa La Canh, nhà toán học lỗi lạc của Trung Quốc và thế giới
- 5 Tiếng Anh qua các bài toán – English through Math Problems – Ngô Việt Trung
- 6 Thi tuyển sinh vào Đại học - University Entrance Exams
Lê Thống Nhất – Đề thi tuyển sinh môn Toán vào ĐH Dược Hà Nội năm 2000
- 8 Dành cho chuẩn bị thi vào Đại học - For University Entrance Preparation
Nguyễn Quốc Hải – Khai thác các cách giải bài toán chứng minh bất đẳng thức
- 10 Diễn đàn dạy và học toán - Math Teaching Forum
Hoàng Hoa Trại – Phương pháp giải một bài toán cực trị trong hình giải tích
- 11 Nhìn ra thế giới - Around the World
Đề thi Olympic toán của Pháp
- 12 Đề ra kì này – Problems in this Issue
T1/281, ..., T10/281, L1, L2/281
- 14 Giải bài kì trước – Solutions to Previous Problems
Giải các bài của số 277
- 22 Kết quả cuộc thi giải Toán và Vật lí trên THPT năm học 1999-2000

Câu lạc bộ – Math Club

Bìa 1:

- GS. TS. Nguyễn Cảnh Toàn và TS. Nguyễn Đăng Quang cùng các em học sinh Hà Nội được khen thưởng.
- Tiếng hát chào mừng Toán Tuổi thơ của học sinh trường Tiểu học Kim Liên Hà Nội.
- Toán tuổi thơ là người bạn của chúng em.

Ảnh : Việt Hưng - Ngọc Lang

Bìa 2 : Toán học muôn màu –

Chuyện chứng minh ĐỊNH LÍ PITAGO

Bìa 3 : Giải trí toán học – Math Recreation

Bìa 4: Toán tuổi thơ đã đến với bạn đọc

Dành cho các bạn TRUNG HỌC CƠ SỞ



MỘT SỐ BÀI TOÁN VỀ GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

VŨ ĐỨC CÀNH

Lớp D27C, Trường Đại học An Ninh, Hà Nội

I) Một số tính chất của giá trị tuyệt đối

Cho a là số thực, ta có

- 1) $|a| = \begin{cases} a & \text{nếu } a \geq 0 \\ -a & \text{nếu } a < 0 \end{cases}$ 2) $|a| \geq 0$
- 3) $|a| = |-a|$ 4) $\sqrt{a^2} = |a|$; $|a|^2 = a^2$
- 5) $|a| \geq a \geq -|a|$ 6) $|a| + |b| \geq |a+b|$

Chứng minh: Do 2 vế của bất đẳng thức không âm nên (6) tương đương với: $(|a| + |b|)^2 \geq (a+b)^2$
 $\Leftrightarrow |ab| \geq ab$. Vậy (6) đúng.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $ab \geq 0$.

Hệ quả:

$$|a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| \geq |a_1 + a_2 + \dots + a_n|$$

$$7) |a+b| \geq ||a| - |b||$$

Chứng minh: Do 2 vế của bất đẳng thức không âm nên

$(a+b)^2 \geq (|a| - |b|)^2 \Leftrightarrow ab \geq -|ab|$ đúng, nên (7) đúng. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $ab \leq 0$

$$8) |a| \geq |b| \Leftrightarrow (a+b)(a-b) \geq 0$$

$$9) a \geq |b| \Leftrightarrow a \geq b \geq -a$$

II. Phương trình, bất phương trình có dấu giá trị tuyệt đối

Ví dụ 1. Giải bất phương trình

$$|4x^3 - 3x| \leq 1$$

Giải. Ta có: $|4x^3 - 3x| \leq 1 \Leftrightarrow (4x^3 - 3x)^2 \leq 1^2$
 $\Leftrightarrow (4x^3 - 3x)^2 - 1 \leq 0$

$$\Leftrightarrow [4x^3 - 3x + 1][4x^3 - 3x - 1] \leq 0$$

$$\Leftrightarrow [(x+1)(4x^2-4x+1)][(x-1)(4x^2+4x+1)] \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2-1)(2x-1)^2(2x+1)^2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2-1)(4x^2-1)^2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - 1 = 0 \\ x^2 - 1 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1/4 \\ x^2 \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 \leq 1 \Leftrightarrow |x| \leq 1$$

Ví dụ 2. Cho số thực $a \geq 1$. Giải bất phương trình:

$$|x^2 - 2ax + a| \geq |x^2 - a|$$

Giải: Ta có:

$$\begin{aligned} |x^2 - 2ax + a| \geq |x^2 - a| &\Leftrightarrow (x^2 - 2ax + a)^2 \geq (x^2 - a)^2 \\ &\Leftrightarrow (x^2 - 2ax + a)^2 - (x^2 - a)^2 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow [(x^2 - 2ax + a) + (x^2 - a)][(x^2 - 2ax + a) - (x^2 - a)] \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (2x^2 - 2ax)(2a - 2ax) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow -4ax(x-1)(x-a) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow x(x-1)(x-a) \leq 0 \end{aligned}$$

Suy ra nghiệm của bất phương trình là

$$\begin{cases} x \leq 0 \\ 1 \leq x \leq a \end{cases}$$

Ví dụ 3: Giải và biện luận hệ phương trình sau theo tham số m :

$$\begin{cases} |x - y| + |x + y| = m & (1) \\ x^3 + |y|^3 = m^3 & (2) \end{cases}$$

Giải. Giả sử hệ có nghiệm $(x; y)$. Để ý rằng nếu $xy \geq 0$ thì $|x+y| = |x| + |y|$, còn nếu $xy \leq 0$ thì $|x-y| = |x| + |y|$ nên từ (1) ta có: $m \geq |x| + |y|$. Suy ra:

$$x^3 + |y|^3 = m^3 \geq (|x| + |y|)^3 = |x|^3 + |y|^3 + 3|x||y|(|x| + |y|)$$

Mà $x^3 \leq |x|^3$, nên ta có:

$$|x||y|(|x| + |y|) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Nếu $x = 0$ thì thay vào (1) và (2), ta được $m = 0$ và $y = 0$.

Nếu $y = 0$ thì thay vào (1) và (2) ta được $m = 0$ và $x = 0$.

Vậy nếu hệ có nghiệm thì $m = 0$ và từ đó chỉ có 1 nghiệm $x = 0, y = 0$.

Kết luận: Nếu $m \neq 0$ thì hệ phương trình vô nghiệm.

Nếu $m = 0$ thì nghiệm của hệ là $x = 0; y = 0$.

Ví dụ 4. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} |x + 1| + |y - 3| = m \\ |y + 1| + |x - 3| = m \end{cases}$$

Giải. Giả sử hệ có nghiệm (x_0, y_0)

Ta thấy:

$$\begin{aligned} |(2-x_0)+1| + |(2-y_0)-3| &= |3-x_0| + |-y_0-1| \\ &= |y_0+1| + |x_0-3| = m \text{ và } |(2-y_0)+1| + |(2-x_0)-3| \\ &= |3-y_0| + |-x_0-1| = |x_0+1| + |y_0-3| = m. \end{aligned}$$

Từ đó nếu hệ có nghiệm (x_0, y_0) thì hệ cũng có nghiệm $(2-x_0, 2-y_0)$.

Để hệ có nghiệm duy nhất thì hai nghiệm (x_0, y_0) và $(2-x_0, 2-y_0)$ phải trùng nhau, tức là

$$\begin{cases} x_0 = 2 - x_0 \\ y_0 = 2 - y_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 1 \end{cases}$$

Với $x_0 = y_0 = 1$ ta suy ra $m = 4$.

Nếu $m = 4$ thì dễ thấy $x = y = 1$ và $x = y = 3$ là nghiệm của hệ.

Kết luận : Không tồn tại m để hệ có nghiệm duy nhất.

III. Bất đẳng thức có dấu giá trị tuyệt đối

Ví dụ 1. Chứng minh rằng nếu $t \neq 0$ thì

$$\left| t + \frac{1}{t} \right| \geq 2.$$

Giải. Xét hiệu :

$$\begin{aligned} \left| t + \frac{1}{t} \right| - 2 &= \left| \frac{t^2 + 1}{t} \right| - 2 = \frac{t^2 + 1}{|t|} - 2 \\ &= \frac{t^2 + 1 - 2|t|}{|t|} = \frac{(|t| - 1)^2}{|t|} \geq 0. \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra : } \left| t + \frac{1}{t} \right| \geq 2.$$

Ví dụ 2: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$F(x) = |x-1| + |2x-4| + |3x-9| + |4x-16| + |5x-25|$$

Giải: Ta có : $F(x) =$

$$\begin{aligned} &= (|x-1| + |2x-4| + |3x-9| + |4x-16| + |5x-25|) + 3|x-4| \\ &\geq |(x-1) + (2x-4) + (3x-9) + (4x-16) + (5x-25)| + 3|x-4| \\ &= 15 + 3|x-4| \geq 15. \end{aligned}$$

Mặt khác, ta có $F(4) = 15$. Suy ra $\min F(x) = 15$.

Ví dụ 3. Biết rằng đa thức $f(x) = ax^2 + bx + c$ có tính chất $|f(1)| \leq 1$, $|f(-1)| \leq 1$ và $|f(0)| \leq 1$.

Chứng minh rằng $|f(x)| \leq \frac{5}{4}$ với mọi $x \in [-1; 1]$.

Giải: Ta có : $f(0) = c$; $f(1) = a + b + c$;

$$f(-1) = a - b + c. \text{ Suy ra}$$

$$2a = f(1) + f(-1) - 2f(0) ;$$

$$2b = f(1) - f(-1).$$

Thay vào $f(x)$ ta được :

$$f(x) = f(1) \cdot \frac{x(1+x)}{2} + f(0) \cdot (1-x^2) - f(-1) \cdot \frac{x(1-x)}{2}$$

Suy ra, với mọi $x \in [-1; 1]$ ta có :

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq \left| f(1) \cdot \frac{x(1+x)}{2} \right| + \left| f(0) \cdot (1-x^2) \right| + \\ &\quad + \left| f(-1) \cdot \frac{x(1-x)}{2} \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= |f(1)| \cdot \left| \frac{x(1+x)}{2} \right| + |f(0)| \cdot |1-x^2| + |f(-1)| \cdot \left| \frac{x(1-x)}{2} \right| \\ &\leq \frac{|x(1+x)|}{2} + |1-x^2| + \frac{|x(1-x)|}{2} = \\ &= 1 - x^2 + \frac{|x|}{2} (|1+x| + |1-x|) = \\ &= 1 - x^2 + \frac{|x|}{2} (1+x+1-x) = 1 - x^2 + |x| = \\ &\frac{5}{4} - \left(|x| - \frac{1}{2} \right)^2 \leq \frac{5}{4}. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } |f(x)| \leq \frac{5}{4} \quad \forall x \in [-1; 1].$$

Ví dụ 4. Biết đa thức $f(x) = ax^2 + bx + c$ có tính chất $|f(x)| \leq 1$ với mọi $x \in [-1; 1]$. Chứng minh rằng :

$$|a| + |b| + |c| \leq 3.$$

Giải : Quy ước rằng số 0 có thể mang dấu + hoặc dấu -.

Xét các trường hợp có thể xảy ra :

+ Nếu cả 3 số a, b, c cùng dấu thì $|a| + |b| + |c| = |a+b+c| = |f(1)| \leq 1$.

+ Nếu a trái dấu với b và c thì

$$\begin{aligned} |a| + |b| + |c| &= |-a| + |b| + |c| = \\ &= |-a+b+c| = |2f(0) - f(-1)| \leq 2|f(0)| + |f(-1)| \leq 3. \end{aligned}$$

+ Nếu b trái dấu với a và c thì

$$\begin{aligned} |a| + |b| + |c| &= |a| + |-b| + |c| = |a-b+c| = \\ &= |f(-1)| \leq 1. \end{aligned}$$

+ Nếu c trái dấu với a và b thì :

$$\begin{aligned} |a| + |b| + |c| &= |a| + |b| + |-c| = |a+b-c| = \\ &= |f(1) - 2f(0)| \leq |f(1)| + 2|f(0)| \leq 3. \end{aligned}$$

Vậy ta luôn có $|a| + |b| + |c| \leq 3$.

Sau khi đã xem xét các ví dụ trên, mời các bạn làm các bài tập sau đây.

Bài tập 1. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $F(x) = |x+1| + 2|x+2| - 3|x+3|$.

Bài tập 2. Cho đa thức $f(x) = ax^2 + bx + c$ có tính chất $|f(x)| \leq 1$ với mọi $x \in [-1; 1]$. Đặt $g(x) = cx^2 + bx + a$.

Chứng minh rằng $|g(x)| \leq 2$ với mọi $x \in [-1; 1]$.

Bài tập 3. Tìm a, b để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất :

$$\begin{cases} 2|x| + y = a \\ x^2 + y = b \end{cases}$$

Bài tập 4. Tìm a, b sao cho $|2x^2 + ax + b| \leq 1$ với mọi $x \in [-1; 1]$.

HOA LA CANH, NHÀ TOÁN HỌC LỐI LẠC CỦA TRUNG QUỐC

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Hoa La Canh (1910-1985) là người huyện Kim Đan tỉnh Giang Tô, Trung Quốc, xuất thân từ một gia đình nghèo. Sau khi học xong THCS và một trường dạy nghề ở Thượng Hải, ông trở về nhà giúp cha trông nom một cửa hàng tạp hóa nhỏ trong huyện. Tuy nhiên ông dành thời gian và tâm trí cho việc làm toán và đọc sách toán nhiều hơn là trông nom cửa hàng.

Kết quả học tập của ông khi học THCS không thật xuất sắc. Với bài tập toán của ông khá bẩn, có nhiều chỗ gạch xóa vì ông luôn luôn muốn tìm tòi một cách giải mới tốt hơn.

Năm 1928, thầy giáo hiệu trưởng cũ, vì mến tài năng của ông, đã đưa Hoa La Canh vào làm nhân viên văn phòng ở trường trung học huyện Kim Đan. Nhưng vào năm ấy ông bị bệnh thương hàn phải nằm liệt giường đến hơn 5 tháng. Mặc dù qua khỏi nhưng chân trái ông bị liệt. Từ đó về sau ông không rời cây nạng. Ông tin rằng nghề làm toán là sự lựa chọn duy nhất thích hợp với sức khỏe của ông.

Vào năm 1930 một hôm ông đọc được một bài báo trong tạp chí Khoa học ở Thượng Hải đề cập một phương pháp tìm nghiệm phương trình bậc 5 của giáo sư Su Jia Ju. Hoa La Canh phát hiện ra trong bài báo trên có chỗ sai, ông viết cách giải của mình thành bài báo : *"Về những lí do khiến phương pháp giải phương trình bậc 5 của GS. Ju không đúng"*, rồi gửi cho Ban biên tập tạp chí Khoa học. Đó là bài báo toán học đầu tiên của Hoa La Canh. Giáo sư Xiong, chủ nhiệm khoa Toán của trường đại học Thanh Hoa nổi tiếng của Trung Quốc, đọc được bài này không ngăn nổi kinh ngạc hỏi : "Tại sao ta chưa nghe nói người có tên Hoa La Canh này nhỉ, ông ấy là giáo sư ở trường đại học nào thế ?". Nhiều người xung quanh cũng đều nói không biết.

Sau đó Hoa La Canh đã được giáo sư Xiong nhận về làm trợ lí ở khoa Toán của trường đại học Thanh Hoa. Công việc hàng ngày là phụ trách việc nhận và phát thư từ, đánh máy và bảo quản tài liệu sách vở v.v. Ông thích không khí học tập và kho sách phong phú ở trường đại học

Thanh Hoa. Chỉ sau một năm ông đã tự học xong toàn bộ giáo trình Toán đại học. Cách đọc sách của ông cũng rất đặc biệt. Ông mở cuốn sách đọc lời nói đầu và mục lục của cuốn sách sau đó gấp sách lại và tưởng tượng chính mình đang viết sách. Một lát sau, ông mở sách ra và so sánh nội dung của sách với cái mình đã viết.

Nhờ tài hoa và sự hiểu biết sâu sắc về toán học của Hoa La Canh, lãnh đạo trường đại học Thanh Hoa đặc cách đề bạt ông lên làm phụ giảng. Không bao lâu lại thăng lên làm giảng viên chính mặc dù ông không có bằng cấp gì cả. Đó là một điều chưa hề có trong một xã hội rất trọng bằng cấp như Trung Quốc lúc đó.

Hoa La Canh đi sâu nghiên cứu lí thuyết số. Có lần ông gửi cùng một lúc 3 bài báo tới một tạp chí Toán có tiếng ở nước ngoài và đều được nhận đăng. Năm 1936 ông được Hardy, nhà toán học Anh nổi tiếng mời đến trường đại học Cambridge ở Anh để nghiên cứu. Trong hai năm ở Anh ông đã công bố hơn 10 bài báo có giá trị về lí thuyết số Hardy có khuyên ông bảo vệ luận án tiến sĩ nhưng ông quyết định không viết luận án vì sợ mất thời gian nghiên cứu ! Cho mãi tới năm 1979 ông mới nhận bằng tiến sĩ danh dự của trường đại học Nancy ở Pháp. Các công trình của ông được thế giới đánh giá cao. Năm 1938 ông về nước, trở thành giáo sư tại trường Đại học Tây Nam tỉnh Vũ Hán. Lúc đó ông mới 28 tuổi.

Hoa La Canh là một người rất ham làm việc. Mặc dù là một người có tài năng bẩm sinh, ông luôn luôn cho rằng thành công của ông chỉ là do lao động cần cù và có phương pháp. Ông nói : "Thông minh do học tập mà có. Thiên tài do tích lũy mà nên. Phải làm việc đến giây phút cuối cùng của cuộc đời. Tôi nguyện chết trên vị trí công tác chứ không muốn chết trên giường bệnh". Chiều ngày 12/6/1985, Hoa La Canh đọc báo cáo mời tại Đại học Tokyo trong chuyến thăm Nhật của ông. Các nhà toán học Nhật Bản đến nghe chăm chú và vỗ tay liên tục. Thời gian dành cho báo cáo là 45 phút, ông xin phép nói thêm 20 phút nữa. Trong tiếng vỗ tay nhiệt liệt

kéo dài, ông ngồi xuống định nói vài câu thì đột nhiên từ trên ghế ngã lẫn xuống đất. Bệnh tim của ông bột phát, ông được đưa vào bệnh viện nhưng đã không tỉnh lại nữa. 10 giờ ngày 12-6-1985 ông qua đời.

Hoa La Canh đã để lại hơn 10 cuốn sách và 200 bài báo khoa học. Ngoài những công trình xuất sắc về toán lý thuyết ông còn rất quan tâm đến việc áp dụng toán học vào thực tế và phổ biến các kiến thức toán học cho quần chúng. Chính ông là người đầu tiên đưa vận trù học vào ngành vật tải và sử dụng phương pháp phân tích hệ thống output-input trong trong nghiên cứu kinh tế, thậm chí đã sáng tác cả diễn ca về quy hoạch tuyến tính để quần chúng dễ nhớ dễ học. Ông rất có tài trong việc diễn đạt những vấn đề phức tạp bằng một ngôn ngữ dễ hiểu.

Chính phủ và nhân dân Trung Quốc đánh giá rất cao tài năng và sự đóng góp của ông. Ông được tặng thưởng danh hiệu Anh hùng lao động và nhiều huân chương cao quý khác của Nhà nước. Năm 1983 khi ông còn sống, một bộ phim truyền hình nhiều tập dài 6 tiếng về cuộc sống và sự nghiệp của ông đã được chiếu rộng rãi khắp Trung Quốc. Cuốn sách: "Gửi các bạn trẻ yêu toán" đã được dịch ra tiếng Việt và được đồng đạo các bạn học sinh Việt Nam yêu thích.

PHƯƠNG PHÁP GIẢI... (Tiếp trang 11)

Đặt $A''\left(\frac{a}{3}; \frac{\sqrt{2}a}{3}\right); B''\left(\frac{2a}{3}; \frac{2\sqrt{2}a}{3}\right); M''(t, 0)$

Vì M'' chạy trên $x'Ox$ và A'' và B'' nằm về một phía đối với $x'Ox$ nên: $|MA - MB|_{\max} \Leftrightarrow |M''A'' - M''B''|_{\max} \Leftrightarrow M'' = A''B'' \cap x'Ox \Leftrightarrow \frac{M''A''}{M''B''} = \frac{\sqrt{2}a/3}{2\sqrt{2}a/3} = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow M''$ có tọa độ $(0, 0)$

$\Leftrightarrow M$ có tọa độ $(0, 0, a-0) = (0, 0, a)$

Trong lời giải trên, ta không những "thay" đường thẳng d bằng trục $x'Ox$ khi xét vị trí tương đối của các điểm mà còn "chuyển hệ thống không đồng phẳng gồm hai điểm A, B và đường thẳng d thành hệ thống đồng phẳng gồm hai điểm A', B' và trục $x'Ox$ (trong câu a) hoặc thành hệ thống đồng phẳng gồm hai điểm A'', B'' và trục $x'Ox$ (trong câu b). Đó là những nguyên nhân cơ bản giúp ta có được một lời giải đơn giản.

Cuối cùng, xin cảm ơn TS Nguyễn Minh Hà về những góp ý quan trọng cho việc hoàn chỉnh bài báo này.

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

BÀI SỐ 35

Problem. During an election campaign n different kinds of promises are made by various political parties, $n > 0$. No two parties have exactly the same set of promises. While several parties may make the same promises, every pair of parties have at least one promise in common. Prove that there can be as many as 2^{n-1} parties, but no more.

Solution. Suppose that there are N parties, and their promises are the sets $S_1, S_2, \dots, S_N$. These sets are subsets of the set of n promises. There are exactly 2^n subsets of this set. We know that no two of the subsets $S_1, S_2, \dots, S_N$ are equal because no two parties make the same promises. Furthermore, $S_i \cap S_j \neq \emptyset$ for $i \neq j$ because every pair of parties makes a promise in common. Thus, no S_i is the complement of an S_j . Hence there are at most $2^n/2 = 2^{n-1}$ subsets of the set of n promises in the list $S_1, S_2, \dots, S_N$, i.e. $N \leq 2^{n-1}$.

Từ mới:

during	= trong (giới từ chỉ thời gian)
election	= cuộc bầu cử
campaign	= chiến dịch, cuộc vận động
kind	= loại, kiểu
promise	= sự hứa hẹn
various	= khác nhau (tính từ)
political	= chính trị (tính từ)
party	= đảng phái
set	= tập hợp
several	= nhiều
pair	= cặp
at least	= ít nhất
in common	= chung nhau
subset	= tập hợp con
furthermore	= ngoài ra, hơn nữa (trạng từ)
complement	= phần bù
list	= danh sách
i.e.	= có nghĩa là (viết tắt)

NGÔ VIỆT TRUNG

ĐỀ THI TUYỂN SINH MÔN TOÁN VÀO TRƯỜNG ĐẠI HỌC ĐƯỢC HÀ NỘI NĂM 2000

PHẦN CHUNG CHO MỌI THÍ SINH

Câu I.

1. Giải bất phương trình :

$$\sqrt{x^2-8x+15} + \sqrt{x^2+2x-15} \leq \sqrt{4x^2-18x+18}$$

2. Xác định giá trị của a để hệ bất phương trình :

$$\begin{cases} x+3y \geq (x+y)^2 + a \\ (x-y)^2 \leq 3y-x-a \end{cases}$$

có nghiệm duy nhất.

Câu II. 1. Giải phương trình :

$$\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x = \cos x \cos 2x \cos 3x + 2$$

2. ABC là tam giác bất kì, chứng minh :

$$(1-\cos A)(1-\cos B)(1-\cos C) \geq \cos A \cos B \cos C$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi nào ?

Câu III. 1. Cho hàm số :

$$y = 2x^3 - 3(2m+1)x^2 + 6m(m+1)x + 1$$

a) Với các giá trị nào của m thì đồ thị (C_m) của hàm số có hai điểm cực trị đối xứng với nhau qua đường thẳng $y = x+2$.

b) (C_0) là đồ thị của hàm số ứng với $m=0$. Tìm điều kiện của a và b để đường thẳng $y = ax + b$ cắt (C_0) tại ba điểm phân biệt A, B, D sao cho $AB = BD$. Khi đó chứng minh rằng : Đường thẳng $y = ax + b$ luôn đi qua một điểm cố định.

2. Tính tích phân :
$$\int_0^{\pi/2} \frac{1+\sin x}{1+\cos x} e^x dx$$

PHẦN DÀNH RIÊNG CHO THÍ SINH CHƯA PHẦN BAN

Câu IV. a. Cho các đường tròn :

$$(C) x^2 + y^2 = 1$$

$$(C_m) x^2 + y^2 - 2(m+1)x + 4my = 5.$$

1. Chứng minh rằng có hai đường tròn (C_{m_1}) , (C_{m_2}) tiếp xúc với đường tròn (C) ứng với hai giá trị m_1, m_2 của m .

2. Xác định phương trình các đường thẳng tiếp xúc với cả hai đường tròn (C_{m_1}) , (C_{m_2}) ở trên.

PHẦN DÀNH RIÊNG CHO THÍ SINH CHUYÊN BAN

Câu IV. b. Cho hai đường thẳng chéo nhau (d) , (d') nhận đoạn $AA' = a$ làm đoạn vuông góc chung ($A \in (d)$, $A' \in (d')$). $[P]$ là mặt phẳng qua A' và vuông góc với (d') . $[Q]$ là mặt phẳng đi động nhưng luôn song song với $[P]$ và cắt (d) , (d') lần lượt ở M, M' . N là hình chiếu vuông góc của M trên $[P]$, x là khoảng cách giữa $[P]$ và $[Q]$, α là góc giữa (d) và $[P]$.

1. Tính thể tích hình chóp $AA'M'MN$ theo a, x, α .

2. Xác định tâm O của hình cầu ngoại tiếp hình chóp trên. Chứng minh rằng khi $[Q]$ đi động thì O luôn thuộc một đường thẳng cố định và hình cầu ngoại tiếp hình chóp $AA'M'MN$ cũng luôn chứa một đường tròn cố định.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu I. 1) Bạn đọc tự giải. Kết quả là :

$$x \in (-\infty; -5] \cup \{3\} \cup \left[5; \frac{17}{3}\right].$$

2) Điều kiện cần : Giả sử hệ có nghiệm duy nhất $x = \alpha$; $y = \beta$ thì :

$$\begin{cases} \alpha + 3\beta \geq (\alpha + \beta)^2 + a \\ (\alpha - \beta)^2 \leq 3\beta - \alpha - a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} [(-\alpha) - \beta]^2 \leq 3\beta - (-\alpha) - a \\ 3\beta + (-\alpha) \geq [(-\alpha) + \beta]^2 + a \end{cases}$$

$\Rightarrow x = -\alpha$; $y = \beta$ cũng là nghiệm.

Vì nghiệm duy nhất nên $\alpha = -\alpha \Rightarrow \alpha = 0$.

Thay $x = 0$; $y = \beta$ vào hệ ta có :

$$\beta^2 - 3\beta + a \leq 0. \text{ Vì } \beta \text{ duy nhất } \Rightarrow 9 - 4a = 0 \Rightarrow a = \frac{9}{4}.$$

Điều kiện đủ: Với $a = \frac{9}{4}$ thì hệ trở thành :

$$\begin{cases} x+3y \geq (x+y)^2 + \frac{9}{4} \\ (x-y)^2 \leq 3y-x-\frac{9}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(y+x-\frac{3}{2}\right)^2 \leq -2x \\ \left(y-x-\frac{3}{2}\right)^2 \leq 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=\frac{3}{2} \end{cases}$$

Kết luận : Hệ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow a = \frac{9}{4}$.

Câu II. 1) Biến đổi :

$$\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x = 4 \cos 3x \cos 2x \cos x - 1.$$

Do đó phương trình tương đương với :

$$\begin{aligned}\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x &= 3 \\ \Leftrightarrow \cos 2x = \cos 4x = \cos 6x &= 1 \\ \Leftrightarrow \cos 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = 2k\pi \Leftrightarrow x &= k\pi \quad (x \in \mathbb{Z}).\end{aligned}$$

2. Nếu tam giác vuông hoặc tù thì $VT > 0 \geq VP$ nên bất đẳng thức đúng. Nếu tam giác ABC nhọn thì bất đẳng thức tương đương với:

$$\frac{2x}{1-x^2} \cdot \frac{2y}{1-y^2} \cdot \frac{2z}{1-z^2} \geq \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{z} \text{ trong đó}$$

$$x = \tan \frac{A}{2}; y = \tan \frac{B}{2}; z = \tan \frac{C}{2}$$

Do đó bất đẳng thức cần chứng minh trở thành:

$$\begin{aligned}\tan A \cdot \tan B \cdot \tan C &\geq \cot \frac{A}{2} \cot \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2} \\ \Leftrightarrow \tan A + \tan B + \tan C &\geq \cot \frac{A}{2} \cot \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2}.\end{aligned}$$

Đây là bất đẳng thức quen thuộc với các bạn.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \cos(A-B) = \cos(B-C) = \cos(C-A) = 1 \Leftrightarrow A = B = C$.

Câu III. 1a) $y' = 6[x^2 - (2m+1)x + m(m+1)]$
nên $y' = 0 \Leftrightarrow x = m$ hoặc $x = m+1$.

Dễ thấy $y_{\max}$ tại $x = m$ và $y_{\min}$ tại $x = m+1$.

$$\text{Vì } f(x) = [2c - (2m+1)] \frac{y'}{6} - x + 1 + m(m+1)(2m+1)$$

nên các điểm cực trị cùng thuộc đường thẳng

$$y = -x + 1 + m(m+1)(2m+1).$$

Đường thẳng này vuông góc với đường $y = x+2$.
Do đó 2 điểm cực trị đối xứng nhau qua đường $y = x+2 \Leftrightarrow$ Trung điểm của 2 điểm này thuộc đường $y = x+2$

$$\Leftrightarrow \frac{y_{\max} + y_{\min}}{2} = \frac{m + (m+1)}{2} + 2$$

$$\Leftrightarrow (m+1)(2m^2 + m - 2) = 0$$

$$m = -1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{4} \end{cases}$$

1b) Với $m = 0$ ta có $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$.

Nếu đường thẳng $y = ax + b$ cắt (C_0) tại 3 điểm phân biệt sao cho $AB = BD$ thì phương trình $2x^3 - 3x^2 + 1 = ax + b$ (*) có các nghiệm $x_A < x_B < x_D$ thỏa mãn $x_A + x_D = 2x_B$.

Từ đó ta có $a + 2b = 1$, khi đó đường thẳng

$$y = ax + b \text{ đi qua điểm cố định } \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right).$$

Với $a + 2b = 1 \Leftrightarrow a = 1 - 2b$ thì (*) trở thành:

$$2x^3 - 3x^2 - (1 - 2b)x + 1 - b = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)(x^2 - x + b - 1) = 0.$$

Phương trình (*) có 3 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow t(x) = x^2 - x + b - 1 \text{ có 2 nghiệm phân biệt khác } \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ t\left(\frac{1}{2}\right) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 - 4b > 0 \\ b - \frac{5}{4} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow b < \frac{5}{4}.$$

$$\text{Vậy: } a, b \text{ thỏa mãn bài toán } \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 - 2b \\ b < \frac{5}{4} \end{cases}$$

$$2) I = \int_0^{\pi/2} \frac{e^x dx}{1 + \cos x} + \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x \cdot e^x dx}{1 + \cos x}.$$

$$\text{Xét } I_1 = \int_0^{\pi/2} \frac{e^x dx}{1 + \cos x} = \int_0^{\pi/2} \frac{\pi/2 e^x \cdot d\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2 \frac{x}{2}}$$

$$= \int_0^{\pi/2} e^x d\left(\tan \frac{x}{2}\right) = e^x \cdot \tan \frac{x}{2} \Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \tan \frac{x}{2} d(e^x)$$

$$= e^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{1 + \cos x} e^x \cdot dx.$$

$$\text{Từ đó } I = e^{\pi/2}.$$

Câu IVa.

a) Bạn đọc tự giải.

Có 2 đường tròn (C_{-1}) và $(C_{3/5})$ tiếp xúc (C)

2. Ta có $(C_{-1}): x^2 + (y-1)^2 = 9$

$$(C_{3/5}): \left(x - \frac{8}{5}\right)^2 + \left(y + \frac{6}{5}\right)^2 = 9$$

$$\Rightarrow R_1 = R_2 = 3.$$

Dễ thấy $I_1 I_2 < 6$ nên $(C_{-1}), (C_{3/5})$ cắt nhau và có 2 bán kính bằng nhau $\Rightarrow (C_{-1})$ và $(C_{3/5})$ chỉ có 2 tiếp tuyến chung ngoài song song với nhau.

Các bạn sẽ tìm được PT hai tiếp tuyến

$$\begin{cases} (\Delta_1): 2x + y + 3\sqrt{5} - 2 = 0 \\ (\Delta_2): 2x + y - 3\sqrt{5} - 2 = 0 \end{cases}$$

Câu IVb.

1. Bạn đọc tự giải. $V_{AA'M'MN} = \frac{1}{3} ax^2 \cdot \cot \alpha$

2. Ta có $A'A \perp (AMN) \Rightarrow A'A \perp AN$. Từ đó suy ra A, N nhìn $A'M$ dưới một góc vuông nên tâm O của hình cầu ngoại tiếp $AA'M'MN$ là trung điểm O của $A'M$. Điểm O cách đều A', A nên $O \in$ đường trung trực (Δ) cố định của $A'A$ nằm trong mặt phẳng cố định $(A'A, d)$. Gọi (T) là mặt phẳng chứa $A'A$ và vuông góc với (Δ) khi đó (T) cố định. Do mặt cầu tâm O luôn đi qua A' và A nên nó chứa đường tròn cố định đường kính $A'A$ nằm trong (T) , tâm là trung điểm $A'A$.

Hướng dẫn giải
L.T.N

DÀNH CHO CÁC BẠN CHUẨN BỊ THI ĐẠI HỌC

Khai thác các cách giải

BÀI TOÁN CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

NGUYỄN QUỐC HẢI
(Phòng GD-ĐT Đức Thọ - Hà Tĩnh)

Học sinh phổ thông, nhất là học sinh chuẩn bị thi vào Đại học - được học khá đầy đủ các phương pháp chứng minh BĐT. Hơn nữa, sách tham khảo về BĐT cũng rất phong phú về phương pháp giải, sâu rộng về dạng toán. Nhưng đa số các em vẫn rất khó khăn, không tự mình biết cách suy nghĩ, suy luận để tìm ra con đường đi đến vận dụng các phương pháp đó. Học sinh nói chung rất e ngại, lúng túng, có nhiều em bỏ qua ngay khi gặp loại toán này. Đặc biệt là rất ít các em có ý định tìm tòi các phương pháp giải khác nhau, tìm ra cách giải hay, đẹp cho một bài toán chứng minh BĐT cụ thể.

Thực tế giảng dạy cho thấy: Ứng với mỗi cách suy nghĩ đúng hướng, cách phân tích hợp lí, suy luận chặt chẽ, linh hoạt có thể cho ta các cách giải khác nhau trong thời gian ngắn. Có những lời giải hay độc đáo lại được xuất phát từ những suy nghĩ bình thường, những suy luận giản đơn.

Ví dụ 1. (Đề thi ĐH Quốc gia Hà Nội 2000 - khối A).

$$\text{Cho } a + b + c = 0 \quad (1)$$

Chứng minh rằng:

$$8^a + 8^b + 8^c \geq 2^a + 2^b + 2^c \quad (2)$$

Cách giải 1. Ta biết $8^a = (2^a)^3$ và từ giả thiết (1) $\Rightarrow 2^a \cdot 2^b \cdot 2^c = 1$ nên bài toán đã cho là trường hợp riêng của bài toán sau:

Bài toán 1. Cho x, y, z dương và $x \cdot y \cdot z = 1$.

Chứng minh rằng:

$$x^3 + y^3 + z^3 \geq x + y + z \quad (3)$$

Chứng minh (3):

Ta có $x + y + z \geq 3 \sqrt[3]{xyz} = 3$ (BĐT Cauchy)
 $\Rightarrow 3(x + y + z) \leq (x + y + z)^2 \leq 3(x^2 + y^2 + z^2)$ (BĐT Bunhiacôpski)

$$\Rightarrow x + y + z \leq x^2 + y^2 + z^2 \quad (a)$$

$$\Rightarrow (x + y + z) \cdot (x^2 + y^2 + z^2) \leq (x^2 + y^2 + z^2)^2 =$$

$$[\sqrt{x} \sqrt{x^3} + \sqrt{y} \sqrt{y^3} + \sqrt{z} \sqrt{z^3}]^2$$

$$\leq (x + y + z) \cdot (x^3 + y^3 + z^3) \quad (\text{BĐT Bunhiacôpski})$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \leq x^3 + y^3 + z^3 \quad (b)$$

Từ (a) và (b) ta có (3) đúng.

Sử dụng (3) với $x = 2^a$; $y = 2^b$; $z = 2^c$ ta có (2) đúng.

Lời giải này có thể dành cho học sinh lớp 9, lớp 10.

Với cách chứng minh tương tự có thể mở rộng bài toán 1 thành:

Bài toán 2. Cho x, y, z dương và $x \cdot y \cdot z = 1$.
 Chứng minh rằng:

$$x^m + y^m + z^m \geq x^n + y^n + z^n \quad \forall m, n \in \mathbb{N}^*; m > n.$$

Bài toán 3. Cho các số a_i ($i = 1, 2, \dots, k$) dương và $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_k = 1$. Chứng minh rằng:

$$a_1^m + a_2^m + \dots + a_k^m \geq a_1^n + a_2^n + \dots + a_k^n$$

$$\quad \forall m, n \in \mathbb{N}^*; m > n.$$

Cách giải 2. Nếu đặt $x_1 = 2^a$; $x_2 = 2^b$; $x_3 = 2^c$ thì

(2) $\Leftrightarrow f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) \geq 0$ với $f(x) = x^3 - x$.
 Gợi ý cho ta suy nghĩ tới việc sử dụng bất đẳng thức Jensen

Xét hàm số $f(x) = x^3 - x$ trên $(0; +\infty)$ có:

$$f'(x) = 3x^2 - 1; f''(x) = 6x$$

Rõ ràng $f''(x) > 0 \quad \forall x \in (0; +\infty) \Rightarrow$ Đồ thị của $f(x)$ là lõm trên $(0; +\infty)$

$f'(x) > 0 \quad \forall x \in [1; +\infty) \Rightarrow$ Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $[1; +\infty)$ (Đây là điểm chốt mà nhiều em không vượt qua được khi giải theo cách này) Sử dụng BĐT Jensen về hàm lõm, ta có:

$$f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) \geq 3f\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}\right) \quad (c)$$

$$\text{Mà } \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = \frac{2^a + 2^b + 2^c}{3} \geq 2^{a+b+c} = 1 \quad (d)$$

(BĐT Cauchy)

Từ (c) và (d) ta có $f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) \geq f(1) = 0$
 $\Rightarrow$ (2) đúng.

Cách giải 3. Cũng với cách nhìn dưới quan điểm hàm số và từ giả thiết

$$a + b + c = 0 \Rightarrow k(a + b + c) = 0.$$

Ta thấy :
 $(2) \Leftrightarrow (2^a)^3 - 2^a + (2^b)^3 - 2^b + (2^c)^3 - 2^c \geq k(a+b+c)$ (k là 1 số thực nào đó)
 $\Leftrightarrow [(2^a)^3 - 2^a - ka] + [(2^b)^3 - 2^b - kb] + [(2^c)^3 - 2^c - kc] \geq 0$.

Thử hỏi rằng : Liệu có số $k \in \mathbb{R}$ để $(2^x)^3 - 2^x - kx \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$ hay không ?

Dễ thấy dấu bằng trong (2) xảy ra khi $a = b = c = 0$ nên ta có dự đoán $\min f(x) = f(0)$

$f'(0) = 0 \Rightarrow 3.8^x \ln 2 - 2^x \ln 2 - k = 0$
 $\Rightarrow k = 2 \ln 2$

Vậy xét $f(x) = (2^x)^3 - 2^x - 2x \ln 2$ trên $\mathbb{R}$ có

$f'(x) = \ln 2 [2^{3x} - 1] \cdot [3 \cdot 2^{2x} - 2^x - 2]$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Xét dấu $f'(x)$

$\Rightarrow \min f(x) = 0 \Rightarrow f(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) \geq 0 \Rightarrow (2)$ đúng.

Cách giải 4. Từ $2^a = \sqrt[3]{8^a \cdot 1 \cdot 1}$ gọi cho ta ý tưởng sử dụng BĐT Cauchy. Ta có :

$8^a + 1 + 1 \geq 3 \cdot 2^a$ (BĐT Cauchy cho 3 số)

$\Rightarrow 8^a \geq 3 \cdot 2^a - 2$. Tương tự, ta có :

$8^b \geq 3 \cdot 2^b - 2$; $8^c \geq 3 \cdot 2^c - 2$. Suy ra :

$8^a + 8^b + 8^c \geq$

$\geq (2^a + 2^b + 2^c) + 2[(2^a + 2^b + 2^c) - 3]$ (e)

Rõ ràng $2^a + 2^b + 2^c \geq 3$ (BĐT Cauchy)

$\Rightarrow (2^a + 2^b + 2^c) - 3 \geq 0$

Vậy từ (e) $\Rightarrow 8^a + 8^b + 8^c \geq 2^a + 2^b + 2^c$

$\Rightarrow (2)$ đúng.

Ví dụ 2. (Đề thi Đại học An Ninh 2000-khối A)

Cho $n \in \mathbb{N}$; $n \geq 3$. Chứng minh rằng :

$$n^{n+1} > (n+1)^n \quad (1)$$

Cách giải 1. Với quan điểm hàm thì ta có

$$(1) \Leftrightarrow \frac{\ln n}{n} > \frac{\ln(n+1)}{n+1} \quad (2).$$

Xét hàm số $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ với $x \geq 3$; $x \in \mathbb{R}$.

(Lưu ý: Nếu $x \in \mathbb{N}$ thì $f(x)$ không liên tục nên không có đạo hàm).

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} \Rightarrow f'(x) < 0 \forall x \geq 3$$

$\Rightarrow f(x)$ nghịch biến trên $[3; +\infty) \Rightarrow f(n) > f(n+1) \forall n \geq 3 \Rightarrow (2)$ đúng $\Rightarrow (1)$ đúng.

Cách giải 2. Có thể chuyển (1)

$$\Leftrightarrow n^{1/n} > (n+1)^{1/(n+1)} \quad (3)$$

Dẫn đến việc xét hàm số $f(x) = x^{1/x}$ ($x \geq 3$). Tiếp tục như cách giải 1.

Cách giải 3. (1) là mệnh đề về số tự nhiên nên nghĩ đến phương pháp quy nạp.

$$\text{Ta có : } (1) \Leftrightarrow \left(\frac{n}{n+1}\right)^n < n \quad (4)$$

Ta chứng minh (4) đúng với $\forall n \geq 3$.

$+ n = 3$ thì (4) đúng

$+ giả sử (4) đúng với n = k nghĩa là có$

$$\left(\frac{k}{k+1}\right)^k < k \quad (5)$$

$$\text{Phải chứng minh : } \left(\frac{k+1}{k+2}\right)^{k+1} < k+1 \quad (6)$$

Thật vậy :

$$\begin{aligned} \left(\frac{k+1}{k+2}\right)^{k+1} &= \left(\frac{k+1}{k+2}\right)^k \cdot \frac{k+1}{k+2} < \left(\frac{k}{k+1}\right)^k \cdot \frac{k+1}{k+2} < \\ < k \cdot \frac{k+1}{k+2} < k+1 \quad (\text{vì } \frac{k+1}{k+2} < \frac{k}{k+1}) \end{aligned}$$

$\Rightarrow (4)$ đúng $\Rightarrow (1)$ đúng $\forall n \geq 3$.

Cách giải 4. (1) là BĐT dạng lũy thừa nguyên, gọi cho ta suy nghĩ tới việc sử dụng BĐT Bernoulli :

$$(1+a)^n > 1+n \cdot a \quad (\forall n \in \mathbb{N} ; n > 1 ; a > -1, a \neq 0).$$

$$\text{Ta có : } (1) \Leftrightarrow \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} > \frac{1}{n+1} \quad (7).$$

Cái khó của phương pháp này là sử dụng BĐT Bernoulli ngay cho (7) thì không đạt kết quả. Ta biến đổi như sau :

$$\text{Đặt } a = -\frac{1}{n+1} \quad (a > -1 ; a \neq 0) \Rightarrow \frac{n}{n+1} = 1+a.$$

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = (1+a)^{n+1} > \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 >$$

$$[1 + (n-1)a] \cdot \frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{2n^2}{(n+1)^3}$$

(Sử dụng BĐT Bernoulli)

$$\text{Ta sẽ chứng minh } \frac{2n^2}{(n+1)^3} > \frac{1}{n+1} \quad (8).$$

Thật vậy (8) $\Leftrightarrow (n-1)^2 > 2$. Hiển nhiên với $\forall n \geq 3$.

$\Rightarrow (8)$ đúng $\Rightarrow (1)$ đúng $\forall n \geq 3$.

Chứng minh BĐT là loại toán khó đối với học sinh nói chung cũng như học sinh thi vào Đại học, nếu các em tích cực và biết học tập có phương pháp thích hợp thì không những giải được mà còn có thể giải được bởi nhiều cách hay, độc đáo. Xin chúc các em thành công.

ĐÍNH CHÍNH

Trong Đề ra kì này THPT số 280 (10-2000) bài T7/280 in thiếu giả thiết "với $0 < x < \frac{\pi}{n}$ ".

Đề nghị bạn đọc vui lòng sửa lại.

Thành thật xin lỗi tác giả và bạn đọc.

THTT



PHƯƠNG PHÁP GIẢI MỘT BÀI TOÁN CỰC TRỊ TRONG HÌNH GIẢI TÍCH

HOÀNG HÒA TRẠI

(GV trường THPT Lê Khiết - Quảng Ngãi)

Bài viết này xin giới thiệu với bạn đọc phương pháp giải một bài toán cực trị quen thuộc trong hình giải tích. Phương pháp này không hoàn toàn khác với phương pháp thông thường mà nhiều bạn đã biết. Tuy nhiên, so với phương pháp thông thường, việc tính toán đơn giản hơn rất nhiều. Xin bắt đầu với thí dụ thứ nhất.

Bài toán 1. Cho hai điểm $A(1, 2)$; $B(0, -1)$ và đường thẳng d có phương trình tham số:

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t + 1 \end{cases}$$

Tìm M thuộc d sao cho:

a) $(MA + MB)$ nhỏ nhất.

b) $|MA - MB|$ lớn nhất.

Trong hình học phẳng ta biết:

+ Nếu A, B nằm về hai phía đối với d thì:

$$(MA + MB)_{\min} \Leftrightarrow M = AB \cap d$$

+ Nếu A, B nằm về một phía đối với d và B' là điểm đối xứng của B qua d thì:

$$(MA + MB)_{\min} \Leftrightarrow M = AB' \cap d$$

+ Nếu A, B nằm về một phía đối với d mà AB'' cắt d thì:

$$|MA - MB|_{\max} \Leftrightarrow M = AB \cap d$$

+ Nếu A, B nằm về hai phía đối với d và B'' là điểm đối xứng của B qua d mà AB'' cắt d thì:

$$|MA - MB|_{\max} \Leftrightarrow M = AB'' \cap d.$$

Dựa vào kết quả đã biết trong hình học phẳng, ta có thể giải được bài toán 1. Tuy nhiên việc tính toán sẽ khá phức tạp. Cụ thể là:

+ Nếu phương trình của d được cho dưới dạng tham số thì ta buộc phải chuyển về dạng tổng quát để có thể kiểm tra được A và B nằm về một phía hay hai phía đối với d .

+ Nếu phải tìm tọa độ điểm B' (trong câu a) hoặc B'' (trong câu b) thì việc tính toán còn phức tạp hơn nữa.

Để khắc phục tình trạng trên, tôi xin đưa ra một lời giải mới.

a) Vì $M \in d$ nên M có tọa độ $(t, 2t+1)$. Khi đó ta có:

$$\begin{aligned} MA + MB &= \sqrt{(t-1)^2 + (2t-1)^2} + \sqrt{t^2 + (2t+2)^2} \\ &= \sqrt{5t^2 - 6t + 2} + \sqrt{5t^2 + 8t + 4} \\ &= \sqrt{5} \left(\sqrt{\left(t - \frac{3}{5}\right)^2 + \frac{1}{25}} + \sqrt{\left(t + \frac{4}{5}\right)^2 + \frac{4}{25}} \right) \end{aligned}$$

$$\text{Xét } A'\left(\frac{3}{5}, -\frac{1}{5}\right); B'\left(-\frac{4}{5}, \frac{2}{5}\right); M'(t, 0).$$

$$\text{Khi đó: } MA + MB = \sqrt{5}(M'A' + M'B')$$

Vì M' chạy trên trục hoành $x'Ox$ và A', B' nằm về hai phía đối với $x'Ox$ nên $(MA + MB)_{\min} \Leftrightarrow (M'A' + M'B')_{\min} \Leftrightarrow M' = A'B' \cap x'Ox$

$$\Leftrightarrow \frac{M'A'}{M'B'} = \frac{-1/5}{2/5} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow M' \text{ chia đoạn } \left[-\frac{4}{5}; \frac{3}{5}\right]$$

theo tỉ số $-\frac{1}{2}$ nên có tọa độ $\left(\frac{2}{15}, 0\right)$

$$\Leftrightarrow M \text{ có tọa độ } \left(\frac{2}{15}, 2 \cdot \frac{2}{15} + 1\right) = \left(\frac{2}{15}, \frac{19}{15}\right)$$

b) Tương tự như câu a, ta có:

$$\begin{aligned} |MA - MB| &= \sqrt{5} \left| \sqrt{\left(t - \frac{3}{5}\right)^2 + \frac{1}{25}} - \sqrt{\left(t + \frac{4}{5}\right)^2 + \frac{4}{25}} \right| \end{aligned}$$

$$\text{Xét } A''\left(\frac{3}{5}, \frac{1}{5}\right); B''\left(-\frac{4}{5}, \frac{2}{5}\right); M''(t, 0).$$

$$\text{Khi đó } |MA - MB| = \sqrt{5}|M''A'' - M''B''|$$

Vì M'' chạy trên $x'Ox$ và A'', B'' nằm về một phía đối với $x'Ox$ nên: $|MA - MB|_{\max} \Leftrightarrow |M''A'' - M''B''|_{\max} \Leftrightarrow M'' = A''B'' \cap x'Ox$

$$\Leftrightarrow \frac{M''A''}{M''B''} = \frac{1/5}{2/5} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow M'' \text{ có tọa độ } (2, 0)$$

$$\Leftrightarrow M \text{ có tọa độ } (2, 2 \cdot 2 + 1) = (2, 5).$$

Ý tưởng cơ bản của lời giải trên vẫn là dựa vào kết quả đã biết trong hình học phẳng. Tuy nhiên việc "thay" đường thẳng d bằng trục $x'Ox$ khi xét vị trí tương đối của các điểm đã làm cho độ phức tạp trong tính toán giảm đi rất nhiều. Bạn sẽ thấy rõ hơn hiệu lực của ý tưởng này trong ví dụ sau:

Bài toán 2: Trong không gian cho hai điểm $A(a, 0, a)$; $B\left(\frac{4a}{3}, \frac{-2a}{3}, \frac{-a}{3}\right)$ và đường thẳng d có phương trình tham số:

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = a - t \end{cases}$$

Tìm M thuộc d sao cho:

a) $(MA + MB)$ nhỏ nhất

b) $|MA - MB|$ lớn nhất.

Cách giải trong hình học không gian:



ĐỀ THI OLYMPIC TOÁN CỦA PHÁP (1996)

Thời gian : 5 giờ

Bài 1. Trong mặt phẳng xét tam giác ABC và 6 điểm D, E, F, G, H, K sao cho $ABED, BCGF$ và $ACHK$ đều là hình vuông ở bên ngoài $\triangle ABC$. Chứng minh rằng các điểm D, E, F, G, H, K cùng thuộc một đường tròn khi và chỉ khi xảy ra một trong hai trường hợp sau :

- tam giác ABC là đều
- tam giác ABC là vuông cân.

Bài 2. Giả sử a, b là hai số nguyên dương và a lẻ. Xét dãy số thực (u_n) ($n = 0, 1, 2, \dots$) được xác định bởi:

$$u_0 = b,$$

$$u_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2} u_n & \text{nếu } u_n \text{ là số nguyên chẵn} \\ a + u_n & \text{nếu } u_n \text{ không chẵn} \end{cases}$$

với mọi $n = 0, 1, 2, \dots$

+ Để giải câu a), người ta tìm điểm B' là ảnh của điểm B qua phép quay quanh trục d với góc quay thích hợp sao cho A, B', d đồng phẳng và A, B' nằm về hai phía đối với d . Khi đó :

$$(MA+MB)_{\min} \Leftrightarrow M = AB' \cap d.$$

+ Để giải câu b), người ta tìm điểm B'' là ảnh của B qua phép quay quanh trục d với góc quay thích hợp sao cho A, B'', d đồng phẳng và A, B'' nằm về một phía đối với d . Khi đó nếu AB'' cắt d thì

$$|MA - MB|_{\max} \Leftrightarrow M = AB'' \cap d.$$

Dựa và kết quả đã biết trong hình học không gian, ta cũng có thể giải được bài toán 2. Tuy nhiên việc tìm tọa độ điểm B' (trong câu a) hoặc B'' (trong câu b) buộc ta phải thực hiện những phép tính rất phức tạp. Để khắc phục tình trạng này, ta lại tiếp tục ý tưởng đã có trong lời giải bài toán 1.

a) Vì $M \in d$ nên M có tọa độ $(t, t, a-t)$. Khi đó :

$$MA + MB = \sqrt{(t-a)^2 + t^2 + (-t)^2} + \sqrt{\left(t - \frac{4a}{3}\right)^2 + \left(t + \frac{2a}{3}\right)^2 + \left(\frac{4a}{3} - t\right)^2}$$

Chứng minh rằng :

- Có thể tìm được số nguyên n sao cho $u_n \leq a$
- Kể từ lúc nào đó thì dãy số là tuần hoàn

Bài 3. a) Xét một hình hộp chữ nhật. Chứng minh rằng có thể chọn được 4 trong 8 đỉnh của nó làm các đỉnh của một tứ diện có 4 mặt đều là tam giác vuông.

b) Đảo lại, chứng minh rằng mỗi tứ diện mà 4 mặt đều là tam giác vuông có 4 đỉnh là 4 trong 8 đỉnh của một hình hộp chữ nhật nào đó.

c) Tìm trong các tứ diện nói trên các tứ diện có ít nhất 2 mặt là tam giác cân. Hãy tính độ dài của các cạnh tứ diện như thế theo độ dài của cạnh nhỏ nhất.

Bài 4. a) Xét hàm số $f(x) = x^x$ xác định với mọi số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số đó.

b) Chứng minh rằng $x^x + y^y > 1$, trong đó x và y là những số nguyên dương.

Bài 5. Giả sử n là số nguyên dương. Ta nói rằng số nguyên dương k thỏa mãn điều kiện C_n nếu tồn tại $2k$ số nguyên dương $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_k, b_k$ phân biệt nhau sao cho các tổng $a_1+b_1, a_2+b_2, \dots, a_k+b_k$ đôi một khác nhau và đều nhỏ hơn n .

a) Chứng minh rằng nếu k thỏa mãn điều kiện C_n thì $k \leq \frac{2n-3}{5}$.

b) Chứng minh rằng 5 thỏa mãn điều kiện C_{14}

c) Giả sử $\frac{2n-3}{5}$ là số nguyên, chứng minh rằng $\frac{2n-3}{5}$ thỏa mãn điều kiện C_n .

$$= \sqrt{3t^2 - 2at + a^2} + \sqrt{3t^2 - 4at + 4a^2}$$

$$= \sqrt{3} \left(\sqrt{\left(t - \frac{a}{3}\right)^2 + \frac{2a^2}{9}} + \sqrt{\left(t - \frac{2a}{3}\right)^2 + \frac{8a^2}{9}} \right)$$

$$\text{Xét } A' \left(\frac{a}{3}, \frac{\sqrt{2}a}{3} \right); B' \left(\frac{2a}{3}, -\frac{2\sqrt{2}a}{3} \right); M'(t, 0).$$

$$\text{Khi đó } MA + MB = \sqrt{3}(M'A' + M'B').$$

Vì M' chạy trên $x'Ox$ và A', B' nằm về hai phía đối với $x'Ox$ nên :

$$(MA + MB)_{\min} \Leftrightarrow (M'A' + M'B')_{\min}$$

$$\Leftrightarrow M' = A'B' \cap x'Ox \Leftrightarrow \frac{\overline{M'A'}}{\overline{M'B'}} = \frac{\sqrt{2}a/3}{-2\sqrt{2}a/3} = \frac{-1}{2}$$

$$\Leftrightarrow M' \text{ có tọa độ } \left(\frac{4a}{9}, 0 \right)$$

$$\Leftrightarrow M \text{ có tọa độ } \left(\frac{4a}{9}, \frac{4a}{9}, a - \frac{4a}{9} \right) = \left(\frac{4a}{9}, \frac{4a}{9}, \frac{5a}{9} \right)$$

b) Tương tự như câu a, ta có :

$$|MA - MB| = \sqrt{3} \left| \sqrt{\left(t - \frac{a}{3}\right)^2 + \frac{2a^2}{9}} - \sqrt{\left(t - \frac{2a}{3}\right)^2 + \frac{8a^2}{9}} \right|$$

(Xem tiếp trang 5)



ĐỀ RA KÌ NÀY

CÁC LỚP THCS

Bài T1/281. Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình :

$$54x^3 + 1 = y^3$$

TRẦN XUÂN ĐÁNG

(GV THPT chuyên Lê Hồng Phong, Nam Định)

Bài T2/281. Giải phương trình

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 16\sqrt[3]{x} - 9 = 0$$

NGUYỄN VĂN HIẾN

(GV THPT Quỳnh Phụ Thái Bình)

Bài T3/281. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$(a_1 + a_2 + a_3)(a_3 + a_4 + a_5)(a_5 + a_6 + a_1),$$

trong đó các số $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ lấy các giá trị khác nhau trong tập hợp $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

VŨ ĐỨC CẢNH

(SVD27C - CK1 ĐH An Ninh Hà Nội)

Bài T4/281. Từ điểm A nằm ngoài đường tròn tâm O kẻ hai tiếp tuyến AB và AC (B, C là các tiếp điểm). Gọi M là điểm nào đó (khác B, C) trên đường tròn. Tiếp tuyến qua M cắt AB và AC ở E và F . Đường thẳng BC cắt OE và OF ở P và Q . Chứng minh rằng tỉ số $\frac{PQ}{EF}$ không đổi khi M di chuyển trên đường tròn.

NGUYỄN XUÂN HÙNG

(GV THPT Lam Sơn Thanh Hóa)

Bài T5/281. Cho tam giác ABC với $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Gọi r và r_a, r_b, r_c theo thứ tự là bán kính của đường tròn nội tiếp và các đường bàng tiếp góc A, B, C của tam giác đó. Chứng minh rằng :

$$\frac{abc}{r} \geq \frac{a^3}{r_a} + \frac{b^3}{r_b} + \frac{c^3}{r_c}$$

HỒ QUANG VINH

(GV PTCT ĐHSP Vinh)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/281. Chứng minh rằng trong dãy số tự nhiên liên tiếp

$n, n+1, n+2, \dots, n^k + n^{k-1} + \dots + n^2 + n + 2$ với

$k \geq 2$, bao giờ cũng tìm được lũy thừa bậc $k+1$ của một số tự nhiên.

LÊ ANH TUẤN

(GD THPT chuyên Vinh Phúc)

Bài T7/281. Xét dãy số nguyên dương (a_n) ($n = 0, 1, 2, \dots$) thỏa mãn các điều kiện: $a_0 = 1$, $a_n^2 > a_{n-1} a_{n+1}$ với mọi $n = 1, 2, \dots$

a) Chứng minh rằng $a_n > n$ với mọi $n \geq 1$

b) Tìm $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \left(\frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_2} + \frac{3}{a_3} + \dots + \frac{n}{a_n} \right)$

NGÔ THẾ PHIỆT

(GV THPT chuyên Lê Quý Đôn, Đà Nẵng)

Bài T8/281. Tìm số tất cả các đa thức $P(x)$ bậc không lớn hơn 3 với các hệ số nguyên không âm và thỏa mãn điều kiện $P(3) = 2000$.

ĐOÀN KIM SANG

(GV THPT chuyên Yên Bái)

Bài T9/281. Cho tam giác ABC với đường tròn ngoại tiếp tâm O và đường tròn nội tiếp tâm I . Các tia AI, BI, CI lần lượt cắt đường tròn tâm O lần nữa tại A_1, B_1, C_1 . Chứng minh rằng :

$$a) AB^2 + BC^2 + CA^2 \leq A_1B_1^2 + B_1C_1^2 + C_1A_1^2$$

$$b) IA^2 + IB^2 + IC^2 \leq IA_1^2 + IB_1^2 + IC_1^2$$

THÁI VIỆT THẢO

(GV THPT chuyên Phan Bội Châu)

Bài T10/281. Tứ diện $A_1A_2A_3A_4$ có diện tích mặt $A_2A_3A_4$ bằng S và diện tích mỗi mặt còn lại đều bằng 1, các góc phẳng nhị diện cạnh A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4 có số đo tương ứng bằng $\alpha, 2\alpha, 3\alpha$. Chứng minh rằng : $2 - \sqrt{3} < S^2 < 3$.

NGUYỄN VIỆT LONG

(GV THPT Lam Sơn, Thanh Hóa)

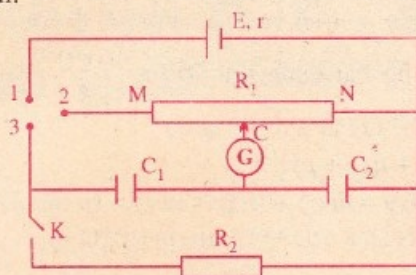
CÁC ĐỀ VẬT LÝ

Bài L1/281. Vật có khối lượng $m_0 = 0,5$ kg chuyển động với $v_0 = 10$ m/s tới va chạm đàn hồi với vật có khối lượng m đang đứng yên. Bỏ qua mọi ma sát, biết rằng sau khi va chạm thì vật m_0 bị lệch khỏi phương ban đầu một góc $\alpha = 30^\circ$. Hãy xác định m và vận tốc của hai vật sau khi va chạm.

LẠI THẾ HIỀN

(GV THPT DL Lương Thế Vinh, Hà Nội)

Bài L2/281. Cho mạch điện như hình vẽ. Biết $r = 6\Omega$; $C_1 = 7\mu\text{F}$; $C_2 = 3\mu\text{F}$; $R_G \approx 0$; R_1 là vật dẫn đồng chất, tiết diện đều dài $MN = 30\text{cm}$.



Nếu mở K , nối chốt (1) với (3), rồi tháo ra, sau đó nối chốt (2) với (3) và đóng K thì thấy nhiệt lượng tỏa ra trên R_1 bằng $\frac{1}{4}$ nhiệt lượng tỏa ra trên r .

Nếu nối chốt (1) với (2) và (2) với (3) thì thấy dù đóng K hay mở K công suất mạch ngoài vẫn không đổi; ngoài ra nếu mở K và cho con chạy c di chuyển từ M đến N với vận tốc $v = 3\text{cm/s}$ thì thấy dòng qua G là $12\mu\text{A}$. Hãy tìm E , R_1 và R_2 .

TRẦN MANH HÙNG
(GV khối PTCT ĐHSPT Vinh)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/281. Find all integers – solutions of the equation

$$54x^3 + 1 = y^3$$

T2/281. Solve the equation

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 16\sqrt[3]{x} - 9 = 0$$

T3/281. Find the greatest value and the least value of the expression

$$(a_1 + a_2 + a_3)(a_3 + a_4 + a_5)(a_5 + a_6 + a_1),$$

where $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ take distinct values in the set $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

T4/281. From a point A outside a circle with center O , draw the two tangents AB and AC , touching the circle at B and C . Let M be a point (distinct from B, C) on the circle. The tangent at M cuts AB and AC respectively at E and F . The line BC cuts OE and OF respectively at P and Q . Prove that the ratio $\frac{PQ}{EF}$ is constant when M moves on the circle.

T5/281. Let ABC be a triangle with $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Let r and r_a, r_b, r_c be respectively its inradius and the radii of its escribed circles respectively in the angles A, B, C . Prove that

$$\frac{abc}{r} \geq \frac{a^3}{r_a} + \frac{b^3}{r_b} + \frac{c^3}{r_c}$$

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/281. Prove that in the sequence of consecutive natural numbers $n, n+1, n+2, \dots, n^k + n^{k-1} + \dots + n^2 + n + 2$ ($k \geq 2$), one can find a $(k+1)$ -th power of a whole number.

T7/281. Consider a sequence of positive integers (a_n) ($n = 0, 1, 2, \dots$) satisfying the conditions: $a_0 = 1$, $a_n^2 > a_{n-1} a_{n+1}$ for every $n = 1, 2, \dots$

a) Prove that $a_n > n$ for every $n \geq 1$.

b) Find $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \left(\frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_2} + \frac{3}{a_3} + \dots + \frac{n}{a_n} \right)$

T8/281. Find the number of polynomials $P(x)$ with non negative integer-coefficients, with degree not exceeding 3, satisfying the condition $P(3) = 2000$.

T9/281. Let ABC be a triangle with circumcenter O and incenter I . The rays AI, BI, CI cut again the circumcircle respectively at A_1, B_1, C_1 . Prove that:

a) $AB^2 + BC^2 + CA^2 \leq A_1B_1^2 + B_1C_1^2 + C_1A_1^2$

b) $IA^2 + IB^2 + IC^2 \leq IA_1^2 + IB_1^2 + IC_1^2$

T10/281. The tetrahedron $A_1A_2A_3A_4$ has the following properties: the area of the face $A_2A_3A_4$ equal S , that of every other face equals 1; the measures of its dihedral angles with sides A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4 are respectively $\alpha, 2\alpha, 3\alpha$. Prove that:

$$2 - \sqrt{3} < S^2 < 3$$



Bài T1/277. Tìm tất cả các bộ số nguyên (a, b, c, d) thỏa mãn đồng thời các điều kiện

$$\begin{cases} a^3 + 3b = c^3 & (1) \\ b^3 + 3a = d^3 & (2) \end{cases}$$

Lời giải. (dựa theo Vũ Quốc Mỹ, 9H THPT Trung Vương, Hà Nội)

Ta xét 3 trường hợp :

1) Nếu $a = 0$ thì $3b = c^3$ và $b = d$ suy ra nghiệm (a, b, c, d) có dạng $(0, 9k^3, 3k, 9k^3)$ với $k \in \mathbb{Z}$.

2) Nếu $b = 0$ thì $a = c$ và $3a = d^3$ suy ra nghiệm (a, b, c, d) có dạng $(9k^3, 0, 9k^3, 9k)$ với $k \in \mathbb{Z}$.

3) Nếu $a \neq 0$ và $b \neq 0$. Xét trường hợp $a \leq b$

a) Với $0 < a \leq b$ thì $b^3 < b^3 + 3a = d^3 < b^3 + 3b^2 + 3b + 1 = (b+1)^3 \Rightarrow$ không tồn tại số nguyên d như vậy.

b) Với $a \leq b < 0$ thì $a^3 > a^3 + 3b = c^3 > a^3 - 3a^2 + 3a - 1 = (a-1)^3 \Rightarrow$ không tồn tại số nguyên c như vậy.

c) Với $a < 0 < b$ thì $b \geq a+2$. Từ $3(b-1)^2 + 4 > 0$ suy ra $3b^2 - 3b + 1 > 3b - 6 \geq 3a$ nên

$(b-1)^3 = b^3 - 3b^2 + 3b - 1 < b^3 + 3a = d^3 < b^3 \Rightarrow$ không tồn tại số nguyên d như vậy.

Lập luận tương tự với trường hợp $a > b$ cũng suy ra vô nghiệm. Vậy chỉ có các bộ số $(0, 9k^3, 3k, 9k^3)$ và $(9k^3, 0, 9k^3, 9k)$ với $k \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn đề bài.

Nhận xét. Một số bạn không sử dụng tính chất của số nguyên $a < b \Rightarrow a+1 \leq b$ mà xét tính chia hết nên biện luận dài dòng. Các bạn sau đây cũng có lời giải đúng và gọn :

Hà Nội: Nguyễn Đức Tâm, 7C, THCS Giảng Võ, Ba Đình; **Phú Thọ:** Trần Thanh Hải, Hoàng Ngọc Minh, 9C, THCS Việt Trì; **Hà Tây:** Nguyễn Tiến Cường, 9A, THCS Lương Thế Vinh, Đan Phượng.

TỔNG NGUYÊN

Bài T2/277. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $20xy + 11xz + 2000yz$ trong đó các số tự nhiên x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 2000$.

Lời giải. Bạn Phạm Thành Trung, 9A, THPT Nguyễn Trãi, Tp Hải Dương đã giải bài toán cho trường hợp tổng quát thay thế 20, 11 và 2000 bởi các hệ số m, n, p thỏa mãn $0 < m, n < m+n$ và $S = x+y+z \geq 0$ với S chẵn.

Áp dụng bất đẳng thức $ab \leq \frac{(a+b)^2}{4}$ và chú ý

rằng $S - (x+y) \leq S - y$ ta có :

$$\begin{aligned} mxy + nxz + pyz &= (mxy + myz) + (nxz + nyz) + (p-m-n)yz \\ &\leq my(x+z) + nz(x+y) + (p-m-n)y(S-y) \\ &= my(S-y) + nz(S-y) + (p-m-n)\frac{S^2}{4} \\ &\leq m\frac{S^2}{4} + n\frac{S^2}{4} + (p-m-n)\frac{S^2}{4} = p\frac{S^2}{4}. \end{aligned}$$

Đẳng thức chỉ xảy ra khi $x = 0, y = z = \frac{S}{2}$.

Nhận xét. Có bạn cũng tổng quát bài toán cho hệ số dương tùy ý, nhưng nếu thiếu điều kiện ràng buộc $m+n \leq p$ thì nghiệm bài toán không đúng như các bạn đưa ra. Cũng có bạn ràng buộc $x, y, z > 0$ nên đưa ra nghiệm khác. Các bạn sau đây có lời giải ngắn gọn hơn cả.

Hải Dương: Phạm Thành Trung, Nguyễn Thành Nam, 9A, THPT Nguyễn Trãi, Tp Hải Dương; **Vĩnh Phúc:** Kim Đình Trường, 8B, THCS Yên Lạc; **Bạc Liêu:** Nguyễn Thành Nhân, 9a, PT thực hành sư phạm thị xã Bạc Liêu; **Hà Nội:** Nguyễn Anh Tôn, 9T THCS Ngô Sĩ Liên.

VŨ ĐÌNH HÒA

Bài T3/277. Giải phương trình :

$$\sqrt[5]{27}x^{10} - 5x^6 + \sqrt[5]{864} = 0$$

Lời giải. Ta thấy $x = 0$ không thỏa mãn phương trình nên chia hai vế cho x^6 sẽ được phương trình tương đương :

$$\sqrt[5]{27}x^4 + \frac{\sqrt[5]{32.27}}{x^6} = 5 \Leftrightarrow x^4 + \frac{2}{x^6}\sqrt[5]{\frac{1}{27}}$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 5 số dương ta có :

$$x^4 + \frac{2}{x^6} = \frac{x^4}{3} + \frac{x^4}{3} + \frac{x^4}{3} + \frac{1}{x^6} + \frac{1}{x^6} \geq 5\sqrt[5]{\frac{1}{27}}$$

Do đó : x thỏa mãn phương trình $\Leftrightarrow$ bất đẳng thức trên trở thành đẳng thức $\Leftrightarrow \frac{x^4}{3} = \frac{1}{x^6} \Leftrightarrow$

$$x^{10} = 3 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt[10]{3}$$

Nhận xét. 1) Một số bạn THPT cũng tham gia giải bằng cách đặt $t = x^2$ và đưa về xét hàm số

$$\begin{aligned} y &= t^5 - \frac{5}{\sqrt[5]{27}}t^3 + 2 \text{ với } t \geq 0 \text{ sẽ thấy } f(t) = 0 \Leftrightarrow t \\ &= \sqrt[10]{3} \Leftrightarrow x = \pm \sqrt[10]{3}. \end{aligned}$$

GIẢI BÀI KÌ TRƯỚC

2) Nhiều bạn dùng bất đẳng thức Côsi theo hướng khác, chẳng hạn áp dụng cho 5 số $\frac{x^{10}}{3}, \frac{x^{10}}{3}, \frac{x^{10}}{3}, 1, 1$ vẫn ra kết quả đúng.

3) Một số bạn đưa phương trình về dạng tích :

$(x^2 - \sqrt[5]{3})^2 (\sqrt[5]{27}x^6 + 2^5\sqrt[5]{81}x^4 + 4x^2 + 2^5\sqrt[5]{3}) = 0$
và tìm được nghiệm đúng.

4) Các bạn có lời giải tốt và trình bày mạch lạc là :

Phú Thọ: Hoàng Ngọc Minh, 9C, Nguyễn Thị Thu Hòa và Chữ Thu Huyền, 8C, THCS Việt Trì; **Hòa Bình:** Lê Thái Hoàng, 9A1, THCS Hữu Nghị; **Khánh Hòa:** Võ Xuân Minh, 9¹, THCS Cam Nghĩa, Cam Ranh, Nguyễn Tiến Việt, 9¹³ THCS Thái Nguyên, Nha Trang; **Đồng Nai:** Trần Võ Huy, 9/3 THCS Nguyễn Bình Khiêm, Tp Biên Hòa; **Nghệ An:** Phan Trung Kiên, 8C, THCS thị trấn Nam Đàn; **Hà Tĩnh:** Lê Minh Quang, 8A, THCS Phan Huy Chú, Thạch Hà; **Bạc Liêu:** Nguyễn Thành Nhân, 9A, trường thực hành sư phạm, thị xã Bạc Liêu; **Vĩnh Phúc:** Hoàng Thị Minh Huệ, 6C và Hoàng Minh Hải, 9C, THCS Tam Đảo, Tam Dương; **Quảng Ngãi:** Lý Xuân Lành, 9², THCS Nguyễn Tự Tân, Bình Sơn; **Hung Yên:** Đoàn Thị Kim Huế, 7C, THCS Phan Huy Thông, Ân Thi; **Đắk Lắk:** Ngô Thị Huyền Trang, 7A₁, THCS Trần Hưng Đạo, Buôn Ma Thuột; **Nam Định:** Lương Hữu Long, 9A₂, THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên; **Hà Tây:** Trịnh Xuân Tú, 8B, THCS Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hòa; **Tp Hồ Chí Minh:** Nguyễn Đình Khuông, 8A1, THCS Ngô Tất Tố, P.15, Q. Phú Nhuận; **Đồng Tháp:** Nguyễn Công Thắng, 9A1, THCB thị xã Cao Lãnh; **Bắc Giang:** Lương Hồng Tâm, 8C, THCS thị trấn Cao Thượng, Tân Yên; **Hà Nội:** Nguyễn Anh Tôn, 9T, THCS Ngô Sĩ Liên, Trần Việt Hưng, 9H, THCS Trưng Vương; **Hải Phòng:** Phan Thị Mai Anh, 7A1, THCS Tràng Cát, An Hải; **Hải Dương:** Phạm Thành Trung, 9A, THPT Nguyễn Trãi.

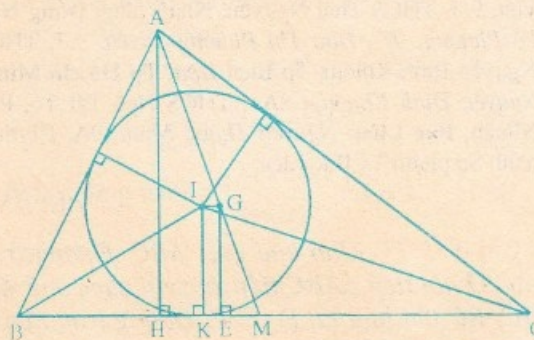
LÊ THỐNG NHẤT

T4/277. Gọi G là trọng tâm và I là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$. Chứng minh rằng nếu $\operatorname{tg} \frac{B}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{1}{3}$ thì IG song song với BC .

Lời giải. Đặt $BC = a, CA = b, AB = c$ và $2p = a+b+c, IK = r, AH = h$ như trên hình vẽ. Để thấy $BK = p-b, CK = p-c$. Ta có

$$\operatorname{tg} \frac{B}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{IK}{BK} \cdot \frac{IK}{CK} = \frac{r^2}{(p-b)(p-c)}$$

$$= \frac{r^2 p(p-a)}{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{Sr(p-a)}{S^2} = \frac{rp-ra}{S} =$$

$$= 1 - \frac{2r}{h} \quad (1).$$


Từ đó $\operatorname{tg} \frac{B}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 1 - \frac{2r}{h} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{r}{h} = \frac{1}{3}$
 $\Leftrightarrow \frac{r}{h} = \frac{GM}{AM} \Leftrightarrow \frac{r}{h} = \frac{GE}{h} \Leftrightarrow IK = GE$. Như vậy nếu 2 điểm G, I phân biệt thì $IG \parallel BC \Leftrightarrow \operatorname{tg} \frac{B}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{1}{3}$.

Nhận xét. Một số bạn có nhận xét là phần đảo cũng đúng. Các bạn sau có lời giải tốt :

Hà Nội: Đỗ Trung Tiến, 9C, THPT Hà Nội - Amsterdam, Vũ Quốc Mỹ, 9H, THCS Trưng Vương, Hoàn Kiếm, Lê Hùng Việt Bảo, 8A, THCS Nguyễn Trường Tộ, Đống Đa, Nguyễn Thanh Tùng, 7A1, THCS Láng Thượng, Ba Đình; **Thái Nguyên:** Nguyễn Lê Trang, 9A1, THCS Chu Văn An, Tp Thái Nguyên; **Phú Thọ:** Bùi Quang Nha, 9C, THCS Việt Trì, Triệu Văn Tiến, 8A, THCS Lâm Thao; **Vĩnh Phúc:** Phạm Văn Hoàng, 8B, THCS Yên Lạc; Nguyễn Hồng Diệp, 9A, THCS Vĩnh Tường, Nguyễn Duy Hưng, 9A, THCS Vũ Di, Vĩnh Tường; **Hà Tây:** Nguyễn Thị Thu Hòa, 9C, THCS Sơn Tây, Tx Sơn Tây, Dương Minh Sơn, 8B, THCS Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hòa; **Hòa Bình:** Nguyễn Lâm Tuyên, 9B, THCS Lạc Thịnh, Yên Thủy; **Bắc Giang:** Lương Hồng Tâm, 8C, THCS Cao Thượng, Tân Yên; **Thái Bình:** Nguyễn Thị Huyền, 9A, THPT Tt Đông Hưng; **Hung Yên:** Đoàn Thị Kim Huế, 7C, THCS Phạm Huy Thông, Ân Thi; **Hải Dương:** Phạm Văn Hùng, 9A1, THCS Lê Thanh Nghị, Gia Lộc, Phạm Huy Hoàng, 8/3, THCS Lê Quý Đôn, Tp Hải Dương; **Hải Phòng:** Phạm Duy Thành, 8A, THCS NK Trần Phú; **Thanh Hóa:** Nguyễn Đình Dũng, 8A, THCS Nhữ Bá Sĩ, Hoàng Hóa, Vũ Minh Triều, 8A, THCS Hồ Xuân Hương, Quỳnh Lưu; **Nghệ An:** Phan Trung Kiên, 8C, THCS Nam Đàn, Phan Huy Quang Vũ, 9B, THCS Sông Hiếu, Thái Hòa, Phan Huy Bằng, 9B, THCS Bạch Liêu, Yên Thành, Trần Đình Trung, 9A, THCS Hermann Gmeiner, Vinh; **Hà Tĩnh:** Thái Tuấn Anh, 9A, THCS Phan Huy Chú, Thạch Hà; **Phú Yên:** Phùng Trọng Thực, 9A, THCS Lương Thế Vinh; **Khánh Hòa:** Võ Xuân Minh, 9/1, THCS Cam

GIẢI BÀI KÌ TRƯỚC

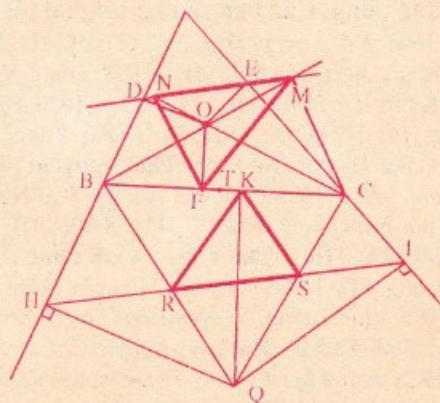
Nghĩa, Cam Ranh, *Trần Minh Bình*, 9/15, *Nguyễn Tiến Việt*, 9/3, THCS Thái Nguyên, Nha Trang; **Đồng Nai**: *Lê Phương*, 9/3, *Đào Thị Phương Tuyền*, 9/3, THCS Nguyễn Bình Khiêm, Tp Biên Hòa; **Tp Hồ Chí Minh**: *Nguyễn Đình Khuông*, 8A1, THCS Ngô Tất Tố, Phú Nhuận; **Bạc Liêu**: *Nguyễn Thành Nhân*, 9A, PT thực hành Sư phạm Tx Bạc Liêu.

VIỆT HẢI

Bài T5/277. Cho tam giác ABC . Đường tròn tâm O nội tiếp $\triangle ABC$ tiếp xúc với các cạnh AB , AC , BC lần lượt tại D , E , F . Đường tròn tâm Q bàng tiếp $\triangle ABC$ tiếp xúc với các cạnh BC , tia AB , tia AC theo thứ tự tại K , H , I . Đường thẳng DE cắt các tia BO và CO lần lượt tại M và N . Đường thẳng HI cắt các tia BQ và CQ lần lượt tại R và S . Chứng minh rằng :

a) $\triangle FMN = \triangle KRS$

b) $\frac{IS}{AB} = \frac{SR}{BC} = \frac{RH}{CA}$



Lời giải. a) Xét trường hợp M nằm ngoài và N nằm trong tam giác ABC . Các trường hợp còn lại xét tương tự.

Ta có $\angle MEC = \angle AEN = \frac{180^\circ - \hat{A}}{2} =$

$= \angle OBC + \angle OCB = \angle MOC$

nên $MCOE$ là tứ giác nội tiếp. Suy ra $\angle OEC = 90^\circ = \angle BMC$ (1)

Tương tự tứ giác $CRQI$ nội tiếp suy ra $\angle CRQ = \angle CIQ = 90^\circ$ (2)

Mặt khác $\angle MBQ = 90^\circ$ (3)

Từ (1), (2), (3) ta có $MBRC$ là hình chữ nhật.

Gọi T là trung điểm BC . Ta có M và R đối xứng nhau qua T . Tương tự N , S đối xứng nhau

qua T . Từ tính chất tiếp tuyến ta suy ra $BF = CK$.

Từ đó có $TF = TK$ hay F và K đối xứng nhau qua T . Vậy $\triangle FMN = \triangle KRS$.

b) Ta có $\angle BKR = \angle BHR = \angle AHI = \angle AHI = \angle CIS$

Nên tứ giác $RKCI$ là nội tiếp. Do đó $\angle KRS = \angle ACB$.

Tương tự $\angle KSR = \angle ABC$.

Vậy $\triangle KRS \sim \triangle ACB$.

Suy ra $\frac{KS}{AB} = \frac{SR}{BC} = \frac{KR}{AC}$

Mà $KS = SI$ và $KR = HR$ nên $\frac{IS}{AB} = \frac{SR}{BC} = \frac{RH}{CA}$.

Nhận xét. Giải tốt bài này có các bạn :

Yên Bái: *Trần Bình Minh*, 9K, *Lê Hồng Phong*; **Phú Thọ:** *Trần Thanh Hải*, 9C, THCS Việt Trì; **Vĩnh Phúc:** *Kim Đình Trường*, 8B, THCS Yên Lạc, *Nguyễn Tuấn Học*, 9B, THCS Yên Lạc; **Hải Dương:** *Nguyễn Thành Nam*, *Phạm Thành Trung*, 9A, *Nguyễn Trãi*, **Hải Phòng:** *Phạm Anh Minh*, 8A, *NK Trần Phú*, **Nam Định:** *Đỗ Thị Hải Yến*, 9B, THCS Hải Hậu, *Ngô Huy Hoàng*, 9A2, *Lê Quý Đôn*, *Ý Yên*; **Thanh Hóa:** *Hoàng Thị Hằng*, 9B, THCS Nguyễn Chích, *Đồng Sơn*; **Nghệ An:** *Phan Công Mạnh*, 9B, *Quán Hành*, *Nghi Lộc*; **Quảng Ngãi:** *Đặng Đình Thuận*, 8A, THCS Hành Phước, *Nghĩa Hành*; **Tp Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Đình Khuông*, 8A1, THCS Ngô Tất Tố, *Phú Nhuận*, **Bến Tre:** *Nguyễn Tiến Dũng*, 8C, THCS Mỹ Hóa.

VŨ KIM THỦY

Bài T6/277. Chứng minh rằng số 2000^{2000} là tổng của hai số chính phương.

Lời giải. (của bạn *Trần Việt Hưng*, 9H, THCS Trung Vương, Hà Nội)

Ta có nhận xét sau : Nếu n là tổng của hai số chính phương thì n^2 cũng là tổng hai số chính phương.

Thật vậy, giả sử $a^2 + b^2 = n$
 $\Rightarrow n^2 = (a^2 + b^2)^2 = (a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2$

Lại có $2000 = 40^2 + 20^2$ do đó áp dụng bổ đề thì $2000^2, \dots, 2000^{2^n}$ là tổng của hai số chính phương với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Nhận xét. Bài này được nhiều bạn tham gia giải.

Các bạn có lời giải tốt : **Vĩnh Phúc:** *Hoàng Xuân Quang*, 11A, trường THPT chuyên Vĩnh Phúc, *Nguyễn Duy Cường*, 12A9, THPT Lập Thạch; ; **Hà Nội:** *Nguyễn Quang Hải*, 11A, ĐHKHTN, *Đỗ Trung Tiến*,

GIẢI BÀI KÌ TRƯỚC

9C, Hà Nội - Amsterdam; **Hải Dương:** Ngô Xuân Bách, 10T, THPT NK Hải Dương; **Thanh Hóa:** Nguyễn Xuân Hòa, 10T, THPT Lam Sơn; **Tiền Giang:** Nguyễn Tuấn Ngọc, 10 toán, THPT chuyên; **Quy Nhơn:** Phạm Anh Vinh, THPT Lê Quý Đôn.

- Một cách tổng quát có thể chứng minh được rằng: số nguyên dương n là tổng của hai số chính phương khi và chỉ khi trong phân tích nguyên tố của n các ước nguyên tố dạng $4k+3$ phải có số mũ chẵn (xem chứng minh trong cuốn Bài giảng số học, NXB Giáo dục 1996).

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T7/277. Tìm tất cả các số hữu tỉ p, r, s thỏa mãn:

$$p \cos \frac{\pi}{7} + r \cos \frac{2\pi}{7} + s \cos \frac{3\pi}{7} = 1.$$

Lời giải. (của đa số các bạn).

$$\text{Ta có } \sin \frac{4\pi}{7} = \sin \frac{3\pi}{7}.$$

$$\text{Hay } 4 \cos \frac{2\pi}{7} \cos \frac{\pi}{7} \sin \frac{\pi}{7} = 3 \sin \frac{\pi}{7} - 4 \sin^3 \frac{\pi}{7}$$

Suy ra

$$8 \cos^3 \frac{\pi}{7} - 4 \cos^2 \frac{\pi}{7} - 4 \cos \frac{\pi}{7} + 1 = 0. \quad (1)$$

Suy ra $x = \cos \frac{\pi}{7}$ là một nghiệm của đa thức $P(x) = 8x^3 - 4x^2 - 4x + 1$. Mặt khác các số $\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4}, \pm \frac{1}{8}$ không là nghiệm của $P(x)$ nên $P(x)$ không có nghiệm hữu tỉ. Điều đó chứng tỏ rằng $\cos \frac{\pi}{7}$ là một số vô tỉ.

Ta chứng minh rằng không tồn tại đa thức bậc nhỏ hơn 3 với các hệ số hữu tỉ nhận $x = \cos \frac{\pi}{7}$ là nghiệm. Giả sử $Q(x)$ là đa thức bậc nhỏ hơn 3 với các hệ số hữu tỉ nhận $x = \cos \frac{\pi}{7}$ là nghiệm. Chia $P(x)$ cho $Q(x)$ ta được $P(x) = Q(x)h(x) + R(x)$ với $\deg h(x) = 1$ (hệ số của $h(x)$ là các số hữu tỉ) và $R(x) = c$ ($\forall x$) hoặc $\deg R(x) = 1$. Nếu $\deg h(x) = 1$ và $R(x) = c$ ($\forall x$) thì

$$P(\cos \frac{\pi}{7}) = Q(\cos \frac{\pi}{7}) h(\cos \frac{\pi}{7}) + R(\cos \frac{\pi}{7}) \\ \Rightarrow c = 0.$$

Suy ra $P(x)$ có nghiệm hữu tỉ, điều này không xảy ra.

Nếu $\deg R(x) = 1$ thì

$$P(\cos \frac{\pi}{7}) = Q(\cos \frac{\pi}{7}) h(\cos \frac{\pi}{7}) + R(\cos \frac{\pi}{7})$$

$\Rightarrow R(\cos \frac{\pi}{7}) = 0$ điều này không xảy ra vì $\cos \frac{\pi}{7}$ là số vô tỉ.

Theo bài ra thì tồn tại các số hữu tỉ p, r, s thỏa mãn:

$$p \cos \frac{\pi}{7} + r \cos \frac{2\pi}{7} + s \cos \frac{3\pi}{7} = 1.$$

Suy ra

$$p \cos \frac{\pi}{7} + r(2 \cos^2 \frac{\pi}{7} - 1) + s(4 \cos^3 \frac{\pi}{7} - 3 \cos \frac{\pi}{7}) = 1.$$

Sử dụng (1) ta được

$$(2r+2s) \cos^2 \frac{\pi}{7} + (p-s) \cos \frac{\pi}{7} - r - \frac{s}{2} - 1 = 0.$$

Suy ra $\cos \frac{\pi}{7}$ là nghiệm của một đa thức với hệ số hữu tỉ và với bậc nhỏ hơn 3. Vậy đa thức đó phải đồng nhất bằng 0. Do đó

$$\begin{cases} 2r+2s = 0 \\ p-r = 0 \\ -r-\frac{s}{2}-1 = 0. \end{cases}$$

Hay $(p, r, s) = (2, -2, 2)$. Thử lại ta thấy các giá trị p, r, s như trên thỏa mãn.

Nhận xét. Đa số các bạn đều xác định đúng đáp số, nhưng nhiều chứng minh không được chính xác, không chặt chẽ.

Nguyễn Việt Hằng, 12A1, THPT chuyên Yên Bái; Nguyễn Huy Cường, 11T2, THPT chuyên Lê Khiết, **Quảng Ngãi;** Nguyễn Minh Đoàn, 11T, THPT chuyên **Tiền Giang;** Hồng Ngọc Bình, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Quảng Trị;** Nguyễn Văn Thắng, 12T, Võ Quang Đức, 12T, THPT chuyên **Thái Nguyên;** Bùi Văn Tùng, 12B, THPT chuyên Trần Nhật Duật, **Nam Định;** Lê Minh Toàn, 10T, THPT chuyên Hạ Long, Lưu Quang Tấn, 11T, Nguyễn Khánh Hà., 10T2, THPT chuyên **Quảng Bình;** Lê Tấn Thắng, 11A, THPT chuyên ĐHSP Vinh, Cao Xuân Vinh, 12B, THPT chuyên Nghĩa Đàn, **Nghệ An;** Nguyễn Văn Triết, 10A2, Đặng Quang Huy, 10A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn, **Đà Nẵng;** Nguyễn Dư Thái, 11CT, THPT chuyên ĐHKHTN Huế, **Thừa Thiên - Huế;** Đặng Tuấn Hiệp, 11C3, THPT chuyên Gia Lai, Ngô Xuân Bách, 10T, Tô Minh Hoàng, Chu Ngọc Hưng, 11T, THPT chuyên Nguyễn Trãi, Hải Dương; Hoàng

GIẢI BÀI KÌ TRƯỚC

Xuân Quang, 11A1, Vũ Nhật Huy, Nguyễn Xuân Trường, 10A1, Nguyễn Mạnh Hà, 12A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; Hoàng Quyền, 10A1, Trần Thanh Hải, 9C, THPT chuyên Hùng Vương, Phú Thọ; Trần Anh Hoàng, 10T, Nguyễn Đình Hoàng, Lâm Hoàng Nguyễn, Trần Việt Cường, 11T, THPT chuyên ĐHQG Tp Hồ Chí Minh; Hàn Thế Anh, 12A1, THPT chuyên ĐHSPT Hà Nội; Lê Hùng Việt Bảo, 8A, THPT Nguyễn Trường Tộ, Nguyễn Văn Thắng, 10T, Phan Văn Tiến, 12T, THPT chuyên Lam Sơn, Thanh Hóa; Hoàng Thanh Tùng, 11T, THPT chuyên Hải Phòng; Trần Viên Phương, 11T, THPT chuyên Sa Đéc, Đồng Tháp; Nguyễn Thành Nhân, 9A, THPT Bạc Liêu; Phan Hoàng Vũ, 10T, THPT chuyên Bà Rịa - Vũng Tàu.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T8/277. Cho số thực x sao cho $0 < x < \pi$ và $\frac{x}{\pi}$ không là số hữu tỉ. Đặt $S_1 = \sin x$, $S_2 = \sin x + \sin 2x$, ..., $S_n = \sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx$. Gọi t_n là số các hạng âm trong dãy $S_1, S_2, \dots, S_n$. Chứng minh rằng: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{t_n}{n} = \frac{x}{2\pi}$.

Lời giải. (của bạn Hoàng Ngọc Minh, 9C, THCS Việt Trì, Phú Thọ và nhiều bạn).

Trước hết chú ý:

$$S_m = \frac{\sum_{i=1}^m \left(\cos\left(i - \frac{1}{2}\right)x - \cos\left(i + \frac{1}{2}\right)x \right)}{2\sin \frac{x}{2}}$$

$$= \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos\left(m + \frac{1}{2}\right)x}{2\sin \frac{x}{2}} = \frac{\sin \frac{mx}{2} \sin \frac{(m+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$$

Do $0 < x < \pi$ và $\frac{x}{\pi}$ là số vô tỉ nên

$S_m < 0$ tồn tại $l \in \mathbb{N}^*$ thỏa mãn $\frac{mx}{2} < l\pi < \frac{(m+1)x}{2}$, với mỗi số m số l như trên nếu tồn tại thì duy nhất. Bởi vậy t_n bằng số các số $l \in \mathbb{N}$ mà $l\pi < \frac{(n+1)x}{2} = \left[\frac{(n+1)x}{2\pi} \right]$.

Hệ quả là

$$\frac{1}{n} \left(\frac{(n+1)x}{2\pi} - 1 \right) < \frac{t_n}{n} < \frac{(n+1)x}{n.2\pi}$$

Chú ý

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{(n+1)x}{2\pi} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)x}{n.2\pi} = \frac{x}{2\pi}$$

Theo định lý kẹp trong lý thuyết giới hạn dãy số ta có

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{t_n}{n} = \frac{x}{2\pi} \text{ (đpcm).}$$

Nhận xét. 1. Đây không phải là bài toán dạng mới, ví dụ bài toán cùng dạng là bài T4 - THPT số 4, năm 1985 (*). Có 66 bạn gửi lời giải tới Tòa soạn và tất cả các bạn giải đúng theo ý như trên.

* (là bài 202 trong sách Dãy số của Phan Huy Khải)

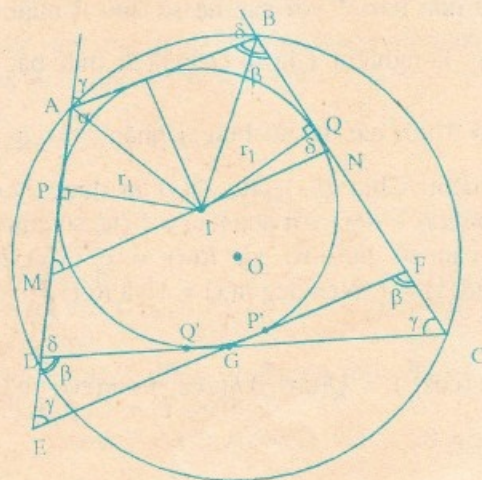
2. Các bạn học sinh lớp 10 sau đã tham gia và có lời giải tốt:

Phú Thọ: Nguyễn Thanh Hải, 10F1, THPT chuyên Hùng Vương, Việt Trì; **Vĩnh Phúc:** Nguyễn Xuân Trường, 10A1, THPT chuyên; **Hải Dương:** Ngô Xuân Bách, 10T, THPT Nguyễn Trãi; **Hải Phòng:** Phạm Đức Hiệp, 10T, PTNK Trần Phú; **Thanh Hóa:** Nguyễn Văn Thắng, 10T, THPT Lam Sơn; **Nghệ An:** Mai Văn Hà, Nguyễn Đức Quyết, 10A2, THPT Phan Bội Châu; **Quảng Trị:** Hồng Ngọc Bình, 10T, THPT Lê Quý Đôn; **Quảng Ngãi:** Trần Thái An Nghĩa, 10T2, THPT Lê Khiết; **Bà Rịa - Vũng Tàu:** Phan Hoàng Vũ, 10T1, THPT Lê Quý Đôn.

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T9/277. Cho tứ giác ABCD vừa nội tiếp một đường tròn tâm O vừa ngoại tiếp một đường tròn tâm I. Đường thẳng qua I song song với một cạnh của tứ giác, cắt hai cạnh đối diện còn lại ở hai điểm M và N. Chứng minh rằng độ dài MN không phụ thuộc vào việc chọn cạnh để kẻ đường thẳng song song với nó.

Lời giải. Cách 1. (của nhiều bạn).



GIẢI BÀI KÌ TRƯỚC

Kí hiệu độ lớn các góc của tứ giác $ABCD$ như sau : $\hat{A} = \alpha$, $\hat{B} = \beta$, $\hat{C} = \gamma$, $\hat{D} = \delta$, trong đó $\alpha + \gamma = \beta + \delta = \pi$ (vì $ABCD$ là tứ giác nội tiếp). Qua I dựng đoạn thẳng $MN \parallel AB$, $M \in AD$, $N \in BC$. Giả sử đường tròn (I) tiếp xúc với AD ở P và với BC ở Q . Xét hai tam giác IMP và INQ vuông ở P và Q , ta có $\angle IMP = \gamma$, $\angle INQ = \delta$ nếu α và β đều lớn hơn $\frac{\pi}{2}$ (như trường hợp hình vẽ trên), hoặc : $\angle IMP = \alpha$, $\angle INQ = \beta$ nếu $\alpha < \frac{\pi}{2}$, $\beta < \frac{\pi}{2}$. Từ hai tam giác vuông nói trên, ta được : $IP = IQ = r$, $MN = MI + IN = r \left(\frac{1}{\sin \gamma} + \frac{1}{\sin \delta} \right)$ hoặc :

$MN = r \left(\frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\sin \beta} \right)$, trong đó r là bán kính đường tròn (I) nội tiếp tứ giác $ABCD$.

Lại vì $ABCD$ nội tiếp một đường tròn bán kính R nên ta có :

$$\sin \gamma = \sin \alpha = \frac{BD}{2R}, \quad \sin \delta = \sin \beta = \frac{AC}{2R}.$$

Thay vào các đẳng thức trên, ta được :

$$MN = 2Rr \cdot \frac{AC + BD}{AC \cdot BD} \quad (1)$$

hoặc :

$$MN = \frac{r}{2} \left(\frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\sin \beta} + \frac{1}{\sin \gamma} + \frac{1}{\sin \delta} \right) \quad (2)$$

Một trong hai hệ thức (1) và (2) chứng tỏ rằng độ dài đoạn thẳng MN không phụ thuộc vào việc chọn cạnh để kẻ đường thẳng song song với nó.

Cách 2. (Dựa theo *Trần Bình Minh*, 9K, THCS Lê Hồng Phong, Tx. Yên Bái; *Nguyễn Hoàng Thạch*, 11T, THPT Hà Nội - Amsterdam, Hà Nội).

Kẻ thêm tiếp tuyến thứ hai của đường tròn (I) , song song với tiếp tuyến sẵn có AB , cắt các đường thẳng AD và BC theo thứ tự ở E và F , thế thì MN là đường trung bình của hình thang $ABFE$:

$$2MN = AB + EF \quad (3)$$

Gọi G là giao điểm của CD và EF , dễ thấy rằng $\angle GCF = \angle GED (= \alpha)$, cũng vậy, $\angle GFC = \angle GDE (= \beta)$ và do đó, $\triangle GCF \sim \triangle GED$. Mặt khác đường tròn (I) lại là đường tròn bàng

tiếp chung của hai tam giác GCF và GED ứng với hai góc tương ứng bằng nhau của chúng là $\angle GCF$ và $\angle GED$ (vì $\angle DCB = \angle FEA = \gamma$). Bởi vậy, các đoạn tiếp tuyến của (I) kẻ từ C và E đến (I) phải bằng nhau : $CQ = CQ' = EP = EP'$ (bằng nửa chu vi của hai tam giác GCF và GED). Suy ra, hai tam giác đồng dạng có chu vi bằng nhau thì bằng nhau, và do đó :

$$CG = EG, GF = GD. \text{ Từ đó ta được : } CG + GD = EG + GF, \text{ nghĩa là : } CD = EF \quad (4)$$

Từ (3) và (4), ta được :

$$2MN = AB + CD \quad (5)$$

Lại vì tứ giác (lồi) $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn (I) nên ta có :

$$AB + CD = BC + DA \quad (6)$$

Cuối cùng, từ (5) và (6) ta được :

$$MN = \frac{1}{4}(AB + BC + CD + DA) \quad (7)$$

Hệ thức (7) chứng tỏ rằng độ dài đoạn thẳng MN không phụ thuộc vào việc chọn cạnh nào của tứ giác $ABCD$ để kẻ đường thẳng song song với nó.

Nhận xét. Tòa soạn thành thực xin lỗi bạn đọc, do sơ suất đã để nhầm lẫn tên gọi tam hai đường tròn. Nhiều bạn đã chỉ rõ sự nhầm lẫn này và tự sửa trước khi trình bày lời giải của bài toán. Xin cảm ơn các bạn.

1) Lời giải 2 tuy dài hơn nhưng chỉ cần vận dụng kiến thức hình học thuộc chương trình THCS, mặt khác đòi hỏi sáng tạo nhiều hơn, (cụ thể là vẽ thêm đường phụ $EF \parallel MN$ rồi sau đó chứng minh $EF = CD$), và kết quả thu được đẹp hơn về một tính chất hình học liên quan đến các tứ giác (lồi) vừa nội tiếp, vừa ngoại tiếp đường tròn.

2) Lời giải 1 ngắn gọn hơn nhưng phải vận dụng kiến thức hình học lớp 10, thuần túy tính toán. Một số bạn đã sử dụng các hệ thức lượng giác trong tam giác vuông hoặc tam giác thường hoặc các công thức diện tích về tứ giác, biến đổi biểu thức lượng giác ở vế phải của (2) về biểu thức hình học ở vế phải của (7). Đó là các bạn sau đây : *Phạm Đức Hiệp*, 10T, THPT chuyên Trần Phú, *Hải Phòng*; *Hàn Thế Anh*, 12A1 và *Nguyễn Thị Hồng Phượng*, lớp 11 PTCT, DHSP Hà Nội.

3) Một số bạn bằng kiến thức THCS đã chứng minh trực tiếp hai đoạn thẳng MN , $M'N'$ (ứng với hai cạnh nào đó của tứ giác $ABCD$) bằng nhau, tuy nhiên không chỉ ra được biểu thức về độ dài đoạn thẳng MN theo các yếu tố đã cho liên quan đến tứ giác đó. Lời giải vì thế vừa dài lại không đẹp.

4) Ngoài các bạn đã nêu tên ở trên, các bạn sau đây cũng có lời giải tốt : *Hà Nội*: *Va Quốc Mỹ*, 9H, THCS

GIẢI BÀI KÌ TRƯỚC

Trung Vương, Trần Ngọc Tuấn Anh, 10A2, PTC Toán - Tin, DHSP Hà Nội; **Vĩnh Phúc:** Nguyễn Minh Khang, 12A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Hải Dương:** Đỗ Thị Ngọc Quỳnh, 11T, THPT chuyên Nguyễn Trãi; **Thanh Hóa:** Nguyễn Văn Trung, 12A1, THPT Hậu Lộc 1; **Gia Lai:** Đặng Tuấn Hiệp, 11C2, THPT Hùng Vương, Plei Ku.

NGUYỄN DĂNG PHÁT

Bài T10/277. Cho tứ diện $ABCD$ nội tiếp mặt cầu. Gọi G là trọng tâm của $ABCD$. Các đường thẳng GA, GB, GC, GD lần lượt cắt mặt cầu tại điểm thứ hai A_1, B_1, C_1, D_1 . Chứng minh rằng $V_{ABCD} \leq V_{A_1B_1C_1D_1}$. Đẳng thức xảy ra khi nào.

Lời giải. (theo bạn Nguyễn Đắc Tùng, 12A3, THPT chuyên Vĩnh Phúc).

Gọi (O, R) là mặt cầu ngoại tiếp tứ diện. Ta có:

$$GA_1 \cdot GA = GB_1 \cdot GB = GC_1 \cdot GC = GD_1 \cdot GD = R^2 - OG^2$$

Theo công thức Lepnit ta có:

$$GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2 = 4(R^2 - OG^2)$$

Từ đó, kết hợp với bất đẳng thức Côsi ta có:

$$\begin{aligned} 4 &= \frac{4(R^2 - OG^2)}{R^2 - OG^2} = \frac{GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2}{R^2 - OG^2} \\ &= \frac{GA^2}{GA \cdot GA_1} + \frac{GB^2}{GB \cdot GB_1} + \frac{GC^2}{GC \cdot GC_1} + \frac{GD^2}{GD \cdot GD_1} \\ &= \frac{GA}{GA_1} + \frac{GB}{GB_1} + \frac{GC}{GC_1} + \frac{GD}{GD_1} \\ &\geq 4 \sqrt{\frac{GA \cdot GB \cdot GC \cdot GD}{GA_1 \cdot GB_1 \cdot GC_1 \cdot GD_1}} \end{aligned}$$

Từ đó suy ra:

$$GA_1 \cdot GB_1 \cdot GC_1 \cdot GD_1 \geq GA \cdot GB \cdot GC \cdot GD \quad (1)$$

Mặt khác vì G là trọng tâm $ABCD$ nên ta có:

$$\begin{aligned} \frac{V_{A_1B_1C_1D_1}}{V_{ABCD}} &= \frac{V_{GB_1C_1D_1}}{4V_{GBCD}} + \frac{V_{GC_1D_1A_1}}{4V_{GCDA}} + \\ &\quad + \frac{V_{GD_1A_1B_1}}{4V_{GDAB}} + \frac{V_{GA_1B_1C_1}}{4V_{GABC}} \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{GB_1 \cdot GC_1 \cdot GD_1}{GB \cdot GC \cdot GD} + \frac{GC_1 \cdot GD_1 \cdot GA_1}{GC \cdot GD \cdot GA} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{GD_1 \cdot GA_1 \cdot GB_1}{GD \cdot GA \cdot GB} + \frac{GA_1 \cdot GB_1 \cdot GC_1}{GA \cdot GB \cdot GC} \right) \\ &\geq \frac{1}{4} 4 \sqrt{\left(\frac{GA_1 \cdot GB_1 \cdot GC_1 \cdot GD_1}{GA \cdot GB \cdot GC \cdot GD} \right)^3} \geq 1 \quad (\text{Theo (1)}) \end{aligned}$$

Từ đó suy ra:

$$V_{A_1B_1C_1D_1} \geq V_{ABCD} \quad (2)$$

Đẳng thức xảy ra ở (2) $\Leftrightarrow$ Đẳng thức xảy ra ở (1)

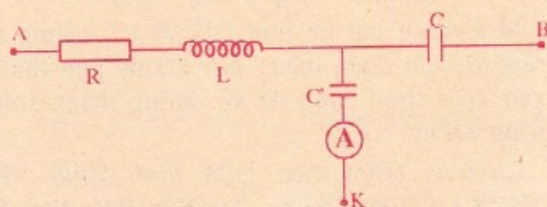
$$\Leftrightarrow GA = GB = GC = GD \Leftrightarrow G \equiv O \Leftrightarrow ABCD \text{ gần đều.}$$

Nhận xét. 1) Bài này có 80 bạn tham gia giải. Tất cả đều giải đúng. Tuy nhiên, nhiều bạn vẽ hình quá xấu. Nhiều bạn đã nhận xét rằng: kĩ thuật giải bài toán này hoàn toàn tương tự kĩ thuật giải bài T10/229.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt: **Ngệ An:** Phạm Hưng Trà, 10G, THPT Huỳnh Thúc Kháng; **Lão Cai:** Nguyễn Việt Hà, 11A5, THPT Cam Đường; **Phú Thọ:** Hoàng Tuấn Anh, 12H, THPT Công nghiệp Việt Trì; **Hải Dương:** Chu Ngọc Hưng, THPT Nguyễn Trãi; **Thanh Hóa:** Hàn Ngọc Sơn, 12T, THPT Lam Sơn; **Đà Nẵng:** Nguyễn Văn Triết, 11A3, THPT Lê Quý Đôn.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài L1/277. Cho mạch điện có sơ đồ như hình vẽ. Biết $Z_L = 100\Omega$; $Z_C = 200\Omega$; $Z_C' = 200\Omega$; $R_A \approx 0$. Hai đầu A, B của mạch được nối với hiệu điện thế xoay chiều $u = U\sqrt{2}\sin\omega t$ (V). Biết rằng khi nối K vào đầu A thì ampe kế chỉ $0,5A$ và qua tụ C có dòng điện $i = I\sqrt{2}\sin(\omega t + \frac{\pi}{3})$ (A). Hỏi khi chuyển K sang nối với đầu B thì số chỉ của ampe kế có còn là $0,5A$ nữa không? Vẽ giản đồ vectơ chính xác khi K nối với A .



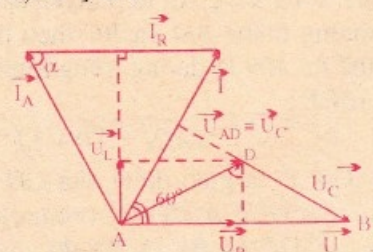
Hướng dẫn giải.

Khi K nối với A , sơ đồ mắc các phần tử là $[(R \text{ nt } L) // C'] \text{ nt } C$.

Giản đồ

vectơ là

$$\begin{aligned} \vec{I} &= \vec{I}_A + \vec{I}_R; \\ \alpha &= (\vec{U}_L, \vec{U}_C) \end{aligned}$$



Hình 1

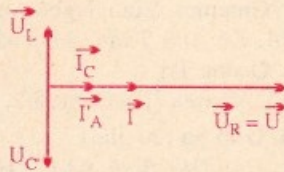
GIẢI BÀI KÌ TRƯỚC

(góc có cạnh vuông góc) ;

$$\begin{aligned} \vec{U}_L \perp \vec{U}_R &\Rightarrow I^2 = I_A^2 + I_R^2 - 2I_A I_R \cos \alpha = \\ &= I_A^2 + I_R^2 - 2I_A I_R \cdot \frac{U_L}{U_C} = I_A^2 + I_R^2 - 2I_R^2 \cdot \frac{Z_L}{Z_C} = I_A^2 \\ \Rightarrow I &= I_A \Rightarrow U_C = I Z_C = I_A Z_C = U_C = 100V \Rightarrow \\ \text{tam giác } ADB &\text{ cân} \Rightarrow \angle DAB = \angle DBA = 30^\circ \Rightarrow \\ U &= 2U_C \frac{\sqrt{3}}{2} = 100\sqrt{3} (V). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Mặt khác } (\vec{I}_A, \vec{I}) &= 90^\circ - (60^\circ - 30^\circ) = 60^\circ \Rightarrow \\ I &= I_A = I_R = 0,5A \text{ và } \vec{I}_R // \vec{U} \Rightarrow \vec{U}_R // \vec{U}, \text{ và } R = \\ \frac{U_R}{I_R} &= \frac{U_C \cos 30^\circ}{I_R} = 100\sqrt{3} (\Omega) \end{aligned}$$

Xét khi K nối với B, sơ đồ mạch phần tử là R nt L nt (C//C'). Ta có giản đồ vectơ như hình 2. (Do $Z_C = Z_{C'}$ nên



Hình 2

$$\begin{aligned} I_A &= I_C \text{ và } \\ I_A &\text{ cùng pha } I_C; \vec{U} = \vec{U}_R + \vec{U}_L + \vec{U}_C = \vec{U}_R. \end{aligned}$$

Ngoài ra ta có $I_A = I_C = \frac{I}{2} = \frac{U_R}{2R} = \frac{U}{2R} = 0,5A$. số chỉ của ampe kế vẫn là 0,5A như trước.

Nhận xét. Các em có lời giải đúng (tính đúng và vẽ giản đồ vectơ đầy đủ): **Đà Nẵng:** Lê Anh Vă, 11A1, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Đồng Tháp:** Châu Hoàng Huy, 11T, THPT thị xã Cao Lãnh; **Tuyên Quang:** Nguyễn Trung Hiếu, 12C2, THPT chuyên Tuyên Quang; **Đồng Nai:** Nguyễn Kim Huy, 11 Lí 1, THPT chuyên Lương Thế Vinh; **Tiền Giang:** Trần Tấn Lộc, 12 Lí, THPT chuyên Tiền Giang; **Yên Bái:** Phạm Hồng Chính, 11A1 và Hoàng Anh Tài, 12A1, THPT chuyên Yên Bái; **Vĩnh Phúc:** Nguyễn Kim Thắng, Nguyễn Hà Thanh, Lê Thị Thu Hương và Lê Khánh Hùng, 12A3, THPT chuyên Vĩnh Phúc.

MAI ANH

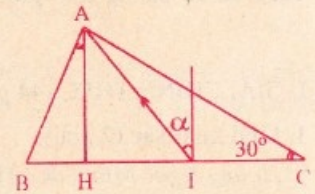
Bài L2/277. Trên mặt nước, chiết suất $n = 4/3$, có một thước gỗ mỏng, được khắc vạch đến milimét. Một lăng kính thủy tinh hình lăng trụ đứng mà tiết diện thẳng là một tam giác ABC vuông tại A, $\hat{C} = 30^\circ$, mặt chứa AC được bôi đen. Đặt lăng kính lên thước sao cho cạnh qua B trùng vạch số 0, cho cạnh qua C trùng vạch số 40 và mặt đáy chứa BC của lăng

kính chạm vào mặt nước. Đặt mắt trong không khí nhìn vào mặt chứa AB thì chỉ có thể nhìn được đến vạch số 31 của thước.

Hãy giải thích hiện tượng và tính chiết suất của thủy tinh.

Hướng dẫn giải.

Ánh sáng đi từ các vạch của thước (trong nước) vào thủy tinh (có chiết suất lớn hơn chiết suất của nước) nên chùm khúc xạ chỉ đi trong hình nón tròn xoay có góc mở là 2α , mà α thỏa mãn $\sin \alpha =$



$$\begin{aligned} \frac{n_{\text{nước}}}{n_{\text{tinh}}} &= \frac{4}{3n_{\text{tinh}}} \end{aligned}$$

Một số tia sáng đi từ một vạch nào đó của thước vào lăng kính, nếu đến được mặt AB thì sẽ khúc xạ qua mặt này đến mắt và mắt sẽ nhìn thấy vạch đó, còn nếu đi vào mặt AC thì sẽ bị hấp thụ hết nên không đến được mắt, mắt sẽ không nhìn thấy. Vậy vạch cuối cùng mắt còn nhìn thấy sẽ là vạch có tia ngoài cùng của chùm khúc xạ đi qua A (tia IA) (xem hình vẽ).

$$\text{Từ hình vẽ ta có: } \sin \alpha = \frac{HI}{AI}.$$

Theo đề bài: $BC = 40\text{mm} \Rightarrow AB = 20\text{mm} \Rightarrow BH = 10\text{mm}.$

Từ đó $AH = 10\sqrt{3}\text{mm}$, $HI = BC - BH = 21\text{mm}$. Suy ra $\sin \alpha = \frac{21}{\sqrt{741}} \approx 0,77 \Rightarrow n_{\text{thủy tinh}} = \frac{4}{3 \cdot 0,77} \approx 1,73$. Lưu ý rằng với điều kiện của bài toán thì tia IA sẽ ló ra được khỏi mặt AB mà không bị phản xạ toàn phần.

Nhận xét. Các em có lời giải đầy đủ và đúng:

Quảng Nam: Hoàng Anh Vă, 12, THPT Trần Cao Vân, Tam Kỳ; **Bắc Ninh:** Vă Xuân Tiến, 12A1, THPT Thuận Thành 1; **Nghe An:** Lê Minh Nguyên, Lê Ngọc Tuấn, 12A3, Đào Vinh Quang, 11A3, THPT chuyên Phan Bội Châu, Vinh; **Thanh Hóa:** Trần Trọng, 12A4, THPT Bim Sơn; **Vĩnh Phúc:** Trần Minh Khuê, 11A3, Lê Khánh Hùng, 12A3, THPT chuyên Vĩnh Phúc; **Đồng Tháp:** Châu Hoàng Huy, 11T, THPT thị xã Cao Lãnh; **Yên Bái:** Hoàng Trọng Huy, 12A2, THPT chuyên Yên Bái.

MAI ANH

KẾT QUẢ CUỘC THI GIẢI TOÁN VÀ VẬT LÝ TRÊN TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ NĂM HỌC 1999-2000

Trong năm học vừa rồi cuộc thi thường kì của chúng ta được các bạn hưởng ứng rất sôi nổi. Các địa phương có đông các bạn tham gia và đoạt nhiều giải là Hà Nội, Nam Định, Hải Dương, Nghệ An, Tp Hồ Chí Minh, Vĩnh Phúc, Hà Tĩnh, Phú Thọ, Quảng Trị. Đặc biệt một số tỉnh như Hà Giang, Hòa Bình, Sơn La, Yên Bái, Kon Tum, Đắk Lắk, Đồng Tháp đã có phong trào giải bài trên báo Toán học

Tuổi trẻ phát triển hơn trước. Bạn Doãn Kim Huế, 6C, THCS Phạm Huy Thông, Ân Thi, Hưng Yên là bạn đọc nhỏ tuổi nhất đoạt giải. Một điều đáng mừng là các bạn lớp 12 mặc dù bận ôn thi đại học vẫn tham gia giải đông đảo. Đây là nét mới của cuộc thi này.

Dưới đây là danh sách các bạn đoạt giải.

A. MÔN TOÁN

I. GIẢI CHÍNH THỨC (44 giải)

1. Giải xuất sắc (2 giải)

1. Hoàng Ngọc Minh, 9C, THCS Việt Trì, Phú Thọ
2. Phạm Đức Hiệp, 10T, THPT NK Trần Phú, Hải Phòng

2. Giải nhất (7 giải)

1. Vũ Nhật Huy, 9A, THCS Vĩnh Tường, Vĩnh Phúc
2. Phạm Gia Vinh Anh, 10A1, PTCT, ĐHSB Hà Nội
3. Nguyễn Đức Thái, 11 Toán, PTCT, ĐHKH Huế, Thừa Thiên - Huế
4. Trần Tuấn Anh, 12 Toán, THPT Lê Quý Đôn, Nha Trang, Khánh Hòa
5. Võ Văn Thành, 9B, THCS Đặng Thai Mai, Vinh, Nghệ An
6. Tô Minh Hoàng, 11T, THPT chuyên Nguyễn Trãi, Hải Dương
7. Nguyễn Trung Lập, 12A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc

3. Giải nhì (15 giải)

1. Nguyễn Tuấn Dương, 10T, PTCT, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội
2. Phạm Thành Trung, 10T, THPT chuyên Nguyễn Trãi, Hải Dương
3. Lương Thế Nhân, 11 Toán, THPTNK - ĐHKHTN - ĐHQG Tp Hồ Chí Minh
4. Doãn Kim Huế, 6C, THCS Phạm Huy Thông, Ân Thi, Hưng Yên
5. Lâm Thị Bích Thủy, 7A1, THCS Võ Thị Sáu, Phan Rang, Ninh Thuận
6. Đặng Thành Long, 9A, THCS Yên Phong, Bắc Ninh
7. Trần Minh Bình, 9/15, THCS Thái Nguyên, Khánh Hòa
8. Vũ Quốc Mỹ, 9H, THCS Trưng Vương, Hà Nội
9. Trần Việt Anh, 11T, THPT chuyên Lê Quý Đôn, Quảng Trị
10. Lê Tấn Thắng, 10T, ĐHSB Vinh, Nghệ An
11. Nguyễn Hoàng Thạch, 10T, Hà Nội - Amsterdam, Hà Nội

12. Trần Quang, 10T, THPT NK, ĐHQG Tp Hồ Chí Minh
13. Đinh Thanh Thường, 11A, THPT Hermann Gmeiner, Vinh, Nghệ An
14. Lê Anh Tuấn, 11 Toán, PTTH Lê Quý Đôn, Quảng Trị
15. Nguyễn Tiến Dũng, 8/2, THCS Mỹ Hóa, Bến Tre

4. Giải ba (20 giải)

1. Đào Duy Bình, 9A1, THCS thị trấn Dương Minh Châu, Tây Ninh
2. Nguyễn Thành Nam, 9A, THPT Nguyễn Trãi, Hải Dương
3. Trần Thanh Hải, 9C, THCS Việt Trì, Phú Thọ
4. Trần Võ Huy, 9/3, trường Nguyễn Bình Khiêm, Biên Hòa, Đồng Nai
5. Vũ Ngọc Minh, 10A1, PTCT, ĐHSB Hà Nội
6. Vũ Thành Long, 10A1, PTCT, ĐHSB Hà Nội
7. Trần Mạnh Hùng, 11CT, THPT Lam Sơn, Thanh Hóa
8. Hoàng Tùng, 12A, ĐHKHTN-ĐHQG Hà Nội
9. Trần Tấn Đạt, 12B toán, ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội
10. Phạm Minh Hoàng, 9A1, THCS Phong Châu, Phù Ninh, Phú Thọ
11. Đỗ Thị Hải Yến, 9B, THCS Hải Hậu, Nam Định
12. Đậu Thị Ngọc Ánh, 9C, THCS thị trấn Nam Đàn, Nghệ An
13. Đinh Quyết Tiến, 9D, THCS thị trấn Yên Ninh, Yên Khánh, Ninh Bình
14. Lê Đức Phương, 9H, THCS Trưng Vương, Hà Nội
15. Lê Tâm, 9G, THCS Kỳ Anh, Hà Tĩnh
16. Phùng Đại Diện, 9CT, THCS Nguyễn Du, Nam Định
17. Phùng Văn Thắng, 10CT, THPT Lê Hồng Phong, Nam Định
18. Nguyễn Kim Cương, 11T, THPT chuyên Hà Giang
19. Nguyễn Thừa Thắng, 11T, THPT NK, Hà Tĩnh
20. Nguyễn Đăng Hợp, 8A2, THCS Lê Quý Đôn, Nam Định

II. GIẢI KHUYẾN KHÍCH (28 giải)

1. *Đinh Ngọc Thắng*, 9A, THCS DL Châu Phong, Xuân Hòa, Mè Linh, Vĩnh Phúc
2. *Phạm Quang Huy*, 9T, THCS thị trấn Yên Ninh, Yên Khánh, Ninh Bình
3. *Phạm Văn Trung*, 9I, THCS Trần Hưng Đạo, Quảng Ngãi
4. *Phùng Văn Doanh*, 9D, THCS Ngô Đồng, Giao Thủy, Nam Định
5. *Tô Thủy Linh*, 9H, THCS Trung Vương, Hoàn Kiếm, Hà Nội
6. *Trần Anh Tuấn*, 9B, THCS Yên Lợi, Ý Yên, Nam Định
7. *Trần Nhật Thu*, 9B, THCS Đặng Thai Mai, Nghệ An
8. *Đặng Quang Huy*, 10A1, THPT Lê Quý Đôn, Đà Nẵng
9. *Nguyễn Trung Kiên*, 10A2, ĐHSP-ĐHQG - Hà Nội
10. *Lâm Hoàng Nguyên*, 11 Toán, THPTNK - ĐHKHTN - ĐHQG Tp Hồ Chí Minh
11. *Phạm Tuấn Anh*, 11T, THPTNK - ĐHKHTN - ĐHQG Tp Hồ Chí Minh
12. *Phạm Hồng Quân*, 12T, PTTH Nguyễn Trãi, Hải Dương
13. *Phạm Ngọc Lợi*, 12T, PTTH NK Nguyễn Trãi, Hải Dương
14. *Đỗ Thị Thu Hà*, 12 Toán, trường Hoàng Văn Thụ, Hòa Bình

15. *Bạch Ngọc Công Đức*, 12T, THPT chuyên Quảng Trị
16. *Bùi Văn Tuấn*, 9A, THCS Tự Cường, Yên Lãng, Hải Phòng
17. *Bùi Việt Lộc*, 12A, PTCT ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội
18. *Chu Tiến Dũng*, 9T, THCS Chu Văn An, Mai Sơn, Sơn La
19. *Hoàng Xuân Quang*, 10A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc
20. *Lê Phương*, 9/3, THCS Nguyễn Bình Khiêm, Tp Biên Hòa, Đồng Nai
21. *Ngô Quốc Anh*, 11A toán, PTCT-ĐHKHTN ĐHQG Hà Nội
22. *Nguyễn Anh Dũng*, 10 Toán, PTNK-ĐHQG, Tp Hồ Chí Minh
23. *Phạm Bảo Trung*, 9A, THCS Nguyễn Trường Tộ, Đồng Đa, Hà Nội
24. *Phạm Văn Thắng*, 9B, THCS Nguyễn Bình Khiêm, Biên Hòa, Đồng Nai
25. *Phan Anh Dũng*, 9B, THCS Kiều Phú, Quốc Oai, Hà Tây
26. *Trần Anh Tuấn*, 9A1, THPT DL Lương Thế Vinh, Hà Nội
27. *Trần Bình Minh*, 9K, THCS Lê Hồng Phong, thị xã Yên Bái
28. *Vũ Đình Thế*, 9A, THCS Phả Lại, Hải Dương

B. MÔN VẬT LÝ

1. Giải nhất (1 giải)

1. *Nguyễn Huy Việt*, 12A1, THPT Gia Bình 1, Bắc Ninh

2. Giải nhì (2 giải)

1. *Lưu Anh Tú*, 10A3, PTTH Phan Bội Châu, Vinh, Nghệ An
2. *Trương Hữu Cát*, 12 Lí, PTTH NK Hà Tĩnh

3. Giải ba (4 giải)

1. *Lê Cường*, 12A, B0, Khối chuyên Lí, ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội
2. *Đỗ Ngọc Ánh*, 11A1, PTTH chuyên Vĩnh Phúc
3. *Nguyễn Kim Thắng*, 11A3, PTTH chuyên Vĩnh Phúc
4. *Bùi Việt Hoàng Sơn*, 12 Lí, THPT NK Hà Tĩnh

4. Giải khuyến khích (17 giải)

1. *Nguyễn Minh Kiên*, 10A1, PTTH chuyên Vĩnh Phúc
2. *Lê Quang Trung*, 10 lí, THPT NK Quảng Bình
3. *Nguyễn Kim Huy*, 10 lí 1, THPT chuyên Lương Thế Vinh, Đồng Nai
4. *Nguyễn Minh Chính*, 11 Toán I, PTTH chuyên Nguyễn Huệ, Hà Đông, Hà Tây
5. *Trần Tấn Lộc*, 11 Lí, THPT chuyên Tiền Giang

6. *Trần Trọng*, 11B, PTTH Bim Sơn, Thanh Hóa
7. *Lê Quốc Hưng*, 12A3, PTTH ch Vĩnh Phúc
8. *Phạm Anh Đức*, 12 Lí, PTTH NK Trần Phú, Hải Phòng
9. *Hoàng Anh Vũ*, 11, THPT Trần Cao Vân, Tam Kỳ, Quảng Nam
10. *Hoàng Trọng Huy*, 11A2, PTTH chuyên Yên Bái
11. *Châu Hoàng Huy*, 10T, THCB thị xã Cao Lãnh, Đồng Tháp
12. *Thái Nguyên*, 11A2, PTTH chuyên Lê Quý Đôn, Đà Nẵng
13. *Trần Quang Khải*, 11C1, PTTH Nhị Chiến, Kinh Môn, Hải Dương
14. *Lê Vũ Hải*, 12A5, PTTH Vĩnh Linh, Quảng Trị
15. *Phạm Minh Tuấn*, 12A2, PTTH Lê Quý Đôn, Đà Nẵng
16. *Trần Vinh Quang*, 12 Lí, PTNK, ĐHQG Tp Hồ Chí Minh
17. *Vũ Hải Đăng*, 12A1, PTTH chuyên Yên Bái

Đề nghị các bạn gửi địa chỉ mới về Tòa soạn để tiện liên hệ.

THTT



GẶP NHAU QUA NGÀY SINH

Lần này các bạn có ngày sinh rơi vào đầu tháng 12 đã gặp may mắn. Thật đồng vui vì có đến 8 bạn sinh ngày 1 tháng 12 :

1) *Khương Thị Minh Nguyệt*, sinh năm 1984, số nhà 19, đường Thọ Hạc, phường Đông Thọ, Tp Thanh Hoá.

2) *Vũ Viết Minh*, sinh năm 1984, lớp 10 Toán 3, trường THPT Nguyễn Huệ, Hà Đông, Hà Tây.

3) *Đoàn Thành Kỳ*, sinh năm 1982, 162 đường Xô Viết Nghệ Tĩnh, F.2, Vũng Tàu, Bà Rịa - Vũng Tàu.

4) *Chu Thị Hải Yến*, sinh năm 1987, số 25/8, phường Nam Sơn, thị xã Tam Điệp, Ninh Bình.

5) *Trần Văn Tuyền*, sinh năm 1981, Cờ Đỏ, Cẩm Phúc, Cẩm Giàng, Hải Dương.

6) *Lê Thị Bạch Liên*, sinh năm 1983, 134 Lý Thường Kiệt, Đồng Hới, Quảng Bình.

7) *Nguyễn Văn Thông*, sinh năm 1981, Hoàng Xá, Yên Khang, Ý Yên, Nam Định.

8) *Ngô Thuý Hiền*, sinh năm 1986, 687 đường Giải Phóng, Hà Nội.

Các bạn thích ngày sinh này là :

1) *Nguyễn Lê Phương Nhật*, 306A đường Cách mạng Tháng Tám, F3, Q. Tân Bình, Tp Hồ Chí Minh.

2) *Nguy Đức Thuận*, 17 Phan Châu Trinh, phường 2, thị xã Cao Lãnh, Đồng Tháp.

3) *Nguyễn Thanh Bình*, 10 chuyên Toán, Quốc học Quy Nhơn, Bình Định.

4) *Tổng Thu Trang*, lớp 10C6, THPT Vĩnh Bảo, thị trấn Vĩnh Bảo, Hải Phòng.

5) *Nguyễn Minh Đức*, 10A3, THPT Hải Hậu A, Hải Hậu, Nam Định

Xin chúc mừng các bạn. Nếu các bạn thay đổi địa chỉ hoặc địa chỉ chưa rõ xin báo giúp gấp cho Câu lạc bộ để gửi quà không bị thất lạc. Chuẩn bị sang năm mới, thiên niên kỉ mới, chúc các hội viên gặp nhiều may mắn.

CLB

GIỎI VÀ KÉM BÊN NHAU

Rất nhiều bạn giải bằng nhiều cách, nhưng chung quy lại là sử dụng nguyên lí Đirichlê. Xin nêu một lời giải :

Vì số học sinh đứng giữa hai học sinh kém là như nhau, nên giữa 2 học sinh kém sẽ có $\frac{110-5}{5} = 21$

học sinh. Trong 5 nhóm mà mỗi nhóm gồm 21 học sinh này sẽ có ít nhất một nhóm có ít nhất 3 học sinh giỏi vì số học sinh giỏi là 11. Giữa 2 học sinh

giỏi có $\frac{110-11}{11} = 9$ học sinh nên trong nhóm 21

học sinh nói trên sẽ gồm 3 học sinh giỏi và 18 học sinh thường. Vậy phải có **2 cặp học sinh giỏi**, kém đứng cạnh nhau.

Những bạn phát hiện ra có 2 cặp học sinh giỏi, kém đứng cạnh nhau là : *Hoàng Xuân Quang*, 10A1 và *Hoàng Thị Phượng*, 10A2, THPT chuyên Vĩnh Phúc, *Trần Quang Hưng*, 11A1, THPT Ninh Giang, Hải Dương, *Vũ Quang Thanh*, 9B, THCS Nguyễn Hữu Tiến, Duy Tiên, Hà Nam, *Phạm Văn Chiến*, 10T, THPT Năng khiếu Hà Tĩnh, *Trần Văn Hình*, 11A, THPT Nghĩa Hưng A, Nam Định, *Nguyễn Hữu Chung*, 11A (Hoá), ĐHKHTN-ĐHQG Hà Nội, *Nguyễn An Huy*, 11D1, THPT Chu Văn An, Hà Nội

NGỌC MAI

TẾT VUI

Lời giải cho bài toán kì này sẽ công bố vào số Tết Tân Ty, số đầu tiên của thiên niên kỉ mới. Đã Tết là Vui, đã Vui là phải Vui như Tết. Xin mời dùng chữ số thay cho chữ cái : chữ cái khác nhau thì chữ số khác nhau, chữ giống nhau tất nhiên là chữ số giống nhau. Nào ! Phép toán này liệu có đúng không ?

$$\sqrt{\text{TẾT VUI}} = \text{VUI}$$

LTN

PHƯƠNG TRÌNH VÔ NGHIỆM ?

Mọi "nhà chẩn đoán" đều chỉ đúng nơi "bị bệnh" của lời giải, đó là

$$\text{khí viết : } (\log_3 x)^{\log_2 x} = (\log_2 x)^{\log_3 x} \\ \Leftrightarrow \log_3 x = \log_2 x.$$

Điều này cũng như khi viết $a^b = b^a \Leftrightarrow a = b$ (có thể thấy $4 \neq 2$ nhưng $4^2 = 2^4$). Bạn *Trần Quang Khải*, 12C3, THPT Nhị Chiểu, Kinh Môn, Hải

Dương phân tích tốt khi xét hàm số $f(t) = \frac{\ln t}{t}$ để thấy $f(t)$ đơn điệu trong từng khoảng $(0; e)$ và $(e; +\infty)$. Như vậy lời giải làm thiếu trường hợp $\log_3 x < e < \log_2 x$. Lời giải đúng đã từng trình bày trên tạp chí nên xin không nêu lại.

Ngoài bạn *Khải*, xin trao tặng phẩm cho các bạn : *Trần Văn Hình*, 11A, THPT Nghĩa Hưng A, Nam



Định; Phạm Trung Kiên, 12A, THPT Nguyễn Bình Khiêm, Hải dương; Phan Quốc Hưng, 11B, THPT Hải Lăng, Quảng Trị

KIHIVI



TÔI SAI hay SÁCH SAI ?

Trong một cuốn sách có giải bất phương trình :
 $\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1} > \frac{1}{2}$ và cho kết quả là vô nghiệm.

Tôi giải như sau : điều kiện để căn thức có nghĩa là $-1 \leq x \leq 3$. Khi đó ta có

$$\sqrt{3-x} > \sqrt{x+1} + \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 3-x > \frac{1}{4} + \sqrt{x+1} + x + 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{7}{4} - 2x > \sqrt{x+1}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{7}{4} - 2x > 0 \\ 4x^2 - 8x + \frac{33}{16} > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{7}{8} \\ x > \frac{8+\sqrt{31}}{8} \\ x < \frac{8-\sqrt{31}}{8} \end{cases}$$

Kết hợp với $-1 \leq x \leq 3$ ta có nghiệm là :

$$-1 \leq x < \frac{8-\sqrt{31}}{8}$$

Vậy... tôi sai hay sách sai ?

NGÔ VĂN HIỆP

Đón đọc

TẠP CHÍ TH&TT SỐ 282

Toán học và Tuổi trẻ số 282 sẽ đến với bạn trong tháng tới. Xin tiết lộ trước tên một số bài đáng chú ý :

⇒ Về một bất đẳng thức lượng giác.

⇒ Giới thiệu tập hợp mờ.

⇒ Một cách chứng minh mới công thức Crelle.

⇒ Đề thi Olympic Toán của Hoa Kỳ 1996.

• Tính tuần hoàn trong dương lịch (Giải thích về Bảng lịch dùng nhiều năm đã in trong Số lịch TH&TT 2001)

Còn gì nữa ? Bạn sẽ biết khi có số báo 282 trong tay.

Bạn nhớ đặt mua TH&TT cho năm 2001.

TH&TT

Giải đáp bài

THỬ TÀI ƯỚC LƯỢNG

Đa số các bạn đặt các lưới kẻ ô vuông vào để đếm hoặc chia cắt hình đã cho thành các phần nhỏ để đo và tính. Sau đây là diện tích ước lượng của các hình :

Hình con pích : 2,49 cm²

Hình trăng khuyết : 3,37 cm²

Hình trái tim : 3,53 cm²

Hình bình thí nghiệm : 2,22 cm²

Hình con cá : 4,18 cm²

BÍNH NAM HÀ

ĐẤT BAO NHIÊU

Chủ nhật trước, tôi mua một bộ quần áo với giá 150 ngàn đồng. Khi về nhà mặc thử, tôi thấy nó quá rộng, thành thử tôi đem bán lại được có 135 ngàn, đành chịu mất 15 ngàn. Biết chuyện này, bạn tôi bảo : Sao cậu ngốc thế ! Bộ quần áo đẹp là vậy, đâu có dễ kiếm.

Nghe bùi tai, tôi đành phải bỏ ra 140 ngàn để chuộc lại bộ quần áo đã bán. Thế là mất thêm 5 ngàn nữa.

Chao ôi ! Chỉ vì không suy nghĩ cẩn thận trước khi hành động mà trước sau mất trắng 20 ngàn. Khi nghe kể lại chuyện này, hai bạn tôi, Tung và Hoành cùng an ủi rằng tuy có thiệt nhưng không đến 20 ngàn. Sau đây là ý kiến của mỗi người :

Tung : Đáng lẽ cậu mua bộ quần áo chỉ hết có 150 ngàn. Việc cậu đem bán rồi chuộc lại làm cậu mất thêm 5 ngàn. Coi như bộ quần áo giá 155 ngàn, tức là cậu mua đắt mất 5 ngàn thôi.

Hoành : Lần thứ nhất cậu mua 150 ngàn, bán 135 ngàn thì rõ ràng lỗ mất 15 ngàn rồi. Sau đó, cứ coi như mọi việc mới bắt đầu : cậu chưa có bộ quần áo và đi mua : chẳng có gì là thiệt cả. Do đó cậu chỉ mất có 15 ngàn thôi. Thật lạ lùng. Cùng một chuyện mà có tới 3 ý kiến khác nhau. Vậy theo bạn ý kiến nào đúng ?

NGUYỄN HUY ĐOAN
(Nhà xuất bản Giáo dục)

TOÁN TUỔI THƠ

đã đến với bạn đọc



15h00 ngày 25 tháng 10 năm 2000, Lễ phát hành TOÁN TUỔI THƠ số đầu tiên đã được tổ chức tại trường tiểu học Kim Liên, Hà Nội. Nhiều đồng chí lãnh đạo Vụ Tiểu học thuộc Bộ Giáo dục và Đào tạo, Nhà xuất bản Giáo dục, các Sở Giáo dục - Đào tạo, các Phòng Tiểu học của các Sở GD-ĐT, các Công ty Sách và Thiết bị trường học, báo Sinh viên Việt Nam, tuần san Hoa học trò, báo Thiếu niên Tiền phong, nhiều trường Tiểu học của Hà Nội, nhiều phóng viên báo chí và Đài truyền hình Trung ương cùng hàng trăm học sinh tiểu học đã đến dự. Những người làm TOÁN TUỔI THƠ đã chân thành cảm ơn sự quan tâm của các cấp lãnh đạo và sự hưởng ứng ủng hộ của đông đảo bạn đọc trong cả nước. Đại diện của Nhà xuất bản Giáo dục, lãnh đạo Phòng Giáo dục Đống Đa, Hà Nội và các nhà giáo, học sinh tiểu học đã phát biểu chào mừng sự ra đời của TOÁN TUỔI THƠ.

Đài truyền hình Trung ương trong hai chương trình Chào buổi sáng của VTV1, (ngày 26.10.2000 và ngày 2.11.2000) đã đưa tin về buổi lễ và dự luận giáo viên, học sinh, phụ huynh đối với Toán Tuổi thơ.

Tại thành phố Hải Phòng, được sự giúp đỡ của Phòng Tiểu học, Sở Giáo dục và Đào tạo, Lễ ra mắt của Toán Tuổi thơ đã được tổ chức tại trường Tiểu học Đinh Tiên Hoàng.

Vừa ra đời, TOÁN TUỔI THƠ đã được sự quan tâm của hàng vạn bạn đọc. Các Sở

GD-ĐT, trường học, Công ty Sách và thiết bị trường học, đại lý bán sách báo đã liên tục đăng kí thêm số lượng theo nhu cầu bạn đọc.

Với 4 trang bìa sinh động và 28 trang ruột in giấy trắng, nhiều mẫu vẽ nội dung hấp dẫn, phù hợp lứa tuổi, TOÁN TUỔI THƠ là sân chơi bổ ích với các bạn. Ngay số đầu tiên, nhờ sự cổ động của nhiều bạn đọc Toán học và Tuổi trẻ, hàng ngàn học sinh tiểu học đã tham gia thi giải toán qua thư. TOÁN TUỔI THƠ đã khen thưởng 41 bạn trong cả nước qua cuộc thi.

Toán Tuổi thơ sẽ phát hành số 2 vào ngày 25 tháng 12 năm 2000, các bạn hãy đặt mua tại các trường Tiểu học, Phòng Tiểu học hoặc Công ty Sách và Thiết bị trường học thuộc các Sở GD-ĐT, các cơ sở Buu điện trước ngày 15 tháng 12 năm 2000.

Bây giờ xin mời các đàn anh, đàn chị tham gia giải bài toán vui của em Đặng Hồng Ánh Mai, lớp 2D, trường tiểu học thị trấn Sơn Tịnh, Quảng Ngãi : "Một người Trung Quốc hỏi : Một đàn mèo có một con mèo đen, một tí mèo đen và ba mèo đen. Vậy đàn mèo có mấy con ?" (Bài đăng trong Siêu thi "Chúng mình đồ nhau" của Toán Tuổi thơ số đầu tiên).

Cảm ơn tất cả mọi người đến với TOÁN TUỔI THƠ.

TOÁN TUỔI THƠ

ISBN : 0866-0853

Chỉ số : 12884

Mã số : 8BT83M0

Chế bản tại Tòa soạn

In tại Nhà máy in Diên Hồng, 57 Giảng Võ

In xong và nộp lưu chiểu tháng 11 năm 2000

Giá : 3.000đ

Ba nghìn đồng