BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO * HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

TOÁN HỌC & TUỔI TRẺ

NĂM THỨ 36 - RA HÀNG THÁNG
Số 10 (268)
1999

Chúc mừng
40 năm
Khoa Toán-Tin
ĐHSP Vinh

Những gương mặt, những tấm lòng dành cho *Toán học và Tuổi trẻ*

Nhà giáo NGUYỄN CÔNG QUỲ sinh ngày 05.05.1930 tại Nha Trang, quê ở Thường Tín, Hà Tây, từng phục vụ trong quân đội, tốt nghiệp, rồi dạy Đại học sư phạm Hà Nội từ 1960, Đại học Sư phạm TPHCM từ 1977, ĐHSP ở Cộng hòa nhân dân Angola từ 1987 đến 1990. Trong quá trình giảng dạy ông đã tham gia dạy học sinh giỏi dự thi Quốc gia và Quốc tế tại Hà Nội, TP HCM, Thừa Thiên - Huế, Đồng Nai... Ông chúc báo Toán học và Tuổi trẻ giữ vững và phát huy vai trò của mình trong việc phát hiện và bồi dưỡng tài năng trẻ cho đất nước.

PGS Tiến sĩ ĐẶNG HÙNG THẮNG sinh ngày 17.01.1953 quê tại Duy Tiên, Hà Nam, bảo vệ luận án PTS năm 1988 rồi tiến sĩ năm 1992, giảng dạy tại khoa Toán ĐHTH Hà Nội từ 1977. Ông là ủy viên Hội đồng biên tập của 3 tạp chí của Việt Nam : Toán học và Tuổi trẻ, Vietnam Journal of Mathematics và Acta Mathematica Vietnamica, cộng tác viên nhiều năm của Bộ GD-ĐT về bồi dưỡng học sinh giỏi Toán. PGS đã nhiều lần là Trưởng đoàn học sinh Việt Nam dự thi Toán quốc tế. Ông là bạn đọc và cộng tác viên thủy chung của THVTT từ khi còn là một học sinh lớp 6. Ông mong muốn tạp chí có thêm nhiều bài viết về các danh nhân toán học và những ứng dụng của toán học.

Nhà giáo ưu tú TRẦN VĂN VUÔNG sinh ngày 6.8.1942, quê ở Kim Động, Hưng Yên. Ông bảo vệ luận án PTS năm 1975 tại CHDC Đức, giảng dạy ở trường cấp 3 thị xã Hưng Yên (1964-1969) và khoa Toán ĐHSP Hà Nội 2 (1976-1995), công tác ở Văn phòng Chủ tịch nước (1995-1996) và Viện Khoa học giáo dục (1996-1999), hiện nay là Trưởng phòng bộ môn Toán của Viện. Là cộng tác viên của THVTT từ năm 1966, ông mong muốn các bạn trẻ yêu Toán không những học tập một cách tích cực, tự giác, chủ động, mà còn thường xuyên vận dụng Toán học vào cuộc sống, cố gắng góp phần xây dựng lâu đài Toán học ngày càng nguy nga, tráng lệ.

PTS LÊ THỐNG NHẤT sinh ngày 14.1.1955 tại Nam Định, từng là học sinh trường Nguyễn Phong Sắc, Mỹ Phúc, Trần Đăng Ninh (Nam Định). Ông đã học (1969-1976) và dạy toán (1976-1996) ở Khối Chuyên Toán và Khoa Toán ĐHSP Vinh. Bảo vệ luận án PTS chuyên ngành Phương pháp giảng dạy toán năm 1996. Công tác tại Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ từ năm 1997. Ông gắn bó với Tạp chí từ thời học cấp 2 và tự nghĩ rằng : "THVTT là duyên định với đời mình". Ông mong rằng tạp chí sẽ đến với nhiều bạn đọc hơn nữa.

Toán học và Tuổi trẻ
Mathematics and Youth

Năm thứ 36
Số 268 (10–1999)
Tòa soạn : 25 Hàn Thuyên, Hà Nội
ĐT : 04.8262477–04.9714359
FAX: (84).4.9714359

TRONG SỐ NÀY

Dành cho các bạn
TRUNG HỌC CƠ SỞ

TỪ MỘT BÀI TOÁN TRONG SÁCH GIÁO KHOA HÌNH HỌC LỚP 9

LÊ QUỐC HÁN
(*cựu SV khoa Toán, ĐHSP Vinh*)

Trong tác phẩm nổi tiếng "Giải bài toán như thế nào ?", Pôlia cho rằng : Ví như dòng sông nào cũng bắt nguồn từ những con suối nhỏ, mỗi bài toán dù khó đến đâu cũng có nguồn gốc từ những bài toán đơn giản, có khi rất quen thuộc đối với chúng ta. Vì vậy, trong quá trình tìm tòi lời giải các bài toán, việc tìm hiểu xuất xứ của chúng sẽ giúp chúng ta nảy sinh ra những "ý chói lọi", (từ của Pôlia) đôi lúc còn tìm được đúng chìa khóa để giải các bài toán đó. Đặc biệt, nếu phát hiện ra bài toán cần giải có nguồn gốc từ một bài toán trong sách giáo khoa (SGK), thì tình huống càng trở nên thú vị hơn.

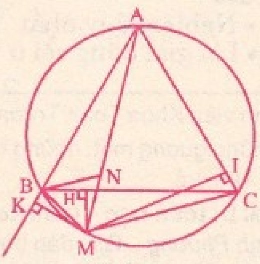
Xin hãy lấy một thí dụ : Cách đây không lâu, trong một kì thi học sinh giỏi toán lớp 9 toàn quốc, có bài toán hình học khá khó như sau :

Bài toán 1: *Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O) và một điểm M trên cung BC không chứa A. Gọi H, I, K lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ M đến BC, CA, AB. Chứng minh hệ thức* $\frac{1}{MH} = \frac{1}{MI} + \frac{1}{MK}$.

Cái khó của bài toán này là các đại lượng hình học nằm ở *mẫu thức*, và việc chứng minh các hệ thức như vậy không quen thuộc đối với học sinh ở bậc trung học cơ sở. Tuy nhiên, bài toán này liên quan với một bài toán quen thuộc trong SGK hình học lớp 9.

Bài toán 2: *Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O) và một điểm M trên cung BC không chứa A. Chứng minh hệ thức :*
$MA = MB + MC$.

Giải bài toán này khá đơn giản (h.1). Trên MA lấy điểm N sao cho $MN = MB$. Khi đó hai tam giác MBC và NBA bằng nhau nên $MC=NA$. Do đó $MB+MC=MN+NA=MA$.



Hình 1

Điều thú vị ở đây là từ kết quả bài toán thứ hai, dễ dàng suy ra kết quả của bài toán thứ nhất. Thật vậy từ sự đồng dạng của các cặp tam giác MHC, MKA và MHB, MIA suy ra :

$$MC = \frac{MH.MA}{MK} \text{ và } MB = \frac{MH.MA}{MI} \quad (1)$$

Thay các hệ thức này vào hệ thức $MA=MB+MC$ và rút gọn, ta được hệ thức $\frac{1}{MH} = \frac{1}{MI} + \frac{1}{MK}$

Phân tích các bài toán trên, ta thấy giả thiết tam giác ABC *đều* phải chăng là quá chặt ? Và nảy sinh vấn đề : nếu tam giác ABC *tùy ý* thì sẽ thu được kết quả tương tự như thế nào ? Lúc đó dễ thấy các hệ thức ở (1) vẫn đúng, còn hệ thức $MA = MB + MC$ không luôn luôn xảy ra, nhưng theo định lí Ptôlêmê đối với tứ giác nội tiếp $ABMC$ ta có hệ thức $MA.BC = MB.AC + MC.AB$ (**2**). Thay các hệ thức ở (**1**) vào (**2**), ta có $\frac{BC}{MH} = \frac{AC}{MI} + \frac{AB}{MK}$ và ta thu được bài toán sau, tổng quát hơn bài toán đầu tiên.

Bài toán 3. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và một điểm M trên cung BC không chứa A. Gọi H, I, K là chân đường vuông góc hạ từ M đến BC, CA, AB. Chứng minh hệ thức*

$$\frac{BC}{MH} = \frac{AC}{MI} + \frac{AB}{MK}$$

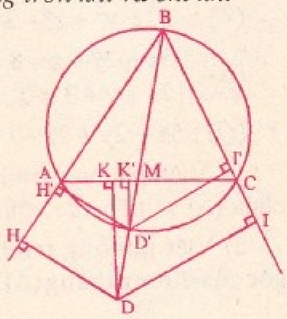
Đây là một bài toán đã được ra trong một kì thi vô địch toán ở Mỹ, và là *hệ thức thứ 10* mà tôi nêu lên trong bài báo "Tứ giác nội tiếp và ngoại tiếp đường tròn" (*THVTT*, số 252, tháng 6 năm 1998). Cũng trong bài báo này, tôi đề nghị các bạn giải hộ bài toán tương tự :

"*ABCD* là tứ giác nội tiếp khi và chỉ khi các chân đường vuông góc hạ từ *D* đến *BC*, *CA*, *AB* cùng nằm trên một đường thẳng" (*Hệ thức 6*). Rất vui vì bạn Ngô Văn Thái đã nêu ra hai cách giải khá đẹp cho bài toán này (trong bài "Bàn tiếp về điều kiện để tứ giác nội tiếp", THVTT, số 258, tháng 12/1998).

Ở đây, xin nêu lên một điều kiện cần và đủ khác để một tứ giác là nội tiếp :

Bài toán 4: *Cho tứ giác ABCD. Gọi H, I, K lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ D đến AB, BC, CA. Chứng minh rằng tứ giác ABCD nội tiếp được trong một đường tròn khi và chỉ khi*

$$\frac{CA}{DK} = \frac{AB}{DH} + \frac{BC}{DI}$$



Hình 2

Điều kiện cần được suy ra từ bài toán 3. Ta chứng minh điều kiện đủ. Gọi D' là giao điểm của BD với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Khi đó tứ giác $ABCD'$ là tứ giác nội tiếp nên $\frac{AB}{D'H'} + \frac{BC}{D'I'} = \frac{CA}{D'K'}$ (3)

trong đó H', I', K' lần lượt là chân các đường vuông góc hạ từ D' đến AB, BC, CA (h. 2)

Mặt khác $\frac{D'H'}{DH} = \frac{D'B}{DB} = \frac{D'I'}{DI}$

nên $D'H' = \frac{D'B.DH}{DB}$ và $D'I' = \frac{D'B.DI}{DB}$ (4)

Thay (4) vào (3), ta có $\frac{AB}{DH} + \frac{BC}{DI} = \frac{CA.D'B}{DB.D'K'}$

mà $\frac{AB}{DH} + \frac{BC}{DI} = \frac{CA}{DK}$ (gt) nên $\frac{D'B}{DB} = \frac{D'K'}{DK} = \frac{D'M}{DM}$ trong đó M là giao điểm của DB với AC. Theo tính chất tỉ lệ thức, ta có : $\frac{|DB - D'B|}{DB} = \frac{|DM - D'M|}{DM} \Rightarrow \frac{DD'}{DB} = \frac{DD'}{DM}$ mà $DB > DM$ nên $DD' = 0 \Rightarrow D' \equiv D$. Do đó $ABCD$ là tứ giác nội tiếp.

Để kết thúc, tôi xin tâm sự với các bạn rằng : Việc học tập các kiến thức trong sách giáo khoa nói chung và giải các bài tập trong các sách ấy là hết sức cần thiết, vì chúng chính là những con suối nhỏ, giúp chúng ta tạo ra những con sông lớn : con sông sáng tạo trong học tập bây giờ và phát minh, nghiên cứu khoa học sau này.

Mời các bạn cùng tìm các bài tập trong sách giáo khoa toán ở bậc trung học cơ sở có liên quan bài toán sau đây và tìm lời giải của chúng.

Bài toán 5: Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Cát tuyến quay quanh A cắt hai đường tròn (O) và (O') tại M và N. Tìm tập hợp các trung điểm của MN./.

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI TOÁN THPT TỈNH HẢI DƯƠNG (1998)

Thời gian : 180 phút.

Bài 1. Cho n số dương $a_1, a_2, \dots a_n$ thỏa mãn điều kiện $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n < 1$. Chứng minh bất đẳng thức :

$$\frac{a_1.a_2...a_n[1-(a_1+a_2+...+a_n)]}{(a_1+a_2+...+a_n)(1-a_1)(1-a_2)...(1-a_n)} \le \frac{1}{n^{n+1}}.$$

Bài 2. Cho tam giác ABC trong đó $\angle ABC = 2(\angle BCA)$. Trên cạnh BC lấy điểm D sao cho $BD = 2DC$. Gọi E là điểm đối xứng của A qua D.

Chứng minh : $\sin(\angle EBC) + \sin 2(\angle ECB) = 0$

Bài 3. Cho dãy số (u_n) $(n = 1, 2, \dots)$ xác định theo quy luật sau :

$$u_1 = \frac{13}{5},\ u_{n+1} = \sqrt{2} + \frac{u_n}{\sqrt{u_n^2 - 1}} \text{ với } n = 1, 2, 3...$$

Tìm số thực r thỏa mãn : $u_{2k} < r < u_{2k-1}$, $k = 1, 2, 3...$

Bài 4. Chứng minh rằng với mỗi số nguyên $n > 1$ đa thức :

$$P_n(x) = \frac{x^n}{n\,!} + \frac{x^{n-1}}{(n-1)\,!} + \dots + \frac{x^2}{2\,!} + \frac{x}{1\,!} + 1$$

có không quá một nghiệm thực, và không có nghiệm hữu tỉ./.

ĐỀ THI TOÁN VÀO TRƯỜNG ĐẠI HỌC MỎ - ĐỊA CHẤT NĂM 1999

A- PHẦN CHUNG CHO CÁC THÍ SINH

Câu I. 1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số : $y = 3x - x^3$.

2) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ trực chuẩn Oxy, cho đường cong (C) có phương trình :

$$(C) : y = 2x^4 - 3x^2 + 2x + 1$$

và đường thẳng (Δ) có phương trình :

$$(\Delta) : y = 2x - 1.$$

a) Chứng minh đường thẳng (Δ) không cắt đường cong (C).

b) Tìm trên đường cong (C) điểm A có khoảng cách đến (Δ) là nhỏ nhất.

Câu II. 1) Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} \log_4(x^2+y^2) - \log_4(2x) + 1 = \log_4(x+3y) \\ \log_4(xy+1) - \log_4(4y^2+2y-2x+4) = \log_4\left(\dfrac{x}{y}\right) - 1 \end{cases}$$

2) Giải bất phương trình :

$$\frac{2x^2}{(3-\sqrt{9+2x})^2} < x + 21.$$

Câu III. 1) Giải phương trình :

$$\text{tg}x.\sin^2x - 2\sin^2x = 3(\cos 2x + \sin x\cos x).$$

2) Giả sử A, B, C là ba góc trong của một tam giác. Tìm giá trị bé nhất của biểu thức :

$$M = \frac{1}{2+\cos 2A} + \frac{1}{2+\cos 2B} + \frac{1}{2-\cos 2C}.$$

Câu IV. Trong không gian với hệ tọa độ trực chuẩn Oxy, cho mặt cầu $(\mathscr{C})$, đường thẳng (Δ) và mặt phẳng (Q) lần lượt có phương trình như sau :

$(\mathscr{C})$: $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 67 = 0$;

$$(\Delta) : \begin{cases} 3x - 2y + z - 8 = 0 \\ 2x - y + 3 = 0 \end{cases}$$

$(Q) : 5x + 2y + 2z - 7 = 0.$

1) Viết phương trình tất cả các mặt phẳng chứa (Δ) và tiếp xúc với mặt cầu $(\mathscr{C})$.

2) Viết phương trình của hình chiếu vuông góc của đường thẳng (Δ) lên mặt phẳng (Q).

B. PHẦN DÀNH RIÊNG CHO MỖI LOẠI THÍ SINH

Câu Va. (*Dành cho thí sinh chưa phân ban*)

Cho $f(x)$ là hàm số thực, xác định, liên tục trên đoạn $[0, \pi/2]$, có $f(0) > 0$ và $\int_0^{\pi/2} f(x)dx < 1$.

Chứng minh rằng, phương trình $f(x) = \sin x$ có ít nhất một nghiệm trên đoạn $[0, \pi/2]$.

Câu Vb. (*Dành cho thí sinh chuyên ban*)

Giải bất phương trình :

$$\int_{\ln x}^{2+\ln x} \frac{dt}{2\sqrt{t}} < \int_{e^{-3/4}}^{x} \frac{dt}{t}.$$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu I. 1) Bạn đọc tự giải

2) a) Phương trình giao điểm :

$2x^4-3x^2+2x+1 = 2x-1$

$\Leftrightarrow 2x^4-3x^2+2 = 0$ vô nghiệm.

Vậy (Δ) không cắt (C).

b) $A(x_o, y_o) \in (C) \Rightarrow y_o = 2x_o^4 - 3x_o^2 + 2x_o + 1$

$$d(A,\Delta) = \frac{|2x_o^4-3x_o^2+2x_o+1-2x_o+1|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{|2x_o^4-3x_o^2+2|}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow d(A,\Delta) = \frac{2x_o^4-3x_o^2+2}{\sqrt{5}}$$

Đặt $x_o^2 = t, t \geq 0$ và $f(t) = 2t^2 - 3t + 2$; $t_d = 3/4 > 0$

$$\Rightarrow d_{\min} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{9}{8} - \frac{9}{4} + 2\right) \Rightarrow d_{\min} = \frac{7}{8\sqrt{5}};$$

$x_o = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Hai điểm cần tìm là :

$$A_1\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{8}, -\sqrt{3}\right) ; A_2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{8}, +\sqrt{3}\right)$$

Câu II. 1) Điều kiện :

$$\begin{cases} x, y > 0 & (1) \\ 4y^2 + 2y - 2x + 4 > 0 & (2) \end{cases}$$

$$\text{Hệ} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{4(x^2+y^2)}{2x} = x + 3y \\ \dfrac{xy+1}{4y^2+2y-2x+4} = \dfrac{x}{4y} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + 2y^2 = x^2 + 3xy \\ 4xy^2 + 4y = 4xy^2 + 2xy - 2x^2 + 4x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 = 0 \\ 2x^2 - 2xy + 4y - 4x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(x-y)(x-2y)=0\\(x-y)(x-2)=0\end{cases}$$

Hệ có nghiệm : $\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$; $\begin{cases}x=c\\y=c\end{cases}$ với $c>0$

2) Điều kiện : $-\frac{9}{2} \le x \ne 0$

Bất phương trình

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2(3+\sqrt{9+2x})^2}{4x^2} < x+21$$

$$\Leftrightarrow 18+2x+6\sqrt{9+2x} < 2x+42$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{9+2x} < 4 \Leftrightarrow x < \frac{7}{2}$$

Kết hợp điều kiện : $-\frac{9}{2} \le x < \frac{7}{2}$; $x \ne 0$.

Câu III. 1) Điều kiện $x \ne \frac{\pi}{2}+k\pi$, $k \in Z$. Chia cả hai vế cho $\cos^2 x$ thì phương trình có dạng :

$$tg^3x - 2tg^2x = 3(1 - tg^2x + tgx)$$

$$\Leftrightarrow tg^3x + tg^2x - 3(tgx+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (tgx+1)(tg^2x - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} tgx = -1\\ tgx = \pm\sqrt{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4}+k\pi\\ x = \pm\frac{\pi}{3}+k\pi\end{array}\right. \quad (k \in Z)$$

2) Các hạng thức dương, áp dụng bất đẳng thức Cauchy :

$$M \ge \frac{3}{\sqrt[3]{(2+\cos 2A)(2+\cos 2B)(2-\cos 2C)}}$$

$$\ge \frac{9}{6+\cos 2A+\cos 2B-\cos 2C}$$

$$= \frac{9}{7-2[\cos C\cos(A-B)+\cos^2 C]}$$

$$= \frac{9}{7+\frac{1}{2}\cos^2(A-B) - 2\left[\cos C + \frac{1}{2}\cos(A-B)\right]^2}$$

$$\ge \frac{9}{7+\frac{1}{2}\cos^2(A-B)} \ge \frac{9}{7+\frac{1}{2}} = \frac{6}{5}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $A = B = 30^o$; $C = 120^o$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của M là $\frac{6}{5}$

Câu IV.

1) Phương trình họ mặt phẳng chứa (Δ) :

$$A(3x-2y+z-8) + B(2x-y+3) = 0$$

hay $(3A+2B)x - (2A+B)y + Az + 3B - 8A = 0$ (*)

Phương trình chính tắc của $(\mathscr{C})$:

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 81$$

Tâm cầu $I(1, 2, 3)$, bán kính cầu $R = 9$.

Để mặt phẳng (*) tiếp xúc với mặt cầu :

$$\frac{|3A+2B-4A-2B+3A+3B-8A|}{\sqrt{(3A+2B)^2+(2A+B)^2+A^2}} = 9.$$

$$\Leftrightarrow |3B - 6A| = 9\sqrt{14A^2+5B^2+16AB}$$

$$\Leftrightarrow B^2+4A^2-4AB = 126A^2+45B^2+144AB$$

$$\Leftrightarrow 122A^2+44B^2+148AB = 0$$

$$\Leftrightarrow 61A^2+22B^2+74AB = 0$$

Chọn $A = 1 \Rightarrow 22B^2+74B+61 = 0$

$$\Rightarrow B = \frac{-37 \pm 3\sqrt{3}}{22}$$

Vậy có hai mặt phẳng chứa (Δ) và tiếp xúc với mặt cầu $(\mathscr{C})$:

(P_1): $(8+6\sqrt{3})x + (7-3\sqrt{3})y - 22z + 27 + 9\sqrt{3} = 0$

(P_2): $(8-6\sqrt{3})x + (7+3\sqrt{3})y - 22z + 287 - 9\sqrt{3} = 0$

2) Từ (*), để mặt phẳng chứa (Δ) vuông góc với mặt phẳng (Q) :

$$5(3A+2B) - 2(2A+B) + 2A = 0$$

$$\Leftrightarrow 13A + 8B = 0 \Leftrightarrow A = 8, B = -13.$$

Vậy phương trình của hình chiếu của (Δ) lên (Q) :

$$\begin{cases}2x+3y-8z+103=0\\5x+2y+2z-7=0\end{cases}$$

Câu Va. Xét $F(x) = f(x) - \sin x$. Theo giả thiết

$F(x)$ liên tục trên $[0, \pi/2]$,

$F(0) = f(0) - \sin 0 = f(0) > 0$, (1)

Mặt khác $\int_0^{\pi/2}(f(x)-\sin x)dx < 0 \Rightarrow \int_0^{\pi/2}F(x)dx < 0$

$\Rightarrow \exists c \in [0, \pi/2]$ để $F(c) < 0$ (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow F(x) = 0$ có nghiệm trên $[0, c] \subset [0, \pi/2]$.

Câu Vb. Điều kiện $x > 1$.

Bất phương trình

$$\Leftrightarrow \sqrt{2+\ln x} - \sqrt{\ln x} < \ln x + \frac{3}{4}$$

Đặt $\ln x = t$, $t > 0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2+t} - \sqrt{t} < t + \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{2+t}+\sqrt{t}} < t + \frac{3}{4}$$

xét $f(t) = \frac{2}{\sqrt{2+t}+\sqrt{t}}$

và $g(t) = t + \frac{3}{4}$ với $t > 0$ thì $f(t)$ là hàm số nghịch biến, $g(t)$ là hàm số đồng biến.

Vì $f\left(\frac{1}{4}\right) = g\left(\frac{1}{4}\right)$ nên nghiệm của bất phương trình là $t > \frac{1}{4}$ hay $x > e^{1/4}$ ./.

LÊ NGỌC LĂNG

(Đại học Mỏ – Địa chất Hà Nội)

Nhìn ra thế giới

ĐỀ THI OLYMPIC TOÁN CỦA UCRAINA (3-1995)

Ngày thứ nhất

Bài 1. Một giám khảo và một thí sinh cùng tham gia một trò chơi. Họ thay phiên nhau lấy que diêm từ trong đống có 1995 que, mỗi người đến lượt mình chỉ được lấy 1 hoặc 2 que mà không thể lấy nhiều hơn số que đã lấy ở lượt trước. Ai lấy que diêm cuối cùng là thắng. Học sinh lấy diêm lượt đầu tiên. Hỏi ai có chiến lược thắng cuộc ?

Bài 2. Số lớn nhất các góc bằng nhau ở 4 mặt của hình tứ diện không đều có thể là bao nhiêu ?

Bài 3. Biết rằng các số $m^{1994} + n^{1994}$ và $m^{1995} + n^{1995}$ đều chia hết cho 1995, trong đó m và n là các số nguyên. Chứng minh rằng m và n đều chia hết cho 1995.

Bài 4. Hỏi có tồn tại đa thức

$f(x) = x^{1995} + a_1x^{1994} + ... + a_{1994}x + a_{1995}$.

sao cho với mọi x thuộc $[0; 3^{1995}]$ thì $|f(x)| \leq 1$?

Ngày thứ hai

Bài 5. Chứng minh rằng tồn tại không ít hơn 700 cặp số nguyên dương (m, n) thỏa mãn $[n\sqrt{2}] = [m\sqrt{3}]$ và $n \leq 1995$.

Bài 6. Hỏi có tồn tại hàm số $f(x)$ sao cho $f(f(x)) = -x$ với mọi số thực x và $f([a, b])$ chứa đoạn có các đầu mút $f(a)$, $f(b)$ với mọi số thực a, b ?

Bài 7. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất có thể được của tích xyz, trong đó các số thực x, y, z thỏa mãn các điều kiện $x + y + z = 4$ và $x^2 + y^2 + z^2 = 6$.

Bài 8. Một mặt cầu nội tiếp trong hình tứ diện $ABCD$ và các tiếp điểm của nó với các mặt BCD, ACD, ABD, ABC tương ứng là A_1, B_1, C_1, D_1. Chứng minh rằng nếu các đường thẳng AB_1 và BA_1 cắt nhau thì các đường thẳng CD_1 và DC_1 cũng cắt nhau./.

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

BÀI SỐ 22

Problem. Let $ABCD$ be a parallelogram. Let r be the radius of the circumcircle of the triangle ABC. Show that the distance from any point P inside $ABCD$ to the nearest vertex is not greater than r.

Solution. By symmetry we may assume that P is inside the triangle ABC. For, if P is not inside ABC, then P is inside the triangle CDA. Since CDA is congruent to ABC, the circumcircle of CDA also has the radius r. Hence we may replace ABC by CDA. Let O be the center of the circumcircle of ABC. Let M, N, H be the intersection points of AB, BC, CA with the perpendiculars from O, respectively. Then P lies in one of the 6 triangles OMA, OMB, ONB, ONC, OHA, OHC. Suppose that OMA contains P. If P lies on OA then $PA \leq OA = r$. If P does not lie on OA, then $PA < OA = r$ since the triangle APO has the largest angle at P ($\geq 90^o$). Similarly, we can show that the distance from P to one of the vertex A, B, C is not greater than r if P lies in one of the other right triangles.

Từ mới.

parallelogram	= hình bình hành
radius	= bán kính
distance	= khoảng cách
near	= gần (tính từ)
symmetry	= tính đối xứng
for	= thật vậy (nghĩa bóng)
congruent	= bằng nhau, tương đương
replace	= thay thế
center	= tâm
intersection	= giao, cắt (danh từ)
perpendicular	= đường vuông góc, đường thẳng góc
respectively	= tương ứng
contain	= chứa, gồm (động từ)
right triangle	= tam giác vuông

NGÔ VIỆT TRUNG

★ Trong "Tiếng Anh qua các bài toán" THVTT số 265 (7/1999) xin sửa lại như sau : thay từ **congruent** bởi từ **similar** (đồng dạng). Thành thật xin lỗi bạn đọc.

KỶ NIỆM CUỐI CÙNG VỚI ERDÖS

VŨ ĐÌNH HÒA

Đó là vào tháng 9/1994 khi các nhà toán học Balan mời tôi tham dự hội nghị lý thuyết graph (đồ thị) lần thứ hai của Balan. Lần nào Erdös (Eđôs) cũng tới dự. Tôi cũng đã gặp ông mấy lần ở Bielefeld khi ông tới dự Đại hội toán của các nhà toán học Đức và trong các hội nghị chuyên ngành khác.

Phải chăng có linh cảm là ông sẽ không còn sống lâu nữa nên các nhà toán học Balan và nước ngoài khi lần lượt tới chạm cốc với ông trong bữa tiệc đều nhất trí gọi ông là nhà toán học lớn nhất thế giới và chúc ông khỏe mạnh sống lâu.

Có đúng Erdös là nhà toán học lớn nhất thế giới hay không còn là một vấn đề chưa được nhất trí. Nhưng có thể nói ông là nhà toán học độc đáo: có mặt trong rất nhiều lĩnh vực toán học với những công trình có giá trị và ông viết rất nhiều. Thông thường trông ông như một ông già bé nhỏ cần chăm sóc. Vào nhà ăn, ông hay ngồi lại rất lâu bên cạnh bàn ăn và tỉ mẩn một mình với những vấn đề của ông. Trong hội nghị ông nói rất chậm rãi nhưng chắc chắn và bao giờ cũng ngắn gọn.

Vì ông rất giỏi về số học nên lần gặp này tôi có ý định thử tài của ông. Từ những ngày học lớp 6, lớp 7 năng khiếu toán, tôi có một vấn đề mở nho nhỏ về số học. Trong quá trình học đại học tôi đã đi vào toán rời rạc và không có thời gian để tâm tới số học. Bài toán số học đó còn bỏ dở, nhưng bản thân tôi luôn nghĩ rằng chắc vấn đề đó không thể đúng. Còn một bài toán nữa là một vấn đề của lý thuyết graph, trông nó rất đơn giản, nhưng không dễ chứng minh.

Vì cũng có quen biết tôi chút ít nên Erdös đi tới chào tôi và nói mấy câu hỏi thăm. Tính ông vẫn vậy, không khách sáo, không tự cao tự phụ vì có lẽ ông tự giác được bản chất của nhà toán học chân chính. Tranh thủ dịp may tôi trình bày ngay hai bài toán của mình, bởi lẽ nếu hội nghị lại bắt đầu, tôi không thể gặp nói với ông về chuyện riêng nữa. Erdös hiểu ngay vì sao tôi lại đi đến những giả thuyết như vậy. Thay vì nói đến những khả năng có thể chứng minh hay bác bỏ chúng, ông say sưa thuyết minh tại sao tôi đi đến hai giả thuyết này.

Rồi ông bảo: "Sáng mai tôi sẽ trả lời anh về hai giả thuyết này". Sáng hôm sau, khi tôi đang đi đến phòng hội nghị thì trông thấy Erdös. Ông chậm rãi đi tới chỗ tôi khiến tôi ngồi xuống đợi ông tới. "Anh bạn trẻ ạ" - ông bảo tôi - Tôi chưa chứng minh được hai giả thuyết này." Dừng một chút rồi ông nói tiếp, chậm rãi và chắc chắn như thói quen:"Nhưng tôi cho rằng anh có thể tìm phản ví dụ cho bài toán số học của mình. Tôi không tin là nó đúng". Im lặng chốc lát, như phải bắt buộc, ông nói tiếp: "Còn giả thuyết của anh về bài toán graph có vẻ rất hiển nhiên mà tôi lại không tìm được một chỗ dựa nào để chứng minh". Ông cất quyển sổ tay của mình vào túi và bảo:"Nếu như anh đồng ý thì tôi sẽ trình bày trong hội nghị về giả thuyết của anh." Và Erdös trình bày giả thuyết của tôi trong ngày cuối cùng của hội nghị.

Mấy tháng sau, tôi nhận được một giấy mời của Hội toán học Balan. Giấy mời đi Seminar (hội thảo) ở Warzawa 3 tuần. Đáng tiếc là vào thời gian đó tôi bận tập trung viết luận án tiến sĩ nên không đi được. Và tôi nghe tin Erdös mất trong những ngày hội thảo. Tôi bàng hoàng tiếc cơ hội duy nhất trong đời được sống và làm việc một thời gian dài như vậy cạnh Erdös.

Erdös đã mất và hai vấn đề của tôi cũng đã được giải quyết. Nhân dịp nhắc lại kỷ niệm cuối cùng với ông, tôi muốn giới thiệu hai bài toán trên cho các bạn trẻ yêu toán được biết.

Bài toán 1: Nếu p_{n+1} và p_n là hai số nguyên tố liên tiếp thỏa mãn $p_{n+1} \mid (p_n!-1)$ thì $p_{n+1}-p_n = 2$?

Bài toán 2: Một cách ngồi quanh bàn tròn được gọi là *dễ chịu* nếu bất kì hai người ngồi cạnh nhau quen biết nhau. Có n người với tính chất họ không thể ngồi một cách dễ chịu quanh bàn tròn, nhưng nếu hai người bất kì không quen nhau mà làm quen với nhau thì họ có thể ngồi dễ chịu quanh bàn tròn. Phải chăng sau khi xếp một số người nhiều nhất có thể ngồi dễ chịu quanh bàn tròn thì những người còn lại đôi một quen biết nhau ?

TÌM HIỂU SÂU THÊM TOÁN HỌC SƠ CẤP

ĐA THỨC HỆ SỐ NGUYÊN

NGUYỄN ANH DŨNG
(Thanh Hóa)

Hệ số, giá trị và nghiệm số của đa thức là những vấn đề chứa nhiều nội dung phong phú, hấp dẫn. Đa thức hệ số nguyên kết hợp được các tính chất chung của đa thức và cái riêng của tập hợp số nguyên nên các bài toán loại này có nhiều nét độc đáo.

I. Một số tính chất của đa thức hệ số nguyên

Xét đa thức có mọi hệ số nguyên

$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n$ với $a_0 \neq 0$ là hệ số đầu của nó.

1. Nếu $P(x)$ có nghiệm hữu tỉ $x = p/q$ mà $(p, q) = 1$ thì là p ước của a_n và q là ước của a_0. Đặc biệt nếu $a_0 = \pm 1$ thì nghiệm hữu tỉ đó là nguyên.

2. Nếu $P(x)$ có nghiệm nguyên $x = a$ thì $P(x) = (x-a).Q(x)$ với $Q(x)$ có hệ số nguyên.

3. Nếu các số a, b nguyên và $a > b$ thì $P(a) - P(b)$ chia hết cho $a - b$.

4. Nếu a, b, c là các số nguyên (hoặc hữu tỉ) $\sqrt{c}$ là số vô tỉ thì $P(a \pm b\sqrt{c})$ có dạng $P(a + b\sqrt{c}) = k + m\sqrt{c}$ và $P(a - b\sqrt{c}) = k - m\sqrt{c}$, trong đó k, m là các số nguyên (hoặc hữu tỉ). Đặc biệt nếu $P(x)$ có nghiệm $x = a + b\sqrt{c}$ thì nó cũng có cả nghiệm $x = a - b\sqrt{c}$.

Hướng dẫn chứng minh các tính chất :

(2) Do $P(x) = (x - a)Q(x) + r$ và $P(a) = 0$.

(3) Áp dụng $a^n - b^n$ chia hết cho $a - b$ với mọi $n \in N$

(4) Chứng minh qui nạp : nếu $(a + b\sqrt{c})^n = d + e\sqrt{c}$ thì $(a - b\sqrt{c})^n = d - e\sqrt{c}$ trong đó a, b, d, e là các số nguyên (hoặc hữu tỉ), $n \in N^*$. Sau đó thay vào $P(x)$.

II. Các bài toán.

Ta hãy vận dụng các tính chất trên để giải một số bài toán về đa thức hệ số nguyên.

Bài toán 1. Cho đa thức hệ số nguyên $P(x)$, chứng minh rằng không tồn tại 3 số nguyên phân biệt a, b, c sao cho : $P(a) = b$, $P(b) = c$, $P(c) = a$.

Giải. Giả sử có các số nguyên phân biệt a, b, c sao cho $P(a) = b$, $P(b) = c$, $P(c) = a$ thì $P(a) - P(b) = b-c$ chia hết cho $|a-b| \Rightarrow |b-c| \geq |a-b|$. Tương tự có $|a-b| \geq |c-a|$, $|c-a| \geq |b-c|$.

Từ đó có $|a-b| = |b-c| = |c-a|$ nhưng $|a-b| = |a-c+c-b| \leq |a-c| + |c-b| \Rightarrow$ mâu thuẫn.

Bài toán 2. Tìm đa thức hệ số nguyên bậc nhỏ nhất có nghiệm là $1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}$. Hãy chỉ ra các nghiệm còn lại của đa thức đó.

Giải. Từ $x = 1+\sqrt{2} + \sqrt{3}$ ta có $x-1-\sqrt{2} = \sqrt{3}$. Bình phương 2 vế được $(x-1)^2 - 2\sqrt{2}(x-1) + 2 = 3$ hay $x^2 - 2x = 2\sqrt{2}(x-1)$. Lại bình phương 2 vế :

$$x^4 - 4x^3 + 4x^2 = 8(x^2 - 2x + 1).$$

$$\Rightarrow x^4 - 4x^3 - 4x^2 + 16x - 8 = 0.$$

Hiển nhiên đa thức hệ số nguyên

$$P(x) = x^4 - 4x^3 - 4x^2 + 16x - 8$$

có nghiệm là $1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}$.

Dễ thấy rằng nếu n là số tự nhiên bất kì ta có $(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})^n = a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6}$ với a, b, c, d nguyên. Khi đó ta cũng có :

$(1 - \sqrt{2} + \sqrt{3})^n = a - b\sqrt{2} + c\sqrt{3} - d\sqrt{6}$,

$(1 + \sqrt{2} - \sqrt{3})^n = a + b\sqrt{2} - c\sqrt{3} - d\sqrt{6}$

và $(1 - \sqrt{2} - \sqrt{3})^n = a - b\sqrt{2} - c\sqrt{3} + d\sqrt{6}$.

Từ đó vì $P(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}) = 0$ nên $P(1 - \sqrt{2} + \sqrt{3}) = 0$, $P(1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}) = 0$ và $P(1 - \sqrt{2} - \sqrt{3}) = 0$ nghĩa là $P(x)$ có 4 nghiệm. Vì mọi đa thức hệ số nguyên có nghiệm $1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}$ thì nó có cả 3 nghiệm nữa là $1-\sqrt{2}+\sqrt{3}$, $1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}$ và $1 - \sqrt{2} - \sqrt{3}$ nên bậc thấp nhất của nó là 4. Vậy $P(x)$ là đa thức phải tìm.

Bài toán 3. Chứng minh rằng nếu a_1, a_2, ..., a_n là các số nguyên phân biệt thì đa thức $P(x) = (x-a_1)(x-a_2)...(x-a_n) - 1$ không thể phân tích được thành tích của hai đa thức hệ số nguyên.

Giải. Hiển nhiên hệ số đầu của $P(x)$ bằng 1. Giả sử phân tích được $P(x) = h(x).g(x)$ trong đó $h(x)$, $g(x)$ là các đa thức hệ số nguyên có bậc nhỏ hơn n. Ta có $P(a_i) = h(a_i).g(a_i) = -1$ với $i = 1, 2, ... n$.

Vì $h(a_i)$, $g(a_i)$ là các số nguyên nên điều đó chỉ có thể xảy ra khi trong hai số $h(a_i)$ và $g(a_i)$ có một số bằng 1 và số kia bằng -1, lúc đó $h(a_i) + g(a_i) = 0$. Như vậy đa thức $h(x) + g(x)$ có bậc nhỏ hơn n lại có n nghiệm là a_1, a_2..., a_n nên nó phải đồng nhất bằng 0 hay $h(x) = -g(x)$. Từ đó $P(x) = -[g(x)]^2$, nghĩa là hệ số đầu của $P(x)$ là số âm, mâu thuẫn. Đpcm.

Để xét giá trị của biểu thức nào đó là số nguyên hay số hữu tỉ, có thể biểu diễn nó qua các đa thức hệ số nguyên.

Bài toán 4. Chứng minh rằng với a là số hữu tỉ nếu $\cos(a\pi)$ là số hữu tỉ thì nó chỉ có thể nhận một trong các giá trị sau : 0, $\pm 1/2$, ± 1.

Giải. Trước hết ta nhận xét rằng nếu đặt $x = 2\cos t$ thì với mỗi số tự nhiên n ta có $2\cos nt = P_n(x)$ là một đa thức bậc n của x có hệ số đầu bằng 1.

Thật vậy, ta có $P_0(x) = 2$, $P_1(x) = x$, $P_2(x) = 2\cos 2t = 4\cos^2 t - 2 = x^2 - 2$. Nhờ công thức $2\cos nt = -2\cos(n-2)t + (2\cos t).2\cos(n-1)t = -P_{n-2}(x) + xP_{n-1}(x)$ theo nguyên lí quy nạp ta có $P_n(x)$ là đa thức bậc n có hệ số đầu bằng 1 với mọi số tự nhiên n.

Trở lại bài toán. Giả sử $a = m/n$ là số hữu tỉ trong đó $m, n \in N$, $n > 0$ và $(m, n) = 1$, ta có $\cos(m\pi) = \pm 1$. Theo nhận xét trên $2\cos nt = P_n(2\cos t) \Rightarrow 2\cos(m\pi) = P_n(2\cos a\pi)$, trong đó $P_n(x)$ là đa thức bậc n có hệ số đầu bằng 1 nên $x_0 = 2\cos(a\pi)$ là nghiệm của đa thức hệ số nguyên $P_n(x) - 2\cos(m\pi)$. Vì $|2\cos(a\pi)| \le 2$ nên từ giả thiết $2\cos(a\pi)$ là số hữu tỉ thì nó phải là số nguyên, theo tính chất (1) $\Rightarrow \cos(a\pi)$ chỉ có thể nhận một trong các giá trị sau $0, \pm 1/2, \pm 1$. Đpcm.

Bài toán 5. Giả sử x, y là các số thực khác nhau sao cho biểu thức $\dfrac{x^n - y^n}{x - y}$ là số nguyên khi n lấy giá trị 4số tự nhiên liên tiếp nào đó. Chứng minh rằng $\dfrac{(x^n - y^n)}{(x - y)}$ nhận giá trị nguyên với mọi số tự nhiên n.

Giải. Giả sử $t_n = \dfrac{x^n - y^n}{x - y}$. Dễ dàng thấy rằng $t_0 = 0$, $t_1 = 1$ và $t_{n+2} - (x+y)t_{n+1} + (xy)t_n = 0$.

Đặt $b = -(x+y)$ và $c = xy$ ta được $t_{n+2} + bt_{n+1} + ct_n = 0$ **(1)**. Ta sẽ chứng minh rằng b, c là các số nguyên. Thật vậy, giả sử t_n nguyên với 4 giá trị liên tiếp của n là m, $m+1$, $m+2$, $m+3$. Từ $c^n = (xy)^n = t_{n+1}^2 - t_n.t_{n+2}$ suy ra c^n và c^{m+1} là các số nguyên nên $c = \dfrac{c^{m+1}}{c^m}$ là số hữu tỉ, kết hợp với c^m là số nguyên ta có c là số nguyên.

Bây giờ ta chứng minh b là số nguyên. Thật vậy ta có $t_1 = 1$ và $t_2 = x+y = -b$ và từ (1) suy ra $t_{n+1} = -bt_n - ct_{n-1}$ **(2)** nên theo quy nạp ta dễ dàng có $t_{n+1} = P_n(b)$ trong đó $P_n(x)$ là một đa thức hệ số nguyên bậc n có hệ số đầu bằng ± 1 với mọi n. Mặt khác dễ kiểm tra rằng

$b = \dfrac{t_m t_{m+3} - t_{m+1}t_{m+2}}{c^m}$ nên b là số hữu tỉ. Như vậy b là nghiệm hữu tỉ của đa thức $P_m(x) - t_{m+1}$. Vì theo giả thiết t_{m+1} là số nguyên và $P_m(x)$ là đa thức hệ số nguyên với hệ số đầu bằng ± 1 nên theo tính chất (1) b phải là một số nguyên.

Bây giờ từ **(2)** theo nguyên lí quy nạp ta có ngay t_n là số nguyên với mọi số tự nhiên n. Đpcm.

Việc sử dụng tính chất của đa thức hệ số nguyên để chứng minh rằng nếu $2\cos(a\pi)$ là số hữu tỉ thì nó là số nguyên (BT4) và chứng minh b, c nguyên (BT5) thật độc đáo và thú vị.

Bạn đọc sẽ tìm thấy nhiều điều lí thú tương tự khi giải các bài tập sau. Hi vọng rằng các bạn sẽ tìm ra nhiều điều bổ ích nữa của các đa thức hệ số nguyên.

III. Các bài tập

1. Chứng minh rằng nếu đa thức hệ số nguyên $P(x)$ nhận giá trị lẻ khi $x = a$ và $x = b$ với a, b là 2 số nguyên khác tính chẵn lẻ thì $P(x)$ không có nghiệm nguyên.

2. Giả sử $P(x)$ là đa thức bậc 4 hệ số nguyên. Biết rằng $P(x)$ chia hết cho 7 với mọi x nguyên, chứng minh rằng tất cả các hệ số của đa thức đều chia hết cho 7.

3. Giả sử $P(x)$ là đa thức hệ số nguyên, biết rằng $P(x)$ không chia hết cho 3 với 3 giá trị nguyên liên tiếp nào đó của x. Chứng minh rằng $P(x)$ không có nghiệm nguyên.

4. Giả sử $P(x)$ là đa thức hệ số nguyên, chứng minh rằng nếu có 4 giá trị nguyên phân biệt a, b, c, d sao cho $P(a) = P(b) = P(c) = P(d) = 1$ thì phương trình $P(x) = 1998$ không có nghiệm nguyên.

5. Giả sử $P(x)$ là đa thức có hệ số nguyên không âm. Chứng minh rằng nếu với mọi số tự nhiên n ta có $[P(n)]^{1/k}$ là các số nguyên thì tồn tại một đa thức hệ số nguyên $Q(x)$ sao cho $P(x) = [Q(x)]^{1/k}$ trong đó k là một số tự nhiên cho trước.

6. Đa thức $P(x)$ gọi là "*tốt*" nếu mỗi hệ số của nó bằng một trong các giá trị 0, 1, 2, 3. Đối với một số tự nhiên n đã cho hãy tìm số các đa thức *tốt* thỏa mãn điều kiện $P(2) = n$.

7. Chứng minh rằng nếu a là một số nguyên không chia hết cho 5 thì đa thức $P(x) = x^5 - x + a$ không thể phân tích được thành tích của 2 đa thức hệ số nguyên.

8. Giả sử $a_1, a_2, \ldots a_n$ là các số nguyên phân biệt, chứng minh rằng đa thức $P(x) = (x-a_1)^2(x-a_2)^2\ldots(x-a_n)^2+1$ không thể phân tích được thành tích hai đa thức hệ số nguyên.

9. Tìm đa thức hệ số nguyên với bậc nhỏ nhất có nghiệm là $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$. Chứng minh rằng không thể phân tích đa thức thu được thành tích của 2 đa thức hệ số nguyên.

Ghi chú. Khi nói phân tích một đa thức thành tích của 2 đa thức nào đó thì các đa thức nhân tử này có bậc khác 0./.

DẠY CÁC BÀI TOÁN THEO TRÌNH TỰ NÀO ?

LÊ THỐNG NHẤT
(Cựu SV Khoa Toán, ĐHSP Vinh)

Từ khi còn là cậu học sinh chuyên toán, rồi giảng dạy ở khối chuyên và khoa Toán ĐHSP Vinh, đã bao lần tôi suy tư từ những bài toán nhỏ. Sự suy tư của người thầy giúp mình có thêm bài toán mới, có thêm những lời phân tích hay trên bục giảng. Sự suy tư của cậu học trò cho mình những sáng tạo nho nhỏ, là những ngọn lửa âm ỉ thắp sáng lòng say mê Toán học. Ở diễn đàn này, tôi muốn tâm sự với các bạn một ý mà người thầy và người trò đều nên thử thao tác.

1. Bài toán này từ đâu ra ?

Gặp một bài toán hay, nhiều khi ta tự hỏi : Tác giả của nó làm sao mà nghĩ ra bài toán này ? Chỉ xin dự đoán một con đường nào đó, các bạn nhé.

Xét ΔABC với các kí hiệu quen biết : $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$; các đường trung tuyến có độ dài m_a, m_b, m_c, các đường phân giác trong có độ dài l_a, l_b, l_c.

<u>*Bài toán xuất phát 1*</u>. Trong mọi tam giác ABC ta có $m_a^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2)$

Kết quả này là quen biết với tất cả các bạn ! Ta thử "suy tư" thêm xem sao. Sẽ có 2 hệ thức tương tự cho m_b^2 và m_c^2. Từ đó có ngay :

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2).$$

Lại viết : $m_a^2 = \frac{1}{4}[b^2+c^2+(b^2+c^2-a^2)]$

$$= \frac{1}{4}[b^2+c^2+2bc\cos A] = \frac{1}{4}[(b-c)^2 + 4bc\cos^2\frac{A}{2}]$$

$$\geq bc\cos^2\frac{A}{2}.$$

Do đó ta có bài toán :

Bài toán 1.1. *Trong mọi tam giác ABC ta có* $m_a \geq \sqrt{bc}\cos\frac{A}{2}$.

Tương tự, có bất đẳng thức cho m_b, m_c và dẫn đến :

Bài toán 1.2. *Trong mọi tam giác ABC ta có*

$$m_am_bm_c \geq abc.\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

hay là :

$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} \leq \frac{m_a.m_b.m_c}{abc}$$

Lại viết :

$$m_a^2 = \frac{1}{4}[2b^2 + 2c^2 - a^2] \geq \frac{1}{4}[(b+c)^2 - a^2]$$

$$= \frac{1}{4}(b+c+a)(b+c-a) = p(p-a).$$

Do đó ta được :

Bài toán 1.3. *Trong mọi tam giác ABC ta có :*

$$m_a \geq \sqrt{p(p-a)}$$

Tương tự sẽ có bất đẳng thức cho m_b, m_c và dẫn đến :

Bài toán 1.4. *Trong mọi tam giác ABC ta có*

1) $m_a+m_b+m_c \geq \sqrt{p}\,(\sqrt{p-a} + \sqrt{p-b} + \sqrt{p-c})$

2) $m_a.m_b.m_c \geq p.S.$

Kinh nghiệm giảng dạy cho thấy rằng : *Sự sắp xếp theo một trình tự lôgic các bài toán sẽ làm cho thầy và trò đỡ "vất vả" hơn trong việc dạy và học ; trình tự đó nhiều khi là từ sự trả lời cho câu hỏi "Bài toán này từ đâu ra ?".*

2. Liệu "bắt chước" được không?

Xong một chuyện gì đó, nhiều khi ta tự hỏi : "Chuyện này kết thúc rồi sao ? ". Nhiều khi : sự kết thúc của chuyện này lại là mở đầu của chuyện khác ! Xong chuyện "trung tuyến" có thể "bắt chước" để có một "cái gì đó" cho một yếu tố khác của tam giác, chẳng hạn có thể tìm hiểu về "phân giác trong".

Hãy từ <u>*bài toán xuất phát 2*</u>: Trong mọi tam giác ABC ta có : $l_a = \dfrac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}$

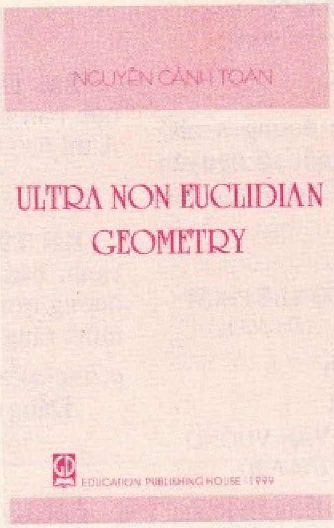
Vì $b+c \geq 2\sqrt{bc}$ nên suy ra

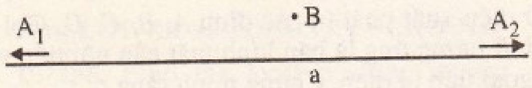
Bài toán 2.1. *Trong mọi tam giác ABC ta có :* $l_a \leq \sqrt{bc}\cos\frac{A}{2}$.

Từ đó dẫn đến :

GIỚI THIỆU SÁCH MỚI

Nhà xuất bản Giáo dục vừa xuất bản sách "Ultra non Euclidian Geometry" của giáo sư Nguyễn Cảnh Toàn. Sách dày 270 trang, viết bằng tiếng Anh để có thể phát hành cả trong và ngoài nước, giới thiệu "Hình học siêu phi Ơclit" là phát minh của tác giả. Sau lời giới thiệu thân thế và sự nghiệp tác giả của Nhà xuất bản Giáo dục, lời nói đầu giới thiệu qua về quá trình ra đời và phát triển của hình học siêu phi Ơclit. Tiếp đó chương I trình bày cấu trúc tổng quát nhất của một không gian siêu phi Ơclit. Chúng ta đều biết rằng hai đường thẳng song song không cắt nhau hay nói một cách hình ảnh, chúng cắt nhau tại một điểm xa vô tận (XVT). Trực giác cho thấy hình như mỗi đường thẳng a có hai điểm xa vô tận A_1, A_2 khác nhau ở hai phía (hình vẽ). Nhưng, nếu thế thì qua một điểm





B ở ngoài a sẽ có hai đường khác nhau BA_1 và BA_2 cùng song song với a. Điều đó trái với tiên đề Ơclit. Vậy trong hình học Ơclit, phải coi A_1 và A_2 là trùng nhau, nghĩa là mỗi đường thẳng chỉ có một điểm XVT. Do đó quỹ tích các điểm XVT của không gian phải coi là một mặt phẳng vì nó cắt mọi đường thẳng chỉ ở một điểm là điểm XVT của đường đó. Trong hình học Lôbasepki, lại phải coi A_2 khác A_1 cho nên quỹ tích các điểm XVT phải coi là một mặt bậc hai; người ta gọi nó là *"cái tuyệt đối"* của không gian ; trong hình học Rioman không có đường thẳng song song nên *cái tuyệt đối* chỉ gồm toàn điểm ảo (giống như một phương trình bậc hai với biệt số âm có hai nghiệm đều ảo). Khái niệm "cái tuyệt đối" ra đời năm 1872, do Felix Klein (người Đức) đề xướng. Mỗi điểm của nó đều XVT một cách tuyệt đối (nghĩa là XVT so với bất cứ điểm nào khác). Nó là cố định, là *"cái thế giới XVT"* của mọi điểm. Cho đến 1963, chưa ai quan niệm được rằng có thể có *"cái thế giới XVT"* di động. Nguyễn Cảnh Toàn là người đầu tiên xây dựng nên một không gian có *cái tuyệt đối di động* trong luận án tiến sĩ, bảo vệ năm 1963. Đến năm 1969, ông đã khái quát hóa từ không gian cụ thể này thành một lí thuyết tổng quát, lúc đầu gọi là lí thuyết *các không gian có cái tuyệt đối di động* và sau đổi tên là *hình học siêu phi Ơclit* bởi lẽ trong hình học phi Ơclit *cái tuyệt đối* là cố định.

Quyển sách chia ra làm bảy chương để trình bày hình học siêu phi Ơclit và ứng dụng của nó vào việc nghiên cứu lí thuyết đối hợp là lí thuyết về các quan hệ đại số đối xứng giữa nhiều biến số.

Xin trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc.

THVTT

☛**Bài toán 2.2.** *Trong mọi tam giác ABC ta có :*

$$l_al_bl_c \le abc\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

hay là : $$\frac{l_al_bl_c}{abc} \le \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

Từ $\cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

suy ra $\cos\dfrac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{p(p-a)}{bc}}$

Vậy : $l_a = \dfrac{2\sqrt{bc}}{b+c}\sqrt{p(p-a)} \le \sqrt{p(p-a)}$. Ta được :

Bài toán 2.3. *Trong mọi tam giác ABC ta có :*

$l_a \le \sqrt{p(p-a)}$.

Lại "bắt chước" ta dẫn đến :

Bài toán 2.4. *Trong mọi tam giác ABC ta có :*

1) $l_a + l_b + l_c \le \sqrt{3}\,p$.

2) $l_a \,.\, l_b \,.\, l_c \le p.S$.

Kinh nghiệm giảng dạy cho thấy : *Nếu đặt hai hệ thống bài toán có cùng một kiểu phát triển tương tự nhau thì việc giảng dạy hệ thống bài toán này sẽ giúp cho học sinh tự sáng tạo và giải quyết hệ thống bài toán kia.*

Một điều xin để ngỏ lại : *Phối hợp hai hệ thống bài toán trên ta được những kết quả thú vị gì ?*

Mong các bạn trao đổi thêm.

ĐỀ RA KÌ NÀY

CÁC LỚP THCS

Bài T1/268. Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất thỏa mãn điều kiện : với mỗi số nguyên dương $m < 1999$ đều tồn tại số nguyên k sao cho $\frac{m}{1999} < \frac{k}{n} < \frac{m+1}{2000}$

NGÔ THẾ PHIỆT
(Đà Nẵng)

Bài T2/268. Giải phương trình
$$x^5 - 15x^3 + 45x - 27 = 0$$

TRẦN VĂN VUÔNG
(Hà Nội)

Bài T3/268. Chứng minh bất đẳng thức sau với n là số nguyên dương :
$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \dots + \frac{n}{3^n} < \frac{3}{4}$$

TÔ VĂN QUANG
(Hà Tĩnh)

Bài T4/268. Cho hai tam giác đồng dạng ABC và $A'B'C'$ (các đỉnh mỗi tam giác đều viết ngược chiều kim đồng hồ). Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng AA', BB', CC'. Chứng minh rằng $\Delta A_1B_1C_1$ đồng dạng với ΔABC.

NGUYỄN HỐI
(Ninh Bình)

Bài T5/268. Dùng 3 hình tròn đường kính d có thể phủ kín hình vuông có cạnh bằng 1 được không, khi :

a) $d = 1$?

b) $d = 1,04$?

VÕ KIM HUỆ
(Cần Thơ)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/268. Dãy số (a_n) $(n = 0, 1, 2, ...)$ được xác định bởi :

$a_o = a, \quad a_1 = b,$

$a_{n+2} = da_{n+1} - a_n$ với mọi $n = 0, 1, 2, ...$

trong đó a, b là hai số nguyên khác không, d là số thực. Tìm mọi giá trị của d để a_n là số nguyên với mọi $n = 0, 1, 2, ...$

ĐẶNG HÙNG THẮNG
(Hà Nội)

Bài T7/268. Tìm giới hạn của $\frac{S_n}{n^2}$ khi $n \to \infty$, trong đó $S_n = \sum_{k=1}^{n} k \cos\frac{\pi}{k}$

NGUYỄN XUÂN HUỲNH
(Khánh Hòa)

Bài T8/268. Hãy tìm tất cả các tập **A** gồm hữu hạn số thực có tính chất sau : nếu x thuộc **A** thì $f(x) = x^3 - 3|x| + 4$ cũng thuộc **A**.

PHẠM NGỌC QUANG
(Thanh Hóa)

Bài T9/268. Gọi a, b, c, r, R lần lượt là ba cạnh, bán kính đường tròn nội tiếp, bán kính đường tròn ngoại tiếp của một tam giác. Chứng minh rằng :
$$a(b+c-a)^2+b(c+a-b)^2+c(a+b-c)^2 \le 6\sqrt{3}\,R^2(2R-r)$$
Đẳng thức xảy ra khi nào ?

ĐỖ KIM SƠN
(Tiền Giang)

Bài 10/268. Cho tứ diện $ABCD$ với $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $DA = a'$, $DB = b'$, $DC = c'$. Gọi h_a, h_b, h_c, h_d lần lượt là các đường cao của tứ diện xuất phát từ các đỉnh A, B, C, D. Gọi r và R tương ứng là bán kính mặt cầu nội tiếp và ngoại tiếp tứ diện. Chứng minh rằng :
$$\frac{R}{r} \ge \frac{a+b+c+a'+b'+c'}{\sqrt{h_ah_b+h_bh_c+h_ch_a+h_dh_a+h_dh_b+h_dh_c}}$$
Đẳng thức xảy ra khi nào ?

VIÊN NGỌC QUANG
(Hà Nội)

CÁC ĐỀ VẬT LÍ

Bài L1/268. Trên dốc nghiêng 30^o, từ A thả cho viên bi thứ nhất lăn xuống dốc. Hệ số ma sát giữa viên bi thứ nhất và mặt dốc là $k=0,02$. Sau đó 1 giây, từ A bắn viên bi thứ hai bay theo phương nằm ngang với vận tốc v(m/s). Xác định v để viên bi thứ hai rơi trúng vào viên bi thứ nhất ? Xác định vị trí điểm va chạm của hai viên bi.

PHẠM HÙNG QUYẾT
(Hà Nội)

Bài L2/268. Dùng một ắc quy lần lượt thắp sáng 2 bóng đèn $Đ_1$, $Đ_2$ có cùng công suất định mức. Nếu dùng đèn $Đ_1$ công suất của nguồn là $P_1 = 60$W. Nếu dùng đèn $Đ_2$ công suất của nguồn là $P_2 = 90$W. Biết rằng trong cả 2 trường hợp đèn sáng bình thường.

1. Tìm công suất định mức của mỗi bóng đèn.

2. Xác định công suất lớn nhất mà ắc quy có thể cung cấp cho mạch ngoài.

TRẦN MẠNH HÙNG
(Nghệ An)

Nhà giáo nhân dân Nguyễn Thúc Hào nguyên là GV khoa Toán và Hiệu trưởng Trường ĐHSP Vinh từ ngày thành lập trường. Xin trân trọng giới thiệu hai bài thơ họa lại bài thơ của thầy Văn Như Cương mừng thọ thầy Nguyễn Thúc Hào dịp 70 tuổi (1982) trong đó hai câu 3, 4 là : "Tính toán một đời hai tay trắng, Chắt chiu hai tốt một lòng son".

MỪNG THỌ THẦY 70 TUỔI

Một tấm gương trong giữ vẹn tròn
Xá bao công lội suối trèo non
Tay dù trắng, đẹp đời trong trắng
Lòng vẫn son, bền chí sắt son
Từng trải nắng mưa lo nghiệp lớn
Giờ vui mây nước mảnh tình con
Đời còn sương bụi bao mờ tỏ
Xin hãy long lanh ánh nguyệt tròn

PHAN ĐÌNH DIỆU

TỰ HỌA

Ngậm ngùi tuổi đã bảy mươi tròn
Trả được bao nhiêu nợ nước non
Tính toán không từ nghề bạc phận
Trồng người chẳng đoái nghiệp vàng son
Dù chưa cống hiến gì to tát
Cũng có góp phần chút cỏn con
Thầy cũ trò xưa mừng gặp mặt
Ấm lòng đón tuổi bảy mươi tròn.

NGUYỄN THÚC HÀO

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/268. Find the least positive integer n satisfying the following condition : for every positive integer $m < 1999$, there exists an integer k such that

$$\frac{m}{1999} < \frac{k}{n} < \frac{m+1}{2000}$$

T2/268. Solve the equation

$$x^5 - 15x^3 + 45x - 27 = 0.$$

T3/268. Prove the following inequality for every positive integer n :

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \ldots + \frac{n}{3^n} < \frac{3}{4}$$

T4/268. Let be given two similar triangles ABC and $A'B'C'$ (both written in anticlockwise manner). Let A_1, B_1, C_1 be respectively the midpoints of the segments AA', BB', CC'. Prove that the triangles $A_1B_1C_1$ and ABC are similar.

T5/268. Can we cover a square with side 1 by three circles with diameter d when

a) $d = 1$?

b) $d = 1{,}04$?

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/268. The sequence of numbers (a_n) ($n = 0, 1, 2,\ldots$) is defined by :

$a_0 = a$, $a_1 = b$,

$a_{n+2} = da_{n+1} - a_n$ for every $n = 0, 1, 2, \ldots$

where a, b are integers distinct from 0 and d is a real number. Find all values of d such that a_n is an integer for all $n = 0, 1, 2, \ldots$

T7/268. Find the limit of $\frac{S_n}{n^2}$ when n tends to ∞, where $S_n = \sum_{k=1}^{n} k\cos\frac{\pi}{k}$

T8/268. Find all finite sets A of real numbers such that if $x \in A$ then $f(x) = x^3 - 3|x| + 4 \in A$.

T9/268. Let a, b, c, r, R be respectively the three sides, the inradius and the circumradius of a triangle. Prove that

$$a(b+c-a)^2+b(c+a-b)^2+c(a+b-c)^2 \le 6\sqrt{3}R^2(2R-r)$$

When does equality occur ?

T10/268. Let $ABCD$ be a tetrahedron with $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $DA = a'$, $DB = b'$, $DC = c'$, and let h_a, h_b, h_c, h_d be its altitudes issued respectively from A, B, C, D. Denote the radii of the inscribed and the circumscribed spheres of $ABCD$ respectively by r and R. Prove that

$$\frac{R}{r} \ge \frac{a+b+c+a'+b'+c'}{\sqrt{h_ah_b+h_bh_c+h_ch_a+h_dh_a+h_dh_b+h_dh_c}}$$

When does equality occur ?

Bài T1/264. *Tìm dãy số tự nhiên liên tiếp nhiều số hạng nhất sao cho mỗi số hạng trong dãy là tổng của 2 số nguyên tố.*

Lời giải. (của *Nguyễn Hoa Cương*, 9^{14}, THCS Thái Nguyên, Nha Trang, Khánh Hòa).

Vì mỗi số hạng của dãy là tổng của 2 số nguyên tố nên mỗi số lẻ trong dãy là tổng của 2 và một số nguyên tố lẻ.

Giả sử dãy các số lẻ trong dãy số tự nhiên này là $x_1 = 2+p$, $x_2 = 2+p+2$, $x_3 = 2+p+4$ v.v... và p, $p+2$, $p+4$ cũng là những số nguyên tố lẻ liên tiếp. Vậy trong 3 số đó phải có một số chia hết cho 3. Suy ra $p=3$. Từ đó có $p+2 = 5$, $p+4 = 7$, $p+6 = 9$ (không phải số nguyên tố).

Vậy dãy số lẻ trong dãy số tự nhiên này chỉ có nhiều nhất 3 số hạng $x_1 = 2+3 = 5$, $x_2 = 2+p+2 = 7$ và $x_3 = 2+p+4 = 9$.

Thêm nữa ta cũng có $4 = 2+2$, $6 = 3+3$, $8=3+5$ và $10 = 3+7$.

Từ đó ta thấy dãy số trên có nhiều số hạng hơn dãy số thỏa mãn đề bài mà dãy số lẻ chỉ gồm 2 số lẻ liên tiếp.

Vậy dãy số tự nhiên liên tiếp có nhiều số hạng nhất thỏa mãn bài toán là : 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

Nhận xét. 1. Rất nhiều bạn có lời giải đúng.

2. Các bạn sau đây có lời giải tốt :

Sơn La : *Chu Tiến Dũng*, 9T, THCS Chu Văn An, Mai Sơn; **Thái Nguyên:** *Nguyễn Trung Kiên*, 9A1, THCS Chu Văn An; **Phú Thọ:** *Vương Quốc Tuấn*, 9B, THCS Việt Trì; **Vĩnh Phúc:** *Hoàng Xuân Quang*, 9A, THCS Vĩnh Tường;**Hà Nội:** *Nguyễn Đức Minh*, 7H, THCS Trưng Vương, *Bùi Đức Hiệp*, 9I, Mari Curie; **Hải Phòng:** *Vũ Ngọc Minh*, *Phạm Đức Hiệp*, 9T, Chu Văn An, *Bùi Hải Nam*, 9B, NK Trần Phú ; **Hải Dương:** *Phạm Thành Trung*, 8A; *Vũ Thành Long*, 9A, THCS Nguyễn Trãi, Nam Sách; **Nghệ An:** *Nguyễn Thành Vinh*, 8B, *Nguyễn Khánh Toàn*, 9C, THCS Đặng Thai Mai, Vinh; *Quan Minh Vương*, 8B, PTCS Sông Hiếu, Thái Hòa, Nghĩa Đàn; **Đắc Lắc:** *Trịnh Thi Phúc*, 8B, Buôn Ma Thuột; **Tây Ninh:** *Đào Duy Bình*, 8A, THCS Suối Đá, Dương Minh Châu.

TỐ NGUYÊN

Bài T2/264. *Giải phương trình :*

$$\frac{(x-1)^4}{(x^2-3)^2} + (x^2-3)^4 + \frac{1}{(x-1)^2} = 3x^2 - 2x - 5.$$

Lời giải. (Dựa theo bạn *Hoàng Ngọc Minh*, THCS Việt Trì, Phú Thọ).

Trước hết ta có tập xác định là $\mathbf{R}\text{-}\{1, \pm\sqrt{3}\}$. Đặt $a = (x\text{-}1)^2$; $b = x^2\text{-}3$ (*) phương trình đã cho trở thành :

$$\frac{a^2}{b^2} + b^4 + \frac{1}{a} = a + 2b \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a}{b} - b^2\right)^2 + (b^2\text{-}1)^2 + (b\text{-}1)^2 = \frac{(a-1)^2}{a} = 0$$

Hiển nhiên mỗi hạng tử ở vế trái đều không âm nên vế này bằng 0 khi và chỉ khi mọi hạng tử đều bằng 0. Điều đó xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 1$. Thay vào (*) được nghiệm $x = 2$, thuộc tập xác định. Vậy phương trình có nghiệm là $x = 2$.

Nhận xét. 1) Bài này còn có nhiều cách giải khác. Bạn *Phạm Gia Vĩnh Anh* (9 Chuyên Toán PTTH NK Trần Phú **Hải Phòng**) đã từ (1) thêm $a + b^2$ vào hai vế và để ý các bất đẳng thức : $\frac{a^2}{b^2} + b^2 \geq 2a$; $a + \frac{1}{a} \geq 2$, dẫn đến bất phương trình tích :

$$0 \geq (b\text{-}1)^2\,[(b+1)^2 + 1].$$

Bạn Đỗ Quang Trí (9/4 THCS Nguyễn Bỉnh Khiêm, Biên Hòa, Đồng Nai), thì áp dụng bất đẳng thức Svác đối với vế trái ở trên để đi đến bất đẳng thức : $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^4}{1} + \frac{1}{a} \geq \frac{(a+b^2+1)^2}{b^2+1+a} = a + b^2 + 1 \geq a + 2b$ (2),... rồi dựa vào điều kiện xảy ra dấu bằng để tìm nghiệm. Bạn *Lê Thanh Tùng* (9A2, THCS Lê Văn Tám **Ninh Thuận**), lại đi tới (2) bằng cách dựa vào công thức Côsi để có hai bất đẳng thức cùng chiều rồi cộng các vế tương ứng lại.

2) Có 58 bài giải, trong đó có hai bài trả lời vô nghiệm (!), còn lại đều giải đúng. Ngoài các bạn nêu ra, các bạn sau đây cũng có lời giải tốt : **Nam Định:** *Phùng Văn Thắng*, 9D, THCS Ngô Đồng, Giao Thủy; **Khánh Hòa :** *Hoàng Hồng Nam*, 9^{14}, THCS Thái Nguyên; **Hà Nội:** *Phạm Bảo Trung*, 9A, THCS Nguyễn Trường Tộ; **Phú Thọ:** Hoàng Ngọc Minh, 9B, THCS Việt Trì; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Ngọc Minh*, 9A, PTTH Tam Đảo, Tam Dương; **Hà Tây:** *Nguyễn Văn Tuấn*, 9, PTCS Ngô Sĩ Liên, Chương Mĩ; **Hưng Yên:** *Doãn Kim Huế* 6A, PTCS Phạm Huy Thông, Ân Thi; **Quảng Nam:** *Đặng Quang Huy*, 9/1 Lương Thế Vinh, Duy Xuyên ; **Đà Nẵng:** *Nguyễn Huy Minh*, 9^2, PTCS Nguyễn Khuyến, Tp Đà Nẵng).

ĐẶNG VIỄN

GIẢI BÀI KÌ TRƯỚC

Bài T3/264. *Giả sử a, b, c là các số dương và x, y, z là các số thuộc đoạn* $[0, \frac{1}{2}]$ *thỏa mãn* $a+b+c = x+y+z = 1$. *Chứng minh rằng :* $ax+by+cz \geq 8abc$. *Đẳng thức xảy ra khi nào ?*

Lời giải. Không mất tính tổng quát có thể coi $a \leq b \leq c$. Ta có $4ab \leq (a+b)^2 = (1-c)^2$.

Suy ra $8abc \leq 2c(1-c)^2$.

Do $4c(1-c) \leq 1$ nên $8abc \leq \dfrac{1-c}{2}$ (1)

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = \dfrac{1}{4}$; $c = \dfrac{1}{2}$.

Theo giả thiết $x, y \in [0, \frac{1}{2}]$ nên :

$$cz = c\left(\frac{1}{2} - x\right) + c\left(\frac{1}{2} - y\right) \geq a\left(\frac{1}{2} - x\right) + b\left(\frac{1}{2} - y\right)$$

$$= \frac{a+b}{2} - (ax + by) = \frac{1-c}{2} - (ax + by)$$

Hay $ax + by + cz \geq \dfrac{1-c}{2}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có ngay đpcm.

Đẳng thức xảy ra (với $a \leq b \leq c$) $\Leftrightarrow$

$a = b = \dfrac{1}{4}$; $c = \dfrac{1}{2}$; $x = y = \dfrac{1}{2}$; $z = 0$.

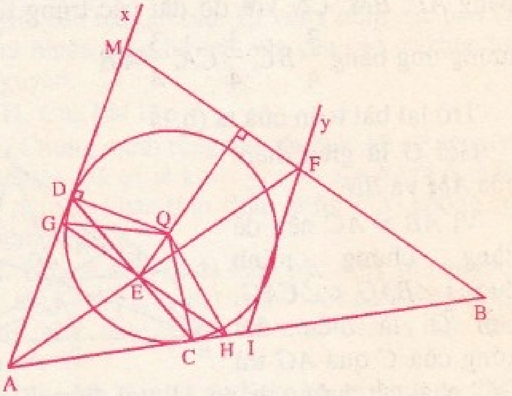
Nhận xét. Các bạn sau có bài giải đúng :

Phú Thọ: *Nguyễn Đình Hòa, Hoàng Ngọc Minh*, 9B, THCS Việt Trì ; **Hải Phòng:** *Vũ Hoàng Hiệp, Phạm Gia Vĩnh Anh*, 9T, Trần Phú ; **Hải Dương:** *Đồng Quang Điệp, Phạm Thành Trung*, 8A, *Nguyễn Tuấn Dương, Phạm Đức Hiệp*, 9T, Chu Văn An, *Ngô Xuân Bắc*, 9A, Nguyễn Trãi, Tp Hải Dương ; **Nam Định:** *Phùng Văn Thắng*, 9D, Ngô Đồng, Giao Thủy; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Văn Phúc, Hoàng Thị Liên*, 9A, Vĩnh Tường, *Kim Đình Thái*, 9B, Yên Lạc; **Nghệ An:** *Đậu Thị Ngọc Ánh*, 7C, T. tr. Nam Đàn, *Nguyễn Việt Quang*, 9C, THCS Đặng Thai Mai, Vinh ; **Tp Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Lâm Hưng*, 8/1 Hồng Bàng, Q5 ; **Thừa Thiên - Huế:** *Trần Huy Lập*, 9/1 Nguyễn Tri Phương ; **Khánh Hòa:** *Hoàng Hồng Nam*, 9^{14}, Thái Nguyên, Nha Trang ; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Văn Giáp*, 9A, Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa ; **Đà Nẵng:** *Nguyễn Huy Minh*, 9^2 Nguyễn Khuyến ; **Đắc Lắc:** *Trần Quang*, 9A, Phan Chu Trinh, Buôn Ma Thuột ; **Hà Nội:** *Nguyễn Mạnh Tuấn*, 9C, PTTH Hà Nội - Amsterđam.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T4/264. *Một đường tròn tâm Q tiếp xúc với đoạn thẳng AB tại điểm C nằm giữa A và B. Tia Ax tiếp xúc với đường tròn (Q) tại D (D khác C). Trên tia Ax lấy điểm M. Đường thẳng qua Q vuông góc với BM cắt CD tại E. Tia AE cắt BM tại F. Chứng minh rằng điểm F luôn nằm trên một tia cố định khi M (M khác A) di động trên tia Ax.*

Lời giải. Kẻ qua E đường thẳng GH song song với BM, ta có $GH \perp EQ$ (1) Suy ra $DQEG$, $EQHC$ là các tứ giác nội tiếp được.



Từ đó $\angle DQG = \angle DEG = \angle CEH = \angle CQH$.

Lại có $DQ = CQ$. Do đó $\Delta DQG = \Delta CQH$

Suy ra $QG=QH$. Cùng với (1) suy ra $GE = EH$. Lại có $GH // MB$ nên dễ thấy $BF = MF$. Gọi I là trung điểm của AB. Ta có $FI // Ax$. Ax cố định và I cố định nên F luôn nằm trên tia Iy cố định song song với Ax.

Nhận xét. Giải tốt bài này có các bạn :

Sơn La: *Chu Tiến Dũng*, CLC Mai Sơn; **Vĩnh Phúc:** *Kim Đình Thái*, 9B, THCS Yên Lạc, *Hoàng Xuân Quang*, 9A, THCS Vĩnh Tường; **Bắc Ninh** *Nguyễn Văn Thích*, 9A, THCS Yên Phong, *Trương Bảo Nam*, 9A, THCS Nguyễn Đăng Đạo; **Hải Dương:** *Nguyễn Tuấn Dương*, 9A, Nguyễn Trãi, *Vũ Thành Long*, 9A, THCS Nguyễn Trãi, Nam Sách; **Hải Phòng:** *Phạm Gia Vĩnh Anh*, 9CT Trần Phú; **Hà Nội:** *Trần Đoàn Việt*, 9A, Nguyễn Trường Tộ, *Nguyễn Hoàng Thạch*, 9C, THCS Ngọc Lâm, Gia Lâm, *Nguyễn Minh Dũng*, 9A, THCS Lê Quý Đôn; **Nam Định:** *Phùng Văn Thắng*, 9D, THCS Ngô Đồng, Giao Thủy; **Thanh Hóa:** *Lưu Đức Thi*, 9A, Nhữ Bá Sĩ, Hoằng Hóa; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Quang Linh*, 6A, TT Hương Khê; **Quảng Bình:** *Hà Nhật Sang*, 9B, THCS Hải Đình, Đồng Hới; **Quảng Ngãi:** *Trần Thế Phiên*, 9, Sơn Tịnh; **Đắc Lắc:** *Trần Quang*, 9A, THCS Phan Chu Trinh, Buôn Mê Thuột./.

VŨ KIM THỦY

Bài T5/264. *Cho tam giác ABC với AB>AC và các trung tuyến BM, CN. Chứng minh rằng :*

$$\frac{1}{2}(AB-AC) < BM-CN < \frac{3}{2}(AB-AC).$$

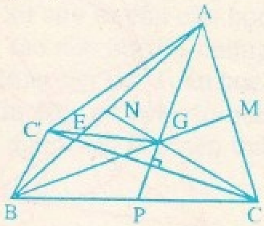
Lời giải. Ta sẽ sử dụng bổ đề quen thuộc sau (chứng minh dễ dàng)

Bổ đề. Cho tam giác ABC với các trung tuyến AP, BM, CN

(1) Nếu $AB>AC$ thì $BM>CN$

(2) Tồn tại một tam giác có độ dài ba cạnh bằng AP, BM, CN với độ dài các trung tuyến tương ứng bằng $\frac{3}{4}BC, \frac{3}{4}CA, \frac{3}{4}AB$

Trở lại bài toán của ta (h.1)



Gọi G là giao điểm của AM và BN

Vì $AB > AC$ nên dễ dàng chứng minh được : $\angle BAG < \angle CAG$. Gọi C' là điểm đối xứng của C qua AG thì GC' phải cắt đường thẳng AB (tại điểm E). Xét các cạnh của $\Delta AEC'$ và ΔBEG ta có :

$$AB + GC' > AC' + GB$$

$$\Rightarrow AB + GC > AC + GB$$

$$\Rightarrow AB - AC > \frac{2}{3}(BM - CN)$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2}(AB - AC) > BM - CN \quad (1)$$

Áp dụng kết quả (1) với tam giác có độ dài ba cạnh bằng AP, BM, CN và các trung tuyến có độ dài bằng $\frac{3}{4}BC, \frac{3}{4}CA, \frac{3}{4}AB$ (Tam giác này tồn tại theo bổ đề và có $BM>CN$) ta có :

$$\frac{3}{2}(BM - CN) > \frac{3}{4}AB - \frac{3}{4}AC$$

$$\Rightarrow BM - CN > \frac{1}{2}(AB - AC) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra đpcm.

Nhận xét. 1) Có 79 bạn tham gia giải bài này trong đó có 11 bạn giải sai. Sai lầm chủ yếu của các bạn này là thực hiện phép trừ hai bất đẳng thức cùng chiều.

2) Một số bạn chứng minh bất đẳng thức $\frac{1}{2}(AB - AC) < BM - CN$ thông qua bổ đề sau :

Bổ đề: Cho tứ giác $ABCD$; M là một điểm thuộc đoạn AB. Khi đó : $MC+MD < \max\{AC+AD, BC+BD\}$

Bổ đề trên đã được phát biểu và chứng minh trên báo THVTT số 197 (11/1993)

3) Ngoài lời giải thuần túy hình học trên, đa số các bạn có lời giải mang nhiều mầu sắc đại số với việc sử dụng công thức tính độ dài đường trung tuyến qua độ dài ba cạnh.

4) Các bạn sau có lời giải tốt :

Nghệ An: *Chu Hồng Tú*, 8B, THCS Đặng Thai Mai, Vinh; **Thái Nguyên:** *Nguyễn Trung Kiên*, 9A1, THCS Chu Văn An, Tp Thái Nguyên; **Hà Nội:** *Nguyễn Minh Dũng*, 9A, THCS Lê Quý Đôn, Cầu Giấy, *Trần Đoàn Việt*, 9A, THCS Nguyễn Trường Tộ, Đống Đa; **Hải Phòng:** *Vũ Ngọc Minh*, 9T, Chu Văn An, Ngô Quyền; **Tp Hồ Chí Minh:** *Trần Vĩnh Hưng*, 9/3, THCS Nguyễn Du, Gò Vấp; **Vĩnh Phúc:** *Vũ Nhật Huy*, 9A, THCS Vĩnh Tường.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài T6/264. *Chứng minh rằng tổng các bình phương của tất cả các ước số của số tự nhiên n (n > 2) nhỏ hơn $n^2.\sqrt{n}$.*

Lời giải. (của bạn *Nguyễn Dư Thái*, 10CT, ĐHKHTN Huế).

Giả sử $d_1, d_2, ..., d_m$ là tất cả các ước số của n. Khi đó $\frac{n}{d_1}, ..., \frac{n}{d_m}$ cũng chính là tất cả các ước của n. Ta có

$$\sum_{i=1}^{m} d_i^2 = \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{n}{d_i}\right)^2 = n^2\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{d_i^2} \le n^2\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2}\right)$$

Mặt khác $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2} < 1 + \frac{1}{1.2} + ... + \frac{1}{n(n-1)} = 2 - \frac{1}{n} < \sqrt{n}$ (vì $n \ge 3$). Vậy $\sum_{i=1}^{m} d_i^2 < n^2.\sqrt{n}$.

Nhận xét. 1) Ta có thể tổng quát hóa bài toán trên như sau : Chứng minh rằng tổng của các lũy thừa bậc k ($k \ge 1$) của tất cả các ước số của n ($n > 2$) bé hơn $n^k.\sqrt{n}$.

Thật vậy với $k \ge 2$, lập luận tương tự như trên, chú ý rằng $\frac{1}{i^k} \le \frac{1}{i^2}$ với mọi i = 1, 2, ..., n.

Với $k = 1$ bất đẳng thức $\sum_{i=1}^{m} d_i < n\sqrt{n}$ chính là bài tập 4 trang 70 quyển "Bài giảng Số học" của NXB Giáo dục.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt : *Phạm Gia Vĩnh Anh*, 9CT, Trần Phú, **Hải Phòng**; *Đinh Triều Dương*, 12T chuyên Vĩnh Phúc, *Đinh Trung Hiếu*, 10M Mary Quyri **Hà Nội**; *Mai Văn Hà*, 9C THCS Lê Quý Đôn, Bỉm Sơn, **Thanh Hóa** ; *Nguyễn Như Thắng*, 10A1,

ĐHSP Hà Nội, *Lưu Văn Hiệu*, 12A Ba Đình, **Thanh Hóa**, *An Trung*, 11A1, Phan Bội Châu, Vinh, **Nghệ An**, *Phạm Ngọc Lợi*, 11 Toán, PTNK **Hải Dương**, *Võ Quang Mẫn*, 11T, **ĐHKH Huế**, *Vũ Nhật Huy*, 9A, THCS Vĩnh Tường - **Vĩnh Phúc**, *Nguyễn Hoàng Thạch*, 9C, THCS Ngọc Lâm, **Hà Nội**, *Nguyễn Văn Tiến*, 11A1, Gia Lương **Bắc Ninh**, *Phạm Tuấn Anh*, 10T, ĐHKHTN, **Tp Hồ Chí Minh**, *Trương Quang Dũng*, 10 PTNK Hà Tĩnh, *Hà Nguyên Vũ*, 10T Lê Quý Đôn, Nha Trang, **Khánh Hòa**.

Có rất nhiều bạn tham gia giải bài toán này.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T7/264. *Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $\sqrt{x} + 2\sqrt{y}$, trong đó x, y là các số không âm thỏa mãn $x^3 + y^3 = 1$.*

Lời giải. *Cách 1.* Với $\alpha = \dfrac{1}{1 + 2\sqrt[5]{2}}$; $\beta = 2\sqrt[5]{2}\,\alpha$ thì theo bất đẳng thức Côsi ta có :

$$x^3 + 5\alpha \ge 6\sqrt[6]{x^3 . \alpha^5} \Rightarrow \sqrt{x} \le \frac{x^3 + 5\alpha}{6\sqrt[6]{\alpha^5}} \quad (1)$$

Tương tự : $$2\sqrt{y} \le \frac{y^3 + 5\beta}{3\sqrt[6]{\beta^5}} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta thấy :

$$F = \sqrt{x} + 2\sqrt{y} \le \frac{x^3 + y^3 + 5(\alpha+\beta)}{6\sqrt[6]{\alpha^5}} = \sqrt[6]{(1 + 2\sqrt[5]{2})^5}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = \alpha \\ y^3 = \beta \\ x^3 + y^3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt[3]{\alpha} \\ y = \sqrt[3]{\beta} \end{cases}$

Vậy F lớn nhất là $(1 + 2\sqrt[5]{2})^{5/6}$.

Cách 2. Ta có $y = \sqrt[3]{1 - x^3}$.

Vì $x^3 + y^3 = 1$ và $x, y \ge 0$ nên $x \in [0; 1]$.

Khi đó : $F = \sqrt{x} + 2\sqrt{y} = \sqrt{x} + 2\sqrt[6]{1 - x^3}$ với $x \in [0, 1]$.

Ta có : $F' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{x^2}{(1 - x^3)^{5/6}}$.

Lập bảng biến thiên của F với $x \in [0; 1]$ thì F lớn nhất khi $x = \dfrac{1}{\sqrt[3]{1 + 2\sqrt[5]{2}}}$ nên cũng có kết quả như trên.

Nhận xét. 1) Ngoài hai cách trên, đa số các bạn sử dụng BĐT Bunhiacôpski mở rộng cho 2 bộ số ($\sqrt{x}$; 1; 1; 1; 1; 1) và ($\sqrt{y}$; $\sqrt[5]{2}$; $\sqrt[5]{2}$; $\sqrt[5]{2}$; $\sqrt[5]{2}$; $\sqrt[5]{2}$).

2) Bạn *Phạm Hải Huân, Phạm Ngọc Lợi*, 11 Toán, *Trịnh Ngọc Liên*, 11TT, PTTH Nguyễn Trãi, **Hải Dương** nhận xét đúng : bài T7/264 chính là bài T6/189 (3/1993) (chỉ khác là thay giả thiết $x^3+y^3 \le 1$ bởi $x^3+y^3 = 1$).

3) Các bạn có lời giải tốt hơn : **Hải Dương:** *Nguyễn Thanh Hảo* và *Phạm Hải Huân*, 11T, PTTH Nguyễn Trãi; **Khánh Hòa:** *Trần Tuấn Anh*, 11T, PTTH Lê Quý Đôn, Nha Trang; **Hà Nội:** *Phạm Bảo Trung*, 9A, THCS Nguyễn Trường Tộ; *Lê Đình Tiến*, 10T, ĐHKHTN, ĐHQG; **An Giang:** *Nguyễn Anh Tuấn*, 12TL, PTTH Thoại Ngọc Hầu; **Vĩnh Long:** *Nguyễn Đỗ Thái Nguyên*, 12T, chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, Thị xã Vĩnh Long; **Thừa Thiên - Huế:** *Vũ Mẫn*, 11CT, ĐHKH Huế; **Đà Nẵng:** *Đặng Ngọc Hiến*, 11A2, *Phạm Văn Khoa*, 12, PTTH chuyên Lê Quý Đôn; **Vĩnh Phúc:** *Kim Đình Thái*, 9B, THCS Yên Lạc, *Trần Lê Huy*, 12A1, chuyên Vĩnh Phúc; **Tp Hồ Chí Minh:** *Lâm Hoàng Nguyên* và *Lương Thế Nhân*, 10T, ĐHQG Tp Hồ Chí Minh; **Phú Thọ:** *Nguyễn Hiệp*, 11A, PTTH Hùng Vương; **Ninh Bình:** *Ngô Văn Giang*, 11B7, PTTH Tam Điệp, **Đắc Lắc:** *Đặng Ngọc Châu*, 11T1, chuyên Nguyễn Du, Tp Buôn Ma Thuột; **Thanh Hóa:** *Trần Mạnh Hùng*, 10T, PTTH Lam Sơn; **Nghệ An:** *Nguyễn Thế* Anh, 10A1, khối PTCT, ĐHSP Vinh; *Phạm Huy Sỹ*, 11A, PTTH Cửa Lò; **Nam Định:** *Phùng Văn Thắng*, 10CT, PTTH Lê Hồng Phong; **Hải Phòng:** *Phạm Gia Vĩnh Anh*, 9CT, PTTH NK Trần Phú; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Thừa Thắng*, 11T, PTTH Năng khiếu, *Nguyễn Quang Linh*, 6A, THCS Thị trấn Hương Khê; **Quảng Trị:** *Bạch Ngọc Đức*, 10T, PTTH Lê Quý Đôn; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Minh Thu*, 11 Toán, PTTH NK; **Ninh Thuận:** *Lê TiếnTung*, 11A2, PTTH Chu Văn An; **Tiền Giang:** *Nguyễn Linh Duy*, 10T, PTTH chuyên Tiền Giang.

4) Bạn *Nguyễn Văn Tiến*, 12A5, PTTH Lê Trung Kiên, Tuy Hòa, **Phú Yên** cho lời giải tốt nhờ phương pháp lượng giác.

LÊ THỐNG NHẤT

Bài T8/264. *Cho hai đa thức*

$f(x) = x^4 - (1+e^2)x^2 + e^2$ và $g(x) = x^4 - 1$ (e là cơ số của lôgarit tự nhiên).

Chứng minh rằng với các số dương a, b phân biệt thỏa mãn $a^b = b^a$ thì $f(a).f(b) < 0$ và $g(a).g(b) > 0$.

Lời giải. Giả sử $a > b$.

Từ giả thiết ta có $a^{1/a} = b^{1/b}$.

Xét hàm số $\varphi(x) = x^{1/x}$, $x > 0$.

Do $\ln\varphi(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ suy ra

$\varphi'(x) = \varphi(x).\dfrac{(1-\ln x)}{x^2}$. Từ đó có bảng biến thiên như sau :

x	0		e		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$+$	0	$-$	
$\varphi(x)$	0	$\nearrow$	$e^{1/e}$	$\searrow$	1

Từ $\varphi(a) = \varphi(b)$, $a > b$ suy ra rằng $1<b<e<a$.

Chú ý $f(x) = (x^2 - 1)(x^2 - e^2)$.

Bởi vậy $f(b) < 0$ và $f(a) > 0$.

Rõ ràng $g(b) > 0$ và $g(a) > 0$.

Do đó ta có kết luận của bài toán.

Nhận xét. Đây là bài toán dạng cơ bản. Tòa soạn nhận được lời giải của 90 bạn. Hầu hết các bạn đều đưa ra lời giải đúng, rõ ràng trong đó có bạn Vũ Ngọc Minh, 9T, THCS Chu Văn An, **Hải Phòng**.

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T9/264. *Gọi P là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Các tia AP, BP, CP cắt đường tròn (O, R) ngoại tiếp tam giác ΔABC lần lượt tại A_1, B_1, C_1. Chứng minh rằng :*

a) $PA_1 + PB_1 + PC_1 \geq PA + PB + PC$

b) $\dfrac{1}{PA_1} + \dfrac{1}{PB_1} + \dfrac{1}{PC_1} \geq \dfrac{3}{R}$

Lời giải. (của nhiều bạn)

Ta sử dụng những hệ thức cơ bản sau :

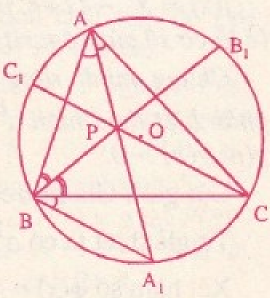
$$r = 4R . \sin\frac{A}{2} . \sin\frac{B}{2} . \sin\frac{C}{2} \qquad (1)$$

$$\frac{3}{2} \geq \sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} \qquad (2)$$

Dễ thấy $PA = \dfrac{r}{\sin\dfrac{A}{2}}$

$PB = \dfrac{r}{\sin\dfrac{B}{2}}$

và $PC = \dfrac{r}{\sin\dfrac{C}{2}}$.



Do $\angle PBA_1 = \angle A_1BC + \angle PBC = \dfrac{A}{2} + \dfrac{B}{2} = \angle BPA_1$ nên trong ΔPBA_1 ta có $PA_1 = BA_1 = 2R.\sin\dfrac{A}{2}$. Tương tự ta có $PB_1 = 2R\sin\dfrac{B}{2}$, $PC_1 = 2R\sin\dfrac{C}{2}$.

a) Sử dụng (1) có

$PA_1 + PB_1 + PC_1 \geq PA + PB + PC$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} \geq 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} + 2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} + 2\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2} \quad (3)$$

Từ (2) ta có :

$$\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} = \frac{2}{3}.\frac{3}{2}\left(\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2}\right)$$

$$\geq \frac{2}{3}\left(\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2}\right)^2$$

$$\geq 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} + 2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} + 2\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}$$

do áp dụng bất đẳng thức $(x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx)$. Vậy (3) đúng.

b) Sử dụng bất đẳng thức quen thuộc $(x+y+z)\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}\right) \geq 9$ và (2), ta có

$\dfrac{1}{\sin\dfrac{A}{2}} + \dfrac{1}{\sin\dfrac{B}{2}} + \dfrac{1}{\sin\dfrac{C}{2}} \geq 6$, và do đó

$$\frac{1}{PA_1} + \frac{1}{PB_1} + \frac{1}{PC_1} = \frac{1}{2R}\left(\frac{1}{\sin\frac{A}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{B}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{C}{2}}\right) \geq \frac{3}{R}$$

Trong cả 2 trường hợp dễ thấy đẳng thức chỉ xảy ra khi ΔABC là tam giác đều.

Nhận xét. Rất nhiều bạn giải đúng và ngắn gọn. Có một số bạn sử dụng bất đẳng thức Erdos là bất đẳng thức khó chứng minh hơn.

Các bạn sau đây có lời giải đúng và trình bày gọn hơn cả :

Buôn Mê Thuột: *Nguyễn Thị Hồng Hạnh, Đặng Ngọc Châu,* PTTH ch. Nguyễn Du; **Vĩnh Phúc:**

Nguyễn Tiên Thịnh, 11A, PTTH Vĩnh Phúc, *Nguyễn Trung Lập*, 12A chuyên Vĩnh Phúc; **Hà Tây:** *Nguyễn Văn Thắng*, 12A, PTTH Nguyễn Huệ, Hà Đông; **Thừa Thiên - Huế:** *Lê Viết Quốc*, 11TT2 Quốc học Huế; **Hải Phòng:** *Phạm Gia Vĩnh Anh*, 9 chuyên toán PTTH NK Trần Phú; **Quảng Trị:** *Lê Anh Tuấn*, 11 Toán, PTTH Lê Quý Đôn; **Hà Nội:** *Trần Tất Đạt*, ĐHKHTN-ĐHQG Hà Nội; **Tp Hồ Chí Minh:** *Phạm Tuấn Anh*, 10 Toán, ĐHKHTN; **Thanh Hóa:** *Hàn Ngọc Sơn*, 11T Lam Sơn, Thanh Hóa.

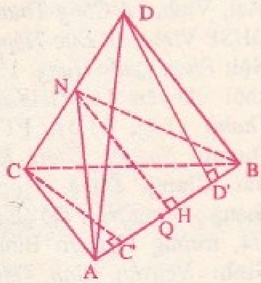
VŨ ĐÌNH HÒA

Bài T10/264. *Trên cạnh CD của hình tứ diện ABCD lấy điểm N (N khác C, D). Kí hiệu p(XYZ) là chu vi tam giác XYZ. Chứng minh rằng :*

a) $NC.p(DAB) + ND.p(CAB) > CD.p(NAB)$;

b) $\dfrac{NC}{ND} = \left|\dfrac{CA^2 - CB^2}{DA^2 - DB^2}\right|$ *khi* $NA = NB$.

Lời giải.



a) (của nhiều bạn). Xét bốn điểm A, C, D, N với N thuộc CD, theo bất đẳng thức Ptôlêmê (Kẻ $NM // AC$ và cắt AD ở M rồi áp dụng ĐL Talét), ta có

$$NC.DA + ND.CA > CD.NA \quad (1)$$

Tương tự, ta cũng có :

$$NC.DB + ND.CB > CD.NB \quad (2)$$

Lại vì N thuộc CD nên $NC + ND = CD$ và ta được :

$$NC.AB + ND.AB = CD.AB \quad (3)$$

Từ (1), (2), và (3) ta thu được BĐT (a) cần chứng minh.

b) (Dựa theo Trương Minh Doan, 9A6, THCS Vũng Tàu và một số bạn khác). Gọi H, C' và D' lần lượt là hình chiếu của N, C và D trên đường thẳng chứa cạnh AB (xem hình vẽ); thế thì các đường thẳng NH, CC' và DD' cùng song song với một mặt phẳng có phương vuông góc với AB. Theo định lí Talet :

$$\frac{\overline{NC}}{\overline{ND}} = \frac{\overline{HC'}}{\overline{HD'}} \quad (4)$$

Áp dụng định lí thứ hai về đường trung tuyến, trong các tam giác ABC và ABD, với Q là trung điểm của AB, ta được các hệ thức sau :

$$CA^2 - CB^2 = 2\overline{AB}\,.\,\overline{QC'}$$
$$DA^2 - DB^2 = 2\overline{AB}\,.\,\overline{QD'}$$

Từ đó suy ra :

$$\frac{CA^2 - CB^2}{DA^2 - DB^2} = \frac{\overline{QC'}}{\overline{QD'}} \quad (5)$$

Nếu $NA = NB$ thì H trùng với Q, nên từ (4) và (5) ta thu được đẳng thức (b) cần chứng minh.

Nhận xét. 1) Cả hai phần (a) và (b) của bài toán đều có thể giải theo nhiều cách khác nhau : phương pháp thông thường (tổng hợp) và phương pháp véctơ. Nói chung, sử dụng phương pháp tổng hợp thì ở phần (a), đa số các bạn sử dụng (hoặc chứng minh) B.Đ.T. Ptôlêmê, còn phần (b) thì sử dụng định lí Stiuoa. Áp dụng định lí Stiuoa, vì $N \in [CD]$, ta được các đẳng thức :

$$AC^2.ND + AD^2.NC = AN^2CD + CD.NC.ND; \quad (6)$$
$$BC^2.ND + BD^2.NC = BN^2.CD = CD.NC.ND \quad (7)$$

Nếu $NA = NB$ thì từ (6) và (7), ta được :

$$AC^2.ND + AD^2.NC = BC^2.ND + BD^2.NC$$

hay là: $(CA^2 - CB^2)ND = (DB^2 - DA^2).NC$ (8)

Từ (8) ta được đẳng thức (b) cần tìm.

2) Có thể sử dụng véctơ để chứng minh (b) như sau :

$$\overrightarrow{CA}^2 - \overrightarrow{CB}^2 = (\overrightarrow{NA} - \overrightarrow{NC})^2 - (\overrightarrow{NB} - \overrightarrow{NC})^2 =$$
$$= 2(\overrightarrow{NB} - \overrightarrow{NA})\overrightarrow{NC} = 2\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{NC} \text{ (vì } NA = NB).$$

Tương tự, $\overrightarrow{DA}^2 - \overrightarrow{DB}^2 = 2\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{ND}$.

Lại vì $\overrightarrow{NC} // \overrightarrow{ND}$ nên $\overrightarrow{NC} = \dfrac{\overline{NC}}{\overline{ND}}\overrightarrow{ND}$ và do đó,

$CA^2 - CB^2 = 2\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{NC} = 2\dfrac{\overline{NC}}{\overline{ND}}\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{ND}$. Từ đó ta được :

$\dfrac{CA^2 - CB^2}{DA^2 - DB^2} = \dfrac{\overline{NC}}{\overline{ND}}$, rồi suy ra ngay (b).

3) Trở lại lời giải phần (b) ở trên, ta thấy rằng :

$$H \equiv Q \Leftrightarrow NA = NB.$$

Từ đó suy ra mệnh đề đảo của phần (b) bài toán cũng đúng, nghĩa là ta có kết luận sau đây :

$$NA = NB \Leftrightarrow \frac{CA^2 - CB^2}{DA^2 - DB^2} = \frac{\overline{NC}}{\overline{ND}}.$$

4) Nếu đồng thời xảy ra $CA = CB$ và $DA = DB$ thì (QCD) là mặt phẳng trung trực của đoạn AB; vì vậy N nhận bất cứ vị trí nào trên đường thẳng CD và do đó (b) luôn luôn đúng.

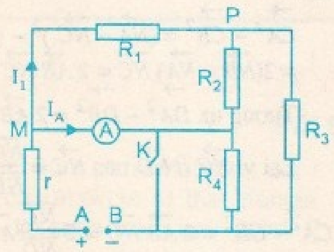
5) Các bạn sau đây có lời giải tốt :

Hà Nội: *Bùi Viết Lộc, Hoàng Tùng, Đào Quang Minh*, 11a, ĐHKHTN-ĐHQG Hà Nội; *Nguyễn Như Thắng*, 10A1, PTCTT, ĐHSP-ĐHQG Hà Nội; *Nguyễn*

Tuấn Anh, 12B, PTTH Nguyễn Gia Thiều ;**Bắc Ninh:** *Nguyễn Hoài Nam*, 12T, PTTH NK Hàn Thuyên; **Vĩnh Phúc:** *Vũ Mạnh Cường*, 11A1, *Nguyễn Trung Lập*, 12A1, PTTH ch. Vĩnh Phúc. **Hải Dương:** *Tô Minh Hoàng*, 10T, *Phạm Ngọc Lợi*, 11T, *Nguyễn Thị Hường*, 12T, PTTH Nguyễn Trãi; *Trương Văn Hội*,11A, Hồng Quang;**Hải Phòng:** *Phạm Đức Hiệp*, 9T, Chu Văn An; *Phạm Gia Vĩnh Anh*, 9I, *Vũ Hoàng Hiệp*, 9T, PTTH Trần Phú ; **Hà Tĩnh:** *Lê Thành Nga*, 11L, Kỳ Anh; **Thanh Hóa:** *Trần Mạnh Hùng*, 10T, PTTH Lam Sơn; *Nguyễn Đình Ngân*, 11b, Bỉm Sơn; **Thừa Thiên - Huế:** *Huỳnh Công Phước*, 11CT, Quốc học Huế, *Nguyễn Dư Thái*, 10CT, PTCT - ĐHKH Huế;**Khánh Hòa:** *Võ Dung Hòa*,, 11T Lê quý Đôn - Nha Trang; **Ninh Thuận:** *Lâm Thị Bích Thủy*, 7A, THCS Võ Thị Sáu, Phan Rang; **Bà Rịa - Vũng Tàu:** *Trương Minh Doan*, 9A6, THCS Vũng Tàu.

NGUYỄN ĐĂNG PHÁT

Bài L1/264. *Cho mạch điện như hình vẽ. U không đổi; $R_1 = 18R$; $R_2 = 9R$; $R_3 = 4R$; $R_4 = 15R$. Bỏ qua điện trở của dây nối, khóa K và ampe kế. Khi K đóng ampe kế chỉ 3A, công suất tiêu thụ trên r lớn gấp 4 lần công suất tiêu thụ cũng trên r khi K mở. Xác định số chỉ của ampe kế khi K mở.*



Hướng dẫn giải. Kí hiệu I_m, I_d là cường độ dòng điện mạch chính (qua r) khi K mở và khi K đóng. Khi K đóng, dòng điện chỉ chạy qua r và qua ampe kế, nên theo đề bài, $I_d = I_A = 3$ (A).

Mặt khác, theo đề bài :

$$rI_d^2 = 4rI_m^2, \text{ suy ra } I_m = \frac{I_d}{2} = 1,5(A).$$

Xét mạch khi K mở. Mạch điện AB gồm r mắc nối tiếp với đoạn mạch MB, trong đó các điện trở mắc theo sơ đồ : $[(R_1//R_2)$ nt $R_3]//R_4$.

Ta có : $R_{12} = \dfrac{R_1R_2}{R_1 + R_2} = 6R$; $R_{123} = 10R$;

$R_{1234} = R_{MP} = 6R$. Do đó $U_{MP} = I_m . R_{MP} = 9R$

$\Rightarrow I_3 = I_{12} = \dfrac{U_{MP}}{R_{123}} = 0,9(A)$; $U_{12} = U_1 = U_2 = I_3.R_{12} = 5,4R \Rightarrow I_1 = \dfrac{U_1}{R_1} = 0,3(A)$.

Vậy $I_A = I_m - I_1 = 1,2(A)$.

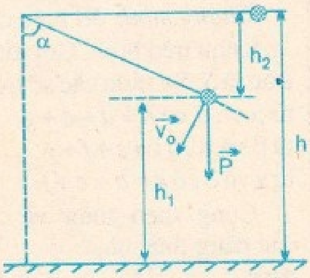
Nhận xét. Nhiều em tìm cách tính r theo R và tìm được $r = 6R$ sau đó giải tiếp, nhưng lời giải sẽ dài dòng hơn. Các em sau đây có lời giải gọn gàng và đúng :

Đà Nẵng: *Nguyễn Thanh Vũ*, 11A1, PTTH Hoàng Hoa Thám, *Đỗ Trọng Tuấn*, 12A1 (chuyên tin), PTTH Lê Quý Đôn ; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Ngọc Hưng*, *Nguyễn Kim Thắng*, 11A3, *Nguyễn Ngọc Hạnh* và *Trần Thanh Thọ*, 12A3, PTTH ch. Vĩnh Phúc, *Nguyễn Duy Hưng*, 9C, THCS Yên Lạc, *Nguyễn Hồng Anh*, khu IV, xã Chấn Hưng, Vĩnh Tường, *Trần Đặng Vũ*, 9B, THCS Vĩnh Tường ; **Hà Tĩnh:** *Vũ Cường Bình*, 11 Lí, PTTH NK ; **Nghệ An:** *Đào Anh Đức*, 11 Lí, *Lưu Anh Tú*, 10A3 và *Võ Đình Khánh*, 11A3, PTTH Phan Bội Châu, *Cao Thị Phương Thúy*, 9, THCS Đặng Thai Mai, Vinh, *Lê Công Thanh*, 11A1, khối chuyên toán, ĐHSP Vinh ; *Lê Đức Tiệp*, 12C, PTTH Nghĩa Đàn; **Hà Nội:** *Phan Quốc Hưng*, 11B Lí và *Lê Cường*, B0 11A, khối chuyên Lí, ĐHKHTN-ĐHQG Hà Nội; *Đào Thanh Tùng*, 11D1, PTTH Chu Văn An; **Tuyên Quang:** *Nguyễn Trung Kiên*, 10A1, PTTH chuyên ; **Bắc Giang:** *Đặng Ngọc Sâm*, 10A1, PTTH Lạng Giang ; **Đồng Nai:** *Đỗ Quang Trí* và *Nguyễn Kim Huy*, 9/4, trường Nguyễn Bỉnh Khiêm, Biên Hòa ; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Đình Tiến*, 11 Lí, PTTH NK Hàn Thuyên; *Nguyễn Huy Việt*, 12A1, PTTH Gia Lương số 2 ;**Phú Thọ:** *Hoàng Tuấn Anh*, 10H, PTTH Công nghiệp, Việt Trì; **Thừa Thiên - Huế:** *Nguyễn Dư Thái*, 10CT, khối PTCT, ĐHKH Huế; **Bà Rịa - Vũng Tàu:** *Lê Quang Lộc*, 11A1, PTTH Châu Thành, thị xã Bà Rịa. **Thái Nguyên:** *Hoàng Thái Hợp*, 11B4, PTTH KT Sông Công; **Quảng Bình:** *Dương Đức Anh*, 9A, THCS Nguyễn Hàm Ninh, Ba Đồn, Quảng Trạch, *Trương Quang Tú*, 11A2, THCB Lệ Thủy; *Lê Quang Trung*, 10 Lí, PTTH NK Quảng Bình; **Ninh Thuận:** *Nguyễn Ngọc Ty*, 12A2 và *Hồ Hoài Phương*, 10A1, PTTH Chu Văn An; **Quảng Ngãi:** *Lê Minh Châu*, *Đức Thanh*, 11A1, trường chuyên Lê Khiết; **Quảng Nam:** *Trương Văn Hiệu*, 9/2, THCS Chu Văn An, Duy Xuyên; **Nam Định:** *Nguyễn Thế Kha*, 11 Toán 1, PTTH Lê Hồng Phong; **Đồng Tháp:** *Châu Hoàng Huy*, 10T, THCB thị xã Cao Lãnh; **Hải Phòng:** *Đỗ Lê Thủy*, 11 C. Lí, PTTH Trần Phú; **Trà Vinh:** *Đàm Hữu Tân*, 12A1, PTTH chuyên Trà Vinh; **Bình Dương:** *Nguyễn Thị Kim Ngân*, 11T, PTTH chuyên Hùng Vương ; **Tiền Giang:** *Trần Thị Trúc Vân*, 12 Lí, PTTH ch. Tiền Giang.

MAI ANH

Bài L2/264. *Con lắc đơn gồm vật khối lượng m treo vào sợi dây không giãn dài 0,9m.*

Thả con lắc từ vị trí nằm ngang không có vận tốc ban đầu. Khi lực căng của dây $T = mg$ thì dây treo vật bị đứt. Vật rơi xuống cắm vào đất một khoảng $h' = 5cm$ so với mặt đất. Thời gian từ khi vật chạm đất đến khi dừng lại $t = 0,01$ (s). Coi lực cản của đất là không đổi. Bỏ qua sức cản không khí, lấy $g = 10m/s^2$. Tính khoảng cách từ vị trí nằm trang của con lắc đến mặt đất.



Hướng dẫn giải. Kí hiệu h là khoảng cách từ vật ở vị trí nằm ngang tới mặt đất, h_1 là khoảng cách từ vật ở vị trí dây đứt tới mặt đất và h_2 là khoảng cách từ vật ở vị trí nằm ngang đến vị trí dây đứt; α là góc hợp bởi dây treo tại vị trí dây đứt và phương thẳng đứng.

Ta có : $h = h_1 + h_2$ (1). Kí hiệu v_2 là thành phần theo phương thẳng đứng của vận tốc của vật khi chạm đất, ta có : $v_2 = \dfrac{2h'}{t} = 10\text{m/s}^2$. Kí hiệu v_o là vận tốc của vật ngay trước khi dây đứt, áp dụng định luật II Niutơn ta có :

$$T - P\cos\alpha = \frac{mv_o^2}{l} \Rightarrow T = P\cos\alpha + \frac{mv_o^2}{l}.$$

Khi dây đứt $T = mg$, suy ra $\cos\alpha = 1 - \dfrac{v_o^2}{gl}$ (2).

Mặt khác áp dụng định luật bảo toàn cơ năng ta có :

$$v_o^2 = 2gh_2 = 2gl\cos\alpha . \qquad (3)$$

Từ (2) và (3) ta suy ra : $\cos\alpha = \dfrac{1}{3}$ và $v_o = \sqrt{6}\,m/s$, và từ đó $h_2 = l\cos\alpha = 0,3m$. Xem rằng ngay sau khi dây đứt vận tốc của vật vẫn bằng $\vec{v_o}$, thành phần theo phương thẳng đứng của vận tốc đó bằng :

$$v_1 = v_o\sin\alpha = \sqrt{6} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ m/s},$$ từ đó

ta tìm được : $h_1 = \dfrac{v_2^2 - v_1^2}{2g} \approx 4,73m$.

Do đó : $h = h_1 + h_2 \approx 5,03\text{m}$.

Ghi chú: Để việc giải bài toán được thuận tiện đáng lẽ đề bài phải nói rõ là : vận tốc của vật vẫn được giữ nguyên khi dây đứt. Hơn nữa h' phải được hiểu là khoảng cách từ vị trí vật dừng lại đến mặt đất, bởi vì thực tế là vận cắm xiên vào đất.

Nhận xét. Các em có lời giải đúng và gọn:

Tp Hồ Chí Minh: *Nguyễn Như Mẫn*, 10 Lí, PTNK; **Bình Thuận:** *Vũ Quý Dương*, 10A5, PTTH ch. Trần Hưng Đạo, Phan Thiết; **Trà Vinh:** *Đoàn Hữu Tân*, 12A1, PTTH ch. Trà Vinh; **Bình Định:** *Đinh Nguyễn Toàn Khương*, 11A4, Quốc học Quy Nhơn; **Quảng Nam:** *Hoàng Anh Vũ*, 117, PTTH Trần Lao Vân, Tam Kì; **Khánh Hòa:** *Nguyễn Thành Sơn*, 10 Lí, PTTH Lê Quý Đôn, Nha Trang; **Quảng Trị:** *Trần Văn Cường*, 12A4, PTTH Đông Hà; **Hà Nội:** *Nguyễn Tuấn Đức*, B0 12A, khối chuyên Lí, ĐHKHTN-ĐHQG Hà Nội **Đà Nẵng:** *Thái Nguyên*, 11A2, PTTH ch. Lê Quý Đôn; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Ngọc Hưng*, 11A3 chuyên Lí, PTTH ch. Vĩnh Phúc; **Phú Thọ:** *Vũ Quốc Huy*, 1359 Tiên Cát, Việt Trì; **Bắc Ninh:** *Đỗ Tuấn Anh*, 10 Lí, PTTH NK Hàn Thuyên; *Nguyễn Huy Việt*, 12A1, PTTH số 2 Gia Lương; **Hải Dương:** *Trần Quang Khải*, 11C1, PTTH Nhị Chiểu, Kinh Môn; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Biên Cương*, 10C, PTTH Bỉm Sơn, *Nguyễn Quang Trung*, 11E12, PTTH CB Đào Duy Từ, *Lê Xuân Việt*, 11H, PTTH Hoằng Hóa II, Thanh Hóa; **Hà Tây:** *Nguyễn Văn Ánh*, 11A1, PTTH Xuân Mai, Chương Mĩ; **Nghệ An:** *Hồ Khánh Nam*, 11 Lí, PTTH Phan Bội Châu, Vinh; *Lưu Anh Tú*, 10A3, PTTH Phan Bội Châu, Vinh; **Hải Phòng:** *Đặng Duy Thành*, 11A2, PTTH Marie-Curie; *Lưu Quốc Khánh*, 10 Lí, PTTH NK Trần Phú; *Nguyễn Văn Nghị*, 11B1, PTTH Nguyễn Bỉnh Khiêm, Vĩnh Bảo.

MAI ANH

ĐÍNH CHÍNH

Trong "Đề ra kì này" THVTT số 267 (9/1999) xin sửa lại như sau :

- Bài T7/267 sửa hệ thức ở bản tiếng Anh theo bản tiếng Việt

- Bài T8/267 thay câu "Cho số nguyên dương lẻ a, chứng minh rằng..." bằng câu "Tìm các số nguyên dương lẻ a sao cho...".

Trang 17 dòng 4↑ sửa $u, v \in Z$
thành $u.v \in Z$

Thành thật xin lỗi bạn đọc.

THVTT

KẾT QUẢ CUỘC THI VUI HÈ 99

Cuộc thi của chúng ta đã có đông đảo bạn đọc tham gia, từ bạn 12 tuổi đến bạn đọc nhiều tuổi công tác ở nhiều lĩnh vực khác nhau. Một số đông các bạn giải được từ 4 câu trở lên.

Các bạn được chọn trao giải nhất đã giải hoàn chỉnh cả 6 câu. Giải nhì và ba là các bạn giải được 6 câu nhưng còn có chỗ chưa đầy đủ hoặc thiếu chính xác một chút. Còn lại tất cả chúng ta đã có một kì nghỉ hè vui vẻ và bổ ích qua một cuộc thi nhỏ. Hẹn gặp lại các bạn vào những năm sau.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. Các bạn cho nhiều cách điền từ để được nhiều câu quen thuộc :

Dòng 1. 1 miếng khi đói bằng 1 gói khi no; 1 trận mưa to bằng 1 kho thóc đầy; 1 lần vấp ngã là 1 lần bớt dại; 1 miếng lộc thánh bằng 1 gánh lộc trầu; 1 ngày trên trời bằng 1 năm dưới đất; 1 miếng giữa làng bằng 1 sàng xó bếp, v.v...

Dòng 2. 3 năm khôn ngoan 1 giờ dại dột; 3 voi không được 1 bát nước xáo, 3 năm đèn sách 1 ngày đi thi, 3 năm luyện quân 1 giờ dùng binh; 3 năm làm cửa 1 năm làm nhà; 3 năm trồng cây 1 ngày hái quả; v.v...

Dòng 3. 1 nong tằm là 5 nong kén; 1 con nằm bằng 5 con chạy; 1 đêm nằm bằng 5 năm ở; v.v...

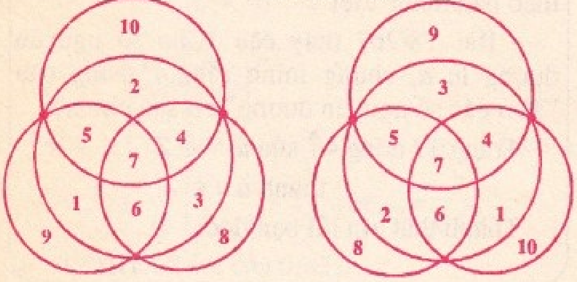
Dòng 4. Uốn lưỡi 7 lần trước khi nói; Mía tháng 7 nước chảy về ngọn; Cuối tháng 7 phây phẩy heo may; Rằm tháng 7 xá tội vong nhân; Người thọ 7 mươi xưa nay hiếm; Trống tháng 7 chẳng hội thì chay; v.v...

Dòng 5. Yêu nhau 9 bỏ làm 10; Một bên 9 một bên 10; Nếu nói 9 phải làm 10;

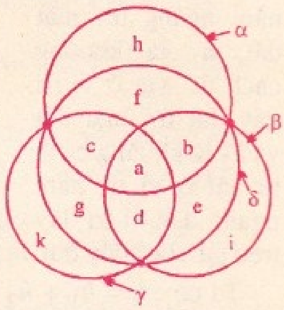
Dòng 6. 3 chìm 7 nổi 9 lênh đênh;

Nhiều bạn gán vào các ô các từ để có những câu tuy đúng, nhưng gượng ép. Chẳng hạn : dòng 4 ghi là "Mười chia 7 dư đúng là 3" ! Cảm ơn các bạn vừa yêu Toán lại vừa yêu... tiếng Việt với nhiều thành ngữ phong phú.

Câu 2. Thường là các bạn chỉ cho được một lời giải. Nhiều bạn lập luận chặt chẽ nhưng khá dài để chứng tỏ có 2 cách điền khác nhau



Chứng minh. Kí hiệu các số từ 1 đến 10 là a, b, ..., k như trên hình. Gọi tổng các số trong mỗi hình tròn là S. So sánh các số trong mỗi cặp hình tròn,



từ α và δ có $h = d + e + g$

từ β và δ có $i = c + f + g$

từ γ và δ có $k = b + e + f$

Cộng theo từng vế các đẳng thức này được :

$h + i + k =$
$= 2(e+f+g)+b+c+d$ (1)

Xét vế trái của (1) :

$h + i + k \leq$
$8 + 9 + 10 = 27$ (2)

Xét vế phải của (1) : $e+f+g+(e+f+g+b+c+d) \geq$
$\geq e+f+g+1+2+3+4+5+6 = e+f+g+21$ (3)

Từ (2) và (3) có $e+f+g \leq 27-21 = 6 \Rightarrow$ chỉ xảy ra $e+f+g = 6 = 1+2+3$ (4)

Từ (4) và (1), (2) có $27 \geq 12+b+c+d \Rightarrow b+c+d \leq 15$.

Từ đó và (4) chỉ xảy ra $b+c+d = 15 = 4+5+6$ (5)

Thay (4), (5) vào (1) được $h+i+k = 12+15=27$ $\Rightarrow$ chỉ xảy ra $h+i+k = 27 = 8+9+10$ (6).

Vậy $a = 7$ và

$S = a+(b+c+d) + (e+f+g) = 7+15+6 = 28$.

Ta coi hai nghiệm là không khác nhau nếu từ một nghiệm sau khi quay quanh tâm hình tròn δ thì được nghiệm kia.

Để tìm nghiệm, có thể chọn $b = 4$, $c = 5$, $d = 6$.

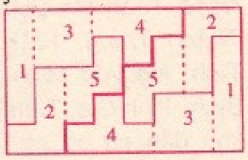
Từ đó $h+f = S-(a+b+c) = 28 - 16 = 12 \Rightarrow$ từ (4), (6) chỉ xảy ra $h+f = 10+2 = 9+3$ (7).

Tương tự $k+g = S-(a+c+d) = 28-18$ $= 10 \Rightarrow$ chỉ xảy ra $k+g = 9+1 = 8+2$ (8)

Kết hợp (7), (8) ta có 2 nghiệm khác nhau như ở hình bên.

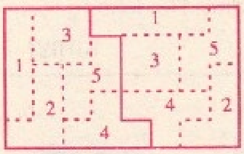
Câu 3. Có nhiều cách ghép hình thỏa mãn yêu cầu của đề bài. Bạn *Nguyễn Trường Toán* đã vẽ 187 hình ghép, bạn *Ngô Văn Hiệp* đã vẽ nhiều hình ghép và bằng cách sắp xếp lại các hình đó đã tính được 370 cách ghép. Rất tiếc là các bạn *Trần Thanh Giang* (Tp Hồ Chí Minh) đã vẽ 145 hình ghép và *Phạm Minh Tuấn* (Đồng Tháp) đã vẽ 96 hình ghép, nhưng chưa giải tốt các câu hỏi khác. Để tìm được nhiều cách ghép mới khi đã ghép được một hình, xin lưu ý :

- Hãy phân chia hình đó *bằng nhiều cách* thành 2 hình, mỗi hình này gồm 20 ô vuông chứa đủ 5 chữ *I, L, O, T, Z* (xem hình 1)

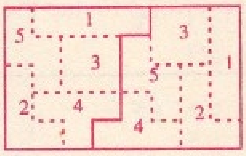


Hình 1

- Lấy đối xứng lần lượt qua 2 trục đối xứng của hình chữ nhật kích thước 5×8 (xem hình 2 và 3).



Hình 2



Hình 3

- Tìm cách thay đổi vị trí các chữ *I, L, O, T, Z* trong mỗi hình 20 ô vuông ở mỗi hình đã ghép (chẳng hạn phần bên trái của hình 2 và hình đối xứng qua tâm hình chữ nhật của phần bên phải hình 2).

Câu 4. Để ý rằng khi gấp lại thì đầu con *pích* chỉ vào con *nhép* và góc nhọn con *rô* chỉ vào con *pích* và ô trắng sẽ thấy ngay đáp án là hình *E*.

Câu 5. Trước hết ta chứng minh rằng : đa giác lồi n đỉnh ($n \geq 4$) có tất cả n-3 đường chéo không cắt nhau tại điểm nằm bên trong đa giác.

Xét đa giác lồi n đỉnh $A_1A_2...A_n$ ($n\geq4$). Kẻ mọi đường chéo xuất phát từ A_1 ta được n-2 tam giác không có điểm trong chung, do đó tổng các góc trong của đa giác lồi n đỉnh bằng $(n-2)180^o$. Giả sử đa giác lồi n đỉnh có *tất cả* x đường chéo không cắt nhau tại điểm nằm bên trong đa giác và các đường chéo này chia đa giác thành k tam giác không có điểm trong chung. Tổng các góc của k tam giác này là $k.180^o = (n-2)180^o$ nên $k = n-2$. Xét các cạnh của n-2 tam giác này ta thấy mỗi cạnh đa giác là 1 cạnh của tam giác (nếu trái lại thì có 2 đường chéo cắt nhau), còn mỗi đường chéo của đa giác là cạnh chung của 2 tam giác nên $3(n-2) = n+2x \Rightarrow x = n-3$.

Áp dụng vào trò chơi, ta thấy đa giác lồi 1999 đỉnh có 1996 đường chéo không cắt nhau tại điểm nằm bên trong đa giác. Do 1996 là số chẵn nên muốn thắng, bạn chỉ cần chọn "chiến thuật" là nhường cho đối phương đi trước mà thôi.

Câu 6. Người đi trước (A) sẽ giành thắng lợi nếu biết sử dụng phương án chơi như sau :

Đầu tiên người A tô màu 3 hình tròn ở hình số 4, như vậy ở hai hình số 1 và số 4 đều còn 5 hình tròn chưa tô màu, còn ở hai hình số 9 và số 6 đều còn 9 hình tròn chưa tô màu. Khi người đi sau (B) tô màu x hình tròn trong hình số 1 (hoặc số 4, hoặc số 9, hoặc số 6), thì người A đến lượt mình tiếp theo phải tô x hình tròn trong hình số 4 (hoặc hình số 1, hoặc số 6, hoặc số 9 theo thứ tự) sao cho số hình tròn chưa tô ở hình số 1 và số 4 là bằng nhau và số hình tròn chưa tô ở hình số 9 và số 6 là bằng nhau. Cứ làm như thế thì người A sẽ tô màu hình tròn cuối cùng và giành thắng lợi.

Đa số các bạn giải đúng câu này.

Sau đây là danh sách các bạn đoạt giải

I- GIẢI NHẤT (3 giải)

1. *Nguyễn Quang Thắng*, 11D, PTTH Nam Đàn 1, Nghệ An.
2. *Nguyễn Trần Nhàn*, 10A, Trường SOS, Vinh, Nghệ An.
3. *Đào Anh Minh*, Lớp 8, trường thực hành Cao đẳng sư phạm Uông Bí, Quảng Ninh.

II- GIẢI NHÌ (13 giải)

1. *Hà Mỹ Phương*, 8A1, THCS Chu Văn An, Thái Nguyên.
2. *Nguyễn Thành Nam*, 9A, PTTH Nguyễn Trãi, Hải Dương
3. *Đào Minh Lâm*, 10E, PTTH Như Thanh, Thanh Hóa
4. *Nguyễn Lương Hoàng*, 10M, trường Quốc học Quy Nhơn, Bình Định.
5. *Nguyễn Thu Thủy*, B3-D30 ĐH An ninh Nhân dân
6. *Nguyễn Trường Toán*, 12, PTTH Xuân Hòa, Mê Linh, Vĩnh Phúc
7. *Tạ Hoàng Tuấn*, 11A, PT cấp 2+3 Trấn Yên 2, Yên Bái
8. *Lê Quang Lộc*, 11A1, PTTH Châu Thành, Tx. Bà Rịa, Bà Rịa - Vũng Tàu
9. *Phan Nhật Linh*, 12A, PTTH Yên Lạc, Vĩnh Phúc
10. *Thái Hà*, nhà 29B, tổ 74, tập thể 361 Hoàng Cầu, Đống Đa, Hà Nội
11. *Nguyễn Ngọc Tú*, Phòng Quân Nhu, Cục Hậu cần, Quân khu 4
12. *Phạm Văn Long*, Xóm 3, thôn Phù Lưu, Nguyễn Úy, Kim Bảng, Hà Nam.
13. *Ngô Văn Hiệp*, 43B hàng Quạt, Hà Nội.

III- GIẢI BA (7 giải)

1. *Nguyễn Lê Hòa*, 10A, PTTH Tĩnh Gia I, Thanh Hóa
2. *Nguyễn Ngọc Cường*, 11 Toán, PTTH NK Hàn Thuyên, Tx Bắc Ninh, tỉnh Bắc Ninh
3. *Mai Văn Hiệp*, 11A, PTTH B Kim Bảng, Hà Nam
4. *Lê Phạm Thái Duy*, 11A1, PTTH Lê Trung Kiên, Tuy Hòa, tỉnh Phú Yên.
5. *Ngô Mạnh Hùng*, 11C, PTTH Sóc Sơn, Hà Nội
6. *Phạm Văn Trọng*, cán bộ Cục Thi hành án Bộ Tư Pháp, 25A Cát Linh, Hà Nội
7. *Nguyễn Anh Tuấn*, A1K43, khoa Toán cơ tin học, ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội.

HÀNH TRÌNH CỦA CON MÃ

Một con mã đi theo đường chéo của hình chữ nhật kích thước 2 × 3 tới tất cả các ô của bàn cờ, mỗi ô đúng một lần và trở về ô xuất phát ban đầu. Theo hành trình người ta đánh số liên tiếp từ ô số 1 là ô xuất phát đến ô thứ 64 và từ ô này con mã lại trở về ô số 1. Ai đã xóa mất một loại số ở các ô. Bạn có tìm ra được những con số này không ?

52		16					
					48		32
36							
	4				44		60
8		40				12	
							24
20		64					
			56		28		

NGỌC MAI

NGHIỆM DUY NHẤT? THẬT KHÔNG?

Rất nhiều bạn đã "bắt mạch" đúng "bệnh". Khi $f'(x) > 0$ với $x \neq 0$ thì $f(x)$ *tăng trong từng khoảng* : $(-\infty; 0)$; $(0; +\infty)$. Nếu lập bảng biến thiên của $f(x)$, thấy rõ hơn là *phương trình chắc chắn có 2 nghiệm!*. Tác giả đã "tưởng" rằng $f(x)$ luôn đồng biến trên một miền !

Nhiều bạn đã đưa ra các bài toán tương tự và chỉ ra lí luận kiểu trên là nhầm.

Lời giải đúng : nhờ phép lôgarit hóa phương trình tương đương với $(x \neq 0)$:

$$(x-3)\ln 5 + \frac{x-3}{x}\ln 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)\left(\ln 5 + \frac{\ln 2}{x}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = -\dfrac{\ln 2}{\ln 5} = -\log_5 2 \end{array}\right.$$

Có bạn chỉ đưa ra lời giải của mình và kết luận lời giải kia dứt khoát là sai !

Mong các bạn lưu ý cho là phải chỉ ra *sai lầm ở đâu* ?

Các bạn có ý kiến tốt là : *Lê Xuân Đại*, lớp C1, K40, ĐHKTQD Hà Nội; *Vương Minh Quang*, 11B5, PTTH Trần Phú, Hà Nội; *Nguyễn Huy Ngọc*, Toán 1D, ĐHSP Tp Hồ Chí Minh; *Nguyễn Thành Trung*, 12 Hóa, PTTH Năng khiếu Hà Tĩnh; *Nguyễn Minh Nga*, GV trường THCS Hải Bình, Tĩnh Gia, Thanh Hóa; *Thái Tăng Duy*, D66, khu dân cư cơ sở muối, Bến Lội, Phan Thiết, Bình Thuận, *Phạm Sỹ Nam*, cựu SV 36A, khoa Toán, ĐHSP Vinh; *Trần Thị Dịu*, 88 phố Mới, Thủy Sơn, Thủy Nguyên và *Nguyễn Khắc Toàn*, số 11/Lô 118, tập thể Dư Hoàng, Hải Phòng.

KIHIVI

LỜI GIẢI ĐÚNG RỒI Ư ?

Bạn *Phan Sỹ Nam*, cựu sinh viên 36A, Khoa Toán, ĐHSP Vinh có băn khoăn về lời giải bài toán : *Chứng minh rằng nếu $x > 0$ thì với $n \in Z^+$ ta có :*

$$e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

trong cuốn "Toán nâng cao Giải tích 12", tác giả N.H.T và N.D.T.

Lời giải. Gọi $f_n(x) = e^x - (1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!})$

Ta sẽ chứng minh $f_n(x) > 0$ với $x > 0$.

* $f_1(x) = e^x - 1 > 0$ khi $x > 0$

* Giả sử $f_k(x) > 0$ khi $x > 0$, ta chứng minh $f_{k+1}(x) > 0$ khi $x > 0$. Thật vậy : $f'_{k+1}(x) = f_k(x) > 0$ khi $x > 0 \Rightarrow f_{k+1}(x)$ đồng biến trong $(0; +\infty)$. Do đó khi $x > 0$ ta có $f_{k+1}(x) > f_{k+1}(0) = 0 \Rightarrow$ đpcm.

Lời giải đúng rồi ư ? Xin chờ ý kiến của các bạn.

Nhắn: Bạn Nam liên lạc gấp với Tòa soạn để cho biết địa chỉ hiện nay.

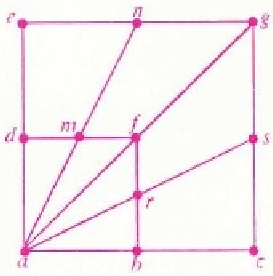
KIHIVI

Giải đáp bài
ĐIỀN SỐ VÀO CÁC Ô TRÒN

Kí hiệu các số trong mỗi ô tròn như hình 1.

Ta có tổng các số đó bằng

$1+2+...+11 = 66$.



Hình 1

Gọi tổng của 3 số trên mỗi đoạn thẳng là *S*. Chú ý rằng *a* thuộc 5 đoạn thẳng, *f* và *g* thuộc 3 đoạn thẳng, các số còn lại đều thuộc 2 đoạn thẳng. Xét tổng các số trên 5 đoạn thẳng chứa *a* ta được :

$5S = 66+4a \Rightarrow 5S = 55 + 5a + 11 - a \Rightarrow 11-a$ chia hết cho 5. Vì $1 \le a \le 11$ nên *a* chỉ có thể bằng 1 hoặc 6 hoặc 11 (*)

Xét tổng các số trên 8 đoạn thẳng, không kể đường chéo (*ag*) ta được : $8S = 2a+2.66 \Rightarrow 4S = a+66$ (**) $\Rightarrow$ *a* chẵn.

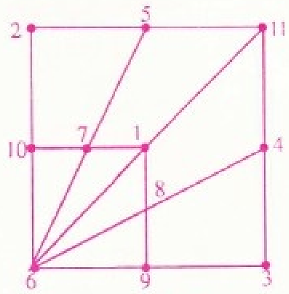
Kết hợp với (*) ta thấy $a = 6$.

Từ (**) có $S = 18$.

Từ đó ta đi tìm các cặp số thẳng hàng với *a* với tổng bằng $S-a = 18-6 = 12$. Có 5 cặp số như thế :

$12 = 1+11 = 2+10 = 3+9 = 4+8 = 5+7$ (***)

Với $(f, g) = (1, 11)$ thì $d+m = b+r = 17 = 10+7 = 9+8$ và $e+n = c+s = 7 = 2+5 = 3+4$ rồi chọn các số này sao cho $d+e = m+n = b+c = r+s = 12$ (xem 1 cách chọn trên hình 2). Có 4 cách chọn như thế tương ứng với việc đổi vị trí từng cặp số sau (không xét đối xứng qua *ag*) : (*d*, *e*) và (*m*, *n*), (*b*, *c*) và (*r*, *s*). Với $(f, g) = (11,1)$ cũng có 4 cách chọn. Vì (*f*, *g*) có thể lấy giá trị trong 5 cặp số (***) nên có tất cả $8 \times 5 = 40$ cách điền số khác nhau.



Hình 2

Xét bài toán điền các số 1, 2, ..., 22 sao cho trên mỗi đoạn thẳng có 4 số. Kí hiệu các số từ 1 đến 22 bởi các chữ $a_1, a_2, ..., a_{22}$, ta có :

$a_1 + a_2 + ... + a_{22} = 1 + 2 + ... + 22 = 253$.

Gọi tổng 4 số trong các ô tròn trên mỗi đường thẳng là *S*. Xét tổng tất cả các số trên 12 đoạn thẳng không kể đường chéo, trong đó a_1 thuộc 6 đoạn thẳng, ta có :

$12S = 4a_1 + 2.253 \Rightarrow 6S = 2a_1 + 253$

Vế trái là một số chẵn vế phải là một số lẻ, bài toán vô nghiệm, tức không có cách điền 22 số thỏa mãn đề bài.

Nhận xét. Có rất nhiều đáp án gửi tới, nhưng chỉ có một đáp án tốt là của bạn *Đào Anh Tuấn*, 12A1, PTTH CB, Sơn Tây, **Hà Tây**.

BÌNH PHƯƠNG

CẮT GHÉP HÌNH

Hãy cắt một miếng gỗ mỏng *hình vuông*, thành nhiều mảnh sao cho khi ghép các mảnh đó lại ta được một *hình tam giác cân*, trong mỗi trường hợp sau :

a) cắt thành 3 mảnh gồm 1 tam giác và 2 tứ giác bằng nhau.

b) cắt thành 4 mảnh gồm 1 tam giác vuông và 3 tứ giác

PHẠM HÙNG
(Hà Nội)

NHỚ MỘT THỜI

Lấy toán làm vui suốt cả đời
Say mê mà chẳng viết nên lời
Xưa còn sung sức luôn làm toán
Nay đã nghỉ hưu, chửa hết thời
Bạn trẻ thông minh đâu kém cựa
Tài cao năng khiếu chả thua người
Ước mong Báo Toán là nơi hẹn
Tập hợp tài năng trẻ tuyệt vời

NGUYỄN CÔNG QUỲ

KHOA TOÁN, ĐẠI HỌC SƯ PHẠM VINH
40 NĂM - MỘT CHẶNG ĐƯỜNG

PTS. Trần Văn Ân
Chủ nhiệm khoa Toán - Tin,
ĐHSP Vinh

Khoa Toán - Tin trường Đại học Sư phạm Vinh mà tiền thân của nó là Ban Toán - Lý, phân hiệu Đại học sư phạm Vinh, được thành lập ngay từ những ngày đầu thành lập trường.

Đội ngũ cán bộ giảng dạy ở Khoa lúc đó chỉ có 7 thầy giáo với một lớp học đầu tiên gồm 77 sinh viên.

Trong chiến tranh chống Mỹ, Khoa đã lần lượt di chuyển qua các địa điểm của các huyện : Nghi Lộc, Thanh Chương (Nghệ An), Hà Trung, Thạch Thành (Thanh Hóa), Diễn Châu, Quỳnh Lưu, Yên Thành (Nghệ An). Cũng trong giai đoạn này lớp lớp các thầy giáo và học sinh của Khoa đã hăng hái lên đường nhập ngũ và không ít trong số họ đã mãi mãi không trở về.

Từ năm học 1967-1968 Khoa còn đảm đương thêm nhiệm vụ dạy các lớp Toán đặc biệt mà nó là tiền thân của Khối phổ thông chuyên Toán - Tin ngày nay.

Đến năm học 1977-1978 theo chủ trương của Bộ Giáo dục, Khoa bắt đầu mở hệ bồi dưỡng "Sau đại học". Tháng 3 năm 1990 Khoa được giao nhiệm vụ đào tạo Phó tiến sĩ 3 chuyên ngành : Giải tích, Đại số - Lí thuyết số, PPDH Toán, đến năm 1996 có thêm chuyên ngành Hình học - Tôpô.

Bước sang năm học 1990-1991 Khoa thành lập Bộ môn tin học mà nó là tiền thân của Khoa Công nghệ thông tin ngàynay. Cùng với việc đào tạo giáo viên PTTH, từ năm học 1990-1991 Khoa được giao thêm nhiệm vụ bồi dưỡng giáo viên cấp 2 có trình độ đại học cho các tỉnh Nghệ An, Hà Tĩnh và Thanh Hóa.

Từ tháng 7 năm 1993 được giao thêm nhiệm vụ đào tạo Thạc sĩ các chuyên ngành : Giải tích, Đại số - Lí thuyết số, Hình học - Tôpô, PPDH Toán, đến năm 1999 có thêm chuyên ngành Xác suất - Thống kê.

Từ năm học 1993-1994 Khoa liên kết với Khoa Toán - Cơ - Tin học của trường ĐHKHTN thuộc Đại học Quốc Gia Hà Nội đào tạo Cử nhân Toán - Tin. Trên cơ sở hoạt động liên kết này mà từ năm học 1996-1997 Bộ đã cho phép Trường và Khoa đào tạo giáo viên giảng dạy Tin học cho các trường phổ thông trong khu vực.

Qua 40 năm xây dựng và phát triển, các thế hệ thầy cô giáo và học sinh khoa Toán đã đạt được những thành tích nổi bật là :

★ Đã đào tạo được trên 4000 giáo viên PTTH, THCS trình độ đại học hệ chính quy ; trên 2000 giáo viên PTTH hệ tại chức ; 153 Cao học (15 khóa Cao học của Bộ Giáo dục cũ); 131 Thạc sĩ; 17 Tiến sĩ và Phó Tiến sĩ; 326 Cử nhân Tin học hệ tại chức. Có 23 Phó giáo sư, một Nhà giáo nhân dân và trên 20 Nhà giáo ưu tú đã trưởng thành từ Khoa, trong đó có 6 Phó Giáo sư và 3 Nhà giáo ưu tú đang công tác tại Khoa và Trường.

★ Tham gia giảng dạy tại Khối PTTH chuyên Toán - Tin, đào tạo Thạc sĩ, giáo viên các nganh Vật lí, Hóa học, Sinh vật...; bồi dưỡng thường xuyên cho gần 1800 lượt giáo viên PTTH và THCS; tham gia giảng dạy một số môn cho các trường Đại học Sư phạm Huế, Đại học Sư phạm Quy Nhơn và một số trường Cao đẳng Sư phạm.

★ 40 năm qua Khoa Toán - Tin luôn là khoa dẫn đầu về thành tích nghiên cứu khoa học trong trường ĐHSP Vinh. Có gần 150 công trình của cán bộ và sinh viên được đăng trên các tạp chí chuyên ngành có uy tín trong nước và quốc tế; 8 học sinh đạt giải trong các kì thi "Sinh viên nghiên cứu khoa học", và 7 học sinh đạt giải trong các kì thi Olympic Toán và Tin.

Biên soạn và xuất bản trên 150 giáo trình bài giảng cho sinh viên, học viên cao học và học sinh phổ thông.

Trên 100 lượt cán bộ trong khoa tham gia các Hội nghị khoa học quốc tế tại Nga, Hungari, Balan, Đức, Nhật, Tiệp Khắc, Pháp và trong nước. Phối hợp với các đơn vị trong và ngoài nước tổ chức nhiều Hội nghị khoa học.

Hiện nay Khoa Toán - Tin có một đội ngũ gồm 39 thầy, cô giáo và cán bộ với 4 PGS, 15 Tiến sĩ, Phó Tiến sĩ, 7 Thạc sĩ, 15 Giảng viên chính, với 6 Bộ môn : Giải tích, Đại số, Hình học, Điều khiển, PPDH Toán, Tin học và 1219 sinh viên được chia thành 23 lớp.

Với sự nỗ lực của cán bộ, giáo viên và học sinh toàn Khoa trong 40 năm qua, Khoa đã được thưởng nhiều Bằng khen của UBND tỉnh Nghệ An, Bằng khen của Ban chấp hành Tổng liên đoàn Lao động Việt Nam, Bằng khen của Bộ trưởng Bộ Giáo dục - Đào tạo về thành tích nghiên cứu khoa học, về thành tích giáo dục và đào tạo, về thành tích bồi dưỡng thường xuyên. Vinh dự hơn tháng 11 năm 1998 Khoa được Chủ tịch nước Cộng hòa Xã hội chủ nghĩa Việt Nam tặng Huân chương Lao động hạng ba.

ISSN : 0866-0853
Chỉ số : 12884
Mã số : 8BT70M9

Chế bản tại Tòa soạn
In tại Nhà máy in Diên Hồng, 57 Giảng Võ
In xong và nộp lưu chiểu tháng 10 năm 1999

Giá : 3.000đ
Ba nghìn đồng