BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ❊ HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

TOÁN HỌC & TUỔI TRẺ

NĂM THỨ 36 - RA HÀNG THÁNG
Số 11 (269)
1999

Thư Chúc mừng của Phó Thủ tướng
PHẠM GIA KHIÊM

SỐ ĐẶC BIỆT KỈ NIỆM 35 NĂM NGÀY RA SỐ BÁO ĐẦU TIÊN

Những gương mặt, những tấm lòng dành cho *Toán học và Tuổi trẻ*

GSTS TRẦN VĂN NHUNG sinh ngày 01.10.1948 tại Ninh Bình, quê tại Hải Hậu, Nam Định, là học sinh chuyên toán khóa 1 Đại học Tổng hợp Hà Nội, tốt nghiệp ĐHTH Hà Nội năm 1971, bảo vệ luận án PTS (1982), TS (1990), là cán bộ giảng dạy, phó chủ nhiệm rồi chủ nhiệm khoa Toán - Cơ - Tin và Phó Hiệu trưởng trường Đại học Tổng hợp Hà Nội, nhận học bổng Humbol CHLB Đức (1984-1985), được phong Giáo sư 1991, nay là Vụ trưởng Vụ Quan hệ Quốc tế Bộ Giáo dục và Đào tạo, Chủ tịch Hội Toán học Hà Nội, Phó Chủ tịch Hội Toán học Việt Nam kiêm Chủ nhiệm bộ môn Toán - Sinh trường ĐHKHTN Hà Nội. Giáo sư nhiều năm là Ủy viên Hội đồng biên tập của 3 tạp chí toán của Việt Nam: THVTT, VJM, AMV ; người đề xuất có bài tiếng Anh trên báo đồng thời giới thiệu THVTT với bạn đọc quốc tế.

PTS NGUYỄN HUY ĐOAN sinh ngày 29.04.1949 quê ở Đình Bảng, Từ Sơn, Bắc Ninh, là cán bộ giảng dạy ở Khối Phổ thông chuyên toán ĐHSP Hà Nội 1, bảo vệ PTS tại CHDC Đức (1981) rồi về lại Khối PTCT, làm phó chủ nhiệm Khối, Ủy viên Hội đồng Bộ môn Toán Bộ Giáo dục và Đào tạo. Từ năm 1998 đến nay là Phó ban biên tập Toán, NXB Giáo dục. Phó trưởng đoàn học sinh Việt Nam dự thi Toán quốc tế 1987. Ông coi THVTT là người bạn gần gũi và thân thiết, động viên, giúp đỡ mình trong quá trình học tập và nghiên cứu. Ông cho rằng THVTT nay đã có nhiều đổi mới và mong sẽ có nhiều cải tiến hơn nữa, không chỉ hay mà còn mẫu mực trong cách trình bày mỗi bài giải.

Thạc sĩ HOÀNG HOA TRẠI sinh ngày 09.10.1951 tại Hà Tĩnh, học Đại học sư phạm Vinh 1970-1974, hiện dạy tại trường PTTH chuyên Lê Khiết, Quảng Ngãi, chuẩn hóa Thạc sĩ năm 1996, nghiên cứu sinh chuyên ngành Hình học Tôpô. Ông tham gia bồi dưỡng học sinh giỏi toán của tỉnh, giành về 4 giải quốc gia, hai bằng khen Olympic châu Á Thái Bình Dương, một huy chương bạc Olympic quốc tế. Ông là cộng tác viên tham gia ra đề và viết bài cho báo từ những năm 70, tham gia đoàn học sinh Việt Nam dự thi Olympic toán quốc tế năm 1999 với tư cách quan sát viên.

Thạc sĩ VŨ KIM THỦY sinh ngày 06.05.1956, quê tại Nam Quan, Nam Trực, Nam Định, học sinh các trường Ngô Gia Tự, Trần Quốc Toản, Mỹ Phúc, Trần Đăng Ninh (Nam Định), khối Chuyên toán ĐHSP Vinh, tốt nghiệp ĐHSP Hà Nội, dạy học ở Vĩnh Phú và Sóc Sơn, Hà Nội, bảo vệ luận án thạc sĩ chuyên ngành Đại số giao hoán tại Viện Toán học. Ông là đồng tác giả 3 quyển sách Toán sơ cấp, cộng tác viên của Bộ Giáo dục và Đào tạo trong các kì thi học sinh giỏi toàn quốc lớp 9 và phụ trách Chương trình Câu lạc bộ Dễ hay khó về Toán cho trẻ em trên Đài truyền hình Việt Nam từ 3.1996 đến nay. Công tác tại báo Toán học và Tuổi trẻ từ 23.04.1991 ông góp phần làm cho báo đến với bạn đọc Trung học Cơ sở.

Toán học và Tuổi trẻ
Mathematics and Youth

Năm thứ 36
Số 269 (11-1999)
Tòa soạn : 25 Hàn Thuyên, Hà Nội
ĐT : 04.8262477-04.9714359
FAX: (84).4.9714359

TRONG SỐ NÀY

2 Thư chúc mừng của Phó Thủ tướng Phạm Gia Khiêm

3 35 năm trong lòng bạn trẻ yêu toán

4 **Dành cho Trung học cơ sở - For Lower Secondary Schools**
Tôn Nữ Bích Vân – Vận dụng hằng đẳng thức $\sqrt{A^2} = |A|$ vào giải toán

6 **Các cuộc thi tuyển sinh vào Đại học – University Entrance Exams**
Đề thi toán vào Trường ĐHQG TP Hồ Chí Minh năm 1998

8 **Lịch sử toán học – History of Mathematics**
Trần Văn Nhung – Câu chuyện hấp dẫn về bài toán Phécma
Vũ Kim Thủy – Từ Số học đến Số học

10 **Các cuộc thi toán – Math. Competitions**
Đề thi học sinh giỏi toán THPT tỉnh Thanh Hóa (1998)

11 **Nhìn ra thế giới – Around the World**
Đề thi Olympic toán Liên bang Nga (3-1995)

Tiếng Anh qua các bài toán – English through Math Problems – *Ngô Việt Trung*

12 **Đề ra kì này – Problems in this Issue**
T1/269, ..., T10/269, L1,L2/269

14 Kết quả cuộc thi giải Toán kỉ niệm 35 năm Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ

15 Kết quả cuộc thi giải Toán và Vật lí trên Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ năm học 1998-1999

16 **Giải bài kì trước – Solutions of Previous Problems**
Giải các bài của số 265, T7,T8/THCS và T7,T8/THPT

28 **Giải trí toán học – Math Recreation**

Câu lạc bộ – Math Club

CHÀO MỪNG
NGÀY NHÀ GIÁO VIỆT NAM
20-11

THƯ CHÚC MỪNG CỦA PHÓ THỦ TƯỚNG PHẠM GIA KHIÊM

Hà Nội, ngày 3 tháng 11 năm 1999

Thân gửi cán bộ, cộng tác viên và bạn đọc tạp chí Toán học và Tuổi trẻ !

Tôi rất vui mừng với sự phát triển của tạp chí Toán học và Tuổi trẻ trong 35 năm qua. Trên con đường đi lên của mình, tạp chí đã vượt qua nhiều khó khăn và luôn mang tới cho bạn đọc những thông tin, kiến thức bổ ích. Đó là một cố gắng lớn của tập thể cán bộ Tòa soạn, các cộng tác viên và hàng vạn bạn đọc có cùng niềm ham mê toán học.

Đảng và Nhà nước luôn đặc biệt quan tâm tới sự nghiệp trồng người như Bác Hồ đã dạy.

Sự trưởng thành của tạp chí mang một ý nghĩa rất lớn trong sự nghiệp đào tạo thế hệ trẻ Việt Nam, góp phần nâng cao dân trí, đào tạo tài năng cho đất nước.

Toán học là một ngành khoa học cơ bản và là công cụ giúp cho nhiều ngành khoa học khác phát triển. Học toán và tìm hiểu toán học giúp cho con người có những phẩm chất tốt đẹp như say mê, kiên trì, chính xác và sáng tạo khi giải quyết những vấn đề đặt ra trong cuộc sống.

Trong nhà trường phổ thông, chiếc nôi đầu tiên giúp cho các bạn trẻ trở thành những công dân có ích cho sự nghiệp xây dựng và bảo vệ Tổ quốc thì toán học là môn học quan trọng. Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ đã có tác dụng không nhỏ trong việc góp phần định hướng về nội dung, phương pháp giảng dạy, phương pháp học tập môn toán trong các trường phổ thông.

Với tư chất thông minh và chịu khó học hỏi, học sinh Việt Nam luôn đạt được những thứ hạng cao của khu vực và thế giới trong nhiều kỳ thi Olympic các môn toán học, tin học, vật lý học... Nhiều học sinh yêu toán đã trở thành những nhà khoa học có uy tín và là niềm tự hào của sự nghiệp giáo dục nước ta.

Tôi mong rằng các nhà trường phổ thông tích cực động viên, khích lệ bằng nhiều hình thức để ngày càng có nhiều em học sinh yêu thích và say mê đọc tạp chí Toán học và Tuổi trẻ.

Nhân dịp kỷ niệm 35 năm tạp chí Toán học và Tuổi trẻ ra số đầu tiên, tôi xin chúc mừng các cán bộ, cộng tác viên, bạn đọc của tạp chí và mong rằng tạp chí ngày càng đẹp hơn về hình thức, phong phú về nội dung để có đông đảo bạn đọc hơn nữa.

Chào thân ái

Phó Thủ tướng Chính phủ

Phạm Gia Khiêm

LỜI CẢM ƠN

Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ xin chân thành cảm ơn các vị lãnh đạo Đảng và Nhà nước, Viện Khoa học Việt Nam, Bộ Giáo dục và Đào tạo, Nhà xuất bản Giáo dục, Hội Toán học Việt Nam, các cơ quan, trường học, doanh nghiệp, các cộng tác viên và toàn thể các bạn trẻ yêu toán đã động viên, giúp đỡ, cộng tác để Tạp chí làm tròn trọng trách của mình suốt 35 năm qua. Tạp chí mong mỏi tiếp tục nhận được sự quan tâm, ủng hộ của các quý vị và các bạn trẻ trong thời gian tới.

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

35 NĂM TRONG LÒNG BẠN TRẺ YÊU TOÁN

Báo Toán học và Tuổi trẻ được phép xuất bản số đầu tiên vào tháng 10 năm 1964 do sáng kiến của Ban Vận động thành lập Hội Toán học Việt Nam với mục đích ban đầu là : gây không khí sôi nổi, hào hứng học toán trong thanh, thiếu niên, đặc biệt là học sinh các trường phổ thông cấp 3. Các giáo sư Tạ Quang Bửu, Lê Văn Thiêm, Nguyễn Thúc Hào, Nguyễn Cảnh Toàn... là những người đầu tiên góp sức mình cho sự ra đời của tờ báo.

Thời kì đầu báo ra 16 trang khổ 19×27 với kì hạn 1 tháng 1 số. Số báo đầu tiên ra 3000 bản, nhưng sau đó đã phải in thêm 3000 bản nữa mà vẫn không đáp ứng đủ nhu cầu của bạn đọc lúc bấy giờ.

Nhằm phục vụ đối tượng của mình, nội dung báo có các chuyên mục : Nói chuyện với các bạn trẻ yêu toán, Tìm hiểu sâu thêm toán học phổ thông, Bước đầu làm quen với toán học hiện đại, Toán học và Đời sống, Lịch sử toán học và tiểu sử các nhà toán học, Giải đáp thắc mắc, Học sinh tìm tòi, Bạn có biết... và các chuyên mục thường xuyên : Đề ra kì này, Giải bài kì trước, Giải trí toán học.

Với mục đích và nội dung như vậy, ngay từ khi mới ra đời báo Toán học và Tuổi trẻ (THVTT) đã được bạn đọc khắp miền Bắc gửi thư về hoan nghênh nhiệt liệt. Số lượng và nội dung những bức thư của bạn đọc nói lên lòng yêu thích, say mê toán học của đông đảo các bạn trẻ trong các nhà trường, xí nghiệp, cơ quan, nông trường, công trường và trong quân đội.

Mười năm đầu hoạt động của báo là thời gian miền Bắc nước ta phải đương đầu với cuộc chiến tranh phá hoại vô cùng ác liệt của kẻ thù. Tuy vậy, nhờ có sự quan tâm đặc biệt của Ủy ban Khoa học Nhà nước, nhờ sự giúp đỡ nhiệt tình của các cơ quan xuất bản, ấn loát, phát hành báo chí, bưu điện cùng với những cố gắng bền bỉ, tích cực của ban biên tập, tòa soạn và các cộng tác viên, báo THVTT đã vượt qua mọi khó khăn gian khổ gây nên bởi cuộc chiến tranh leo thang từng bước của quân thù, phục vụ bạn đọc thường xuyên và liên tục. Vượt qua bom đạn, báo THVTT đến với bạn đọc tại các mái trường hay cơ quan nơi sơ tán, theo các hòm thư thay đổi của các chiến sĩ phòng không bên mâm pháo, trạm rađa và vào ba lô của anh bộ đội đang đi dọc Trường Sơn vào miền Nam cứu nước.

Cuộc kháng chiến thắng lợi, đất nước thống nhất năm 1975 đã tạo cơ hội cho báo THVTT bay đến khắp mọi miền cả nước.

Thời gian gặp nhiều khó khăn (1968-1992) báo chỉ ra 6 số một năm. Từ 1993 báo trở lại ra hàng tháng. Từ 1.1986 đến 3.1990 có Các đề toán ôn tập, thêm đề toán cho cấp THCS, cho đến 2.1994 đã có 10 đề Toán (5 đề cho các lớp THCS, 5 đề cho các lớp THPT) và 2 đề cho Vật lí. Từ 1.1992 mở chuyên mục : Ống kính cải cách dạy và học toán (sau đổi là *Diễn đàn dạy và học toán*). Từ 6.1993 mở đều đặn chuyên mục *Dành cho các bạn chuẩn bị thi vào đại học*. Từ 1.1994 ra đều đặn bài *Dành cho các bạn THCS*. Từ 1998 thêm mục *Tiếng Anh qua các bài toán và lời giải*, *Câu lạc bộ*.... Từ 1.1999 mở thêm chuyên mục *Nhìn ra Thế giới* nhằm giới thiệu các cuộc thi toán và kinh nghiệm dạy học toán của nước ngoài.

Như vậy là đối tượng báo đã mở rộng ra cho hàng triệu học sinh của cả các lớp trung học cơ sở và trung học phổ thông.

Theo thời gian, các cơ quan chủ quản của THVTT là :

1964 đến 1991 : Hội Toán học Việt Nam - Viện Khoa học Việt Nam (trước gọi là Ủy ban Khoa học Nhà nước)

Từ 1991 đến nay : Bộ Giáo dục và Đào tạo - Hội Toán học Việt Nam.

Từ 1993 báo trở thành Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ, in 28 trang, bìa 4 màu.

Số lượng xuất bản có những thăng trầm khác nhau. Từ 1991 trở về nước : mỗi số cao nhất là 15000, thấp nhất là gần 2000.

Từ 1992 trở lại đây : mỗi số thấp nhất là 12000, cao nhất 24000. Năm 1999 : mỗi số trung bình 23000 bản.

Từ chỗ chỉ có 2 cán bộ tại tòa soạn, nay tòa soạn đã có 6 người, có máy vi tính, máy fax, và những trang thiết bị cần thiết.

Suốt 35 năm THVTT liên tục tổ chức các kì thi giải toán thường niên và 5 năm một lần tổ chức thi các cuộc giải toán đặc biệt, mỗi lần động viên hàng vạn học sinh giải bài, trở thành người thầy, người bạn của học sinh giỏi toán.

Nhiều bạn đọc ngày xưa của báo nay đã thành giáo sư, tiến sĩ, nhà khoa học giữ trọng trách trong nhiều cơ quan và tổ chức xã hội.

Do những đóng góp của nhiều thế hệ cán bộ, công nhân viên, cộng tác viên THVTT suốt hơn một vạn ngày qua, Nhà nước đã tặng 2 Huân chương Lao động hạng Nhì năm 1984 và 1995 cho THVTT.

THVTT

Dành cho các bạn
TRUNG HỌC CƠ SỞ

VẬN DỤNG HẰNG ĐẲNG THỨC $\sqrt{A^2} = |A|$ VÀO GIẢI TOÁN

TÔN NỮ BÍCH VÂN
(GV THCS Nguyễn Khuyến, Đà Nẵng)

Trong chương I, Đại số 9, hằng đẳng thức $\sqrt{A^2} = |A|$ có nhiều vận dụng trong các bài tập từ đơn giản đến phức tạp.

Tuy nhiên, khi gặp dạng toán này, nhiều bạn thường lúng túng, ngay cả học sinh giỏi cũng gặp nhiều sai sót khi trình bày lời giải. Qua bài viết này tôi nêu một số loại toán thường gặp có thể vận dụng hai dạng biến đổi căn thức cơ bản sau đây :

Đưa ra ngoài dấu căn

$$\sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A \text{ nếu } A \geq 0 \\ -A \text{ nếu } A < 0 \end{cases}$$

Đưa vào trong dấu căn:

$$A\sqrt{B} = \begin{cases} \sqrt{A^2B} \text{ nếu } A \geq 0 \\ -\sqrt{A^2B} \text{ nếu } A < 0 \end{cases}$$

Loại 1. Biến đổi đơn giản căn thức bậc hai

Ví dụ 1. Đưa thừa số ra ngoài dấu căn :

$$\sqrt{9x^4y^2} = 3x^2|y| = \begin{cases} 3x^2y \text{ nếu } y \geq 0 \\ -3x^2y \text{ nếu } y < 0 \end{cases}$$

Ví dụ 2. Đưa thừa số vào trong dấu căn :

$$x\sqrt{2y} = \begin{cases} \sqrt{2x^2y} \text{ nếu } x \geq 0 \\ -\sqrt{2x^2y} \text{ nếu } x < 0 \end{cases}$$

Một số bạn thường nhầm ở trường hợp thứ hai.

Loại 2. Tính giá trị của một biểu thức

Ví dụ 1. Tính $\sqrt{8-2\sqrt{7}}$

Giải. $\sqrt{8-2\sqrt{7}} = \sqrt{7-2\sqrt{7}+1} = \sqrt{(\sqrt{7}-1)^2}$
$= |\sqrt{7}-1| = \sqrt{7}-1$ (vì $\sqrt{7}-1>0$)

Có thể đặt $\sqrt{8-2\sqrt{7}} = a + b\sqrt{7}$ với các số nguyên a, b rồi bình phương hai vế để tính a, b ? Tương tự, hãy tính $\sqrt{2002+2\sqrt{2000-2\sqrt{1999}}}$

Ví dụ 2. Tính giá trị của
$A = 3x - 1 - \sqrt{4x^2-12x+9}$ với $x = 1999$

Giải. $A = 3x - 1 - \sqrt{(2x-3)^2} = 3x - 1 - |2x-3|$
Với $x = 1999$ thì $2x - 3 > 0$ nên $A = 3x - 1 - (2x - 3)$
$= x + 2$. Lúc đó A có giá trị là $1999 + 2 = 2001$

Loại 3. Rút gọn một biểu thức

Ví dụ 1. Rút gọn $B = \sqrt{3x-4-2\sqrt{3x-5}}$

Giải. Điều kiện $x \geq \frac{5}{3}$. Biến đổi

$B = \sqrt{3x-5-2\sqrt{3x-5}+1} = \sqrt{(\sqrt{3x-5}-1)^2}$
$= |\sqrt{3x-5}-1|$

Nếu $\sqrt{3x-5} - 1 \geq 0$ hay $\sqrt{3x-5} \geq 1$ hay $x \geq 2$ thì $B = \sqrt{3x-5} - 1$.

Nếu $\sqrt{3x-5} - 1 < 0$ hay $x < 2$ thì $B = 1 - \sqrt{3x-5}$.

$$\text{Vậy : } B = \begin{cases} \sqrt{3x-5}-1 \text{ nếu } x \geq 2 \\ 1-\sqrt{3x-5} \text{ nếu } \frac{5}{3} \leq x < 2 \end{cases}$$

Có thể đặt $B = a + b\sqrt{3x-5}$ với các số nguyên a, b rồi tính a, b ?

Ví dụ 2. Rút gọn $C = \dfrac{\sqrt{x^2+4x+4}}{|x|-2}$

Giải. $C = \dfrac{\sqrt{(x+2)^2}}{|x|-2} = \dfrac{|x+2|}{|x|-2}$ (đk : $x \neq \pm 2$)

Lập bảng khử dấu giá trị tuyệt đối

x		-2		0	
$\|x+2\|$	$-(x+2)$	0	$x+2$	2	$x+2$
$\|x\|-2$	$-x-2$	0	$-x-2$	-2	$x-2$

Từ đó tính được

$$C = \begin{cases} 1 \text{ nếu } x < -2 \\ -1 \text{ nếu } -2 < x < 0 \\ \dfrac{x+2}{x-2} \text{ nếu } x \geq 0 \text{ và } x \neq 2 \end{cases}$$

Có thể đưa mẫu số $|x| - 2$ vào trong dấu căn ?

Loại 4. Chứng minh một đẳng thức.

Ví dụ 1. Chứng minh $2\sqrt{2}+\sqrt{3} = \sqrt{6}+\sqrt{2}$ (*)

Giải. Biến đổi vế trái
$2\sqrt{2}+\sqrt{3} = \sqrt{4(2+\sqrt{3})} = \sqrt{8+4\sqrt{3}}$
$= \sqrt{6+2\sqrt{12}+2} = \sqrt{(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2}$

$= |\sqrt{6} + \sqrt{2}| = \sqrt{6} + \sqrt{2}$

Vậy : $2\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{6} + \sqrt{2}$.

Có thể biến đổi $\sqrt{2}\sqrt{4+2\sqrt{3}} = \sqrt{2}(\sqrt{3}+1)$ hoặc bình phương của hai vế của (*) ?

Ví dụ 2.

Chứng minh $\sqrt{6+\sqrt{11}} - \sqrt{6-\sqrt{11}} = \sqrt{2}$

Đặt vế trái là A, ta có :

$\sqrt{2}A = \sqrt{12+2\sqrt{11}} - \sqrt{12-2\sqrt{11}}$

$= \sqrt{(\sqrt{11}+1)^2} - \sqrt{(\sqrt{11}-1)^2}$

$= |\sqrt{11}+1| - |\sqrt{11}-1| = 2$

Có thể tính A^2 ?

Loại 5. Giải phương trình

Ví dụ. Giải phương trình

$\sqrt{x-2+2\sqrt{x-3}} + \sqrt{x+6+6\sqrt{x-3}} = 3$

Giải. Điều kiện $x \geq 3$. Biến đổi vế trái thành

$\sqrt{x-3+2\sqrt{x-3}+1} + \sqrt{x-3+6\sqrt{x-3}+9}$

$= \sqrt{(\sqrt{x-3}+1)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-3}+3)^2}$

$= |\sqrt{x-3}+1| + |\sqrt{x-3}+3|$

$= \sqrt{x-3}+1+\sqrt{x-3}+3$

$= 4 + 2\sqrt{x-3} \geq 4.$

Vậy phương trình vô nghiệm.

Loại 6. Tìm giá trị của biến thỏa mãn điều kiện cho trước

Ví dụ. Cho $M = 4x - 1 - \sqrt{9x^2-12x+4}$. Tìm x để $M = 3$.

Giải. $M = 4x - 1 - \sqrt{(3x-2)^2} = 4x - 1 - |3x-2|$

Xét dấu của $3x - 2$ ta tính được

$$M = \begin{cases} x+1 & \text{nếu } x \geq \dfrac{2}{3} \\ 7x-3 & \text{nếu } x < \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

+ Với $x \geq \dfrac{2}{3}$ thì $M = 3 \Leftrightarrow x + 1 = 3 \Leftrightarrow x = 2$: thích hợp

+ Với $x < \dfrac{2}{3}$: thì $M = 3 \Leftrightarrow 7x - 3 = 3 \Leftrightarrow x = \dfrac{6}{7}$: loại vì không thỏa mãn $x < \dfrac{2}{3}$.

Vậy : $M = 3$ khi $x = 2$. Có thể viết $4x - 4 = \sqrt{9x^2-12x+4}$ rồi bình phương hai vế ?

Loại 7. Tìm cực trị của một biểu thức đại số

Ví dụ. Tìm giá trị nhỏ nhất của :

$D = \sqrt{1-4x+4x^2} + \sqrt{4x^2-12x+9}$

Giải. $D = \sqrt{(1-2x)^2} + \sqrt{(2x-3)^2}$

$D = |1 - 2x| + |2x - 3| \geq |1 - 2x + 2x - 3| = 2$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow (1 - 2x)(2x - 3) \geq 0$

Lập bảng xét dấu

x		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$	
$1-2x$	+	0	−		−
$2x-3$	−		−	0	+
$(1-2x)(2x-3)$	−	0	+	0	−

$(1-2x)(2x-3) \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} \leq x \leq \dfrac{3}{2}$

Vậy : GTNN $D = 2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} \leq x \leq \dfrac{3}{2}$

Các bài tập ở các ví dụ trên có thể còn nhiều cách giải khác, trong phạm vi bài viết này, chỉ xin trình bày cách giải có thể vận dụng hằng đẳng thức $\sqrt{A^2} = |A|$ và gợi ý một vài cách khác. Mong rằng các bạn có thể củng cố, khắc sâu và vận dụng thành thạo, linh hoạt khi gặp các dạng toán biến đổi biểu thức có dấu căn./.

Thư từ muôn nơi

Báo Toán học và Tuổi trẻ là người bạn không thể thiếu được trong quá trình học tập và trưởng thành của học sinh yêu thích Toán học ở các tỉnh thành phía Nam. Báo cũng là người trợ thủ đắc lực cho đội ngũ giáo viên Toán chúng tôi trong quá trình giảng dạy và bồi dưỡng học sinh giỏi. Mong rằng báo sẽ đến tay bạn đọc các tỉnh phía Nam một cách nhanh nhất và mở rộng thêm nội dung về Toán học đồng thời nâng cao thêm nội dung Vật Lí. Chúng tôi phấn đấu để mỗi học sinh các lớp chuyên Toán, Lí đều sẽ nhận được một tờ báo mỗi tháng. Sau mỗi năm tòa soạn báo nên nghiên cứu việc xuất bản một bộ đóng thành tập của năm đó để bạn đọc dễ lưu trữ như sách. Chúc báo luôn luôn kịp thời đổi mới để ngày càng xứng đáng với lòng tin yêu của các bạn trẻ.

Nhà giáo Ưu tú TRẦN ANH DŨNG
Hiệu trưởng
Trường PTTH chuyên Lương Thế Vinh, Đồng Nai

ĐỀ THI TUYỂN SINH MÔN TOÁN - ĐHQG TP HỒ CHÍ MINH NĂM 1998 (Khối A - Đợt 1)

A. PHẦN BẮT BUỘC

Câu I. 1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số

$$y = \frac{2x^2 + x}{x + 1} \text{ (H)}$$

2) Tìm những điểm M trên đường thẳng y = 1 sao cho từ M có thể kẻ được đúng một tiếp tuyến đến đồ thị (H).

Câu II. Cho

$f(x) = \cos^2 2x + 2(\sin x + \cos x)^3 - 3\sin 2x + m.$

1) Giải phương trình $f(x) = 0$ khi $m = -3$.

2) Tính theo m giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $f(x)$. Từ đó tìm m sao cho $(f(x))^2 \leq 36$ với mọi x.

Câu III. 1) Cho hai số nguyên dương p và q. Tính $I = \int_0^{2\pi} \cos px \cdot \cos qx \, dx$ trong hai trường hợp $p = q$ và $p \neq q$.

2) Cho các số thực $a_1, a_2, ..., a_n$. Giả sử

$a_1\cos x + a_2\cos 2x + ... + a_n \cos nx = 0$ với mọi $x \in [0, 2\pi]$.

Hãy sử dụng kết quả trên để tính $a_1, a_2, ..., a_n$.

Câu IV. Cho tập hợp $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

1) Có bao nhiêu tập con X của tập A thỏa mãn điều kiện X chứa 1 và không chứa 2 ?

2) Có bao nhiêu số tự nhiên chẵn gồm 5 chữ số đôi một khác nhau lấy từ tập A và không bắt đầu bởi 123 ?

B. PHẦN TỰ CHỌN (Chọn 1 trong 2 câu sau)

Câu Va. Cho hai đường tròn

$(C_1) : x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$

$(C_2) : x^2 + y^2 - 10x - 6y + 30 = 0$

có tâm lần lượt là I và J.

1) Chứng minh (C_1) tiếp xúc ngoài với (C_2) và tìm tọa độ tiếp điểm H.

2) Gọi (D) là một tiếp tuyến chung không đi qua H của (C_1) và (C_2). Tìm tọa độ giao điểm K của (D) và đường thẳng IJ. Viết phương trình đường tròn (C) đi qua K và tiếp xúc với hai đường tròn (C_1) và (C_2) tại H.

Câu Vb. Cho hình chóp tam giác $SABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, $SA \perp (ABC)$ và $SA = a$. M là một điểm thay đổi trên cạnh AB. Đặt $\angle ACM = \alpha$, hạ SH vuông góc với đường thẳng CM.

1) Tìm quỹ tích điểm H. Suy ra giá trị lớn nhất của thể tích tứ diện $SAHC$.

2) Hạ $AI \perp SC$, $AK \perp SH$. Tính độ dài SK, AK và thể tích tứ diện $SAKL$.

Chú ý. Khối B chỉ thay câu I.2 và IV.1.

HƯỚNG DẪN GIẢI

A. PHẦN BẮT BUỘC

Câu I. 1) Bạn đọc tự giải

2) Gọi $A(x_o, y_o)$ là một điểm thuộc (H). Phương trình tiếp tuyến tại A là

$(d) : y = f'(x_o)(x - x_o) + y_o$

$$\Leftrightarrow y = \frac{2x_o^2 + 4x_o + 1}{(x_o + 1)^2}(x - x_o) + \frac{2x_o^2 + x_o}{x_o + 1}.$$

(d) qua điểm $M(m, 1) \in$ đường thẳng y = 1

$$\Leftrightarrow 1 = \frac{2x_o^2 + 4x_o + 1}{(x_o + 1)^2}(m - x_o) + \frac{2x_o^2 + x_o}{x_o + 1}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_o \neq -1 \\ (2m - 2)x_o^2 + (4m - 2)x_o + m - 1 = 0 \end{cases}$$

Ta phải tìm m để phương trình

$f(x) = 2(m - 1)x^2 + 2(2m - 1)x + m - 1 = 0$ (1)

chỉ có một nghiệm x ≠ -1.

* $m = 1$: (1) $\Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow m = 1$ thỏa mãn.

* $m \neq 1$: Ta có 2 khả năng

+ (1) có nghiệm -1 và nghiệm còn lại ≠ -1(a)

+ (1) có nghiệm kép ≠ -1 (b)

Từ (a) và (b) dẫn đến kết luận

Có 4 điểm M trên đường thẳng $y = 1$ thỏa mãn yêu cầu đề bài, chúng có hoành độ lần lượt là : $1, -1, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}$.

II. 1) Với $m = -3$, đặt $t = \sin x + \cos x$; $|t| \leq \sqrt{2}$ ta được

$$t^4 - 2t^3 + t^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = 1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4}) = 0 \\ \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4}) = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = 2k\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{array}\right. \quad (k \in Z)$$

2) Tương tự câu trên thì
$f = -t^4 + 2t^3 - t^2 + m + 3$ với $t = \sin x + \cos x$,
$|t \leq \sqrt{2}$; $f' = -4t^3 + 6t^2 - 2t = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = 1 \\ t = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

Lập bảng biến thiên của f với $|t| \leq \sqrt{2}$ ta có :
$f_{\text{lớn nhất}} = m + 3$
$f_{\text{nhỏ nhất}} = m - 3 - 4\sqrt{2}$
Ta có : $[f(x)]^2 \leq 36\ \forall x \Leftrightarrow -6 \leq f(x) \leq 6\ \forall x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f_{\text{lớn nhất}} \leq 6 \\ f_{\text{nhỏ nhất}} \geq -6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 4\sqrt{2} - 3 \leq m \leq 3$$

Câu III. 1) Khi $p = q$ thì

$$I = \int_0^{2\pi} \cos^2 px dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1 + \cos 2px) dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[x + \frac{\sin 2px}{2p}\right]_0^{2\pi} = \pi$$

Khi $p \neq q$ thì $I = \int_0^{2\pi} \cos px \,.\, \cos qx\, dx =$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [\cos(p+q)x + \cos(p-q)x] dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{p+q}\sin(p+q)x + \frac{1}{p-q}\sin(p-q)x\right]_0^{2\pi} = 0$$

2) Đặt $f(x) = a_1\cos x + a_2\cos 2x + \ldots + a_n \cos nx$ thì $f(x) = 0\ \forall x \in [0; 2\pi]$

Xét $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Do $\int_0^{2\pi} \cos kx \cos rx\, dx = 0$

$\forall k \in \{1, 2, \ldots, n\} \setminus \{r\}$ nên

$$0 = \int_0^{2\pi} \cos kx \,.\, f(x)\, dx = \sum_{j=1}^{n} a_j \int_0^{2\pi} \cos kx \cos jx\, dx$$

$$= a_k \int_0^{2\pi} \cos kx \cos kx\, dx$$

nghĩa là $0 = a_k.\pi$ và do đó $a_k = 0\ \forall k$.

IV. 1) Đặt $B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Vì X không chứa 2 nên $X \setminus \{1\}$ là một tập con của B. Ngược lại, cho Y là một tập con bất kì của B, thì $X = Y \cup \{1\}$ là tập con của A thỏa yêu cầu đề bài.

Vậy số tập con X của A thoả yêu cầu đề bài bằng số tập con của B, đó là $2^6 = 64$.

2) Gọi $x = \overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ là số chẵn gồm 5 chữ số khác nhau đôi một lấy từ A. Ta có 4 cách chọn chữ số hàng đơn vị $a_5 \in \{2, 4, 6, 8\}$ (vì x là số chẵn). Còn lại số cách chọn số $\overline{a_1a_2a_3a_4}$ là $7.6.5.4 = 840$ cách. Vậy có $4 \times 840 = 3.360$ số.

Xét số chẵn có dạng $y = \overline{123a_4a_5}$. Có 3 cách chọn a_5 từ $\{4, 6, 8\}$, sau đó có 4 cách chọn a_4 từ $\{4, 5, 6, 7, 8\} \setminus \{a_5\}$ nên có $3.4 = 12$ số y như thế. Loại bỏ những số này đi, ta còn có $3360 - 12 = 3.348$ số chẵn gồm 5 chữ số khác nhau đôi một và không bắt đầu bởi 123.

Câu Va.

1) Bạn đọc tự chứng minh $IJ = r_1 + r_2 \Rightarrow (C_1)$ tiếp xúc ngoài (C_2).

Ta có $\overrightarrow{IH} = \frac{3}{2}\overrightarrow{HJ}$ nên $H\left(\frac{19}{5}; \frac{7}{5}\right)$

2) (D) tiếp xúc với (C_1) và (C_2) lần lượt tại A và B.

Do $BJ // AI$ nên $\dfrac{KJ}{KI} = \dfrac{BJ}{AI} = \dfrac{2}{3}$, nghĩa là $\overrightarrow{IK} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{KJ}$. Suy ra $K(11; 11)$.

(C) có đường kính HK và tâm P là trung điểm của HK. Do đó

$$x_P = \frac{1}{2}(x_H + x_K) = \frac{1}{2}\left(\frac{19}{5} + 11\right) = \frac{37}{5}$$

$$y_P = \frac{1}{2}(y_H + y_K) = \frac{1}{2}\left(\frac{7}{5} + 11\right) = \frac{31}{5}$$

$$\overrightarrow{HK} = \left(\frac{36}{5}, \frac{48}{5}\right) \text{ nên}$$

$$r = \frac{1}{2}HK = \frac{1}{2} \times \frac{1}{5}\sqrt{36^2 + 48^2} = 6$$

Vậy (C) có phương trình

$$\left(x - \frac{37}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{31}{5}\right)^2 = 6^2$$

Câu Vb. 1) Quỹ tích H là cung tròn JA thuộc nửa đường tròn đường kính AC trong mặt phẳng (ABC), với J là trung điểm BC.

Thể tích tứ diện $SAHC$ lớn nhất khi diện tích đáy AHC lớn nhất $\Leftrightarrow H$ là điểm chính giữa H_o của nửa đường tròn đường kính AC. Khi đó

$$V_{SAH_oC} = \frac{1}{3}SA \,.\, S_{AH_oC} = \frac{1}{3}a \,.\, \frac{a^2}{4} = \frac{a^3}{12}$$

2) Kết quả :

$$SK = \frac{SA^2}{SH} = \frac{a}{\sqrt{1 + \sin^2\alpha}}$$

$$AK = \frac{SA.AH}{SH} = \frac{a\sin\alpha}{\sqrt{1 + \sin^2\alpha}}$$

$$V = \frac{a^3 \sin 2\alpha}{24\,(1 + \sin^2\alpha)}$$

Người gửi : TRẦN NAM DŨNG (tp HCM)

LỊCH SỬ TOÁN HỌC

CÂU CHUYỆN HẤP DẪN VỀ BÀI TOÁN PHÉCMA

Đó là nội dung một cuốn sách dịch từ tiếng Anh FERMAT'S LAST THEOREM *Unlocking the Secret of an Ancient Mathematical Problem* của tác giả Amin D. Aczel do nhà xuất bản Bốn bức tường Tám cửa sổ, Hoa kỳ, in năm 1996. Sách do NXB Giáo dục ấn hành. Trong lời giới thiệu cuốn sách nguyên bản đã viết :

"Năm 1995, tại một hội nghị khoa học ở nước Anh, một nhà toán học đến từ thành phố Princeton (Hoa Kỳ) đã làm chấn động dư luận. Ông đã giải quyết được một trong những vấn đề toán học cực kỳ huyền bí, điều mà hàng ngàn nhà toán học đã bó tay trong suốt 350 năm qua : Ông đã chứng minh được **Định lí cuối cùng của Fermat (Phécma)** trong một bài báo dài 200 trang. Việc chứng minh định lí đã ngốn mất của ông 7 năm trời và sau đó phải thêm một năm nữa để ông hoàn thiện chứng minh của mình. Định lí cuối cùng của Fermat là một câu chuyện về con người, về lịch sử và về các nền văn hóa nằm ở đằng sau thành tựu khoa học vang dội này.

Được viết bởi một học giả Pháp thế kỉ thứ 17, định lí phát biểu lên nghe có vẻ đơn giản : *bình phương của một số nguyên có thể phân tích thành tổng các bình phương của hai số nguyên khác* - chẳng hạn, năm bình phương (25) bằng bốn bình phương (16) cộng ba bình phương (9) - *nhưng điều tương tự không xảy ra đối với lũy thừa bậc ba hay các lũy thừa bậc cao hơn*, (nghĩa là : "Phương trình $x^n + y^n = z^n$ không có nghiệm nguyên đối với mọi số tự nhiên $n > 2$". Tòa soạn chú thích). Sau khi Fermat qua đời, rất nhiều nhà toán học đã dành cả cuộc đời để cố chứng minh định lí này.

Định lí có nguồn gốc từ thời xa xưa. Khoảng 2000 năm trước công nguyên, người Babylon đã tìm cách phân tích một số chính phương thành tổng của hai số chính phương. Vào thế kỉ thứ VI trước công nguyên, nhà toán học Hi Lạp Pythagoras (Pitago) đã khái quát điều này thành một định lí nổi tiếng của ông và định lí này đã mở đường cho Fermat.

Mấy thế kỉ sau khi Fermat qua đời, vào năm 1955, với một bước tiến khá xa, hai nhà toán học Nhật đã đưa ra một phỏng đoán tuyệt vời về khả năng có mối liên hệ giữa hai ngành toán học khác hẳn nhau. 40 năm sau đó chính công trình của họ đã giúp cho Andrew Wiles, nhà toán học của thành phố Princeton, chứng minh được Định lí cuối cùng của Fermat.

Cuốn sách "Định lí cuối cùng của Fermat" này kết hợp triết học với một môn khoa học rất khó, cộng với văn phong kiểu phóng sự mang màu sắc khảo cứu nhằm dựng nên câu chuyện rất thực về trí tuệ nhân loại".

Vâng, Wiles được ca ngợi. Thế rồi một kẽ hở trong chứng minh của ông bị phát hiện. Sau đó Wiles mất thêm một năm trời nữa. Một chứng minh hoàn hảo được trình bày. Đó là công lao của Wiles và một học trò của ông. Nhưng cả thế giới cần thấy rõ là chứng minh định lí lớn Fermat không phải là công lao chỉ của một nhà toán học. Vinh quang còn thuộc về cả Ken Ribet, Barry Mazur, Goro Shimura, Yutake Tanyiama, Gerhard Fery, và nhiều người khác nữa. Cuốn sách kể lại toàn bộ câu chuyện. Đằng sau sự thành công còn có cả những gì là dối trá, mưu đồ và cả sự phản bội mà các phương tiện thông tin đại chúng chưa nói tới. Bảy năm trời lao động của Wiles và một khám phá vĩ đại. Andrew Wiles, Fermat, Cambridge là những tên người và địa danh mà người đời còn nhắc đến nhiều

Hi vọng sách sẽ sớm đến tay bạn đọc.

Đồng dịch giả TRẦN VĂN NHUNG

Thư từ muôn nơi

Đối với học sinh Trường THCS Trưng Vương (Hà Nội), từ lâu tạp chí Toán học và Tuổi trẻ là người bạn và người thầy gần gũi.

Ở trường Trưng Vương đã xuất hiện những nhóm bạn cùng đọc và trao đổi tạp chí Toán học và Tuổi trẻ, những nhóm bạn cùng viết chung bài gửi đến tạp chí. Ngày 15 hàng tháng đã trở thành ngày học sinh Trưng Vương ngóng chờ từng số báo mới, hồi hộp và vui mừng đọc tên mình trên danh sách bạn đọc có lời giải tốt...

Mong Toán học và Tuổi trẻ tiếp tục quan tâm tới các bạn đọc nhỏ tuổi, có nhiều bài viết phù hợp với bậc Trung học cơ sở. Thế hệ cha đã mê say với Toán học và Tuổi trẻ, giờ đây đến thế hệ con, mãi mãi Toán học Tuổi trẻ là người bạn dẫn đường thân thiết

N.G.Ư.T VŨ HỮU BÌNH
(Trường THCS Trưng Vương, Hà Nội)

** Những năm tháng ở trường Đại học, chúng tôi vẫn theo dõi thường xuyên báo THTT vì đó là người thầy, người bạn của Sinh viên Khoa Toán, ĐH Sư Phạm. Hầu hết học sinh chuyên Toán đều tâm sự : báo THTT thực sự là người thầy thứ hai của mình. Gần 100 giải Quốc gia và một chục học sinh đạt giải toán Quốc tế của trường PTTH Lam Sơn là một phần kết quả đào tạo của tờ báo thân yêu. Báo THTT đã và đang góp phần xứng đáng vào việc bồi dưỡng học sinh giỏi toán và đào tạo nhân tài khoa học cho đất nước.*

N.G.Ư.T PHẠM NGỌC QUANG
(Hiệu trưởng trường PTTH Lam Sơn, Thanh Hóa)

Từ SỐ HỌC đến... SỐ HỌC

Số học là một ngành lớn của toán học được con người nghiên cứu ngay từ buổi bình minh của lịch sử nhân loại. Đó là khoa học về các số và các phép tính trên các số. Trong Số học trước hết người ta nghiên cứu các số tự nhiên và các phân số. Cùng với sự tiến bộ của nhận thức con người, Toán học ngày càng phát triển, được chia thành nhiều ngành : Số học, Đại số, Hình học, Giải tích... rồi lại chia nhỏ hơn nữa thành rất nhiều bộ môn. Nói riêng về Đại số. Từ 2000 năm trước trong cuốn sách Toán học 9 chương ở Trung Quốc đã có bài toán cây lau nằm trong chương Phương trình. Vậy là Đại số đã ra đời từ hơn hai thiên niên kỉ trước. Cái tên Đại số (tức là Số đại diện) ghi dấu ấn rõ rệt của ẩn số và chứng tỏ nó ra đời trước hết vì mục đích nghiên cứu việc giải các phương trình. Nói đúng ra thì Đại số sơ cấp nghiên cứu phương trình bậc 1, bậc 2, các trường hợp đặc biệt của phương trình bậc cao và một số khái niệm khác nữa : các hàm số cơ bản, dãy số và giới hạn, các phép biến đổi đồng nhất, giải tích tổ hợp... *Đại số sơ cấp* chỉ là một ngành riêng của Đại số. *Đại số cao cấp* phát triển các vấn đề của đại số sơ cấp, nghiên cứu các cấu trúc toán học là các tập hợp phần tử được trang bị các phép toán : nhóm, vành, trường, dàn..

Như trên đã nói, phương trình bậc hai đã có từ 2000 năm trước. Nhưng mãi đến thế kỉ thứ VII ở Ấn Độ mới xuất hiện số âm. Điều đó có nghĩa là 700 năm sau phương trình bậc hai mới được giải quyết triệt để. Cho tới thế kỉ XVI các nhà toán học mới giải được các phương trình bậc ba và bậc bốn. Ba thế kỉ sau Evariste Galois (Êvarit Galoa) mới nghiên cứu khá triệt để về điều kiện giải được của một phương trình một cách tổng quát và một lí thuyết mang tên ông ra đời. Sau đó Đại số tiến những bước vũ bão. Người ta thấy bắt đầu có sự liên kết để ra đời các môn học mới như *Hình học đại số, Đại số hình học*,... Chỉ ví dụ trong *Đại số giao hoán*. Đại số giao hoán là một chuyên ngành của Đại số, nó ra đời từ môn Hình học đại số và là sự kết hợp giữa Đại số và Hình học. Từ việc nghiên cứu các vành đa thức trên một trường bất kì, lúc đầu Đại số giao hoán có đối tượng nghiên cứu là các vành trong đó phép nhân thỏa mãn luật giao hoán.

Sau đó mở rộng ra nghiên cứu các cấu trúc vành giao hoán khác, môđun, môđun Noether, môđun Artin, ... Cứ như thế, các nhà toán học muốn đi đến tận cùng của sự tưởng tượng, khám phá để bay bổng trên những sáng tạo không cùng. Thế nhưng biết bao người đã phải quy hàng trước phương trình nghiệm nguyên dương tưởng đơn giản $x^n + y^n = z^n$ bên lề cuốn Số học của Diophant (Điôphăng) do Fermat viết lại từ hơn 3 thế kỉ trước. Mãi đến 1994 cuộc chạy Maratông vĩ đại này mới chấm dứt sau lời giải của nhà toán học người Anh Andrew Wiles. Đi đến lời giải ấy Wiles đã đứng trên vai những người khổng lồ Kummer, Arakelov-Faltings, Taniyama, với các phát minh về mở rộng $Q(\zeta)$ của trường các số hữu tỉ, số nguyên tố loại 1, lí thuyết độ cao, đường cong eliptic, đường cong Weil, các khái niệm p-adic, L-hàm và các dạng modular...

Người ta thấy Số học không còn là cậu bé ngày xưa nữa mà đã thành người khổng lồ. Người ta cũng thấy các cành nhánh của cây đại thụ Toán học là Số học, Đại số, Hình học lại quấn vào nhau ở ngọn mà khó tìm được ranh giới. Sự ra đời của chuyên ngành *Số học đại số hình học* đã giúp giải quyết định lí lớn Fermat. Sau những vòng xóay trôn ốc phát triển, Số học hôm nay có tên gọi vẫn như ngày xưa nhưng rất ít nhà toán học có thể hiểu được mọi vấn đề của nó. Tất cả cũng chưa dừng lại.

Các nhà khoa học là như vậy. Sau cuộc chạy maratông này sẽ có cuộc maratông khác. Người ta nhận ra một điều là trong thời đại bùng nổ Công nghệ thông tin, lợi thế của Số học khi nghiên cứu các tập hợp rời rạc, các tập đếm được trong việc nghiên cứu các phần mềm máy tính lại trỗi dậy. Số học ngày nay đang có gương mặt mới và tràn đầy sức sống. Sự ra đời của ngành *Số học thuật toán* là một minh chứng cho điều đó.

VŨ KIM THỦY

Thư từ muôn nơi

Em cảm thấy rất là thú vị khi đọc và hiểu được từng chuyên mục, từng bài toán cụ thể trong các số báo gần đây. Em mong báo dành nhiều trang hơn cho diễn đàn phương pháp học toán, đặc biệt là đối với học sinh THCS chúng em. Em cảm ơn tất cả những người làm tạp chí THVTT.

NGUYỄN VĂN BẰNG
(Trường THCS Gia Trung, Gia Viễn, Ninh Bình)

Em rất thích đọc THVTT, nhất là những lúc gặp phải một bài toán khó. Tạp chí đã trở thành công cụ đắc lực cho việc học tập của em. Mục Câu lạc bộ đã tạo ra sân chơi bổ ích, giải trí nhưng vẫn phải tưởng tượng và mở rộng tầm nhìn...

NGUYỄN ĐỨC CẢNH
(12A2, PTTH Vĩnh Bảo, Hải Phòng)

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI TOÁN THPT TỈNH THANH HÓA (1998)

Thời gian : 180 phút

Bài 1. Cho elip (E) có phương trình

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

Xét các điểm A (-3; 0), M (-3; a), B (3;0), N(3; b) trong đó a, b là hai số thay đổi.

1) Xác định các tọa độ của giao điểm I của các đường thẳng AN và BM.

2) Chứng tỏ rằng điều kiện cần và đủ để đường thẳng MN tiếp xúc elip (E) là ab = 4.

3) Khi a, b thay đổi nhưng sao cho đường thẳng MN tiếp xúc với elip (E) thì giao điểm I của hai đường thẳng AN và BM nằm trên đường nào ?

Bài 2. Tìm miền giá trị của hàm số $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

$$f(x) = \frac{3 + 2sinx}{\sqrt{1 + cosx} + \sqrt{1 - cosx}}$$

Bài 3. Giả sử k là số nguyên và $P(x)$ là đa thức

$$P(x) = x^{1999} - x^{1997} + x^2 - 3kx + 3k + 1$$

a) Chứng minh rằng đa thức $P(x)$ không có nghiệm nguyên.

b) Chứng minh các số $P(n)$ và $P(n) + 3$ là nguyên tố cùng nhau đối với mọi số n nguyên.

Bài 4. Giả sử S là một điểm nằm ngoài mặt phẳng hình bình hành $ABCD$ sao cho các tam giác SAB, SBC, SCD và SAD tương đương

a) Chứng minh $ABCD$ là hình thoi

b) Nếu khoảng cách từ S tới mặt phẳng mp($ABCD$) là 12, BD = 30 và AC = 40. Tính khoảng cách từ hình chiếu vuông góc của điểm S trên mp($ABCD$) tới mp(SBC).

Bài 5. Trong mặt phẳng cho tam giác ABC và một điểm M thay đổi ở trong tam giác. Gọi A', B', C' lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm M trên các đường thẳng BC, CA, AB. Hãy xác định vị trí của điểm M khi $MA.MA' = MB.MB' = MC.MC'$.

KẾT QUẢ CUỘC THI (Tiếp trang 15)

12. *Nguyễn Khánh Nam*, 9/14, THCS Thái Nguyên, Nha Trang, Khánh Hòa
13. *Trần Huy Lập*, 9/1, THCS Nguyễn Tri Phương, Thừa Thiên - Huế
14. *Trần Quang Khải*, 10C, PTTH Nhị Chiểu, Kinh Môn, Hải Dương
15. *Phạm Gia Vĩnh Anh*, 9T, PTTH NK Trần Phú, Hải Phòng
16. *Trần Quang Vinh*, 11T, PTNK, ĐHQG, Tp Hồ Chí Minh
17. *Phạm Hoàng Hiệp*, 11A1, PTTH Hồng Quang, Hải Dương
18. *Nguyễn Minh Công*, 12T, PTTH Hà Nội - Amsterdam, Hà Nội
19. *Lê Huyền Đức*, 12A1, PTTH Vũng Tàu, Bà Rịa - Vũng Tàu
20. *Nguyễn Duy Tân*, 12A1, PTTH ch. Vĩnh Phúc
21. *Vũ Anh Hải*, 12A, PTTH Lê Hồng Phong, Hà Giang
22. *Đào Duy Bình*. 8A5, THCS Suối Đá, Tây Ninh
23. *Trần Thái An Nghĩa*, 9I, THCS Trần Hưng Đạo, Tx. Quảng Ngãi.
24. *Nguyễn Việt Hằng*, 9C, DT nội trú Yên Bình, Yên Bái
25. *Lê Thị Thu Trang*, 9A, Quốc học Quy Nhơn, Bình Định
26. *Triệu Thanh Hải*, 10C, PTTH ch Yên Bái
27. *Nguyễn Đức Hạnh*, 10, PTTH NK Thái Nguyên
28. *Võ Duy*, 11T, PTTH Lê Quý Đôn, Khánh Hòa
29. *Nguyễn Hoa*, 12T1, PT NK Đồng Hới, Quảng Bình
30. *Dương Quang Huy*, 12A1, PTTH ch. Yên Bái

B. MÔN VẬT LÍ

I. GIẢI CHÍNH THỨC

Giải nhất (1 giải)

Đào Anh Đức, 11 Lí, PTTH Phan Bội Châu, Vinh, Nghệ An

Giải nhì (1 giải)

Trần Tiến Dũng, 11A3, PTTH Phan Bội Châu, Vinh, Nghệ An

Giải ba (3 giải)

1. *Đinh Văn Trung*, 11 Lí I, PTTH ch. Nguyễn Du, Đắc Lắc
2. *Lê Cường*, 11A Lí B0, ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội
3. *Đàm Hữu Thu*, 12 Lí, PTTH Lương Văn Chánh, Tuy Hòa, Phú Yên

II. GIẢI KHUYẾN KHÍCH (14 giải)

1. *Nguyễn Tiến Dũng*, 10A2, PTTH Lạc Thủy, Hòa Bình
2. *Hồ Khánh Nam*, 11 Lí, PTTH Phan Bội Châu, Vinh, Nghệ An
3. *Lương Minh Đức*, 11 Lí, PTTH Phan Bội Châu, Vinh, Nghệ An
4. *Thái Quang Nhật*, 11A1, PTTH Trần Hưng Đạo, Bình Thuận
5. *Lê Công Trung*, 12 CL, PTTH ch. Hùng Vương, Việt Trì, Phú Thọ
6. *Lê Thanh Bình*, 12 Lí, PTTH Lương Văn Tụy, tx. Ninh Bình
7. *Đào Nhật Tân*, 12A1, PTTH ch. Vĩnh Phúc
8. *Nguyễn Anh Tuấn*, 12A1, PTTH Lê Quý Đôn, Long An
9. *Lê Huyền Đức*, 12A1, PTTH Vũng Tàu, Bà Rịa - Vũng Tàu
10. *Phạm Văn Tập*, 12A1, PTTH Vĩnh Bảo, Hải Phòng
11. *Nguyễn Văn Đồng*, 12A1, THCB Đào Duy Từ, Quảng Bình
12. *Hồng Ngọc Tân*, 12A2, PTTH ch. Trà Vinh.
13. *Phạm Văn Yên*, 12A2, PTTH Hai Bà Trưng, Mê Linh, Vĩnh Phúc
14. *Đỗ Nguyễn Nam Quân*, 12A2, PTTH Lê Quý Đôn, Đà Nẵng

THVTT

Nhìn ra thế giới

ĐỀ THI OLYMPIC TOÁN CỦA LIÊN BANG NGA (3-1995)

Bài 1. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{1-x^3}}$. Hãy tìm $\underbrace{f(...f(f(19))...)}_{95 \text{ lần}}$

Bài 2. Một thiết diện của một hình hộp chữ nhật là một hình lục giác đều. Chứng minh rằng hình hộp chữ nhật này là hình lập phương.

Bài 3. Tất cả các cạnh và đường chéo của một đa giác đều 12 đỉnh được tô bởi 12 màu (mỗi đoạn thẳng được tô bởi 1 màu). Có thể chăng với bất cứ ba mầu nào cũng có ba đỉnh được nối với nhau bởi các đoạn có các màu đó ?

Bài 4. Xét một tập hữu hạn hình vuông kích thước như nhau trên một mặt phẳng mà các cạnh của chúng song song. Biết rằng trong $k+1$ hình vuông bất kì đều tồn tại 2 hình vuông giao nhau. Chứng minh rằng tập này có thể phân chia thành không nhiều hơn $2k-1$ tập con sao cho tất cả các hình vuông trong mỗi tập con có điểm chung.

Bài 5. Bất đẳng thức $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \geq 2$ xảy ra với các góc α, β và γ. Chứng minh rằng

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leq \sqrt{5}$$

Bài 6. Dãy số $a_0, a_1, a_2, \ldots$ thỏa mãn hệ thức

$$a_{m+n} + a_{m-n} = \frac{1}{2}(a_{2m} + a_{2n})$$

đối với mọi số nguyên không âm m và n ($m \geq n$).

Xác định a_{1995} nếu $a_1 = 1$.

Bài 7. Các đường tròn (S_1) tâm O_1 và (S_2) tâm O_2 cắt nhau tại các điểm A và B. Tia O_1B cắt (S_2) ở điểm F và tia O_2B cắt (S_1) ở điểm E. Đường thẳng qua điểm B song song với EF cắt (S_1) tại M và cắt (S_2) tại N. Chứng minh rằng $MN = AE + AF$.

Bài 8. Trong (bản đồ) một thị trấn, mỗi đường phố coi là cạnh (đoạn thẳng) của đường gấp khúc ; hai phố khác nhau không cắt nhau ở điểm trong của mỗi cạnh. Mỗi phố được tô bởi một trong 3 màu : trắng, đỏ hoặc xanh. Mỗi phố nối 2 ngã ba, tại mỗi ngã ba có đúng 3 phố gặp nhau và chúng được tô bởi các màu phân biệt. Ngã ba được gọi là *dương* nếu ta đứng tại đó, quay ngược chiều kim đồng hồ thì các phố xuất hiện theo thứ tự : trắng, xanh và đỏ. Ngã ba được gọi là *âm* trong trường hợp trái lại. Chứng minh rằng hiệu của số ngã ba dương và số ngã ba âm là số chia hết cho 4./.

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

Bài số 23

Problem. Show that among any seven distinct positive integers not greater than 126, one can find two of them, say x and y, satisfying the inequalities $1 \leq \dfrac{x}{y} \leq 2$.

Solution. Assume to the contrary that there exist seven distinct positive integers $x_1, \ldots, x_7$ not greater than 126 such that any two numbers x, y them do not satisfy the inequalities

$$1 \leq \frac{x}{y} \leq 2.$$

Without restrictions we may assume that $x_1 < \ldots < x_7$. Then $\dfrac{x_{i+1}}{x_i} > 1$, whence we must have $\dfrac{x_{i+1}}{x_i} > 2$ or $x_{i+1} \geq 2x_i + 1$ for $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. From this it follows that

$$x_7 \geq 2x_6 + 1 \geq 4x_5 + 3 \geq 8x_4 + 7 \geq 16x_3 + 15 \geq 32x_2 + 31 \geq 64x_1 + 63 \geq 127$$

This yields a contradiction to the fact that $x_7 \leq 126$.

Từ mới:

among	= trong số
distinct	= khác nhau (tính từ)
satisfy	= thỏa mãn
inequality	= bất đẳng thức
restriction	= hạn chế, giới hạn
without restrictions	= không làm mất tính chất tổng quát
follow	= theo sau (động từ)
from this it follows	= từ đây suy ra
contradiction	= mâu thuẫn
fact	= điều, việc, thực tế

NGÔ VIỆT TRUNG

ĐỀ RA KÌ NÀY

CÁC LỚP THCS

Bài T1/269. Xét số tự nhiên A_n = 19981998...1998 được viết trong hệ thập phân bởi n số 1998 liên tiếp nhau.

a) Chứng minh rằng tồn tại số nguyên dương $n < 1998$ sao cho A_n chia hết cho 1999.

b) Gọi k là số nguyên dương nhỏ nhất thỏa mãn A_k chia hết cho 1999, chứng minh rằng 1998 chia hết cho $2k$.

NGUYỄN HỮU BẰNG
(Nghệ An)

Bài T2/269. Giải phương trình

$$\frac{11}{x^2} - \frac{25}{(x+5)^2} = 1$$

PHẠM HÙNG
(Hà Nội)

Bài T3/269. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$B = (1+x)\left(1+\frac{1}{y}\right) + (1+y)\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

VŨ ĐỨC CẢNH
(Ninh Bình)

Bài T4/269. Cho tứ giác lồi $ABCD$. Lấy điểm M bất kì trên đường chéo AC. Đường thẳng qua M song song với AB cắt BC tại P. Đường thẳng qua M song song với CD cắt AD tại Q. Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{MP^2 + MQ^2} \le \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{CD^2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

HỒ QUANG VINH
(Nghệ An)

Bài T5/269. Cho đường tròn (O, R) với hai đường kính vuông góc AB và CD. Lấy điểm P trên đường tròn đó. Trên tia OP lấy điểm M sao cho OM bằng tổng các khoảng cách từ điểm P đến các đường thẳng AB và CD. Tìm quỹ tích các điểm M khi điểm P di động trên đường tròn.

NGUYỄN ĐÌNH LÂU
(Thừa Thiên – Huế)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/269. Cho hai số nguyên dương m và n sao cho $n + 2$ chia hết cho m. Hãy tính số các bộ ba số nguyên dương (x, y, z) thỏa mãn điều kiện : tổng $x + y + z$ chia hết cho m, trong đó mỗi số x, y, z đều không lớn hơn n.

NGUYỄN HUY ĐOAN
(Hà Nội)

Bài T7/269. Cho số tự nhiên $n \ge 2$ và hai số thực dương a, b sao cho $n - 1 < \frac{a}{b} \le n$. Xét các dãy số thực $x_1, x_2, ..., x_n$ thỏa mãn điều kiện : $x_1 + x_2 + ... + x_n = a$, trong đó $0 < x_i \le b$ với mọi $i = 1, 2, ..., n$. Tính giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của tích $P = x_1x_2...x_n$ và xác định tất cả các dãy $x_1, x_2, ..., x_n$ ứng với giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất đó.

PHẠM ĐÌNH TRƯỜNG
(Hà Nội)

Bài T8/269. Tìm tất cả các hàm số $f: R \to R$ thỏa mãn điều kiện $f\left(\frac{1}{2-x}\right) = 2f(x) - 3$ với mọi $x \in R\backslash\{2\}$.

HÀ DUY HƯNG
(Hà Nội)

Bài T9/269. Có tồn tại hay không một đa giác đều 600 cạnh trong mặt phẳng tọa độ Đềcác Oxy mà tọa độ các đỉnh của nó đều là số hữu tỉ ?

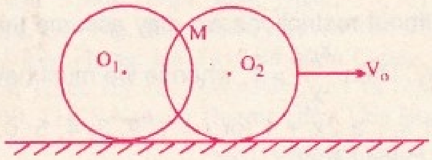
HOÀNG HOA TRẠI
(Quảng Ngãi)

Bài T10/269. Cho tứ diện $ABCD$. Lấy một điểm Q nằm trong tứ diện. Gọi Q' là điểm đối xứng với Q qua mp(BCD). Qua Q' dựng mặt phẳng song song với mp(BCD), mặt phẳng này cắt các đường thẳng AB, AC, AD lần lượt ở B_1, C_1, D_1, ta được hình chóp cụt $BCDB_1C_1D_1$. Bằng cách lấy điểm đối xứng với Q qua mỗi mặt còn lại của tứ diện rồi dựng các mặt phẳng song song tương tự như trên, ta được 3 hình chóp cụt nữa. Hãy xác định vị trí điểm Q để tổng các thể tích của 4 hình chóp cụt tạo thành là nhỏ nhất.

VŨ QUÝ LỘC
(Đà Nẵng)

CÁC ĐỀ VẬT LÍ

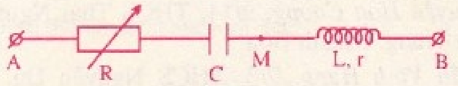
Bài L1/269. Trên mặt phẳng nằm ngang có một vành đai đứng yên, bán kính R. Một vành



đai khác giống thế, chuyển động với vận tốc $\vec{v_o}$ cạnh vành đai đầu. Tìm mối liên hệ phụ thuộc của vận tốc của giao điểm trên của 2 vành đai (điểm M trên hình vẽ) vào khoảng cách d giữa hai tâm. Biết rằng hai vành đai đều mỏng và cái thứ hai chuyển động sát cái thứ nhất.

(Olympic LB Nga)

Bài L2/269. Cho mạch điện xoay chiều như trên hình : Hiệu điện thế xoay chiều giữa hai



đầu A, B là : $u_{AB} = 80\sqrt{2}\sin 100\pi t (V)$. R là biến trở.

1) Khi $R = R_1$ thì

$$u_{MB} = 60\sqrt{2}\sin\left(100\pi t + \frac{\pi}{2}\right)(V)$$

$$i = \sqrt{2}\sin\left(100\pi t + \frac{\pi}{6}\right)(A)$$

Viết biểu thức u_{AM} và tính các giá trị R_1, L, r, C.

2) Khi $R = R_2$ thì công suất trên biến trở R có giá trị cực đại. Tìm R_2 và giá trị cực đại của công suất.

ĐỖ VĂN TOÁN

(Nghệ An)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/269. Consider the $4n$-digit number

$$A_n = \underbrace{19981998...1998}_{n \text{ times } 1998} \ (n=1,2,3,...)$$

i) Prove that there exists a positive integer $n < 1998$ such that A_n is divisible by 1999.

ii) Let k be the least positive integer such that A_k is divisible by 1999, prove that 1998 is divisible by $2k$.

T2/269. Solve the equation

$$\frac{11}{x^2} - \frac{25}{(x+5)^2} = 1.$$

T3/269. Find the least value of the expression

$$B = (1+x)\left(1+\frac{1}{y}\right) + (1+y)\left(1+\frac{1}{x}\right).$$

T4/269. Given a convex quadrilateral $ABCD$. M is an arbitrary point on the diagonal AC. The line, passing through M, parallel to AB, cuts BC at P. The line, passing through M, parallel to CD, cuts AD at Q. Prove that

$$\frac{1}{MP^2 + MQ^2} \le \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{CD^2}.$$

When does equality occur ?

T5/269. Let be given a circle (O, R) with its two perpendicular diameters AB and CD. P is a point on the circle. Take the point M on the ray OP so that OM is equal to the sum of the distances from P to the lines AB and CD. Find the locus of M when P moves on the circle.

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/269. Let be given two positive integers m and n such that $n+2$ is divisible by m. Find the numbers of triples of positive integers (x, y, z) satisfying the conditions : $x+y+z$ is divisible by m and x, y, z do not exceed n.

T7/269. Let be given a natural number $n \ge 2$ and two positive real numbers a, b such that $n-1 < \frac{a}{b} \le n$. Consider the sequences of real numbers $x_1, x_2, ..., x_n$ satisfying the conditions : $x_1 + x_2 + ... + x_n = a$ and $0 < x_i \le b$ for every $i = 1, 2, ..., n$. Find the greatest value and the least value of the product $P = x_1x_2...x_n$ and determine all sequences $x_1, x_2, ..., x_n$ for which, P attains its greatest value, its least value.

T8/269. Find all functions $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ satisfying the condition : $f\left(\frac{1}{2-x}\right) = 2f(x) - 3$ for every $x \in \mathbf{R}\setminus\{2\}$.

T9/269. In the plane with an orthogonal carsetian system of coordinates Oxy, does there exist a regular polygon with 600 sides such that the coordinates of all vertices of which are rational numbers ?

T10/269. Given a tetrahedron $ABCD$. Q is a point inside the tetrahedron. Q' is the mirror-image of Q through the plane (BCD). The plane, passing through Q', parallel to the plane (BCD), cuts the lines AB, AC, AD respectively at B_1, C_1, D_1 and we get a truncated pyramid $BCDB_1C_1D_1$. By taking the mirror-images of Q through the other faces of the tetrahedron, by similar constructions, we get three other truncated pyramids. Determine the position of Q such that the sum of the volumes of these four truncated pyramids attains its least value.

KẾT QUẢ

CUỘC THI GIẢI TOÁN KỈ NIỆM 35 NĂM TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Cuộc thi giải toán đặc biệt kỉ niệm 35 năm Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ được phát động từ 1.1999 và ngay lập tức được bạn đọc hưởng ứng nhiệt tình. Ngay trong tháng 1.1999 Tòa soạn đã nhận được những bài giải đầu tiên gửi về. Các bạn cấp THCS gửi bài về nhiều hơn. Các trường PTTH Trần Phú, Hải Phòng; Nguyễn Trãi, Hải Dương; ĐHKHTN Hà Nội, THCS Việt Trì, Phú Thọ; chuyên Vĩnh Phúc; Phan Bội Châu, Nghệ An; Lương Thế Vinh, Buôn Mê Thuột, Đắc Lắc... có nhiều bạn tham gia. Các bạn Đinh Thanh Tú, Lê Tất Thắng, Vũ Nhật Huy, Hoàng Ngọc Minh mới học lớp 8 đã đoạt giải của cuộc thi.

Sau đây là danh sách các bạn đoạt giải trong cuộc thi này.

I. GIẢI NHẤT (2 giải)

1. *Vũ Hoàng Hiệp*, 9CT, PTTH NK Trần Phú, Hải Phòng
2. *Phùng Văn Thắng*, 9D, THCS Ngô Đồng, Giao Thủy, Nam Định

II. GIẢI NHÌ (7 giải)

1. *Đinh Thanh Tú*, 8T, THCS Ngô Sĩ Liên, Hà Nội
2. *Ngô Xuân Bách*, 9A, PTTH NK Nguyễn Trãi, Hải Dương
3. *Nguyễn Tuấn Dương*, 9A, PTTH NK Nguyễn Trãi, Hải Dương
4. *Phạm Gia Vĩnh Anh*, 9T, PTTH NK Trần Phú, Hải Phòng
5. *Phạm Đức Hiệp*, 9T, THCS Chu Văn An, Hải Phòng
6. *Trần Tuấn Anh*, 11 Toán, PTTH Lê Quý Đôn, Nha Trang, Khánh Hòa
7. *Đỗ Quang Dương*, 12T, PTTH Hoàng Văn Thụ, Hòa Bình

III. GIẢI BA (9 giải)

1. *Nguyễn Thành Nam*, 9A, PTTH NK Nguyễn Trãi, Hải Dương
2. *Trương Bảo Nam*, 9A, THCS Nguyễn Đăng Đạo, Tx. Bắc Ninh
3. *Lê Đình Tiến*, 9A, PTTH NK Nguyễn Trãi, Hải Dương
4. *Kim Đình Thái*, 9B, THCS Yên Lạc, Vĩnh Phúc
5. *Mai Văn Hà*, 9C, THCS Lê Quý Đôn, Bỉm Sơn, Thanh Hóa
6. *Vũ Ngọc Minh*, 9T, THCS Chu Văn An, Hải Phòng
7. *Nguyễn Trung Lập*, 11A1, PTTH chuyên Vĩnh Phúc
8. *Vũ Văn Phong*, 11A1, PTTH chuyên Vĩnh Phúc
9. *Trần Tất Đạt*, 11B Toán, ĐHKHTN-ĐHQG Hà Nội

IV. GIẢI KHUYẾN KHÍCH (25 giải)

1. *Lê Tất Thắng*, 8A, THCS Hồng Lĩnh, Hà Tĩnh
2. *Vũ Nhật Huy*, 8A, THCS Vĩnh Tường, Vĩnh Phúc
3. *Hoàng Ngọc Minh*, 8C, THCS Việt Trì, Phú Thọ
4. *Nguyễn Hoa Cương*, 9/14, THCS Thái Nguyên, Nha Trang, Khánh Hòa
5. *Trần Vĩnh Hưng*, 9/3, THCS Nguyễn Du, Gò Vấp, Tp Hồ Chí Minh
6. *Cao Tiến Đạt*, 9A, PTTH Lương Thế Vinh, Buôn Ma Thuột, Đắc Lắc
7. *Nguyễn Trường Cơ*, 9A, PTTH Lương Thế Vinh, Buôn Ma Thuột, Đắc Lắc
8. *Vũ Thành Long*, 9A, THCS Nguyễn Trãi, Nam Sách, Hải Dương
9. *Trần Minh Tùng*, 9A2, THCB thị xã Cao Lãnh, Đồng Tháp
10. *Nguyễn Việt Hà*, 9B, THCS Trần Mai Ninh, Thanh Hóa
11. *Nguyễn Đình Hòa*, 9B, THCS Việt Trì, Phú Thọ
12. *Vũ Tuấn Tài*, 9B, THCS Việt Trì, Phú Thọ
13. *Nguyễn Văn Giáp*, 9B, THCS Yên Lạc, Vĩnh Phúc
14. *Đỗ Mạnh Cường*, 9C, Lê Quý Đôn, Bỉm Sơn, Thanh Hóa
15. *Vũ Thành Long*, 9A, THCS Nguyễn Trãi, Nam Sách, Hải Dương
16. *Phạm Minh Đức*, 10 Toán, PTTH NK Trần Phú, Hải Phòng
17. *Phạm Ngọc Lợi*, 11 Toán, PTTH NK Nguyễn Trãi, Hải Dương
18. *Hoàng Tùng*, 11A, ĐHKHTN-ĐHQG Hà Nội
19. *Nguyễn Minh Hoài*, 11A, ĐHKHTN-ĐHQG Hà Nội
20. *Võ Khắc Minh*, 11A1, PTTH Phan Bội Châu, Vinh, Nghệ An
21. *Nguyễn Trọng Huy*, 11A1, PTTH Phan Bội Châu, Vinh, Nghệ An
22. *Mai Như Ngọc*, 11A6, PTTH Ba Đình, Nga Sơn, Thanh Hóa
23. *Nguyễn Thị Hồng Hạnh*, 11T, PTTH Nguyễn Du, Buôn Ma Thuột, Đắc Lắc.
24. *Nguyễn Hà Duy*, 12A, PTTH Nguyễn Huệ, Hà Đông, Hà Tây.
25. *Nguyễn Duy Tân*, 12A1, PTTH chuyên Vĩnh Phúc.

THVTT

KẾT QUẢ CUỘC THI GIẢI TOÁN VÀ VẬT LÍ TRÊN TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ NĂM HỌC 1998-1999

Cuộc thi thường niên lần này được hàng nghìn bạn đọc tham gia giải bài. Ngoài các địa phương từng có nhiều người tham gia như Thanh Hóa, Nam Định, Hà Nội, Nghệ An, Khánh Hòa, Hải Phòng, Hải Dương, Thừa Thiên - Huế, Đắc Lắc, Quảng Ngãi,... nay các tỉnh Vĩnh Phúc, Yên Bái, Đồng Tháp, Quảng Bình... cũng có đông các bạn tham gia. Đáng chú ý là các bạn lớp 9 tham dự nhiều hơn cả. Giá như các bạn lớp 12 góp mặt đông đảo thì cuộc thi hoàn hảo hơn. Rất tiếc là các bạn ở Đồng bằng sông Cửu Long còn ít được giải trong cuộc thi này.

Dưới đây là danh sách 92 bạn đoạt giải.

A. MÔN TOÁN

I. GIẢI CHÍNH THỨC (43 giải)

Giải xuất sắc (1 giải)

Trần Tuấn Anh, 11 Toán, PTTH Lê Quý Đôn, Nha Trang, Khánh Hòa

Giải nhất (3 giải)

1. *Phạm Đức Hiệp*, 9T, THCS Chu Văn An, Hải Phòng
2. *Nguyễn Tuấn Dương*, 9A, PTTH NK Nguyễn Trãi, Hải Dương
3. *Nguyễn Hoàng Thạch*, 9C, THCS Ngọc Lâm, Gia Lâm, Hà Nội

Giải nhì (16 giải)

1. *Trần Quốc Việt*, 9A, THCS Giao Thủy, Nam Định
2. *Chu Tiến Dũng*, 9T, TTCLC huyện Mai Sơn, Sơn La
3. *Bùi Ngọc Hân*, 9C, THCS Trần Mai Ninh, Thanh Hóa
4. *Kim Đình Thái*, 9B, THCS Yên Lạc, Vĩnh Phúc
5. *Lương Thế Nhân*, 10, PTCT, ĐHQG, Tp Hồ Chí Minh
6. *Phạm Tuấn Anh*, 10CT, ĐHQG Tp Hồ Chí Minh
7. *Đỗ Trung Kiên*, 10, PTTH ch. Vĩnh Phúc
8. *Trần Việt Anh*, 10 T, PTTH ch. Lê Quý Đôn, Quảng Trị
9. *Đinh Trung Hiếu*, 10M, PT Marie Curie, Hà Nội
10. *Đinh Thanh Thường*, 10A, PTTH Hermann Gmeiner, Vinh, Nghệ An
11. *Lê Anh Tuấn*, 10, PTTH ch Lê Quý Đôn, Quảng Trị
12. *Trần Tất Đạt*, 11B Toán, PTCT, ĐHKHTN-ĐHQG Hà Nội
13. *Nguyễn Trung Lập*, 11A1, PTTH ch. Vĩnh Phúc
14. *Phạm Hồng Quân*, 11 T, PTTH NK Nguyễn Trãi, Hải Dương
15. *Đỗ Tuyết Nhung*, 11 Anh, PTTH Hà Nội-Amsterdam, Hà Nội
16. *Phạm Hoàng Hà*, 12A, PTTH ch. Vĩnh Phúc

Giải ba (23 giải)

1. *Lê Tâm*, 8E, THCS Kỳ Anh, Hà Tĩnh
2. *Nguyễn Đình Hòa*, 9B, THCS Việt Trì, Phú Thọ
3. *Đỗ Ngọc Kiên*, 9D, PTTH NK Trần Phú, Hải Phòng
4. *Mai Văn Hà*, 9C, THCS Lê Quý Đôn, Bỉm Sơn, Thanh Hóa
5. *Trần Minh Tùng*, 9A2, THCB Cao Lãnh, Đồng Tháp
6. *Nguyễn Văn Huấn*, 9A1, THCB Cao Lãnh, Đồng Tháp
7. *Trần Trung Duy*, 9/14, THCS Thái Nguyên, Nha Trang, Khánh Hòa
8. *Phùng Văn Thắng*, 9D, THCS Ngô Đồng, Giao Thủy, Nam Định
9. *Hoàng Văn Giang*, 9A6, THCS Trần Đăng Ninh, Nam Định
10. *Nguyễn Đức Tài*, 9A, THCS Tây Đô, Vĩnh Lộc, Thanh Hóa
11. *Vũ Thành Long*, 9A, THCS Nguyễn Trãi, Nam Sách, Hải Dương
12. *Vũ Hoàng Hiệp*, 9T, PTTH NK Trần Phú, Hải Phòng
13. *Vũ Ngọc Minh*, 9T, THCS Chu Văn An, Hải Phòng
14. *Trần Đức Hiệu*, 9I, THCS Hàn Thuyên, Nam Định
15. *Nguyễn Hoa Cương*, 9/14, THCS Thái Nguyên, Nha Trang, Khánh Hòa
16. *Nguyễn Đức Cường*, 9, THCS Lê Quý Đôn, Lào Cai
17. *Trần Bá Đôn*, 10, PTCT, ĐHKH Huế, Thừa Thiên - Huế
18. *Hoàng Tùng*, 11A Toán, PTCT, ĐHKHTN-ĐHQG, Hà Nội
19. *Phạm Ngọc Lợi*, 11T, PTTH NK Hải Dương
20. *Trần Chí Hòa*, 12T1, PTTH NK Đồng Hới, Quảng Bình
21. *Đỗ Quang Dương*, 12T, PTTH Hoàng Văn Thụ, Hòa Bình
22. *Vũ Văn Phong*, 12A2, PTTH ch. Vĩnh Phúc
23. *Lương Anh Hùng*, 12A1, PTTH CB Vũng Tàu, Bà Rịa - Vũng Tàu

II. GIẢI KHUYẾN KHÍCH (30 giải)

1. *Triệu Tuấn Đạt*, 9T, THCS Chu Văn An, Hải Phòng
2. *Hà Xuân Giáp*, 9C, THCS Lê Quý Đôn, Bỉm Sơn, Thanh Hóa
3. *Đặng Duy Hưng*, 9B, Trương Hán Siêu, Tx. Ninh Bình
4. *Nguyễn Đức Nhật*, 9B, THCS Nguyễn Trường Tộ, Đống Đa, Hà Nội
5. *Phạm Văn Hùng*, 9B ch. Yên Lạc, Vĩnh Phúc
6. *Trần Quang Vinh*, 9A1, THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên, Nam Định
7. *Phạm Ngọc Giao*, 9A1, PTTH Thủ Khoa Nghĩa, Châu Đốc, An Giang
8. *Đặng Ngọc Dương*, 9A, THCS thị trấn Hiệp Hòa, Bắc Giang
9. *Trần Quang*, 9A, THCS Phan Chu Trinh, Buôn Ma Thuột, Đắc Lắc
10. *Lê Đình Tiến*, 9A, PTTH NK Nguyễn Trãi, Hải Dương
11. *Trần Vĩnh Hưng*, 9/3, THCS Nguyễn Du, Gò Vấp, Tp Hồ Chí Minh

(Xem tiếp trang 10)

GIẢI BÀI KÌ TRƯỚC

Bài T1/265. *Xét dãy số $a_1 = 1$, $a_2 = 3$ và $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 1$ với mọi số nguyên dương n. Chứng minh rằng số $A = 4a_n \cdot a_{n+2} + 1$ là số chính phương*

Lời giải. *Cách 1.* Của *Hoàng Ngọc Minh*, 8C, THCS Việt Trì, **Phú Thọ**. Ta sẽ chứng minh $a_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ (*) với mọi số nguyên dương.

Với $n = 1, 2$ dễ thấy (*) đúng.

Giả sử (*) đã đúng với mọi $n \le k + 1$ ta sẽ chứng minh nó cũng đúng với $n = k+2$. Thật vậy, ta có

$$a_{k+2} = 2a_{k+1} - a_k + 1$$

$$= 2 \cdot \frac{(k+1)(k+2)}{2} - \frac{k(k+1)}{2} + 1$$

$$= \frac{(k+2)(k+3)}{2}$$

Vậy (*) cũng đúng với $k + 2$. Nghĩa là (*) đúng với mọi n.

Từ đó $A = 4a_n a_{n+2} + 1$

$= n(n+1)(n+2)(n+3) + 1 = (n^2 + 3n + 1)^2$

Điều này chứng tỏ A là số chính phương

Cách 2. của *Hoàng Nghĩa*, 9 tạo nguồn, chuyên **Hà Giang**. Ta chứng minh

$A = (2a_{n+1} - 1)^2$ (**)

Với $n = 1$ ta có $A = 4a_1a_3 + 1 = 4.1(2.3 - 1 + 1) + 1 = 25 = (2a_2 - 1)^2$

Giả sử (**) đúng với $n = k$ tức có

$$A_k = 4a_ka_{k+2} + 1 = (2a_{k+1} - 1)^2$$

Vậy $A_{k+1} = 4a_{k+1}a_{k+3} + 1$

$$= 4a_{k+1}(2a_{k+2} - a_{k+1} + 1) + 1$$

$$= 8a_{k+1}a_{k+2} - 4a_{k+1}^2 + 4a_{k+1} + 1 =$$

$$4a_{k+2}(a_{k+2} + a_k - 1) - 4a_{k+1}^2 + 4a_{k+1} + 1$$

$$= 4a_{k+2}^2 - 4a_{k+2} + 4a_ka_{k+2} - (2a_{k+1} - 1)^2 + 2$$

$$= 4a_{k+2}^2 - 4a_{k+2} + 1 = (2a_{k+2} - 1)^2$$

Nghĩa là (**) đúng với mọi n. Từ đó có A là một số chính phương.

Nhận xét. Rất nhiều bạn có lời giải đúng. Các bạn sau đây có lời giải tốt. **Sơn La:** *Chu Tiến Dũng*, 9T, THCS Chu Văn An, Mai Sơn; **Thái Nguyên:** *Nguyễn Trung Kiên*, 9A1, THCS Chu Văn An, **Bắc Giang:** *Nguyễn Thu Hiền Trang*, 6A, THCS Đức Thắng, Hiệp Hòa; **Bắc Ninh:** *Lê Tiểu Trung*, 9A, THCS Yên Phong, Yên Phong; **Phú Thọ:** *Đinh Thái Sơn*, 9C, THCS Việt Trì; **Vĩnh Phúc:** *Tạ Hồng Quảng*, 7A, Nguyệt Đức; *Phạm Văn Hùng*, 9B, chuyên Yên Lạc; *Vũ Nhật Huy*, 9A, THCS Vĩnh Tường; **Hà Tây:** *Nguyễn Văn Nhân*, 9A, THCS Thường Tín; **Hà Nội:** *Lê Ngọc Mai*, 7G, Marie Curie, Thanh Xuân ; *Phạm Bảo Trung*, 9A, Nguyễn Trường Tộ ; *Trần Việt Hưng*, 8H, Trưng Vương, *Lê Thái Hưng*, 9A, chuyên Ngữ Cầu Giấy ; **Hải Phòng:** *Nguyễn Diệu Ly*, 8A1, THCS Hồng Bàng ; *Phạm Đức Hiệp, Hoàng Đức Giang Nguyên*, 9T, Chu Văn An; **Hải Dương:** *Nguyễn Tuấn Đạt, Nguyễn Tuấn Dương*, 9A, THCS Nguyễn Trãi, Nam Sách; **Nam Định:** *Nguyễn Đăng Hợp*, 7A2, Lê Quý Đôn, Ý Yên, *Phùng Đại Diện*, 9CT, THCS Nguyễn Du; **Thanh Hóa:** *Mai Văn Độ*, 7B, Nga Phú, Nga Sơn; *Đinh Văn Thắng*, 9C, Lê Quý Đôn, Bỉm Sơn, *Lê Anh Tùng*, 9A, Hoằng Đại, *Lê Nguyên Minh*, 9A, Nhữ Bá sĩ, Hoằng Hóa; **Nghệ An:** *Đinh Viết Sang*, 8A, THCS Đô Lương; *Võ Văn Thành*, 8B, Đặng Thai Mai, Vinh; *Phạm Văn Tuấn*, 9C, THCS Tiến Thắng, Hưng Nguyên; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Quang Linh*, 6A, Thị trấn, *Phan Thanh Nga*, 8, THCS Hương Khê, *Nguyễn Sỹ Mỹ*, 8A, Thanh Lộc, Can Lộc, *Nguyễn Dương Lê*, 9A, Nam Hồng, Hồng Lĩnh; **Quảng Trị:** *Hoàng Đức Thảo*, 9D, Gio Linh; **Huế:** *Trần Huy Lập*, 9/1, Nguyễn Tri Phương; **Đắc Lắc:** *Trần Quang*, 9T, Phan Chu Trinh, Buôn Mê Thuột, **Lâm Đồng**; *Nguyễn Thị Thảo Nguyên*, 9C, chuyên Lâm Đồng; **Quảng Nam:** *Đặng Quang Huy*, 9A, Lương Thế Vinh, Duy Xuyên; **Quảng Ngãi:** *Trần Việt Cường*, 9A, Nguyễn Trãi, Mộ Đức, *Phạm Văn Trung*, 8I, Trần Hưng Đạo; **Bình Định:** *Nguyễn Đăng Ba*, 8A, *Trần Quang Ninh*, 9A, Quốc học Quy Nhơn; **Khánh Hòa:** *Trần Ninh Bình*; 8^{15}; *Dương Nguyễn Thạch Thảo*, 9^{14}, THCS Thái Nguyê, Nha Trang; **Ninh Thuận** : *Lê Thanh Tùng*, $9A_2$, Lê Văn Tám, *Nguyễn Hưng Nguyên Quốc*, 9_2, Nguyễn Văn Trỗi, Phan Rang; **Đồng Nai:** *Trần Võ Huy*, 8/3; *Hà Đăng Khôi*, 9/4, Nguyễn Bỉnh Khiêm, Biên Hòa; **Tp Hồ Chí Minh:** *Trần Vĩnh Hưng*, 9^3, Nguyễn Du, Gò Vấp; **Bà Rịa - Vũng Tàu:** *Trương Minh Doan*, 9AB, THCS Vũng Tàu; **Đồng Tháp:** *Bùi Hiếu Nghĩa, Nguyễn Văn Huấn*, $9A_1$, *Trần Minh Tùng*, $9A_2$, THCB thị xã Cao Lãnh.

TỐ NGUYÊN

Bài T2/265. *Các số dương x, y, z, t thỏa mãn $x + y + z + t = 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :*

$$\frac{x^4 + y^4 + z^4 + t^4}{x^3 + y^3 + z^3 + t^3}.$$

Lời giải. Do vai trò bình đẳng của x, y, z, t nên có thể giả sử $x \ge y \ge z \ge t$. Từ đó ta có

$(x - y)(x^3 - y^3) \ge 0 \Rightarrow x^4 + y^4 \ge xy^3 + yx^3$ (1)

Tương tự sẽ có : $x^4 + z^4 \ge xz^3 + zx^3$ (2)

$x^4 + t^4 \ge xt^3 + tx^3$ (3);

$y^4 + z^4 \ge yz^3 + zy^3$ (4)

$y^4 + t^4 \ge yt^3 + ty^3$ (5) ;

$z^4 + t^4 \ge zt^3 + tz^3$ (6)

Cộng từng vế của 6 bất đẳng thức trên ta có

$$3(x^4 + y^4 + z^4 + t^4) \ge x(z^3+y^3+t^3) + y(x^3+z^3 + t^3) + z(x^3+y^3+t^3) + t(x^3+y^3+z^3)$$

Cộng $x^4 + y^4 + z^4 + t^4$ vào 2 vế ta có :

$$4(x^4+y^4+z^4+t^4) \ \ge\ (x+y+z+t)(x^3+y^3+z^3+t^3)$$

$$\Rightarrow P = \frac{x^4+y^4+z^4+t^4}{x^3+y^3z^3+t^3} \ge \frac{x+y+z+t}{4} = \frac{1}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = t$.

Do đó P nhỏ nhất là $\frac{1}{2}$.

Nhận xét. 1) Cách trên chính là phương pháp chứng minh bất đẳng thức Trêbưsep với $n = 4$.

2) Đa số các bạn dùng bất đẳng thức Trêbưsep ; Bunhiacôpski, Côsi để giải bài toán trên và cho kết quả đúng.

3) Một số bạn sai lầm khi dẫn tới $P \ge Q$ với $P \ge Q$ với Q chứa x, y, z, t rồi lí luận đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = t$ khi đó $P = Q = \frac{1}{2}$ để kết luận P nhỏ nhất là $\frac{1}{2}$. Các bạn chỉ được kết luận nếu trước đó Q là hằng số !

4) Dựa vào lời giải của mình, nhiều bạn đã dễ dàng tổng quát hóa bài toán.

5) Một số bạn nhận xét đúng : không cần tới mức $x, y, z, t > 0$, mà chỉ cần $x^3 + y^3 + z^3 + t^3 > 0$.

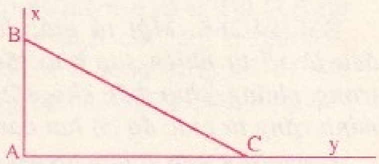
6) Các bạn có lời giải tốt và phát triển bài toán đúng là : **Ninh thuận:** *Lâm Thị Bích Thủy*, 7A, THCS Võ Thị Sáu, Phan Rang; **Bắc Ninh:** *Lê Tiến Trung*, 9A, THCS Yên Phong; **Đắc Lắc:** *Võ Thị Thái Hà*, 9A, trường cấp II–III Krông-Păk ; **Nam Định:** *Nguyễn Xuân Trường*, 9D, THCS Ngô Đồng, Giao Thủy; **Đà Nẵng:** *Nguyễn Hữu Danh*, 9/1, THCS Nguyễn Khuyến, Tp. Đà Nẵng ; **Hà Nội:** *Nguyễn Tuấn Anh*, Xóm Chùa, Cổ Loa, Đông Anh; *Bùi Đức Hiệp*, 9I, PTDL Marie Curie; **Thanh Hóa:** *Hà Xuân Giáp, Mai Văn Hà*, 9C, THCS Lê Quý Đôn, Tx Bỉm Sơn; *Lê Nguyên Minh, Lưu Đức Thi*, 9A, trường Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa; **Thái Nguyên:** *Nguyễn Đức Dân*, 9A1, THCS Độc Lập, Tp Thái Nguyên; **Bà Rịa - Vũng Tàu:** *Nguyễn Minh Tuấn*, 9A1, THCS Kim Đồng, Tx Bà Rịa; **Hải Phòng:** *Đinh Tiến Hoàng*, 9A4, THCS Trần Phú; *Phạm Đức Hiệp*, 9T, THCS Chu Văn An; **Nghệ An:** *Lê Bá Dũng*, 9B, THCS Sông Hiếu, Nghĩa Đàn; **Yên Bái:** *Nguyễn Trường Giang*, 7I, THCS Nguyễn Du; **Vĩnh Phúc:** *Tạ Hồng Quảng*, 7A, THCS Nguyệt Đức, Yên Lạc; *Phạm Thanh Quang*, $9A_1$, THCS Hai Bà Trưng, Mê Linh; *Đinh Ngọc Thắng*, 9A, THCS DL Châu Phong, Xuân Hòa, Mê Linh; **Hải Dương :** *Vũ Thanh Long*, 9A, THCS Nguyễn Trãi, Nam Sách; *Lê Anh Thủy*, 8B, THCS Thanh Quang, Nam Sách; **Hà Tây:** *Ngô Hồng Giang*, 9A, THCS Thường Tín,...

L.T.N

Bài T3/265. *Cho góc vuông xAy. Các điểm B, C khác A di động trên các tia Ax, Ay tương ứng. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :*

$$\frac{BC}{AB + AC\sqrt{3}}$$

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôp-xki ta có



$$(AB + AC.\sqrt{3})^2 \le 4(AB^2 + AC^2) = 4BC^2$$

Nên $AB + AC\sqrt{3} \le 2BC$

Suy ra $\frac{BC}{AB + AC\sqrt{3}} \ge \frac{1}{2}$

Đẳng thức xảy ra khi $\frac{AB}{1} = \frac{AC}{\sqrt{3}}$ hay $AC = \sqrt{3}\,AB$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\frac{BC}{AB + AC\sqrt{3}}$ là $\frac{1}{2}$, lúc đó ΔABC vuông tại A có $\hat{C} = 30°$

Nhận xét. Đa số các bạn giải như trên nhưng một số chưa chỉ rõ vị trí của B, C hoặc hình dạng ΔABC. Giải tốt bài này có các bạn :

Sơn La: *Chu Tiến Dũng*, 9T, THCS Chu Văn An, Mai Sơn, **Quảng Ninh:** *Đỗ Quang Khánh*, 8A1, Nguyễn Trãi, Uông Bí; **Thái Nguyên:** *Nguyễn Đức Dân*, 9A1, THCS Độc Lập; **Vĩnh Phúc:** *Vũ Nhật Huy*, 9A, THCS Vĩnh Tường, *Kim Đình Thái*, 9B, THCS Yên Lạc; **Bắc Ninh:** *Đoàn Đắc Huy*, 9A Lê Văn Thịnh, Gia Lương, *Lê Tiến Trung*, 9A, THCS Yên Phong; **Hà Tây:** *Nguyễn Văn Nhân*, 9A, THCS Thường Tín; **Hải Dương:** *Vũ Thành Long*, 9A, Nguyễn Trãi, Nam Sách, *Đặng Thanh Thủy*, 8A PTTH Nguyễn Trãi; **Hải Phòng:** *Hoàng Đức Giang Nguyên, Phạm Đức Hiệp*, 9T, Chu Văn An, *Lê Quang Huy*, 8B, Trần Phú; **Hà Nội:** *Lê Thái Hưng*, *t*A, PTCB chuyên ngữ, Q. Cầu giấy, *Lê Ngọc Mai*, 7G Marie Quyri, *Trần Đoàn Việt*, 9A1 THCS Nguyễn Trường Tộ, *Nguyễn Minh Dũng*, 9A Lê Quý Đôn, Q. Cầu Giấy, *Nguyễn Ngọc Diệp* lớp 9 Bổ túc, 29 ngõ 105 Bạch Mai; **Nam Định:** *Trần Anh Tuấn*, 9B, THCS Ý Yên, *Phùng Đại Diện*, 9CT, THCS Nguyễn Du, *Nguyễn Xuân Trường*, 9B THCS Ngô Đồng, Giao Thủy, Thanh Hóa; *Đinh Văn Thắng*, 9C, THCS Lê Quý Đôn, Bỉm Sơn; **Nghệ An:** *Nguyễn Vũ Nam Phương*, 9, trường Đặng Thai Mai, *Đậu Thị Ngọc ánh*, 8C, C2 TT Nam Đàn, Hà Tĩnh; *Nguyễn Sỹ Mỹ*, 8A, THCS Thanh Lộc, Can Lộc, *Lê Tâm*, 9G, THCS Kỳ Anh; **Thừa Thiên - Huế:** *Trần Huy Lập*, 9/1 Nguyễn Tri Phương, Đà Nẵng : *Nguyễn Hoàng Long*, 9/2 Nguyễn Khuyến; **Khánh Hòa:** *Hồ Vĩ Đại*, 9^{14} THCS Thái Nguyên, Nha Trang; **Ninh Thuận:** *Lâm Thị Bích Thủy*, 7A THCS Võ Thị Sáu, Phan Rang; **Tp Hồ Chí Minh:** *Lý Quốc Vinh*, 9B Hồng Bàng; **Bà Rịa - Vũng Tàu:** *Trương Minh Doan*, 49/9 A2 Nam Kỳ Khởi Nghĩa, $9A^b$ THCS Vũng Tàu.

BÍNH NAM HÀ

Bài T4/265. *Một tứ giác lồi có bốn cạnh đều là số tự nhiên sao cho tổng ba số bất kì trong chúng chia hết cho số còn lại, chứng minh rằng tứ giác đó có hai cạnh bằng nhau.*

Lời giải. ***Cách 1.*** Gọi độ dài các cạnh của tứ giác lần lượt là a, b, c, d trong đó $a, b, c, d \in N^*$. Giả sử không có 2 cạnh nào của tứ giác bằng nhau. Không mất tính tổng quát, giả thiết rằng

$$a > b > c > d.$$

Dễ thấy $a < b+c+d < 3a$

$\Rightarrow 2a < a + b + c + d < 4a$

Từ $a+b+c+d$ chia hết cho các số a, b, c, d suy ra $\quad a+b+c+d = 3a \quad (1).$

Đặt

$$a+b+c+d = mb,\ m \in N, \quad (2)$$
$$a+b+c+d = nc,\ n \in N \quad (3)$$

Do $a > b > c$ nên $n > m > 3$, nghĩa là $m \geq 4$, $n \geq 5$. Cộng (1), (2), (3) ta thu được

$3(a+b+c+d) = 3a + mb + nc \geq 3a + 4b + 5c.$

Hay $(b - d) + 2(c - d) \leq 0.$

Mâu thuẫn với giả thiết $a>b>c>d$.

Cách 2. Giả sử các cạnh của tứ giác thỏa mãn điều kiện $a<b<c<d$. Theo giả thiết, ta có $a+b+c+d = ma = nb = pc = qd$, $m, n, p, q \in N$. Từ $a+b+c+d = qd > 2d$ suy ra $m>n>p>q>2$. Do đó $q \geq 3$, $p \geq 4$, $n \geq 5$, $m \geq 6$. Như vậy, ta có

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{5}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3} \geq \frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}+\frac{1}{q} =$$
$$= \frac{a}{a+b+c+d}+\frac{b}{a+b+c+d}+\frac{c}{a+b+c+d}+\frac{d}{a+b+c+d}$$
$= 1.$

Hay $\frac{19}{20} \geq 1.$

Điều vô lí này chứng tỏ giả sử trên là sai.

Chú ý. Tồn tại tứ giác thỏa mãn điều kiện đề bài, chẳng hạn $a = b = 2c = 2d$ hoặc $a = c = 2b = 2d$, trong đó a, b, c, d là các cạnh liên tiếp.

Nhận xét. Các bạn sau đây có lời giải tốt.

Đắc Lắc: *Trần Quang*, 9TA, THCS Phan Chu Trinh, Buôn Ma Thuột. **Sơn La:** *Chu Tiến Dũng*, 9T, THCS Chu Văn An, Mai Sơn; **Yên Bái:** *Nguyễn Trường Giang*, 7I, THCS Nguyễn Du, *Trần Thu Huế*, 9K, THCS Lê Hồng Phong; **Đồng Tháp:** *Trần Minh Tùng*, 9A2, THCS Cao Lãnh; **Đà Nẵng:** *Lê Anh Tuấn*, 91, THCS Nguyễn Khuyến; **Thừa Thiên - Huế:** *Trần Huy Lập*, 9/1 Nguyễn Tri Phương, Huế; **Vĩnh Phúc:** *Hoàng Xuân Quang, Cao Việt Hùng, Nguyễn Văn Phúc, Nguyễn Thu Trang, Hoàng Thị Liên, Trần Thanh Hương* và *Vũ Nhật Hy*, 9A THCS Vĩnh tường; *Nguyễn Tuấn Học* và *Kim Đình Thái*, 9B, THCS Yên Lạc, *Vũ Thị Thu Hiền*, 9, THCS Việt Trì; *Lê Minh Thắng* và *Hoàng Minh Châu*, 8A, THCS Vĩnh Tường, *Nguyễn Hồng Điệp*, 7A, THCS Vĩnh Tường, *Trần Việt Hà*, 9C, THCS Việt Trì; **Phú Thọ:** *Nguyễn Thái Bình, Phạm Minh Hoàng* và *Triệu Thu Lan*, 9AI, THCS Phong Châu; *Lê Thanh Lâm*, 9AI, THCS Thanh Ba; *Đào Thanh Dung*, 9 văn, THCS Việt Trì; *Hoàng Ngọc Minh*, 8C, THCS Việt Trì, *Nguyễn Đình Hòa*, 9B, THCS Việt Trì; **Khánh Hòa:** *Trần Minh Bình*, 815 THCS Thái Nguyên, Nha Trang; **Hải Phòng:** *Bùi Hải Nam*, 9B và *Trần Vũ Giang*, 9T, NK Trần Phú, *Phạm Đức Hiệp* và *Hoàng Đức Giang Nguyên*, 9T, THCS Chu Văn An; *Vũ Hồng Anh*, 7T, NK Trần Phú; **Hải Dương:** *Chu Ngọc Hưng* và *Nguyễn Anh Nguyên*, 9 THCS Nguyễn Khuyến, Kim thành; *Nguyễn Thành Nam, Lê Anh Ngọc, Lê Hải Yến* và *Ngô Xuân Bách*, 9A và *Đỗ Quang Trung*, 9B, PTTH chuyên Nguyễn Trãi; *Hà Văn Nghĩa*, 9A, THCS Nguyễn Huệ, Cẩm Giàng; *Vũ Định Thế*, 8A, THCS Phả Lại, Chí Linh; *Nguyễn Hồng Quang, Nguyễn Hồng Kiên*, 9T, THCS Tráng Liệt, Bình Dương; **Hưng Yên:** *Doãn Kim Huế*, 6A, PTCS Phạm Huy Thông, Ân Thi; **Nam Định:** *Nguyễn Xuân Trường, Đinh Thanh Hiện*, và *Cao Ngọc Khánh*, 9D THCS Ngô Đồng, Giao Thủy, *Phùng Đại Diện*, 9CT, THCS Nguyễn Du, *Nguyễn Đăng Hợp*, 7A2 THCS Lê Quý Đôn, *Trần Anh Tuấn*, 9B, THCS Yên Lợi; **Hà Nội:** *Bùi Đức Hiệp*, 9I, Mari, *Phạm Q Huy*, 7A và *Phạm Văn Dũng*, 9C, Ngọc Lâm, Gia Lâm, *Nguyễn Minh Đức* và *Nguyễn Mạnh Tuấn*, 9C, Amsterdam, *Phạm Bảo Trung, Đào Tuấn Sơn, Nguyễn Tiến Phúc* và *Trần Đoàn Việt*, 9A, THCS Nguyễn Trường Tộ; *Nguyễn Hoài anh*, 9A THCS Lê Quý Đôn; **Tp Hồ Chí Minh:** *Trần Vĩnh Hưng*, 93, THCS Nguyễn Du, Gò Vấp; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Văn Thích*, 9A, THCS Yên Phong; **Hà Tây:** *Hà Minh Cường*, 9A, THCS Sơn Trầm, Hà Tây, *Đào Văn Nam* và *Nguyễn Văn Trí*, 9B, THCS Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hòa.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T5/265. *Biết phương trình $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ $(a \neq 0)$ có 3 nghiệm số dương là x_1, x_2, x_3. Chứng minh rằng*

$$x_1^7 + x_2^7 + x_3^7 \geq -\frac{b^3c^2}{81a^5}$$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

Lời giải. Theo định lí Viet ta có

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} \text{ và } x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \frac{c}{a}$$

Do đó $-\dfrac{b^3c^2}{81a^5} =$

$$= \frac{1}{81}(x_1 + x_2 + x_3)^3(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)^2$$

Ta sẽ chứng minh

$$x_1^7 + x_2^7 + x_3^7 \geq \frac{1}{3^6}(x_1 + x_2 + x_3)^7 \qquad (1)$$

và $\dfrac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3)^2 \geq x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$ (2)

Khi đó từ (1) và (2) ta được :

$$x_1^7 + x_2^7 + x_3^7 \geq$$
$$\geq \frac{1}{81}(x_1 + x_2 + x_3)^3(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)^2.$$

Bất đẳng thức (2) đúng vì

$$(x_1 + x_2 + x_3)^2 - 3(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) =$$
$$= \frac{1}{2}\left((x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2\right) \; (3)$$

Bất đẳng thức (1) đúng vì áp dụng bất đẳng thức Bunhiacốpxki liên tiếp ba lần ta có

$$(x_1 + x_2 + x_3)(x_1^7 + x_2^7 + x_3^7) \geq \left(x_1^4 + x_2^4 + x_3^4\right)^2$$
$$\geq \frac{1}{3^2}\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)^4 \geq \frac{1}{3^6}(x_1 + x_2 + x_3)^8.$$

Từ (3) ta thấy dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2 = x_3$, lúc đó $ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_1)^3$, hay là

$$x_1 = x_2 = x_3 = -\frac{b}{3a} = \sqrt{\frac{c}{3a}} = \sqrt[3]{-\frac{d}{a}} > 0.$$

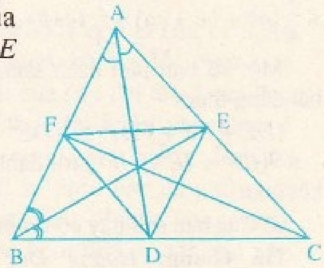
Nhận xét. Đây là bài toán cơ bản, khá dễ đối với học sinh THPT. Tòa soạn nhận được lời giải của 363 bạn. Các bạn sau đây có lời giải gọn gàng : **Hà Nội:** *Phạm Văn Dũng*, 9C, THCS Ngọc Lâm, Gia Lâm; **Hải Dương:** *Đồng Quang Điệp*, *Phạm Thành Trung*, 8A, THCS Nguyễn Trãi, *Du Văn Tuấn*, 9A1, THCS Nguyễn Huệ; **Nam Định:** *Trần Anh Tuấn*, 9B, THCS Yên Lợi; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Quang Linh*, 6A, THCS thị trấn Hương Khê; *Nguyễn Phương Lê*, 9A THCS Nam Hồng; **Đồng Tháp:** *Trần Hoàng Nam*, 8A1, THCB Cao Lãnh; *Trần Minh Tùng*, 9A2, THCB Cao Lãnh; **Tiền Giang:** *Phạm Minh Huy*, 9A, THCS Tân Hương...

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T6/265. *Gọi AD, BE, CF là các đường phân giác trong của tam giác ABC. Chứng minh rằng : $p(DEF) \leq \frac{1}{2}p(ABC)$, trong đó kí hiệu $p(XYZ)$ chỉ chu vi của tam giác XYZ. Đẳng thức xảy ra khi nào ?*

Lời giải.

Đặt $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$.



Từ tính chất của đường phân giác BE có $\dfrac{CE}{AE} = \dfrac{a}{c}$

$$\Rightarrow \frac{AC}{AE} = \frac{a+c}{c}$$

$$\Rightarrow AE = \frac{bc}{a+c}.$$

Tương tự $AF = \dfrac{bc}{a+b}$.

Theo định lí hàm số côsin trong ΔAEF và ΔABC có

$$EF^2 = AE^2 + AF^2 - 2AE.AF.\cos A$$

$$= \left(\frac{bc}{a+c}\right)^2 + \left(\frac{bc}{a+b}\right)^2 - 2\frac{b^2c^2}{(a+c)(a+b)} \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2ab}$$

$$= \frac{a^2bc}{(a+c)(a+b)} - \frac{abc(a+b+c)(b-c)^2}{(a+c)^2(a+b)^2}$$

$$\Rightarrow EF^2 \leq \frac{a^2bc}{(a+c)(a+b)} \; (*)$$

Từ đó $EF^2 \leq \dfrac{a^2bc}{4\sqrt{ac}\,.\sqrt{ab}} = \dfrac{1}{4}.\sqrt{ac}\,.\sqrt{ab}$

$$\leq \frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{ac} + \sqrt{ab}}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{16}\left(\frac{a+c}{2} + \frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{16}\left(\frac{2a+b+c}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow EF \leq \frac{2a+b+c}{8}.$$

Tương tự, có $FD \leq \dfrac{2b+c+a}{8}$,

$$DE \leq \frac{2c+a+b}{8}.$$

Cộng theo từng vế ba bất đẳng thức trên được $DE + EF + FD \le \dfrac{a+b+c}{2}$ hay $p(DEF) \le \dfrac{1}{2}p(ABC)$. Dễ thấy đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$, nghĩa là ΔABC đều.

Nhận xét. 1) Đa số các bạn gửi bài đến đều giải đúng và sử dụng nhiều cách biến đổi khác nhau. Chẳng hạn sử dụng bất đẳng thức $(a+b)(b+c)(c+a) \ge 8abc$ vào (*) được $EF^2 \le \dfrac{a^2bc}{(a+c)(a+b)} \le \dfrac{a(b+c)}{8}$. Từ đó có

$$(DE + EF + FD)^2 \le 3(DE^2 + EF^2 + FD^2)$$

$$\le \frac{3}{4}(ab + bc + ca) \le \frac{1}{4}(a+b+c)^2.$$

Một số bạn làm cách khác dài hơn : chứng minh bất đẳng thức

$$(DE + EF + FD)^2 \le 3(DE^2 + EF^2 + FD^2)$$

$\le 9(ID^2 + IE^2 + IF^2)$ rồi đánh giá ID, IE, IF để rút ra kết luận.

2) Các bạn sau đây có lời giải đúng và gọn :

Hà Giang: *Hoàng Đức Nguyên*, 11T, PTTH chuyên; **Phú Thọ:** *Hoàng Ngọc Minh*, 8C, THCS Việt Trì, *Phạm Thị Thu Hiền*, 12A1, PTTH chuyên Việt Trì; **Vĩnh Phúc:** *Vũ Mạnh Cường*, 12A4, *Phạm Trọng Bình*, 12AT, PTTH chuyên; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Hoài Nam, Đào Phương Thành*, 12T, PTTH NK Hàn Thuyên; **Bắc Giang:** *Dương Mạnh Hồng, Ngô Quang Vinh*, 11A, PTTH NK Ngô Sĩ Liên **Hà Nội:** *Phạm Gia Vĩnh Anh, Vũ Thành Long*, 10A1, *Phạm An Khang*, 10A2, ĐHSP-ĐHQG; **Hưng Yên:** *Trần Ngọc Đức*, 12T, PTTH NK; **Hải Dương:** *Vũ Bá Toàn*, 10T, *Phạm Minh Tuấn*, 12T, PTTH Nguyễn Trãi **Hải Phòng:** *Vũ Ngọc Minh*, 9T, THCS Chu Văn An, *Trịnh Quang Hiếu*, 11a, PTTH Ngô Quyền, *Đặng Chung Kiên*, 12A4, PTTH Thái Phiên, *Trần Hạnh*, 12 tin, PTTH NK Trần Phú; **Nam Định:** *Đỗ Thành Trung*, 12A, PTTH Trực Ninh; **Thanh Hóa:** *Lưu Văn Hiệu*, 12A, PTTH Ba Đình, *Trần Mạnh Hùng*, 10T, PTTH Lam Sơn; **Nghệ An:** *Đặng Văn Quyết*, 11A, PTTH Nghi Lộc 2, *Nguyễn Công Thành*, 10A1, PTTH Phan Bội Châu, Vinh, *Lê Tất Thắng*, 10T, ĐHSP Vinh; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Thừa Thắng*, 11T, PTTH NK; **Quảng Trị:** *Bạch Công Đức*, 10T, PTTH Lê Quý Đôn, *Trần Văn Cường*, 12A4, PTTH Đông Hà; **Thừa Thiên - Huế:** *Nguyễn Trí Thông*, 11Above, PTTH Quốc học, *Nguyễn Dư Thái*, 11T, ĐHKH Huế; **Đà Nẵng:** *Nguyễn Thị Hoài Vũ*, 10/7 PTTH Hoàng Hoa Thám; **Quảng Nam :** *Đặng Thị Thu Trang*, 10A2, PTTH Nguyễn Duy Hiệu, Điện Bàn, *Phan Văn Bửu*, 12A1, PTTH Sào Nam, Duy Xuyên; **Bình Định :** *Nguyễn Quốc Hưng*, 11A5, Quốc học Quy Nhơn; **Khánh Hòa:** *Trần Tuấn Anh*, 11T, *Nguyễn Thành Hiển*, 10T, PTTH Lê Quý Đôn, Nha Trang; **Đắc Lắc:** *Đặng Ngọc Châu*, 11T1, PTTH Nguyễn Du, Buôn Ma Thuột; **Lâm Đồng:** *Phạm Đình Thắng*, 11T, PTTH chuyên Đà Lạt; **Bà Rịa - Vũng Tàu:** *Lê Quang Lộc*, 11A1, PTTH Châu Thành, Bà Rịa ; **Tp Hồ Chí Minh:** *Trần Vĩnh Hưng*, 9/3, THCS Nguyễn Du, Gò Vấp; *Lương Thế Nhân, Nguyễn Ah Dũng, Lâm Hoàng Nguyên*, 10T, PTNK-ĐHQG; **Tiền Giang:** *Hồ Thanh Sơn*, 10T, PTTH chuyên.

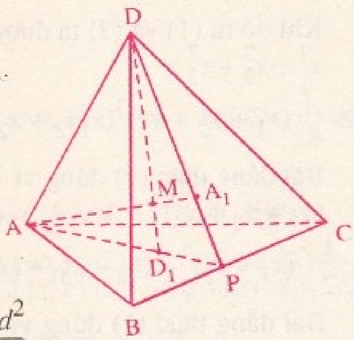
PHI PHI

Bài T7/265. *Cho hình tứ diện ABCD. Các đường thẳng AM, BM, CM, DM đi qua điểm M nằm trong tứ diện, cắt các mặt BCD, CDA, DAB, ABC tại A_1, B_1, C_1, D_1 tương ứng. Hãy xác định vị trí điểm M sao cho biểu thức*

$$T = \sqrt{\frac{AM}{MA_1}} + \sqrt{\frac{BM}{MB_1}} + \sqrt{\frac{CM}{MC_1}} + \sqrt{\frac{DM}{MD_1}}$$

đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải. Đặt $v_1(MBCD) = a^2$,
$v_2(MCDA) = b^2$,
$v_3(MDAB) = c^2$,
$v_4(MABC) = d^2$.



Thế thì ta được :

$$\frac{AA_1}{MA_1} = \frac{v(ABCD)}{v(MBCD)} = \frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{a^2}$$

$$\Rightarrow \frac{AM}{MA_1} = \frac{b^2+c^2+d^2}{a^2}$$

Tương tự, ta được :

$$\frac{BM}{MB_1} = \frac{c^2+d^2+a^2}{b^2}, \frac{CM}{MC_1} = \frac{d^2+a^2+b^2}{c^2},$$

$$\frac{DM}{MD_1} = \frac{a^2+b^2+c^2}{d^2}.$$

Mặt khác, vì $3(b^2 + c^2 + d^2) \ge (b + c + d)^2$, nên ta được : $\sqrt{\dfrac{AM}{MA_1}} = \dfrac{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}{a}$

$\ge \dfrac{1}{\sqrt{3}}\dfrac{b+c+d}{a}$ và ba bất đẳng thức tương tự.

Từ đó ta được :

$$T \ge \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\frac{b+c+d}{a} + \frac{c+d+a}{b} + \frac{d+a+b}{c} + \frac{a+b+c}{d}\right]$$

$$\ge \frac{1}{\sqrt{3}} 12 = 4\sqrt{3} \text{ (vì } \frac{p}{q} + \frac{q}{p} \ge 2).$$

Vậy : $\min T = 4\sqrt{3} \Leftrightarrow a^2 = b^2 = c^2 = d^2$

$\Leftrightarrow v_1 = v_2 = v_3 = v_4 \left(= \frac{1}{4} V(ABCD)\right)$; (1)

$\Leftrightarrow \frac{\overline{AM}}{\overline{AA_1}} = \frac{\overline{BM}}{\overline{BB_1}} = \frac{\overline{CM}}{\overline{CC_1}} = \frac{\overline{DM}}{\overline{DD_1}} = \frac{3}{4}$ (2)

$\Leftrightarrow M \equiv G$ (trọng tâm tứ diện $ABCD$) (3)

Thật vậy, có thể có nhiều cách chứng minh khẳng định (3) từ (1) hoặc (2).

- Chẳng hạn G là trọng tâm tứ diện $ABCD$ và A' là trọng tâm tam giác BCD, theo tính chất của trọng tâm tứ diện ta được :

$$\frac{\overline{AG}}{\overline{AA'}} = \frac{3}{4} = \frac{\overline{AM}}{\overline{AA_1}}$$

$\Rightarrow GM // A'A_1 \Rightarrow GM // (BCD)$

Chứng minh tương tự, $GM // (CDA)$, $GM // (DAB)$, $GM // (ABC)$

Suy ra : $\overrightarrow{GM}$ song song với tất cả các cạnh của tứ diện, nghĩa là có phương không xác định. Vậy $\overrightarrow{GM} = \overrightarrow{0}$, tức $M \equiv G$.

- Hoặc với mọi điểm $M \in$ miền tứ diện $[ABCD]$ ta có đẳng thức véctơ:

$$v_1\overrightarrow{MA} + v_2\overrightarrow{MB} + v_3\overrightarrow{MC} + v_4\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{0}$$

Từ (1) : $v_1 = v_2 = v_3 = v_4$, ta được :

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{0} \quad (4)$$

Đẳng thức (4) cho ta $M \equiv G$

Nhận xét. 1) Có gần 250 bạn tham gia giải bài toán này.

Hầu hết giải đúng, tuy nhiên rất đáng tiếc cũng còn có bạn giải sai (tính giá trị cực tiểu của p sai) và đa số lời giải còn rườm rà. Đa số các bạn không chứng minh mà chỉ đưa ra nhận xét (3), $M \equiv G$. Như vậy là thiếu chặt chẽ.

2) Một số bạn có nhận xét đúng, bài toán này là bài toán tương tự trong hình học không gian của bài toán T3/199 và gần với bài toán T9/205. Một số bạn đưa ra nhận xét, tổng quát hóa bài toán trên bằng cách thay căn bậc 2 bởi căn bậc n, ta cũng được kết quả tương tự.

3) Các bạn sau đây có lời giải tốt :

Hà Nội: *Đào Quang Minh*, 11A Toán, ĐHKHTN-ĐHQGHN, *Phạm Bảo Trung*, 9A, Nguyễn Trường Tộ, *Phạm Văn Dũng*, 9C, THCS Gia Lâm; **Bắc Ninh:** *Ngô Quốc Việt*, 12C, THCS Yên Phong; **Hải Dương:** *Đinh Phúc Hùng*, 10A, THCS Hồng Quang, *Phạm Quốc Hoàng*, 12T, Nguyễn Trãi; **Hải Phòng:** *Đặng Chung Kiên*, 12A4, THCS Thái Phiên ; **Phú Thọ:** *Phạm Thị Thu Hiền*, 12A1; **Yên Bái:** *Triệu Thanh Hải*, 11A2, THCS chuyên ; **Hà Giang:** *Nguyễn Nguyên Bình*, 11T, THCS chuyên; **Nghệ An:** *Lê Bá Dũng*, 9B, THCS Sông Hiếu, Nghĩa Đàn, *Phan Minh Huệ*, đội 12, Diễn Lộc, Diễn Châu, *Phạm Tuấn Anh*, 12K, THCS Nam Đàn 1; **Quảng Trị:** *Lê Anh Tuấn*, 11T, *Trần Việt Anh*, 11T, THCS chuyên Lê Quý Đôn; **Quảng Ngãi:** *Nguyễn Văn Tiến*, 12A2, THCS Đức Phổ; **Đà Nẵng:** *Đặng Ngọc Hiền*, 12A2, Lê Quý Đôn; **Phú Yên:** *Bùi Khánh Thoại*, 10T1, Nguyễn Trần Uy Viễn, 11T2, trường chuyên Lương Văn Chánh; **Khánh Hòa:** *Dương Nguyễn Thạch Thảo*, THCS Thái Nguyên, Nha Trang ; - Buôn Ma Thuột : *Tăng Thị Hà Yên*, 11 Toán, Nguyễn Du

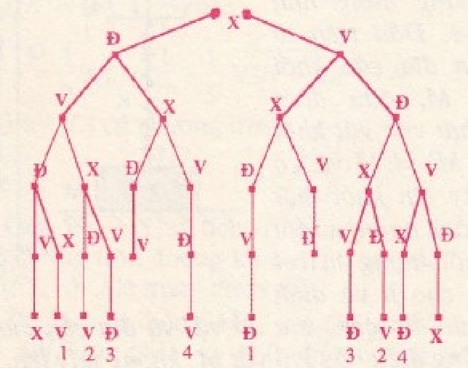
NGUYỄN ĐĂNG PHẤT

Bài T8/265. *Cho những viên ngọc màu xanh, màu đỏ, màu vàng với số lượng không hạn chế.*

a) Nếu đem xâu những viên ngọc ấy theo một dây thành chuỗi sao cho mỗi chuỗi đều có 2 viên xanh, 2 viên đỏ, 2 viên vàng mà không có 2 viên cùng màu ở cạnh nhau thì được nhiều nhất là bao nhiêu chuỗi ngọc khác loại ?

b) Nếu đem nối hai đầu của mỗi chuỗi ngọc ấy thành một vòng cùng với các điều kiện như trên thì được nhiều nhất là bao nhiêu vòng ngọc khác loại?

Lời giải : a) (Của bạn Nguyễn Trung Lập, 12A1 Chuyên Vĩnh Phúc)



Để đơn giản ta kí hiệu màu đỏ, vàng và xanh là "Đ", "V" và "X". Ta tính số chuỗi có một đầu màu xanh. Ta xây dựng sơ đồ sau: xuất phát là "X" rồi sơ đồ phân nhánh, hai màu có khả năng tiếp theo trên chuỗi ngọc của ta chỉ có thể là "Đ" hoặc "V"... cứ đi tiếp theo sơ đồ như vậy sao cho số đỉnh "X", "Đ" và "V" đúng bằng 2, ta có chuỗi ngọc của ta là một đường đi xuất phát từ đỉnh ban đầu tới một đỉnh kết thúc của sơ đồ. Do có 10 đỉnh kết thúc, cho nên chỉ có 10 chuỗi ngọc thỏa mãn điều kiện đầu bài với đỉnh xuất phát màu "X".

Suy ra có 30 chuỗi có đỉnh xuất phát "X", "Đ" và "V", nhưng do mỗi con đường có 2 đỉnh, tức là mỗi chuỗi bị tính lặp đúng hai lần (chẳng hạn, chuỗi đầu bên trái và chuỗi đầu bên phải ở sơ đồ) nên số chuỗi là 30:2=15.

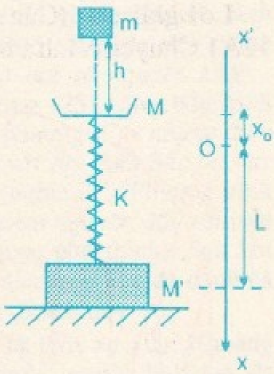
b) Không mất tổng quát ta có thể giả sử rằng chuỗi ngọc được tính từ viên ngọc màu xanh. Như vậy mỗi vòng ngọc là do một chuỗi ngọc nối 1 đầu xanh với 1 đầu không xanh tạo thành. Do có 8 chuỗi như vậy (xem sơ đồ) và các chuỗi được đánh số giống nhau cho vòng ngọc giống nhau, cho nên ta có 4 vòng ngọc đôi một khác nhau.

Nhận xét: Phần lớn các bạn giải sai. Các bạn sau đây có lời giải đúng:

Vinh: *Nguyễn Thanh Sơn,* Khối PTCT, ĐHSP *Vinh, Trương Minh Trung,* 11A PTCT ĐHSP Vinh; **TP HCM:** *Lâm Hoàng Nguyên,* 10T, PTNK ĐHQG, TP HCM; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Trung Lập,* 12A1 chuyên Vĩnh Phúc; **Yên Bái:** 11A2 PTTH chuyên; **Thái Nguyên:** *Nguyễn Văn Thắng,* PTTH NK Thái Nguyên.

VŨ ĐÌNH HÒA

Bài L1/265. *Một lò xo độ cứng K khối lượng không đáng kể đặt thẳng đứng như hình vẽ. Đầu trên lò xo gắn đĩa cân khối lượng M, đầu dưới gắn chặt vào vật khối lượng M' = M và có thể nảy lên khỏi mặt bàn nằm ngang. Một vật khối lượng m rơi từ độ cao h và dính chặt vào đĩa cân, sau đó vật và đĩa cân cùng dao động điều hòa khi vật M' không nẩy lên.*



1) Tính quãng đường dịch chuyển của khối tâm của hệ khi vật và đĩa dao động từ điểm thấp nhất đến điểm cao nhất.

2) Tìm điều kiện về h để vật M' không nẩy lên.

Hướng dẫn giải. 1) Áp dụng định luật bảo toàn cơ năng (cho vật m) suy ra vận tốc vật m trước khi chạm vào đĩa cân : $V = \sqrt{2gh}$ (1).

Áp dụng định luật bảo toàn động lượng (cho hệ vật $m + M$) : $mV = (m+M)V_o$ (2).

Suy ra vận tốc của vật m và đĩa cân ngay sau va chạm : $V_o = \frac{m}{m+M}\sqrt{2gh}$ (3).

Sau va chạm đĩa cân và vật m dao động điều hòa quanh vị trí cân bằng O với biên độ A. Chọn trục tọa độ $x'x$ hướng thẳng đứng xuống dưới, có gốc tại vị trí cân bằng O. O cách vị trí cân bằng ban đầu của đĩa cân (khi chưa có vật m) một khoảng : $x_o = \frac{mg}{K}$ (4).

Cơ năng của hệ vật $m + M$ (khi M' không nảy lên) gồm : động năng của vật m và đĩa cân $\frac{(m+M)V_o^2}{2}$, và thế năng của lò xo $\frac{Kx_o^2}{2}$.

Áp dụng định luật bảo toàn cơ năng cho hệ vật dao động điều hòa :

$$\frac{(m+M)V_o^2}{2} + \frac{Kx_o^2}{2} = \frac{KA^2}{2}.$$

Từ đó tìm được :

$$A = \frac{mg}{K}\sqrt{1 + \frac{2Kh}{(M+m)g}} \quad (5)$$

Kí hiệu L là tọa độ của vật M' thì tọa độ khối tâm của hệ (gồm $m + M + M'$), khi đĩa cân ở điểm biên trên và ở điểm biên dưới là :

$$\overline{OG_1} = \frac{ML - (m+M)A}{2M+m}, \text{ và}$$

$$\overline{OG_2} = \frac{ML + (m+M)A}{2M+m},$$

Từ đó tìm được quãng đường dịch chuyển của khối tâm :

$$\overline{G_1G_2} = \overline{OG_2} - \overline{OG_1} = \frac{2(M+m)A}{2M+m} \quad (6)$$

2) Khi lò xo co lại thì hiển nhiên M' không nẩy lên. Ta chỉ xét trường hợp lò xo dãn ra, lực đàn hồi tác dụng vào M', và M' vẫn không bị nảy lên khi :

$$\left| F_{đh} \right|_{max} \le M'g \Rightarrow K(A - \Delta l_o) \le Mg$$

$$\Rightarrow A \le \frac{Mg}{K} + \Delta l_o, \text{ với } \Delta l_o = \frac{(M+m)g}{K}$$

Suy ra $h \le \frac{2Mg}{K}\left(1 + \frac{M}{m}\right)^2$.

Nhận xét. Các bạn có lời giải đúng và gọn:

Hà Tĩnh: *Bùi Việt Hoàng Sơn,* 12 Lí, PTTH NK Hà Tĩnh;**Quảng Ngãi:** *Phùng Nhật Anh,* 12A3, PTTH CB Sơn Tịnh I; **Trà Vinh:** *Hồng Ngọc Tân,* 12A2, PTTH chuyên Trà Vinh; **Quảng Bình:** *Hoàng Đại Nghĩa,* 11 Lí, PTTH NK Quảng Bình; **Đà Nẵng:** *Hồ Ngọc Phước,* 11A2, PTTH Lê Quý Đôn; **Ninh Thuận:** *Lê Đình Nghi,* 12A2, PTTH Chu Văn An, Phan Rang; **Hà Nội:** *Bùi Hảo Hà,* Bo11A, ĐHKHTN-ĐHQG Hà

Nội; **Bắc Ninh:** *Đỗ Tuấn Anh*, 11 PTTH NK Hàn Thuyên, *Nguyễn Huy Việt*, 12A1, PTTH Số 2 Gia Lương ; **Nghệ An:** *Lưu Anh Tú*, 10A3, PTTH Phan Bội Châu, *Trần Tiến Dũng*, 11A3, PTTH Phan Bội Châu; **Vĩnh Phúc:** *Đỗ Ngọc Ánh*, 12A1, *Đỗ Thanh Hà*, *Lê Quốc Hưng*, *Nguyễn Công Hưng*, và *Phạm Đạt*, 12A3, PTTH chuyên Vĩnh Phúc ; **Tuyên Quang:** *Nguyễn Trung Kiên*, 10A1, PTTH chuyên

MAI ANH

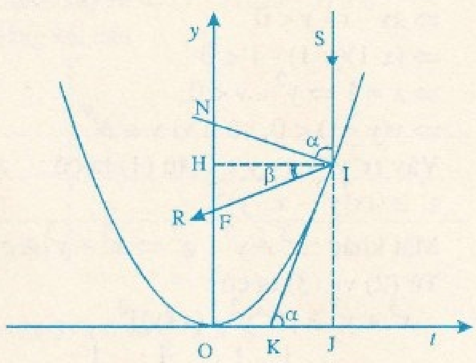
Bài L2/265. *Một gương lõm có dạng một mặt parabôlôit tròn xoay trong hệ trục tọa độ. Oxyz mà tiết diện trong mặt phẳng Oxy là một đường parabol có phương trình : $y = ax^2$.*

1) Hãy chứng minh rằng một chùm tia sáng song song với trục đối xứng Oy của parabôlôit chiếu tới gương sẽ cho chùm tia phản xạ tương ứng hội tụ tại một điểm F.

2) Xác định độ dài của OF.

Hướng dẫn giải. Trước hết nhận xét rằng tiết diện của gương trong mặt phẳng bất kì chứa trục Oy đều là một đường parabol, hơn nữa pháp tuyến với gương tại điểm bất kì của gương đều cắt trục Oy. Xét một tia tới bất kì SI của chùm tia song song với trục Oy, trong mặt phẳng Oyt chứa tia này và Oy, tiết diện của gương là một đường parabol có phương trình $y = at^2$ như trên hình vẽ. Vì pháp tuyến IN với gương cắt trục Oy, nên mặt phẳng Oyt là mặt phẳng tới, và, do đó, tia phản xạ IR nằm trong mặt phẳng Oyt, cắt trục Oy tại F. Từ hình vẽ ta có : $FH = IH\text{tg}\beta = IH\text{tg}(2\alpha - 90^o) = -\dfrac{IH}{tg2\alpha}$ (α là góc tới). Kí hiệu y, t là tọa độ của điểm I trong hệ trục tọa độ Oyt, ta có :

$$OF = ON - HF \Rightarrow OF = y + \frac{t}{tg2\alpha}.$$



Mặt khác tiếp tuyến IK của parabol tại I hợp với Ot góc α (góc có cạnh tương ứng vuông góc), do đó $\text{tg}\alpha = \dfrac{dy}{dt} = 2at$. Từ đó ta có :

$$OF = y + \frac{t}{tg2\alpha} = y + \frac{t(1 - tg^2\alpha)}{2tg\alpha} = at^2 + \frac{t(1 - 4a^2t^2)}{2.2at} = \frac{1}{4a}.$$

Điều đó chứng tỏ OF không phụ thuộc t, nghĩa là một tia tới bất kì SI đều cho tia phản xạ IR đi qua một điểm F cố định trên trục Oy, với $OF = \dfrac{1}{4a}$. Nói cách khác chùm tia sáng tới gương song song với trục Oy sẽ cho chùm tia phản xạ tương ứng hội tụ tại điểm F, với $OF = \dfrac{1}{4a}$.

Nhận xét. Bài giải của đa số các bạn chỉ xét cho trường hợp tiết diện gương trong mặt phẳng *Oxy*. Các bạn sau đây có lập luận đầy đủ hơn :

Ninh Thuận: *Lê Đình Nghi*, 12A2, PTTH Chu Văn An, Phan Rang; **Vĩnh Phúc:** *Lê Quốc Hưng* và *Hoàng Minh Tuấn*, 12A3, *Đỗ Ngọc Ánh*, 12A1, *Nguyễn Kim Thắng*, 11A3, PTTH chuyên Vĩnh Phúc.

MAI ANH

CUỘC THI KỈ NIỆM 35 NĂM TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

Bài T7/THCS. *Tìm tất cả các nghiệm nguyên dương của phương trình*

$$\frac{x}{y^2z^2} + \frac{y}{z^2x^2} + \frac{z}{x^2y^2} = t \qquad (*)$$

Giải. Do vai trò bình đẳng của x, y, z nên có thể giả sử $x \le y \le z$. Ta có :

$$(*) \Leftrightarrow x^3 + y^3 + z^3 = tx^2y^2z^2.$$

Từ đó dẫn đến : $z = tx^2y^2 - \dfrac{x^3 + y^3}{z^2}$

$$\ge tx^2y^2 - \frac{x^3}{x^2} - \frac{y^3}{y^2} = tx^2y^2 - x - y \qquad (1)$$

Nếu : $tx^2y^2 - x - y < 0 \Rightarrow t < \dfrac{1}{xy^2} + \dfrac{1}{yx^2} \le 2$

$\Rightarrow t = 1 \Rightarrow x^2y^2 - x - y < 0$

$\Rightarrow xy - x - y < 0$

$\Rightarrow (x-1)(y-1) - 1 < 0$

$\Rightarrow x = 1 \Rightarrow y^2 - y < 0$

$\Rightarrow y(y-1) < 0$, vô lí vì $y \in N^*$.

Vậy $tx^2y^2 - x - y \geq 0$, từ (1) ta có :

$$z^2 \geq (tx^2y^2 - x - y)^2 \quad (2)$$

Mặt khác : $x^3 + y^3 \vdots z^2 \Rightarrow x^3 + y^3 \geq z^2$ (3)

Từ (2) và (3) ta có :

$$x^3 + y^3 \geq [tx^2y^2 - (x+y)]^2$$

$$\Rightarrow txy \leq 2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) + \frac{1}{tx^3} + \frac{1}{ty^3} \quad (4)$$

Nếu $x \geq 2$ thì $y \geq 2 \Rightarrow txy \geq 4 > 3 > 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{t.8} + \frac{1}{t.8} \geq 2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) + \frac{1}{tx^3} + \frac{1}{ty^3}$

mâu thuẫn với (4).

Vậy $x = 1$. Khi đó (4) trở thành

$$ty \leq 2 + \frac{2}{y} + \frac{1}{t} + \frac{1}{ty^3} \quad (5).$$

Nếu $y \geq 4$ thì $ty \geq 4 > 2 + \frac{2}{4} + \frac{1}{t} + \frac{1}{t.4^3} \geq 2 + \frac{2}{y} + \frac{1}{t} + \frac{1}{ty^3}$, mâu thuẫn với (5). Vậy $y \leq 3$.

* Nếu $y = 1 \Rightarrow x^3 + y^3 = 2 \vdots z^2 \Rightarrow z = 1$

* Nếu $y = 2 \Rightarrow x^3 + y^3 = 9 \vdots z^2 \Rightarrow z = 3$

(vì $z \geq y$)

* Nếu $y = 3 \Rightarrow x^3 + y^3 = 28 \vdots z^2$, vô lí.

Thử lại ta thấy $(x; y; z; t)$ bằng (1; 1; 1; 3); (1; 2; 3; 1) thỏa mãn phương trình. Hoán vị x, y, z ta có tất cả 7 nghiệm thỏa mãn phương trình.

Nhận xét 1) Nhiều bạn làm cách trên, nhưng không lập luận $tx^2y^2 - x - y \geq 0$, mà vẫn từ (1) suy ra (2).

2) Một số bạn chỉ dẫn đến được một nghiệm (1; 1; 1; 3).

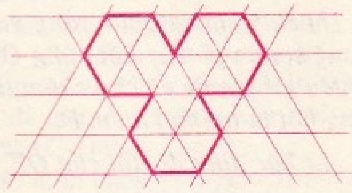
3) Các bạn có lời giải tốt hơn là :

Hải Dương: *Nguyễn Tấn Dương, Ngô Xuân Bách*, 9A, THCS Nguyễn Trãi; **Hải Phòng:** *Phạm Đức Hiệp*, 9T, THCS Chu Văn An, *Phạm Gia Vĩnh Anh, Vũ Hoàng Hiệp*, 9CT, PTTH Trần Phú; **Nam Định:** *Phùng Văn Thắng*, 9D, THCS Ngô Đồng, Giao Thủy; **Bắc Ninh:** *Trương Bảo Nam*, 9A, THCS Nguyễn Đăng Đạo, thị xã Bắc Ninh; **Hưng Yên:** *Nguyễn Thành Sơn*, THCS Long Hưng, Châu Giang; **Vĩnh Phúc:** *Kim Đình Thái*, 9B, THCS Yên Lạc; **TP Hồ Chí Minh:** *Trần Vĩnh Hưng*, 9^3, THCS Nguyễn Du, Gò Vấp ; **Khánh Hòa:** *Vũ Xuân Minh*, 9^1, THCS Cam Nghĩa, Cam Ranh; **Phú Thọ:** *Hoàng Ngọc Minh*, 8C, THCS Việt Trì, ...

LÊ THỐNG NHẤT

Bài T8/THCS. *Mặt phẳng được phân chia thành vô số tam giác đều bằng nhau bởi ba họ đường thẳng song song. Một đường gấp khúc khép kín có n cạnh mà mỗi cạnh của nó là một cạnh của một tam giác đều nói trên. Ta đánh số thứ tự các cạnh liên tiếp của đường gấp khúc là $c_1, c_2, ..., c_n$. Biết rằng mỗi cạnh c_{i+2} không song song với cạnh c_i ($i = 1, 2, ..., n$; coi c_{n+1} là c_1 và c_{n+2} là c_2). Chứng minh rằng n chia hết cho 6.*

Lời giải. Rất tiếc là đề bài như trên thì không chính xác. Phản ví dụ là $n = 15$ như hình bên.



Với những giả thiết như đề bài có thể chứng minh $n \vdots 3$. Viết tắt c_i *ch* c_j là c_i và c_j thuộc cùng một họ đường thẳng song song, và c_i *ch* c_j là c_i và c_j không thuộc cùng một họ đường thẳng song song. Xét 3 cạnh liên tiếp bất kì c_k, c_{k+1}, c_{k+2} ta có :

$$c_k \; kh \; c_{k+1}, \; c_{k+1} \; kh \; c_{k+2}, \; c_{k+2} \; kh \; c_k.$$

Nên c_k, c_{k+1}, c_{k+2} thuộc 3 họ khác nhau.

Tương tự $c_{k+1}, c_{k+2}, c_{k+3}$ cũng thuộc 3 họ khác nhau. Do đó c_k ch c_{k+3}, suy ra c_k *ch* c_{k+3a} $(a \in N)$

Giả sử $n \equiv r \pmod 3$ $(r \in \{0, 1, 2\})$.

Ta có c_{n+1} *ch* c_{r+1} suy ra c_1 *ch* c_{r+1}

Như vậy $r \neq 1$, $r \neq 2$. Vậy $r = 0$ tức $n \vdots 3$.

Nhận xét. Các bạn *Kim Đình Thái*, 9B, THCS Yên Lạc, **Vĩnh Phúc**, *Lê Tuấn Thuận*, 9A, Ngô Sĩ Liên, Chương Mỹ, **Hà Tây**, *Phạm Thành Trung*, 8A, *Nguyễn Thành Nam, Nguyễn Tuấn Dương, Ngô Xuân Bách, Lê Hải Yến*, 9A, PTTH Nguyễn Trãi, **Hải Dương**, *Vũ Nhân*, 8B, *Vũ Hoàng Hiệp*, 9T, PTNK Trần Phú, **Hải Phòng**, *Mai Văn Hà*, 9C, THCS Lê Quý Đôn, Bỉm Sơn, **Thanh Hóa** đã có nhận xét về đầu bài như nói trên. Nếu hiểu đầu bài : "Mỗi cạnh của nó là một cạnh của tam giác đều nói trên, hai cạnh liên tiếp không cùng thuộc một tam giác" thì sẽ chỉ có duy nhất $n = 6$. Tòa soạn và tác giả thành thật xin lỗi bạn đọc.

THANH THÀNH

Bài T7/THPT. *Xét hàm số $f: N^* \to N^*$ thỏa mãn các điều kiện :*

a) $f(1) = f(2) = 1$

b) $f(n) = f\left(\left[\frac{n}{2}\right]\right) + f\left(\left[\frac{n+1}{2}\right]\right)$ với mọi $n \geq 3$.

trong đó kí hiệu N^* là tập các số nguyên dương, $[x]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá x. Hãy tính

$$S = f(1) + f(2) + ... + f(1999).$$

Lời giải. Từ bảng giá trị hàm số

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f(n)$	1	1	2	2	3	4	4	4	5	6	7	8

ta thấy với $n = 2^t + k$ ($0 \leq k \leq 2^t - 1$ và $t \in N$)

thì $f(2^t + k) = \begin{cases} 2^{t-1} + k & \text{nếu } 0 \leq k \leq 2^{t-1} \\ 2^t & \text{nếu } 2^{t-1} \leq k \leq 2^t \end{cases}$ (*)

Ta chứng minh công thức (*) bằng quy nạp theo t.

Với $t = 0$, $t = 1$ dễ dàng thấy công thức (*) đúng. Giả sử công thức (*) đúng với mọi số $t \leq s$. Xét $t = s + 1$ ta có

$$f(2^{s+1} + k) = f\left(2^s + \left[\frac{k}{2}\right]\right) + f\left(2^s + \left[\frac{k+1}{2}\right]\right)$$

Nếu $0 \leq k \leq 2^s$ thì $0 \leq \left[\frac{k}{2}\right] \leq \left[\frac{k+1}{2}\right] \leq 2^{s-1}$

nên theo giả thiết quy nạp thì

$$f(2^{s+1} + k) = 2^{s-1} + \left[\frac{k}{2}\right] + 2^{s-1} + \left[\frac{k+1}{2}\right]$$

$$= 2^s + \left[\frac{k}{2}\right] + \left[\frac{k+1}{2}\right] = 2^s + k.$$

Nếu $2^s \leq k \leq 2^{s+1}$ thì

$$2^{s-1} \leq \left[\frac{k}{2}\right] \leq \left[\frac{k+1}{2}\right] \leq 2^s$$

nên theo giả thiết quy nạp thì

$$f(2^{s+1} + k) = 2^s + 2^s = 2^{s+1}.$$

Công thức (*) đúng với s+1. Vậy công thức (*) đúng với mọi t, nghĩa là với mọi $f(n)$, $n \in N^*$.

Xét các giá trị của $f(n)$, để ý rằng $f(1) = 1$, với $0 \leq k \leq 2^{t-1} - 1$ thì $f(n) = 2^{t-1} + k$ lấy 2^{t-1} giá trị nguyên dương từ 2^{t-1} đến $2^t - 1$, với $2^{t-1} \leq k \leq 2^t - 1$ thì $f(n) = 2^t$ lấy 2^{t-1} giá trị. Từ đó

$$\sum_{n=1}^{2^{s+1}} f(n) = 1 + \sum_{n=1}^{2^s} n + \sum_{t=1}^{s} 2^t . 2^{t-1} =$$

$$= 1 + 2^{s-1}(2^s + 1) + 2 . \frac{4^s - 1}{4 - 1}$$

$$= 1 + 2^{s-1} + 2^{2s-1} + \frac{2}{3}(4^s - 1)$$

$$= \frac{1}{6}(7.4^s + 3.2^s + 2).$$

Chú ý rằng $2000 = 1024 + 976 = 2^{10} + 976 < 2^{11} = 2048$ và $2^9 = 512 < 976$.

Ta có:

$$S = \sum_{n=1}^{1999} f(n) = \sum_{n=1}^{2^{11}} f(n) - \sum_{n=2000}^{2048} f(n)$$

$$= 1 + 2^9(2^{10} + 1) + \frac{2}{3}(4^{10} - 1) - 49.2^{10} = 1173675.$$

Nhận xét. 1) Từ công thức (*) một số bạn tính :

$$S_t = f(2^t + 1) + f(2^t + 2) + ... + f(2^t + 2^{t-1}) +$$

$$+ f(2^t + 2^{t-1} + 1) + ... + f(2^t + 2^t)$$

$$= 2^{t-1} . 2^{t-1} + (1 + 2 + ... + 2^{t-1}) + 2^{t-1} . 2^t$$

$= 7.2^{2t-3} + 2^{t-2}$ với mọi $t \geq 2$ rồi tính tổng S_t với $t = 2, 3, ..., 11$. Từ đó tính được S.

2) Có đến 33 bạn tìm được công thức (*) nhưng đã tính ra kết quả sai hoặc không tính đến kết quả.

3) Các bạn có lời giải đúng là :

Vĩnh Phúc: *Nguyễn Trung Lập, Vũ Văn Phong*, 11A1, PTTH chuyên; **Hòa Bình:** *Nguyễn Mạnh Cường*, 10T, PTTH Hoàng Văn Thụ; **Hà Nội:** *Trần Tất Đạt*, 11B Toán ĐHKHTN-ĐHQG Hà Nội; **Hà Tây:** *Nguyễn Hà Duy*, 12A, PTTH Nguyễn Huệ, Hà Đông; **Hà Nam:** *Trần Ngọc Đoàn*, 12A, PTTH Nam Lý, Lý Nhân; **Nam Định:** *Phùng Văn Thắng*, 9D, THCS Ngô Đồng, Giao Thủy; **Hải Dương:** *Trần Quang Khải*, 10C, PTTH Nhị Chiểu, Kinh Môn; *Nguyễn Tuấn Dương, Ngô Xuân Bách*, 9A, *Phạm Quốc Hoàng, Phạm Ngọc Lợi*, 11 Toán và *Phạm Hồng Quân*, 12 Toán, PTTH Nguyễn Trãi; **Hải Phòng:** *Vũ Ngọc Minh*, 9T, THCS Chu Văn An; *Vũ Hoàng Hiệp, Phạm Gia Vĩnh Anh*, 9T, *Trần Hạnh*, 12 Tin, PTTH NK Trần Phú, *Trịnh Quang Hiếu*, 11A9, PTTH Ngô Quyền; **Thanh Hóa:** *Mai Như Ngọc*, 11A6, *Lưu Văn Hiệu*, 12A, PTTH Ba Đình, Nga Sơn, *Hoàng Ngọc Dương*, 11A, PTTH Lương Đắc Bằng, Hoằng Hóa, *Nguyễn Ngọc Du*, 12A1, PTTH Hoằng Hóa 2; **Nghệ An:** *Đinh Thanh Thường*, 10A, PTTH Hermann Gmeiner, Vinh, *Nguyễn Trọng Huy*, 11A1, PTTH Phan Bội Châu, Vinh; **Quảng Trị:** *Trần Việt Anh*, 11T, PTTH Lê Quý

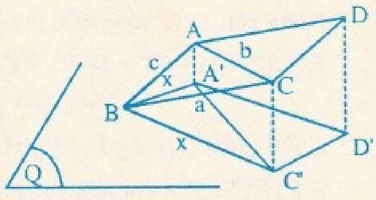
Đôn; **Đắc Lắc:** *Nguyễn Thị Hồng Hạnh*, 11T, PTTH Nguyễn Du, Buôn Ma Thuột; **Khánh Hòa:** *Trần Tuấn Anh, Võ Duy*, 11T, PTTH Lê Quý Đôn, Nha Trang; **Tp Hồ Chí Minh:** *Võ Thị Thu Nguyệt*, PTTH Quang Trung; *Lương Thế Nhân 10T*, PTNK-ĐHQG Tp Hồ Chí Minh.

VIỆT HẢI

Bài T8/THPT. *Cho hình bình hành ABCD. Chứng minh rằng có đường elíp duy nhất tiếp xúc với các cạnh của hình bình hành tại trung điểm các cạnh đó. Giả sử elíp đó cắt AC tại A_1 và C_1, cắt BD tại B_1 và D_1. Tính độ dài A_1C_1 và B_1D_1 biết $AC = m$; $BD = n$.*

Lời giải. Trước hết ta chứng minh hai nhận xét sau.

Nhận xét 1. Trong không gian đã cho một hình bình hành thì có thể tìm được mặt phẳng (Q) sao cho hình chiếu vuông góc của hình bình hành đó trên mặt phẳng (Q) là một hình vuông.



Hình 1

Chứng minh. Gọi hình bình hành đã cho là $ABCD$ với góc nhọn ABC và $AB = c$; $CB = a$, $AC = b$. Giả sử đã tìm được mặt phẳng (Q) thỏa mãn điều kiện nói trong nhận xét. Không mất tính tổng quát giả sử (Q) đi qua B. Ta gọi A', C', D' là hình chiếu của A, C, D trên (Q) (h.1).

Ta thấy $A'BC'$ là tam giác vuông cân. Đặt $BA' = BC' = x$. Xét hình thang vuông $AA'C'C$. Ta có :$AA' = \sqrt{c^2 - x^2}$; $CC' = \sqrt{a^2 - x^2}$; $A'C' = \sqrt{2}x$

Theo định lí Pitago ta có :

$$(\sqrt{c^2 - x^2} - \sqrt{a^2 - x^2})^2 + (\sqrt{2}x)^2 = b^2$$

Sau khi rút gọn ta có :

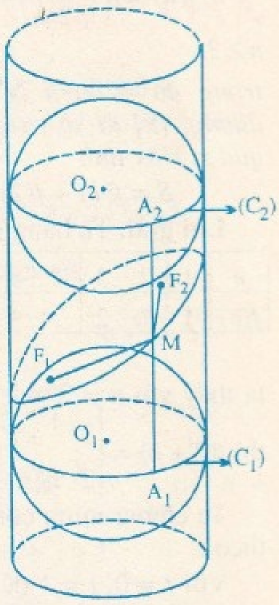
$$x^4 - (a^2 + c^2)x^2 + S^2 = 0 \qquad (*)$$

Trong đó S là diện tích hình bình hành $ABCD$.

Coi (*) như là phương trình bậc hai đối với x^2. Tuy nhiên trong hai nghiệm dương này chỉ có nghiệm nhỏ hơn thỏa mãn điều kiện $x^2 < a^2$; $x^2 < c^2$. Giả sử nghiệm nhỏ này là d^2 ($d > 0$). Lấy $x = d$. Ta dễ dàng xác định được mặt phẳng (Q) nói trong nhận xét.

Nhận xét 2. Nếu cắt mặt trụ tròn xoay bởi một mặt phẳng không song song và không vuông góc với trục của mặt trụ đó thì giao tuyến nhận được là một elíp.

Chứng minh. Giả sử mặt trụ và mặt phẳng nói trong nhận xét là (T) và (P). Lấy hai mặt cầu (O_1); (O_2) cùng nội tiếp mặt trụ và tiếp xúc với (P) lần lượt tại F_1; F_2 (h.2). Gọi (E) là elíp vẽ trong (P) với các tiêu điểm F_1, F_2 và độ dài trục lớn là O_1O_2. Ta chứng minh : $(T) \cap (P) = (E)$. Gọi đường tròn lớn của (O_1), (O_2) thuộc (T) là (C_1), (C_2) (h.2). Giả sử $M \in (T) \cap (P)$. Giả sử đường sinh của (T) đi qua M lần lượt cắt (C_1), (C_2) tại A_1 và A_2. Ta có :



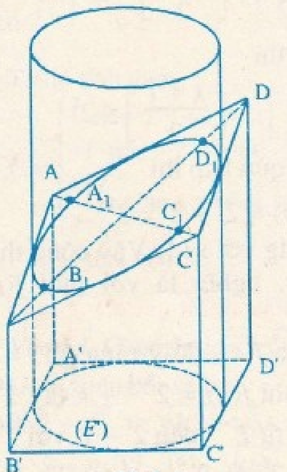
Hình 2

$$MF_1 + MF_2 = MA_1 + MA_2 = A_1A_2 = O_1O_2$$

Suy ra : $M \in (E)$

Giả sử $M \overline{\in} (T) \cap (P) \Rightarrow M \overline{\in} (T)$ hoặc $M \overline{\in} (P)$. Nếu $M \overline{\in} (P)$ thì $M \overline{\in} (E)$. Nếu $M \in (P)$ thì $M \overline{\in} (T)$. Lấy $M' \in (T) \cap (P)$; $M' \neq M$ (vì $M \overline{\in} (T)$; $M' \in (T)$). Đường thẳng MM' cắt (T) tại M'' khác M, M'. Đương nhiên $M'' \in (T) \cap (P)$. Theo chứng minh trên M', $M'' \in (E)$. Vì một đường thẳng không thể cắt elíp tại ba điểm nên $M \overline{\in} (E)$.

Tóm lại $(T) \cap (P) = (E)$.



Hình 3

Trở lại bài toán đang xét : ta chọn mặt phẳng (Q) sao cho hình chiếu vuông góc của $ABCD$ lên (Q) là hình vuông $A'B'C'D'$ (bổ đề 1).

ĐÓN ĐỌC TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ SỐ TỚI (270)

Số tạp chí cuối cùng của năm 1999 sẽ đến với bạn đọc với nhiều nội dung bổ ích :

* Tin và những hình ảnh về Lễ kỉ niệm 35 năm ngày ra số tạp chí TH&TT đầu tiên.

* Tổ chức thi học sinh giỏi nước Anh

* Mối liên hệ giữa ba tam giác nội tiếp nhau

* Toán học và chiếc cà vạt

Các chuyên mục thường xuyên : Đề ra kì này, Giải bài kì trước, Tiếng Anh qua các bài toán.. Đặc biệt Câu lạc bộ sẽ ra thông báo về một Cuộc chơi mới nhân dịp đầu Xuân 2000, điều quan trọng là bạn **phải có một số tạp chí số 271 (tháng 1/2000) riêng cho mình để tham gia Cuộc chơi này**. Cuộc chơi dành cho mọi lứa tuổi đang chờ các bạn. Hãy nhớ đặt ngay tạp chí tháng 12 năm 1999 và quý I năm 2000 kẻo lỡ một dịp may mắn tới với bạn.

Tạp chí mong nhận được những bài viết thú vị dành cho số Xuân và số Tết năm 2000 (chuyện vui, thơ, câu đối, tranh vui, câu đố và kể cả những hiến kế độc đáo).

<u>Nhắn tin :</u> *Các bạn được giải các cuộc thi trong năm 1999 hãy gửi gấp địa chỉ mới để Tòa soạn gửi tặng phẩm. Nếu có thể, xin các bạn gửi thêm một ảnh của mình để tạp chí giới thiệu với bạn đọc.*

☛ Gọi (E') là đường tròn nội tiếp hình vuông $A'B'C'D'$. Gọi (T) là mặt trụ tròn xoay chứa (E') (h.3). Đặt $(P) \equiv mp(ABCD)$. Đặt $(E) = (T) \cap (P)$. Theo bổ đề 2, (E) là elíp. Do tính chất của phép chiếu, (E) tiếp xúc với các cạnh của $ABCD$ tại trung điểm của chúng. Cũng do tính chất của phép chiếu dễ thấy :

$$A_1C_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}m;\ B_1D_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}n.$$

Nhận xét. 1) Thực ra trong lời giải trên chưa đề cập đến tính duy nhất của elíp nói trong đề bài. Để giải quyết vấn đề này một cách chính xác cần có những kiến thức vượt quá chương trình phổ thông. Tòa soạn và tác giả xin chân thành xin lỗi bạn đọc.

2) Mặc dù gặp phải những tính toán phức tạp, một số bạn vẫn cố gắng giải quyết bài toán. Hoan nghênh tinh thần làm việc của các bạn

NGUYỄN MINH HÀ

LÊ VIỆT NGỌC

NHỚ VÀ NGHĨ VỀ NHỮNG TRANG BÁO TOÁN

Ngày đầu tiên tờ báo tới với tôi
Quán sách nhỏ bên chợ thời sơ tán
Giấy in báo còn tờ đen, tờ trắng
Vẫn cho tôi niềm say toán lạ kỳ...

Những tâm tình như vạch hướng nghĩ suy
Những sáng tạo hấp dẫn như cổ tích
Những đề toán như nguồn men kích thích
Và chúng tôi quên hết tiếng bom rền

Ôi ! Một thời thơ ấu dễ nào quên
Tờ báo nhỏ chúng tôi truyền cả lớp
Tìm tên mình mục Giải bài kỳ trước
Chẳng thấy tên, ai một chút nao lòng...

Tôi nhìn ra bốn hướng mênh mông
Thấy chú bé chăn trâu mở trang báo mới
Thấy cô bé vẽ hình bằng que củi
Cho ước mơ vươn mãi tới chân trời

Tôi lặng nhìn trên giá sách thầy tôi
Báo Toán đứng một dãy dài năm tháng
Đã bao đêm, tờ báo như người bạn
Cho tôi mê bao lời giảng của thầy

Kìa bao người đã giang rộng cánh bay
Những Tiến sĩ, Giáo sư hôm nay vẫn nhớ
Có một thời làm toán trong gian khổ
Tờ báo xưa giấy cũ ngả sắc vàng

Thế kỉ diệu kỳ tờ báo lật tiếp trang
Bao bạn trẻ đang hân hoan bước tới
Báo như một hành trang - không thiếu nổi
Ba nhăm năm không mệt mỏi với mình

Như Con người, Báo cũng có ngày sinh
Như Người Thầy, Báo ân tình muôn thủa
Như Ngọn lửa, Báo thắp bao ngọn lửa
Như Trái tim, Báo thắm đỏ cuộc đời

15.10.1999

Ngày báo Toán tròn 35 tuổi

Giải đáp bài

ĐI TÌM CÁC ĐẲNG THỨC ĐẸP

Biến đổi $\overline{ab}.\overline{cd} = \overline{ba}.\overline{dc}$

$\Leftrightarrow (10a + b)(10c + d) = (10b + a)(10d + c)$

$\Leftrightarrow ac = bd$ (*)

Với điều kiện a, b, c, d là các số nguyên dương nhỏ hơn 10 và $a \neq b$.

(1) Nếu $a = d$, từ (*) có $b = c$, đẳng thức có dạng : $\overline{ab}\,.\,\overline{ba} = \overline{ba}\,.\,\overline{ab}$

Đẳng thức này "không đẹp" vì thực ra chỉ là sự giao hoán của tích hai số ab và ba.

Với $a = 1$ thì $b = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$: có 8 trường hợp

$a = 2$ thì $b = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$: có 7 trường hợp

. . . .

$a = 8$ thì $b = 9$: có 1 trường hợp

Tổng số có $1+2+3+...+8 = \dfrac{8.9}{2} = 36$ trường hợp.

(2) Xét $a \neq d$. Từ (*) có 14 trường hợp sau :
1.4 = 2.2, 1.6 = 2.3, 1.6 = 3.2, 1.8 = 2.4, 1.8 = 4.2
1.9 = 3.3, 2.6 = 3.4, 2.6 = 4.3, 2.8 = 4.4, 2.9 = 3.6
2.9 = 6.3, 3.8 = 4.6, 3.8 = 6.4, 4.9 = 6.6.

Với $a < b$ ta có 14 "đẳng thức đẹp" sau đây :
12.42 = 21.24, 12.63 = 21.36, 13.62 = 31.26,
12.84 = 21.48, 14.82 = 41.28, 13.93 = 31.39,
23.64 = 32.46, 24.63 = 42.36, 24.84 = 42.48,
23.96 = 32.69, 26.93 = 62.39, 34.86 = 43.68
36.84 = 63.48, 46.96 = 64.69.

Đổi vế trái với vế phải các đẳng thức trên ta có 14 trường hợp nữa ứng với $a > b$.

Nhận xét. Nhiều bạn tìm được (*) nhưng không viết các đẳng thức bằng số, hoặc viết thiếu, hoặc viết trùng lặp. Các bạn sau đây có lời giải tốt : *Doãn Kim Huế*, 6C, THCS Phạm Huy Thông, Ân Thi, **Hưng Yên,** Tống Anh Quân, *11* Tín, PTTH Lê Hồng Phong, Tp **Nam Định**, *Lê Hoàng Dũng*, 11H, PTTH Lam Sơn, Tp **Thanh Hóa**; *Lê Thị Ngàn*, 11H, PTTH KrôngPăc, **Đắc Lắc.**

BÌNH PHƯƠNG

HÌNH HỘP NÀO ?

Hãy tìm hình hộp mà nếu cắt nó bởi một mặt phẳng thì được 2 hình hộp nhỏ sao cho 3 cạnh xuất phát từ 1 đỉnh của mỗi hình hộp nhỏ tương ứng tỉ lệ với 3 cạnh của hình hộp ban đầu.

VŨ HOÀNG THÁI
(*Hà Nội*)

Ô CHỮ NGÀY KHAI GIẢNG

Ôi! Bài gửi về phải tính theo đơn vị ki-lô-gam. Ngay chỉ tính những bài gửi về cùng ngày đầu tiên đã quá nhiều rồi. Câu lạc bộ đành phải "bốc thăm" để xem ai may mắn hơn thôi.

Đây là 10 bạn may mắn hơn : *Võ Phương Thúy*, 5A, trường Tiểu học Quang Trung, Vinh, Nghệ An; *Bế Trang*, 10C, trường cấp 2-3 Tràng Định, Lạng Sơn; *Tạ Tiến Đạt*, 6A, PTCS Vĩnh Yên, Vĩnh Phúc; *Nguyễn Bảo Linh*, 5C, trường tiểu học Minh Tân, Việt Trì, Phú Thọ; *Nguyễn Ngọc Anh*, ngõ Sùng, đường Trần Xuân Soạn, Thành phố Thanh Hóa; *Hà Thị Lương Như*, 8^2, THCS Nguyễn Văn Cừ, Biển Hồ, Gia Lai; *Nguyễn Thị Triều Thanh*, lớp 6^5, THCS Nguyễn Trãi, Đông Hà, Quảng Trị; *Mai Ngọc Anh Vũ*, lớp 6^1, trường Kim Đồng, Hội An, Quảng Nam; *Doãn Kim Huế*, 6C, THCS Phạm Huy Thông, Ân Thi, Hưng Yên; *Thái Thị Như Hằng*, 6^3, trường Thị xã Bến Tre, Bến Tre.

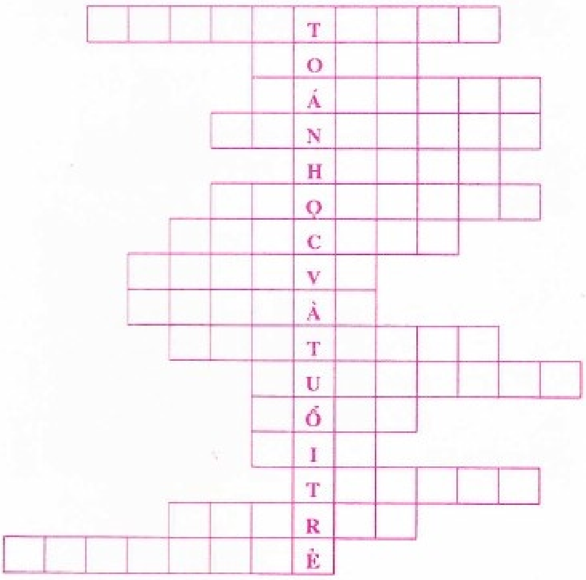
Câu lạc bộ sẽ gửi 10 tặng phẩm tới các bạn và xin trao nhuận bút cho bài thơ của bạn *Đặng Ngọc Dương*,, 10A, khối chuyên Lý - ĐHKHTN-ĐHQG Hà Nội

Thước kẻ đi trốn đâu rồi
Để K rớt lại còn ngồi đợi ai ?
Bình phương *biến hóa thật tài*
Một đẩy mà lại hóa hai rõ ràng
Compa *thấy vậy thở than :*
Còn tôi quay mãi vẽ toàn... Mặt Trăng
Hiệu số *chạy nhảy lăng xăng :*
Tôi là khoảng cách hai "thằng" thích đua
Góc *ta nửa thật nửa đùa :*
Tôi thì "gai" đấy nhưng chưa đâm người
Hàm sin *rõ thật buồn cười*
Lên lên xuống xuống mãi rồi ích chi ?
Bảng đen *ấp ủ điều gì*
Bao năm đứng đó kiên trì gắng công
Một anh quen thuở lớp năm
Chẳng nhắc cũng biết là **phân số** *rồi*
Galoa *sống mãi với đời*
Lý thuyết bất hủ muôn đời còn ghi
Chung vui góp một chút gì
Dẫu không được giải cũng.. thi với mình

T	H	Ư	Ớ	C	K	Ẻ			
B	Ì	N	H	P	H	Ư	Ơ	N	G
	C	O	M	P	A				
				H	I	Ệ	U		
					G	Ó	C		
				S	I	N			
				B	Ả	N	G		
		P	H	Â	N	S	Ố		
					G	A	L	O	A

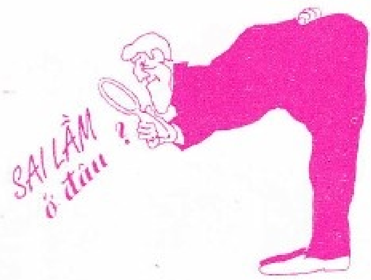
Nhân dịp Kỉ niệm 35 năm ra số báo Toán học và Tuổi trẻ đầu tiên, xin mời các bạn tham gia chơi ô chữ

TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ



1. Khái niệm Toán học có trong tên một bài thơ của cử nhân toán Thạch Quỳ.
2. Cũng như : vì vậy, cho nên, suy ra...
3. Nếu bạn bị cận thì hãy đến cửa hàng... sẽ gặp một khái niệm quen thuộc.
4. Trông như nhau nhưng lại khác nhau.
5. Một loại hàm không có răng từ hồi báo Tết.
6. Giao của các đường thẳng đi qua đỉnh và chia đôi diện tích tam giác.
7. Nơi các đường cao của tam giác gặp nhau.
8. Hay nhìn vào để giải bài Hình
9. Hay viết trước mỗi bài thi của mình.
10. Người ta cho, mình dùng được mới xong.
11. Một phần của đường tròn.
12. Dùng thì nói ra, không dùng thì để... bồ
13. Vừa là gỗ, vừa là phép toán
14. Đội tuyển nước ta xếp hạng thứ nhất trong kì thi Olympic Quốc tế 1999.
15. Loay hoay mãi đành kêu như vậy
16. Đã trọn vẹn mà lại như thừa ra một ít.

NGỌC MAI



Kết quả tìm SAI LẦM khi tính GIỚI HẠN

Ai cũng khẳng định cách 1 tuy "thật là đơn giản" nhưng sai, còn cách 2 là đúng. Nhưng cách 1 sai ở đâu ? Nhiều bạn lí giải theo các kiểu khác nhau. Chẳng hạn :

1) Viết $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - x) = 0$ là sai (!). Oan quá ! Viết như vậy quá đúng ! Lưu ý cho $\lim\limits_{x \to +\infty}(x - x) = \lim\limits_{x \to +\infty} 0 = 0$.

2) Thực ra : $\lim\limits_{x \to +\infty}(x - x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x - \lim\limits_{x \to +\infty} x$ nên $\lim\limits_{x \to +\infty}(x - x) = (+\infty) - (+\infty)$ chưa chắc đã bằng 0 (!). Phân tích này bị sai ngay khi viết $\lim\limits_{x \to +\infty}(x - x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x - \lim\limits_{x \to +\infty} x$. Hình như cái sai này cũng chẳng kém gì cái sai của cách 1.

3) $\sqrt{x^2 - 2x + 3} = x\sqrt{1 - \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{x^3}}$ chỉ đúng với $x > 0$ nên lời giải sai. Lí lẽ này chỉ nhằm vào chỗ "khỏe mạnh" của lời giải mà gọi là "bệnh". Các bạn lưu ý cho là $x \to +\infty$ thì đương nhiên $x > 0$ rồi. v.v...

Thế mới biết "khám bệnh" cũng khó đấy chứ ? Xin nêu ra "căn bệnh" của lời giải thứ nhất

* Không thể hiểu rằng :

$$\lim_{x \to +\infty}\left[x\sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}}\ \right] = x,$$ mặc dù $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{1 - \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{x^2}} = 1$. Chính vì vậy, không thể có đẳng thức $L = \lim\limits_{x \to +\infty} (x - x)$. Mắt xích của lời giải "bị tuột" là ở đó. Các bạn tinh ý hơn là : *Phan Duy Viện*, 11A1, PTTH chuyên Vĩnh Phúc; *Nguyễn Ngọc Minh*, đội 4, Yên Sở, Hoài Đức, Hà Tây; *Lê Xuân Nam*, 12B, PTTH Châu Phong, Xuân Hòa, Mê Linh, Vĩnh Phúc; *Chu Văn Phượng*, 12A6, PTTH Dan Phượng, Hà Tây; *Nguyễn Sỹ Thái Bình*, PTTH Nguyễn Sỹ Sách, Thanh Dương, Thanh Chương, Nghệ An; *Hà Sĩ Tiến*, ĐH1 A, ĐH Hồng Đức, Tp Thanh Hóa.

KIHIVI

TOÁN HỌC & TUỔI TRẺ
với cộng tác viên và bạn đọc

Với những cây bút phía Nam tại 231 Ng. Văn Cừ (TP. HCM)

Với học sinh và giáo viên vùng cao

Với Trường PTTH chuyên Lương Thế Vinh (Đồng Nai)

Với Trường PTTH chuyên Lê Quý Đôn (Đà Nẵng)

Với Trường PTTH chuyên
Lê Hồng Phong (TP. HCM)

Với Trường PTTH chuyên
Lý Tự Trọng (Cần Thơ)

Với giáo viên Thái Bình
tại 45 Hàng Chuối - Hà Nội

ISSN : 0866-0853
Chỉ số : 12884
Mã số : 8BT71M9

Chế bản tại Tòa soạn
In tại Nhà máy in Diên Hồng
In xong và nộp lưu chiểu tháng 11 - 1999

Tăng 4 trang
Giá không đổi
3.000 đồng