

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ❖ HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

Toán học & Tuổi trẻ

4
2000

SỐ 274 - NĂM THỨ 37 - TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG



Đồng chí Trương Tấn Sang - Bí thư thành ủy TP. Hồ Chí Minh khen thưởng em Nguyễn Cao Nhà (HS Trường THPT Chuyên Lê Hồng Phong - TP.HCM) Huy chương Bạc - Hóa Quốc tế năm 1999.

Những gương mặt, những tấm lòng dành cho *Toán học và Tuổi trẻ*



PTS NGUYỄN CÔNG SỬ sinh ngày 12.2.1946 quê tại Phú Châu, Ba Vì, Hà Tây, tốt nghiệp Đại học tổng hợp Hà Nội năm 1967, bảo vệ luận án chuyên ngành Xác suất thống kê năm 1980 tại Leningrat (Liên Xô) nay công tác tại Học viện Kỹ thuật mật mã, Ban cơ yếu chính phủ. Ông đến với THPT vì cảm phục các gương mặt những nhà toán học Việt nam và vì qua báo học tập được kiến thức lẫn phương pháp tư duy. Ông mong báo có nhiều bài viết về tiểu sử các nhà toán học, các ứng dụng thực tế của toán học.

Thạc sĩ ĐOÀN THẾ PHIỆT sinh ngày 15.01.1954 quê tại Nghĩa Lâm, Nghĩa Hưng, Nam Định, tốt nghiệp ĐHSP Hà Nội 1 năm 1978, bảo vệ luận án Thạc sĩ chuyên ngành Phương pháp toán sơ cấp năm 1999 tại Đại học Khoa học Tự nhiên Hà Nội, nay dạy chuyên toán tại trường PTTH chuyên Lê Hồng Phong. Ông cho rằng tạp chí THPT đã và đang ngày càng gần gũi hơn với nhiều đối tượng bạn đọc, do đó góp phần quan trọng trong việc tự học toán đối với nhiều thế hệ bạn đọc.



Thạc sĩ NGUYỄN ANH DŨNG sinh ngày 24.11.1947 tại Quảng Ngãi, tốt nghiệp ĐHSP Hà Nội, giảng dạy tại ĐHSP Thái Nguyên rồi trường THPT Lam Sơn, Thanh Hóa, có nhiều học sinh đạt giải quốc gia và 3 học sinh đạt giải quốc tế, bảo vệ luận án thạc sĩ tại Viện Toán học. Ông là độc giả từ rất sớm của báo và gần đây tham gia viết bài cho THPT. Ông cho rằng bạn trẻ yêu toán cũng đồng nghĩa với yêu báo toán THPT.

Nhà giáo ĐÀM HIẾU CHIẾN sinh ngày 13.10.1951 tại Hà Nội, giảng dạy các lớp Chuyên Toán của trường THCS Trưng Vương, Hà Nội từ 1978-1979 đến nay, tham gia bồi dưỡng đội tuyển Toán của quận Hoàn Kiếm nhiều năm, có nhiều học sinh đạt giải Thành phố và Quốc gia. Nhiều học sinh của ông sau này đạt giải Toán, Lý Quốc tế trong đó có 4 học sinh đoạt Huy chương Vàng. Ông đề nghị tạp chí THPT nên có thêm phần dành cho học sinh tự sáng tạo trong Toán học, rèn luyện khả năng tự nghiên cứu cho học sinh giỏi.



Toán học và Tuổi trẻ

Mathematics and Youth

Năm thứ 37
Số 274 (4-2000)
Tòa soạn : 57 Giảng Võ, Hà Nội
ĐT : 04.5142648-04.5142650
FAX: (84).4.5142648

TRONG SỐ NÀY

Tổng biên tập :
NGUYỄN CẢNH TOÀN

Phó tổng biên tập :
NGÔ ĐẠT TỬ
HOÀNG CHÚNG

Hội đồng biên tập :
NGUYỄN CẢNH TOÀN,
HOÀNG CHÚNG, NGÔ ĐẠT TỬ,
LÊ KHẮC BẢO,
NGUYỄN HUY ĐOAN,
NGUYỄN VIỆT HẢI, ĐINH QUANG HẢO,
NGUYỄN XUÂN HUY, PHAN HUY KHÁI,
VŨ THANH KIỆT, LÊ HẢI KHÔI,
NGUYỄN VĂN MẬU, HOÀNG LÊ MINH,
NGUYỄN KHẮC MINH, TRẦN VĂN NHUNG,
NGUYỄN ĐĂNG PHÁT, PHAN THANH QUANG,
TẠ HỒNG QUẢNG, ĐẶNG HÙNG THẮNG,
VŨ DƯƠNG THUY, TRẦN THÀNH TRAI,
LÊ BÁ KHÁNH TRINH, NGÔ VIỆT TRUNG,
ĐẶNG QUAN VIỄN

Trưởng Ban biên tập :
NGUYỄN VIỆT HẢI

Thư ký Tòa soạn :
LÊ THỐNG NHẤT

Thực hiện :
VŨ KIM THỦY

Trị sự :
VŨ ANH THƯ

Trình bày :
NGUYỄN THỊ OANH

Đại diện phía Nam :
TRẦN CHÍ HIẾU
231 Nguyễn Văn Cừ,
TP Hồ Chí Minh
ĐT : 08.8323044

- 2 Nguyễn Duy Tiến – Toán học thế kỉ 21
- 3 Tiếng Anh qua các bài toán – English through Math Problems – Ngô Việt Trung
- 4 Dành cho Trung học cơ sở - For Lower Secondary Schools
Nguyễn Thế Bình – Suy nghĩ từ một bài toán về chia hết
- 5 Đề thi tuyển sinh lớp 10 trường Phổ thông năng khiếu ĐH Quốc gia Tp Hồ Chí Minh năm 1999
- 6 L.T.N – Đề thi tuyển sinh Học viện Quan hệ Quốc tế năm 1999
- 7 Đề thi môn Toán Olympic truyền thống 30-4 lần thứ tư
- 8 Dành cho các bạn chuẩn bị thi đại học – For University Entrance Preparation
Nguyễn Hoài Chương, Trịnh Bằng Giang - Chứng minh bất đẳng thức có điều kiện bằng phương pháp "cân bằng bậc".
- 9 Diễn đàn dạy học toán – Math Teaching Forum
Nguyễn Cảnh Toàn – Nghĩ thêm về cách viết phương trình đường phân giác
- 10 Tìm hiểu sâu thêm toán học sơ cấp – Advanced Elementary Mathematics
Nguyễn Trọng Tuấn – Số cách biểu diễn một số thành tổng các lũy thừa của 2.
- 11 Trả lời bạn đọc – Correspondence
- 12 Đề ra kì này – Problems in this Issue
T1/274, ..., T10/274, L1, L2/274
- 14 Giải bài kì trước – Solutions of Previous Problems
Giải các bài của số 270
- 23 Bạn đọc tìm tòi – Reader's Contribution
Phạm Ngọc Huy – Lời giải mới cho một bài toán của Jack Garfunkel
- 24 Câu lạc bộ – Math Club
Sai lầm ở đâu ? - Where's the Mistakes ?

Bìa 2 : Những gương mặt, những tấm lòng dành cho
Toán học và Tuổi trẻ

Bìa 3 : Giải trí toán học - Math Recreation

Bìa 4 : Trường THPT chuyên Lê Hồng Phong, Thành phố
Hồ Chí Minh

TOÁN HỌC THẾ KỈ 21

Bài nói chuyện tại buổi giao lưu "TOÁN HỌC - THỜI CƠ VÀ THÁCH THỨC VỚI TUỔI TRẺ"

GS. NGUYỄN DUY TIẾN
(ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội)

Cách đây đúng 100 năm, năm 1900, năm con chuột, nhà toán học vĩ đại người Đức tên là Hilbert đã nêu ra 23 bài toán chưa giải được cho các nhà toán học thế kỉ 20. Cho đến nay, sau 100 năm, 2 trong số 23 bài toán trên vẫn chưa có lời giải.

Thế kỉ thứ 20 có 2 cuộc chiến tranh thế giới. Trước chiến tranh thế giới thứ nhất, chính xác hơn là từ 1901-1915 những ngành toán học trỗi dậy sau đây đã xuất hiện : **Không gian Métric** (do Frechet đưa ra năm 1906), **Không gian tôpô** (do Hausdorff đưa ra năm 1914), **Tích phân Lebesgue** (do Lebesgue đưa ra năm 1902). Giữa hai cuộc chiến tranh này xuất hiện **Giải tích hàm** (do Banach đưa ra năm 1932), **Lí thuyết xác suất giao hoán và không giao hoán** (do Kolmogorov, Neumann đưa ra năm 1933), **Cơ sở toán học của thống kê** (do Cramer viết năm 1945) và **Hình đại số, Tôpô đại số**. Sau đại chiến thế giới thứ hai có nhiều ngành toán học lí thuyết và ứng dụng ra đời, điển hình là **Lí thuyết thông tin**, **Giải tích phức**, **Tối ưu**, **Giải tích ngẫu nhiên**, **Giải tích số**, **Toán kinh tế**, gần đây là **Tin học** và **Bài toán Fermat** đã có câu trả lời.

...
Năm Canh Thìn là năm con rồng.

Rồng là một con vật không có thật : đầu sư tử, mình rắn, vẩy cá, chân chim, nhưng lại biểu hiện cho quyền uy : sấm rồng, mũ rồng, mặt rồng... đồng thời múa rồng là một nghệ thuật



vui tươi, sống động trong những ngày hội lớn. Cần chú ý rằng khi múa rồng, ngoài con rồng còn có một nhân vật quan trọng không thể thiếu : Đó là chú Tễu (chú hề). Có câu chuyện như sau : Một người được hỏi anh đang học nghề gì ? Anh này trả lời : Tôi đang học nghề bắt rồng. Lại bị hỏi : Rồng có đâu mà bắt ? Trả lời : nếu không có rồng để bắt, thì tôi sẽ làm nghề dạy người khác bắt rồng.

Có một số ý kiến cho rằng Toán là nghề bắt rồng. Nếu đúng vậy thì năm 2000, mở đầu cho thế kỉ thứ 21 là năm Rồng, chắc sẽ phải có nhiều rồng để các nhà toán học hành nghề. Các bạn trẻ thân mến, trong toán học có rồng thật đấy. Ví như bài toán Fermat là con rồng cực kì lớn, hấp dẫn nhất. Rất nhiều người phát điên vì muốn bắt nó, và rất nhiều người suýt nữa bắt được nó. Thế nhưng mãi tới lúc "cụ, cụ" rồng này hơn 350 tuổi mới bị bắt. 23 bài toán của Hilbert là những con rồng đẹp lộng lẫy. Các nhà toán học lành nghề đã bắt được 21 con rồi. Còn hai con nữa sẽ vào tay ai đây ? Nếu các bạn trẻ có ý định hành nghề bắt rồng thì phải lưu ý rằng rồng rất khó bắt, phải trường kì mai phục và nếm nhiều thất vọng. Còn nếu không làm nghề bắt rồng thì phải làm nghề vẽ rồng, múa rồng, hoặc đóng vai chú Tễu chắc cũng kiếm được nhiều tiền.

Cách đây ba năm nhà toán học Steve Smale đã đặt ra cho thế kỉ này 18 vấn đề mà theo ông ta thì đây là những vấn đề rất cơ bản của toán học. Trong số 18 vấn đề này có :

- 2 bài toán (số 8 và 16) của Hilbert còn lại, trong đó giả thiết Riemann về các không điểm của hàm "ê ta" là bài toán thứ 8 của Hilbert. Đây là con rồng cực kỳ lớn, vì Hilbert đã từng nói rằng "nếu 1000 năm sau tôi sống lại, thì câu hỏi đầu tiên của tôi là : giả thiết Riemann đã giải được chưa ?"

- 3 bài toán về đa thức nhiều biến và các thuật toán thời gian đa thức.

- 1 bài toán về hệ động lực áp dụng trong kinh tế.

- Giả thuyết của Poincaré về đồng phôi với hình cầu 3 chiều

- Giả thiết Jacobi.

- Và một số vấn đề khác như giới hạn của các trí tuệ nhân tạo và giới hạn của trí tuệ loài người.

Tôi không thể nói được gì sâu về những bài toán trên, và lại các bài toán do Smale nêu ra mang nặng tính "toán học thuần túy".

Riêng tôi, thì tôi nghĩ rằng những bài toán dưới đây chắc sẽ được các nhà toán học thế kỉ 21 hết sức quan tâm :

- Vấn đề địa phương và vấn đề toàn cục trong các bài toán giải tích.

- Toán rời rạc, đặc biệt là giải tích tổ hợp, hình học fractal.

- Lượng tử hóa các vấn đề quen biết của toán học, chẳng hạn nhóm lượng tử, xác suất lượng tử...

- Toán tài chính, toán sinh thái và toán môi trường.

- Logic và đảm bảo toán học cho tin học.

Riêng ở Việt Nam, nền toán học Việt Nam được gieo mầm trong cuộc kháng chiến chống Pháp, hình thành trong cuộc kháng chiến chống Mỹ, phát triển sau ngày thống nhất đất nước. Có thể nói trong vòng 50 năm, nước ta đã xây dựng được một nền toán học tốt. Nhưng điều tôi muốn nói ở đây là có lẽ trong 50 năm qua, chúng ta chỉ mới biểu hiện **năng khiếu học toán giỏi**, còn **năng lực làm toán** thì còn bị hạn chế nhiều. Các nhà toán học Việt Nam chưa xây dựng được một **trường phái toán học** có bản sắc của riêng, thiếu màu sắc vật lý, thiên văn và cơ học, vốn là nguồn ý tưởng vô hạn của toán học. Vì thế tôi hi vọng rằng: trong thế kỉ 21 này các bạn trẻ không chỉ học toán giỏi mà còn có năng lực làm toán giỏi. Nếu may mắn thì chúng ta sẽ bắt được một con rồng, đây là giải thưởng Fields, giành cho các nhà toán học dưới 40 tuổi. Nếu may mắn hơn nữa, ta sẽ có một trường phái về toán học, có bài toán riêng, có trung tâm nghiên cứu riêng và có một nhóm nghiên cứu được cả thế giới thừa nhận. Vì lí do đó tôi cho rằng: Thứ nhất là đã đến lúc ta phải đặt ra được những bài toán lí thuyết hoặc ứng dụng có bản sắc Việt Nam. Ngay cả

toán phổ thông, chúng ta cần phải có những đề thi hay cho các kì thi Toán Quốc tế. Thứ hai là người Việt Nam không nhất thiết phải sống ở nước ngoài mới làm được toán, nghĩa là chúng ta có đủ điều kiện để trao đổi tương đương với các nước trong khu vực, và trên toàn thế giới.

Tôi có một điều trần trối, rất khó diễn tả. Thôi thì các bạn hãy cho tôi mượn lời của tuổi trẻ để mô phỏng tình cảm của mình theo ngôn ngữ AQ^(*). Mỗi lần nghe tin một bạn nào đó được làm việc ở những trung tâm toán lớn của nước ngoài hoặc tiến những sinh viên giỏi đi ngoại quốc học, tôi vừa tự hào, vừa vui, vừa buồn buồn, tủi tủi. Đó là tình cảm bản năng sinh học, giống như tình yêu đôi lứa hoặc giống như tình cảm của nhiều chàng trai khi phải dự đám cưới của bạn gái xinh đẹp, khỏe mạnh, đáng yêu lấy chồng ngoại quốc. Ta cầu mong cho nàng hạnh phúc và mong sao sau này nàng hoặc con cháu nàng sẽ bắt được rồng gửi về quê Rồng cháu Tiên nuôi dưỡng, giữ gìn.

Cuối cùng tôi xin chúc các bạn trẻ sức khỏe, hạnh phúc và cùng nhau tìm cách bắt được một con rồng hoặc đặt ra được những bài toán hay, nghĩa là chỉ ra được sự tồn tại một hay vài con rồng chưa có ai bắt được.

Tôi chân thành cảm ơn GS Ngô Việt Trung đã cung cấp cho tôi một số thông tin liên quan đến nội dung của bài này.

(*) AQ: tên nhân vật chính trong AQ chính truyện của nhà văn Trung Quốc Lỗ Tấn

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

BÀI SỐ 28

Problem. Let $a_1, \dots, a_n$ be n positive integers. Show that $a_i + \dots + a_{i+k}$ is divisible by n for some i and k with $1 \leq i \leq i+k \leq n$.

Solution. Consider the n sums

$$s_1 = a_1,$$

$$s_2 = a_1 + a_2,$$

...

$$s_n = a_1 + \dots + a_n.$$

Let s_i leave a remainder of r_i on division by n , that is,

$$s_i = q_i n + r_i, 0 \leq r_i \leq n-1, i = 1, \dots, n.$$

If $r_i = 0$ for some i , then s_i has the desired properties. If $r_j \neq 0$ for $j = 1, \dots, n$, then we have n integers $r_1, \dots, r_n$ all in the set $\{1, \dots, n-1\}$, which contains only $n-1$ integers.

Consequently, two of the r_i 's must be equal, say $r_l = r_m$ with $m > l$. In this case,

$$a_{l+1} + \dots + a_m = s_m - s_l = (q_m - q_l)n.$$

Từ mới:

consider	= xét, xem, quan sát (động từ)
leave	= để lại, còn lại (động từ)
remainder	= phần dư
division	= phép chia
that is	= có nghĩa là (thành ngữ)
desire	= ước muốn, mong muốn (động từ)
property	= tính chất
contain	= chứa đựng, bao hàm (động từ)
consequently	= do đó, hệ quả là
say	= chẳng hạn (thành ngữ), nói (động từ)
case	= trường hợp

NGÔ VIỆT TRUNG

Dành cho các bạn TRUNG HỌC CƠ SỞ



SUY NGHĨ TỪ MỘT BÀI TOÁN VỀ CHIA HẾT

NGUYỄN THẾ BÌNH
(GV trường PT chuyên Hà Giang)

Rèn luyện khả năng khái quát hóa, đặc biệt hóa là điều hết sức quan trọng, nó giúp ta hiểu một cách sâu sắc và bản chất hơn những sự việc và hiện tượng đang khảo sát. Bài viết này sẽ trao đổi vài hướng phát triển của một bài toán về chia hết dành cho học sinh lớp 6. Trong kì thi chọn học sinh giỏi toán THCS toàn quốc năm 1981 có bài toán :

Chứng minh rằng chữ số tận cùng của các số tự nhiên n và n^5 là như nhau.

Để giải bài toán này chỉ cần chứng minh $P = (n^5 - n) : 10$

Ta có thể biến đổi P như sau :

$$\begin{aligned} P &= n^5 - n = n(n^4 - 1) = n(n-1)(n+1)(n^2+1) (*) \\ &= n(n-1)(n+1)(n^2-4+5) \\ &= 5n(n-1)(n+1) + (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2) (**) \end{aligned}$$

Chú ý rằng: Trong k số tự nhiên liên tiếp bao giờ cũng tồn tại số chia hết cho k . Từ đó mỗi số hạng trong $(**)$ chia hết cho 2 và 5 nên $P : 10$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Liệu $P = n^5 - n$ có thể chia hết cho số lớn hơn 10 không ?

Áp dụng điều trên vào $(*)$ thì P chia hết cho 2, 3, 5, mà ba số 2, 3, 5 nguyên tố cùng nhau nên P chia hết cho $2.3.5 = 30$. Ta khẳng định được :

Bài toán 1. Chứng minh rằng $n^5 - n$ chia hết cho 30 với số tự nhiên n bất kì.

Dễ thấy trong 2 số chẵn liên tiếp thì có một số chia hết cho 2 và một số chia hết cho 4 nên: Tích 2 số chẵn liên tiếp chia hết cho 8.

Nếu trong giả thiết trên cho n là số lẻ thì từ $(*)$ có $(n-1)(n+1)$ chia hết cho 8, còn n^2+1 là số chẵn nên $P : 16$, do đó $P : 3.5.16 = 240$. Ta có

Bài toán 2. Chứng minh rằng $n^5 - n$ chia hết cho 240 với số tự nhiên n lẻ bất kì.

Biểu thức $P = n^5 - n$ cần thay đổi như thế nào để nó chia hết cho 240 cả khi n là số chẵn ?

Ta thấy n chẵn thì

$$n^4 : 16 \Rightarrow n^4(n^4-1) : 16.3.5 = 240.$$

Kết hợp với bài toán 2 ta có $n^4(n^4-1) : 240$ hay là có :

Bài toán 3. Chứng minh rằng $n^8 - n^4$ chia hết cho 240 với số tự nhiên n bất kì.

Từ bài này có thể rút ra hệ quả sau :

Bài toán 4. Chứng minh rằng với bất kì số tự nhiên n thì $n^m(n^4 - 1)$ chia hết cho 240 với mọi $m \geq 4$.

Có thể mở rộng bài toán trên cho tổng của nhiều số tự nhiên.

Bài toán 5. Cho m, n và $a_1, a_2, \dots, a_n$ là các số tự nhiên. Chứng minh rằng : Tổng $a_1^m + a_2^m + \dots + a_n^m$ chia hết cho 120 khi và chỉ khi tổng $a_1^{m+4} + a_2^{m+4} + \dots + a_n^{m+4}$ chia hết cho 120.

Hướng dẫn giải : xét hiệu của hai tổng trên.

CÁC BÀI TẬP ÁP DỤNG :

Bài 1: Chứng minh rằng $n^8 - n^6 - n^4 + n^2$ chia hết cho 5760 với số tự nhiên n lẻ bất kì.

Bài 2. Chứng minh rằng $5^{4n+1} - 3^{4n+1} - 2$ chia hết cho 240 với số tự nhiên n bất kì.

Bài 3. Tìm số dư trong phép chia $2001^{1997} + 1997^{2001}$ cho 240.

Bài 4. Tìm 7 chữ số tận cùng của số $(1999^{1999} - 1999^{1995})(2001^{2001} - 2001^{1997})$

Nhắn tin :

Các bạn đoạt giải trong các kì thi năm 1999 (Cuộc thi Toán và Vật lí năm 1998-1999, Cuộc thi Kỷ niệm 35 năm Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ, Cuộc thi Mini Vui hè 99) hãy gửi gấp địa chỉ mới về Tòa soạn.

THVTT

ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10

TRƯỜNG PHỔ THÔNG NĂNG KHIẾU ĐH QUỐC GIA TP HỒ CHÍ MINH NĂM 1999

ĐỀ TOÁN (Cho các lớp KHTN)

(Thời gian : 150 phút)

Bài 1. Cho $f(x) = x^2 - 2(m+2)x + 6m + 1$.

a) Chứng minh rằng phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm với mọi m .

b) Đặt $x = t+2$. Tính $f(x)$ theo t , từ đó tìm điều kiện đối với m để phương trình $f(x) = 0$ có hai nghiệm lớn hơn 2.

Bài 2. a) Cho x, y là các số thực thỏa mãn điều kiện

$$x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = 1 \quad (1)$$

Chứng minh rằng

$$x^2 + y^2 = 1 \quad (2)$$

b) Từ đẳng thức (2) ta có thể suy ra đẳng thức (1) được hay không? Giải thích rõ câu trả lời.

Bài 3. a) Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn điều kiện $x+y+z=3$, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{3}$.

Chứng minh rằng ít nhất một trong ba số x, y, z bằng 3.

b) Áp dụng câu a), giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{3} \\ y+2z^2=1 \end{cases}$$

Bài 4. Cho hai đường tròn $(C_1), (C_2)$ có bán kính lần lượt là 1 và 4 tiếp xúc ngoài với nhau. Một tiếp tuyến chung ngoài của $(C_1), (C_2)$ tiếp xúc với $(C_1), (C_2)$ lần lượt tại A, B . Tìm bán kính của đường tròn (C) tiếp xúc đồng thời với $(C_1), (C_2)$ và AB .

Bài 5. a) Có n đội bóng thi đấu vòng tròn một lượt ($n \geq 3$). Chứng minh rằng dù lịch thi đấu sắp xếp ra sao, thì tại bất kì thời điểm nào ta cũng tìm ra được hai đội có số trận đã thi đấu là bằng nhau.

b) Giả sử $n=3$ và ba đội bóng thi đấu vòng tròn hai lượt. Điều khẳng định của câu a) còn đúng không? Giải thích rõ câu trả lời.

ĐỀ TOÁN (Cho lớp chuyên toán)

(Thời gian : 150 phút)

Bài 1: a) Biết rằng x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình bậc hai : $ax^2 + bx + c = 0$. Viết phương trình bậc hai nhận x_1^3 và x_2^3 làm 2 nghiệm.

b) Giải bất phương trình $(x^2 + 4x + 10)^2 - 7(x^2 + 4x + 11) + 7 < 0$

Bài 2. a) Khai triển biểu thức $n^4 + (n+1)^4$ thành dạng $2k+1$ và phân tích k thành tích các thừa số.

b) Cho số nguyên A là tổng bình phương của 2 số nguyên dương liên tiếp. Hãy chứng minh rằng A không thể là tổng lũy thừa bậc 4 của 2 số nguyên dương liên tiếp.

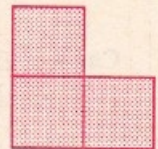
Bài 3. Cho tam giác ABC có diện tích S và một điểm P nằm trong tam giác.

a) Gọi S_1, S_2, S_3 lần lượt là diện tích của các tam giác PBC, PCA và PAB . Hãy xác định giá trị nhỏ nhất của $S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$.

b) Gọi P_1, P_2, P_3 lần lượt là các điểm đối xứng của P qua BC, CA và AB . Đường thẳng đi qua P_1 và song song BC cắt AB và AC tại B_1 và C_1 . Đường thẳng đi qua P_2 và song song CA cắt BC và BA tại C_2 và A_2 . Đường thẳng đi qua P_3 và song song AB cắt CA và CB tại A_3 và B_3 . Hãy xác định vị trí điểm

P để tổng diện tích 3 hình thang BCC_1B_1, CAA_2C_2 và ABB_3A_3 đạt giá trị nhỏ nhất và tính giá trị đó.

Bài 4. Người ta lát một nền nhà hình vuông kích thước $n \times n$ ô bằng các viên gạch dạng như hình vẽ bên dưới sao cho còn thừa lại một ô không lát.



a) Hãy chỉ ra một cách lát như trên với nền nhà kích thước 4×4 và 8×8 và ô trống nằm tại một góc nhà.

b) Hãy chứng minh rằng, luôn luôn tồn tại cách lát nền nhà có kích thước $2^k \times 2^k$ (k nguyên dương) với ô trống còn lại nằm ở vị trí (i, j) bất kì.

Bài 5. a) Chứng minh đẳng thức :

$$x + y + |x - y| = 2\max\{x, y\} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

b) Chứng minh đẳng thức :

$$\left| \frac{a+b}{ab} \right| + \left| \frac{a-b}{ab} \right| - \frac{2}{c} + \left| \frac{a+b}{ab} \right| + \left| \frac{a-b}{ab} \right| + \frac{2}{c} = 4\max\left\{\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right\} \quad \forall a, b, c \neq 0.$$

Trong đó $\max$ là kí hiệu số lớn nhất trong các số đi kèm./.

ĐỀ THI MÔN TOÁN TUYỂN SINH HỌC VIỆN QUAN HỆ QUỐC TẾ NĂM 1999

PHẦN A. Phần dành cho tất cả các thí sinh

Câu I. 1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = \frac{x+2}{x-3}$

2) Tìm trên đồ thị của hàm số điểm M sao cho khoảng cách từ điểm M đến đường tiệm cận đứng bằng khoảng cách từ điểm M đến đường tiệm cận ngang.

Câu II. 1) Với những giá trị nào của m thì hệ bất phương trình :

$$\begin{cases} x^2 + 10x + 9 \leq 0 \\ x^2 - 2x + 1 - m \leq 0 \end{cases}$$

có nghiệm ?

2) Giải phương trình :

$$4^{x^2-3x+2} + 4^{x^2+6x+5} = 4^{2x^2+3x+7} + 1$$

3) Cho các số x, y thỏa mãn : $x \geq 0, y \geq 0$ và $x+y=1$.

Hãy tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$P = \frac{x}{y+1} + \frac{y}{x+1}$$

Câu III. 1) Giải phương trình lượng giác :

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x = 0$$

2) Hãy tính các góc của $\triangle ABC$ nếu trong tam giác đó ta có :

$$\begin{aligned} \sin^2 A + \sin^2 B + 2\sin A \sin B &= \\ &= \frac{9}{4} + 3\cos C + \cos^2 C. \end{aligned}$$

Câu IV. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh bằng a .

1) Giả sử I là một điểm thay đổi ở trên cạnh CD . Hãy xác định vị trí của I để diện tích $\triangle IAB$ là nhỏ nhất.

2) Giả sử M là một điểm thuộc cạnh AB . Qua điểm M dựng mặt phẳng song song với AC và BD . Mặt phẳng này cắt các cạnh AD, DC, CB lần lượt tại N, P, Q . Tứ giác $MNPQ$ là hình gì ? Hãy xác định vị trí của M để diện tích tứ giác $MNPQ$ là lớn nhất.

PHẦN B. Phần dành cho từng loại đối tượng thí sinh

Câu Va. (Cho thí sinh thi theo chương trình chưa phân ban)

Với những giá trị nào của m thì hệ phương trình :

$$\begin{cases} x+y=4 \\ x^2+y^2=m^2 \end{cases} \text{ có nghiệm ?}$$

Câu Vb. (Cho thí sinh thi theo chương trình ban khoa học xã hội (ban C)).

$$\text{Giải hệ phương trình } \begin{cases} x+y=9 \\ x^2+y^2=41 \end{cases}$$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu I. 1) Bạn đọc tự giải.

2) Tiệm cận đứng là $x=3$, tiệm cận ngang là $y=1$. Điểm $M \in$ đồ thị $\Leftrightarrow M(x, y = \frac{x+2}{x-3})$.

Do khoảng cách từ M đến tiệm cận ngang là $|y-1| = \left| \frac{x+2}{x-3} - 1 \right|$ và khoảng cách từ M đến tiệm cận đứng là $|x-3|$ nên ta có đẳng thức :

$$\begin{aligned} |x-3| &= \left| \frac{x+2}{x-3} - 1 \right| = \frac{5}{|x-3|} \Leftrightarrow (x-3)^2 = 5 \\ \Leftrightarrow x &= 3 \pm \sqrt{5}. \end{aligned}$$

Câu II. 1) Hệ tương đương với

$$\begin{cases} -9 \leq x \leq -1 & (1) \\ (x-1)^2 \leq m & (2) \end{cases}$$

Hệ có nghiệm $\Leftrightarrow m \geq \min_{x \in [-9, -1]} (x-1)^2 = (-1-1)^2 = 4$

2) Viết phương trình dưới dạng :

$$4^{x^2-3x+2} + 4^{x^2+6x+5} = 4^{x^2-3x+2} \cdot 4^{x^2+6x+5} + 1.$$

$$\Leftrightarrow (4^{x^2-3x+2} - 1)(1 - 4^{x^2+6x+5}) = 0$$

Đáp số : $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = -1, x_4 = -5$.

3) Từ giả thiết suy ra $0 \leq xy \leq \frac{1}{4}$. Ta có

$$P = \frac{x^2+y^2+x+y}{xy+x+y+1} = \frac{(x+y)^2-2xy+1}{xy+2} = \frac{2-2xy}{2+xy}$$

$$\text{Đặt } xy = t \in \left[0, \frac{1}{4}\right] \Rightarrow P = \frac{2-2t}{2+t} \text{ với } t \in \left[0, \frac{1}{4}\right].$$

Dễ dàng suy ra $P_{\max} = 1, P_{\min} = \frac{2}{3}$.

Câu III. 1) Bạn đọc tự giải. Đáp số :

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi, x = \frac{\pi}{5} + k \cdot 2\frac{\pi}{5}, x = \pi + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

ĐỀ THI MÔN TOÁN OLYMPIC TRUYỀN THỐNG 30-4 LẦN THỨ TƯ

(Ngày 17/4/1999 tại Đà Nẵng)

LỚP 10

Thời gian : 180 phút (mỗi bài 6 điểm)

Bài 1. Giải phương trình :

$$x^2 - 3x + 1 = -\frac{\sqrt{3}}{3} \sqrt{x^4 + x^2 + 1}$$

(Thừa Thiên - Huế)

Bài 2. Cho x là số thực sao cho $x^3 - x$ và $x^4 - x$ đều là các số nguyên. Chứng minh x là số nguyên.

(ĐH Quốc gia Tp Hồ Chí Minh)

Bài 3. Tìm giá trị nhỏ nhất của :

$$S = |x| + \left| \frac{2x-1}{x+3} \right|$$

(Khánh Hòa)

Bài 4. Gọi R, r, p lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp, bán kính đường tròn nội tiếp nửa chu vi của tam giác ABC . Chứng minh :

$$\begin{aligned} & \operatorname{tg} \frac{A}{2} (1 + \cos \frac{A}{2}) + \operatorname{tg} \frac{B}{2} (1 + \cos \frac{B}{2}) + \\ & + \operatorname{tg} \frac{C}{2} (1 + \cos \frac{C}{2}) \geq \frac{p(R+r) + R(4R+r)}{pR} \end{aligned}$$

(Bến Tre)

Bài 5. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho 3 đường thẳng có hệ số góc là $\frac{1}{m}, \frac{1}{n}, \frac{1}{p}$ với m, n, p là các số nguyên dương. Tìm m, n, p sao cho 3 đường thẳng đó tạo với trục hoành 3 góc có tổng số đo là 45° .

(Đà Nẵng)

LỚP 11

Thời gian : 180 phút (mỗi bài 6 điểm)

Bài 1. Giải phương trình :

$$\left(\frac{1+a^2}{2a} \right)^x - \left(\frac{1-a^2}{2a} \right)^x = 1$$

với tham số $a \in (0, 1)$

(Phú Yên)

Bài 2. Cho $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Chứng minh :

$$\left(\frac{\sin x}{x} \right)^3 > \cos x$$

(Tp Hồ Chí Minh + Đồng Nai)

Bài 3. Cho dãy (x_k) được xác định bởi :

$$x_k = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \dots + \frac{k}{(k+1)!} \text{ với } k = 1, 2, \dots$$

Tính $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x_1^n + x_2^n + \dots + x_{1999}^n}$

(Đức Lắc)

Bài 4. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC cố định và $AB = AC = a$, $\angle ACB = 30^\circ$. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu của A, B lên SC và thỏa mãn M ở giữa C và N .

Khi S biến thiên, tìm giá trị lớn nhất của thể tích khối tứ diện $ABMN$.

(Cần Thơ)

Bài 5. Tìm bậc cao nhất k của 1999 để 1999^k là ước số của số :

$$L = 1998^{1999^{2000}} + 2000^{1999^{1998}}$$

(Lâm Đồng)

2) Từ giả thiết :

$$\Rightarrow (\sin A + \sin B)^2 = \left(\frac{3}{2} + \cos C \right)^2$$

$$\Rightarrow \sin A + \sin B = \frac{3}{2} + \cos C \text{ (mỗi vế } > 0)$$

$$\Rightarrow 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} = \frac{3}{2} + 2 \cos^2 \frac{C}{2} - 1$$

$$\Rightarrow 4 \cos^2 \frac{C}{2} - 4 \cos \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \left(2 \cos \frac{C}{2} - \cos \frac{A-B}{2} \right)^2 + \sin^2 \frac{A-B}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin \frac{A-B}{2} = 0 \\ 2 \cos \frac{C}{2} = \cos \frac{A-B}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = B \\ \cos \frac{C}{2} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = B = 30^\circ \\ C = 120^\circ \end{cases}$$

Câu IV. 1) S_{IAB} nhỏ nhất khi đường cao IH nhỏ nhất. IH nhỏ nhất khi I là trung điểm của CD (lúc đó IH là đường vuông góc chung).

2) • $MNPQ$ là hình bình hành, và vì tứ diện là đều nên $MNPQ$ là hình chữ nhật.

• $S_{MNPQ} = MN \cdot MQ$. Chú ý rằng tổng $MN + MQ = AB = a$ không đổi nên tích $MN \cdot MQ$ lớn nhất khi $MN = MQ = \frac{a}{2}$, tức là khi M là trung điểm của AB .

Câu Va. Thế $y = 4 - x$ vào phương trình thứ hai ta được :

$$2x^2 - 8x + 16 - m^2 = 0$$

$$\text{Phải có } \Delta' = 2m^2 - 16 \geq 0 \Leftrightarrow |m| \geq \sqrt{8}$$

Câu Vb.

Đáp số : Hệ có hai nghiệm là $(4, 5), (5, 4)$.

L.T.N

DÀNH CHO CÁC BẠN CHUẨN BỊ THI ĐẠI HỌC**CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC CÓ ĐIỀU KIỆN
BẰNG PHƯƠNG PHÁP "CÂN BẰNG BẬC"**

NGUYỄN HOÀI CHƯƠNG - TRỊNH BẰNG GIANG
(GV trường THPT Nguyễn Thượng Hiền, Tp Hồ Chí Minh)

Trong bài viết này chúng tôi giới thiệu một phương pháp chứng minh một dạng bất đẳng thức (BĐT) khó : bất đẳng thức có điều kiện đối với các biến thường thấy xuất hiện trong đề thi vào Đại học.

Trước hết ta cần lưu ý :

Định nghĩa. Đa thức $f(x, y)$ của hai biến x, y được gọi là đa thức đẳng cấp bậc n (hay đồng bậc n) nếu có dạng

$$f(x, y) = a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \dots + a_{n-1}x^1y^{n-1} + a_ny^n$$

trong đó $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ là các số thực.

Thí dụ

- a) $x^3 + x^2y + y^3$ là đa thức đẳng cấp bậc 3
b) $x^4 - x^3y + y^4 - x^2 - y^2$ không là đa thức đẳng cấp

Ghi chú: đối với đa thức ba biến $f(x, y, z)$, ta cũng có các định nghĩa tương tự, nghĩa là tổng các số mũ của ba biến trong mỗi đơn thức là như nhau.

Nguyên tắc thực hiện:

Nếu vế trái (VT) và vế phải (VP) của bất đẳng thức cần chứng minh là hai đa thức đẳng cấp nhưng khác bậc thì ta cần tìm cách biến đổi sao cho 2 vế của BĐT cần chứng minh có cùng bậc.

Nguyên tắc trên được cụ thể hóa qua các ví dụ dưới đây.

Thí dụ 1. Cho $a+b=2$. Chứng minh rằng

$$a^4 + b^4 \geq a^3 + b^3 \quad (1)$$

Trong BĐT cần chứng minh ta thấy VT bậc 4, VP bậc 3, vậy giữa hai vế có sự chênh lệch 1 bậc.

Để cân bằng bậc, ta nhân 2 vế cho 2, sau đó thay số 2 ở VP bằng $a+b$, như vậy là ta đã làm cho VP tăng lên 1 bậc, khi đó bậc của hai vế sẽ bằng nhau.

$$\text{Giải: } (1) \Leftrightarrow 2(a^4 + b^4) \geq 2(a^3 + b^3)$$

$$\Leftrightarrow 2(a^4 + b^4) \geq (a+b)(a^3 + b^3)$$

$$\Leftrightarrow (a^3 - b^3)(a - b) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a - b)^2 \left[\left(a + \frac{b}{2} \right)^2 + \frac{3b^2}{4} \right] \geq 0 \text{ (hiển nhiên)}$$

Thí dụ 2. (Học viện Công nghệ Bưu chính Viễn thông năm 1998-1999)

Cho $a+b+c=3$. Chứng minh rằng

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq a^3 + b^3 + c^3 \quad (2)$$

$$\text{Giải: } (2) \Leftrightarrow 3(a^4 + b^4 + c^4) \geq 3(a^3 + b^3 + c^3)$$

$$\Leftrightarrow 3(a^4 + b^4 + c^4) \geq (a+b+c)(a^3 + b^3 + c^3)$$

$$\Leftrightarrow (a-b)(a^3-b^3) + (b-c)(b^3-c^3) + (c-a)(c^3-a^3)$$

này hiển nhiên vì $(x-y)(x^3-y^3) \geq 0, \forall x, y \in \mathbb{R}$ (xem phần cuối thí dụ 1).

Thí dụ 3. Cho $x>0, y>0$ và $x^3 + y^3 = x - y$. Chứng minh rằng $x^2 + y^2 < 1$ (3)

Phân tích: Trong BĐT cần chứng minh ta thấy VT bậc 2, VP bậc 0, độ chênh lệch là 2.

Từ giả thiết $x^3 + y^3 = x - y$, suy ra cách tạo cân bằng bậc là nhân VT với $(x-y)$ và nhân VP với (x^3+y^3) .

Giai: Vì $x > 0, y > 0$ nên $x^3 + y^3 > 0$, vậy :

$$(3) \Leftrightarrow (x-y)(x^2+y^2) < x^3 + y^3$$

$$\Leftrightarrow x^3 + xy^2 - yx^2 - y^3 < x^3 + y^3$$

$$\Leftrightarrow 0 < y(2y^2 - xy + x^2)$$

$$\Leftrightarrow 0 < y \left[\frac{7y^2}{4} + \left(\frac{y}{2} - x \right)^2 \right] \text{ (Điều này là hiển}$$

nhiên vì $y > 0$)

Thí dụ 4. (Đại học Quốc gia Hà Nội, khối A, năm học 1998-1999)

Giả sử phương trình $x^3 - x^2 + ax + b = 0$ có 3 nghiệm thực phân biệt. Chứng minh rằng

$$a^2 + 3b > 0 \quad (4)$$

Giai: Giả sử x, y, z là 3 nghiệm thực phân biệt của phương trình $x^3 - x^2 + ax + b = 0$. Theo định lí Viet, ta có :

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ xy + yz + xz = a \\ xyz = -b \end{cases}$$

$$\text{Vậy } (4) \Leftrightarrow (xy + yz + xz)^2 > 3xyz$$

$$\Leftrightarrow (xy + yz + xz)^2 > 3xyz(x+y+z)$$

$$\Leftrightarrow (xy-yz)^2 + (yz-zx)^2 + (zx-xy)^2 > 0 \quad (*)$$

Ta luôn có :

$$(xy-yz)^2 + (yz-zx)^2 + (zx-xy)^2 \geq 0 \quad (**)$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi :

$$xy-yz=0, yz-zx=0, zx-xy=0$$

$$\Leftrightarrow y(x-z)=0, z(y-x)=0, x(z-y)=0 \quad (***)$$

DIỄN ĐÀN DẠY HỌC TOÁN

NGHĨ THÊM VỀ CÁCH VIẾT PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG PHÂN GIÁC

Trong THPT số 259 (1/1999) và số 267 (9/1999) khi xét cách viết phương trình đường phân giác một góc của tam giác, các tác giả đã nêu ra 5 phương pháp nhằm xác định xem đường phân giác trong của tam giác ứng với dấu + hay dấu - của công thức đã cho. Còn phương pháp nào khác nữa không? Với giả thiết nào của bài toán thì sử dụng phương pháp này sẽ thuận lợi hơn? Xin giới thiệu một phương pháp nữa:

Phương pháp 6.

Bài toán. Cho hai đường thẳng a và b có phương trình tương ứng là:

$$2x - y + 1 = 0 \quad x + y + 1 = 0$$

Viết phương trình đường phân giác d của góc chứa điểm $P(-3, 3)$ tạo bởi các đường thẳng a, b .

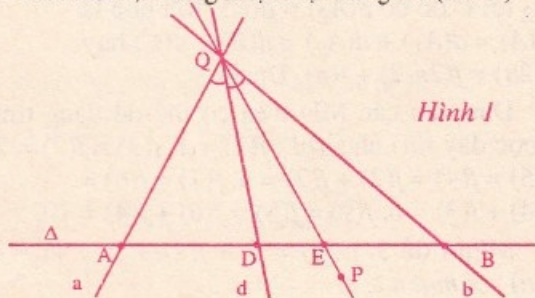
Ta đã biết phương trình đường phân giác d có dạng sau với một trong hai giá trị 1 hoặc -1 của ε :

$$\frac{2x - y + 1}{\sqrt{5}} = \varepsilon \frac{x + y + 1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow$$

$$(2\sqrt{2} - \varepsilon\sqrt{5})x - (\sqrt{2} + \varepsilon\sqrt{5})y + \sqrt{2} - \varepsilon\sqrt{5} = 0 \quad (1)$$

Gọi Q là giao điểm của a và b . Để xác định d ta xét một đường thẳng Δ nào đó sao cho Δ cắt cả bốn đường thẳng a, b, d, QP tại các điểm A, B, D, E tương ứng. Vì d và QP cùng thuộc hai góc đối đỉnh nên có 2 trường hợp xảy ra:

- Các điểm E, D cùng thuộc đoạn thẳng AB (hình 1)



Hình 1

- Các điểm E, D đều nằm ngoài đoạn thẳng AB (hình 2)

Ta sẽ chọn ε để điểm D thỏa mãn điều kiện trên thì xác định được phương trình đường thẳng d .

Để tính được tọa độ điểm Q là $(-\frac{2}{3}; -\frac{1}{3})$. Đường thẳng QP có phương trình:

NGUYỄN CẢNH TOÀN

$$\frac{x + (2/3)}{-3 + (2/3)} = \frac{y + (1/3)}{3 + (1/3)}$$

$$\Leftrightarrow 10x + 7y + 9 = 0$$

Để dễ tính toán, trong bài toán này có thể chọn Δ là trục hoành ($y = 0$). Lúc đó hoành độ các điểm A, B, D, E theo thứ tự là

$$x_A = -\frac{1}{2}, x_B = -1,$$

$$x_D = \frac{\sqrt{2} - \varepsilon\sqrt{5}}{\varepsilon\sqrt{5} - 2\sqrt{2}},$$

$$x_E = -\frac{9}{10}$$

Vì $-1 < -\frac{9}{10} < -\frac{1}{2}$ hay $x_B < x_E < x_A$ nên điểm E nằm

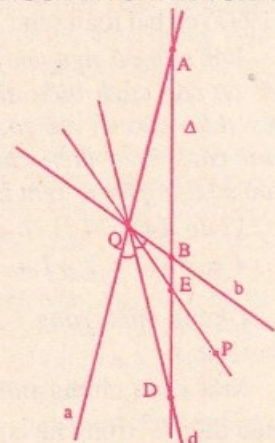
trong đoạn thẳng AB . Nếu lấy $\varepsilon = 1$ thì $x_A < 0 < x_D \Rightarrow$ điểm D nằm ngoài đoạn thẳng AB nên điều kiện trên không thỏa mãn. Do đó các điểm D và E đều nằm trong đoạn thẳng AB ứng với $\varepsilon = -1$. Vậy góc chứa điểm P tạo bởi 2 đường thẳng a, b có đường phân giác d với phương trình là:

$$(2\sqrt{2} + \sqrt{5})x + (\sqrt{5} - \sqrt{2})y + \sqrt{2} + \sqrt{5} = 0.$$

Phương pháp trên sử dụng thuận lợi để viết phương trình đường phân giác trong của góc A của ΔABC khi biết phương trình 2 đường thẳng AB, AC và tọa độ một điểm P nằm trong (hoặc nằm ngoài không thuộc góc đối đỉnh) của góc A , còn nếu biết tọa độ của B, C thì ta chọn P là trung điểm của BC .

Để dễ tính toán nếu chọn Δ là trục hoành (trục tung) hoặc đường thẳng song song với trục hoành (đường thẳng song song với trục tung) thì việc so sánh vị trí các điểm đưa về so sánh hoành độ (tung độ) của chúng.

Các bạn thấy không, trong chuyện chọn cách viết phương trình đường phân giác góc trong của một tam giác tưởng chừng đã được khảo sát bằng nhiều khía cạnh, có nhiều phương pháp nhưng nếu ta biết cách đặt lại vấn đề, tìm tòi suy nghĩ thì vẫn có thể mở được những con đường mới.



Hình 2

Vì x, y, z phân biệt, nên $(x-y) \neq 0, (y-z) \neq 0, (z-x) \neq 0$.

Do đó: $(***) \Leftrightarrow y=0, z=0, x=0$, điều này trái với giả thiết x, y, z phân biệt. Vậy không thể xảy ra dấu bằng trong $(**)$, suy ra $(*)$ đúng.

Trên đây ta đã đề cập một số ví dụ minh họa việc sử dụng phương pháp cân bằng bậc để chứng minh bất đẳng thức. Ngoài ra người ta còn dùng phương pháp này trong các bài toán về phương trình và hệ phương trình và một số dạng toán khác nữa. Xin mời các bạn làm thử các bài toán tương tự.

Bài 1. Cho $a+b \geq 2$. Chứng minh rằng $a^4 + b^4 \geq a^3 + b^3$

Bài 2. (ĐH Ngoại thương Tp Hồ Chí Minh 1995-1996)

Cho $x \geq 0, y \geq 0$ và $x^3 + y^3 = 2$. Chứng minh rằng $x^2 + y^2 \leq 2$

Bài 3. (ĐH Y Dược Tp Hồ Chí Minh 1992-1993)

Cho $a+b \geq 2$. Chứng minh rằng $a^{n+1} + b^{n+1} \geq a^n + b^n$ ($\forall n \in \mathbb{N}$).

TÌM HIỂU SÂU THÊM TOÁN HỌC SƠ CẤP

Trong kì thi Olympic toán quốc tế lần thứ 38 (1997) có bài toán sau :

Với mỗi số nguyên dương n , gọi $f(n)$ là số tất cả các cách biểu diễn n thành tổng những lũy thừa của 2 với số mũ nguyên không âm. Hai cách biểu diễn chỉ khác nhau bởi thứ tự các số hạng được xem là đồng nhất.

Ví dụ $f(4) = 4$ vì có 4 cách biểu diễn :

$$4 = 2 + 2 = 2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1$$

Chúng minh rằng : $2^{n^2/4} < f(2^n) < 2^{n^2/2}$ với mọi $n \geq 3$.

Một cách chứng minh trực tiếp bài toán là biểu diễn 2^n trong hệ cơ số 2.

(vì $2n$ chẵn). Nếu trong cách biểu diễn s đó ta bỏ đi hai số hạng 1 thì được một cách biểu diễn t của $2n-2$ ($t \in B$). Ngược lại, với mỗi cách biểu diễn t của $2n-2$ nếu thêm vào 2 số hạng 1 thì được cách biểu diễn s của $2n$. Vậy ta có song ánh từ A_1 tới B , do đó $d(A_1) = d(B)$. Mặt khác gọi u là một cách biểu diễn bất kì của $2n$ mà không chứa số hạng 1 ($u \in A_2$) thì các số hạng trong u đều là lũy thừa của 2, chẳng hạn :

$$2n = 2^{a_1} + 2^{a_2} + \dots + 2^{a_m} \text{ với } a_1, a_2, \dots, a_m \geq 1,$$

$$\text{lúc đó } n = 2^{a_1-1} + 2^{a_2-1} + \dots + 2^{a_m-1},$$

đây chính là một cách biểu diễn v của n ($v \in C$). Ngược lại, với mỗi cách biểu diễn v của n nếu nhân mỗi số hạng với 2 thì được cách biểu diễn u của $2n$. Vậy ta có song ánh từ

SỐ CÁCH BIỂU DIỄN MỘT SỐ THÀNH TỔNG CÁC LŨY THỪA CỦA 2

NGUYỄN TRỌNG TUẤN

(GV THPT Hùng Vương, Plâyku, Gia Lai)

Bài viết này xét vấn đề tổng quát hơn : trình bày một số tính chất của hàm $f(n)$ nêu trên với $n \in \mathbb{N}^*$.

Mệnh đề 1. $f(n) \leq f(n+1)$, nghĩa là $f(n)$ là hàm không giảm.

Thực vậy, nếu cộng 1 vào mỗi cách biểu diễn của n ta được một cách biểu diễn của $n+1$, do đó $f(n) \leq f(n+1)$.

Mệnh đề 2. $f(2n+1) = f(2n) = f(2n-1) + f(n) = f(2n-2) + f(n)$ với mọi $n \geq 2$.

• Xét một cách biểu diễn bất kì của số $2n+1$. Vì $2n+1$ lẻ nên trong cách biểu diễn này số hạng 1 phải xuất hiện một số lẻ lần, nếu bỏ số hạng 1 đi ta có cách biểu diễn của số $2n$. Từ đó $f(2n+1) \leq f(2n)$. Kết hợp với Mệnh đề (MĐ) 1 suy ra $f(2n+1) = f(2n)$.

• Vì $f(2n-1) = f(2n-2)$ nên để chứng minh MĐ2 chỉ cần chứng tỏ $f(2n) = f(2n-2) + f(n)$.

Gọi A, B, C theo thứ tự là tập hợp các cách biểu diễn của số $2n$, của số $2n-2$, của số n . Gọi A_1 và A_2 lần lượt là tập hợp các cách biểu diễn của số $2n$ có chứa số 1 và không chứa số 1. Gọi $d(A)$ là số phần tử của tập hợp A . Rõ ràng : $A = A_1 \cup A_2$, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ nên $d(A) = d(A_1) + d(A_2)$. Để ý rằng với mỗi cách biểu diễn s của $2n$ ($s \in A_1$) thì số 1 xuất hiện một số chẵn lần

A_2 tới C do đó $d(A_2) = d(C)$. Kết quả là $d(A) = d(A_1) + d(A_2) = d(B) + d(C)$ hay $f(2n) = f(2n-2) + f(n)$. Đpcm.

Dựa vào các MĐ trên có thể dễ dàng tính được dãy $f(n)$ như sau : $f(1) = 1, f(3) = f(2) = 2, f(5) = f(4) = f(2) + f(2) = 4, f(7) = f(6) = f(4) + f(3) = 6, f(9) = f(8) = f(6) + f(4) = 10, \dots$

Mệnh đề 3. $f(2n) = 2 + f(2) + f(3) + \dots + f(n)$ với mọi $n \geq 2$.

Thực vậy, theo MĐ 2 có $f(2n) = f(n) + f(2(n-1)) = f(n) + f(n-1) + f(2(n-2)) = \dots = f(n) + f(n-1) + \dots + f(3) + f(2) + 2$.

Mệnh đề 4. $f(2n) \leq nf(n)$ với mọi $n \geq 2$.

Chứng minh dựa vào MĐ3 và MĐ1. Đẳng thức chỉ xảy ra với $n = 2, 3$.

Mệnh đề 5. $f(2^n) < 2^{n^2/2}$ với mọi $n \geq 3$.

Chứng minh bằng phương pháp quy nạp và sử dụng MĐ4.

Mệnh đề 6. $f(4n) > 2nf(n)$ với mọi $n \geq 2$.

Chứng minh : Với $n = 2$ thử thấy đúng. Xét $n \geq 3$. Trước hết ta chứng tỏ rằng :

$f(n-k) + f(n+k+1) \leq f(n-k-1) + f(n+k+2)$ với $0 \leq k \leq n-2$ (*) Ta xét 2 trường hợp sau :

a) $n-k = 2a+1$ với $a \geq 1$. Từ MĐ2 có :

$$f(n-k) = f(2a+1) = f(2a) = f(n-k-1)$$

$$f(n+k+1) = f(2a+2k+2) = f(2a+2k+3) = f(n+k+2) \text{ nên (*) đúng.}$$

b) $n-k = 2a$ với $a \geq 1$. Từ MĐ2 có :

$$\begin{aligned} f(n+k+2) - f(n+k+1) &= f(2a+2k+2) - f(2a+2k+1) = \\ &= f(2a+2k+2) - f(2a+2k) = f(a+k+1) \quad (1) \\ f(n-k) - f(n-k-1) &= f(2a) - f(2a-1). \end{aligned}$$

Vế phải đẳng thức này bằng

$$\begin{aligned} f(2a) - f(2a-2) &= f(a) \text{ với } a \geq 2, \text{ và bằng} \\ f(2) - f(1) &= f(1) = f(a) \text{ với } a = 1. \text{ Do đó} \\ f(n-k) - f(n-k-1) &= f(a) \text{ với mọi } a \geq 1 \quad (2) \end{aligned}$$

Theo MĐ1 thì $f(a+k+1) \geq f(a)$ nên từ (1), (2) có

$$f(n+k+2) - f(n+k+1) \geq f(n-k) - f(n-k-1) \Leftrightarrow$$

(*) Cho k thay đổi từ 0 đến $n-2$ ta được :

$$2f(n) \leq f(n) + f(n+1) \leq f(n-1) + f(n+2) \leq \dots \leq f(2) + f(2n-1).$$

$$\text{Suy ra } f(4n) = 2 + f(2n) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{n-2} (f(n-k) + f(n+k+1)) \geq 2nf(n).$$

Mệnh đề 7 : $f(2^n) > 2^{n^2/4}$ với mọi $n \geq 3$.

Chứng minh bằng quy nạp và sử dụng MĐ6.

Các bạn cũng có thể đánh giá $f(2^n)$ chặt chẽ

hơn, chẳng hạn : $f(2^n) \geq 2^{(n+3)^2/4}$ hoặc

$$f(2^n) \geq 2^{(n-2)^2/3} \text{ và } f(2^n) \leq n + 2^{n(n-1)/2}.$$



? Hỏi: Bài toán yêu cầu tính $I = \int_0^1 x^3 \cdot e^{x^2} dx$,

em làm theo 3 cách (có lời giải kèm theo) lại ra các kết quả khác nhau. Đề nghị Tòa soạn cho ý kiến.

(NGHIÊM HOÀI THU, Xóm Ngõ Gạo, Phật Tích, Tiên Du, Bắc Ninh).

Đáp: Kết quả tính hai cách đầu của bạn đều sai. Trong cách thứ nhất : $v = 2x \cdot e^{x^2}$ và trong

cách thứ hai: $v = \frac{1}{2x} \cdot e^{x^2}$ đều không phải là

nguyên hàm của $v' = e^{x^2}$, từ v bạn tính thử $v' (!)$. Cách làm thứ ba của bạn là đúng, đặt $t = x^2$ thì

$$I = \frac{1}{2} \int_0^1 t \cdot e^t dt = \frac{1}{2}.$$

? Hỏi: Tích các số tự nhiên từ 1 đến 100 là số có tận cùng bao nhiêu chữ số 0?

(VŨ LAN ANH, 10A, THPT chuyên ban Hồng Gai, Tp Hạ Long, Quảng Ninh)

Đáp: Bạn hãy thử xem có bao nhiêu số tự nhiên từ 1 đến 100 là bội của 5 (có phải là 20 số không ?), trong đó có 4 số là bội của 25. Vậy ở dạng phân tích tiêu chuẩn của 100! sẽ có lũy thừa của 5 là 5^{24} và dễ thấy lũy thừa của 2 là 2^α với $\alpha \geq 24$.

Từ đó bạn sẽ giải được trọn vẹn bài toán này !

? Hỏi: Trong lời giải một bài toán có đoạn em viết :

$$\frac{x^2+1}{x} = k(x-x_0) + y_0 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 1 = x[k(x-x_0) + y_0] \quad (2)$$

(vì $x = 0$ không phải là nghiệm của (2) nên (1) và (2) tương đương). Như vậy có được không?

(PHẠM THU HUYỀN, Thái Bình)

Đáp: Điều em viết hoàn toàn đúng.

? Hỏi: Tạp chí có thể cho biết tiêu chuẩn của một bài giải tốt ? Em giải khá nhiều, thế nhưng rất ít được đăng tên mặc dù nhiều bài giải của em cũng như lời giải trên tạp chí, chỉ trình bày chặt chẽ, chi tiết hơn mà thôi...

(TRẦN PHƯƠNG ANH, 11A1, THPT Hai Bà Trưng, Vinh Phúc)

Đáp: Câu hỏi của em cũng là nỗi lòng bằng khuâng của rất nhiều bạn khi tham gia cuộc thi giải toán - lý trên tạp chí !. Lời giải của một bài toán gọi là tốt nếu : diễn đạt mạch lạc, lập luận chính xác, kết quả đúng đắn.

Khi lời giải đã tốt rồi thì lời giải tốt hơn là : ngắn gọn hơn, độc đáo hơn. Và điều cuối cùng là : diện tích của tạp chí có hạn nên Tòa soạn rất cân nhắc khi khen ngợi, nêu tên các bạn. Xin cảm ơn em và tất cả các bạn đã đến với tạp chí. Em và các bạn thấy yêu Toán hơn, học Toán tốt hơn đã là điều thu hoạch lớn rồi...

THVT



ĐỀ RA KÌ NÀY

CÁC LỚP THCS

Bài T1/274. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x^3 - xy^2 + 2000y = 0 \\ y^3 - yx^2 - 500x = 0 \end{cases}$$

NGUYỄN XUÂN MINH
(Bà Rịa - Vũng Tàu)

Bài T2/274. Tìm giá trị nguyên dương nhỏ nhất của biểu thức

$$\frac{x^4 + y^4}{1997.1999}$$

trong đó x, y là các số nguyên dương.

NGUYỄN ANH DŨNG
(Thanh Hóa)

Bài T3/274. Các số thực dương a, b, x, y thỏa mãn các điều kiện : $a+b=1, ax+by=2, ax^2+by^2=3$. Chứng minh rằng $4 < ax^3+by^3 < 4,5$.

TRẦN NAM DŨNG
(Tp Hồ Chí Minh)

Bài T4/274. Cho tứ giác nội tiếp $ABCD$. Lấy các điểm M, N, P, Q theo thứ tự trên các cạnh AB, BC, CD, DA sao cho $\frac{MA}{MB} = \frac{PD}{PC} = \frac{AD}{BC}$

$$\text{và } \frac{QA}{QD} = \frac{NB}{NC} = \frac{AB}{CD}.$$

Chứng minh rằng MP vuông góc với NQ .

NGUYỄN KHÁNH NGUYỄN
(Hải Phòng)

Bài T5/274. Một nhóm học sinh đi cắm trại, trong đó có ít nhất 2 nam và 2 nữ. Biết rằng mỗi nữ sinh quen ít nhất một nam sinh và không có nam sinh nào quen tất cả nữ sinh. Chứng minh rằng có thể tìm được hai nam sinh A, B và hai nữ sinh X, Y sao cho A quen X và B quen Y nhưng A không quen Y và B không quen X .

TRỊNH NGỌC HOÀN
(Thừa Thiên - Huế)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/274. Chứng minh bất đẳng thức sau với mọi số thực x :

$$\frac{1 + 2x \arctan x}{2 + \ln(1+x^2)^2} \geq \frac{1 + e^{x/2}}{3 + e^x}$$

NGUYỄN HÀO LIÊU
(Thừa Thiên - Huế)

Bài T7/274. Tìm nghiệm dương của phương trình :

$$x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{1+(1/x)} - x^3 \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)^{1+(1/x^2)} = 1 - x$$

ĐOÀN THẾ PHIỆT
(Nam Định)

Bài T8/274. Cho tam giác ABC . Chứng minh rằng

$$\frac{1 + \cos \frac{A}{2}}{A} + \frac{1 + \cos \frac{B}{2}}{B} + \frac{1 + \cos \frac{C}{2}}{C} > 3\sqrt{3}$$

trong đó các góc A, B, C đo bằng radian.

NGUYỄN THANH GIANG
(Hưng Yên)

Bài T9/274. Cho tam giác ABC . Gọi p là nửa chu vi $\triangle ABC$ và R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác đó. Gọi D, E, F theo thứ tự là tâm đường tròn bàng tiếp ứng với góc A , góc B , góc C . Chứng minh rằng :

$$DE^2 + EF^2 + FD^2 \geq 8\sqrt{3}pR.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

ĐÀO MẠNH THẮNG
(Hà Nội)

Bài T10/274. Ba mặt cầu $(O_1, R_1), (O_2, R_2), (O_3, R_3)$ tiếp xúc với nhau từng đôi một và cùng tiếp xúc với mặt phẳng chứa tam giác ABC tại ba đỉnh A, B, C . Gọi S là diện tích $\triangle ABC$ và R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác đó. Chứng minh rằng :

$$R_1 + R_2 + R_3 \geq \frac{2S}{R}$$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

TRẦN DUY HINH
(Bình Định)

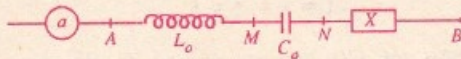
CÁC ĐỀ VẬT LÍ

Bài L1/274. Trên một mặt bàn nằm ngang, nhẵn, dọc theo một đường thẳng, người ta đặt ba quả cầu có cùng kích thước, khối lượng của chúng lần lượt là m, M và $2M$ (hình vẽ). Quả cầu m bay đến va chạm đàn hồi và trực diện vào quả cầu M . Hỏi với tỉ số nào của $\frac{m}{M}$ thì trong hệ còn xảy ra vừa đúng một va chạm nữa ?



TÔ GIANG (st)
(Hà Nội)

Bài L2/274. Một mạch điện có sơ đồ như ở hình dưới :



$$u_{AB} = u = 200\sqrt{2} \sin 100\pi t \text{ (V);}$$

L_0 là cuộn dây thuần cảm có cảm kháng $Z_{L_0} = 30\Omega$. C_0 là tụ điện có dung kháng $Z_{C_0} = 50\Omega$;

X là đoạn mạch có chứa hai trong ba phần tử R, L, C mắc nối tiếp nhau; Ampe kế nhiệt a trở $I = 0,8A$; hệ số công suất của đoạn mạch AB là $k = 0,6$.

1) Xác định các phần tử của X và độ lớn của chúng.

2) Viết biểu thức của $u_{NB} = u_X$.

NGUYỄN QUANG HẬU
(Hà Nội)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/274. Solve the system of equations :

$$\begin{cases} x^3 - xy^2 + 2000y = 0 \\ y^3 - yx^2 - 500x = 0 \end{cases}$$

T2/274. Find the least positive integer-value of the expression $\frac{x^4 + y^4}{1997.1999}$ where x and y are positive integers.

T3/274. The positive numbers a, b, x, y satisfy simultaneously the conditions :

$$a+b=1, ax+by=2, ax^2+by^2=3.$$

Prove that : $4 < ax^3+by^3 < 4,5$.

T4/274. Let be given an inscribable quadrilateral $ABCD$ and the points M, N, P, Q respectively on the sides AB, BC, CD, DA such that $\frac{MA}{MB} = \frac{PD}{PC} = \frac{AD}{BC}$ and

$$\frac{QA}{QD} = \frac{NB}{NC} = \frac{AB}{CD}.$$

Prove that MP is perpendicular to NQ .

T5/274. A group of schoolchildren goes to a picnic, among them there are at least two boys and two girls. Suppose that each girl in the group has acquaintance with at least a boy and there is no boy having acquaintance with all girls in the group. Prove that there are two boys A, B and two girls X, Y in the group such that A has acquaintance with X, B has acquaintance with Y but A has not acquaintance with Y and B has not acquaintance with X .

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/274. Prove the following inequality for every real number x :

$$\frac{1+2x \arctan x}{2+\ln(1+x^2)^2} \geq \frac{1+e^{x/2}}{3+e^x}.$$

T7/274. Find positive roots of the equation

$$x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{1+(1/x)} - x^3 \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)^{1+(1/x^2)} = 1 - x.$$

T8/274. Let ABC be a triangle. Prove that

$$\frac{1 + \cos \frac{A}{2}}{A} + \frac{1 + \cos \frac{B}{2}}{B} + \frac{1 + \cos \frac{C}{2}}{C} > 3\sqrt{3}.$$

where the angles A, B, C are measured in radians.

T9/274. Given a triangle ABC . Let p be the semiperimeter of $\triangle ABC$ and R be its circumradius. Let D, E, F be respectively the centers of its escribed circles in the angles A, B, C . Prove that :

$$DE^2 + EF^2 + FD^2 \geq 8\sqrt{3}pR.$$

When does equality occur ?

T10/274. Three spheres $(O_1, R_1), (O_2, R_2), (O_3, R_3)$ are tangent each to the two others and are tangent to a plane containing a triangle ABC respectively at its vertices A, B, C . Let S be the area of $\triangle ABC$ and R be its circumradius. Prove that :

$$R_1 + R_2 + R_3 \geq \frac{2S}{R}.$$

When does equality occur ?

Đón đọc

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ SỐ 275

Tạp chí số 275 tới tay các bạn với những tin bài bổ ích và thú vị : **Mã khóa bí mật và những chữ số** - câu chuyện về một nữ điệp viên mà lại liên quan tới một bài toán số học ; **Từ bất đẳng thức Đại số đến bất đẳng thức Hình học** - dành cho các bạn chuẩn bị thi đại học và các bạn muốn "sáng tác" các đề toán ; **Đề thi tuyển sinh vào lớp 10** chuyên Toán của ĐHSPI Hà Nội năm 1999 ; **Cuộc thi Olympic truyền thống 30-4 lần thứ V năm 2000** ;...

Những chuyên mục thường kì và một chuyên mục mới sẽ xuất hiện ở bài 2 ? Ai sẽ được nhận quà sinh nhật của Toán học và Tuổi trẻ ? Tháng Năm, cùng mùa thi tới gần, Tạp chí số 275 sẽ tới với các bạn.

THTT



Bài T1/270. Tìm tất cả các số nguyên dương x, y, z sao cho

$$3^x + 4^y = 7^z.$$

Lời giải. (của Nguyễn Văn Bằng, 9A2, THCS Mĩ Đức, huyện Mỹ Đức, Hà Tây). Để thấy $x = y = z = 1$ là một nghiệm của phương trình

$$3^x + 4^y = 7^z \quad (1)$$

Ta sẽ chứng minh đó là nghiệm duy nhất.

Thật vậy, ta xét với $x \geq 2, y \geq 2, z \geq 2$.

* Nếu $x = 2k$ ($k \in \mathbb{N}^*$) thì phương trình (1) tương đương với

$$3^{2k} + 4^y = 7^z \Leftrightarrow 9^k + 4^y = 7^z$$

Vì $9 \equiv 1 \pmod{8}$ và $4^y \equiv 0 \pmod{8}$ với $y \geq 2$ nên $9^k + 4^y \equiv 1 \pmod{8}$ (2)

Mặt khác $7^z \equiv (-1)^z \pmod{8}$ (3)

Từ (2) và (3) suy ra z chẵn :

Đặt $z = 2t$ ($t \in \mathbb{N}$), khi đó (1) tương đương với

$$3^x + 4^y = 7^{2t}$$

$$\Leftrightarrow 3^x = 7^{2t} - 2^{2y} = (7^t + 2^y)(7^t - 2^y)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3^u = 7^t + 2^y \\ 3^v = 7^t - 2^y \end{cases} \quad (u, v \in \mathbb{N}, u+v = x) \quad (4)$$

Từ (4) ta có

$$3^u + 3^v = 2 \cdot 7^t \quad (5)$$

Từ $7 \equiv 1 \pmod{3}$ có $2 \cdot 7^t \equiv 2 \pmod{3}$ (6)

- Nếu $v = 0$ từ (5) ta có $2 \cdot 7^t = 3^u + 1 \equiv 1 \pmod{3}$ trái với (6). Vậy phương trình đã cho vô nghiệm với $v = 0$.

- Nếu $v > 0$ thì $2 \cdot 7^t = 3^u + 3^v \equiv 0 \pmod{3}$ trái với (6). Vậy phương trình đã cho vô nghiệm với $v > 0$.

Vậy với $x = 2k$ ($k \in \mathbb{N}$) thì phương trình đã cho vô nghiệm.

* Nếu $x = 2k+1$ ($k \in \mathbb{N}$) thì phương trình (1) tương đương với

$$3^{2k+1} + 4^y = 7^z \Leftrightarrow 3 \cdot 9^k + 4^y = 7^z.$$

Vì $9^k \equiv 1 \pmod{8} \Rightarrow 3 \cdot 9^k + 4^y \equiv 3 \pmod{8}$ ($4^y \equiv 0 \pmod{8}$ khi $y \geq 2$).

Mặt khác $7^z \equiv (-1)^z \pmod{8} \equiv \pm 1 \pmod{8}$

Vậy phương trình (1) vô nghiệm với $x = 2k+1$.

Tóm lại nghiệm duy nhất của phương trình đã cho là

$$x = y = z = 1.$$

Nhận xét. Các bạn sau đây có lời giải đúng: Hà Tây: Phan Anh Đăng, 9B, THCS Kiều Phú, Quốc Oai; Hà Nội: Trần Kim Phương, 9A1, THCS Chu Văn An; Hải Dương: Bùi Thị Thùy Dung, 9B, THCS Ngô Gia Tự, TP Hải Dương; Nam Định: Ngô Huy Hoàng, Nguyễn Trường Giang, 8A2, THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên, Phòng Văn Doanh, 9D, THCS Ngô Đồng, Giao Thủy; Nghệ An: Võ Văn Thành, Đậu Quốc Chung, 9B, THCS Đặng Thai Mai, TP Vinh, Đậu Thị Ngọc Ánh, 9C, PTCS thị trấn Nam Đàn.

TỔNG NGUYỄN

Bài T2/270. Chứng minh rằng

$$\left(1 - \frac{a}{b+c}\right) \left(1 - \frac{b}{c+a}\right) \left(1 - \frac{c}{a+b}\right) \leq \frac{1}{8}$$

trong đó a, b, c là các số thực dương.

Lời giải. Trong 3 thừa số $1 - \frac{a}{b+c}, 1 - \frac{b}{c+a},$

$1 - \frac{c}{a+b}$ không thể có quá 1 thừa số không dương. Thật vậy, do vai trò bình đẳng của 3 thừa số, giả sử :

$$\begin{cases} 1 - \frac{a}{b+c} \leq 0 \\ 1 - \frac{b}{c+a} \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b+c-a \leq 0 \\ a+c-b \leq 0 \end{cases} \Rightarrow c \leq 0, \text{ mâu}$$

thuận với giả thiết.

* Nếu trong 3 thừa số có 1 thừa số không dương và 2 thừa số dương thì bất đẳng thức là đúng.

* Nếu 3 thừa số đều dương thì $b+c-a > 0; c+a-b > 0$ và $a+b-c > 0$. Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với :

$$8(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) \leq (b+c)(c+a)(a+b) \quad (*)$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có

$$(b+c)(c+a)(a+b) \geq 8abc \quad (1)$$

Mặt khác có nhiều cách để chứng minh :

$$(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) \leq abc \quad (2)$$

Cách 1. Áp dụng bất đẳng thức Côsi :

$$\sqrt{(b+c-a)(c+a-b)} \leq \frac{(b+c-a) + (c+a-b)}{2} = c$$

$$\text{Tương tự : } \sqrt{(c+a-b)(a+b-c)} \leq a$$

$$\sqrt{(a+b-c)(b+c-a)} \leq b.$$

Nhân từng vế của 3 bất đẳng thức trên ta có bất đẳng thức (2).

Cách 2. Ta có :

$$b^2 - (a-c)^2 = (b+a-c)(b+c-a) \leq b^2$$

GIẢI BÀI KÌ TRƯỚC

$$c^2 - (a - b)^2 = (c + a - b)(c + b - a) \leq c^2$$

$$a^2 - (b - c)^2 = (a + b - c)(a + c - b) \leq a^2$$

Từ đó cũng dẫn đến (2).

Cách 3. Các bạn THPT có thể thấy (2) là một bài toán quen thuộc trong Bộ đề thi tuyển sinh Đại học với a, b, c chính là độ dài 3 cạnh của tam giác. Khi đó :

$$\frac{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}{abc} = \frac{8(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}$$

$$= \frac{8S^2}{pabc} = \frac{8 \cdot (p \cdot r) \cdot \frac{abc}{4R}}{pabc} = \frac{2r}{R}$$

Dựa vào $R \geq 2r$ dẫn tới (2). Tất nhiên cách này dài dòng hơn 2 cách trên.

Nhận xét. 1) Một số bạn quen xét tình huống trong 3 thừa số có một thừa số không dương (có bạn tự cho thêm giả thiết a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác để "tự nhiên quen" trường hợp này). Từ đó đã nhận từng vế của các bất đẳng thức kể cả khi có vế nhận giá trị âm.

2) Có bạn đã chứng minh và sử dụng bất đẳng thức Nasobit :

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

Sau đó áp dụng bất đẳng thức Côsi để có :

$$\left(1 - \frac{a}{b+c}\right) \left(1 - \frac{b}{c+a}\right) \left(1 - \frac{c}{a+b}\right)$$

$$\leq \frac{1}{27} \left[3 - \left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}\right)\right]^3$$

$$\leq \frac{1}{27} \left(3 - \frac{3}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

3) Một ít bạn đã mở rộng một cách tự nhiên bài toán, xin dành để các bạn thử suy nghĩ.

4) Đa số các bạn có lời giải đúng. Các bạn sau đây trình bày tốt và gửi về sớm : **Yên Bái:** Nguyễn Thanh Yên, 8E, THCS Võ Thị Sáu; **Hà Tây:** Lê Quý Lợi, 8B, THCS Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hòa; **Phú Thọ:** Lê Sơn Tùng, Nguyễn Khoa, 8A, THCS Lâm Thao, Hoàng Ngọc Minh, 9C, THCS Việt Trì; **Đà Nẵng:** Hoàng Anh Vũ, 9/2, THCS Nguyễn Khuyến, Tp Đà Nẵng; **Hà Tĩnh:** Phan Đức Thiện, THCS Nguyễn Du, Tx Hà Tĩnh; **Khánh Hòa:** Trần Bình Minh, 9¹⁵, Nguyễn Ngọc Nga Sơn, 8¹³, THCS Thái Nguyên, Nha Trang; **Quảng Trị:** Phan Quốc Hưng, 9A, THCS thị trấn Hải Lăng; **Nam Định:** Nguyễn Đăng Hợp, 8A2, THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên; **Hải Phòng:** Bùi Hải Nam, 9B, NK Trần Phú; **Bình Thuận:** Phạm Thế Nghĩa, Nguyễn Tiên Phúc, 9A1, THCS Trần Hưng Đạo, Phan Thiết; **Hà Giang:** Nguyễn Bằng Giang, lớp 9 tạo nguồn trường chuyên tỉnh; **Tp Hồ Chí Minh:** Nguyễn Đình Khuông, 8A1, THCS Ngô Tất Tố, Phú Nhuận, Lý

Quốc Vinh, THCS Hồng Bàng, Q.5; **Đồng Tháp:** Lê Thanh Nhân, 9A1, THCS thị xã Cao Lãnh; **Bến Tre:** Nguyễn Tiến Dũng, 8², THCS Mỹ Hóa; **Đồng Nai:** Phạm Văn Thắng, 9³, THCS Nguyễn Bình Khiêm, Biên Hòa; **Hưng Yên:** Đoàn Kim Huế, 6C, THCS Phạm Huy Thông, Ân Thi; **Ninh Thuận:** Lâm Thị Bích Thủy, 7A, THCS Võ Thị Sáu, Phan Rang; **Quảng Ngãi:** Phạm Văn Trung, 9I, THCS Trần Hưng Đạo; **Tây Ninh:** Đào Duy Bình, 9A1, THCS thị trấn Dương Minh Châu; **Vĩnh Phúc:** Vũ Nhật Huy, 9A, THCS Vĩnh Tường; **Kon Tum:** Nguyễn Lương Thủy Viên, 7A, THCS chuyên Kon Tum; **Hà Nội:** Nguyễn Anh Tú, Nguyễn Ngọc Anh, Nguyễn Lê Trung, 8D, Hà Nội - Amsterdam; **Thái Nguyên:** Vũ Thị Ánh Nguyệt, 6A₁₁, THCS Trung tâm, Tx Sông Công, v.v...

LÊ THỐNG NHẤT

Bài T3/270. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau :

$$\frac{(x^2 + 16|x| + 48)(x^2 + 12|x| + 27)}{x^2}$$

Lời giải. (Của bạn Trần Thanh Hải, THCS Việt Trì, Phú Thọ và của một số bạn).

$$\frac{(x^2 + 16|x| + 48)(x^2 + 12|x| + 27)}{x^2}$$

$$= \frac{(|x| + 12)(|x| + 4)(|x| + 9)(|x| + 3)}{|x|^2}$$

$$= \frac{(|x| + 12)(|x| + 3)(|x| + 9)(|x| + 4)}{|x|^2}$$

$$= \frac{(x^2 + 15|x| + 36)(x^2 + 13|x| + 36)}{|x|^2}$$

$$= \left(|x| + 15 + \frac{36}{|x|}\right) \left(|x| + 13 + \frac{36}{|x|}\right)$$

$$\geq (15 + 12)(13 + 12) = 675,$$

do $|x| + \frac{36}{|x|} \geq 12$ theo bất đẳng thức Côsi.

Đẳng thức chỉ xảy ra khi $|x| = 6$. Vậy giá trị nhỏ nhất cần tìm của biểu thức là 675 ứng với $x = \pm 6$.

Nhận xét. Đây không phải là bài toán quá khó nhưng có một số bạn làm sai. Trong đó có vài bạn ra điều kiện đúng là giá trị nhỏ nhất ứng với $|x| = 6$, nhưng tính nhầm kết quả.

Rất nhiều bạn làm đúng. Có lời giải đặc biệt gọn là những bạn sau.

Nam Định: Vũ Tôn Anh Tuấn, 9B, THCS Hải Hậu; **Quảng Ngãi:** Phạm Văn Trung, 9I, THCS Trần Hưng Đạo; **Buôn Mê Thuột:** Đặng Trung Nguyên, 9A1, Huỳnh Thúc Kháng; **Kon Tum:** Nguyễn Lương Thủy Viên, 7A, THPT chuyên Kon Tum; **Tây Ninh:**

GIẢI BÀI KÌ TRƯỚC

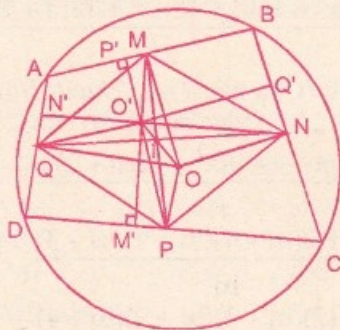
Đào Duy Bình, 9A, THCS thị trấn Dương Minh Châu;
Đồng Nai: Trần Võ Huy, 9/3 Nguyễn Bình Khiêm, Biên Hòa;
Quảng Trị: Bạch Ngọc Bảo Phúc, 9B, Gio Linh;
Đồng Tháp: Lê Thanh Nhân, 9A1, THPT Cao Lãnh;
Ninh Thuận: Lâm Thị Bích Thủy, 7A, THCS Võ Thị Sáu, Phan Rang;
Yên Bái: Nguyễn Thanh Bình, 8E, Võ Thị Sáu;
Bắc Giang: Tôn Tiến Hùng, 9A2, Thân Nhân Trung, Việt Yên;
Bến Tre: Nguyễn Tiến Dũng, 8, THCS Mỹ Hòa.

VŨ ĐÌNH HÒA

Bài T4/270. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để một tứ giác nội tiếp trong một đường tròn là các đường thẳng đi qua trung điểm mỗi cạnh của tứ giác và vuông góc với cạnh đối diện thì đồng quy.

Lời giải.

Điều kiện cần. Giả sử $ABCD$ là tứ giác nội tiếp đường tròn (O) . Gọi O' là giao của hai



đường vuông góc hạ từ M và P xuống cạnh đối diện (hình vẽ). Dễ thấy $OM \perp AB$, $OP \perp CD$ nên $MOPO'$ là hình bình hành. Suy ra $O'O$ cắt MP tại điểm giữa I của MP . Mặt khác $MNPQ$ là hình bình hành nên QN cắt MP cũng tại I và I là trung điểm của QN , của OO' . Do vậy $QO'NO$ là hình bình hành. Suy ra $QO' \perp BN$ và $NO' \perp AD$ tức các đường thẳng đi qua trung điểm mỗi cạnh và vuông góc với cạnh đối diện thì đồng quy.

Điều kiện đủ. Giả sử MM', NN', PP', QQ' (qua trung điểm mỗi cạnh và vuông góc với cạnh đối diện) là đồng quy tại O' . Gọi O là giao của 2 đường trung trực của AB và CD . (O tồn tại, vì nếu trái lại thì hoặc O' không tồn tại hoặc $MM' \equiv PP'$). Trong trường hợp sau thì $ABCD$ là hình chữ nhật hoặc là hình thang cân. Nếu là hình chữ nhật thì điều kiện đủ hiển nhiên đúng. Trường hợp còn lại chứng minh cũng dễ dàng). Ta có $OPO'M$ là hình bình hành, suy ra OO' cắt MP tại trung điểm I của OO' , MP . Tương tự phần chứng minh điều

kiện đủ $MNPQ$ là hình bình hành nên I lại là trung điểm của QN . Vậy $QONO'$ là hình bình hành. Suy ra $ON \perp BC$, $OQ \perp AD$ nên O là tâm đường tròn đi qua 4 đỉnh A, B, C, D tức $ABCD$ nội tiếp được.

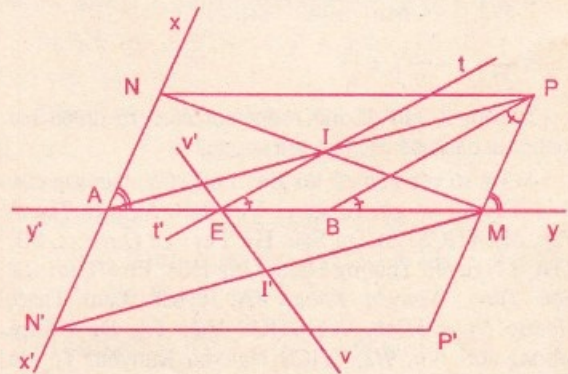
Nhận xét. Giải tốt bài này có các bạn:

Phú Thọ: Trần Thanh Hải, 9C, THCS Việt Trì, Hoàng Ngọc Minh, 9C, THCS Việt Trì; **Hà Tây:** Kiều Đăng Quang, 9B, THCS Thạch Thất, Hải Dương;
Nam Định: Cao Ngọc Khánh, 9D, THCS Ngô Đồng, Giao Thủy, Đỗ Thị Hải Yến, 9B, THCS Hải Hậu, Nguyễn Thành Nam, 8A2, THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên;
Nghệ An: Nguyễn Như Phong, 9B, Đặng Thai Mai, Đinh Viết Sang, 9A, THCS Lý Nhật Quang, Đồ Lương;
Bến Tre: Nguyễn Tiến Dũng, 8², THCS Mỹ Hòa.

VŨ KIM THỦY

Bài T5/270. Cho hai đường thẳng xx' và yy' vuông góc với nhau tại điểm A . Trên yy' lấy điểm B (khác A) cố định. Với mỗi điểm N trên xx' lấy điểm M trên yy' sao cho $BM = AN$. Tìm quỹ tích trung điểm I của MN khi N di động trên xx' .

Lời giải. Ta xét bài toán tổng quát hơn khi $\angle xAy = \alpha$ ($0^\circ < \alpha < 180^\circ$). Không mất tính tổng quát coi B thuộc tia Ay (xem hình vẽ). Khi $N \equiv A$ thì $M \equiv B$ và I trùng với trung điểm E của đoạn thẳng AB , do đó chỉ cần xét với N khác A .



a) Trường hợp điểm N thuộc tia Ax , điểm M thuộc tia By .

Thuận: Dựng hình bình hành $AMPN$ thì $BM = AN = PM \Rightarrow \angle PBM = \angle BPM = \angle PMy/2 = \alpha/2$.

Vì EI là đường trung bình của $\triangle ABP$ nên $\angle IEB = \angle PBM = \alpha/2$. Vậy điểm I nằm trên tia EI với góc E và $\angle IEy = \alpha/2$.

GIẢI BÀI KÌ TRƯỚC

Đảo: Lấy điểm I (khác E) thuộc tia Et . Lấy điểm P đối xứng với điểm A qua điểm I . Dựng hình bình hành $AMPN$ sao cho $N \in Ax$ và $M \in Ay$ thì I là trung điểm MN . Hơn nữa, EI là đường trung bình của $\triangle ABP$ nên $\angle PBy = \angle IEy = \alpha/2$ mà $\angle PMy = \alpha$ nên M phải thuộc tia By và $BM = PM = AN$.

Kết luận: Quỹ tích trung điểm I của MN thỏa mãn $N \in Ax$, $M \in By$, $AN = BM$ là tia Et có gốc E là trung điểm của AB và $\angle IEy = \angle xAy/2 = \alpha/2$.

b) Lập luận tương tự khi cho N chạy trên xx' và M chạy trên yy' với $AN = BM$ thì quỹ tích trung điểm I của MN là hai đường thẳng $t't$ và $v'v$ vuông góc với nhau tại trung điểm E của AB và $\angle IEy = \alpha/2$.

Nhận xét. 1) Có nhiều cách giải bài này. Nếu dùng phương pháp tọa độ thì không cần có phân đảo vì đã biến đổi tương đương.

2) Một số bạn chứng minh dài, hoặc quên phần đảo, hoặc trình bày phần đảo không chặt chẽ. Có đến 58 bạn cho rằng quỹ tích chỉ là 1 đường thẳng, hoặc là 2 tia chung gốc.

3) Một số bạn có nhận xét là bài toán có thể tổng quát hóa khi xx' và yy' không vuông góc:

Trần Bình Minh, 9K, THCS Lê Hồng Phong, thị xã Yên Bái; **Nguyễn Trung Hoàng**, 8A, PTDL Nguyễn Tất Thành, Hà Nội; **Nguyễn Thành Nam**, Hoàng Trung Trí, 9A, THPT Nguyễn Trãi, Hải Dương.

Các bạn sau cũng có lời giải tốt:

Phú Thọ: **Trần Thanh Hải**, Hoàng Văn Cánh, 9C, THCS Việt Trì; **Phương Thủy**, 9T, THCS Phong Châu, huyện Phong Châu; **Vũ Hà**, 9A, THCS Phong Châu, huyện Phù Ninh; **Vinh Phúc:** **Lê Tiến Dũng**, 9B, THCS Yên Lạc; **Cao Mạnh Linh**, Nguyễn Thu Trang, 9A, THCS Vĩnh Tường; **Hà Nội:** **Lê Đức Phương**, 9H, THCS Trưng Vương; **Nghiêm Trọng Tú**, 9A, THCS Đông Anh; **Nam Định:** **Phùng Văn Doanh**, 9D, THCS Ngô Đồng, Giao Thủy; **Thái Bình:** **Đào Mạnh Thiện**, 9C, THCS Hòa Bình, Vũ Thư; **Bắc Ninh:** **Nguyễn Thị Dịng**, 9A, THCS Yên Phong; **Ninh Bình:** **Đinh Quyết Tiến**, 9D, THCS Yên Ninh, Yên Khánh; **Nghệ An:** **Đậu Thị Ngọc Ánh**, 9C, THCS thị trấn Nam Đàn, Đinh Viết Sang, **Trần Đức Dũng**, 9A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương; **Vũ Văn Thành**, Trung Tuấn Dũng, Nguyễn Như Phong, 9B, THCS Đặng Thai Mai, Vinh; **Hà Tĩnh:** **Lê Minh Quang**, 8A1, THCS Phan Huy Chú, Thạch Hà; **Quảng Bình:** **Hoàng Minh Anh**, 8/2 THCS Đồng Mỹ, Đồng Hới; **Thừa Thiên - Huế:** **Đặng Đình Chính**, 9A, THCS Phú Bài, Hương Thủy; **Đà Nẵng:** **Lê Hoàng Phước**, 9/2, THCS Nguyễn Khuyến; **Quảng Nam:** **Đặng Quang Hải**, 8/2, THCS Chu Văn An, Duy Xuyên; **Khánh Hòa:** **Vũ Xuân Minh**, 9/1, THCS Cam

Nghĩa, Cam Ranh; **Nguyễn Ngọc Nga Sơn**, 8/13, THCS Thái Nguyên, Nha Trang; **Đắc Lắc:** **Lê Thị Hiền Nhi**, **Nguyễn Thị Thu Hằng**, 9B, THCS Nguyễn Du, Buôn Ma Thuột; **Đồng Nai:** **Đào Thị Phương Tuyền**, 8/3, **Lê Phương**, **Phạm Văn Thắng**, 9/3, THCS Nguyễn Bình Khiêm, Biên Hòa; **Tây Ninh:** **Đào Duy Bình**, 9A1, THCS thị trấn Dương Minh Châu; **Tiền Giang:** **Nguyễn Thị Hương Giang**, 9A1, THPT Nguyễn Đình Chiểu, Mỹ Tho; **Bến Tre:** **Nguyễn Tiến Dũng**, 8C, THCS Mỹ Hóa

VIỆT HẢI

Bài T6/270. Tìm số các nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 = y^3 \\ x + y^2 + 988 \sqrt{x^2 y} = 2000 \end{cases}$$

Lời giải. (của đa số các bạn). Đ/k: $y \geq 0$.

Đặt $x = t^3$. Từ phương trình đầu của hệ ta được $y = t^2$.

Thế vào phương trình thứ 2 của hệ ta được phương trình:

$$t^4 + t^3 + 988t - 2000 = 0 \quad (1)$$

Vì sự tương ứng giữa (x, y) và t là 1-1 nên số nghiệm của phương trình (1) cũng là số nghiệm của hệ đã cho. Viết vế trái của (1) là $f(t)$ dưới dạng

$$f(t) = (t-2)g(t), \quad g(t) = t^3 + 3t^2 + 6t + 1000$$

Ta có: $g'(t) = 3t^2 + 6t + 6 > 0 \quad \forall t$, $g(0) = 1000 > 0$, nên phương trình $g(t) = 0$ có 1 nghiệm âm duy nhất $t_0 \neq 2$.

Vậy hệ phương trình đã cho có 2 hệ nghiệm (ứng với $t = 2$ và t_0).

Nhận xét. 1) Một số các bạn khác giải theo cách tương tự như đã trình bày theo các kiểu đặt ẩn phụ khác.

2) Nghiệm của phương trình $g(t) = 0$ có thể tìm được theo cách đặt $t = 2v - 1$. Khi đó ta được phương trình:

$$4v^3 + 3v = -498.$$

Vì vậy nghiệm của (1) có dạng: $t = 2, t = 2v - 1$ với

$$v = \frac{1}{2} \left(a^{1/3} + \frac{1}{a^{1/3}} \right) \text{ với } a \text{ là nghiệm của phương trình}$$

$$\text{bậc hai: } \frac{1}{2} \left(a + \frac{1}{a} \right) = -498.$$

3) Tòa soạn nhận được gần 200 bài giải. Các tỉnh có số bài gửi nhiều là Vĩnh Phúc, Hải Dương, Hà Nội.

Hà Nội: **Hoàng Tiến Mạnh**, **Lê Sơn Tùng**, **Nguyễn Tuấn Dương**, **Trần Tất Đạt**, **Hoàng Tùng**, ĐHKHTN-ĐH Quốc Gia, **Vũ Quốc Mỹ**, THCS Trưng Vương, **Vũ Quý Nghiệp**, ĐHSPT; **Phú Thọ:** **Hoàng Ngọc Minh**, THCS Việt Trì, **Triệu Thu Lan**, THCS

GIẢI BÀI KÌ TRƯỚC

Phong Châu. **Hải Dương:** Trần Quang Khải, Trần Huy Kiên, THPT Nhị Chiểu, Phạm Hồng Quân, Phạm Hồng Quân, Nguyễn Thanh Hải, Chu Ngọc Hưng, Vũ Tuấn Nam, Bùi Duy Thịnh, Tô Minh Hoàng, Ngô Xuân Bách, THPT Nguyễn Trãi, Đoàn Văn Tuyền, Đoàn Văn Vũ, THPT Hồng Quang; **Vĩnh Phúc:** Nguyễn Tiến Thịnh, Đỗ Quốc Việt, Vũ Thanh Tùng, Đỗ Ngọc Tú, Tạ Viết Tôn, Dương Hà Phú, Tạ Tuấn Tài, Ngô Xuân Trường, Phan Hồng Nhật, Nguyễn Đức Toàn, Trần Mạnh Cường, Đỗ Ngọc ánh, Vũ Văn Phong, Lê Quốc Hưng, Lê Khánh Hùng, Nguyễn Hoài Vũ, THPT chuyên Vĩnh Phúc, Trần Anh Tuấn, THPT Liễn Sơn, Đỗ Hoàng Nam, THPT Xuân Hòa; **Nam Định:** Bùi Văn Tùng, THPT Trần Nhật Duật, Phùng Văn Thắng, THPT Lê Hồng Phong, Phùng Đại Diện, THPT Nguyễn Du; **Hưng Yên:** Quang Minh Sáng, THPT chuyên Hưng Yên; **Thanh Hóa:** Vũ Hà Tĩnh, Nguyễn Xuân Thành, Dương Công Đồng, THPT Đào Duy Từ, Lê Thiện Cơ, THPT Hoàng Hóa II, Mai Hải Lộc, THPT Nga Hải, Vũ Huy Minh, THPT Lê Hoàn, Bùi Ngọc Hân, Hà Xuân giáp, THPT Lam Sơn, Nguyễn Văn Trung, THPT Hậu Lộc I; **Nghệ An:** Phạm Ngọc Bội, THPT Phan Bội Châu; **Quảng Trị:** Trần Việt Anh, Bạch Ngọc Công Đức, Lê Anh Tuấn, THPT Lê Quý Đôn; **Lâm Đồng:** Phan Đình Hải Sơn, Tô Thu Hiền, THPT Bảo Lộc, Phan Thị Thanh Vân, THPT chuyên Lâm Đồng;

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T7/270. Dãy số $(u_n) (n = 0, 1, 2, \dots)$ được xác định bởi:

$u_0 = 1, u_1 = -1, u_{n+1} = ku_n - u_{n-1}$ với mọi $n = 1, 2, 3, \dots$ Tìm tất cả các giá trị hữu tỉ của k để dãy (u_n) là tuần hoàn.

Lời giải. (của bạn Lê Tâm, 9G, THCS Kỳ Anh, Hà Tĩnh và một số bạn khác). Ta xét ba trường hợp sau:

Trường hợp 1: $|k| > 2$

Dùng bất đẳng thức $|u_{n+1}| \geq |k| \cdot |u_n| - |u_{n-1}|$

$> 2|u_n| - |u_{n-1}| \geq |u_n|$ nếu $|u_n| \geq |u_{n-1}| > 0$

Ta suy ra $|u_0| = |u_1| < |u_2| < |u_3| < \dots$

Do đó (u_n) không là dãy số tuần hoàn.

Trường hợp 2: $|k| \leq 2, k$ là số hữu tỉ nhưng k không là số nguyên, tức là $k = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*, q \geq 2, (p, q) = 1$.

Ta có $u_2 = \frac{p}{q} u_1 - u_0 = \frac{-p-q}{q}$.

Quy nạp theo n , giả sử $u_i = \frac{p_i}{q^{i-1}}, p_i \in \mathbb{Z}$,

$(p_i, q) = 1$ với mọi $i = 1, 2, \dots, n$ (1)

$$\begin{aligned} \text{Khi đó } u_{n+1} &= \frac{p}{q} \cdot u_n - u_{n-1} = \\ &= \frac{p \cdot p_n - q^2 \cdot p_{n-1}}{q^n} = \frac{p_{n+1}}{q^n}, \end{aligned}$$

trong đó $p_{n+1} = p \cdot p_n - q^2 \cdot p_{n-1} \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn $(p_{n+1}, q) = 1$.

Do $q \geq 2$, từ (1) ta suy ra $u_n \neq u_m$ với mọi $n \neq m$. Nói riêng (u_n) không là dãy số tuần hoàn.

Trường hợp 3: $|k| \leq 2, k \in \mathbb{Z}$.

Có 5 giá trị của k như vậy:

1) $k = 2; u_{n+1} = 2u_n - u_{n-1}$ với mọi $n = 1, 2, \dots$, tức là (u_n) là cấp số cộng có công sai bằng $u_1 - u_0 = -2$. Nói riêng ta có $u_0 > u_1 > u_2 > \dots$ Hệ quả: (u_n) không là dãy số tuần hoàn.

2) $k = 1, u_2 = -2, u_3 = -1, u_4 = 1, u_5 = 2, u_6 = 1, u_7 = -1, \dots, (u_n)$ là dãy số tuần hoàn với chu kỳ bằng 6.

3) $k = 0 (u_n)$ là dãy số tuần hoàn với chu kỳ bằng 4 có dạng: $1, -1, -1, 1, 1, -1, \dots$

4) $k = -1 (u_n)$ là dãy số tuần hoàn với chu kỳ bằng 3 có dạng: $1, -1, 0, 1, -1, 0, \dots$

5) $k = -2 (u_n)$ là dãy số tuần hoàn với chu kỳ bằng 2 có dạng: $1, -1, 1, -1, \dots$

Vậy có bốn giá trị hữu tỉ của k là $-2, -1, 0, 1$ để (u_n) là dãy số tuần hoàn.

Nhận xét. 1) Có 34 bạn có lời giải đúng.

2) Một số bạn đã giải đúng khi dùng kết quả của lý thuyết đa thức để lập luận cho trường hợp 2: giả sử t là chu kỳ của dãy số (u_n) , ta có $u_t - u_0 = 0$. Nhận xét rằng $t \geq 2$ và $u_t - u_0$ là một đa thức với hệ số nguyên của biến số k , đa thức này có bậc bằng $(t-1)$ và hệ số cao nhất bằng $u_1 = -1$. Theo một kết quả đã biết trong lý thuyết đa thức, từ k là số hữu tỉ suy ra k là số nguyên.

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T8/270. Tìm tất cả các hàm số tăng thực sự $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau

a) $f(2n) = f(n) + n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Nếu $f(n)$ là số chính phương thì n là số chính phương.

Lời giải. (của bạn Bùi Ngọc Hân, lớp 10T, trường THPT Lam Sơn, Thanh Hóa, Phạm Đăng Khoa, 11, PTCT, ĐHSPT Vinh)

Do f là tăng thực sự nên

$f(n) < f(n+1) < \dots < f(2n) = f(n) + n$

Thành thử $f(n+1) = f(n) + 1$.

Đặt $f(1) = a$ ta có $f(n) = a + n - 1$.

GIẢI BÀI KÌ TRƯỚC

Thay $n = a^2 + a + 2$ ta suy ra
 $f(a^2 + a + 2) = a + a^2 + a + 1 = (a+1)^2$
 $\Rightarrow a^2 + a + 2$ là số chính phương.
 Mặt khác $a^2 < a^2 + a + 2 < (a+2)^2$
 $\Rightarrow a^2 + a + 2 = (a+1)^2 \Rightarrow a = 1$.
 Vậy $f(n) = n$. Thử lại ta thấy thỏa mãn.

Nhận xét. Bài toán này được khá đông các bạn tham gia giải và tất cả các bạn đều chứng minh rằng $f(n) = n$ là hàm duy nhất cần tìm. Tuy nhiên có một số bạn lập luận không chính xác hoặc quá dài dòng.

Các bạn sau đây có lời giải tốt : **Vinh Phúc:** Nguyễn Trung Lập, 12A1, THPT chuyên Vinh Phúc; **Thái Nguyên:** Trần Đức Mạnh, 11T, THPT Thái Nguyên; **Yên Bái:** Triệu Thanh Hải, 11A2, THPT chuyên; **Sơn La:** Nguyễn Bích Vân, 12T, NK Sơn La; **Phú Thọ:** Hoàng Ngọc Minh, 9C, THCS Việt Trì; **Hà Nội:** Nguyễn Hoàng Thạch, Trần Duy Dương, 10T, Hà Nội-Amsterdam, Vũ Quốc Mỹ, 9H, THCS Trưng Vương; **Phạm Bảo Trung,** 10A, ĐHKHTN-ĐHQG; **Hải Dương:** Tô Minh Hoàng, 11T, PTNK; **Hà Giang:** Nguyễn Kim Cương, 11T, THCS chuyên Hà Giang; **Khánh Hòa:** Lê Thị Khánh Hiền, 11T, THPT Lê Quý Đôn, Nha Trang; **Tp Hồ Chí Minh:** Trần Thuong Văn Du, Phạm Tuấn Anh, 11T, PTNK, ĐHKHTN, Tp Hồ Chí Minh; **Thừa Thiên - Huế:** Nguyễn Du Thái, 11CT, ĐHKH Huế; **Nghe An:** Nguyễn Xuân Vinh, 11T, ĐHSP Vinh;

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T9/270. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn với trực tâm H. Gọi diện tích các tam giác HAB, HBC, HCA lần lượt là S_1, S_2, S_3 . Chứng minh rằng tam giác ABC đều khi và chỉ khi

$$\frac{8(S_1 + S_2 + S_3)^3}{27S_1S_2S_3} = \frac{4R}{r}.$$

Lời giải. (của bạn Nguyễn Trung Lập, 12A1, chuyên Vinh Phúc)

Ta có :

$$\begin{aligned} & \frac{8(S_1 + S_2 + S_3)^3}{27S_1S_2S_3} \\ &= \frac{1}{S_1S_2S_3} \left[\frac{(S_1 + S_2) + (S_2 + S_3) + (S_3 + S_1)}{3} \right]^3 \\ &\geq \frac{S_1 + S_2}{S_3} \cdot \frac{S_2 + S_3}{S_1} \cdot \frac{S_3 + S_1}{S_2} \end{aligned} \quad (1)$$

(Bất đẳng thức Côsi)

Gọi A_1, B_1, C_1 là hình chiếu của H trên BC, CA, AB (h.1).

Ta có :

$$\begin{aligned} & \frac{S_1 + S_2}{S_3} = \frac{HB}{HB_1} \\ &= \frac{HB}{HA} \cdot \frac{HA}{HB_1} = \\ &= \frac{\sin HAB}{\sin HBA} \cdot \frac{1}{\sin HAC} = \\ &= \frac{\cos B}{\cos A \cos C} \quad (\text{định lý hàm số sin}) \end{aligned}$$

Tương tự với các tỉ số khác ta có :

$$\begin{aligned} & \frac{S_1 + S_2}{S_3} \cdot \frac{S_2 + S_3}{S_1} \cdot \frac{S_3 + S_1}{S_2} = \frac{1}{\cos A \cos B \cos C} \\ &\geq \frac{8}{(\cos B + \cos C)(\cos C + \cos A)(\cos A + \cos B)} \\ &= \frac{1}{\cos \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2} \cos \frac{C+A}{2} \cos \frac{C-A}{2} \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}} \\ &\geq \frac{1}{\cos \frac{B+C}{2} \cos \frac{C+A}{2} \cos \frac{A+B}{2}} \\ &= \frac{1}{\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}} = \frac{4R}{r} \quad (2) \end{aligned}$$

Từ (1) và (2) suy ra : $\frac{8(S_1 + S_2 + S_3)^3}{27S_1S_2S_3} \geq \frac{4R}{r}$

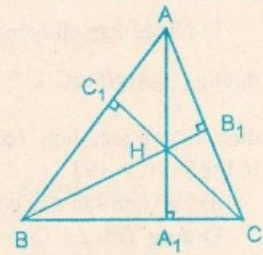
Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} S_1 = S_2 = S_3 \\ A = B = C \end{cases} \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ đều.}$

Vậy : $\frac{8(S_1 + S_2 + S_3)^3}{27S_1S_2S_3} = \frac{4R}{r} \Leftrightarrow \Delta ABC \text{ đều}$ (đpcm).

Nhận xét. 1) Bài này có 180 bạn tham gia giải. Không dưới 20 bạn giải sai. Sai lầm cơ bản thể hiện như sau : Ta có các bất đẳng thức hiển nhiên

$$\begin{cases} \frac{8(S_1 + S_2 + S_3)^3}{27S_1S_2S_3} \geq 8 \quad (3) \text{ (Côsi)} \\ \frac{4R}{r} \geq 8 \quad (4) \end{cases}$$

Từ đầu bài $\frac{8(S_1 + S_2 + S_3)^3}{27S_1S_2S_3} = \frac{4R}{r}$ suy ra đẳng thức xảy ra ở (3); (4) !!



GIẢI BÀI KÌ TRƯỚC

2) Nhiều bạn chuyển (3) thành bất đẳng thức tương đương : $\text{tg}A \text{tg}B \text{tg}C \geq 3\sqrt{3} \frac{R}{2r}$. Chú ý rằng bất đẳng thức này mạnh hơn bất đẳng thức thông thường : $\text{tg}A \text{tg}B \text{tg}C \geq 3\sqrt{3}$.

3) Các bạn sau đây có lời giải tốt :

Quảng Trị: Lê Tuấn Anh, 11 Toán, THPT chuyên Lê Quý Đôn; **Hải Phòng:** Phạm Đức Hiệp, 10 Toán, THPT NK Trần Phú; **Vĩnh Phúc:** Nguyễn Đức Toàn, 12A1, THPT chuyên; **Khánh Hòa:** Võ Duy, 12T, Lê Quý Đôn, Nhà Tang; **Huế:** Nguyễn Dư Thái, 11 Toán, PTCT, ĐHKH Huế; **Hà Nội:** Nguyễn Văn Nhân, 10A3, PTCT-Tin, ĐHSP Hà Nội...

NGUYỄN MINH HÀ

Bài T10/270. Một điểm P nằm trong tứ diện $ABCD$. Ký hiệu d_1, d_2, d_3, d_4 là khoảng cách từ P đến các đỉnh của tứ diện và h_1, h_2, h_3, h_4 là khoảng cách từ P đến các mặt của tứ diện. Chứng minh rằng :

$$d_1 + d_2 + d_3 + d_4 \geq 2(\sqrt{h_1 h_2} + \sqrt{h_1 h_3} + \sqrt{h_1 h_4} + \sqrt{h_2 h_3} + \sqrt{h_2 h_4} + \sqrt{h_3 h_4}) \quad (*)$$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

Lời giải.

(Dựa theo Dương Hà Phú, 11A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc)

Gọi c_1, c_2, c_3, c_4 lần lượt là độ dài các đường cao của tứ diện hạ từ các đỉnh A, B, C, D ; thế thì dễ thấy rằng

$$d_i + h_i \geq c_i \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (1)$$

và đẳng thức xảy ra, chẳng hạn $d_1 + h_1 = c_1$ khi và chỉ khi P thuộc đường cao AA' .

Ngoài ra, bằng phương pháp thể tích, ta thiết lập được hệ thức sau :

$$\frac{h_1}{c_1} + \frac{h_2}{c_2} + \frac{h_3}{c_3} + \frac{h_4}{c_4} = 1; \quad (2)$$

Mặt khác, áp dụng B.Đ.T Bunhićopski, ta được :

$$\begin{aligned} \frac{h_1}{c_1} + \frac{h_2}{c_2} + \frac{h_3}{c_3} + \frac{h_4}{c_4} &\geq \\ &\geq \frac{(\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2} + \sqrt{h_3} + \sqrt{h_4})^2}{c_1 + c_2 + c_3 + c_4} \end{aligned} \quad (3)$$

Từ (2) và (3), ta được :

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + c_3 + c_4 &\geq \\ &\geq h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + 2 \left(\sum_{1 \leq i < j \leq 4} \sqrt{h_i h_j} \right) \end{aligned} \quad (4)$$

Cuối cùng, từ các B.Đ.T (1) và (4), ta thu được B.Đ.T (*) cần tìm.

Đẳng thức xảy ra ở (*) khi và chỉ khi đẳng thức đồng thời xảy ra ở các hệ thức (1) và (3).

Các đẳng thức (1) xảy ra khi và chỉ khi P là điểm chung của cả 4 đường cao của tứ diện, nghĩa là $ABCD$ là một tứ diện trực tâm và P trùng với trực tâm H của nó.

Còn đẳng thức xảy ra ở B.Đ.T (3) khi và chỉ khi

$$\frac{h_1}{c_1^2} = \frac{h_2}{c_2^2} = \frac{h_3}{c_3^2} = \frac{h_4}{c_4^2}; \quad (5)$$

hay là, khi và chỉ khi :

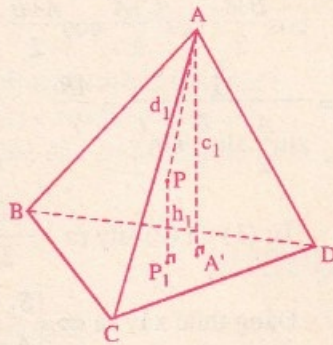
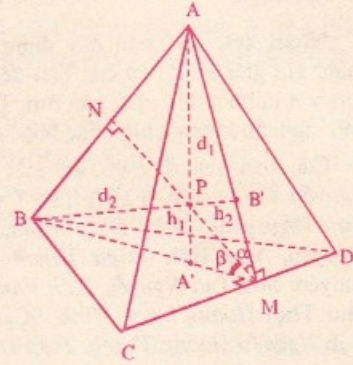
$$S_1^2 h_1 = S_2^2 h_2 = S_3^2 h_3 = S_4^2 h_4, \quad (6)$$

trong đó S_1, S_2, S_3, S_4 lần lượt là diện tích các tam giác BCD, CDA, DAB, ABC .

Như vậy, đẳng thức xảy ra ở (*) khi và chỉ khi $ABCD$ là một tứ diện trực tâm, đồng thời thỏa mãn thêm các đẳng thức (5), hoặc (6).

Vì $ABCD$ là tứ diện trực tâm có trực tâm là điểm P nên các mặt phẳng (ABP) và (CDP) cắt nhau theo đường vuông góc chung MN (đi qua P) của cặp cạnh đối diện CD và AB , M trên CD và N trên AB . Lại vì P nằm trong tứ diện nên P cũng là trực tâm các tam giác (nhọn) ABM, CDN . Xét tam giác ABM vuông góc với CD ở M ; đặt $\angle AMN = \angle PMB' = \alpha$ và $\angle BMN = \angle PMA' = \beta, \left(\alpha, \beta, \frac{\pi}{2} \right)$. Ta được các hệ thức sau :

$$\frac{AM}{BM} = \frac{S_2}{S_1} \cdot \frac{h_1}{h_2} = \frac{PA'}{PB'} = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \quad \text{và} \quad \frac{AM}{BM} = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha}$$



GIẢI BÀI KÌ TRƯỚC

Từ đó và từ (6), ta suy ra :

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{S_2^2}{S_1^2} \Leftrightarrow \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{\cos^2 \beta}{\cos^2 \alpha} = \frac{1 - \sin^2 \beta}{1 - \sin^2 \alpha} \Leftrightarrow$$

$$(\sin \alpha - \sin \beta)(1 + \sin \alpha \sin \beta) = 0 \text{ (vì } 0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2} \text{ nên } 1 + \sin \alpha \sin \beta \neq 0) \Leftrightarrow \sin \alpha = \sin \beta$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \beta \Leftrightarrow \Delta MAB \text{ cân ở } M$$

$$\Leftrightarrow PA = PB \text{ (vì } P \in MN)$$

Chúng minh tương tự, ta đi đến kết luận :

(5) $\Rightarrow PA = PB = PC = PD$ và do đó $P \equiv O$ (tâm cầu ngoại tiếp $ABCD$).

Vậy : Đẳng thức xảy ra ở (*) khi và chỉ khi $ABCD$ là một tứ diện trục tâm, đồng thời trục tâm trùng với tâm O mặt cầu ngoại tiếp và điểm P là tâm của nó. Từ đây, dễ dàng chứng minh được rằng $ABCD$ là một tứ diện đều và $P \equiv O$.

Nhận xét. 1) Hầu hết các bạn chỉ giải đúng phần đầu của bài toán, nghĩa là chứng minh đúng B.Đ.T (*). Đa số không chỉ ra được hoặc không chứng minh chặt chẽ khi nào và chỉ khi nào xảy ra đẳng thức ở (*). Cũng còn nhiều bạn chỉ đưa ra $ABCD$ là tứ diện đều mà không chứng minh !

2) Có nhiều cách lập luận để đi đến kết luận : Đẳng thức xảy ra ở (*) khi và chỉ khi $ABCD$ là tứ diện đều. Một số bạn chứng minh $ABCD$ vừa là tứ diện trục tâm, vừa là tứ diện gần đều, rồi từ đó kết luận $ABCD$ là tứ diện đều. Chẳng hạn, bạn **Nguyễn Đức Thuận**, 11T, THPT thị xã Cao Lãnh, **Đồng Tháp** đã chứng minh đúng :

Đẳng thức xảy ra ở (*) $\Leftrightarrow ABCD$ là một tứ diện trục tâm nhận P làm trục tâm và

$$\frac{\sqrt{h_1}}{d_1+h_1} = \frac{\sqrt{h_2}}{d_2+h_2} = \frac{\sqrt{h_3}}{d_3+h_3} = \frac{\sqrt{h_4}}{d_4+h_4}$$

Sau đó, chứng minh dễ dàng rằng :

$$d_1 h_1 = d_2 h_2 = d_3 h_3 = d_4 h_4 \quad (7)$$

Rồi từ đó thiết lập được hệ thức :

$$\frac{\sqrt{h_1}}{\sqrt{h_2}} = \frac{d_1+h_1}{d_2+h_2} = \frac{\sqrt{d_2}}{\sqrt{d_1}}$$

rồi đưa đến :

$$\sqrt{d_1 h_1} (\sqrt{h_1} - \sqrt{h_2}) = (\sqrt{d_2} - \sqrt{d_1}) (d_1 + \sqrt{d_1 d_2} + d_2) \quad (8)$$

Nếu $d_1 \neq d_2$ thì từ (7) và (8), suy ra

$$\sqrt{h_1 h_2} = \sqrt{d_1 d_2} + d_1 + d_2 \text{ và do đó dẫn đến mâu thuẫn (vì } h_1 < d_2 \text{ và } h_2 < d_1 \text{ nên } \sqrt{h_1 h_2} < \sqrt{d_1 d_2})$$

Vậy phải có : $d_1 = d_2$ và $h_1 = h_2$.

Chúng minh tương tự, ta được $d_1 = d_2 = d_3 = d_4$ và $h_1 = h_2 = h_3 = h_4$; do đó : $d_1 + h_1 = d_2 + h_2 = d_3 + h_3 =$

$d_4 + h_4$ Từ đó điểm $P \equiv H \equiv O \equiv I$ và $ABCD$ là một tứ diện trục tâm và trục tâm P trùng với tâm các mặt cầu nội và ngoại tiếp, do đó suy ra $ABCD$ là một tứ diện đều.

3) Ngoài hai bạn trên, các bạn sau đây có lời giải tốt :

Hà Nội: **Phạm Gia Vinh Anh**, 10A1, PTCT, ĐHSPT Hà Nội; **Hoàng Tùng**, 12A Toán, ĐHKHTN Hà Nội, **Phan Nhất Thống**, 11A1, PTDL Tôn Đức Thắng, Ba Đình; **Vinh Phúc:** **Đỗ Ngọc ánh**, 12A1, THPT chuyên, **Trần Trung Hiếu**, 11A10, THPT Ngô Gia Tự, Lập Thạch; **Hải Dương:** **Chu Ngọc Hưng**, **Nguyễn Hồng Kiên**, **Va Xuân Nam**, 10 Toán, THPT Nguyễn Trãi; **Hưng Yên:** **Phan Minh Sáng**, 12 Toán-Tin, PTNK Hưng Yên; **Hải Phòng:** **Phạm Đức Hiệp**, 10T, THPT NK Trần Phú; **Nguyễn Phi Long**, 12A4, THPT Ngô Quyền, Lê Chân; **Thanh Hóa:** **Nguyễn Văn Trung**, 11A1, THPT Hậu Lộc I; **Nghệ An:** **Trương Minh Trung**, 11A, **Lê Tất Thắng**, 11A, PTCT-ĐHSPT Vinh **Thừa Thiên - Huế:** **Nguyễn Dư Thái**, 11 Toán, PTCT-ĐHKH Huế; **Đà Nẵng:** **Đặng Quang Huy**, 10A1, THPT Lê Quý Đôn; **Tp Hồ Chí Minh:** **Nguyễn Đình Hoàng**, 11T, Trần Thượng Văn Du, 11T, **Phạm Tuấn Anh**, 11T, **Phạm Ngọc Huy**, 12 Toán, **Lương Thế Nhân**, 11 Toán; **Lâm Hoàng Nguyễn**, 11 Toán, THPTNK-ĐHKHTN - ĐHQG Tp Hồ Chí Minh.

NGUYỄN DẰNG PHÁT

Bài L1/270. Một vệ tinh có khối lượng m , bay vòng quanh Trái đất (có khối lượng M và bán kính R) trên một quỹ đạo ổn định ở độ cao h . Người ta cần phải thay đổi quỹ đạo sao cho độ cao của quỹ đạo tăng thêm một lượng Δh ($\Delta h \ll h$).

1) Hãy xác định sự biến thiên động năng và thế năng của vệ tinh.

2) Cần phải cung cấp cho vệ tinh một năng lượng bằng bao nhiêu để thực hiện sự di chuyển quỹ đạo đó bằng cách phóng một tên lửa phụ ?

Cho biết: $m = 1,20 \cdot 10^3 \text{ kg}$; $M = 5,58 \cdot 10^{24} \text{ kg}$; $h = 900 \cdot 10^3 \text{ m}$; $\Delta h = 50 \cdot 10^3 \text{ m}$; $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N.m}^2/\text{kg}^2$; $R = 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}$.

Hướng dẫn giải. Trước hết xác định mối liên hệ giữa động năng với thế năng của vệ tinh : $F_{\text{hấp dẫn}} = F_{\text{hướng tâm}}$ suy ra $mv^2 = \frac{GmM}{r}$

$$\text{và, do đó } E_d = \frac{mv^2}{2} = \frac{GmM}{2r}.$$

GIẢI BÀI KÌ TRƯỚC

Mặt khác $E_t = -\frac{GmM}{r}$, suy ra $E_d = -\frac{1}{2}E_t$
 (1), và từ đó $E = E_d + E_t = \frac{1}{2}E_t$ (2).

$$1) \Delta E_d = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = \\ = \frac{GmM}{2} \left(\frac{1}{R+h+\Delta h} - \frac{1}{R+h} \right) \approx 2,1 \cdot 10^8 J$$

(khi chuyển sang quỹ đạo mới, động năng của vệ tinh giảm đi)

Theo (1) : $\Delta E_t = -2\Delta E_d = 4,2 \cdot 10^8 J$ (khi chuyển sang quỹ đạo mới thế năng của vệ tinh tăng lên).

2) Theo (2), ta có : $\Delta E = \frac{1}{2} \Delta E_t = 2,1 \cdot 10^8 J$;

Cần phải cung cấp cho vệ tinh một năng lượng bằng $2,1 \cdot 10^8 J$.

Nhận xét. Các em có lời giải đúng và gọn :

Hà Nội: Lê Cường, B012A, Khối chuyên Lí, ĐHKHTN-ĐHQG Hà Nội; **Tây Ninh:** Châu Quốc Phong, 12A6, THPT Lí Thường Kiệt, Hòa Thành; **Quảng Bình:** Lê Quang Trung, 12 Lí, THPT NK Quảng Bình; **Quảng Ngãi:** Đặng Đình Thuận, 11 Toán, chuyên Lê Khiết; **Nam Định:** Trần Đức Sinh, 10 Lí, THPT Lê Hồng Phong; **Hải Phòng:** Phạm Anh Đức, 12 Lí, THPT Trần Phú; **Hà Tĩnh:** Bùi Việt Hoàng Sơn, 12 Lí, THPT NK Hà Tĩnh; **Thanh Hóa:** Trần Trọng, 11B, THPT Bim Sơn; **Quảng Nam:** Hoàng Anh Vũ, 117, THPT Trần Cao Vân, Tam Kỳ; **Vĩnh Phúc:** Nguyễn Công Hưng, 12A3, Nguyễn Minh Kiên, 10A1, Đỗ Mạnh Tùng, Phạm Thu Thủy, 11A3, Lê Xuân Đại, 12A1, THPT chuyên Vĩnh Phúc :

MAI ANH

Bài L2/270. Một đĩa compac có đường rãnh ghi là một đường xoắn ốc mà bán kính trong là $R_1 = 2,5 \text{ cm}$ và bán kính ngoài là $R_2 = 5,8 \text{ cm}$, khoảng cách giữa hai đoạn xoắn ốc kế tiếp nhau là $a = 1,6 \mu\text{m}$. Hãy tính :

a) Độ dài của đường rãnh ghi;

b) Thời gian phát lại đĩa, nếu đĩa được quét với vận tốc dài không đổi $v = 130 \text{ cm/s}$.

Hướng dẫn: a) Có thể tính độ dài s bằng cách lấy tích phân

$$s = \int_{R_1}^{R_2} \frac{2\pi}{a} R dR = \frac{\pi}{a} (R_2^2 - R_1^2) \approx 5378 \text{ m}.$$

Hoặc bằng lập luận sau :

Vì $a \ll R_1$ nên có thể coi gần đúng đường xoắn ốc là các đường tròn liên tiếp mà bán kính lập thành một cấp số cộng với số công sai là a :

$$r_1 = R_1; \dots; r_{i+1} = r_i + a; \dots; r_n = R_2;$$

số đường tròn $n = \frac{R_2 - R_1}{a}$ và

$$s = 2\pi \sum_{i=1}^n r_i = 2\pi \frac{(R_1 + R_2)n}{2} = \frac{\pi}{a} (R_2^2 - R_1^2).$$

b) Thời gian phát lại :

$$t = \frac{s}{v} \approx 4137 \text{ s} = 1 \text{ h } 8 \text{ m } 57 \text{ s}.$$

Nhận xét. Đáng tiếc là nhiều em không biết làm tròn số, chẳng hạn đã viết $s = 537801,4 \text{ cm}$! Các em có lời giải đúng và gọn :

Hà Nội: Lê Cường, B012A, khối chuyên lí, ĐHKHTN-ĐHQG Hà Nội; **Vĩnh Phúc:** Lê Quốc Hưng, 12A3, Đỗ Ngọc Ánh, 12A1, THPT chuyên ; **Nghe An:** Nguyễn Xuân Linh, 12 Lí, THPT Phan Bội Châu, Vinh; **Quảng Nam:** Hoàng Anh Vũ, 117, THPT Trần Cao Vân, Tam Kỳ; **Hà Tây:** Nguyễn Minh Chính, 11 Toán 1, THPT chuyên Nguyễn Huệ.

MAI ANH

CÙNG BẠN ĐỌC

Những gương mặt, những tấm lòng dành cho Toán học và Tuổi trẻ xuất hiện như một chuyên mục từ số 1.1999 nhân chuẩn bị kỉ niệm 35 năm ngày THPT ra số đầu tiên. Đến nay đã giới thiệu được 64 nhà toán học, nhà giáo là những sáng lập viên, ủy viên hội đồng biên tập, cộng tác viên từng có bài trên THPT. Một số nhà toán học hay cộng tác viên khác, vì một số lí do, chưa có bài giới thiệu trên 16 số tạp chí vừa qua. Sau này tạp chí sẽ tiếp tục giới thiệu các tác giả cùng với bài viết. Do khuôn khổ tờ báo, chúng tôi không thể giới thiệu được kĩ hơn tiểu sử và các công trình nghiên cứu như một số độc giả đã đề nghị. THPT chân thành cảm ơn các quý vị đã gửi ảnh và bài giới thiệu cho Tòa soạn.

THPT

BẠN ĐỌC TÌM TÒI

LỜI GIẢI MỚI CHO MỘT BÀI TOÁN CỦA JACK GARFUNKEL

PHẠM NGỌC HUY

(12T, trường PTNK, ĐHQG Tp Hồ Chí Minh)

SAU khi đăng bài "Lời giải một bài toán mới của Jack Garfunkel (THTT số 8.1999), Tòa soạn nhận được nhiều thư trao đổi thêm về các bài toán được giới thiệu tiếp. Bạn Phạm Ngọc Huy đã có lời giải ngắn gọn và hay hơn lời giải bài toán (*) của C.S Gardner. TS Nguyễn Minh Hà đã thay bố đề của bạn Huy bởi một bố đề khác để lời giải tốt hơn. Trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc.

Bài toán (*). Cho tam giác ABC , M là một điểm nằm trong tam giác. MA, MB, MC theo thứ tự cắt BC, CA, AB tại A_1, B_1, C_1 . Gọi A_2, B_2, C_2 lần lượt là hình chiếu của M trên BC, CA, AB . Chứng minh rằng :

$$p(A_1B_1C_1) \geq p(A_2B_2C_2)$$

trong đó kí hiệu p chỉ chu vi tam giác.

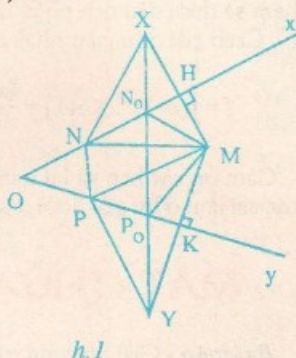
Bổ đề. Cho góc xOy và điểm M nằm trong nó. H, K lần lượt là hình chiếu của M trên đường thẳng chứa Ox, Oy . Các điểm N, P theo thứ tự thuộc các tia Ox, Oy . Chứng minh rằng :

$$p(MNP) \geq 2HK$$

Chứng minh

Trường hợp 1: $\angle xOy < 90^\circ$ (h.1)

Gọi X, Y là các điểm đối xứng của M qua Ox, Oy . Vì góc xOy nhọn nên đoạn thẳng XY cắt các tia Ox, Oy lần lượt tại N_0 và P_0 . Ta thấy :



$$2HK = XY \leq XN + NP + PY$$

$$= MN + NP + PM = p(MNP)$$

$$\text{Vậy : } 2HK \leq p(MNP).$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} N \equiv N_0 \\ P \equiv P_0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow O$ là tâm đường tròn bàng tiếp đối diện với đỉnh M của tam giác MNP .

Trường hợp 2: $\angle xOy \geq 90^\circ$ (h.2)

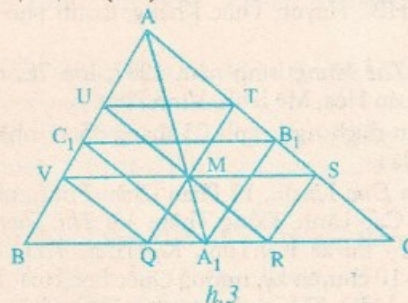
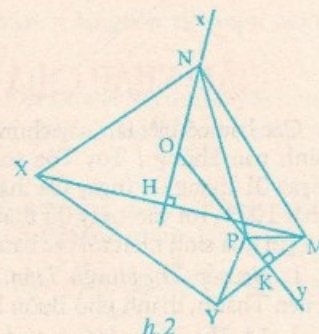
Lập luận tương tự được :

$$2HK < p(MNP)$$

Đẳng thức không xảy ra.

Nhờ bổ đề trên, ta có thể giải bài toán (*) như sau :

Qua M , kẻ các đường thẳng tương ứng song song với các cạnh của tam giác $A_1B_1C_1$. Chứng cắt các cạnh của tam giác ABC tại Q, R, S, T, U, V (h.3).



Để thấy các tam giác : MTU, QMV, RSM đồng dạng với tam giác $A_1B_1C_1$ với các tỉ số đồng dạng lần lượt là $\frac{AM}{AA_1}, \frac{BM}{BB_1}, \frac{CM}{CC_1}$. Nhờ kết quả quen

$$\text{thuộc } \frac{AM}{AA_1} + \frac{BM}{BB_1} + \frac{CM}{CC_1} = 2 \text{ (điều này suy từ}$$

$$\frac{MA_1}{AA_1} + \frac{MB_1}{BB_1} + \frac{MC_1}{CC_1} = 1) \text{ ta có :}$$

$$p(MTU) + p(QMV) + p(RSM) = 2p(A_1B_1C_1) \quad (1)$$

Theo bổ đề ta có :

$$p(MTU) \geq 2B_2C_2, p(QMV) \geq 2C_2A_2,$$

$$p(RSM) \geq 2A_2B_2 \quad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra :

$$p(A_1B_1C_1) \geq p(A_2B_2C_2)$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \triangle ABC$ nhọn và A, B, C là tâm đường tròn bàng tiếp đối diện với đỉnh M của các tam giác $MTU, MVQ, MRS \Leftrightarrow \triangle ABC$ nhọn và A, B, C là tâm đường tròn bàng tiếp đối diện với các đỉnh A_1, B_1, C_1 của $\triangle A_1B_1C_1 \Leftrightarrow \triangle ABC$ nhọn và M là trực tâm của tam giác I .



GẶP NHAU QUA NGÀY SINH

Các bạn có biết lần này chúng ta sẽ chúc mừng ngày sinh nào không? Tuy Tòa soạn bóc thăm vào đúng ngày 01 tháng 04 (ngày Cà tháng Tư), nhưng kết quả thật 100% rơi vào ngày 03 tháng 05! Xin chúc mừng và gửi quà sinh nhật tới các bạn:

1. *Nguyễn Thị Huyền Trân*, sinh năm 1984, 43 Tô Hiến Thành, thành phố Buôn Ma Thuột, Đắk Lắk.

2. *Lê Thị Thúy Hằng*, sinh năm 1983, lớp 11G, trường THPT Huỳnh Thúc Kháng, thành phố Vinh, Nghệ An.

3. *Vũ Thế Hưng*, sinh năm 1987, lớp 7E, trường THCS Xuân Hòa, Mê Linh, Vĩnh Phúc

Các bạn thích ngày sinh 03 tháng 05 và nhận quà của CLB là:

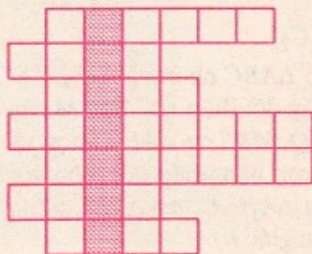
Nguyễn Đức Thuận, 17 Phan Châu Trinh, phường 2, thị xã Cao Lãnh, Đồng Tháp; *Vũ Thị Thanh*, 66 Kpakolon - thị xã KonTum, KonTum; *Tổng Phước Bắc Nhã*, 10 chuyên Lý, trường Quốc học Huế; *Khổng Đức Huy*, 11B2, THCS chuyên tỉnh Vĩnh Phúc; *Phạm Quang Nhật Minh*, 10A1, khối phổ thông chuyên Toán - Tin, DHSPI Hà Nội; *Nguyễn Bá Hoàng*, THPT Tam Nông, Phú Thọ (gửi gắp địa chỉ lớp!). Mong các bạn tiếp tục chờ đợi và hi vọng vào kết quả công bố ở số tạp chí tới.

C.L.B

NHỮNG CON SỐ NÀO ĐÂY?

Bạn hãy điền vào mỗi ô một chữ số theo từng dòng:

- Ngày tháng năm sinh của nhà toán học Căngtô
- Năm sinh của nhà toán học người Thụy sĩ đã đặt ra kí hiệu π .
- Năm sinh của nhà toán học Việt Nam thế kỉ XV.
- Ngày tháng năm sinh của thiên tài Galoa.
- Ngày tháng năm mất của tác giả tam giác số nổi tiếng.



6. Năm sinh của tác giả công trình "Về sự quay của các thiên thể"

7. Năm sinh của nhà toán học đã phát biểu định lí về tổng và tích của các nghiệm phương trình bậc hai.

Cuối cùng bạn có biết ý nghĩa của những con số ở cột dọc không?

NGỌC MAI

ĐỔI BIẾN KIỂU NÀY ... SAI THẬT!

Đa số các bạn phát hiện ra: từ $u = (x+1)^2$ suy ra $x+1 = \sqrt{u}$ là sai! Bạn Nguyễn Khắc Trường, 10A1, khối PT chuyên Toán - Tin, DHSPI Hà Nội;

Lê Văn Sơn, *Phan Văn Loan*, 39A3, khoa Toán, DHSP Vinh; *Trần Đức Vương*, Toán 3B, khóa 20, DHSP Quy Nhơn; *Đào Nghĩa*, P152, C5, Quang Trung, Vinh, Nghệ An; *Vũ Đặng Duy Văn Anh*, 11A1, THCS Đồng Quan, Phú Xuyên, Hà Tây; *Nguyễn Kim Thúy*, 12A, Trường PT bán công, cấp 2, 3 chuyên Ngoại ngữ, Hà Nội còn phát hiện $u = (x+1)^2$ không đơn điệu trên $[-2; 0]$ nên không đổi biến để tính tích phân như vậy được. Có bạn đã đề nghị tiếp tục đổi biến được nêu viết:

$$I = \int_{-2}^0 (x+1)^2 dx = \int_{-2}^{-1} (x+1)^2 dx + \int_{-1}^0 (x+1)^2 dx$$

khí đó $u = (x+1)^2$ sẽ đơn điệu trên từng đoạn. Tuy

nhiên, khi các bạn viết $\int_{-2}^0 (x+1)^2 dx = -\frac{1}{2} \int_1^0 \frac{udu}{\sqrt{u}}$ thì

hàm số dưới dấu tích phân lại không xác định tại $u = 0$ (!). Cách giải đơn giản nhất và đúng nhất là:

$$I = \int_{-2}^0 (x+1)^2 d(x+1) = \left. \frac{(x+1)^3}{3} \right|_{-2}^0 = \frac{2}{3}$$

Cảm ơn các bạn và lại mời các bạn tiếp tục tham gia tìm sai lầm ở lời giải dưới đây.

KIHIVI

MẤT - THỪA HAY ĐỦ?

Bài toán: Giải phương trình $\lg 2x + \sin 2x = \frac{3}{2} \cot x$

(Đề thi ĐHTL 1999)

Lời giải. (của một bạn)

$$\begin{aligned} (*) &\Leftrightarrow \frac{2 \lg x}{1 - \lg^2 x} + \frac{2 \lg x}{1 + \lg^2 x} = \frac{3}{2 \lg x} \\ &\Leftrightarrow 3 \lg^4 x + 8 \lg^2 x - 3 = 0 \Leftrightarrow (3 \lg^2 x - 1)(\lg^2 x + 3) = 0 \\ &\Leftrightarrow \lg^2 x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \lg x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

• Lời giải trên có "sơ hở" điều gì không?

• Mất - Thừa hay Đủ nghiệm?

NGÔ MANH HÙNG
(THPT Sóc Sơn - Hà Nội)



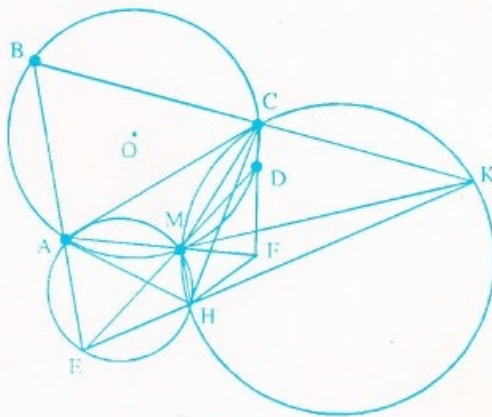
Giải đáp bài

DỤNG TIẾP TUYẾN

Bài này có nhiều cách dựng: Bạn **Trần Bá Hậu**, 11A, khối PTCT trường ĐHSP Vinh, **Nghệ An**, đã đưa ra cách dựng đơn giản hơn cả dựa vào định lý Pascal "Ba giao điểm của 3 cặp cạnh đối diện của một hình lục giác nội tiếp thì thẳng hàng". Trong trường hợp đặc biệt ta có bài toán sau:

Bài toán: Cho ngũ giác $ABCDM$ nội tiếp đường tròn tâm O sao cho tia BA và tia DM cắt nhau tại E , tia AM và tia CD cắt nhau tại F . Chứng minh rằng E, F, K thẳng hàng, trong đó K là giao điểm của đường thẳng BC với tiếp tuyến qua M .

Chứng minh (hình 1)



Hình 1

Gọi H là giao điểm của các đường tròn ngoại tiếp $\triangle AME$ và $\triangle CMK$.

Ta có: $\angle EHM + \angle MHK = \angle BAM + \angle BCM = 180^\circ$
 $\Rightarrow$ Ba điểm E, H, K thẳng hàng (1)

$$\angle AHC = \angle AHM + \angle MHC = \angle AEM + \angle MKC$$

$$= \frac{1}{2}(\text{sđc } BC + \text{sđc } CD - \text{sđc } AM)$$

$$+ \frac{1}{2}(\text{sđc } MA + \text{sđc } AB - \text{sđc } MD - \text{sđc } CD)$$

$$= \frac{1}{2}(\text{sđc } AB + \text{sđc } BC - \text{sđc } MD) = \angle AFC \Rightarrow \text{Tứ giác}$$

$AHFC$ nội tiếp (2)

(Kí hiệu sđc là số đo cung nhỏ).

Từ (2) có $\angle EHA + \angle AHF = \angle EMA + (180^\circ - \angle ACF) = \angle EMA + \angle AMD = 180^\circ$

$\Rightarrow$ Ba điểm E, H, F thẳng hàng (3).

Từ (1) (3) rút ra bốn điểm E, H, F, K thẳng hàng (đpcm).

Từ bài toán trên suy ra cách dựng 1.

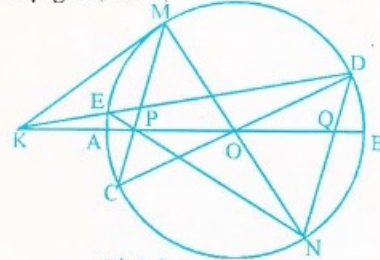
Cách dựng 1. - Lấy 4 điểm A, B, C, D phân biệt và khác M trên đường tròn thỏa mãn giả thiết bài toán.

- Dựng giao điểm K' của 2 đường thẳng BC và EF (có thể chọn điểm D để không xảy ra $BC \parallel EF$).

- Kẻ đường thẳng $K'M$ thì $K'M$ là tiếp tuyến vì $K' = K$.

Chú ý rằng trong cách dựng này ta không cần biết tâm đường tròn.

Cách dựng 2. (hình 2)



Hình 2

- Dựng ba đường kính MN, AB, CD sao cho A, M, D cùng thuộc một nửa đường tròn.

- AB cắt MC và DN lần lượt ở P và Q .

- Đường thẳng NP cắt đường tròn tại E .

- Hai đường thẳng AB và DE cắt nhau tại K .

Các bạn hãy chứng minh rằng KM là tiếp tuyến của đường tròn.

Các bạn sau đây cũng có đáp án tốt:

Nguyễn Hoài Vũ, 11A1, THPT chuyên Vinh Phúc; **Nguyễn Xuân Tiến**, 10A, THPT Ngô Sĩ Liên, Bắc Giang; **Đặng Xuân Hiệp**, 11A, PT chuyên Ngoại ngữ - ĐHNNDHQG Hà Nội; **Nguyễn Hữu Chung**, 10A, PT chuyên Hóa, ĐHKHTN-ĐHQG Hà Nội; **Vũ Hải Hà**, 9A, THCS Đông Hưng, Thái Bình; **Phạm Hồng Quân**, 12T, THPT Nguyễn Trãi, Hải Dương; **Đặng Chung Kiên**, 12A4, THPT Thái Phiên, Hải Phòng; **Bùi Đăng Tài**, 9A, THCS Lý Nhật Quang, Đô Lương, Nghệ An; **Trương Bình Nguyên**, 9B, THCS Đặng Thai Mai, Vinh, Nghệ An; **Lê Mạnh Linh**, 10A5, THPT Phan Bội Châu, Nghệ An; **Nguyễn Quốc Chiến**, 9A1, THCS Phước Tỉnh, Long Đất, Bà Rịa Vũng Tàu.

BÌNH PHƯƠNG

BÀI TOÁN CÂY THUỐC NGẮN

Làm thế nào để sử dụng chỉ một cây thước thẳng và bút chì để vẽ được đoạn thẳng nối hai điểm đã cho mà dài hơn thước.

VÕ KIM HUỆ
(Cần Thơ)

TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG, TP HỒ CHÍ MINH

Nhà giáo ưu tú **ĐẶNG THANH CHÂU**
Hiệu trưởng

Trường THPT chuyên Lê Hồng Phong là một trong 3 trường THPT có lịch sử lâu đời nhất thành phố Hồ Chí Minh. Trường được xây dựng năm 1927, bắt đầu khai giảng năm 1928 với tên là Collège Petrus Ký. Thời kì đầu có khoảng 200 học sinh. Suốt những năm kháng chiến, các thế hệ thầy trò trường trung học Petrus Ký đã cùng cả dân tộc viết nên những trang sử hào hùng. Ngày 9/1/1950, anh Trần Văn Ôn, học sinh của trường đã anh dũng ngã xuống trong cuộc xuống đường chống Pháp, tạo nên làn sóng biểu tình khổng lồ khắp Sài Gòn – Chợ Lớn đòi bảo vệ quyền lợi cho học sinh, sinh viên. Các giáo sư Nguyễn Văn Chi, Phạm Thiều, Kiến trúc sư Huỳnh Tấn Phát, Viện sĩ Trần Đại Nghĩa, Nhạc sĩ Lưu Hữu Phước; các liệt sĩ yêu nước nổi tiếng : Trần Văn Ôn, Nguyễn Thái Bình, Hồ Hảo Hớn; các nhà cách mạng lão thành như : Mai Văn Bộ, Huỳnh Văn Tiểng, nhà bác học Trần Đạt Xường, Giáo sư Tiến sĩ Trần Văn Khê. ...; các nhà lãnh đạo thành phố như đồng chí Trương Tấn Sang, Nguyễn Minh Triết, Nguyễn Văn Chí... đã từng học ở trường.

Sau chiến thắng 30/4/1975, trường trung học Petrus Ký vinh dự được Bộ Chỉ huy tiền phương và Thành ủy Sài Gòn – Chợ Lớn – Gia Định chọn làm địa điểm trú đóng, ra những sắc lệnh đầu tiên của chính quyền mới. Từ năm học 1976-1977, trường được đổi tên thành trường THPT Lê Hồng Phong. Năm 1981, bắt đầu xây dựng tổ chuyên Toán đầu tiên. Năm 1990, trường chính thức được giao nhiệm vụ đào tạo học sinh giỏi cho thành phố, đổi tên thành trường THPT chuyên Lê Hồng Phong. Đến năm 1995, được Thủ tướng kí quyết định chuyển trường thành Trung tâm chất lượng cao về giáo dục PTTH ở miền Nam.

Từ trường THPT chuyên Lê Hồng Phong gần 11000 học sinh đã tốt nghiệp, gần 5000 học sinh thi đậu Đại học, trên 100 em du học nước ngoài từ 1975 đến 1995. Trong những năm 1995-2000, tỉ lệ học sinh tốt nghiệp THPT xấp xỉ 100%, thi đỗ Đại học 90%. Học sinh của trường là lực lượng nòng cốt cho đội tuyển học sinh giỏi của thành phố đi thi quốc gia, đã đạt kết quả tốt. Từ năm học 1992-1993 tới năm học 1998-1999 trường đã đạt 190 giải học sinh giỏi Quốc gia và 3 giải Olympic Quốc tế.

Trường THPT chuyên Lê Hồng Phong là đơn vị được Viện Hóa học Hoàng Gia Australia nhờ tổ chức kì thi Hóa học dành cho học sinh Trung học ở Việt Nam đến nay là lần thứ 7. Mỗi đợt thi có trên 20 tỉnh, thành tham dự, gồm các khối lớp 8, 9, 10, 11, 12. Bài thi được gửi sang Australia chấm và kết quả khen thưởng này có giá trị trong việc xét chọn cấp học bổng đi Australia.

Trường THPT chuyên Lê Hồng Phong cũng là nơi khai sinh ra cuộc thi Olympic truyền thống 30/4 hàng năm, bắt đầu từ năm 1995 dành cho học sinh giỏi khối 10, 11 của các tỉnh phía Nam.

Hoạt động ngoại khóa của trường cũng đạt được nhiều thành tích : nhiều huy chương vàng, bạc, đồng trong Hội Khỏe Phù Đổng cấp Quận, Thành phố và toàn quốc; đoạt giải nhất kì thi "Tuổi trẻ và Âm nhạc" do Đài truyền hình TP tổ chức, đoạt giải nhất kì thi "Tuổi trẻ và Tin học" do Đài Truyền hình TP tổ chức, đoạt nhiều giải thưởng Quốc tế như : giải nhất kì thi "Dictée des Ameriques" ở Canada (năm 1995); giải nhất kì thi giao lưu Quốc tế Thái Lan (2000)... tham dự ba kì thi đua mô hình xe năng lượng mặt trời ở Australia...

Đội ngũ giáo viên của trường đã có : 3 tiến sĩ (2%), 23 thạc sĩ, cao học (15%), 100% cử nhân, 14 giáo viên đang dự học các lớp Cao học. Chính đội ngũ này xây dựng nội dung của 28 cuốn sách chuyên Toán, Lý, Hóa của NXB Giáo dục, được dùng cho nhiều trường chuyên trong cả nước. Đội ngũ giáo viên nhà trường là chủ lực huấn luyện đội tuyển học sinh giỏi thành phố.

Trường đang từng bước trang bị một số thiết bị hiện đại để đón đầu những công nghệ hiện đại trong giáo dục và từng bước hình thành cơ sở vật chất hạ tầng cho việc xây dựng trường trở thành trung tâm chất lượng cao miền Nam.

Trường đã được nhận Huân chương Lao động Hạng Ba năm 1989; liên tục đạt danh hiệu trường Tiên tiến xuất sắc cấp Thành phố, 2 giáo viên được phong tặng danh hiệu Nhà giáo Ưu tú...

Trường THPT chuyên Lê Hồng Phong với bề dày 72 năm lịch sử của mình, nhận thức được trọng trách của mình, đang tiến vào thế kỉ 21 với khí thế mới và hi vọng mới.

ISBN : 0866-0853

Chỉ số : 12884

Mã số : 8BT76M10

Chế bản tại Tòa soạn

In tại Nhà máy in Diên Hồng, 57 Giảng Võ

In xong và nộp lưu chiểu tháng 2 năm 2000

Giá : 3.000đ

Ba nghìn đồng