

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO * HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

Toán học & Tuổi trẻ

7
2000

SỐ 277 - NĂM THỨ 37 - TẬP CHÍ RA HÀNG THÁNG



Bonoa - Mandenbrôt
người khai sinh :
HÌNH HỌC FRACTAL

TOÁN HỌC MUÔN MÀU

MANDENBRÔT và HÌNH TỰ ĐỒNG DẠNG

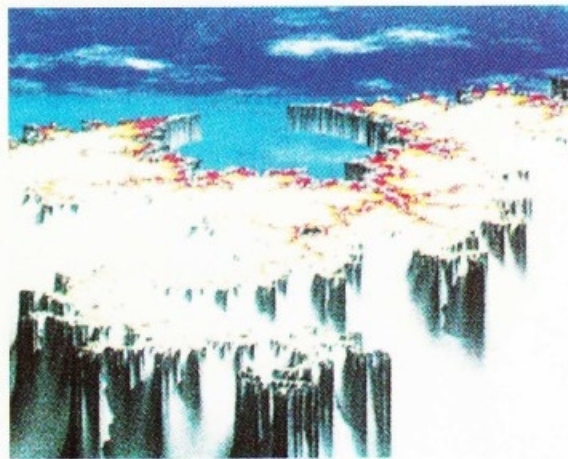
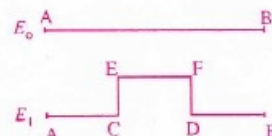
Nhà toán học Bônoa Mandenbrôt (Benoit Mandelbrot) sinh năm 1924 ở Ba Lan và từ năm 1936, ông sang học ở Pháp, sau đó làm việc ở Trung tâm nghiên cứu Khoa học Tự nhiên của Pháp. Ông nghiên cứu các hình tự đồng dạng và mở ra một ngành toán học mới : *hình học fractal* (xem bài viết ở trang 9).

Hình học Fractal có nhiều ứng dụng trong công nghệ, trong đồ họa vi tính, có thể mô tả được nhiều hiện tượng tự nhiên và xã hội.

Dành cho bạn đọc :

1. Hai Fractal ở dưới đây mô tả hình ảnh gì trong tự nhiên ?
2. Quan sát E_0, E_1 , bạn có thể vẽ được E_4 không ?

Năm phần thưởng cho 5 bạn có ý tưởng độc đáo, quan sát tinh tường và khéo tay nhất.



Lời giải : TAM GIÁC SỐ PATXCAN

1) Hình vẽ gợi ý một tính chất của tam giác Patxcan, để ý thấy các con số trong các vòng tròn lập thành dãy số Phibônaxi. Để chứng minh nhận xét này chỉ cần sử dụng tính chất :

$$C_n^{k-1} + C_n^k = C_{n+1}^k \text{ với } 1 \leq k \leq n.$$

2) Ta thấy dãy (C_n^k) tăng khi k tăng và $k \leq \frac{n}{2}$ với n chẵn và $k \leq \frac{n-1}{2}$ với n lẻ. Mặt khác $C_n^k = C_n^{n-k}$ nên C_n^k đạt giá trị lớn nhất khi $k = \frac{n}{2}$ với n chẵn và khi $k = \frac{n-1}{2}$ hoặc $k = \frac{n+1}{2}$ với n lẻ.

Xin trao tặng phẩm cho 5 bạn nhanh tay, nhanh mắt nhất : Võ Thị Ngọc Ánh, 97/3, Trần Phú, Tp Huế; Bùi Đăng Tài, 9A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, Nghệ An; Võ Xuân Minh, 9¹, THCS Cam Nghĩa, Cam Ranh, Khánh Hòa; Vũ Huy Mừng, 11A₂, THCS Lê Hoàn, Thọ Xuân, Thanh Hóa; Đoàn Văn Quang, 10A1, THPT Hạ Hòa, Phú Thọ.

GALLERY

Toán học và Tuổi trẻ

Mathematics and Youth

Năm thứ 37
Số 277 (7-2000)
Tòa soạn : 57 Giảng Võ, Hà Nội
ĐT : 04.5142648-04.5142650
FAX: (84).4.5142648

Tổng biên tập :
NGUYỄN CẢNH TOÀN

Phó tổng biên tập :
NGÔ ĐẠT TỬ
HOÀNG CHÚNG

Hội đồng biên tập :
NGUYỄN CẢNH TOÀN,
HOÀNG CHÚNG, NGÔ ĐẠT TỬ,
LÊ KHẮC BẢO,
NGUYỄN HUY ĐOAN,
NGUYỄN VIỆT HẢI, ĐINH
QUANG HẢO, NGUYỄN
XUÂN HUY, PHAN HUY
KHẢI, VŨ THANH KIỆT, LÊ
HẢI KHÔI, NGUYỄN VĂN
MẬU, HOÀNG LÊ MINH,
NGUYỄN KHẮC MINH, TRẦN
VĂN NHUNG, NGUYỄN
ĐĂNG PHÁT, PHAN THANH
QUANG, TẠ HỒNG QUẢNG,
ĐẶNG HÙNG THẮNG,
VŨ DƯƠNG THUY, TRẦN
THÀNH TRẠI, LÊ BÁ
KHÁNH TRINH, NGÔ VIỆT
TRUNG, ĐẶNG QUAN VIỄN

Trưởng Ban biên tập :
NGUYỄN VIỆT HẢI

Thư ký Tòa soạn :
LÊ THỐNG NHẤT

Thực hiện :
VŨ KIM THỦY

Trị sự :
VŨ ANH THƯ

Trình bày :
NGUYỄN THỊ OANH

Đại diện phía Nam :
TRẦN CHÍ HIỂU
231 Nguyễn Văn Cừ,
TP Hồ Chí Minh
ĐT : 08.8323044

TRONG SỐ NÀY

- 2 **Dành cho Trung học cơ sở - For Lower Secondary Schools**
Vũ Đức Sơn - Tổng quát hóa một bất đẳng thức và những ứng dụng
- 4 **Nguyễn Việt Hải - Cuộc thi Olympic toán APMO 2000**
- 5 **Nhìn ra thế giới - Around the World**
Đặng Hùng Thắng - Tổ chức thi học sinh giỏi toán ở Mỹ
- 6 **Tiếng Anh qua các bài toán - English through Math Problems - Ngô Việt Trung**
- 7 **Tìm hiểu sâu thêm toán học sơ cấp - Advanced Elementary Mathematics**
Trương Công Thành - Về cách biểu diễn $\cos nx$ theo $\cos x$
- 9 **Giới thiệu về toán học cao cấp - Introduction to Higher Mathematics**
Hoàng Chung - Hình học Fractal là gì ?
- 11 **Diễn đàn dạy học Toán - Math Teaching Forum**
Tưởng Minh Minh - Trục quan trong giải toán
- 12 **Đề ra kì này - Problems in this Issue**
T1/277, ..., T10/277, L1, L2/277
- 14 **Giải bài kì trước - Solutions to Previous Problems**
Giải các bài của số 273
- 23 **Trả lời bạn đọc - Correspondence - N.T.L**
Nguyễn Đức Tấn - Ý kiến bạn đọc - Đọc ý kiến ... bạn !
- 24 **Câu lạc bộ - Math Club**
CLB - Gặp nhau qua ngày sinh
NGỌC MAI - Kết quả : Tiêu chuẩn nào đây ?
Sai lầm ở đâu - Where's the Mistakes ?
KIHIVI - Dọn vườn nhà
Nguyễn Xuân Uy - Tại sao lại thế ?

Bìa 1 : Đội tuyển toán Việt Nam dự thi Olympic Toán quốc tế 2000. Nhà toán học Mandenbrôt.

Bìa 2 : Toán học muôn màu - Mandenbrôt và Hình tự đồng dạng

Bìa 3 : Giải trí toán học - Math Recreation

**Dành cho các bạn
TRUNG HỌC CƠ SỞ**



TỔNG QUÁT HÓA MỘT BẤT ĐẲNG THỨC VÀ NHỮNG ỨNG DỤNG

VŨ ĐỨC SƠN
(SV ĐHKHTN-ĐHQG Hà Nội)

Sau mỗi lần chứng minh xong các bất đẳng thức (BĐT), các bạn có hay tổng quát hóa các BĐT vừa chứng minh được không? Việc này nếu được sẽ không chỉ làm đẹp và phong phú thêm các BĐT mà đôi khi còn đem lại những ứng dụng không nhỏ. Ví dụ cụ thể dưới đây sẽ minh họa điều đó.

Chúng ta hãy bắt đầu với một BĐT quen thuộc:

$$\frac{a^2 + b^2}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \quad (1) \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

BĐT (1) có thể tổng quát hóa như sau:

$$\frac{a^{2k} + b^{2k}}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^{2k} \quad (2) \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}^*$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b$.

Bạn đọc tự chứng minh (2) bằng quy nạp theo k .

Với số mũ lẻ thì có xảy ra BĐT tương tự không? Ta sẽ chứng minh:

$$\frac{a^3 + b^3}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^3 \quad (3) \quad \text{với } a+b \geq 0$$

Ta có:

$$\begin{aligned} & \frac{a^3 + b^3}{2} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^3 = \\ &= \left(\frac{a+b}{2}\right) \left[a^2 - ab + b^2 - \frac{(a+b)^2}{4} \right] = \\ &= \frac{3}{8} (a+b)(a-b)^2 \geq 0 \quad (\text{do } a+b \geq 0). \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a^2 = b^2$.

BĐT (3) có sự tổng quát:

$$\frac{a^{2k+1} + b^{2k+1}}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^{2k+1} \quad (4)$$

với $a+b \geq 0, k \in \mathbb{N}^*$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a^2 = b^2$. Thật vậy, không mất tổng quát, giả sử $a \geq b$.

Áp dụng BĐT (2) và do $a+b \geq 0$ ta có:

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^{2k+1} = \left(\frac{a+b}{2}\right) \left(\frac{a+b}{2}\right)^{2k} \leq \frac{a+b}{2} \cdot \frac{a^{2k} + b^{2k}}{2} \quad (5)$$

Xét hiệu:

$$\begin{aligned} & 2(a^{2k+1} + b^{2k+1}) - (a+b)(a^{2k} + b^{2k}) = \\ &= a^{2k+1} + b^{2k+1} - ab^{2k} - a^{2k}b = \\ &= (a-b)(a^{2k} - b^{2k}) \geq 0 \end{aligned}$$

(do $a \geq b$ và $a \geq -b \Rightarrow a^2 \geq b^2 \Rightarrow a^{2k} \geq b^{2k}$)

$\Rightarrow (a+b)(a^{2k} + b^{2k}) \leq 2(a^{2k+1} + b^{2k+1}) \quad (6)$.

Từ (5) và (6) ta sẽ có (4). Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a^2 = b^2$.

Lưu ý thêm rằng nếu $a+b \leq 0$ thì:

$$\frac{a^{2k+1} + b^{2k+1}}{2} \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^{2k+1} \quad (7), k \in \mathbb{N}^*$$

BĐT (7) là dạng khác của BĐT (4) vì nếu ta đặt $a = -u, b = -v$ thì $u+v \geq 0$ và (7) trở thành BĐT dạng (4).

Bây giờ, phối hợp các BĐT (2) và (4) ta được BĐT:

$$\frac{a^n + b^n}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^n \quad (8) \quad \text{với } a+b \geq 0, n \in \mathbb{N}^*$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b & \text{nếu } n \text{ chẵn} \\ a^2 = b^2 & \text{nếu } n \text{ lẻ} \\ a, b \text{ bất kì} & \text{nếu } n = 1 \end{cases}$$

Các BĐT (2), (4) và (8) có nhiều ứng dụng, đặc biệt trong việc giải phương trình và chứng minh các BĐT. Sau đây là các ví dụ:

Ví dụ 1. Giải phương trình:

$$(x+1)^6 + (x+\sqrt{5})^6 = 18 - 8\sqrt{5}$$

Giải. Áp dụng BĐT(2) ta có:

$$\frac{(x+1)^6 + (x+\sqrt{5})^6}{2} = \frac{(-x-1)^6 + (x+\sqrt{5})^6}{2} \geq$$

$$\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^6 = 9 - 4\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow (x+1)^6 + (x+\sqrt{5})^6 \geq 18 - 8\sqrt{5}.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow -x-1 = x+\sqrt{5}$

$$\Leftrightarrow x = -(1+\sqrt{5})/2$$

Vậy, phương trình có nghiệm duy nhất $x = -(1+\sqrt{5})/2$.

Ví dụ 2. Tìm tất cả các cặp số thực (x, y) thỏa mãn :

$$\sqrt[19]{x^2+y^2-x} + \sqrt[19]{y^2-x^2+x} = 2 \sqrt[19]{y^2}$$

Giải : Đặt : $a = \sqrt[19]{x^2+y^2-x}$, $b = \sqrt[19]{y^2-x^2+x}$ thì $a+b = 2 \sqrt[19]{y^2} \geq 0$

Áp dụng BĐT (4), ta được :

$$y^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^{19} \leq \frac{a^{19} + b^{19}}{2} = y^2$$

$\Rightarrow$ Phương trình đã cho tương đương với

$(x^2+y^2-x)^2 = (y^2-x^2+x)^2$, từ đó giải ra ta được các cặp (x, y) cần tìm :

$$\begin{cases} x \text{ tùy ý} \\ y = 0 \end{cases}; \begin{cases} x = 0 \text{ hoặc } x = 1 \\ y \text{ tùy ý} \end{cases}$$

Ví dụ 3. Cho các số dương a, b, c và số nguyên $k \geq 1$. Chứng minh rằng :

$$\left(\frac{a}{b+c}\right)^k + \left(\frac{b}{c+a}\right)^k + \left(\frac{c}{a+b}\right)^k \geq \frac{3}{2^k} \quad (*)$$

Giải. Nhân vế trái của (*) với 2^k rồi áp dụng BĐT (8) ta có :

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{b+c}\right)^k \cdot a + \left(\frac{2}{c+a}\right)^k \cdot b + \left(\frac{2}{a+b}\right)^k \cdot c &\geq \\ &\geq \frac{2 \cdot a^k}{b^k + c^k} + \frac{2 \cdot b^k}{c^k + a^k} + \frac{2 \cdot c^k}{a^k + b^k} \end{aligned}$$

Thành thử, để chứng minh bất đẳng thức đã cho, ta chỉ cần chứng minh :

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \geq \frac{3}{2} \text{ với } x = a^k, y = b^k, z = c^k.$$

Đây là BĐT quen thuộc. Việc chứng minh xin dành cho bạn đọc !

Ví dụ 4. Cho số nguyên lẻ $k > 1$ và x, y, z, t là các số thực thỏa mãn :

$$\begin{cases} x \geq z, y \geq t \\ \sqrt[k]{x} + \sqrt[k]{y} = \sqrt[k]{z} + \sqrt[k]{t} + \sqrt[k]{2^{k-1}} \end{cases}$$

Chứng minh rằng : $\sqrt[k]{x-z} + \sqrt[k]{y-t} \geq 1$.

Giải. Áp dụng BĐT (4), ta được :

$$\left(\frac{\sqrt[k]{x} - \sqrt[k]{z}}{2}\right)^k = \left(\frac{\sqrt[k]{x} + \sqrt[k]{y-t}}{2}\right)^k \leq \frac{x-z}{2} \text{ (do } k \text{ lẻ và } x \geq z)$$

$$\Rightarrow \sqrt[k]{x-z} \geq \frac{\sqrt[k]{2}}{2} (\sqrt[k]{x} - \sqrt[k]{z}) \text{ (đẳng thức xảy ra } \Leftrightarrow x^2 = z^2)$$

$$\text{Tương tự : } \sqrt[k]{y-t} \geq \frac{\sqrt[k]{2}}{2} (\sqrt[k]{y} - \sqrt[k]{t}) \text{ (đẳng thức xảy ra } \Leftrightarrow y^2 = t^2)$$

Từ đó suy ra :

$$\begin{aligned} \sqrt[k]{x-z} + \sqrt[k]{y-t} &\geq \frac{\sqrt[k]{2}}{2} (\sqrt[k]{x} + \sqrt[k]{y} - \sqrt[k]{z} - \sqrt[k]{t}) = \\ &= \frac{\sqrt[k]{2}}{2} \cdot \sqrt[k]{2^{k-1}} = 1 \Rightarrow \text{đpcm.} \end{aligned}$$

(Bạn đọc tự xét các trường hợp xảy ra dấu đẳng thức)

Ví dụ 5. Cho các số dương a, b, c . Chứng minh rằng :

$$(a+b-c)^n + (b+c-a)^n + (c+a-b)^n \geq a^n + b^n + c^n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Giải. Với $n = 1$, BĐT trở nên tầm thường. Xét $n \geq 2$:

Đặt $b+c-a = x$, $c+a-b = y$, $a+b-c = z$ thì : $x+y = 2c \geq 0$, $y+z = 2a \geq 0$, $z+x = 2b \geq 0$, và BĐT phải chứng minh trở thành :

$$x^n + y^n + z^n \geq \left(\frac{x+y}{2}\right)^n + \left(\frac{y+z}{2}\right)^n + \left(\frac{z+x}{2}\right)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Việc chứng minh BĐT này không khó khăn gì nếu ta áp dụng BĐT (8).

BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1. Giải các phương trình :

a) $x^{100} + (x+6)^{100} = 2 \cdot 3^{100}$

b) $\sqrt[17]{x^3+3x-3} + \sqrt[17]{5-3x-x^3} = 2$

Bài 2. Chứng minh rằng :

$$x^{2k} + (x+1)^{2k} + (x+3)^{2k} + (x+4)^{2k} \geq 2 + 2^{2k-1}$$

với $x \in \mathbb{R}$ và $k \in \mathbb{N}^*$.

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

Bài 3. Cho số nguyên lẻ $k > 1$ và các số thực

$x_1, x_2, \dots, x_n$ thỏa mãn :

$$2^{k-1} \leq x_n \leq x_{n-1} \leq \dots \leq x_1 \leq 2^{2k-1}$$

Chứng minh rằng :

$$\begin{aligned} \sqrt[k]{2^{2k-1}-x_1} + \sqrt[k]{x_1-x_2} + \dots + \sqrt[k]{x_{n-1}-x_n} + \\ + \sqrt[k]{x_n-2^{k-1}} \geq 1 \quad ./. \end{aligned}$$

Đặt mua báo Toán học và Tuổi trẻ thường xuyên tại các Bưu điện trong cả nước.

CUỘC THI OLYMPIC TOÁN APMO 2000

NGUYỄN VIỆT HẢI

Cuộc thi Olympic toán châu Á - Thái Bình Dương (APMO) lần thứ 12 (3/2000) có sự tham gia của 19 đội với 187 thí sinh. So với năm 1999 có thêm đội Philippin nhưng vắng 3 đội : Malaysia, Mehico và Niu Dilân. Ở Việt Nam, kì thi được tổ chức ngày 8-3-2000 với 69 thí sinh ở 30 tỉnh, thành phố và 5 khối chuyên toán trực thuộc các trường Đại học. Đề thi gồm 5 bài toán, làm trong 240 phút. Điểm tối đa là 5×7 điểm = 35 điểm. Ban tổ chức APMO của mỗi nước (hoặc lãnh thổ) chấm bài của học sinh mình rồi gửi kết quả của n ($n \leq 10$) bài làm tốt nhất cho Ban tổ chức APMO quốc tế (kèm theo bản photocopy một số bài). Ban tổ chức APMO quốc tế đã công bố kết quả chung như sau : điểm trung bình mỗi thí sinh của tất cả các đội là $M = 15,65$ (điểm trung bình mỗi thí sinh của một đội kí hiệu là m). Điểm đạt huy chương vàng (HCV) là 23,25, điểm đạt huy chương bạc (HCB) là 18,18, điểm đạt huy chương đồng (HCD) là 13,12. Thí sinh được bằng khen (BK) phải đạt điểm HCD hoặc làm trọn vẹn 1 bài. Theo thể lệ cuộc thi, mỗi đội chỉ được không quá 1 HCV, không quá 3 HC Vàng và Bạc, không quá 7 HC Vàng, Bạc và Đồng.

TT	Tên đội	n	m	HCV	HCB	HCD	BK
1	Achentina	10	19,40	1	2	4	3
2	Ôxtralia	10	21,10	1	2	4	3
3	Canada	10	20,70	1	2	4	3
4	Chilê	7	4,57				1
5	Côlômbia	10	12,90		1	5	4
6	Côsta Rica	10	7,20		1		3
7	Êquado	10	1,30				
8	Hồng Kông	10	19,60	1	2	4	3
9	Indônêxia	10	12,20	1		5	4
10	Hàn Quốc	10	25,20	1	2	4	3
11	Pêru	10	12,90			3	6
12	Philippin	10	10,80			3	7
13	Singapo	10	17,60	1	2	3	4
14	Nam Phi	10	12,00	1		3	3
15	Đài Loan	10	28,40	1	2	4	3
16	Thái Lan	10	13,90			6	3
17	Trinidad Tôbagô	10	6,30		1		3
18	Hoa Kì	10	25,00	1	2	4	3
19	Việt Nam	10	26,30	1	2	4	3

Đội Việt Nam chiếm số giải tối đa dành cho mỗi nước :

1 HCV : Nguyễn Trung Lập (Vĩnh Phúc) : 30 điểm

2 HCB : Vũ Việt Tài (Nam Định) : 29 điểm; Bùi Viết Lộc (ĐHKHTN-ĐHQG Hà Nội) : 28 điểm

4 HCD : Tạ Anh Sơn (Phú Thọ) : 28 điểm; Đỗ Trường Giang (Hà Nội) : 28 điểm; Nguyễn Quang Bằng (Hải Dương) : 26 điểm; Nguyễn Anh Quân (Hải Phòng) : 25 điểm.

3 BK : Trần Đức Sơn (ĐHSP Vinh) : 24 điểm ; Trần Tuấn Anh (Khánh Hòa) : 23 điểm; Trần Quang Vinh (ĐHQG Tp Hồ Chí Minh) : 22,5 điểm

Trong các bài giải của Việt Nam có 24 bài đạt từ 19 điểm trở lên và có 32 bài đạt từ 14 đến 18 điểm.

Xin giới thiệu đề thi Olympic toán châu Á - Thái Bình Dương lần thứ 12 (3/2000) :

ĐỀ THI APMO 2000

Bài 1. Tính tổng
$$S = \sum_{i=0}^{101} \frac{x_i^3}{1 - 3x_i + 3x_i^2}$$

trong đó $x_i = \frac{i}{101}$.

Bài 2. Cho trước 9 hình tròn được xếp thành một tam giác như hình vẽ dưới đây.

Mỗi số 1, 2, ..., 9 phải được điền vào một trong các hình tròn đó sao cho mỗi hình tròn chứa đúng một trong các số đó và thỏa mãn đồng thời hai yêu cầu sau :

- (i) các tổng của bốn số trên mỗi cạnh bằng nhau.
- (ii) các tổng bình phương của bốn số trên mỗi cạnh bằng nhau.

Tìm tất cả các cách điền như thế.

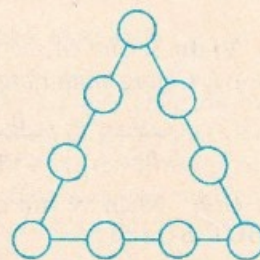
Bài 3. Cho tam giác ABC . Gọi M và N là các điểm trên cạnh BC sao cho AM là trung tuyến và AN là phân giác trong của tam giác ABC . Đường thẳng vuông góc với AN tại N cắt đường thẳng MA tại Q và cắt đường thẳng BA tại P . Đường thẳng vuông góc với BA tại P cắt đường thẳng AN tại O . Chứng minh rằng đường thẳng QO vuông góc với đường thẳng BC .

Bài 4. Giả sử n và k là các số nguyên dương sao cho $n > k$. Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{n+1} \cdot \frac{n^n}{k^k(n-k)^{n-k}} < \frac{n!}{k!(n-k)!} < \frac{n^n}{k^k(n-k)^{n-k}}$$

Bài 5. Cho trước một hoán vị $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ của dãy 0, 1, ..., n . Một phép hoán vị của $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ được gọi là *hợp lệ* nếu phép hoán vị đó chỉ đổi chỗ phần tử a_i với phần tử a_j mà trong đó $a_i = 0$ ($i > 0$) và $a_j = a_{i-1} + 1$.

Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho từ hoán vị $(1, n, n-1, \dots, 3, 2, 0)$ ta thu được hoán vị $(1, 2, \dots, n, 0)$ bằng cách thực hiện một số hữu hạn phép hoán vị hợp lệ.





TỔ CHỨC THI HỌC SINH GIỎI TOÁN Ở MỸ

ĐẶNG HÙNG THẮNG
(Trường ĐHKHTN-ĐHQG Hà Nội)

Nhân dịp kì thi Olympic Toán quốc tế lần thứ 42 (tháng 7/2001) sẽ được tổ chức tại Mỹ, xin giới thiệu việc tổ chức thi chọn học sinh giỏi (HSG) ở Mỹ.

I. Vài nét về thành tích của đội tuyển Mỹ

Nước Mỹ lần đầu tham gia Olympic Toán quốc tế vào năm 1974. Đến năm 1999, sau 25 lần dự thi với 165 lượt thí sinh, đội tuyển Mỹ đã giành được tổng cộng 152 huy chương (HC) trong đó có 48 HV Vàng, 76 HC Bạc và 28 HC Đồng. Số huy chương đoạt được trong một lần thi trung bình là $152/25 \approx 6,08$ và số HC Vàng trung bình là $48/25 \approx 1,92$.

Đội Mỹ đã 4 lần xếp thứ nhất vào các năm 1977, 1981, 1986, 1994 và 21 lần đứng trong top 5 đội mạnh nhất. Thành tích kỉ lục mà đội Mỹ giành được tại kì thi IMO lần thứ 35 tại Hồng Kông là cả 6 thành viên của đội đều đạt điểm tuyệt đối 42/42. Mỹ lần đầu tiên đã đăng cai IMO vào năm 1981 và sẽ lại tổ chức vào năm 2001.

Nhân đây hãy so sánh với Việt Nam. Nước ta tham dự IMO lần đầu vào năm 1974. Cho đến năm 1999 đã tham dự 23 lần với 139 lượt thí sinh, giành được tổng cộng 124 HC, trong đó có 22 HC Vàng, 58 HC Bạc và 44 HC Đồng. Số HC đoạt được trong một lần thi trung bình là $124/23 \approx 5,39$ và số HC Vàng trung bình là $22/23 \approx 0,956$. Thành tích cao nhất của Việt Nam cho đến nay là xếp thứ 3 (1999) và đã 4 lần trong top 5 đội mạnh nhất.

II. Tổ chức thi học sinh giỏi ở Mỹ

Kỳ thi HSG Toán bậc Trung học của Mỹ lần đầu tiên được tổ chức cách đây 50 năm. Kỳ thi HSG Toán ở Mỹ được tổ chức hàng năm gồm nhiều giai đoạn. Chịu trách nhiệm tổ chức kì thi là Ủy ban Olympic Toán (AMC), dưới sự bảo trợ của Hội Toán học Mỹ và được tài trợ bởi 15 tổ chức khác.

Giai đoạn 1: Cuộc thi Toán toàn nước Mỹ vòng 1 (AMC 12 và AMC 10), Cuộc thi mở rộng cho tất cả các thí sinh trung học ở Mỹ, ai có nguyện vọng đều có thể dự thi. Học sinh lớp 10, 11 hay 12 có quyền đăng kí dự thi AMC 12 còn AMC 10 chỉ dành cho học sinh lớp 10. Lệ phí thi là 30 USD. Thời gian là 75 phút. Đề thi ở dạng trắc nghiệm, gồm 25 bài toán (mỗi bài toán có 5 câu trả lời trong đó chỉ có 1 câu trả lời đúng). Mỗi câu đúng được 6 điểm, câu bỏ trống được 2 điểm còn câu trả lời sai

thì không được điểm nào. Điểm tối đa là 25×6 điểm = 150 điểm.

AMC 10 và AMC 12 được tổ chức trong cùng một ngày vào giữa tháng 2. Trong năm 1999 vừa qua có khoảng gần 400000 học sinh của hơn 5000 trường khắp nước Mỹ tham dự. Có lẽ đây là cuộc thi toán dành cho học sinh trung học lớn nhất thế giới. Vì hình thức thi theo kiểu trắc nghiệm nên có thể thực hiện chấm thi bằng máy tính, vừa tiết kiệm kinh phí vừa cho kết quả nhanh và chính xác. Trong vòng chưa đầy hai tuần thí sinh đã được thông báo kết quả.

Giai đoạn 2: Cuộc thi Toán toàn nước Mỹ vòng 2 (AIME). Những người đạt trên 100 điểm của AMC 12 hoặc trong số 10% thí sinh có điểm cao nhất của AMC 10 được mời dự thi tiếp vòng 2 (AIME), tổ chức vào cuối tháng 3. Có khoảng 6000-7000 học sinh dự kỳ thi này. Thời gian thi là 3 giờ. Đề thi gồm 15 bài toán, nói chung khó hơn các bài toán của giai đoạn 1. Mỗi bài toán được thiết kế sao cho đáp số là một số nguyên từ 0 đến 999. Thí sinh chỉ cần viết đáp số, không cần giải thích chứng minh. Với cách thi này khả năng đoán mò được hạn chế ở mức rất thấp đồng thời vẫn cho phép thực hiện chấm thi bằng máy tính. Mỗi câu đúng được 10 điểm, câu sai không được điểm nào.

Giai đoạn 3: Cuộc thi HSG quốc gia vòng chung kết (USAMO) 170 thí sinh đạt điểm cao nhất của kì thi AIME được tham gia cuộc thi HSG Toán quốc gia (USAMO) tổ chức vào đầu tháng 5. Đây là cuộc thi viết gồm hai buổi thi, mỗi buổi 3 tiếng. Trong mỗi buổi thí sinh phải giải 3 bài toán khó đòi hỏi khả năng sáng tạo, năng khiếu và sự hiểu biết sâu sắc về toán học của thí sinh. Mỗi bài được tối đa 7 điểm, như vậy điểm tối đa của USAMO là 42 điểm. Sau đây là một bài toán của kì thi USAMO năm 1997:

Chứng minh rằng với mỗi số nguyên n thì tồn tại và duy nhất một đa thức Q với hệ số trong tập hợp $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$ sao cho $Q(-2) = Q(-5) = n$

12 thí sinh đạt điểm cao nhất của USAMO được mời về thủ đô Washington vào đầu tháng 6 để tham dự buổi lễ trao giải thưởng. Buổi lễ trao giải do Hội Toán học Mỹ, Bộ Giáo dục quốc gia, Viện Hàn lâm khoa học, Quỹ Khoa học quốc gia phối hợp tổ chức với các nhà tài trợ là Công ty Microsoft và Matilda Wilson Foundation. Sau lễ trao giải trọng

thể là buổi nói chuyện của các nhà khoa học và toán học nổi tiếng và một bữa tiệc tại nhà khách của chính phủ. Các học sinh đoạt giải có cơ hội gặp gỡ tiếp xúc với các nhà khoa học và toán học hàng đầu của Mỹ.

Giai đoạn chốt: Trường hè Olympic Toán học (MOSP): 12 học sinh chiến thắng trong kì thi USAMO (nhóm 1) và 12 em học sinh (từ lớp 11 trở xuống) có tổng số điểm cao nhất trong 3 kì thi USAMO, AMC 12 và AIME (nhóm 2) được mời tham dự Trường hè Olympic Toán học (MOSP) kéo dài trong 1 tháng trước khi thi Toán quốc tế. Ngay khi bắt đầu trường hè 12 em nhóm 1 sẽ tham dự kì thi chọn đội tuyển IMO để tranh 6 vị trí chính thức trong đội tuyển Mỹ. Giống như kì thi USAMO, kì thi chọn đội tuyển gồm hai buổi, mỗi buổi 3 giờ với 3 bài toán. Trường hè có mục đích trước mắt là bồi dưỡng cho các em thêm các kiến thức và kĩ năng giải Toán, chuẩn bị thật tốt cho các em bước vào kì thi IMO sắp tới, đồng thời cũng có mục tiêu xa hơn nhằm khuyến khích các em chọn Toán học làm nghề nghiệp sau này. Việc sống chung với nhau ở trường hè đã tạo một bầu không khí hợp tác, phát triển tinh thần đồng đội của các em. Trường hè được tổ chức tại Trường ĐH Tổng hợp Nebraska nơi

có phòng học, thư viện rất tốt, yên tĩnh và khu nội trú ăn ở thuận tiện, các phương tiện giải trí đầy đủ. Trong thời gian 4 tuần học sinh sẽ nghe các bài giảng và tham gia các buổi luyện Toán dưới sự hướng dẫn của các thầy giáo giỏi và sự trợ giúp đắc lực của các cựu học sinh đã tham gia các IMO trước. Nhiều vấn đề quan trọng của toán học thường gặp trong nội dung thi IMO như số học, đa thức, phương trình hàm, tổ hợp, bất đẳng thức, số phức, hình học, graph... được chú trọng. Buổi sáng học lí thuyết, buổi chiều luyện toán, thảo luận nhóm, thuyết trình ở xêmina, làm bài kiểm tra và các hoạt động toán học khác. Buổi tối và một số buổi chiều nghỉ ngơi. Các học sinh có thể chơi thể thao, xem phim, chơi trò chơi điện tử... Tất cả mọi chi phí bao gồm ăn ở, đi lại, tiền học phí... đều được các tổ chức tài trợ.

Các học sinh tham gia đội tuyển sau đó đều được học bổng học tại các trường đại học danh tiếng của Mỹ như Harvard, Stanford, Columbia, MIT,... Nhiều người trong số họ sau này đã có học vị Tiến sĩ và trở thành giáo sư đại học. Một số khác làm việc trong các công ty tin học lớn hoặc trong các công ty chứng khoán bảo hiểm..., ở đó những bộ óc toán học giỏi tỏ ra rất có ích./.

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

BÀI SỐ 31

Problem. Suppose that each of n people knows exactly one piece of information, and all n pieces are different. Every time a person A phones person B , A tells B everything he knows, while B tells A nothing. What is the minimum number of phone calls between pairs of people needed for everyone to know everything?

Solution. Denote the n people by $A_1, \dots, A_n$ and a call from A_i to A_j by $A_i \rightarrow A_j$. Let $f(n)$ denote the minimum number of calls which can leave everybody fully informed. The particular sequence

$$A_1 \rightarrow A_n, A_2 \rightarrow A_n, \dots, A_{n-1} \rightarrow A_n,$$

$$A_n \rightarrow A_1, A_n \rightarrow A_2, \dots, A_n \rightarrow A_{n-1}.$$

contains $2n-2$ calls and leave everybody informed, showing that $f(n) \leq 2n-2$

Suppose that we have a sequence of calls which leaves everybody informed. Consider the crucial call at the end of which the receiver (call him A) is the first person to be fully informed. Clearly, each of the $n-1$ people other than A must have placed at least one call no later than the crucial call. Also each of these $n-1$ people (being not fully informed) must receive at least

one call after the crucial one. Hence the given sequence contains at least $2(n-1)$ calls. Thus $f(n) = 2n-2$.

Từ mới:

exactly	= chính xác, đúng
piece	= mẩu, phần
information	= tin tức, thông tin
person	= người, nhân vật
phone	= gọi điện (động từ)
while	= trong lúc, trong khi
minimum	= cực tiểu
call	= cú điện thoại (danh từ), gọi (động từ)
need	= cần, phải (động từ)
leave	= để cho, để lại (động từ)
fully	= hoàn toàn
inform	= thông báo (động từ)
particular	= đặc biệt, riêng (tính từ)
sequence	= dãy
crucial	= quan trọng, quyết định (tính từ)
receiver	= người nhận
receive	= nhận
contain	= chứa, bao gồm.

NGÔ VIỆT TRUNG

TÌM HIỂU SÂU THÊM TOÁN HỌC SƠ CẤP

VỀ CÁCH BIỂU DIỄN cos nx THEO cos x

TRƯƠNG CÔNG THÀNH
(Nhà xuất bản Giáo dục)

Tên tạp chí THPT số 249 (3/1998) có bài "Nhiệm vụ Newton với các hàm số sin và cosin" của tác giả Nguyễn Công Sửu, trong đó trình bày cách tìm công thức tổng quát biểu diễn cos nx và sin nx theo cos x, sin x nhờ tam giác số trong bảng Pascal.

Bài báo này góp thêm một ý về cách xác định các hệ số của sự biểu diễn cos nx theo cos x.

Một vài công thức biểu diễn đầu tiên của cos nx theo cos x là:

$$\begin{aligned}\cos 0x &= 1 \\ \cos x &= 1 \cos x \\ \cos 2x &= 2 \cos^2 x - 1 \\ \cos 3x &= 4 \cos^3 x - 3 \cos x \\ \cos 4x &= 8 \cos^4 x - 8 \cos^2 x + 1 \\ \cos 5x &= 16 \cos^5 x - 20 \cos^3 x + 5 \cos x \\ \cos 6x &= 32 \cos^6 x - 48 \cos^4 x + 18 \cos^2 x - 1 \\ \cos 7x &= 64 \cos^7 x - 112 \cos^5 x + 56 \cos^3 x - 7 \cos x\end{aligned}$$

Nếu chỉ xét các hệ số của các biểu thức trên ta được bảng hệ số dạng tam giác dưới đây (bỏ các cột ứng với hệ số 0), trong đó n là số hàng, k là số cột, giao giữa hàng n và cột k là hệ số $a_{n,k}$ với $m = n - 2k$.

$$\text{Dạng tổng quát: } \cos nx = \sum_{0 \leq k \leq \frac{n}{2}} a_{n,k} \cos^{n-2k} x =$$

$$a_{n,0} \cos^n x + a_{n,1} \cos^{n-2} x + a_{n,2} \cos^{n-4} x + \dots$$

n \ k	0	1	2	3
0	1			
1	1			
2	2	-1		
3	4	-3		
4	8	-8	1	
5	16	-20	5	
6	32	-48	18	-1
7	64	-112	56	-7

Từ bảng hệ số một cách tự nhiên xuất hiện câu hỏi: Cấu trúc của bảng số trên như thế nào?

Các hệ số $a_{n,k}$ trong bảng có mối liên hệ gì?

Có thể viết nối tiếp bảng trên một cách nhanh chóng không?

Có thể viết ngay công thức cos nx theo cos x với mỗi số n?

1) Công thức xuất phát

Từ $2 \cos nx = 2 \cos((n-1)x + x) = 2 \cos(n-1)x \cos x - 2 \sin(n-1)x \sin x$ và $-2 \sin(n-1)x \sin x = \cos nx - \cos(n-2)x$ với mọi $n \geq 2$ ta có

$$\cos nx = 2 \cos(n-1)x \cos x - \cos(n-2)x \quad (1)$$

2) Mối liên hệ giữa các hệ số $a_{n,k}$

$$\text{Vì } \cos^{n-2k} x = \cos^{(n-1)-2k} x \cdot \cos x = \cos^{(n-2)-(2(k-1))} x \text{ nên từ (1) có}$$

$$a_{n,k} = 2a_{n-1,k} - a_{n-2,k-1} \quad (2)$$

$$\text{với } 1 \leq k \leq \frac{n}{2}, n \geq 2$$

$$\text{và } a_{n,0} = 2a_{n-1,0} \quad \text{với } k=0, n \geq 2 \quad (2')$$

$$a_{2k,k} = (-1)^k \quad \text{với } n=2k \quad (2'')$$

$$\text{Chẳng hạn: } a_{5,0} = 2a_{4,0} = 2.8 = 16;$$

$$a_{6,3} = (-1)^3 = -1;$$

$$a_{7,2} = 2a_{6,2} - a_{5,1} = 2.18 - (-20) = 56.$$

Hệ thức (2') và (2'') có thể coi là trường hợp riêng của (2) nếu đặt $a_{n,k} = 0$ với $k < 0$ hoặc $n < 2k$

Nhờ công thức (2) bạn có thể viết tiếp bảng hệ số $a_{n,k}$.

3) Chú ý: Tổng các hệ số của một hàng tùy ý bằng 1, nghĩa là:

$$\sum a_{n,k} = 1 \quad (3)$$

$$0 \leq k \leq \frac{n}{2}$$

Thực vậy, (3) đúng với $n = 1, 2, 3$. Giả sử (3) đúng với mọi số không lớn hơn n thì

$$\sum a_{n,k} = 2 \sum_{0 \leq k \leq \frac{n-1}{2}} a_{n-1,k} - \sum_{0 \leq k-1 \leq \frac{n-2}{2}} a_{n-2,k-1}$$

$$= 2.1 - 1 = 1.$$

$$\text{Vậy (3) đúng với } n.$$

4) Công thức tổng quát của $a_{n,k}$.

Có thể viết:

$$\cos 6x = \frac{6}{6} \cdot 2^5 \cdot C_6^0 \cdot \cos^6 x - \frac{6}{5} \cdot 2^3 \cdot C_5^1 \cdot \cos^4 x +$$

$$+ \frac{6}{4} \cdot 2^1 \cdot C_4^2 \cdot \cos^2 x - \frac{6}{3} \cdot 2^{-1} \cdot C_3^3 \cdot \cos^0 x$$

$$\cos 7x = \frac{7}{7} \cdot 2^6 \cdot C_7^0 \cdot \cos^7 x - \frac{7}{6} \cdot 2^4 \cdot C_6^1 \cdot \cos^5 x +$$

$$+ \frac{7}{5} \cdot 2^2 \cdot C_5^2 \cdot \cos^3 x - \frac{7}{4} \cdot 2^0 \cdot C_4^3 \cdot \cos x$$

Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp rằng:

$$a_{n,k} = (-1)^k \frac{n}{n-k} \cdot 2^{n-1-2k} \cdot C_{n-k}^k \quad (4)$$

Để thấy (4) đúng với $n = 1, 2, 3$. Giả sử (4) đúng với mọi số không lớn hơn n thì

$$\begin{aligned} a_{n,k} &= 2a_{n-1,k} - a_{n-2,k-1} = \\ &= (-1)^k \cdot \frac{n-1}{n-1-k} \cdot 2^{n-1-2k} \cdot C_{n-1-k}^k - \\ &\quad - (-1)^{k-1} \cdot \frac{n-2}{n-1-k} \cdot 2^{n-1-2k} \cdot C_{n-1-k}^{k-1} \\ &= (-1)^k \frac{2^{n-1-2k}}{n-1-k} \left((n-1)C_{n-1-k}^k + (n-2)C_{n-1-k}^{k-1} \right) \\ &= (-1)^k \frac{n}{n-k} \cdot 2^{n-1-2k} C_{n-k}^k. \end{aligned}$$

Vậy (4) đúng với n .

Nhờ công thức tổng quát của $a_{n,k}$ ta có thể viết được ngay công thức biểu diễn $\cos nx$ theo $\cos x$ với mỗi n , chẳng hạn $\cos 6x$, $\cos 7x$ như ở trên.

5) Mỗi liên hệ giữa số $a_{n,k}$ với hệ số trong khai triển nhị thức Newton.

Ta cũng có thể viết

$$\begin{aligned} \cos 6x &= \cos^6 x (1.C_6^0 + 1.C_6^2 + 1.C_6^4 + 1.C_6^6) \\ &\quad - \cos^4 x (1.C_6^2 + 2.C_6^4 + 3.C_6^6) \\ &\quad + \cos^2 x (1.C_6^4 + 3.C_6^6) \\ &\quad - \cos^0 x (1.C_6^6) \\ \cos 7x &= \cos^7 x (1.C_7^0 + 1.C_7^2 + 1.C_7^4 + 1.C_7^6) \\ &\quad - \cos^5 x (1.C_7^2 + 2.C_7^4 + 3.C_7^6) \\ &\quad + \cos^3 x (1.C_7^4 + 3.C_7^6) \\ &\quad - \cos x (1.C_7^6) \end{aligned}$$

Lập bảng các hệ số của các công thức trên (bỏ các dấu cộng) rồi quay bảng đó ta được bảng sau, trong đó thừa số bên trái của mỗi tích lập thành tam giác số Pascal.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 1.C_n^0 & & \\ & & & & 1.C_n^2 & & \\ & & & 1.C_n^4 & & 1.C_n^6 & \\ & & 1.C_n^6 & & 3.C_n^4 & & 3.C_n^2 & & 1.C_n^0 \end{array}$$

Nếu các bạn biết phép tính ma trận thì có thể viết:

$$\cos 6x = \begin{bmatrix} C_6^0 & C_6^2 & C_6^4 & C_6^6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ \cos^2 x \\ -\cos^4 x \\ \cos^6 x \end{bmatrix}$$

$$\cos 7x = \begin{bmatrix} C_7^0 & C_7^2 & C_7^4 & C_7^6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\cos x \\ \cos^3 x \\ -\cos^5 x \\ \cos^7 x \end{bmatrix}$$

So sánh bảng số trên với công thức (4), rút ra công thức sau với $0 \leq k \leq \frac{n}{2}$:

$$\begin{aligned} &C_k^0 \cdot C_n^{2k} + C_{k+1}^1 C_n^{2k+2} + C_{k+2}^2 C_n^{2k+4} + \dots = \\ &= \frac{n}{n-2} \cdot 2^{n-1-2k} \cdot C_{n-k}^k \\ \text{hay } \sum_{0 \leq t \leq \frac{n-k}{2}} C_{k+t}^t C_n^{2(k+t)} &= \frac{n}{n-k} \cdot 2^{n-1-2k} \cdot C_{n-k}^k \quad (5) \end{aligned}$$

Bạn đọc có thể chứng minh được công thức (5) hay không?

Tương tự như trên, các bạn hãy lập bảng hệ số và tìm dạng tổng quát của hệ số trong công thức biểu diễn $\sin nx$ theo $\sin x$.

TRỰC QUAN TRONG GIẢI TOÁN

(Tiếp trang 11)

$$\begin{aligned} \text{Ta có } MN^2 &= (a+b)^2 + \left(a+b + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)^2 \\ &= (a+b)^2 \left[1 + \left(1 + \frac{1}{ab} \right)^2 \right] \\ &= (a+b)^2 \left(2 + \frac{1}{a^2 b^2} + \frac{2}{ab} \right) \geq \\ &\geq 4ab \left(2 + \frac{1}{a^2 b^2} + \frac{2}{ab} \right) = 4 \left(2ab + \frac{1}{ab} + 2 \right) \geq \\ &\geq 4(2\sqrt{2} + 2) = 8(1 + \sqrt{2}) \\ \Rightarrow MN &\geq 2\sqrt{2}(1 + \sqrt{2}). \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = \sqrt[4]{1/2} \approx 0,84$

Vậy với: $M = (\sqrt[4]{1/2}; \sqrt[4]{1/2} + \sqrt[4]{2})$;

$N = (-\sqrt[4]{1/2}; -\sqrt[4]{1/2} - \sqrt[4]{2})$ thì

$MN = 2\sqrt{2}(1 + \sqrt{2})$ là giá trị nhỏ nhất.

Lưu ý rằng $2\sqrt{2}(1 + \sqrt{2}) \approx 4,39 < 2\sqrt{5} \approx 4,47$.

Đường thẳng MN chính là trục đối xứng của hypebol (H).

LTS. Trong đề thi tuyển sinh vào đại học của một số trường mấy năm gần đây có xuất hiện loại toán này và nhiều học sinh đã mắc sai lầm như tác giả phát hiện. Nếu quay đồ thị quanh tâm O một góc 270° (ngược chiều kim đồng hồ) thì trực quan sẽ giúp cho các bạn dự đoán... chính xác.

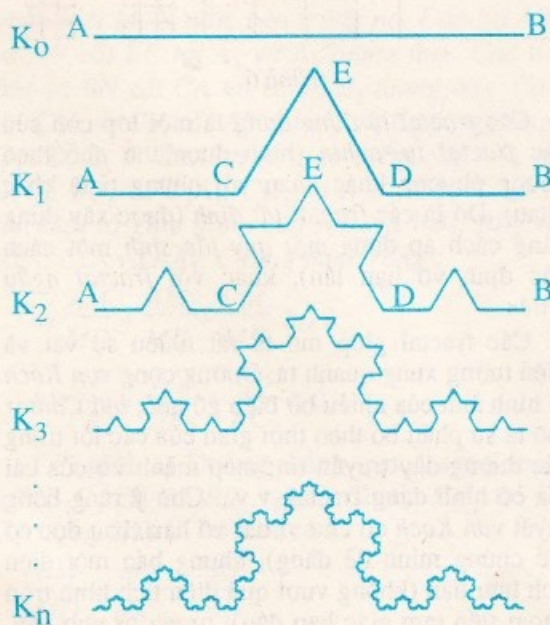
GIỚI THIỆU VỀ TOÁN HỌC CAO CẤP**HÌNH HỌC FRACTAL LÀ GÌ ?**

HOÀNG CHÚNG

(Tp Hồ Chí Minh)

Hình học Oclit (Euclid) được giới thiệu ở trường trung học với việc khảo sát các hình đa giác, hình tròn, hình đa diện, hình cầu, hình nón, v.v... Hơn hai nghìn năm qua, hình học Euclid đã có tác dụng to lớn đối với nền văn minh nhân loại, từ chỗ đo đạc ruộng đất đến vẽ đồ án xây dựng nhà cửa, chế tạo vật dụng và máy móc, từ chỗ mô tả quỹ đạo của các hành tinh trong hệ Mặt Trời đến mô tả cấu trúc của nguyên tử. Tuy nhiên, qua hình học Euclid ta nhìn mọi vật dưới dạng "đều đặn", "trơn tru". Với những hình dạng trong hình học Euclid, ta không thể hình dung và mô tả được nhiều vật thể rất quen thuộc chung quanh ta như quả núi, bờ biển, đám mây, nhiều bộ phận trong cơ thể người (phổi, mạch máu, ...) v.v... là những vật thể cực kỳ *không đều đặn, rất gồ ghề*. Một ví dụ đơn giản : bờ biển đảo Phú Quốc dài bao nhiêu ? Ta không thể có được câu trả lời, nếu dùng cách đo hình học quen thuộc, dù thước đó có nhỏ mấy đi nữa, ta cũng đã bỏ qua những lồi lõm giữa hai đầu của thước đo ấy, nhất là chỗ bờ đá nhấp nhô ; và với thước đo càng nhỏ, ta có kết quả càng lớn.

Hình học Phracton (Fractal) ra đời đã góp phần giải quyết bất lực nói trên của hình học Euclid. Trước hết, ta tìm hiểu về Fractal qua vài ví dụ :



Hình 1

Đường cong von Kock

Lấy một đoạn thẳng AB bất kỳ (K_0 , hình 1) ; chia AB ra ba phần bằng nhau ($AC = CD = DB$), dựng tam giác đều CED trên đoạn thẳng ở giữa, rồi xóa cạnh CD đi, ta được hình K_1 . Quy tắc biến đổi từ hình ban đầu K_0 thành hình K_1 gọi là *quy tắc sinh*. Áp dụng quy tắc sinh này về cùng một phía theo chiều từ A đến B với bốn đoạn thẳng của K_1 ta được K_2 , với 16 đoạn thẳng của K_2 ta được K_3 ..., Áp dụng quy tắc sinh vô hạn lần, ta được đường cong *von Koch* K mà K_n là một hình ảnh gần đúng. Đường cong này mang tên nhà toán học Thụy Điển Vôn Cốc (1870 – 1924).

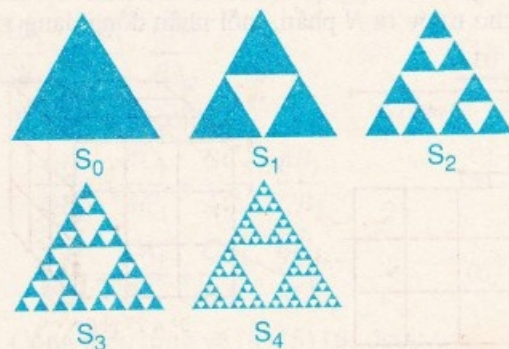
Nếu lấy hình ban đầu là một tam giác đều và áp dụng quy tắc sinh trên đây đối với mỗi cạnh của tam giác, thì ta được một hình gọi là *bông tuyết von Koch* (hình 2).



Hình 2

Thảm Sierpinski

Hình đầu tiên là một tam giác đều S_0 (hình 3). Quy tắc sinh : chia S_0 ra bốn hình tam giác đều bằng nhau, rồi xóa đi tam giác đều ở giữa, ta được S_1 . Áp dụng quy tắc sinh đối với ba tam giác đều của S_1 ta được S_2 , đối với 9 tam giác đều của S_2 ta được S_3 , v.v... Áp dụng quy tắc này vô hạn lần, ta được *thảm Sierpinski* (tên nhà toán học Ba Lan Xiepinxki 1882-1969).



Hình 3

Đường cong von Koch và thảm Sierpinski có tính đồng dạng nội tại hay tự đồng dạng, theo nghĩa là một bộ phận của nó đồng dạng với chính nó. Trên hình 1, K_1 gồm 4 phần, mỗi phần đồng dạng với K_0 theo tỉ số đồng dạng $1/3$; K_2 gồm 4 phần, mỗi phần đồng dạng với K_1 theo tỉ số $1/3$; v.v... Áp dụng quy tắc sinh vô hạn lần, ta được đường cong K gồm 4 phần, mỗi phần đồng dạng với K theo tỉ số $1/3$. Tương tự, trên hình 3, S_n gồm 3 phần, mỗi phần đồng dạng với S_{n-1} theo tỉ số đồng dạng $1/2$ và áp dụng quy tắc sinh vô hạn lần ta được thảm Sierpinski S gồm 3 phần, mỗi phần đồng dạng với S theo tỉ số đồng dạng $1/2$.

Những hình tự đồng dạng thuộc một lớp các Fractal

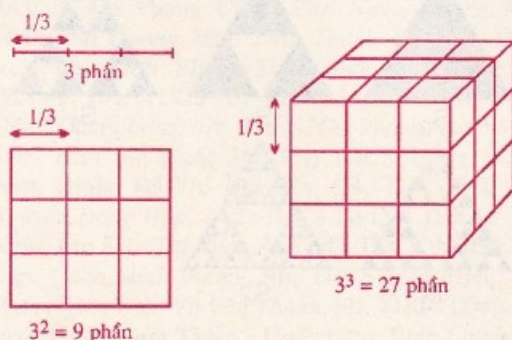
Với Fractal, có thể mở rộng khái niệm về thứ nguyên (số chiều), để mô tả những đối tượng không đều đặn, gồ ghề.

Trong hình học Euclid, ta nói đường thẳng có thứ nguyên 1 (số chiều là 1), theo nghĩa mỗi điểm trên đường thẳng được xác định bởi 1 số (tọa độ của điểm ấy); mặt phẳng có thứ nguyên 2 (số chiều là 2), vì mỗi điểm trong mặt phẳng được xác định bởi cặp số (x, y) ; chúng ta đang sống trong không gian 3 chiều (thứ nguyên là 3) vì bộ ba số (x, y, z) đủ để xác định một điểm trong không gian.

Thứ nguyên của một đối tượng hình học có thể định nghĩa một cách khác.

Xét các hình quen thuộc: đoạn thẳng, hình vuông, hình lập phương. Có thể chia mỗi hình này ra N phần, mỗi phần đồng dạng với hình ban đầu theo tỉ số $1/k$; với đoạn thẳng thì $N = k$, với hình vuông thì $N = k^2$, với hình lập phương thì $N = k^3$. Hình 4 minh họa điều này với $k = 3$. Ta nói đoạn thẳng có thứ nguyên 1, tương ứng với số mũ $d = 1$ trong công thức $N = k^d$; hình vuông có thứ nguyên 2, tương ứng với $d = 2$ và hình lập phương có thứ nguyên 3, tương ứng với $d = 3$.

Một cách tổng quát, nếu có thể chia một hình H cho trước ra N phần, mỗi phần đồng dạng với



Hình 4

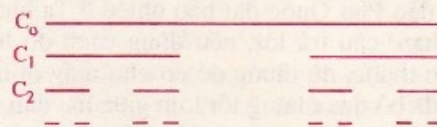
H theo tỉ số $\frac{1}{k}$ mà $N = k^d$ thì ta nói H có thứ nguyên d . Lấy lôgarit hai vế của đẳng thức trên (theo cùng một cơ số), ta có

$$\log N = d \log k \text{ hay } d = \frac{\log N}{\log k}$$

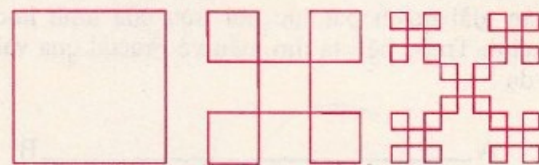
Đường cong von Koch K có thể chia ra $N = 4$ phần, mỗi phần đồng dạng với K theo tỉ số $\frac{1}{k} = \frac{1}{3}$, do đó đường cong von Koch có thứ nguyên là $d = \frac{\log 4}{\log 3} \approx 1,2619$.

Thảm Sierpinski S có thứ nguyên $d = \frac{\log 3}{\log 2} \approx 1,585$, vì S có thể chia ra $N = 3$ phần, mỗi phần đồng dạng với S theo tỉ số $\frac{1}{2}$.

Bạn đọc dễ dàng tính được thứ nguyên của các fractal trong bụi (bụi bậm) Cantor (hình 5) và hình 6.



Hình 5



Hình 6

Các fractal tự đồng dạng là một lớp con của các fractal tự-aphin (hình được thu nhỏ theo những phương khác nhau với những tỉ lệ khác nhau). Đó là các fractal tất định (được xây dựng bằng cách áp dụng một quy tắc sinh một cách xác định vô hạn lần), khác với fractal ngẫu nhiên.

Các fractal giúp mô tả rất nhiều sự vật và hiện tượng xung quanh ta. Đường cong von Koch là hình ảnh của nhiều bờ biển gồ ghề; bụi Cantor mô tả sự phân bố theo thời gian của các lỗi trong các đường dây truyền tin; mép mảnh vỡ của cái đĩa có hình dạng fractal, v.v... Chú ý rằng bông tuyết von Koch có chu vi dài vô hạn (bạn đọc có thể chứng minh dễ dàng), nhưng bao một diện tích hữu hạn (không vượt quá diện tích hình tròn ngoại tiếp tam giác ban đầu); tương tự như vậy, có những fractal trong không gian có diện tích bề

mặt là vô hạn nhưng bao một thể tích hữu hạn. Những fractal đó giúp mô tả nhiều sự vật trong thiên nhiên, như hệ thống mạch máu, các phế nang trong cơ thể người (có cấu trúc fractal để chiếm diện tích tối đa trong một thể tích nhất định).

Hình học fractal mới ra đời cách đây chưa đầy 30 năm. Tuy rằng đường cong von Koch, thảm Sierpinski, bụi Cantor cũng như ý tưởng quan trọng về thứ nguyên phân số (Hausdorff, Besicovitch, ...) đã có từ cuối thế kỷ 19, đầu thế kỷ 20 (chú ý rằng đường cong von Koch là một đường cong liên tục không có tiếp tuyến tại bất cứ điểm nào), nhưng có thể coi nhà toán học Ba Lan Bonoa Mandenbrôt (Benoit Mandelbrot) là người khai sinh ra hình học fractal. Thuật ngữ fractal do B.Mandelbrot đưa ra (dựa vào từ latin "fractus", có nghĩa là "phân đoạn", và cũng có nghĩa là "không đều", "gồ ghề") và sớm được giới khoa học thừa nhận. Hình học fractal đã phát triển rất nhanh chóng, gắn liền với đồ họa vi tính, có thể nói rằng nếu không có đồ họa vi tính thì hình học fractal không thể có diện mạo như hiện nay.

Benoit Mandelbrot là một nhà khoa học rất độc đáo. Năm 20 tuổi, thi đỗ vào École Normale Supérieure (trường Đại học Sư phạm), trường đại học danh tiếng bậc nhất của Pháp, ông chỉ học ở đó có một ngày, vì thấy xu hướng nghiên cứu của các nhà toán học ở đây quá thiên về lý thuyết trừu tượng không phù hợp với mình. Ông lại thi đỗ vào trường đại học nổi tiếng khác là École Polytechnique (Trường Đại học Bách Khoa), sau đó học tiếp một trường đại học Công nghệ ở Mỹ. Với thiên tài về tư duy hình ảnh và trực giác hình học, được sự trợ giúp của máy tính, ông đã đi vào rất nhiều lĩnh vực khoa học khác nhau (toán học, kinh tế học, kỹ thuật, sinh lý học...) và phát hiện nhiều ứng dụng lý thú của hình học fractal.

Chú ý rằng trong tháng 10-1999, ở Hà Nội có một triển lãm mang tên "Trong thế giới các fractal", giới thiệu nhiều fractal rất đẹp và vai trò của hình học fractal. Sách giáo khoa toán học phổ thông gần đây ở nhiều nước cũng đã giới thiệu một vài fractal.

Bạn đọc quan tâm đến những ứng dụng rất phong phú của hình học fractal có thể tìm đọc cuốn sách "Những điều kỳ thú về các hình thái hỗn loạn CHAOS" của Nguyễn Ngọc Giao (NXB Giáo dục, 1998). Muốn hiểu thêm về Benoit Mandelbrot, có thể tìm trên Internet theo địa chỉ :

<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/history/mat.../mandelbrot.html>



TRỰC QUAN trong giải toán ?

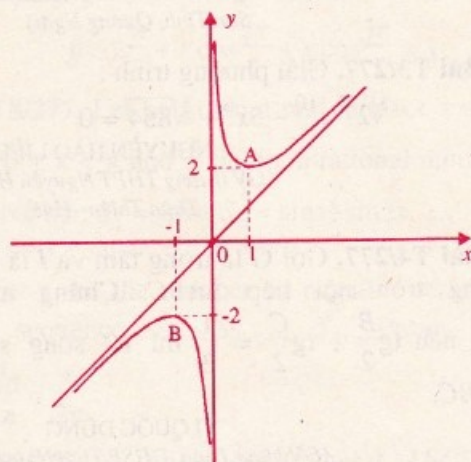
TUỞNG MINH MINH
(Lê Thủy – Quảng Bình)

Trong việc giải toán, nhiều khi trực quan giúp chúng ta tìm ra lời giải. Tuy nhiên, trực quan không phải lúc nào cũng dẫn đến dự đoán chính xác; không ít trường hợp, từ trực quan đã tạo ra những ngộ nhận đáng tiếc.

Bài toán sau đây là một ví dụ minh họa :

Bài toán : Cho hypebol (H) : $y = x + \frac{1}{x}$.

Tìm hai điểm M, N trên hai nhánh phân biệt của (H) sao cho độ dài MN nhỏ nhất.



Nhiều học sinh sau khi vẽ (H) đã vội vàng khẳng định là giá trị nhỏ nhất của MN là khoảng cách giữa hai điểm cực trị $AB = 2\sqrt{5}$ với $A(1, 2)$; $B(-1, -2)$, sau đó cố gắng chứng minh bằng phương pháp hình học rằng A, B là hai điểm cần tìm.

Ta giải bằng phương pháp đại số :

Vì M, N là hai điểm thuộc hai nhánh phân biệt của (H) nên chúng có tọa độ

$$M\left(a; a + \frac{1}{a}\right); \quad \left(-b; -b - \frac{1}{b}\right) \text{ với } a, b > 0$$

(Xem tiếp trang 8)



ĐỀ RA KÌ NÀY

CÁC LỚP THCS

Bài T1/277. Tìm tất cả các bộ số nguyên (a, b, c, d) thỏa mãn đồng thời các điều kiện :

$$\begin{cases} a^3 + 3b = c^3 \\ b^3 + 3a = d^3 \end{cases}$$

NGUYỄN DUY LIÊN

(GV trường THPT chuyên Vĩnh Tường, Vĩnh Phúc)

Bài T2/277. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$20xy + 11xz + 2000yz$$

trong đó các số tự nhiên x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 2000$

NGUYỄN NGỌC KHOA

(GV trường THPT Huỳnh Thúc Kháng, Sơn Tịnh, Quảng Ngãi)

Bài T3/277. Giải phương trình :

$$\sqrt[5]{27} x^{10} - 5x^6 + \sqrt[5]{864} = 0$$

NGUYỄN HÀO LIÊU

(GV trường THPT Nguyễn Huệ, Thừa Thiên-Huế)

Bài T4/277. Gọi G là trọng tâm và I là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$. Chứng minh rằng nếu $\tan \frac{B}{2} \cdot \tan \frac{C}{2} = \frac{1}{3}$ thì IG song song với BC .

VI QUỐC DŨNG

(GV khoa Toán, ĐHSP Thái Nguyên)

Bài T5/277. Cho tam giác ABC . Đường tròn tâm O nội tiếp $\triangle ABC$ tiếp xúc với các cạnh AB, AC, BC lần lượt tại D, E, F . Đường tròn tâm Q bàng tiếp $\triangle ABC$ tiếp xúc với cạnh BC , tia AB , tia AC theo thứ tự tại K, H, I . Đường thẳng DE cắt các tia BO và CO lần lượt tại M và N . Đường thẳng HI cắt các tia BQ và CQ lần lượt tại R và S . Chứng minh rằng :

a) $\triangle FMN = \triangle KRS$

b) $\frac{IS}{AB} = \frac{SR}{BC} = \frac{RH}{CA}$

NGUYỄN HỐI

(GV trường THPT Kim Sơn A, Ninh Bình)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/277. Chứng minh rằng số 2000^{2000} là tổng của hai số chính phương.

PHẠM ĐÌNH TRƯỜNG

(SV K41 khoa Toán Tin, ĐHKHTN-ĐHQG Hà Nội)

Bài T7/277. Tìm tất cả các số hữu tỉ p, r, s thỏa mãn :

$$p \cos \frac{\pi}{7} + r \cos \frac{2\pi}{7} + s \cos \frac{3\pi}{7} = 1.$$

NGUYỄN ĐỨC HUY

(GV trường THPT Lê Quý Đôn, Long An)

Bài T8/277. Cho số thực x sao cho $0 < x < \pi$ và $\frac{x}{\pi}$ không là số hữu tỉ. Đặt $S_1 = \sin x$, $S_2 = \sin x + \sin 2x$, ..., $S_n = \sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx$. Gọi t_n là số các số hạng âm trong dãy S_1 ,

$$S_2, \dots, S_n. \text{ Chứng minh rằng : } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t_n}{n} = \frac{x}{2\pi}$$

ĐINH THÀNH TRUNG

(SV K41 khoa Toán Tin, ĐHKHTN-ĐHQG Hà Nội)

Bài T9/277. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm I và ngoại tiếp đường tròn tâm O . Đường thẳng qua I song song với một cạnh nào đó của tứ giác, cắt hai cạnh đối nhau ở hai điểm M, N . Chứng minh rằng độ dài MN không phụ thuộc vào việc chọn cạnh của tứ giác để kẻ đường thẳng song song với nó

NGUYỄN XUÂN HÙNG

(GV trường THPT Lam Sơn, Thanh Hóa)

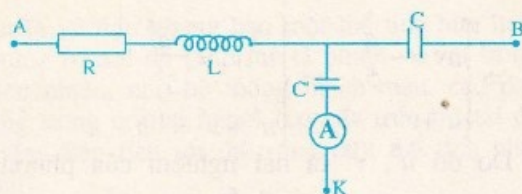
Bài T10/277. Cho tứ diện $ABCD$ nội tiếp một mặt cầu. Gọi G là trọng tâm của $ABCD$. Các đường thẳng AG, BG, CG, DG lần lượt cắt mặt cầu tại điểm thứ hai A_1, B_1, C_1, D_1 . Chứng minh rằng $V_{ABCD} \leq V_{A_1B_1C_1D_1}$. Đẳng thức xảy ra khi nào ?

NGUYỄN MINH PHƯƠNG

(SV BK84, K43, ĐH Bách Khoa Hà Nội)

CÁC ĐỀ VẬT LÝ

Bài L1/277. Cho mạch điện có sơ đồ như hình vẽ. Biết $Z_L = 100\Omega$; $Z_C = 200\Omega$; $Z_C = 200\Omega$; $R_A \approx 0$. Hai đầu AB của mạch được nối với hiệu điện thế xoay chiều $u = U\sqrt{2} \sin \omega t$ (V). Biết rằng khi nối K vào đầu A thì ampe kế chỉ $0,5$ (A) và qua tụ C có dòng điện $i = I\sqrt{2} \sin(\omega t + \frac{\pi}{3})$ (A). Hỏi khi chuyển K sang nối vào đầu B thì số chỉ của ampe kế có



còn là 0,5(A) nữa không ? Vẽ giản đồ vector chính xác khi K nối với A.

TRẦN VĂN MINH
(GV Hà Nội)

Bài L2/277. Trên mặt nước, chiết suất $n=4/3$, có một thước gỗ mỏng, được khắc vạch

đến mm. Một lăng kính thủy tinh hình lăng trụ đứng mà tiết diện thẳng là một tam giác ABC vuông tại A , $\hat{C} = 30^\circ$, mặt chứa AC được bôi đen. Đặt lăng kính lên thước sao cho cạnh qua B trùng vạch số 0, cạnh qua C trùng vạch số 40 và mặt đáy chứa BC của lăng kính chạm vào mặt nước. Đặt mắt trong không khí nhìn vào mặt chứa AB thì chỉ có thể nhìn được đến vạch số 31 của thước.

Hãy giải thích hiện tượng và tính chiết suất của thủy tinh.

TRẦN MẠNH HÙNG
(GV khối chuyên Toán Tin, ĐHSP Vinh, Nghệ An)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/277. Find all 4-uples of integers (a, b, c, d) satisfying simultaneously the following conditions :

$$\begin{cases} a^3 + 3b = c^3 \\ b^3 + 3a = d^3 \end{cases}$$

T2/277. Find the greatest value of the expression

$$20xy + 11xz + 2000yz$$

where x, y, z are natural numbers satisfying $x + y + z = 2000$

T3/277. Solve the equation :

$$\sqrt[5]{27} x^{10} - 5x^6 + \sqrt[5]{864} = 0$$

T4/277. Let G be the centroid and I be the incenter of triangle ABC . Prove that if

$$\tan \frac{B}{2} \cdot \tan \frac{C}{2} = \frac{1}{3} \text{ then } IG \text{ is parallel to } BC.$$

T5/277. Let be given a triangle ABC . Its incircle has center O and touches the sides AB, AC, BC respectively at D, E, F . Its escribed circle in the angle A has center Q and touches the side BC and the rays AB, AC respectively at K, H, I . The line DE cuts the rays BO and CO respectively at M and N . The line HI cuts the rays BQ and CQ respectively at R and S . Prove that :

$$\text{i) } \triangle FMN = \triangle KRS$$

$$\text{ii) } \frac{IS}{AB} = \frac{SR}{BC} = \frac{RH}{CA}$$

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/277. Prove that the number 2000^{2000} is the sum of two perfect squares.

T7/277. Find all rational numbers p, r, s satisfying

$$p \cos \frac{\pi}{7} + r \cos \frac{2\pi}{7} + s \cos \frac{3\pi}{7} = 1.$$

T8/277. Let be given a real number x such that $0 < x < \pi$ and $\frac{x}{\pi}$ is not a rational number.

Denote by : $S_1 = \sin x, S_2 = \sin x + \sin 2x, \dots, S_n = \sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx$.

Let t_n be the number of negative terms of the sequence $S_1, S_2, \dots, S_n$. Prove that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t_n}{n} = \frac{x}{2\pi}.$$

T9/277. A given quadrilateral $ABCD$ is inscribed in a circle with center I and is circumscribed about a circle with center O . A line passing through I , parallel to a side of $ABCD$, cuts its two opposite sides at M and N . Prove that the length of MN does not depend on the chosen side to which the line is parallel.

T10/277. Let G be the centroid of a tetrahedron $ABCD$ which is inscribed in a sphere. The lines AG, BG, CG, DG cut again the sphere respectively at A_1, B_1, C_1, D_1 . Prove that $V_{ABCD} \leq V_{A_1B_1C_1D_1}$. When does equality occur ?



Bài T1/273. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương a, b sao cho $\frac{a^2-2}{ab+2}$ là số nguyên.

Lời giải. (theo Nguyễn Tiến Dũng, 8², THCS Mỹ Hòa, Bến Tre).

Để thấy không có cặp số nguyên dương (a, b) nào mà $a = 1$ thỏa mãn đề bài. Do đó phải có $a \geq 2$.

Từ giả thiết suy ra

$$(a^2 - 2) : (ab + 2) \Rightarrow b(a^2 - 2) : (ab + 2)$$

$$\Rightarrow a(ab + 2) - 2(a + b) : (ab + 2)$$

$$\Rightarrow 2(a + b) : (ab + 2)$$

$$\Rightarrow 2(a + b) = k(ab + 2) \quad (k \in \mathbb{N}^*)$$

• Nếu $k = 1$, ta có :

$$2(a + b) = ab + 2 \Leftrightarrow (a - 2)(b - 2) = 2$$

Do $a - 2 \geq 0$ và $b - 2 \geq 0$ nên chỉ xảy ra

$$\begin{cases} a = 3 \\ b = 4 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a = 4 \\ b = 3 \end{cases}$$

Thử lại thấy chỉ có $a = 4$ và $b = 3$ là thỏa mãn đề bài.

• Nếu $k \geq 2$ ta có : $2(a + b) = k(ab + 2) \geq 2(ab + 2)$

$\Rightarrow a + b \geq ab + 2 \Rightarrow (a - 1)(b - 1) + 1 \leq 0$ điều này không xảy ra.

Vậy chỉ có cặp số $(a, b) = (4, 3)$ thỏa mãn đề bài.

Nhận xét. Rất nhiều bạn có lời giải đúng.

TỔNG NGUYỄN

Bài T2/273. Giải phương trình

$$5x^5 + 5ax^3 + a^2x + 5b = 0.$$

trong đó a, b là các số cho trước và $a \geq 0$.

Lời giải. Đặt $x = u + v$ thì $x^5 = (u + v)^5$

$$\Rightarrow x^5 = u^5 + v^5 + 5uv(u^3 + v^3) + 10u^2v^2(u + v)$$

$$\Rightarrow x^5 = u^5 + v^5 + 5uv[(u + v)^3 - 3uv(u + v)] + 10u^2v^2(u + v)$$

$$\Rightarrow x^5 = u^5 + v^5 + 5uvx^3 - 15u^2v^2x + 10u^2v^2x$$

$$\Rightarrow x^5 - 5uvx^3 + 5u^2v^2x - (u^5 + v^5) = 0$$

$$\text{Thử tìm } u, v \text{ thỏa mãn } \begin{cases} -5uv = a \\ -(u^5 + v^5) = b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} uv = -\frac{a}{5} \\ u^5 + v^5 = -b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^5 \cdot v^5 = \frac{-a^5}{5^5} \\ u^5 + v^5 = -b \end{cases}$$

Do đó u^5, v^5 là hai nghiệm của phương trình :

$$t^2 + bt - \left(\frac{a}{5}\right)^5 = 0$$

Ta có : $\Delta_t = b^2 + 4\left(\frac{a}{5}\right)^5 \geq 0$ vì $a \geq 0$ nên

$$\begin{aligned} t_{1,2} &= \frac{1}{2} \left(-b \pm \sqrt{b^2 + 4\left(\frac{a}{5}\right)^5} \right) \\ &= -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{5}\right)^5} \end{aligned}$$

Suy ra : $x = x_0 = u + v =$

$$= \sqrt[5]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{5}\right)^5}} + \sqrt[5]{-\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{5}\right)^5}}$$

là nghiệm của phương trình đã cho.

Ta chứng minh $x = x_0$ là nghiệm duy nhất.

Thật vậy, nếu $x > x_0$

$$\Rightarrow x^5 > x_0^5; x^3 > x_0^3; x > x_0$$

$$\Rightarrow 5x^5 + 5ax^3 + a^2x + 5b >$$

$$> 5x_0^5 + 5ax_0^3 + a^2x_0 + 5b = 0$$

Nếu $x < x_0$ thì các bất đẳng thức trên cùng đổi chiều nên cũng không thỏa mãn.

Tóm lại phương trình luôn có nghiệm duy nhất $x = x_0$.

Nhận xét. 1) Nhiều bạn đưa ngay ra biểu thức x_0 và chứng minh $x = x_0$ là nghiệm duy nhất. Lời giải trên đã trình bày cách tìm ra x_0 .

2) Một số bạn biện luận quá nhiều trường hợp và dẫn đến kết luận sai. Chẳng hạn : "Xét $a > 0$ và $b \neq 0$, viết phương trình về dạng:

$$x \cdot a^2 + 5x^3 \cdot a + 5x^5 + 5b = 0$$

Phương trình đối với ẩn a nếu có nghiệm a_1, a_2 thì $a_1 + a_2 = -5x^2 < 0$ ($x \neq 0$).

Điều này vô lý vì $a_1, a_2 > 0$. Từ đó kết luận $a > 0, b \neq 0$ thì phương trình vô nghiệm".

Các bạn đã sai lầm khi cho rằng $a_1 > 0, a_2 > 0$. Thưa ra a chỉ là nghiệm dương của phương trình ẩn a , phương trình ẩn a chỉ cần có ít nhất một nghiệm dương.

Có bạn còn tính x qua a, b và... x (?).

3) Các bạn có lời giải tốt là : **Phú Thọ:** Hoàng Ngọc Minh, 9C, THCS Việt Trì; **Hải Dương:** Nguyễn Thành Nam, Phạm Thành Trung, 9A, THPT Nguyễn Trãi, Tp Hải Dương.

LÊ THỐNG NHẤT

GIẢI BÀI KÌ TRƯỚC

Bài T3/273. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $x^2 + 3x + y^2 + 3y + \frac{9}{x^2+y^2+1}$ trong đó x, y là các số dương thỏa mãn $xy = 1$.

Lời giải. (của bạn Nguyễn Văn Thanh, 8A, THCS Lê Quý Đôn và nhiều bạn khác).

Đặt $A = x^2 + 3x + y^2 + 3y + \frac{9}{x^2+y^2+1}$. Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có :

$$\begin{aligned} A &= (x^2+y^2+1) + \frac{9}{x^2+y^2+1} + 3x + 3y - 1 \geq \\ &\geq 4 \sqrt{(x^2+y^2+1) \cdot \frac{9}{x^2+y^2+1}} + 3x + 3y - 1 \\ &= 4 \sqrt{9xy} - 1 = 12 - 1 = 11. \end{aligned}$$

Đẳng thức đạt được khi và chỉ khi

$$x^2 + y^2 + 1 = \frac{9}{x^2+y^2+1} = 3x = 3y \Leftrightarrow x = y = 1.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là 11, tương ứng với giá trị $x = y = 1$.

Nhận xét. Phần lớn các bạn giải đều đúng và ngắn gọn như trên, có một vài bạn quên không phát biểu giá trị nhỏ nhất của biểu thức.

VŨ ĐÌNH HÒA

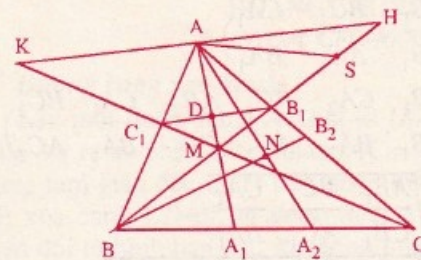
Bài T4/273. Cho tam giác ABC và hai điểm phân biệt M, N nằm bên trong nó. Các tia AM và AN cắt BC tại A_1 và A_2 tương ứng. Các tia BM và BN cắt CA tại B_1 và B_2 tương ứng. Các tia CM và CN cắt AB tại C_1 và C_2 tương ứng. Gọi D, E, F lần lượt là giao điểm của AA_1 và B_1C_1 , BB_1 và C_1A_1 , CC_1 và A_1B_1 . Gọi P, Q, R lần lượt là giao điểm của AA_2 và BB_1 , BB_2 và CC_1 , CC_2 và AA_1 . Chứng minh rằng :

$$a) \frac{AM}{MD} + \frac{BM}{ME} + \frac{CM}{MF} \geq 12$$

$$b) \frac{AP}{PA_2} + \frac{BQ}{QB_2} + \frac{CR}{RC_2} \geq 6.$$

Lời giải. a) Đường thẳng qua A song song với B_1C_1 cắt tia BB_1 tại H , cắt tia CC_1 tại K . Áp dụng định lý Talet ta có :

$$\begin{aligned} \frac{AM}{MD} &= \frac{MK}{MC_1} = \frac{KH}{B_1C_1} \\ &= \frac{KA}{B_1C_1} + \frac{AH}{B_1C_1} = \frac{AC}{CB_1} + \frac{AB}{BC_1} \end{aligned}$$



$$= 2 + \frac{AB_1}{CB_1} + \frac{AC_1}{BC_1} \quad (1)$$

$$\text{Tương tự ta có } \frac{BM}{ME} = 2 + \frac{BA_1}{CA_1} + \frac{BC_1}{AC_1} \quad (2)$$

$$\frac{CM}{MF} = 2 + \frac{CA_1}{BA_1} + \frac{CB_1}{AB_1} \quad (3)$$

Cộng theo từng vế (1) (2) (3) được

$$\begin{aligned} \frac{AM}{MD} + \frac{BM}{ME} + \frac{CM}{MF} &= 6 + \left(\frac{AB_1}{CB_1} + \frac{CB_1}{AB_1} \right) + \\ &+ \left(\frac{AC_1}{BC_1} + \frac{BC_1}{AC_1} \right) + \left(\frac{BA_1}{CA_1} + \frac{CA_1}{BA_1} \right) \geq 12 \text{ do áp dụng BĐT } \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2. \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi $\frac{AB_1}{CB_1} = \frac{CB_1}{AB_1}$,

$$\frac{AC_1}{BC_1} = \frac{BC_1}{AC_1}, \frac{BA_1}{CA_1} = \frac{CA_1}{BA_1}$$

$\Leftrightarrow AB_1 = CB_1, AC_1 = BC_1, BA_1 = CA_1 \Leftrightarrow M$ là trọng tâm ΔABC .

b) Đường thẳng qua A song song với BC cắt tia BB_1 tại S . Áp dụng định lý Talet ta có :

$$\begin{aligned} \frac{AP}{PA_2} &= \frac{AS}{BA_2} = \frac{AS}{BC} \cdot \frac{BC}{BA_2} = \frac{AB_1}{CB_1} \left(\frac{BA_2 + CA_2}{BA_2} \right) \\ &= \frac{AB_1}{CB_1} + \frac{AB_1}{CB_1} \cdot \frac{CA_2}{BA_2} \quad (4) \end{aligned}$$

Tương tự ta có :

$$\frac{BQ}{QB_2} = \frac{BC_1}{AC_1} + \frac{BC_1}{AC_1} \cdot \frac{AB_2}{CB_2} \quad (5)$$

$$\frac{CR}{RC_2} = \frac{CA_1}{BA_1} + \frac{CA_1}{BA_1} \cdot \frac{BC_2}{AC_2} \quad (6)$$

Cộng theo từng vế (4) (5) (6) được :

$$\frac{AP}{PA_2} + \frac{BQ}{QB_2} + \frac{CR}{RC_2} =$$

GIẢI BÀI KÌ TRƯỚC

$$\begin{aligned}
 &= \left(\frac{AB_1}{CB_1} + \frac{BC_1}{AC_1} + \frac{CA_1}{BA_1} \right) + \\
 &+ \left(\frac{AB_1}{CB_1} \cdot \frac{CA_2}{BA_2} + \frac{BC_1}{AC_1} \cdot \frac{AB_2}{CB_2} + \frac{CA_1}{BA_1} \cdot \frac{BC_2}{AC_2} \right) \geq \\
 &\geq 3 \sqrt[3]{\frac{AB_1}{CB_1} \cdot \frac{BC_1}{AC_1} \cdot \frac{CA_1}{BA_1}} + \\
 &+ 3 \sqrt[3]{\frac{AB_1 \cdot BC_1 \cdot CA_1}{CB_1 \cdot AC_1 \cdot BA_1} \cdot \frac{AB_2 \cdot BC_2 \cdot CA_2}{CB_2 \cdot AC_2 \cdot BA_2}} \quad (7)
 \end{aligned}$$

do áp dụng BĐT Côsi.

Ta thấy

$$\frac{AB_1}{CB_1} \cdot \frac{BC_1}{AC_1} \cdot \frac{CA_1}{BA_1} = \frac{S_{ABM}}{S_{CBM}} \cdot \frac{S_{CBM}}{S_{CAM}} \cdot \frac{S_{CAM}}{S_{ABM}} = 1 \quad (8)$$

$$\text{Tương tự } \frac{AB_2}{CB_2} \cdot \frac{BC_2}{AC_2} \cdot \frac{CA_2}{BA_2} = 1 \quad (9)$$

Thay thế (8), (9) vào (7) được

$$\frac{AP}{PA_2} + \frac{BQ}{QB_2} + \frac{CR}{RC_2} \geq 6.$$

Đẳng thức xảy ra khi $\frac{AB_1}{CB_1} = \frac{BC_1}{AC_1} = \frac{CA_1}{BA_1}$ và $\frac{AB_2}{CB_2} = \frac{BC_2}{AC_2} = \frac{CA_2}{BA_2}$ đồng thời có (8) (9) nên lúc đó M, N đều trùng với trọng tâm của ΔABC .

Nhận xét. 1) Một số bạn đã chứng minh $\frac{AM}{MA_1} \cdot \frac{BM}{MB_1} \cdot \frac{CM}{MC_1} \geq 8$ từ đó suy ra BĐT ở (a).

2) Câu (b) chính là trường hợp tổng quát của bài toán 4 do Jack Garfunkel nêu ra, đã đăng ở trang 8 THPT số 266 (8/1999). Nhiều bạn trước đây đã gửi lời giải bài toán này.

3) Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Yên Bái: Trần Bình Minh, 9K, THCS Lê Hồng Phong, thị xã Yên Bái; **Phú Thọ:** Phạm Minh Hoàng, 9A1, THCS Phong Châu, Phù Ninh, Hoàng Ngọc Minh, Bùi Quang Nha, Trần Thanh Hải, 9C, THCS Việt Trì; **Vĩnh Phúc:** Trần Quốc Hội, Trần Thu Phương, 8A, THCS Tự Lập, Mê Linh; **Bắc Ninh:** Đặng Thành Long, 9A, THCS Yên Phong; **Hà Nội:** Tô Thùy Linh, Vũ Quốc Mỹ, 9H, THCS Trưng Vương; **Nam Định:** Đỗ Thị Hải Yến, 9B, THCS Hải Hậu, Nguyễn Đăng Hợp, 8A2, THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên; **Nghe An:** Đậu Thị Ngọc Ánh, 9C, THCS thị trấn Nam Đàn, Quan Minh Vương, 9B, THCS Sông Hiếu, Thái Hòa, Nghĩa Đàn, Võ Văn Thanh, 9B, THCS Đặng Thai Mai, Vinh; **Thừa Thiên - Huế:** Đặng Đình Chính, 9A, THCS Phú Bài, Hương Thủy; **Quảng Ngãi:** Nguyễn

Duy Thành, Phạm Lê Thịnh, 9A, THCS Huỳnh Thúc Kháng, Nghĩa Hành; **Khánh Hòa:** Nguyễn Tiến Việt, 8B, Trần Minh Bình, 9/15, THCS Thái Nguyên, Nha Trang; **Đồng Tháp:** Nguyễn Công Thắng, 9A1, THCS thị xã Cao Lãnh.

VIỆT HẢI

Bài T5/273. Trên mặt phẳng cho hai điểm cố định M, N và tam giác ABC có $BC < MN$ và $\angle BAC < 90^\circ$. Cho tam giác ABC chuyển động trượt trên mặt phẳng sao cho độ dài ba cạnh AB, BC, CA không đổi, đường thẳng AB đi qua M và đường thẳng AC đi qua N . Chứng minh rằng đường thẳng BC luôn luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định.

Lời giải. Từ giả thiết ta có 4 trường hợp xảy ra:

$$M \in Ax, N \in Ay \quad (1)$$

$$M \in Ax', N \in Ay' \quad (2)$$

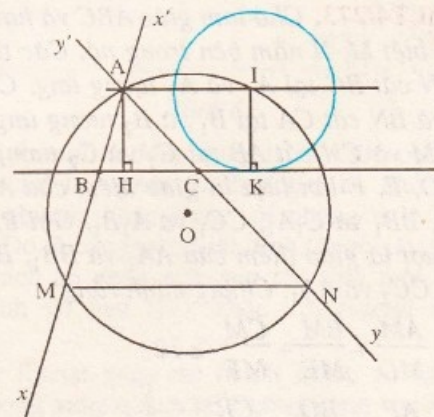
$$M \in Ax', N \in Ay \quad (3)$$

$$M \in Ax, N \in Ay' \quad (4)$$

Trong 2 trường hợp (1) và (2) do $\angle BAC = \alpha$ không đổi và M, N cố định nên đỉnh A chạy trên cung chứa góc α vẽ trên đoạn MN .

Trong 2 trường hợp (3) và (4) đỉnh A chạy trên cung chứa góc $180^\circ - \alpha$ vẽ trên đoạn MN và khác phía với cung chứa góc nói trên.

Vậy A chạy trên đường tròn (O) cố định

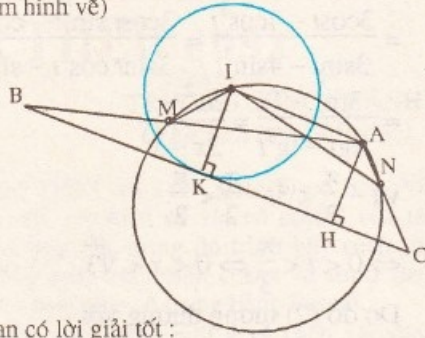


Ta chỉ cần xét 1 trường hợp đầu, các trường hợp còn lại lập luận tương tự. Từ A kẻ đường thẳng song song với BC cắt đường tròn (O) tại I . Kẻ đường cao AH của ΔABC . Từ I kẻ $IK \perp BC$. Vì $\angle IAN$ bằng hoặc bù với $\angle ACB$ không đổi và N cố định nên I cố định và $IK = AH = h$ không đổi. Vậy BC tiếp xúc với đường tròn cố định tâm I bán kính h .

GIẢI BÀI KÌ TRƯỚC

Nhận xét. 1. Ít bạn giải được bài này.

2. Điều kiện $BC < MN$ và $\angle BAC < 90^\circ$ là không cần thiết (xem hình vẽ)



3. Các bạn có lời giải tốt:

Bắc Ninh: Nguyễn Thị Ngọc Thu, 9A, THCS Thuận Thành; **Hà Nội:** Đặng Quang Khải, 9A1, PTDL Lương Thế Vinh, Tô Thùy Linh, 9H, THCS Trưng Vương; **Bình Thuận:** Phạm Thế Nghĩa, 9₁ THCS Trần Hưng Đạo; **Đồng Nai:** Phạm Văn Thắng, 9³, THCS Nguyễn Bình Khiêm, Biên Hòa.

VŨ KIM THÙY

Bài T6/273. Chứng minh rằng với mỗi số tự nhiên $n > 0$ đều tồn tại số tự nhiên k sao cho số $k.5^n = \overline{a_m a_{m-1} \dots a_1}$ viết trong hệ thập phân thỏa mãn điều kiện: a_i và i có cùng tính chất chẵn lẻ với mọi $i = 1, 2, \dots, m$

Lời giải. (của bạn Va Ngọc Minh, 10A1, ĐHSP Hà Nội).

Xét tập hợp các số có n chữ số $\overline{a_n \dots a_1}$ trong đó $a_i \equiv i \pmod{2}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) (a_n có thể bằng 0).

Vì rằng với mỗi i chẵn thì $a_i \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$ và với mỗi i lẻ thì $a_i \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$ nên tập hợp này có 5^n số. Ta chứng minh rằng 5^n số như vậy tạo thành hệ thặng dư đầy đủ $(\text{mod } 5^n)$ (*)

Thật vậy giả sử $\overline{a_n \dots a_1} \equiv \overline{b_n \dots b_1} \pmod{5^n}$ hay

$$10^{n-1}a_n + 10^{n-2}a_{n-1} + \dots + 10a_2 + a_1 \equiv$$

$$10^{n-1}b_n + \dots + 10b_2 + b_1 \pmod{5^n}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n 10^{i-1} (a_i - b_i) \equiv 0 \pmod{5^n}$$

$$\Rightarrow a_1 - b_1 \equiv 0 \pmod{5} \text{ mà } a_1 - b_1 \equiv 0 \pmod{2}$$

nên $a_1 \equiv b_1 \pmod{10}$

$\Rightarrow a_1 = b_1$. Giả sử $a_1 = b_1, \dots, a_k = b_k$ ($k \leq n-1$). Ta chứng minh $a_{k+1} = b_{k+1}$.

Thật vậy ta có

$$10^{n-1}(a_n - b_n) + \dots + 10^k(a_{k+1} - b_{k+1}) \equiv 0 \pmod{5^n}$$

$$\Rightarrow 10^k(a_{k+1} - b_{k+1}) \equiv 0 \pmod{5^{k+1}}$$

$$\Rightarrow a_{k+1} - b_{k+1} \equiv 0 \pmod{5} \text{ mà } a_{k+1} - b_{k+1} \equiv 0$$

$$\pmod{2} \text{ nên } a_{k+1} \equiv b_{k+1} \pmod{10} \Rightarrow a_{k+1} = b_{k+1}$$

Khẳng định (*) được chứng minh.

Thành thử tồn tại một số dạng $\overline{a_n \dots a_1}$ với $a_i \equiv i \pmod{2}$ (a_n có thể bằng 0) sao cho $a_n \dots a_1 : 5^n$ hay $a_n \dots a_1 = k.5^n$ (nếu n chẵn và $a_n = 0$ thì ta thay bằng số $a_{n-1} \dots a_1$).

Nhận xét: Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Tô Minh Hoàng, 11T, PTNK Hải Dương; Nguyễn Trung Kiên, 10, Hàn Thế Anh, 11A1, ĐHSP Hà Nội, Nguyễn Hoàng Thạch, 10, Hà Nội -Amsterdam, Tô Thùy Linh, 9H, THCS Trưng Vương, Hà Nội; Nguyễn Phương Lê, 10A, ĐHSP Vinh, Nghệ An; Nguyễn Dư Thái, 11CT, ĐHKH Huế, Thừa Thiên - Huế; Phạm Thế Nghĩa, 9, Bình Thuận; Lê Mạnh Toàn, 10 Toán, Hạ Long, Quảng Ninh; Hoàng Thanh Lâm, PTNK, ĐHQG Tp Hồ Chí Minh; Đặng Quang Huy, 10A1, THPT Lê Quý Đôn, Đà Nẵng; Nguyễn Ngọc Hùng, PTNK Hàn Thuyên, Bắc Ninh; Cao Việt Dũng, 10A chuyên Vinh Phúc;

Nhiều bạn giải bài toán trên bằng phương pháp quy nạp theo n

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T7/273. Xác định hàm số $f(x)$ liên tục $\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ thỏa mãn:

$$1) f(2x) = 2f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

$$2) f(f^2(x)) = xf(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

$$3) f(x) \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in \mathbb{N}^*.$$

Lời giải. (của đa số các bạn).

Ta chứng minh $f(x)$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}^+$.

Từ $f(x_1) = f(x_2) > 0$, suy ra $f(f^2(x_1)) = f(f^2(x_2)) \Rightarrow x_1 f(x_1) = x_2 f(x_2)$. Do vậy $x_1 = x_2$. Suy ra $f(x)$ là đơn ánh và liên tục nên nó là hàm đơn điệu thực sự. Mặt khác, theo giả thiết thì $f(2) = 2f(1) > f(1)$ nên $f(x)$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}^+$.

Với $x = 1$ thì $f(f^2(1)) = f(1)$ nên $f^2(1) = 1$ và $f(1) = 1$. Từ đó theo quy nạp ta có

$$2^n = f(2^n) < f(2^n + 1) < \dots < f(2^{n+1}) = 2^{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Do $f(n) \in \mathbb{N}^* \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$, suy ra $f(n) = n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$. Với mọi $m, n \in \mathbb{N}^*$, bằng quy nạp ta có

$$m = f(m) = 2^n f\left(\frac{m}{2^n}\right).$$

GIẢI BÀI KÌ TRƯỚC

Suy ra $f\left(\frac{m}{2^n}\right) = \frac{m}{2^n}$ với mọi m, n nguyên dương. Vì rằng với mỗi $x > 0$ tùy ý cho trước đều tồn tại dãy số $\{q_k\}$, q_k có dạng $\frac{m}{2^n}$ hội tụ đến x và do $f(x)$ liên tục, nên

$$x = \lim_{k \rightarrow \infty} q_k = \lim_{k \rightarrow \infty} f(q_k) = f(\lim_{k \rightarrow \infty} q_k) = f(x).$$

Thử lại, ta thấy hàm số $f(x) = x$ thỏa mãn mọi điều kiện của bài ra.

Nhận xét. Đa số các bạn đều xác định đúng đáp số, nhưng chứng minh không chặt chẽ.

Các bạn sau đây có lời giải tốt.

Lê Tất Thắng, 11A chuyên Toán, ĐHS Vinh, **Đình Thanh Thường**, 11A, THPT Hermann Gmeiner, **Nghệ An**; **Ngô Xuân Bách**, 10T, **Chu Ngọc Hưng**, chuyên 10T, THPT Nguyễn Trãi, **Hải Dương**; **Phan Lạc Linh**, 11T, chuyên Nguyễn Huệ, **Hà Tây**; **Hàn Thế Anh**, **Vũ Ngọc Minh**, 10A, ĐHS Hà Nội, **Nguyễn Hoàng Thanh**, 10T, Amsterdam, **Nguyễn Tuấn Dương**, 10T, **Hoàng Tùng**, 12T, chuyên Toán, ĐHKHTN-ĐHQG Hà Nội; **Trần Việt Anh**, 11T, chuyên Lê Quý Đôn, **Lê Anh Tuấn**, 11T, chuyên tỉnh **Quảng Trị**; **Đặng Tuấn Hiệp**, 11C3, THPT Hùng Vương, Pleiku; **Nguyễn Việt Hải**, 10T, **Đình Hữu Tiếp**, 11T chuyên Lương Văn Tụy, **Ninh Bình**; **Đỗ Thu Hà**, 12T, **Hoàng Văn Thu**, **Hòa Bình**; **Thiều Quang Tùng**, 11AC, THPT Trần Hưng Đạo, **Phan Thiết**; **Hoàng Thanh Lâm**, 12T, **Lương Thế Nhân**, 11T, chuyên Toán ĐHQG Tp Hồ Chí Minh. **Nguyễn Xuân Trường**, **Nguyễn Văn Giáp**, 10A THPT chuyên **Vĩnh Phúc**; **Nguyễn Hữu Hiếu**, 11F, THPT Đức Hợp, **Hưng Yên**; **Tạ Đức Phương**, 11B, chuyên **Tuyên Quang**; **Vũ Đức Nghĩa**, 11T, THPT chuyên **Lam Sơn**, **Thanh Hóa**; **Lưu Quang Tuấn**, 11T, chuyên tỉnh **Quảng Bình**; **Nguyễn Du Thái**, 11CT, ĐHKH Huế; **Nguyễn Văn Thắng**, 11T, chuyên **Thái Nguyên**.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T8/273. Giải phương trình

$$3 \arctg x - \arctg 3x = \frac{\pi}{2}.$$

Lời giải. Phương trình đã cho tương đương với phương trình

$$\arctg 3x = 3 \arctg x - \frac{\pi}{2} \quad (1)$$

Đặt $t = \arctg x$. Phương trình tương đương với

$$\begin{cases} -\frac{\pi}{2} < 3t - \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} \\ 3x = \tg\left(3t - \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Chú ý: } \tg\left(3t - \frac{\pi}{2}\right) &= -\cotg 3t = -\frac{\cos 3t}{\sin 3t} = \\ &= \frac{3\cos t - 4\cos^3 t}{3\sin t - 4\sin^3 t} = \frac{3\cos t \cdot \sin^2 t - \cos^3 t}{3\sin t \cdot \cos^2 t - \sin^3 t} = \\ &= \frac{3\lg^2 - 1}{3\lg t - \lg^3 t} = \frac{3x^2 - 1}{3x - x^3} \\ \text{và } -\frac{\pi}{2} < 3t - \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 0 < t < \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow 0 < x < \sqrt{3}.$$

Do đó (2) tương đương với

$$\begin{cases} 0 < x < \sqrt{3} \\ 3x = \frac{3x^2 - 1}{3x - x^3} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < \sqrt{3} \\ 3x^4 - 6x^2 - 1 = 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3+2\sqrt{3}}}{3} = \frac{\sqrt{9+6\sqrt{3}}}{3}.$$

Nhận xét. 1. Tòa soạn nhận được lời giải của 165 bạn. Nhưng do không chú ý điều kiện $0 < x < \sqrt{3}$ nên khoảng một nửa các bạn tính cả nghiệm $x = \frac{-\sqrt{9+6\sqrt{3}}}{3}$

2. Các bạn sau có lời giải tốt:

Yên Bái: **Nguyễn Việt Hằng**, 11A1, THPT chuyên; **Phú Thọ:** **Hoàng Ngọc Minh**, 9C, THCS Việt Trì; **Vĩnh Phúc:** **Vũ Nhật Huy**, 9A, THCS Vĩnh Tường; **Nghệ An:** **Lê Hồng Nhật**, 11Q, THPT Lê Viết Thuật, **Đình Thanh Thường**, 11A, THPT Hermann Gmeiner; **Hà Tĩnh:** **Lê Tất Thắng**, 11A, ĐHS Vinh; **Quảng Trị:** **Trần Việt Anh**, 11T, trường chuyên Lê Quý Đôn; **Đà Nẵng:** **Nguyễn Đăng Sang**, 11B1, THPT chuyên; **Tp Hồ Chí Minh:** **Nguyễn Phú Sỹ**, 11A2 - THPT Lê Hồng Phong; **Quảng Nam:** **Phan Nguyễn Như**, 11/7, THPT Trần Cao Vân; **Lâm Đồng:** **Phan Thị Thanh Vân**, 11, THPT chuyên; **Tiền Giang:** **Cao Trần Giang**, 10, THPT chuyên.

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T9/273. Cho đường tròn (O, R) và một điểm P nằm trong đường tròn. Hai cạnh Px và Py của góc vuông xPy cắt đường tròn ở A và B , các tiếp tuyến của đường tròn tại A và B cắt nhau ở điểm M . Tìm quỹ tích của điểm M khi góc vuông xPy quay quanh P .

Lời giải. Gọi N là giao điểm của OM và AB , thế thì N là trung điểm của AB và OM vuông góc với AB ở N . Trong tam giác AOM vuông ở A , ta có hệ thức:

$$OM \cdot ON = OA^2 = R^2 \text{ (không đổi)} \quad (1)$$

Từ (1) suy ra: M là ảnh của N trong phép nghịch đảo cực O đối với đường tròn (O, R) đã

<https://tieulun.hopto.org>

GIẢI BÀI KÌ TRƯỚC

4) Các bạn sau đây có lời giải tương đối tốt : Hà Nội: Nguyễn Tuấn Thiện, 12A, PTCT-DHSP Hà Nội; Vĩnh Phúc: Nguyễn Trung Lập, 12A, THPT chuyên Vĩnh Phúc; Phú Thọ: Bùi Thanh Hà, 10A1, THPT chuyên Hùng Vương; Nghệ An: Lê Bá Dũng, 10CT, DHSP Vinh; Tp Hồ Chí Minh: Lương Thế Nhân, 11T, PTNK ĐHQG Tp Hồ Chí Minh

NGUYỄN ĐĂNG PHÁT

Bài T10/273. Cho hình trụ T_1 . Ta gọi hình trụ T_2 là nội tiếp ngang T_1 nếu mỗi đáy của T_1 chứa đúng một đường sinh của T_2 và mặt xung quanh của T_1 chứa bốn điểm của đường tròn đáy của T_2 . Hình trụ T_1 phải thỏa mãn điều kiện gì để có vô hạn hình trụ $T_1, T_2, \dots, T_n, \dots$ mà mỗi hình trụ đứng sau nội tiếp ngang hình trụ đứng trước.

Lời giải. Gọi d_n, h_n tương ứng là đường kính đáy và đường sinh của hình trụ T_n . Dễ thấy :

$$d_{n+1} = h_n, h_{n+1}^2 = d_n^2 - d_{n+1}^2$$

$$(h. 1). \text{ Suy ra : } h_{n+1}^2 = d_n^2 - h_n^2$$

Vậy với mỗi n tồn tại hình trụ T_{n+1} nội tiếp ngang hình trụ $T_n \Leftrightarrow d_n^2 - h_n^2 > 0$

$$\Leftrightarrow \frac{d_n^2}{h_n^2} > 1 \quad (1)$$

Xét dãy (a_n) trong đó $a_n = \frac{d_n^2}{h_n^2}$.

$$\text{Ta thấy : } \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{h_{n+1}^2}{d_{n+1}^2} = \frac{d_n^2 - h_n^2}{h_n^2} = a_n - 1$$

$$\Rightarrow a_n = 1 + \frac{1}{a_{n+1}} \text{ với mọi } n$$

Vì hàm số $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$ trên $(0, +\infty)$

là hàm giảm nên :

$$a_n > 1 \Leftrightarrow f(a_n) < f(1) \Leftrightarrow a_{n-1} < f(1)$$

$$\Leftrightarrow f(a_{n-1}) > f(f(1)) \Leftrightarrow a_{n-2} > f(f(1)) \dots (*)$$

Đặt $b_1 = 1, b_2 = f(1), b_3 = f(f(1)), \dots$

Từ (*) suy ra :

$$\text{Nếu } n \text{ lẻ thì : } a_n > 1 \Leftrightarrow a_1 > b_n$$

$$\text{Nếu } n \text{ chẵn thì : } a_n > 1 \Leftrightarrow a_1 < b_n$$

Vậy : $a_n > 1 (\forall n) \Leftrightarrow b_{2n+1} < a_1 < b_{2m} (\forall m, n \in \mathbb{N})$.

Xét hàm số : $g(x) = f(f(x)) = 2 - \frac{1}{x+1}$ trên $(0, +\infty)$. Dễ thấy $g(x)$ là hàm tăng. Vì $b_1 = 1 < \frac{3}{2} = b_3 \Rightarrow b_5 = g(b_3) > g(b_1) = b_3 \dots$ nên $b_1, b_3, b_5, \dots$ là dãy tăng.

Tương tự như vậy $b_2, b_4, b_6, \dots$ là dãy giảm.

Ta thấy khi n tăng vô hạn thì dãy (b_n) hội tụ về $b = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Thật vậy, vì $b = f(b)$ và $b_n > 1 (\forall n)$ nên ta có :

$$|b - b_n| = |f(b) - f(b_{n-1})| = \left| \frac{1}{b} - \frac{1}{b_{n-1}} \right| = \frac{|b - b_{n-1}|}{bb_{n-1}} < \frac{|b - b_{n-1}|}{b} < \dots < \frac{|b - b_1|}{b^{n-1}}$$

mà dãy số này dẫn tới 0 khi $n \rightarrow \infty$

Vậy : $b_{2n+1} < a_1 < b_{2m} (\forall m, n \in \mathbb{N})$

$$\Leftrightarrow a_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad (3)$$

Từ (1); (2); (3) ta có kết luận : T_1 thỏa mãn

$$\text{điều kiện đề bài} \Leftrightarrow \frac{d_1}{h_1} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

Nhận xét. 1) Bài này có 42 bạn tham gia giải, 6 bạn giải sai. Nói chung các bạn trình bày không thật sáng sủa.

2) Các bạn sau đây có lời giải tương đối tốt : Hải Dương: Ngô Xuân Bách, 10T, THPT Nguyễn Trãi; Hà Nội: Nguyễn Hoài Anh, 10T, THPT Hà Nội - Amsterdam; Nguyễn Tuấn Thiện, 12A, Nguyễn Tuấn Dương, 10A, PTCT-Tin, ĐHKHTN-ĐHQG, Hà Tĩnh: Nguyễn Thừa Thắng, 11T, THPT NK Hà Tĩnh;

NGUYỄN MINH HÀ

Bài L1/273. Cho mạch điện như hình vẽ : $E = 60V; r = 1\Omega; R_1 = 2\Omega; R_2 = 6\Omega$. Có 8 bóng đèn : $\text{Đ}_1: 10V-10W; \text{Đ}_2: 10V-10W; \text{Đ}_3: 10V-11W; \text{Đ}_4: 10V-12W; \text{Đ}_5: 8V-5W; \text{Đ}_6: 8V-10W; \text{Đ}_7: 7V-7W; \text{Đ}_8: 7V-8W$.

Hãy mắc các bóng đèn trên dây cùng với các điện trở phụ thành một bộ điện trở và mắc bộ điện trở đó vào hai điểm A, B của mạch sao cho thỏa mãn hai điều kiện sau :

1) Các đèn sáng bình thường;

2) Tiết kiệm nhất.

Tính giá trị các điện trở phụ đó.



Hỏi: Trong SGK Hình học 8 có viết : "Hình vuông là hình chữ nhật có hai cạnh kề bằng nhau. Từ định nghĩa, suy ra : Hình vuông có bốn cạnh bằng nhau và bốn góc vuông. Điều suy ra đó, có phải là định nghĩa không?"

BÀNH THỊ THÀNH

(Xóm 2, Gia An Đông, Hoài Nhơn, Bình Định)

Đáp: Điều suy ra chỉ là tính chất của hình vuông. Bạn lưu ý : khi định nghĩa không nêu ra "thừa" điều kiện, có nghĩa là chỉ cần hai cạnh liên tiếp bằng nhau là đủ.

Hỏi: Trong dịp hè, nếu gửi bài cho tạp chí thì em ghi địa chỉ nào? Sang năm em lên lớp 10 thì có được giải các bài dành cho THCS nữa không?

TRẦN KIM CHUNG

(9A, THCS Thường Tín, Hà Tây)

Đáp: Dù trong dịp nào, các em cũng nên ghi thêm địa chỉ gia đình. Cuộc thi giải toán hằng năm trên tạp chí là tính theo năm học, nếu em gửi lời giải thì cần ghi cả địa chỉ lớp, trường cũ của em. Khi em lên lớp 10 thì em vẫn có quyền giải các bài dành cho THCS nhưng... không nên gửi về Tòa soạn.

Hỏi: Dựa vào định lý Dirichle : "Có vô số số nguyên tố có dạng $ax + b$ với a, b nguyên tố cùng nhau", em chứng minh được "Tập hợp các số nguyên tố dạng $x^2 + 1$ là vô hạn" như sau :

Từ định lý Dirichle ta chọn $a=x, b=1$ thì a và b nguyên tố cùng nhau, khi đó tập hợp số nguyên tố dạng $ax+b = x^2+1$ là vô hạn.

Em chứng minh như vậy có được không?

ĐẶNG DUY ANH DÂN

(11A1, THPT Đồng Quan, Phú Xuyên, Hà Tây)

Đáp: Em nên hiểu định lý Dirichle rõ hơn : Với a, b là hai số nguyên tố cùng nhau cho trước thì chọn được vô số giá trị của x để $ax+b$ là số nguyên tố, chẳng hạn các số nguyên tố có dạng $4x+3; 2x+1$ là vô hạn. Vì vậy, khi em chọn $a=x; b=1$ thì sẽ có vô số các số nguyên tố dạng $xy+1$ với biến y nhưng khi $y = x$ chắc gì x^2+1 đã là số nguyên tố? Phép chứng minh của em là sai.

Hỏi: Khi cháu làm 2 bài toán : "Với $a_1, a_2, a_3 > 0$ và $a_1 + a_2 + a_3 = 1$. Chứng minh :

$$\left(1 + \frac{1}{a_1}\right)\left(1 + \frac{1}{a_2}\right)\left(1 + \frac{1}{a_3}\right) \geq 64$$

$$\left(2 + \frac{1}{a_1}\right)\left(2 + \frac{1}{a_2}\right)\left(2 + \frac{1}{a_3}\right) \geq 125$$

cháu tình cờ phát hiện và chứng minh được :

"Nếu $\alpha \in \mathbb{N}^*, a_1, a_2, \dots, a_n > 0$

và $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$ thì

$$\left(\alpha + \frac{1}{a_1}\right)\left(\alpha + \frac{1}{a_2}\right) \dots \left(\alpha + \frac{1}{a_n}\right) \geq (\alpha + n)^n$$

Vậy bất đẳng thức này đã có ở đâu chưa và nếu có thì tên của bất đẳng thức này là gì?

DƯƠNG VĂN GIÁP

(lớp 10A, THPT Krông Buk, ĐakLak)

Đáp: Từ các bài toán cụ thể, cháu đã biết khái quát phép chứng minh để đi tới bất đẳng thức tổng quát. Đó là một cách rèn luyện phong cách học tập rất tốt. Bất đẳng thức mà cháu phát hiện và chứng minh là hoàn toàn đúng. Cháu cứ coi là bất đẳng thức này là do cháu nghĩ ra và cháu cứ tự đặt tên. Chỉ có điều cháu nên biết : có biết bao bất đẳng thức ở trên đời này mà chẳng có tên? Những bất đẳng thức mà cháu biết tên phải là những bất đẳng thức có ứng dụng mạnh trong toán học. Chúc cháu thành công và xin giới thiệu cùng bạn đọc.

Hỏi: Chúng em làm mãi mà không được bài toán sau : "Chứng minh rằng với mọi giá trị của x thì $2^{|\sin x|} + 2^{|\cos x|} \geq 3$ ". Kính mong THPT cứu giúp.

NGUYỄN TRỌNG TRƯỜNG

(12C, THPT Hiệp Hòa 2, Bắc Giang)

Đáp: Các bạn có thể đặt $u = |\cos x|$ thì $u \in [0; 1]$ và từ đó xét hàm số $f(u) = 2^u + 2^{\sqrt{1-u^2}}$ với $u \in [0; 1]$. Các bạn dùng đạo hàm sẽ nhận

$$\text{được } f'(u) = 0 \Leftrightarrow u = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$f'(u) > 0 \text{ với } u \in \left(0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ và } f'(u) < 0 \text{ với}$$

$$u \in \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right).$$

Từ đó sẽ có $f(u) \geq f(0) = f(1) = 3$.

N.T.L

Ý KIẾN BẠN ĐỌC - ĐỌC Ý KIẾN ... BẠN !

NGUYỄN ĐỨC TẤN
(Tp Hồ Chí Minh)

Trong bài "Hình học hóa nội dung và cách giải một số bài toán Đại số" (tạp chí THPT số 202 (4/1994) có bài toán. "Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{x^2 - \sqrt{3}x + 1}$ ". Tác giả cho đáp số $y = 2$ và đến bài "Ý kiến bạn đọc" (Tạp chí THPT số 225 (3/1995)), nhóm học sinh 10A trường PTTH Nguyễn Trãi, quận Ba Đình, Hà Nội đã giải hoàn chỉnh bài toán và cho kết quả giá trị nhỏ nhất của hàm số y là $(\sqrt{3}+1)(\sqrt{2}-\sqrt{3})$. Thực ra kết quả này được thu gọn là $\sqrt{2}$. Như vậy giữa 2 và $\sqrt{2}$ chỉ là sự nhầm lẫn trong in ấn hoặc ghi chép. Hơn nữa lời giải bài toán các bạn đưa ra hơi dài và phức tạp. Tôi xin đề xuất lời giải ngắn gọn hơn như sau :

Trên mặt phẳng tọa độ xét các điểm $M(x; 0)$;
 $A\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $B\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Dễ thấy A, B cố định nằm khác phía nhau đối với trục hoành, M chạy trên trục hoành.

Ta có : $MA + MB \geq AB$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(0 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \\ &\quad + \sqrt{\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(0 + \frac{1}{2}\right)^2} \\ &\geq \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right)^2} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{x^2 - \sqrt{3}x + 1} \geq \sqrt{2} \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow M$ là giao điểm của đoạn thẳng AB và trục hoành.

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số y là $\sqrt{2}$.

Từ lời giải trên cho ta lời giải bài toán tổng quát :

Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số
 $y = \sqrt{(x-a)^2 + b^2} + \sqrt{(x-c)^2 + d^2}$ trong đó a, b, c, d là hằng số. Xét các điểm $M(x; 0)$, $A(a; |b|)$, $B(c; -|d|)$.

Dễ thấy A, B cố định nằm khác phía đối với trục hoành, M chạy trên trục hoành.

Ta có $MA + MB \geq AB$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \sqrt{(x-a)^2 + (0-|b|)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (0+|d|)^2} \\ &\geq \sqrt{(a-c)^2 + (|b|+|d|)^2} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(x-a)^2 + b^2} + \sqrt{(x-c)^2 + d^2} \\ &\geq \sqrt{(a-c)^2 + (|b|+|d|)^2} \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow M$ là giao điểm của đoạn thẳng AB và trục hoành.

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số y là $\sqrt{(a-c)^2 + (|b|+|d|)^2}$.

Các bạn đọc có đồng ý với ý kiến của tôi không ?

LTS: Chắc các bạn đều đồng ý với ý kiến của tác giả. Khi giải bài toán loại này, tác giả đã "khôn" hơn các bạn học sinh 10A, trường THPT Nguyễn Trãi khi chọn A và B khác phía trục hoành để khỏi thực hiện phép đối xứng trục và tiếp tục tổng quát hóa bài toán. Chúng ta sẽ cùng đi tiếp nữa để tìm lời giải cho bài toán sau đây :

"Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số
 $y = \sqrt{(x-a)^2 + b^2} + \sqrt{(x-c)^2 + d^2}$
với $x \in [\alpha; \beta]$."

Trước hết các bạn thử tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số

$$y = \sqrt{\cos^2 x - 2\cos x + 10} + \sqrt{\cos^2 x + 6\cos x + 10}$$

Mong nhận được nhiều ý kiến trao đổi.

THTT

Đón đọc TH&TT số 278

Tạp chí tháng 8/2000 sẽ đưa tới các bạn :

- ☆ Giới thiệu các cuộc thi bằng gửi thư của các nước
- ☆ Giải đáp các bài toán khó trong các đề thi tuyển sinh Đại học năm 2000.
- ☆ Kết quả kì thi IMO 41 của Đội tuyển học sinh Việt Nam
- ☆ 7 bài toán với giải thưởng 1 triệu USD cho mỗi bài.
- ☆ Những chuyên mục thường xuyên với nhiều thông tin bổ ích. Ai sẽ được nhận quà sinh nhật của Câu lạc bộ gặp nhau qua ngày sinh ?

Các bạn hãy nhớ đặt mua tạp chí tại các đại lí hoặc các cơ sở Bưu điện gần nhất.

THTT



GẶP NHAU QUA NGÀY SINH

May mắn lớn nhất vừa qua trên sân cỏ là may mắn dành cho đội Pháp : đương kim vô địch thế giới lại giành luôn vô địch châu Âu, còn món quà may mắn của Câu lạc bộ lần này xin gửi tới các bạn sinh ngày 10 tháng 8 :

- 1) Nguyễn Thị Thúy Hằng, xóm Kho, Nguyễn Xá, Minh Khai, Từ Liêm, Hà Nội.
- 2) Lê Khắc Phú, xóm Nam, Cổ Hiền, Hiền Ninh, Quảng Ninh, Quảng Bình.
- 3) Nguyễn Tiến Sơn, sinh năm 1983, lớp 10A1, THPT Chư Sê, Chư Sê, Gia Lai.
- 4) Hoàng Trung Nghĩa, sinh năm 1982, lớp 11 Toán 1, THPT chuyên Lương Thế Vinh, Đồng Nai.
- 5) Phạm Văn Hưng, sinh năm 1983, tổ 33, phường Nguyễn Thái Học, thị xã Yên Bái, Yên Bái.

(Hai bạn Hằng, Phú báo gặp năm sinh cho CLB).

Các bạn thích ngày sinh 10 tháng 8 cũng nhận được quà của Câu lạc bộ là :

- 1) Lê Thị Hải Châu, 8A, PTTH KBang, Gia Lai.
- 2) Võ Quang Phúc (hay Trúc ? Chữ bạn viết bay bướm không nhận rõ là P thay T), hẻm 240, Trương Quang Trang, thị xã Quảng Ngãi, Quảng Ngãi.
- 3) Phạm Tuấn, Hòa Lạc, Thạch Thất, Hà Tây.
- 4) Nguyễn Thị Thu Hiền, 10A1, THPT chuyên Hùng Vương, Phú Thọ.

Hiện nay C.L.B vẫn tiếp tục nhận thẻ hội viên (có in trên tạp chí số 271 và 272).

Một tháng nữa ... ai sẽ lại may mắn ? Các bạn hãy chờ nhé !

C.L.B

Kết quả :

TIÊU CHUẨN NÀO ĐÂY ?

Với suy nghĩ rất nghiêm túc, nhiều bạn đã tìm hiểu lĩnh vực nghiên cứu của 6 nhà toán học nhưng đưa ra tiêu chuẩn chưa thuyết phục. Có

bạn "phát hiện" trong 6 nhà toán học có 2 nhà toán học Đức (?), 2 nhà toán học Việt Nam, 2 nhà toán học Pháp và đưa ra tiêu chuẩn trong một nhóm không có 2 nhà toán học ở cùng một nước. Tuy nhiên phát hiện trên là sai vì chỉ có Kaclo Gauxơ người Đức và có đến 3 nhà toán học người Pháp nên tiêu chuẩn nêu ra không thực hiện được.

Tiêu chuẩn đơn giản và thuyết phục nhất là chia 6 nhà toán học thành 2 nhóm theo số chữ cái ở tên mỗi nhà toán học. Nhóm tên gồm 10 chữ cái : Lê Văn Thiêm, Kaclo Gauxơ, Đờ Moóc-găng. Nhóm tên gồm 12 chữ cái : Lương Thế Vinh, Bledơ Patxcan, Giăng Đalămbe.

Số bạn giải tốt thì nhiều mà chỉ có 10 tặng phẩm nên đành bốc thăm tặng cho các bạn may mắn hơn : *Biện Ngọc Danh*, 126 Lý Thái Tổ, Tp Pleiku, Gia Lai; *Lê Đức Thọ*, xóm Hồng Tiến, Nghĩa Hồng, Nghĩa Đàn, Nghệ An; *Phan Quốc Hưng*, 10B, THPT Hải Lăng, Quảng Trị; *Nguyễn Duy Ngọc*, Toán 2A, ĐHSP Tp Hồ Chí Minh; *Dương Minh Sơn*, 8B, THCS Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hòa, Hà Tây; *Nguyễn Đức Hạnh*, 8A, THCS Kim Ngọc, Yên Lạc, Vĩnh Phúc; *Vũ Trường Giang*, 10D2, THCS Chu Văn An, Hà Nội; *Nguyễn Quang Tân*, 9A, THCS thị trấn Phố Lu, Bảo Thắng, Lào Cai; *Nguyễn Hoa Hương*, 10A5, THPT chuyên Phan Bội Châu, Vinh, Nghệ An; *Nguyễn Trung Thành*, 11A1, THPT Quế Võ số 1, Quế Võ, Bắc Ninh.

NGỌC MAI

DỌN VƯỜN NHÀ

Hầu hết các bạn đều chỉ ra được "mất xích" lỏng lẻo ở "mũi tên" dưới đây :

$$a > 4 \sqrt{10^{n+2}}$$

$$\Rightarrow a \geq 4 \sqrt{10^{n+2}} + 1. \text{ Lập luận trên chỉ đúng khi } n \text{ là số tự nhiên chẵn.}$$

Bạn *Hà Minh Cường*, (lớp 10A1, khối PT chuyên Toán, ĐHSP Hà Nội) đã bổ sung cho lời giải nhờ xét thêm trường hợp n là số tự nhiên lẻ, bằng cách chứng minh khi đó a^2 chia cho 11 dư 10. Tuy nhiên không có số chính phương a^2 nào có tính chất này, từ đó kết luận bài toán.

Ngoài bạn Cường, xin "đa tạ" các bạn : *Hồ Hữu Phùng*, 9A, THCS Quỳnh Hồng, Quỳnh Lưu, Nghệ An; *Nguyễn Đình Dũng*, 8A, THCS Nhữ Bá Sĩ, Thanh Hóa; *Võ Xuân Minh*, 9¹, THPT Cam Nghĩa, Cam Ranh, Khánh Hòa; *Phùng Văn Doanh*, 9D, THCS Ngô Đồng, Giao Thủy, Nam Định; *Vũ Tiến Dũng*, 11A1, THPT



TRÒ CHƠI THÁNG 7

Lịch tháng 7 năm 2000 được biểu diễn trong hình chữ nhật 7×6 như hình vẽ.

					1	2
3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30
31						

Bạn hãy chia hình đó thành 2 miền bằng một đường gấp khúc sao cho có thể đặt miền này trùng khít với miền kia và tổng các số trong mỗi miền bằng nhau.

NGUYỄN VĂN THIÊM
(Sưu tầm)

Đồng Quan, Phú Xuyên, Hà Tây; Lê Thanh Tùng, 9B, THCS Chu Văn An, Thanh Hà, Hải Dương; Phan Thành Trung, 9A, THCS Nguyễn Trãi, Hải Dương; Nguyễn Minh Thu, 11 Toán, NK Hàn Thuyên, Bắc Ninh; Trần Bình Minh, 9K, THCS Lê Hồng Phong, Yên Bái; Trần Anh Hùng, 12A10, Trần Cao Vân, Quảng Nam.

Cám ơn các bạn và xin mời các bạn tiếp tục.

KIHI VI

TẠI ĐAO LẠI THẾ ?

Trong một cuốn sách và trong một kì thi học sinh giỏi có bài toán :

"Tìm x để $A = \frac{1}{x^2 + 2x - 3}$ đạt giá trị lớn nhất".

Đáp án như sau : $A = \frac{1}{(x+1)^2 - 4}$

Để A đạt giá trị lớn nhất thì $(x+1)^2 - 4$ đạt giá trị nhỏ nhất. Hiệu này đạt giá trị nhỏ nhất khi $(x+1)^2 = 0$ hay $x = -1$. Khi đó, giá trị lớn nhất của $A = -\frac{1}{4}$.

Có thể thấy khi $x = 2$ thì $A = 1/5$, do đó $-\frac{1}{4}$ không phải là giá trị lớn nhất của A . Sai lầm của lời giải ở đâu ?

TRẦN XUÂN UY

(GV trường THCS Trần Đăng Ninh, Nam Định)



Giải đáp bài

XÓA NHỮNG CHỮ SỐ NÀO

Số chính phương chỉ có thể tận cùng là 0, 1, 4, 9, 6, 5. Theo bài ra sau khi xóa thì số còn lại phải có 6 chữ số (với thứ tự giữ nguyên) nên số còn lại phải có tận cùng phải là 6 hoặc 9. Số có 6 chữ số còn lại chỉ có duy nhất là 123456 không phải chính phương. Vậy chỉ còn khả năng chữ số tận cùng của số còn lại là 9. Suy ra chữ số hàng chục phải chẵn.

Để thấy chữ số hàng chục chỉ có thể là 6 hoặc 8.

• Nếu chữ số hàng chục là 6 thì ta còn phải xóa 1 trong 5 chữ số 1, 2, 3, 4, 5.

Vì số chính phương phải có dạng $3n$ hoặc $3n+1$ ($n \in \mathbb{N}$) nên số còn lại có thể là 134569, 124569, 123469. Cả 3 số này đều không chính phương.

• Nếu chữ số hàng chục là 8. Số phải tìm là $\overline{abcd89} = x^2$. Ta có $351 \leq x \leq 675$ ở đó x phải có tận cùng là 3 hoặc 7.

* Nếu $x = \overline{ef3}$, ta có $\overline{ef3}$ cũng phải có dạng $3k$ hoặc $3k+1$. Do x^2 có chữ số hàng chục là 8 nên f là 3 hoặc 8. Từ đó được các trường hợp :

$$e = 3, f = 3$$

$$e = 4, f = 3, 8$$

$$e = 5, f = 8$$

$$e = 6, f = 3$$

Các trường hợp trên đều không thỏa mãn.

* Nếu $x = \overline{ef7}$. Xét tương tự như trên được $x = 367$. Số chính phương là $134689 = 367^2$.

Vậy các chữ số phải xóa là 2, 5, 7.

Nhận xét. Các bạn có bài giải tốt hơn cả là :

Phú Thọ: Trần Hải Minh, 11A2, chuyên Hùng Vương; **Vĩnh Phúc:** Nguyễn Văn Phúc, 11A2, chuyên Vĩnh Phúc; **Nam Định:** Đỗ Minh Thành, 8A, THCS Đào Sư Tích, Trục Ninh; **Thanh Hóa:** Doãn Trọng Hoàn, 8B, THCS Nguyễn Chính, Đông Sơn; **Thừa Thiên - Huế:** Võ Thị Quỳnh Đan, 10 chuyên Lý, Quốc học; **Khánh Hòa:** Võ Xuân Minh, 9¹, THCS Cam Nghĩa, Cam Ranh; **Đắc Lắc:** Nguyễn Thị Hồng Hạnh, 11CT, chuyên Nguyễn Du, Buôn Mê Thuột; **Tp Hồ Chí Minh:** Huỳnh Minh Hiếu, 205/19Z, 1Y Âu Cơ, Q.11. Bạn Trần Minh Quang, 11A chuyên Tin ĐHSP Vinh, **Nghe An** có lời giải viết bằng ngôn ngữ PASCAL.

NAM HÀ

THI VUI HÈ 2000

Đề thi Vui hè vừa công bố ngày 14.6.2000 thì ngày 16.6.2000 tòa soạn đã nhận được 2 lời giải của bạn Phạm Trọng Tiến, Thao Nội, Sơn Hà, Phú Xuyên và Nguyễn Xuân Cường, trường Tiểu học Tân Dân, Phú Xuyên đều thuộc tỉnh Hà Tây. Ngày hôm sau 17.6 bài của bạn Nguyễn Đức Thọ, 17/57, Lê Lợi, Hải Phòng về đến

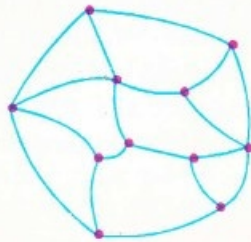
tòa soạn. Còn sau đó thì ... không thể kể tên các bạn được nữa. Thời hạn nhận bài đợt I là đến 30.7.2000.

Số báo này đăng tiếp 3 bài của đợt II và hạn nhận bài giải đến 30.8.2000 theo dấu bưu điện. Nào mời các bạn cùng giải và sớm gửi bài về tòa soạn.

ĐỀ ĐỢT II

Câu 4. Bố trí tuyến xe

Hình vẽ dưới đây biểu thị mạng đường ô tô chở khách nối các thị trấn. Các đường đi đều cần tô màu, mỗi màu biểu thị một tuyến xe ô tô đi từ một thị trấn này đến một thị trấn khác rồi quay lại. Đường đi nối hai thị trấn kề nhau được tô bởi chỉ 1 màu. Hành khách trên mỗi tuyến xe có thể chuyển sang ít nhất 2 tuyến xe khác. Bạn hãy tô màu mạng đường trên sao cho số tuyến xe là ít nhất.



Câu 5. Cắt thế nào ?

Tính để 1 sợi dây trên bàn. Em Tính là Toán dùng dao cắt sợi dây và nói :

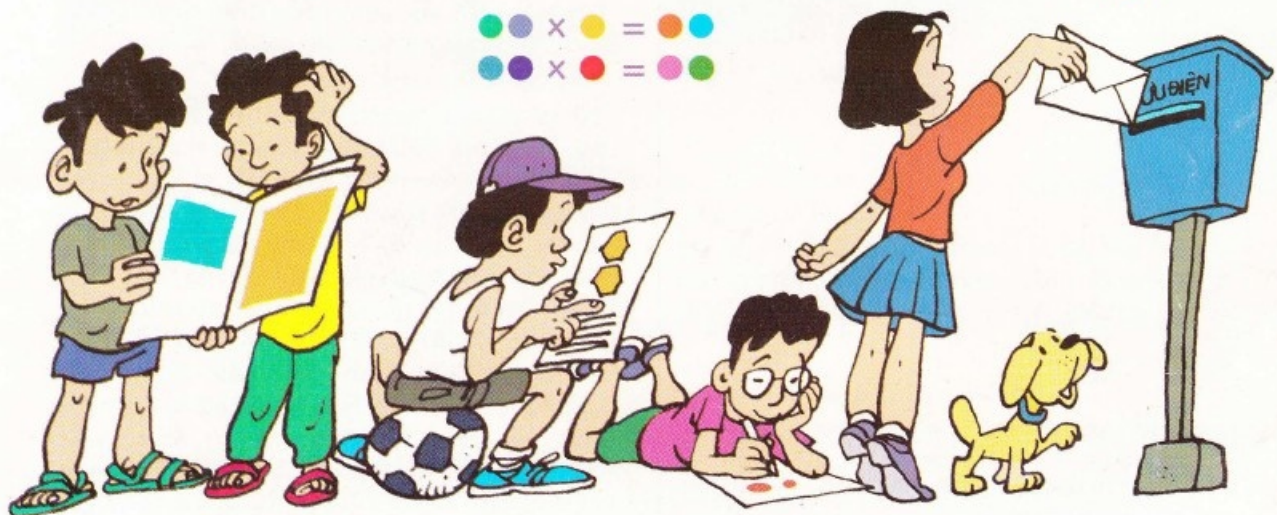
- Anh Tính ơi em chỉ cắt 1 nhát đã được 4 đoạn, rồi cắt tiếp nhát nữa đã được 7 đoạn rồi.

Bạn có biết sợi dây đó lúc đầu nằm như thế nào không ?

Câu 6. Dịch mật mã

Xin gửi tới các bạn một bảng chữ dưới đây, trong đó có một lời muốn nói với các bạn. Bạn hãy dịch nghĩa của thông điệp này nhé ! Chìa khóa mở mã là : "Oratösten".

	C	H	N	Ú	G	C	U	Y
È	C	N	Á	C	Ả	N	C	H
B	T	O	À	A	N	N	G	Ô
Đ	N	A	M	T	T	Ú	H	O
Ù	À	N	G	A	C	H	H	Ú
N	È	G	N	G	U	Y	B	È
N	V	I	È	Ô	T	Í	H	Ả
I	L	È	C	T	H	Ó	H	N
L	G	N	H	Á	T	Ý	V	Ô
K	T	I	M	T	H	Ú	H	Y
V	Ù	A	N	H	T	Ú	H	U
N	V	G	U	U	Y	È	I	N
V	T	H	I	È	O	A	N	H



ISN : 0866-0853

Chỉ số : 12884

Mã số : 8BT79M0

Chế bản tại Tòa soạn

In tại Nhà máy in Diên Hồng, 57 Giảng Võ

In xong và nộp lưu chiểu tháng 7 năm 2000

Giá : 3.000đ

Ba nghìn đồng