BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ❊ HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

TOÁN HỌC & TUỔI TRẺ

NĂM THỨ 36 - RA HÀNG THÁNG
Số 9 (267)
1999

Chúc mừng Năm học mới

Những gương mặt, những tấm lòng dành cho *Toán học và Tuổi trẻ*

PGS HOÀNG CHÚNG sinh ngày 28.1.1931 tại Quảng Nam, PGS đã giảng dạy ở nhiều trường : PTC3 Lê Khiết, Quảng Ngãi, PTC3 Hà Nội, ĐHSP Hà Nội, ĐHSP TP Hồ Chí Minh. Ông từng là Phó Cục trưởng Cục Đào tạo và bồi dưỡng giáo viên thuộc Bộ GD, Hiệu trưởng Trường ĐHSP Tp Hồ Chí Minh. Ông là Thư kí Tòa soạn Tạp chí THTT từ 1964 và từ 1992 đến nay là Phó Tổng Biên tập. PGS Hoàng Chúng là tác giả của nhiều cuốn sách tham khảo về Toán học sơ cấp. Ông luôn mong mỏi các cộng tác viên và bạn đọc của tạp chí - đặc biệt là các nhà khoa học, các thầy cô giáo - quan tâm viết bài sao cho tạp chí có nhiều nội dung gắn với đời sống hơn, vui hơn, hấp dẫn hơn.

PGS PTS VŨ THANH KHIẾT sinh ngày 24.08.1935 tại Ninh Bình, bảo vệ luận án PTS Vật lí tại Liên bang Nga năm 1965, được phong PGS năm 1980, từng là Phó Hiệu trưởng ĐHSP Hà Nội 1, Phó Tổng biên tập NXB Giáo dục. Ông là tác giả của nhiều sách giáo khoa và tham khảo cho sinh viên và học sinh về Vật lí, tham gia bồi dưỡng đội tuyển học sinh Việt Nam thi Vật lí quốc tế. Từ năm 1992 ông là ủy viên Hội đồng biên tập tạp chí THVTT và chấm bài giải môn Vật lí trên THVTT.

Nhà giáo NGÔ HÂN, bút danh Ngân Hồ, sinh ngày 26.05.1934 tại Mai Lâm, Đông Anh, Hà Nội. Ông từng là giảng viên trường Đại học Sư phạm Hà Nội. Ông viết bài cho Toán học và Tuổi trẻ từ những số báo năm đầu tiên và gần đây là tác giả thường xuyên của chuyên mục Giải trí toán học. Ông mong muốn THVTT ngày càng phong phú về nội dung để góp phần rèn luyện và bồi dưỡng tri thức toán học cho thế hệ trẻ Việt Nam.

Nhà giáo NGUYỄN ĐỄ sinh ngày 05.05.1941, quê ở Ninh Giang, Hải Dương. Ông tốt nghiệp Đại học Tổng hợp Hà Nội, bảo vệ luận án thạc sĩ khoa học, hiện là Trưởng phòng Khảo thí và quản lí nghiên cứu khoa học Sở Giáo dục đào tạo Hải Phòng. Ông là tác giả và đồng tác giả một số cuốn sách (biên soạn hay dịch thuật) dành cho học sinh phổ thông ; đồng thời góp phần bồi dưỡng học sinh giỏi của Hải Phòng. Ông luôn tâm niệm rằng mình là cộng tác viên của *Toán học và Tuổi trẻ* nên thường xuyên gửi bài tới tạp chí.

Toán học và Tuổi trẻ
Mathematics and Youth

Năm thứ 36
Số 267 (9-1999)
Tòa soạn : 25 Hàn Thuyên, Hà Nội
ĐT : 04.8262477-04.9714359
FAX: (84).4.9714359

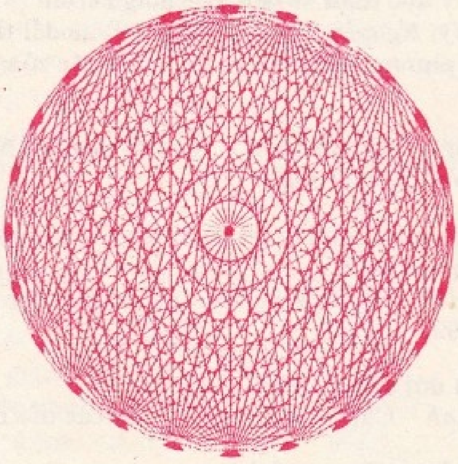
TRONG SỐ NÀY

Dành cho các bạn
TRUNG HỌC CƠ SỞ

HÌNH SAO POINSOT

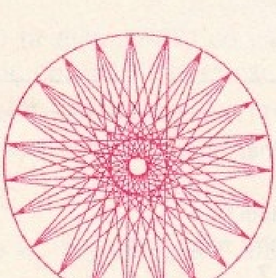
HOÀNG CHÚNG

Bạn hãy xem hình 1. Để có hình 1, ta phải kẻ bao nhiêu đoạn thẳng ? Bạn có thể trả lời câu hỏi đó sau khi giải bài tập số 5, trang 40, sách giáo khoa Hình học 8 : *Tính số đường chéo của ngũ giác, lục giác, n–giác*.

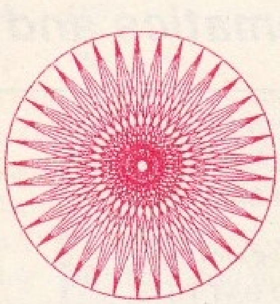


Hình 1

Hình 1 cũng như các hình 2 và 3 là các ví dụ về *hình sao Poinsot* (Poangxô) do nhà toán học Pháp Louis Poinsot (1777-1859) xây dựng.

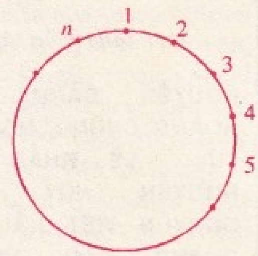


Hình 2



Hình 3

Trên đường tròn, lấy n điểm là đầu mút của n cung bằng nhau (mỗi cung bằng $\alpha = \dfrac{360^o}{n}$) và đánh số các điểm từ 1 đến n theo chiều kim đồng hồ (hình 4). Hai đầu mút của một cung $d\alpha$ với d là số tự nhiên nhỏ hơn n được gọi là *cặp điểm cách nhau d*. Ví dụ : Các cặp điểm 1 và 2, n và 1 đều cách nhau 1, cặp điểm 3 và 5 cách nhau 2, cặp điểm 4 và n cách nhau 4.



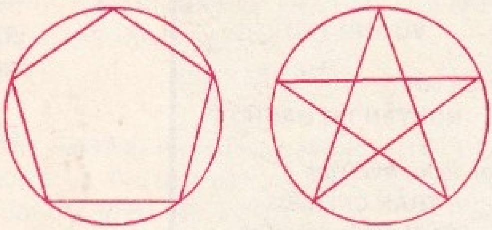
Hình 4

Chú ý rằng cặp điểm cách nhau d cũng cách nhau n - d. (vì có 2 cách tính : theo chiều quay của kim đồng hồ và ngược lại). Ví dụ nếu có 10 điểm thì cặp điểm cách nhau 4 cũng là cặp điểm cách nhau 6. Do đó chỉ cần xét với mọi d thỏa mãn $1 \le d \le \left[\dfrac{n}{2}\right]$ hoặc $\left[\dfrac{n+1}{2}\right] \le d \le n - 1$

*Trên đường tròn có n điểm cách đều, nếu nối mọi cặp điểm cách nhau d ta được một hình gọi là **hình sao Poinsot đơn cấp n**, kí hiệu P(n, d).*

Ví dụ :

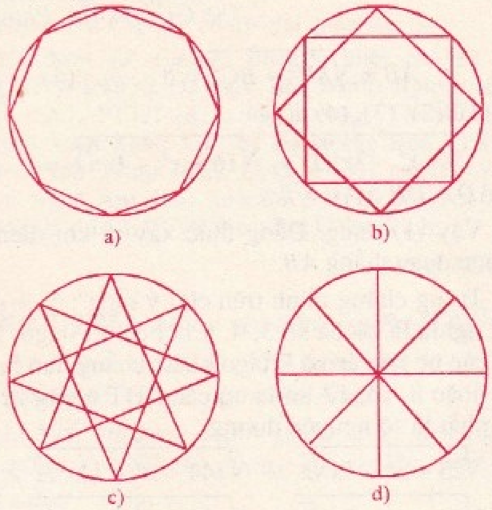
Với $n = 5$, ta có hai hình sao Poinsot đơn cấp 5 : $P(5, 1)$ là hình ngũ giác đều (hình 5a) và $P(5, 2)$ là hình sao năm cách (hình 5b).



a) b)

Hình 5

Với $n = 8$, ta có 4 hình sao Poinsot đơn cấp 8 : hình $P(8, 1)$ là hình bát giác đều (hình 6a) ; hình $P(8, 2)$ có được bằng cách nối mọi cặp điểm cách nhau 2 (hình 6b), hình $P(8, 3)$ là hình sao 8 cánh (hình 6c) và hình $P(8, 4)$ có được bằng cách nối mọi cặp điểm cách nhau 4 (hình 6, d).



Hình 6

Dễ thấy rằng *số hình sao Poinsot đơn cấp n bằng* $n - \left[\frac{n+1}{2}\right]$, *nghĩa là bằng* $\frac{n}{2}$ *nếu n chẵn và bằng* $\frac{n-1}{2}$ *nếu n lẻ.*

Ví dụ : có 2 hình sao Poinsot đơn cấp 4; 3 hình cấp 6; 2 hình cấp 5; 3 hình cấp 7,... (bạn hãy vẽ hình và kiểm tra lại).

Trên đường tròn có n điểm cách đều nhau nếu nối mọi cặp điểm cách nhau ít nhất là d với $1 \leq d \leq \left[\frac{n}{2}\right]$ *thì ta được* ***hình sao Poinsot hợp***, *kí hiệu* $P(n, \geq d)$.

Hình 1 là hình sao Poinsot hợp $P(24, \geq 1)$, có được bằng cách nối mọi cặp điểm trên đường tròn có 24 điểm. Hình 2 là hình $P(23, \geq 10)$, có được bằng cách nối mọi cặp điểm cách nhau ít nhất là 10 (tức là cách nhau 10 và 11) trên đường tròn có 23 điểm ; tương tự, hình 3 là hình $P(37, \geq 17)$.

Trở lại các hình sao Poinsot đơn. Ta có thể vẽ các hình $P(8, 1)$ và $P(8, 3)$ (hình 6a và 6c) liền một nét, không phải nhấc bút lên, các hình như thế được gọi là các *hình sao Poinsot đều*, còn các hình $P(8, 2)$ và $P(8, 4)$ (hình 6b và 6d) không thể vẽ liền một nét gọi là các *hình sao Poinsot không đều*.

Một câu hỏi được đặt ra là : *với n điểm cách đều nhau trên đường tròn đã cho, có tất cả bao nhiêu hình sao Poinsot đều ?* Poinsot đã chứng minh rằng : *hình sao P (n, d) là đều khi và chỉ khi n và d nguyên tố cùng nhau,* tức là ƯCLN $(n, d) = 1$ (bạn thử chứng minh lại điều này!).

Từ đó, suy ra rằng số $S(n)$ *các hình sao Poinsot đều cấp n bằng số các số dương nhỏ hơn* $\frac{n}{2}$ *và nguyên tố với n.*

Ví dụ : với $n = 4$ thì chỉ có số 1 ($< \frac{4}{2}$) là nguyên tố với 4, vì vậy chỉ có một hình sao Poinsot đều cấp 4; với $n = 5$ thì có hai số 1 và 2 ($< \frac{5}{2}$) là nguyên tố với 5, vì vậy cả hai hình sao Poinsot cấp 5 là đều ; với $n = 6$ thì chỉ có số 1 ($< \frac{6}{2}$) là nguyên tố với 6, vì vậy trong ba hình sao Poinsot cấp 6 chỉ có một hình sao đều.

Số $S(n)$ có thể tính bằng công thức sau đây.

Gọi $p, q, \ldots, x$ là mọi thừa số nguyên tố phân biệt của n, ta có

$$S(n) = \frac{n}{2}\left(1 - \frac{1}{p}\right)\left(1 - \frac{1}{q}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{x}\right).$$

Nếu n là số nguyên tố thì

$$S(n) = \frac{n}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{n-1}{2}.$$

Ví dụ :

Vì $4 = 2^2$, nên $S(4) = \frac{4}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = 1$,

Vì $6 = 2.3$, nên $S(6) = \frac{6}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right) = 1$,

Vì $9 = 3^2$, nên $S(9) = \frac{9}{2}\left(1 - \frac{1}{3}\right) = 3$,

Vì 11 là số nguyên tố nên $S(11) = \frac{11-1}{2} = 5$.

Chú ý rằng nếu gọi $\varphi(n)$ là số các số dương nhỏ hơn n và nguyên tố với n thì $\varphi(n) = 2.S(n)$. Số $\varphi(n)$ có mặt trong *định lí Euler* (Ơle) sau đây (mở rộng của định lí Fermat (Phecma)) :

Nếu n là số nguyên dương bất kì và $\varphi(n)$ *là số các số dương nhỏ hơn n và nguyên tố với n thì* $a^{\varphi(n)} - 1$ *chia hết cho n, với mọi số nguyên a nguyên tố với n.*

Hình học và số học có khi gần gũi với nhau như vậy đó !

Các hình sao Poinsot không chỉ có ý nghĩa về nghệ thuật trang trí như tác giả của chúng đã nghĩ ra mà ngày nay còn giúp giải nhiều bài toán phức tạp trên máy tính./.

SỬ DỤNG ĐỊNH LÍ HÀM SỐ CÔSIN ĐỂ CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

NGUYỄN ĐỄ
(Sở GD-ĐT Hải Phòng)

Để chứng minh bất đẳng thức (BĐT) có chứa biểu thức vô tỉ, ngoài các phương pháp biến đổi đại số lượng giác, có thể sử dụng *phương pháp hình học*. Xuất phát từ định lí (ĐL) hàm số côsin trong đó a, b, c là các cạnh của ΔABC:

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos A} \qquad (*)$$

ta rút ra nhận xét : Nếu các vế của BĐT đại số cần chứng minh chứa các biểu thức (*) thì có thể xét tam giác với các cạnh thỏa mãn (*) rồi chuyển BĐT cần chứng minh về BĐT hình học tương ứng. Nếu chứng minh được BĐT hình học này thì BĐT đại số là đúng.

Mặt khác, xuất phát từ bất đẳng thức hình học về độ dài các cạnh của tam giác, thay các cạnh bởi công thức (*) ta được BĐT đại số có chứa biểu thức vô tỉ.

Bài toán 1. *Chứng minh bất đẳng thức sau với số thực x bất kì :*

$$\sqrt{9 + x^2 - 3x\sqrt{2}} + \sqrt{16 + x^2 - 4x\sqrt{2}} \geq 5 \ (1)$$

Lời giải. Để chứng minh BĐT (1), ta xét các trường hợp sau :

1) Trường hợp $x \leq 0$

Ta có :

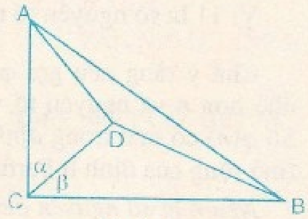
$$\sqrt{9 + x^2 - 3x\sqrt{2}} = \sqrt{9 + x^2 + 3|x|\sqrt{2}} \geq \sqrt{9} = 3$$

$$\sqrt{16 + x^2 - 4x\sqrt{2}} = \sqrt{16 + x^2 + 4|x|\sqrt{2}} \geq \sqrt{16} = 4.$$

Kí hiệu vế trái của (1) là M, ta có $M \geq 7$. Vậy (1) đúng.

2) Trường hợp $x > 0$

Ta xét ΔACD (hình 1) với $AC = 3$, $CD = x$, $\angle ACD = \alpha = 45^\circ$. Theo định lí hàm số côsin ta có :



Hình 1

$$AD = \sqrt{9 + x^2 - 3x\sqrt{2}}$$

Tương tự với ΔBCD có $BC = 4$, $CD = x$, $\angle BCD = \beta = 45^\circ$. Khi đó cũng theo định lí hàm số côsin ta có :

$$DB = \sqrt{16 + x^2 - 4x\sqrt{2}} \qquad (3)$$

Để ý rằng $\alpha + \beta = 90^\circ$, theo định lí Pitago ta có

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 5 \qquad (4)$$

Từ (2), (3), (4) ta có :

$$\sqrt{9 + x^2 - 3x\sqrt{2}} + \sqrt{16 + x^2 - 4x\sqrt{2}} = AD + DB \geq AB = 5.$$

Vậy (1) đúng. Đẳng thức xảy ra khi điểm D thuộc đoạn thẳng AB.

Trong chứng minh trên chú ý rằng : $3^2 + 4^2 = 5^2$, nghĩa là bộ ba số 3, 4, 5 là bộ số Pitago. Nếu có các bộ ba các số Pitago khác, chẳng hạn 5, 12, 13 hoặc 8, 15, 17 thì ta có các BĐT tương tự với vế phải là số nguyên dương :

$$\sqrt{25 + x^2 - 5x\sqrt{2}} + \sqrt{144 + x^2 - 12x\sqrt{2}} \geq 13;$$

$$\sqrt{64 + x^2 - 8x\sqrt{2}} + \sqrt{225 + x^2 - 15x\sqrt{2}} \geq 17.$$

Một cách tổng quát, với $a > 0$, $b > 0$ ta có bất đẳng thức sau với mọi $x \in R$:

$$\sqrt{a^2 + x^2 - ax\sqrt{2}} + \sqrt{b^2 + x^2 - bx\sqrt{2}} \geq \sqrt{a^2 + b^2}$$

Nếu lấy bộ số Pitago là 3, 4, 5 và $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 60^\circ$, tương tự trên ta có BĐT

$$\sqrt{9 + x^2 - 3x\sqrt{3}} + \sqrt{16 + x^2 - 4x} \geq 5$$ với mọi $x \in R$.

Như vậy, với các số thực dương a, b và các góc α, β dương thỏa mãn $\alpha + \beta = 90^\circ$ thì BĐT sau đúng với số thực x bất kì :

$$\sqrt{a^2 + x^2 - 2ax\cos\alpha} + \sqrt{b^2 + x^2 - 2bx\cos\beta} \geq \sqrt{a^2 + b^2},$$

Nếu thay đổi giả thiết, xét trường hợp $\alpha = \beta = 36^\circ$, $AB = BC$ ta có bài toán sau :

Bài toán 2. *Chứng minh BĐT sau với số thực x bất kì :*

$$\sqrt{6 + 2\sqrt{5} + 4x^2 - x(1 + \sqrt{5})^2} + \sqrt{4 + 4x^2 - 2x(1 + \sqrt{5})} \geq 1 + \sqrt{5}.$$

Lời giải. Xét hình 2 với $AC = 1$, $AB = BC$ và $\alpha = 36^\circ$.

Đặt $\gamma = 18^\circ$ thì $5\gamma = 90^\circ$ nên $\sin 4\gamma = \cos\gamma$ và $\cos 2\gamma = \sin 3\gamma$. Từ đó có $4\sin 2\gamma \cos 2\gamma = \cos\gamma$

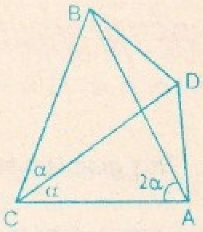
$\Rightarrow 4\sin\gamma\cos\gamma\sin 3\gamma = \cos\gamma \Rightarrow 4\sin\gamma\sin 3\gamma = 1$

$\Rightarrow 4\sin\gamma(3\sin\gamma - 4\sin^3\gamma) = 1$

$\Rightarrow 16\sin^4\gamma - 12\sin^2\gamma + 1 = 0.$

Giải phương trình này ta được $\sin^2 18^o = \dfrac{3-\sqrt{5}}{8}$.

(Giá trị $\dfrac{3+\sqrt{5}}{8}$ bị loại vì $\sin^2 18^o < \sin^2 30^o = \dfrac{1}{4}$).



Hình 2

Từ đó $\cos 36^o =$

$= 1 - 2\sin^2 18^o = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$

suy ra $\cos 72^o = 2\cos^2 36^o - 1 = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$

Áp dụng định lí hàm số côsin cho ΔABC với $AC=1$, $AB=BC=y$, $\angle BAC = \angle BCA = 72^o$ ta có :

$$y^2 = y^2 + 1 - 2y\,\frac{\sqrt{5}-1}{4} \Leftrightarrow y = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

Nếu kí hiệu $CD = x$, lại áp dụng ĐL hàm số côsin đối với các tam giác BCD và ACD, được :

$$BD = \sqrt{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + x^2 - 2x\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{6 + 2\sqrt{5} + 4x^2 - x(1+\sqrt{5})^2}$$

$$AD = \sqrt{1 + x^2 - 2x\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{4 + 4x^2 - 2x(1+\sqrt{5})}$$

Dễ thấy $BD + AD \ge AB \Rightarrow$

$$\sqrt{6 + 2\sqrt{5} + 4x^2 - x(1+\sqrt{5})^2} + \sqrt{4 + 4x^2 - 2x(1+\sqrt{5})} \ge 1 + \sqrt{5}$$

Bất đẳng thức này đúng với mọi $x \in R$, đẳng thức xảy ra khi điểm D thuộc đoạn thẳng AB. Trong trường hợp tổng quát, với các số dương a, b, x và các góc α, β dương sao cho $\alpha + \beta \le 90^o$, ta có bất đẳng thức :

$$\sqrt{a^2 + x^2 - 2ax\cos\alpha} + \sqrt{b^2 + x^2 - 2bx\cos\beta} \ge \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos(\alpha+\beta)}$$

Bài toán 3. *Chứng minh rằng với bất kì $x, y \in R$ ta có bất đẳng thức*

$$\sqrt{9 + x^2 - 3x\sqrt{3}} + \sqrt{x^2 + y^2 - xy\sqrt{3}} + \sqrt{16 + y^2 - 4y\sqrt{3}} \ge 5 \quad (5)$$

Giải. Để ý rằng

$$x^2 + y^2 - xy\sqrt{3} = \left(x - \frac{y\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{y^2}{4} \ge 0$$

$$y^2 + 16 - 4y\sqrt{3} = (y - 2\sqrt{3})^2 + 4$$

$$9 + x^2 - 3x\sqrt{3} = \left(x - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}$$

Ta xét vế trái của BĐT (5) trong các trường hợp sau :

1) Với $x \le 0 \le y$ có :

$$\sqrt{9 + x^2 + 3|x|\sqrt{3}} + 0 + \sqrt{(y - 2\sqrt{3})^2 + 4} \ge \sqrt{9} + \sqrt{4} = 5$$

2) Với $y \le 0 \le x$ có

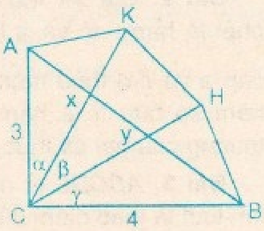
$$\sqrt{\left(x - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}} + 0 + \sqrt{16 + y^2 + 4|x|\sqrt{3}} \ge \sqrt{\frac{9}{4}} + \sqrt{16} \ge 5{,}5 > 5$$

3) Với $x \le 0$, $y \le 0$ có

$$\sqrt{9 + x^2 + 3|x|\sqrt{3}} + 0 + \sqrt{16 + y^2 + 4|x|\sqrt{3}} \ge \sqrt{9} + \sqrt{16} = 7 > 5.$$

4) Với $x > 0$, $y > 0$,

Vẽ tam giác vuông ABC có $AC = 3$, $BC = 4$, $\angle ACB = 90^o$. Chia góc ACB thành 3 góc bằng nhau. $\angle ACK = \angle KCH = \angle HCB = 30^o$.



Hình 3

Đặt $CK = x$, $CH = y$ (hình 3).

Áp dụng ĐL hàm số côsin đối với các tam giác ACK, KCH, HCB ta có :

$$AK = \sqrt{9 + x^2 - 3x\sqrt{3}}$$

$$KH = \sqrt{x^2 + y^2 - xy\sqrt{3}}$$

$$BH = \sqrt{16 + y^2 - 4y\sqrt{3}}$$

$$AB = 5$$

Từ các đẳng thức trên và $AK + KH + HB \ge AB = 5$, ta có bất đẳng thức cần chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi các điểm K, H thuộc đoạn thẳng AB

Bây giờ nếu $\angle ACB = 135^o$ và $\angle ACK = \angle KCH = \angle HCB = 45^o$, $BC = 1$, $AC = \sqrt{2}$, ta có bất đẳng thức :

$$\sqrt{2 + x^2 - 2x} + \sqrt{x^2 + y^2 - xy\sqrt{2}} + \sqrt{y^2 + 1 - y\sqrt{2}} \ge \sqrt{5}$$

Ba bài toán trên minh họa cho việc sử dụng ĐL hàm số côsin để chứng minh hoặc sáng tạo ra các BĐT từ trường hợp đơn giản (một tam giác) đến phức tạp (hai, ba tam giác kề nhau). Bằng cách tương tự chắc các bạn có thể phát hiện ra nhiều BĐT mới./.

Nhìn ra thế giới

ĐỀ THI OLYMPIC TOÁN CỦA NHẬT BẢN (2-1995)

Thời gian làm bài : 4 giờ

Bài 1. Giả sử n và r là các số nguyên dương sao cho $n \geq 2$ và $r \not\equiv 0 \pmod{n}$, gọi g là ước số chung lớn nhất của n và r. Chứng minh rằng :

$$\sum_{i=1}^{n-1} \left\{ \frac{ri}{n} \right\} = \frac{1}{2}(n-g)$$

trong đó $\{x\} = x - [x]$ là phần phân của x.

Bài 2. Giả sử $f(x)$ là hàm số hữu tỉ, không phải là hằng số và a là số thực. Tìm tất cả các cặp a và $f(x)$ thỏa mãn $\left(f(x)\right)^2 - a = f(x^2)$. Ở đây hàm số hữu tỉ là hàm số có thể biểu thị bằng thương của hai đa thức.

Bài 3. $ABCDE$ là một ngũ giác lồi. Gọi S, R lần lượt là giao điểm của AC, AD với BE. Gọi T, P lần lượt là giao điểm của CA, CE với BD. Gọi Q là giao điểm của CE và AD. Giả sử diện tích của $\triangle ASR$, $\triangle BTS$, $\triangle CPT$, $\triangle DQP$, $\triangle ERQ$ đều bằng 1.

a) Tính diện tích của ngũ giác $PQRST$.

b) Tính diện tích của ngũ giác $ABCDE$.

Bài 4. Dãy số a_1, a_2, a_3, ... được xác định bởi : $a_{2n} = a_n$ và $a_{2n+1} = (-1)^n$. Một điểm P di chuyển trên mặt phẳng tọa độ như sau :

a) Giả sử P_0 là điểm gốc. Trước tiên P chuyển từ P_0 tới $(1, 0)$, gọi điểm này là P_1.

b) Sau khi P chuyển tới P_i, nó quay hướng về bên trái một góc vuông và di chuyển về phía trước 1 đơn vị nếu $a_i = 1$ và nó quay hướng về bên phải một góc vuông và di chuyển về phía trước 1 đơn vị nếu $a_i = -1$. Gọi điểm này là P_{i+1}.

Chứng minh rằng P không đi qua cùng một đoạn thẳng hai lần.

Bài 5. Giả sử k và n là các số nguyên sao cho $1 \leq k \leq n$ và a_1, a_2, ..., a_k thỏa mãn

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + \ldots + a_k = n, \\ a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_k^2 = n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_1^k + a_2^k + \ldots + a_k^k = n. \end{cases}$$

Chứng minh rằng

$$(x+a_1)(x+a_2)\ldots(x+a_k) = $$

$$= x^k + \binom{n}{1}x^{k-1} + \binom{n}{2}x^{k-2} + \ldots + \binom{n}{k},$$

trong đó hệ số

$$\binom{i}{j} = \frac{i(i-1)\ldots(i-j+1)}{j(j-1)\ldots2.1} \quad ./.$$

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO KHEN THƯỞNG HỌC SINH DỰ THI QUỐC TẾ

Chiều 31.8.1999, Bộ Giáo dục và Đào tạo đã tổ chức Lễ tuyên dương khen thưởng học sinh đạt giải Olympic Quốc tế và khu vực. Phó Thủ tướng Phạm Gia Khiêm đã đến dự. Đoàn học sinh thi Olympic Toán Quốc tế là đoàn đạt thành tích cao nhất trong các đoàn và cao nhất từ trước tới nay.

Thủ tướng Chính phủ tặng Bằng khen cho các học sinh đoạt Huy chương Vàng. Bộ Giáo dục và Đào tạo tặng Bằng khen cho tất cả các học sinh đoạt giải và 58 thầy cô có thành tích trong việc đào tạo và bồi dưỡng học sinh đoạt giải.

Mức thưởng cho các Huy chương Olympic Quốc tế là : 5 triệu đồng (HCV), 3 triệu đồng (HCB), 2 triệu đồng (HCĐ). Mức thưởng cho các Huy chương Olympic Toán Châu Á - Thái Bình Dương là : 3 triệu đồng (HCV), 2 triệu đồng (HCB), 1,5 triệu đồng (HCĐ), 8 trăm nghìn đồng (Bằng danh dự).

Bạn Lê Thái Hoàng, ĐHSP-ĐHQG Hà Nội là học sinh duy nhất đoạt 2 Huy chương Vàng của 2 kì thi.

ĐÍNH CHÍNH

Trong THVTT số 266 (8/99) có một số lỗi, xin sửa lại như sau :

Trang	*Dòng*	*In sai*	*Sửa lại*
2	6↓	$x = y = \frac{k^2}{4}$	$x = y = \frac{k}{2}$
4	7↑	Bùi Mạnh Hưng	Bùi Mạnh Hùng
5	24↓	$C\left(\sum_{1 \leq i < n}\right)^4$	$C\left(\sum_{1 \leq i \leq n} x_i\right)^4$
10	6,7↑	$(x_1, x_2 \ldots 2.1979$	(Bỏ 2 dòng này)

Thành thật xin lỗi bạn đọc.

Diễn đàn DẠY VÀ HỌC TOÁN

Trao đổi thêm về cách viết phương trình phân giác một góc của tam giác

THÁI TĂNG SỸ - NGUYỄN THỊ THU NHI
(Trường PTTH Phan Bội Châu – Bình Thuận)

Bài "Các phương pháp viết phương trình phân giác một góc của tam giác" (*) trên tạp chí Toán học và Tuổi trẻ số 1/1999 đã nêu bốn phương pháp viết phương trình phân giác một góc của tam giác. Sau đây chúng tôi xin giới thiệu thêm một phương pháp khác

Phương pháp 5

Ví dụ. Trong mặt phẳng Oxy, cho $A(19, \sqrt{35})$, $B(2, 0)$, $C(18, 0)$. Viết phương trình phân giác trong góc A (ví dụ của (*)).

Gọi d là đường phân giác trong của góc A.

Điều kiện cần và đủ để điểm $M(x, y)$ khác A nằm trên d là :

$$\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) = \cos(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AC})$$

hay : $$\frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM}}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|} \qquad (1)$$

Ta có : $\overrightarrow{AM} = (x - 19, y - \sqrt{35})$

$\overrightarrow{AB} = (-17, -\sqrt{35})$, $|\overrightarrow{AB}| = 18$.

$\overrightarrow{AC} = (-1, -\sqrt{35})$, $|\overrightarrow{AC}| = 6$.

Từ đó $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM} = -17x - \sqrt{35}y + 358$.

$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AC} = -x - \sqrt{35}y + 54$.

Thế vào 2 vế của (1), ta được :

$$\frac{-17x - \sqrt{35}y + 358}{18} = \frac{-x - \sqrt{35}\,y + 54}{6}$$

hay : $7x - \sqrt{35}y - 98 = 0$

Vậy phương trình đường phân giác trong d của góc A là :

$$7x - \sqrt{35}y - 98 = 0$$

Chú ý. Nếu d' là đường phân giác ngoài của góc A thì :

$$\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) = -\cos(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AC}).$$

Do đó phương trình đường phân giác ngoài d' của góc A là :

$$5x + \sqrt{35}y - 130 = 0 \ ./.$$

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

BÀI SỐ 21

Problem. Given a number k, let d_k denote the sum of the divisors of k. Prove that

$$d_1 + d_2 + \ldots + d_n = \left[\frac{n}{1}\right] + 2\left[\frac{n}{2}\right] + \ldots + n\left[\frac{n}{n}\right],$$

where $\left[\frac{n}{k}\right]$ denotes the integral part of a rational number $\frac{n}{k}$.

Solution. Let C_k denote the hyperbola $xy = k$ on the plane, $k = 1, 2, \ldots, n$. We assign to every divisor x of k the point $(x, k/x)$ on C_k. Then d_k is the sum of the abscissas of the points with positive integral coordinates on C_k. Since all hyperbolas C_k with $k = 1, 2, \ldots, n-1$ lie below the hyperbola C_n, the sum $d_1 + d_2 + \ldots + d_n$ is equal to the sum of the abscissas of all points with positive integral coordinates on these hyperbolas which lie below C_n or on C_n. Observe that the number of all such points with abscissas equal a given number m is equal to $\left[\frac{n}{m}\right]$, $m = 1, 2, \ldots, n$. The sum of the abscissas of these points is $m\left[\frac{n}{m}\right]$. Therefore, we obtain

$$d_1 + d_2 + \ldots + d_n = \left[\frac{n}{1}\right] + 2\left[\frac{n}{2}\right] + \ldots + n\left[\frac{n}{n}\right].$$

Từ mới.

divisor	= ước số
integral	= nguyên, tính nguyên (tính từ)
rational	= hữu tỉ (tính từ)
hyperbola	= đường hypebol
assign	= gán, gắn (động từ)
abscissa	= hoành độ
coordinate	= tọa độ
below	= dưới, bên dưới
observe	= để ý, quan sát (động từ)
obtain	= nhận được (động từ)

NGÔ VIỆT TRUNG

DÀNH CHO CÁC BẠN CHUẨN BỊ THI ĐẠI HỌC

ĐỀ THI MÔN TOÁN

TUYỂN SINH VÀO TRƯỜNG ĐẠI HỌC XÂY DỰNG NĂM 1999

Câu I. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$.

1. Tìm tập xác định và tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến của $f(x)$;

2. Tìm các đường tiệm cận của đồ thị $y = f(x)$;

3. **Chưa phân ban:** Chứng minh rằng :

$$2,5 < \int_2^3 f(x).dx < \frac{9\sqrt{2}}{4}.$$

Chuyên ban: Tính $\displaystyle\int_{\sqrt{3}/2}^{\sqrt{8}/3} f\left(\frac{1}{x}\right).dx$

Câu II. 1. Giải phương trình :

$\log_x(\cos x - \sin x) + \log_{1/x}(\cos x + \cos 2x) = 0$;

2. Giải bất phương trình :

$$(x^3+1) + (x^2+1) + 3x\sqrt{x+1} > 0.$$

Câu III.

1. Tìm $\displaystyle\int \frac{\sin(\alpha + x)}{\cos^2 x}dx$ (α là hằng số) ;

2. Tìm giá trị lớn nhất và bé nhất của biểu thức $A = 2x - y - 2$, với x; y thỏa mãn phương trình $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$.

Câu IV. Trong hệ tọa độ Đềcác trực chuẩn $Oxyz$ cho O (0, 0, 0) ; B (a, 0, 0) ; D (0, 1, 0) ; O'(0, 0, a) là 4 đỉnh của hình hộp chữ nhật $OBCD.O'B'C'D'$.

1. Tìm a để hai vectơ $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{O'C}$ vuông góc với nhau ;

2. **Chưa phân ban:** Cho $a = 2$, viết phương trình đường vuông góc chung của hai đường thẳng BD và CD';

Chuyên ban: Cho $a = 2$, viết phương trình hình chiếu vuông góc của đường thẳng BD' lên mặt phẳng OCB';

3. Cho $a = 2$, tìm tọa độ hai đỉnh M, N của tam giác EMN, biết $E(1, 0, 1)$ và hai đường cao của tam giác đó nằm trên các đường thẳng BD và DO'.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu I. 1. Hàm xác định với x thuộc một trong hai khoảng $(-\infty; -1)$; $(1; +\infty)$. Đạo hàm $f'(x) = \dfrac{(x^2-2)x}{(x^2-1)^{3/2}}$; do đó hàm số nghịch biến trong các khoảng : $(-\infty; -\sqrt{2})$; $(1, \sqrt{2})$; đồng biến trong các khoảng $(-\sqrt{2}, -1)$; $(\sqrt{2}, +\infty)$.

2. Hai tiệm cận đứng là $x = -1$ và $x = 1$; Hai tiệm cận xiên là $y = -x$ và $y = x$.

3. Chưa phân ban : Vì trong đoạn [2, 3] hàm $f(x)$ đồng biến (thực sự), nên

$$\int_2^3 f(x)\,.\,dx < \int_2^3 f(3).dx = \frac{9\sqrt{2}}{4};$$

vì trong đoạn [2, 3] có $x < f(x)$, nên

$$2,5 = \int_2^3 x.dx < \int_2^3 f(x).dx.$$

Chuyên ban:

$$\mathrm{I} = \int_{\sqrt{3}/2}^{\sqrt{8}/3} f\left(\frac{1}{x}\right)dx = \int_{\sqrt{3}/2}^{\sqrt{8}/3} \frac{1}{x^2\sqrt{\dfrac{1}{x^2}-1}}\,.\,dx$$

$$= \int_{\sqrt{3}/2}^{\sqrt{8}/3} \frac{-x}{[(1-x^2)-1]\sqrt{1-x^2}}\,.\,dx$$

Đặt $t = \sqrt{1-x^2}$.

Khi đó $x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow t = \dfrac{1}{2}$; $x = \dfrac{\sqrt{8}}{3} \Rightarrow t = \dfrac{1}{3}$ và

$$I = \int_{1/2}^{1/3} \frac{dt}{t^2-1} = \int_{1/2}^{1/3} \frac{dt}{t^2-1}$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\frac{1}{3}-1}{\frac{1}{3}+1} \times \frac{\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{2}-1}\right| = \frac{1}{2}\,.\ln\frac{3}{2}.$$

Câu II. Phương trình tương đương với $\log_x(\cos x - \sin x) - \log_x(\cos x + \cos 2x) = 0$ và do đó tương đương với hệ : $\begin{cases} x > 0 \ ; \ x \neq 1 \\ \cos x - \sin x > 0. \\ \cos 2x = -\sin x \end{cases}$

Giải phương trình $\cos 2x = -\sin x$ hay $\cos 2x = \cos(\frac{\pi}{2} + x)$ được kết quả là $x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$). Đối chiếu với điều kiện $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ \cos x - \sin x > 0 \end{cases}$ được đáp số của bài toán là $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ($k \in \mathbf{N}^*$).

2. Đặt $t = x\sqrt{x+1}$, đưa bất phương trình về dạng $t^2 + 3t + 2 > 0$ và giải ra được : $t < -2$ hoặc $t > -1$. Với x thuộc $[-1, 0]$ giá trị của t thuộc $(-1, 0]$; khi x không âm giá trị của t cũng không âm. Vậy $t > -1$ được thỏa mãn với mọi $x \geq -1$. Đáp số $x \geq -1$.

Câu III. 1. Phân tích $I = \int \frac{\sin(\alpha + x)}{\cos^2 x} dx$ thành tổng $I = I_1 \sin\alpha + I_2 \cos\alpha$, trong đó $I_1 = \int \frac{dx}{\cos x}$; $I_2 = \int \frac{\sin x \, dx}{\cos^2 x}$. Do đó

$$I = \sin\alpha . \ln\left|tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right| + \cos\alpha . \frac{1}{\cos x} + C$$

2. Đặt $x = 2\cos t$; $y = 3\sin t$ ta có $A = 4\cos t - 3\sin t - 2$. Có $A = 5\cos(t + \varphi) - 2$, với φ là góc mà $\cos\varphi = 0{,}8$ và $\sin\varphi = 0{,}6$. Do đó giá trị lớn nhất của A là 3, giá trị nhỏ nhất của A là -7.

Câu IV. 1. Hai vectơ $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{O'C}$ có tọa độ tương ứng là $(-a, 1, 0)$ và $(a, 1, -a)$. Hai vectơ đó vuông góc với nhau khi và chỉ khi tích vô hướng của chúng bằng 0, tức là

$(-a).a + 1.1 + 0.(-a) = 0$ hay $a^2 - 1 = 0$, suy ra $a = \pm 1$.

2. Chưa phân ban: Phương trình tham số của hai đường thẳng BD và CD' tương ứng là $\begin{cases} x = 2 - 2u \\ y = u \\ z = 0 \end{cases}$ và $\begin{cases} x = 2 - 2v \\ y = 1 \\ z = 2v \end{cases}$.

Tìm u, v để $M(2-2u, u, 0)$ và $N(2-2v, 1, 2v)$ là giao điểm của đường vuông góc chung với BD và CD' tương ứng, khi đó vectơ $\overrightarrow{MN}$ có tọa độ là $(-2v+2u, 1-u, 2v)$ và nó vuông góc với các vectơ $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{CD'}$. Đi đến hệ phương trình : $\begin{cases} (4v - 4u) + (1 - u) = 0 \\ (4v - 4u) + 4v = 0 \end{cases}$, giải ra được $\begin{cases} u = 1/3 \\ v = 1/6 \end{cases}$.

Điểm M có tọa độ $(4/3, 1/3, 0)$ và vectơ $\overrightarrow{MN}$ có tọa độ $(1/3, 2/3, 1/3)$. Phương trình đường vuông góc chung cần tìm : $\begin{cases} x = t + 4/3 \\ y = 2t + 1/3. \\ z = t \end{cases}$

Chuyên ban: Phương trình mặt phẳng qua BD' vuông góc với OCB' là $\begin{cases} x = 2 - 2.u + 1.v \\ y = 0 + 1.u - 2.v \\ z = 0 + 2.u - 1.v \end{cases}$ hay : $x + z = 2$.

Phương trình mặt phẳng OCB' : $\begin{cases} x = 0 + 2.u + 2.v \\ y = 0 + 1.u + 0.v \\ z = 0 + 0.u + 2.v \end{cases}$ hay $x - 2y - z = 0$.

Phương trình hình chiếu là $\begin{cases} x + z = 2 \\ x - 2y - z = 0 \end{cases}$

3. Vì E là trung điểm của đoạn thẳng BO' nên E nằm trong mặt phẳng xác định bởi hai đường thẳng BD và DO'. Tọa độ hai vectơ $\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{DO'}$ tương ứng là $(-2, 1, 0)$ và $(0, -1, 2)$. Mặt phẳng P qua E vuông góc với BD cắt DO' tại một đỉnh tam giác, chẳng hạn là đỉnh M. Phương trình mặt phẳng P : $-2x+y+2 = 0$; Phương trình đường thẳng DO' : $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 - t. \\ z = 2t \end{cases}$ Do đó tọa độ điểm M là $(0, -2, 6)$. Tương tự (hoặc áp dụng tính đối xứng), có đỉnh thứ hai là N có tọa độ $(6, -2, 0)$.

DOÃN TAM HÒE
(Đại học Xây dựng Hà Nội)

TOÁN HỌC VÀ ĐỜI SỐNG

CẤP SỐ NHÂN VỚI TẦN SỐ CÁC NỐT NHẠC

TRỊNH AN NINH
(Hà Nội)

Hệ âm hiện đại lấy chuẩn là tần số 440Hz cho âm **la** ở quãng 8 thứ nhất, còn âm **si**, **đô**, **rê**, **mi**, ... là bao nhiêu ? - Tất cả nhờ vào "tai" của các nhạc công, nhạc sĩ. Họ theo thanh mẫu **la** (Diapason) lên dây **la**, rồi từ đó dùng "tai" để lên các dây khác. Khoảng cách giữa các âm là vài chục Hz, nên dùng tai thì làm sao tránh khỏi sự sai lệch vài Hz.

Bây giờ ta sẽ giúp các nhạc công, kể cả người không biết gì về âm nhạc có thể lên dây đàn đúng mà không dùng đến tai, chỉ dùng mắt thôi bằng cách nhìn đồng hồ chỉ tần số âm thanh.

Để giải quyết vấn đề này, ta hãy làm quen với khái niệm Thang âm. Trong đời sống, chiếc thang dùng để leo lên cao hoặc xuống thấp, gồm nhiều bậc thang. Trong âm nhạc cũng vậy, thang âm được lấy trong một quãng 8 với cách chia bậc bằng nhiều nốt. Mỗi dân tộc có một cách chia riêng nên có hàng trăm thang âm khác nhau, được các dân tộc lưu giữ bằng truyền miệng. Mãi đến thế kỉ 17, nhạc sĩ người Đức là Vecmaixtơ (1645-1706) mới tìm ra thang âm gồm 7 nốt **đô**, **rê**, **mi**, **fa**, **son**, **la**, **si**, với 12 bán cung trong một quãng 8 và ghi trên khuông nhạc bởi 5 dòng kẻ. Cách chia một quãng 8 ra bảy nốt gồm 12 bán cung gọi là *Thang âm bình quân* hay *Thang âm điều hòa*.

Bình quân là chia đều. Chia đều cái gì ? Để hiểu khái niệm này, ta lại làm quen với khái niệm "Tỉ tần", là tỉ số tần số của 2 nốt nhạc cao và thấp.

Ví dụ $\begin{cases} \textbf{la} \textit{ có tần số } 440\ Hz \\ \textbf{là} \textit{ có tần số } 220\ Hz \end{cases}$

$\Rightarrow$ Tỉ tần của 2 nốt cũng âm gần nhau là $\dfrac{440}{220} = 2$

Trong thang âm bình quân, người ta chia quãng 8 ra 12 phần (bán cung) sao cho tỉ tần của 2 nốt liên tiếp là bằng nhau (= T). Dấu # là dấu thăng lên 1 bán cung.

Dãy nốt	đô	đô#	rê	rê#	mi	fa	fa#
Tần số	T_o	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6

Dãy nốt	son	son#	la	la#	si	đố
Tần số	T_7	T_8	T_9	T_{10}	T_{11}	T_{12}

Tỉ tần của 2 nốt cách nhau 1 bán cung :

$$\frac{T_1}{T_0} = \frac{T_2}{T_1} = \frac{T_3}{T_2} = \dots = \frac{T_{11}}{T_{10}} = \frac{T_{12}}{T_{11}} = T \quad (1)$$

Suy ra :

$$\frac{T_1}{T_o}\cdot\frac{T_2}{T_1}\cdot\frac{T_3}{T_2}\cdots\frac{T_{11}}{T_{10}}\cdot\frac{T_{12}}{T_{11}} = \frac{T_{12}}{T_o} = T^{12} = 2$$

$$\Rightarrow T = 2^{1/12} \approx 1{,}0594 \quad (2)$$

Từ (1) $\Rightarrow T_1 = T_oT, \Rightarrow T_2 = T_1T = T_oT^2$

$\Rightarrow T_3 = T_oT^3, \dots, \quad \Rightarrow T_n = T_o T^n$

$$T_n \approx T_o.1{,}0594^n \quad (3)$$

Từ (3) ta thấy tần số các nốt nhạc là các số hạng của một cấp số nhân có số hạng tổng quát là $T_n \approx T_o.1{,}0594^n$ và (3) là công thức tính tần số của bất cứ nốt nhạc nào với T_o là tần số đã biết của nốt nhạc đầu tiên

Dưới đây là bảng tính gần đúng với nốt Là đầu tiên có $T_o = 220$Hz

Quãng 8 (**là-la**)

Âm số	0	1	2	3	4	5	6
Tên nốt	**là**	**là#**	**si**	**đô**	**đô#**	**rê**	**rê#**
Tần số	220	233	247	262	277	294	311

Âm số	7	8	9	10	11	12
Tên nốt	**mi**	**fa**	**fa#**	**son**	**son#**	**la**
Tần số	330	349	370	392	415	440

Với các nốt nhạc ở quãng 8 cao, ta nhân đôi tần số của nốt nhạc cùng tên ở quãng 8 kề trước nó, ở quãng 8 thấp thì chia đôi.

Ví dụ : Đô : 262Hz

$\Rightarrow \begin{cases} \textit{Đố} : 262.2 = 524\ Hz \\ \textit{Đồ} : 262 : 2 = 131\ Hz \end{cases}$

Nếu mới học đàn dây, bạn có được chiếc đồng hồ đo tần số âm thì bạn khỏi lo việc lên dây đàn sai hoặc bấm không chuẩn./.

Trả lời bạn đọc

Hỏi: *Em có thể đặt mua Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ qua Tòa soạn được không ?*
(CAO HỒNG HƯNG, 10A1, PTTH Tịnh Biên, An Giang)

Đáp: Các bạn có thể đặt mua tạp chí tại cơ sở Bưu điện gần nhất hoặc Đại lí Báo chí nào đó. Tòa soạn không nhận đặt mua tạp chí tại Tòa soạn. Các cá nhân muốn làm Đại lí phát hành tạp chí xin liên hệ với Phòng Kế hoạch và Phát hành của Nhà xuất bản Giáo dục, 57 Giảng Võ, Hà Nội (Điện thoại 04.5141253, gặp chị Hải).

Hỏi : *Đề nghị Tòa soạn cho biết thể lệ và thời hạn gửi bài giải của chuyên mục "Đề ra kì này" và "Câu lạc bộ".* (của nhiều bạn).

Đáp: Phía trên bài giải cần ghi rõ và đúng :

+ Số đề và số tạp chí, chẳng hạn : T1/267

+ Họ và tên, lớp, trường, quận (huyện), tỉnh (thành phố).

Các bạn chuyển lớp, chuyển trường, cần ghi rõ địa chỉ cũ và mới hoặc nơi ở.

- Ngoài phong bì cần ghi : Dự thi giải toán *số Tạp chí nào* hoặc *Bài giải Câu lạc bộ số Tạp chí nào.*

- Không viết hai bài giải toán dự thi vào cùng một tờ giấy (vì mỗi bài giải được gửi cho một người chấm).

- Các học sinh THCS được gửi bài giải toán dành cho THPT, nhưng ngược lại sẽ không được.

- Thời hạn nhận bài giải của *Đề ra kì này* là *2 tháng* kể từ tháng ra báo. Chẳng hạn, đề đăng ở số 266 (8/1999) thì ngày cuối cùng nhận bài giải tại Tòa soạn là 30/10/1999. Bài giải đăng ở số 270 (12/1999).

Thời hạn nhận bài giải của *Câu lạc bộ* (*Giải trí toán học, Sai lầm ở đâu*, ...) là *1 tháng* kể từ lúc ra báo. Chẳng hạn câu hỏi đăng ở số 266 (8/1999) thì ngày cuối cùng nhận bài giải tại Tòa soạn là 15/9/1999. Bài giải đăng ở số 268 (10/1999).

- Bài giải chỉ gửi về một địa chỉ :

Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ
25 Hàn Thuyên, Hà Nội

Hỏi: *Trong lời giải bài toán 3 của tác giả Mai Thắng ở THVTT số 255 (9/1998) trang 20 : "Giải và biện luận theo tham số m bất phương trình :*

$$|\cot g^2 x - \cot g x| < |\cot g^2 x - m| \ (1)\ "$$

có viết :

$(1) \Leftrightarrow |(\cot g^2 x - \cot g x) - (m - \cot g x)| >$
$> |\cot g^2 x - \cot g x| - |m - \cot g x|$ *(2).*

Tại sao lại viết được thế ?
(HOÀN LONG, *Khánh Hòa*)

Đáp: Đây là sơ suất của tác giả và tòa soạn. Xin cám ơn bạn và xin lỗi bạn đọc. Bất phương trình (2) *không có lí gì* để tương đương với (1) và kể cả cách giải nêu ở nhận xét cũng bị sai. Bài toán 2 cũng không giải được nhờ nhận xét dựa vào 2-2. Tóm lại không thể giải bài toán 3 như tác giả đã trình bày.

Hỏi: * *Có được ghi* $\frac{\pi}{2} = 90^0$ *hay không ?*

* *Có được sử dụng qui tắc L'Hospital để tìm giới hạn trong các kì thi không ?*
(LƯƠNG CÔNG CHIẾN, 11A2T, PTTHCB Lê Quý Đôn, Hà Tây)

Đáp: Chính xác hơn nên viết $\frac{\pi}{2}$ rad = 90^o, tuy nhiên người ta quy ước rằng khi đo góc bằng radian có thể viết tắt bằng cách bỏ đơn vị đo radian. Chẳng hạn : $\sin\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

Qui tắc L'Hospital không thuộc chương trình phổ thông nên các bạn không được sử dụng khi tìm giới hạn hàm số trong các kì thi ở phổ thông. Nếu biết qui tắc này, các bạn chỉ có thể dùng để kiểm tra kết quả mà thôi !

Hỏi: *Chúng em đã tranh luận với nhau rất nhiều về bài toán : "Cho x, y thỏa mãn*

$$\begin{cases} x + y = a + 1 & (1) \\ x^2 + y^2 = 2a^2 - 2 & (2) \end{cases}$$

Xác định giá trị lớn nhất của xy".

Bạn Giang cho lời giải : Từ (1) và (2) ta có :

$$xy = \frac{1}{2}[(x+y)^2 - (x^2+y^2)] = \frac{1}{2}[(a+1)^2 - (2a^2-2)]$$

$$= \frac{1}{2}[4 - (a-1)^2] = 2 - \frac{1}{2}(a-1)^2 \le 2.$$

Vậy xy đạt giá trị lớn nhất là 2 khi a = 1. Em cho rằng lời giải sai, nhưng bạn Giang không chịu ! Mong Tòa soạn "xử" giúp !

(Thay mặt bạn Giang. PHẠM ĐỨC BÌNH, 9B, THCS Tam Hợp, Bình Xuyên, Vĩnh Phú).

Đáp: Em Bình thân mến ! Bạn Giang "không chịu" là tại vì em chưa chứng minh được bạn ấy sai ! Thử thay a = 1 vào hệ thì rõ ngay thôi! Với a = 1 thì làm gì có giá trị của x và y, nên x.y cũng tồn tại đâu, mà... lớn nhất. Phải đặt điều kiện để hệ có nghiệm rồi mới căn cứ vào đó để tìm giá trị lớn nhất của xy. Nhiều anh chị khi thi đại học cũng hay nhầm như vậy. Mong hai em có cùng lời giải đúng.

THVTT

ĐỀ RA KÌ NÀY

CÁC LỚP THCS

Bài T1/267. Có thể thêm bao nhiêu chữ số 0 xen giữa chữ số 6 và 8 của số 1681 ($1681=41^2$) để số mới tạo thành cũng là số chính phương ?

NGUYỄN DUY LIÊN
(Vĩnh Phúc)

Bài T2/267. Giải phương trình :

$$\sqrt{5x^2+14x+9}-\sqrt{x^2-x-20}=5\sqrt{x+1}$$

HUỲNH TẤN CHÂU
(Phú Yên)

Bài T3/267. Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{a+3b}+\frac{1}{b+3c}+\frac{1}{c+3a}\geq$$
$$\geq\frac{1}{a+2b+c}+\frac{1}{b+2c+a}+\frac{1}{c+2a+b}$$

trong đó a, b, c là các số dương. Đẳng thức xảy ra khi nào ?

HOÀNG CÔNG THÀNH
(Tp Hồ Chí Minh)

Bài T4/267. Các trung tuyến AM, CN của ΔABC cắt nhau tại G. Chứng minh rằng tứ giác $BMGN$ ngoại tiếp khi và chỉ khi ΔABC cân tại B.

LÊ QUỐC HÁN
(Nghệ An)

Bài T5/267. Cho một tam giác với độ dài các cạnh là a, b, c và diện tích là S. Chứng minh rằng :

$$S\leq\frac{1}{16}(3a^2+2b^2+2c^2).$$

Đẳng thức xảy ra khi nào ? Có thể tìm được các hệ số khác của a, b, c để bất đẳng thức vẫn xảy ra không ?

TRẦN NAM DŨNG
(Tp Hồ Chí Minh)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/267. Giải phương trình :

$$(1+\cos x)(2+4^{\cos x})=3.4^{\cos x}$$

HOÀNG NGỌC CẢNH
(Hà Tĩnh)

Bài T7/267. Cho các số thực x, y, z thỏa mãn :

$$\begin{cases}x^2+z^2=1\\ y^2+2y(x+z)=6\end{cases}$$

Chứng minh rằng : $y(z-x)\leq 4$.

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

ĐỖ THANH HÂN
(Bạc Liêu)

Bài T8/267. Cho dãy số (u_n) ($n = 0, 1, 2, ...$) được xác định bởi : $u_o = 3$, $u_1 = 11$, $u_{n+2}=2u_{n+1}+7u_n$ với $n = 0, 1, 2, ...$

Cho số nguyên dương lẻ a, chứng minh rằng với các số nguyên dương m và n tùy ý, tìm được số nguyên dương k thỏa mãn $u_n^k - a \,\vdots\, 2^m$.

NGUYỄN THANH HẢI
(Hà Nội)

Bài T9/267. Cho tam giác ABC. Trên tia đối của tia CA lấy điểm D sao cho $CD = CB$. Lấy điểm E sao cho $AE = AB$, $\angle BAE = \angle BCA$ và đường thẳng AB cắt đoạn thẳng DE tại điểm M nào đó. Chứng minh rằng M là trung điểm của DE khi và chỉ khi $\angle ACB = 2(\angle BAC)$.

NGÔ VĂN HIỆP
(Hà Nội)

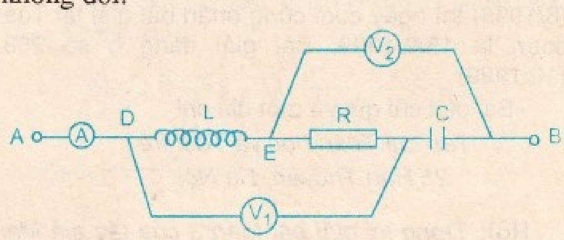
Bài T10/267. Gọi V là thể tích của hình tứ diện với độ dài các cạnh là a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6. Chứng minh rằng

$$V\leq\frac{\sqrt{2}}{12}\left(\frac{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}+\sqrt{a_4}+\sqrt{a_5}+\sqrt{a_6}}{6}\right)^6$$

TRẦN XUÂN ĐÁNG
(Nam Định)

CÁC ĐỀ VẬT LÍ

Bài L1/267. Cho mạch điện có sơ đồ như trên hình vẽ. L là cuộn dây thuần cảm; điện trở của ampe kế và dây nối không đáng kể; điện trở của vôn kế vô cùng lớn. Đặt vào hai đầu A, B của mạch điện một hiệu điện thế xoay chiều $u_{AB}=U_o\sin 2\pi ft$ có hiệu điện thế cực đại U_o không đổi.



1) Khi tần số dòng điện bằng f_1 = 50Hz, người ta thấy ampe kế chỉ $\frac{\sqrt{3}}{2}A$; các vôn kế

V_1, V_2 chỉ $U_1 = 100V$, $U_2 = 100\sqrt{3}\,V$; hiệu điện thế tức thời giữa hai đầu các vôn kế lệch pha nhau $\frac{\pi}{2}$. Hãy tính R, L, C, U_o. Viết biểu thức của hiệu điện thế giữa hai đầu cuộn cảm.

2) Thay đổi tần số dòng điện đến giá trị bằng f_2 thì người ta thấy hiệu điện thế giữa hai đầu vôn kế V_2 lệch pha $\frac{\pi}{4}$ so với hiệu điện thế giữa hai bản tụ điện. Tính f_2. Viết biểu thức của hiệu điện thế giữa hai bản tụ điện. Hãy cho biết hiệu điện thế hiệu dụng giữa hai bản tụ điện khi đó có đạt giá trị cực đại không ? Nếu có, hãy giải thích.

VŨ THANH KHIẾT
(Hà Nội)

Bài L2/267. Một thấu kính mỏng L_1 làm bằng thủy tinh chiết suất 1,5 có một mặt lồi và một mặt phẳng, bán kính mặt lồi là 15cm. Một

thấu kính mỏng phẳng lõm L_2, mặt lõm lắp vừa khít mặt lồi của L_1. Khi ghép L_1 và L_2 sát nhau, chiếu một chùm sáng song song với trục chính của hệ, đặt mắt sau L_2 hứng chùm tia ló, ta nhìn thấy có một chấm sáng chói nằm trên trục chính và cách L_1 là 15cm. Tách L_1 và L_2 ra, lắp vào 2 đầu một ống chứa đầy nước (hình vẽ), chiết suất của nước là $\frac{4}{3}$. Hỏi chiều dài ống nước là bao nhiêu để chùm sáng song song với trục chính của L_1 sau khi đi ra khỏi L_2 vẫn là chùm sáng song song.

NGUYỄN DUY TRUY
(Thái Bình)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/267. How many digits can we insert into the places between the digits 6 and 8 of the number 1681 ($1681 = 41^2$) so that the obtained number is a perfect square ?

T2/267. Solve the equation

$$\sqrt{5x^2+14x-9} - \sqrt{x^2-x-20} = 5\sqrt{x+1}.$$

T3/267. Prove that

$$\frac{1}{a+3b}+\frac{1}{b+3c}+\frac{1}{c+3a} \geq \frac{1}{a+2b+c}+\frac{1}{b+2c+a}+\frac{1}{c+2a+b}$$

for arbitrary positive numbers a, b, c. When does equality occur ?

T4/267. The medians AM, CN of a triangle ABC intersect at G. Prove that the quadrilateral $BMGN$ is circumscribable when and only when the triangle ABC is isosceles with $BA = BC$.

T5/267. The measures of the sides of a triangle with area S are a, b, c. Prove that

$$S \leq \frac{1}{16}(3a^2+2b^2+2c^2).$$

When does equality occur ?

Does the inequality hold for other coefficients of a, b, c ?

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/267. Solve the equation

$$(1+\cos x)(2+4^{\cos x}) = 3.4^{\cos x}.$$

T7/267. The real numbers x, y, z satisfy the conditions :

$$\begin{cases} x^2+y^2=1\ , \\ y^2+2y(x+z)=6\ . \end{cases}$$

Prove that $y(z-x) \leq 4$.

When does equality occur ?

T8/267. The sequence of numbers (u_n) ($n = 0, 1, 2, ...$) is defined by : $u_0 = 3$, $u_1 = 11$, $u_{n+2} = 2u_{n+1} + 7u_n$ for $n = 0, 1, 2,...$

Let a be a given odd integer. Prove that for arbitrary positive integers m and n, there exists a positive integer k such that $u_n^k - a \,\vdots\, 2^m$.

T9/267. Let ABC be a triangle. On the opposite ray of the ray CA, take the point D such that $CD = CB$. Let E be a point such that $AE = AB$, $\angle BAE = \angle BCA$ and the line AB cuts the segment DE at a point M. Prove that M is the midpoint of segment DE when and only when $\angle ACB = 2(\angle BAC)$.

T10/267. The measures of the edges of a tetrahedron with volume V are a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6. Prove that

$$V \leq \frac{\sqrt{2}}{12}\left(\frac{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}+\sqrt{a_4}+\sqrt{a_5}+\sqrt{a_6}}{6}\right)^6.$$

Bài T1/263. *Tìm giá trị của m để hệ phương trình sau có đúng 2 nghiệm*

$$\begin{cases}(x+y)^8 = 256 & (1)\\ x^8+y^8 = m+2 & (2)\end{cases}$$

Lời giải. của *Lê Tâm*, 8E, THCS Kỳ Anh, **Hà Tĩnh.**

Giả sử (x_o, y_o) là một nghiệm của hệ phương trình (1) (2)

Ta thấy ngay (y_o, x_o); $(-x_o, -y_o)$; $(-y_o, -x_o)$ cũng là các nghiệm của hệ. Vì vậy điều kiện cần để hệ có đúng 2 nghiệm là phải có $x_o \neq 0$, $x_o = y_o$. Thay nghiệm này vào hệ trên ta được $x_o = \pm 1$ và $2 = m+2$.

Từ đó suy ra $m = 0$.

Ngược lại từ điều kiện $m = 0$ ta được hệ phương trình

$$\begin{cases}(x+y)^8 = 256 & (3)\\ x^8+y^8 = 2 & (4)\end{cases}$$

Bằng cách áp dụng liên tiếp bất đẳng thức

$$(x+y)^2 \le 2(x^2+y^2)$$

Ta được

$$(x+y)^8 \le 2^7(x^8+y^8) = 256$$

Từ đó và (3) suy ra $x = y$. Thay giá trị này vào phương trình (4) giải ra ta được hai nghiệm của hệ là $(1, 1)$; $(-1; -1)$.

Vậy giá trị của m để hệ phương trình (1), (2) có đúng 2 nghiệm là $m = 0$.

Nhận xét. Có rất nhiều bạn giải đúng bài này, trong đó các bạn sau đây có lời giải tốt : **Thái Nguyên:** *Nguyễn Công Thắng*, Dãy 318, Trung Thành; **Bắc Giang:** *Giáp Ngọc Luyến*, 7A, THCS Nghĩa Trung, Việt Yên; *Đặng Ngọc Dương*, 9A, THCS thị trấn Hiệp Hòa; **Bắc Ninh:** *Trương Bảo Nam*, 9A, THCS Nguyễn Đăng Đạo, Tx Bắc Ninh; **Phú Thọ:** *Hoàng Ngọc Minh, Trần Thanh Hải*, 8C, *Nguyễn Đình Hòa*, 9B, THCS Việt Trì; **Vĩnh Phúc:** *Kim Đình Thái*, 9B, THCS Yên Lạc; *Nguyễn Xuân Trường*, 9A, THCS Vĩnh Yên; **Hải Phòng:** *Bùi Văn Tuấn*, 8A, THCS Tự Cường, Tiên Lãng; **Hải Dương:** *Vũ Thành Long*, 9A, Nguyễn Trãi, Nam Sách, *Ngô Xuân Bách*, 9A, PT Nguyễn Trãi, Tp Hải Dương; **Nam Định:** *Vũ Hồng Thu*, 3A, Trọng điểm Nghĩa Hưng; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Việt Hà*, 9B, Trần Mai Ninh, Tp Thanh Hóa; **Bà Rịa - Vũng Tàu:** *Trương Minh Doan*, 9A6, THCS Vũng Tàu.

TỐ NGUYÊN

Bài T2/263. *Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$\frac{x^6}{x^3+y^3} + \frac{y^6}{y^3+z^3} + \frac{z^6}{z^3+x^3}$$

trong đó x, y, z là các số dương thỏa mãn điều kiện

$$xy\sqrt{xy} + yz\sqrt{yz} + zx\sqrt{zx} = 1.$$

Lời giải. Đặt $a = x^3$; $b = y^3$; $c = z^3$ thì biểu thức đã cho trở thành :

$$Q = \frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a}$$

với $\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} = 1$ và $a, b, c > 0$.

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpski ta có :

$$\left[\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a}\right][(a+b) + (b+c) + (c+a)]$$

$$\ge (a+b+c)^2 \Rightarrow Q \ge \frac{1}{2}(a+b+c) \qquad (1)$$

Mặt khác, vì

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 + (\sqrt{b} - \sqrt{c})^2 + (\sqrt{c} - \sqrt{a})^2 \ge 0$$

nên $a+b+c \ge \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} = 1$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra : $Q \ge \frac{1}{2}$.

Ta thấy $Q = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$ (1) và (2) đồng thời trở thành đẳng thức $\Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{\sqrt[3]{3}} = \frac{\sqrt[3]{9}}{3}$. Do đó giá trị nhỏ nhất của Q là $\frac{1}{2}$.

Nhận xét.

1) Để đi đến bất đẳng thức (1) còn có nhiều cách khác. Chẳng hạn :

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{a+b}{4} \ge 2\sqrt{\frac{a^2}{a+b}\cdot\frac{a+b}{4}} = a.$$

Tương tự : $\frac{b^2}{b+c} + \frac{b+c}{4} \ge b;$

$$\frac{c^2}{c+a} + \frac{c+a}{4} \ge c.$$

Từ đó suy ra (1).

2) Bài toán có nhiều hướng tổng quát hóa, chẳng hạn :

"Nếu $x_1, x_2, ..., x_n > 0$ thỏa mãn :

$$\sqrt{x_1.x_2} + \sqrt{x_2.x_3} + ... + \sqrt{x_{n-1}.x_n} + \sqrt{x_n.x_1} = a$$

thì : $\dfrac{x_1^2}{x_1+x_2} + \dfrac{x_2^2}{x_2+x_3} + ... + \dfrac{x_n^2}{x_n+x_1} \geq \dfrac{a}{2}$."

3) Các bạn có nhiều lời giải và có "suy tư" hơn từ bài toán này là : **Hà Nội:** *Phan Huy Đức*, 8H, THCS Trưng Vương, *Ngô Trung Thành*, 5 Trần Phú, Ba Đình; *Trần Nam Trung*, 9A, THCS Trưng Nhị; *Mai Tuấn Hải*, 8E, THCS Đống Đa; *Văn Phương Thu Trang*, 9A, THCS Bế Văn Đàn, Đống Đa; **Hà Tây:** *Phùng Tuấn Anh*, 9A, THCS Thạch Thất; **Đồng Nai:** *Trần Võ Huy*, 8/3, THCS Nguyễn Bỉnh Khiêm, Biên Hòa; **Nghệ An:** *Lưu Quang Giáp*, *Nguyễn Văn Dũng*, *Phan Tuấn Nghĩa*, 9A, THCS Lê Hồng Phong, Hưng Nguyên; **Bà Rịa – Vũng Tàu:** *Trần Giang*, 9_1, THCS Nguyễn An Ninh, Vũng Tàu; **Quảng Trị:** *Nguyễn Thanh Lập*, 9/1, THCS Thành Cổ; *Hoàng Đức Hảo*, 9D, THCS Gio Linh; **Thái Nguyên:** *Nguyễn Trung Kiên*, 9A1, THCS Chu Văn An, *Phạm Thành Trung*, 9A1, THCS Độc Lập; **Thanh Hóa:** *Lê Huy Thực*, 8A, THCS Lê Thánh Tông, Thọ Xuân; *Nguyễn Xuân Hòa*, 9A, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa; *Nguyễn Đức Tài*, 9A, THCS Tây Đô, Vĩnh Lộc; **Khánh Hòa:** *Trần Trung Duy*, 9^{14}, THCS Thái Nguyên, Nha Trang; **Hà Tĩnh:** *Lê Tâm*, 8E, THCS Kỳ Anh; **Quảng Ngãi:** *Vũ Thành Trung*, 9A, THCS Nguyễn Nghiêm, Đức Phổ; **Hải Dương:** *Nguyễn Thành Nam*, 8A, THCS Nguyễn Trãi; *Trần Huy Kiên*, 9A1, THCS Phú Thứ, Kinh Môn, *Nguyễn Thành Trung* và *Ngô Xuân Bách*, 9A, THCS Nguyễn Trãi; **Phú Thọ:** *Trần Hải Yến*, 9A, THCS Việt Trì; **Yên Bái:** *Phạm Bích Ngọc*, 9E, THCS Lê Hồng Phong; **Quảng Nam:** *Hoàng Anh Quyền*, 8/4, THCS Lê Quý Đôn, Tam Kỳ; **Vĩnh Phúc:** *Phạm Quang Nhật Minh* và *Đỗ Đăng Thúy*, 9A, THCS Hai Bà Trưng, Mê Linh; *Nguyễn Tuấn Học*, 8B, THCS Yên Lạc; **Nam Định:** *Phùng Văn Thắng*, 9D, THCS Ngô Đồng, Giao Thủy; **Thái Bình:** *Nguyễn Thế Mạnh*, 9B, THCS Nam Cao, Kiến Xương,...

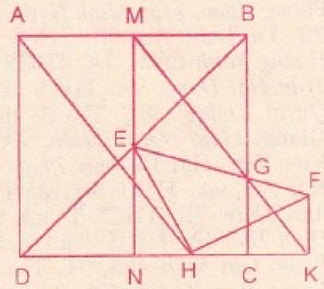
LÊ THỐNG NHẤT

Bài T3/263. *Cho hình vuông ABCD với tâm E. Gọi M là trung điểm của AB. Trên các cạnh BC, CD lần lượt lấy hai điểm G, H sao cho hai đường thẳng MG và AH song song với nhau. Hãy tính số đo góc GEH.*

Lời giải. Xem hình vẽ

Cách 1. Ta có $\Delta ADH \sim \Delta GBM$ vì các góc có cạnh tương ứng song song, từ đó $\dfrac{DH}{AD} = \dfrac{MB}{GB} \Rightarrow DH.GB = AD.MB$. Vì $DE = BE$ $= MB\sqrt{2} = AD.\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ nên $DH.GB = DE.BE$

$$\Rightarrow \frac{DH}{DE} = \frac{BE}{GB}.$$



Từ đó và $\angle HDE = \angle GBE = 45^\circ$ suy ra $\Delta EDH \sim \Delta GBE$ $\Rightarrow \angle DEH = \angle BGE$.

Ta có

$\angle GEH = 180^\circ - (\angle BEG + \angle DEH)$
$= 180^\circ - (\angle BEG + \angle BGE) = \angle GBE = 45^\circ$.

Cách 2. (của bạn *Phạm Tuấn*, 8A, THCS Thạch Thất, **Hà Tây**).

Gọi giao điểm của đường thẳng CD với các đường thẳng ME, MG lần lượt là N, K. Dựng $KF//ME$ và cắt đường thẳng EG tại F. Theo ĐL Talet :

$$\frac{MB}{KC} = \frac{MG}{KG} = \frac{ME}{KF} \Rightarrow KC = KF \quad (1)$$

Từ $HK = AM - NC$ có $NH = KC$ (2)

Từ (1), (2) có $NH = KF$ (3)

Từ (3) và $HK = EN$, $KF//EN$ suy ra $\Delta ENH = \Delta HKF \Rightarrow HE = HF$ và $\angle EHN = \angle HFK$.

Do đó $\angle EHF = 180^\circ - (\angle EHN + \angle FHK) = 180^\circ - (\angle HFK + \angle FHK) = 90^\circ$.

Tam giác EHF vuông cân nên $\angle GEH = 45^\circ$.

Nhận xét. 1) Có 173 bạn gửi lời giải đều đúng trong đó 1/3 là các bạn học lớp 8. Đa số các bạn giải theo cách 1. Một số ít bạn trình bày dài dòng do kẻ thêm nhiều đường phụ hoặc dùng phương pháp tọa độ, hoặc dùng hàm số lượng giác.

2) Một số bạn chứng minh thêm rằng : "GH tiếp xúc với đường tròn nội tiếp hình vuông $ABCD$". Các bạn *Lưu Quang Giáp*, *Nguyễn Văn Dũng*, 9a, THCS Lê Hồng Phong, Hưng Nguyên, **Nghệ An** đã nhận xét : Kết luận của bài toán trên không thay đổi nếu ta thay giả thiết "*Trên các cạnh BC, CD lần lượt lấy 2 điểm G, H...*" bằng "*Trên các tia BC, DC lần lượt lấy 2 điểm G, H...*", còn với giả thiết "*trên tia đối của tia BC, tia đối của tia DC lần lượt lấy 2 điểm G, H...*" thì kết luận sẽ là $\angle GEH = 135^\circ$. Bạn *Kim Đình Thái*, 9B, THCS Yên Lạc, **Vĩnh Phúc** đã chứng minh (tương tự cách 1) rằng kết luận vẫn đúng nếu thay giả thiết "*hình vuông ABCD tâm E và M là trung điểm AB*" bởi "*hình thoi ABCD tâm E và M là chân đường vuông góc hạ từ E lên AB*".

3) Các bạn sau đây trình bày gọn, có 2 lời giải hoặc có nhận xét :

Sơn La: *Chu Tiến Dũng*, 9T, THCS Chu Văn An, Mai Sơn; **Phú Thọ:** *Phạm Minh Hoàng*, 8A1, THCS

Phong Châu, *Trần Minh Ngọc*, 8C, *Nguyễn Đình Hòa*, 9B, *Vũ Tuấn Tài*, 9B, THCS Việt Trì; **Vĩnh Phúc:** *Hoàng Minh Châu*, 7A, THCS Vĩnh Tường; **Hà Tây:** *Trần Hải Dũng*, 9A, THCS Hà Hồi, Thường Tín, *Lê Quyết Thắng*, 9B, THCS chuyên Ứng Hòa; **Bắc Giang:** *Giáp Ngọc Luyến*, 7A, THCS Nghĩa Trung, Việt Yên; **Hải Dương:** *Phạm Thành Trung*, 8A, *Lê Hải Yến*, 9A, THPT Nguyễn Trãi, Tp Hải Dương; *Lê Anh Thùy*, 7B, THCS Thanh Quang, Nam Sách, *Vũ Đình Thế*, 8A, THCS Phả Lại, Chí Linh; **Hải Phòng:** *Phạm Gia Vĩnh Anh*, 9T, THCS Trần Phú; **Hà Nội:** *Phạm Bảo Trung*, 9A, THCS Nguyễn Trường Tộ, Đống Đa; **Hà Nam:** *Trần Quang Dũng*, 8B1, THCS Trần Phú, Phủ Lý; **Nam Định:** *Phùng Văn Thắng*, 9D, THCS Ngô Đồng, Giao Thủy, *Vũ Anh Tuấn*, 8B, THCS NK Hải Hậu; **Thanh Hóa:** *Mai Văn Hà*, 9C, THCS Lê Quý Đôn, Bỉm Sơn; **Hà Tĩnh:** *Lê Tâm*, 8E, THCS Kỳ Anh; **Đắc Lắc:** *Hồ Thị Thanh Trang*, *Thái Duy Cường*, 9C, THCS Nguyễn Du, Buôn Ma Thuột.

VIỆT HẢI

Bài T4/263. *Cho tam giác ABC với các đường trung tuyến AM, BN, CP. Chứng minh rằng :*

$$AM + BN + CP \le 4R + r$$

trong đó R và r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của tam giác.

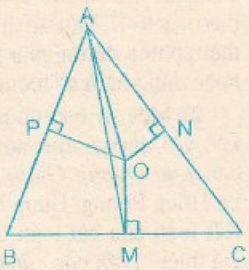
Lời giải. (của bạn *Phạm Gia Vĩnh Anh*, 9T, PTTHNK Trần Phú, Hải Phòng).

Bổ đề: Cho tam giác ABC nhọn, O là tâm đường tròn ngoại tiếp. M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB. Khi đó :

$OM+ON+OP =$
$= R + r.$

Chứng minh:

Đặt $BC = a = 2NP$;
$CA = b = 2PM$;
$AB = c = 2MN$ (h.1).



Hình 1

Áp dụng định lí Ptôlêmê cho các tứ giác nội tiếp : $APON$, $BMOP$, $CNOM$ (h.1) ta có :

$$\begin{cases} ON\cdot\dfrac{c}{2}+OP\cdot\dfrac{b}{2}=R\cdot\dfrac{a}{2} \\ OP\cdot\dfrac{a}{2}+OM\cdot\dfrac{c}{2}=R\cdot\dfrac{b}{2} \\ OM\cdot\dfrac{b}{2}+ON\cdot\dfrac{a}{2}=R\cdot\dfrac{c}{2} \end{cases}$$

Mặt khác ta có :

$$OM\cdot\frac{a}{2}+ON\cdot\frac{b}{2}+OP\cdot\frac{c}{2}=r\left(\frac{a+b+c}{2}\right)$$

Từ bốn đẳng thức trên suy ra :

$OM + ON + OP = R + r.$

Trở lại bài toán.

Trường hợp 1: ΔABC nhọn (h.1)

Vẫn kí hiệu như trên, ta có :

$AM \le AO + OM \Rightarrow AM \le R + OM$

Tương tự như vậy $BN \le R + ON$;
$CP \le R + OP$

Suy ra :

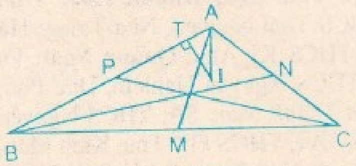
$AM+BN+CP \le 3R + (OM+ON+OP)$

Áp dụng bổ đề ta có :

$AM+BN+CP \le 4R + r.$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ O đồng thời thuộc AM, BN, CP $\Leftrightarrow$ O là trọng tâm tam giác ABC $\Leftrightarrow$ tam giác ABC đều.

Trường hợp 2. ΔABC không nhọn (h.2)



Hình 2

Giả sử $A \ge 90^\circ$. Vẫn kí hiệu như trên, ta có :

$$\begin{cases} AM \le \dfrac{1}{2}BC = \dfrac{1}{2}a \\ BN < NP+PB = \dfrac{1}{2}a+\dfrac{1}{2}c \\ CP < PN+NC = \dfrac{1}{2}a+\dfrac{1}{2}b \end{cases}$$

$$\Rightarrow AM+BN+CP < 2a + \frac{1}{2}(b+c-a)$$

Dễ thấy : $2a \le 4R$ (1)

Gọi (I) là đường tròn nội tiếp tam giác ABC và (I) tiếp xúc với AB tại T. Vì $\angle A \ge 90^\circ$ nên $\angle TAI \ge 45^\circ \Rightarrow \angle TIA \le 45^\circ$.

Vậy : $TA \le TI \Rightarrow \frac{1}{2}(b+c-a) \le r$ (2)

Vì đẳng thức không thể đồng thời xảy ra ở (1), (2) nên ta có : $AM+BN+CP < 4R+r$

Tóm lại : $AM+BN+CP \le 4R+r.$

Nhận xét. 1) Bài này có 104 bạn tham gia giải nhưng chỉ 8 bạn giải đúng, 3 bạn giải sai, còn lại là các bạn giải không chính xác.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt : **Hải Phòng:** *Vũ Hoàng Hiệp*, 9T, PTTH NK Trần Phú, *Vũ Ngọc Minh, Phạm Đức Hiệp*, 9T, Chu Văn An; **Hà Nội:** *Trần Đoàn Việt*, 9A, Nguyễn Trường Tộ, *Vũ Quốc Mỹ*, 9H, Trưng Vương; **Hải Dương:** *Nguyễn Tuấn Dương, Ngô Xuân Bách*, 9A, PTCS Nguyễn Trãi.

3) Đa số các bạn quên xét trường hợp tam giác tù, hoặc có xét thì xử lí không chính xác. Một vài bạn lại kết luận : nếu tam giác tù thì bất đẳng thức không đúng (!)

NGUYỄN MINH HÀ

Bài T5/263. *Cho dãy số (x_n) $(n = 0, 1, 2, ...)$ được xác định bởi :*

$$x_o = 1,\ x_{n+1} = \frac{2}{x_n} + \frac{\sqrt{3}}{x_n^2} \text{ với mọi } n = 0, 1, 2, ...$$

Hỏi khi $n \to \infty$ thì dãy số đó có giới hạn hữu hạn không ?

Lời giải. Giả sử tồn tại giới hạn hữu hạn $\lim\limits_{n\to\infty} = \alpha$. Khi đó α là nghiệm của phương trình

$$x = \frac{2}{x} + \frac{\sqrt{3}}{x^2}$$

Hay $(x - \sqrt{3})(x^2 + \sqrt{3}x + 1) = 0$.

Do đó $\alpha = \sqrt{3}$. Ta sẽ chứng minh $x_{2n} > x_{2n+2}$ đối với mọi $n > 1$. Với $n = 0$ thì

$$x_o = 1 > \frac{4 + 3\sqrt{3}}{(2 + \sqrt{3})^2} = x_2.$$

Giả sử khẳng định đúng với mọi n từ 1 đến k. Ta sẽ chứng minh $x_{2k+2} > x_{2k+4}$. Thật vậy, ta có

$$x_{2k+1} = \frac{2}{x_{2k}} + \frac{\sqrt{3}}{x_{2k}^2} < \frac{2}{x_{2k+2}} + \frac{\sqrt{3}}{x_{2k+2}^2} = x_{2k+3}.$$

Suy ra :

$$x_{2k+2} = \frac{2}{x_{2k+1}} + \frac{\sqrt{3}}{x_{2k+1}^2} > \frac{2}{x_{2k+3}} + \frac{\sqrt{3}}{x_{2k+3}^2} = x_{2k+4}.$$

Vậy khẳng định trên đúng với mọi $n > 1$, nghĩa là

$$1 = x_o > x_2 > x_4 > ... > x_{2n} > ... > 0.$$

Từ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{3}$ suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = \sqrt{3}$. Điều này không thể được do dãy (x_{2n}) giảm và bị chặn trên bởi 1. Kết luận : Dãy (x_n) không có giới hạn hữu hạn.

Nhận xét. Những bạn sau đây có lời giải tốt

Đắc Lắc: *Đặng Ngọc Châu*, 11T1, chuyên Nguyễn Du, Buôn Ma Thuột; **Nghệ An:** *Hoàng Minh Sơn*, 11G1, PTTH Nghi Lộc, *Trần Anh Hiếu, Hoàng Văn Hiệu*, 11C, PTTH Nghĩa Đàn, *Đinh Thanh Thường*, 10A, PTTH Hermann Gmeiner, Vinh; **Ninh Bình:** *Đặng Thị Tố* 11T, PTTH NK ; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Thừa Thắng*, 11T, PTTH NK; **Hòa Bình:** *Đỗ Thị Thu Hà, Nguyễn Anh Tuấn*, 12 Toán, trường Hoàng Văn Thụ; **Quảng Trị:** *Lê Anh Tuấn*, 10 Toán, *Trần Việt Anh*, 11 Toán, PTTH Lê Quý Đôn; **Khánh Hòa:** *Võ Dung Hòa, Võ Duy*, 11 Toán, PTTH Lê Quý Đôn; **Sơn La:** *Nguyễn Bích Vân*, 11T3, PTTH NK; **Phú Thọ:** *Nguyễn Hiệp*, 11a, PTTH Hoàng Vương, Tx Phú Thọ; **Bắc Ninh:** *Trần Trung, Tạ Hoàng Hải*, 11 Toán, PTTH NK, Hàn Thuyên, Tx Bắc Ninh, *Nguyễn Đức Thắng Quý*, 11A, PTTH Thuận Thành; **An Giang:** *Nguyễn Anh Tuấn*, 12TL, PTTH Thoại Ngọc Hầu, Long Xuyên; **Hải Dương:** *Phạm Hồng Quân, Phạm Minh Tuấn*, 11 toán, *Vũ Bá Toàn, Phạm Tiến Toàn*, 10 Toán, và *Vũ Vĩnh Trường*, 11TT, PTTH Nguyễn Trãi, *Phạm Ngọc Lợi*, 11 Toán, trường PTNK tỉnh Hải Dương; **Thừa Thiên - Huế:** *Huỳnh Công Phước*, 11CTT1 *Lê Viết Quốc*, 11TT2, Quốc học Huế, *Nguyễn Du Thái*, 11Toán, Khối PTCT, ĐHKH Huế; **Thanh Hóa :** *Lê Trọng Thủy*, 10 Lam Sơn; **Hà Nội:** *Bùi Viết Lộc*, 11A Toán, *Đỗ Đức Nhật Quang*, 11AC Toán, ĐHKHTN–ĐHQG, *Đinh Trung Hiếu*, 10M, Marie Curie; **Tp Hồ Chí Minh:** *Lương Thế Nhân, Nguyễn Anh Dũng*, 10 Toán, *Trần Đình Nguyên*, 11 Toán, PTNK–ĐHQG, *Hoàng Thanh Lâm*, 11CT, *Phạm Tuấn Anh*, 10 Toán, PTNK, ĐHKHTN–ĐHQG; **Bà Rịa – Vũng Tàu:** *Nguyễn Văn Sơn*, 12A7, Nguyễn Du, Châu Đức; **Yên Bái:** *Nguyễn Thế Doanh, Nguyễn Việt Hằng*, 11A, PTTH chuyên, *Đinh Châu Vui*, 11A1, PTTH chuyên, *Triệu Thanh Hải*, 10C, PTTH chuyên.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T6/263. *Tìm các giá trị a, b nguyên sao cho hai trong số các nghiệm thực của phương trình sau có tích là một số nguyên khác 1:*

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0 \ (1)$$

Lời giải. (của bạn *Hoàng Ngọc Minh*, 8C, THCS Việt Trì, **Phú Thọ**)

Giả sử a, b là các số nguyên mà phương trình (1) có hai nghiệm thực u, v thỏa mãn $u, v \in \mathbf{Z}$, $u.v \neq 1$.

Ta nhận xét rằng nếu x là nghiệm của phương trình (1) thì $x \neq 0$ và $\frac{1}{x}$ cũng là nghiệm của phương trình đó.

Như vậy phương trình (1) có bốn nghiệm là $u,\ v,\ \frac{1}{u}$ và $\frac{1}{v}$.

Theo định lí Viet ta có :

$$u+v+\frac{1}{u}+\frac{1}{v}=\frac{(u+v)(uv+1)}{uv}=-a \qquad (2)$$

và $uv+\frac{v}{u}+\frac{u}{v}+\frac{1}{uv}+2=$

$$=uv+\frac{(u+v)^2+1}{uv}=b \qquad (3)$$

Ta sẽ chứng minh $uv=-1$.

Phản chứng : Giả sử $u.v \neq -1$. Từ (2) và (3) ta suy ra $u+v$ hữu tỉ và $(u+v)^2 \in Z$ nên $(u+v) \in Z$ và cả hai $(u+v)$, $(u+v)^2+1$ đều chia hết cho $u.v$. Nhưng $((u+v), (u+v)^2+1)=1$, nên suy ra hoặc $uv=1$ hoặc $uv=-1$. Điều này mâu thuẫn với $uv \neq \pm 1$. Vậy $uv=-1$ và do đó $a=0$, $b=-(u+v)^2-2 \leq -2$.

Ngược lại nếu $a=0$, $b \in Z$, $b \leq -2$. Phương trình (1) trở thành $x^4+bx^2+1=0$.

Phương trình này có hai nghiệm

$$u=\sqrt{\frac{-b+\sqrt{b^2-4}}{2}},$$

$$v=\sqrt{\frac{-b-\sqrt{b^2-4}}{2}},$$

thỏa mãn $u.v=-1 \in Z$, $u.v \neq 1$.

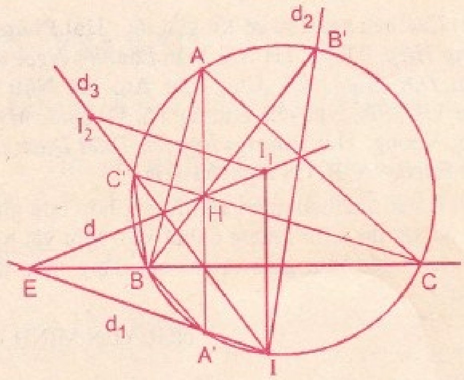
Như vậy các số nguyên a, b cần tìm là $a=0$, $b \in Z$, $b \leq -2$.

Nhận xét. Đây không phải là một bài toán khó, nhưng do cách lựa chọn lời giải phức tạp (đưa về phương trình bậc hai đối với $(x+\frac{1}{x})$) dẫn đến tính toán sai nên trong tổng số 106 bạn gửi lời giải tới Tòa soạn chỉ có 55 bạn giải đúng.

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T7/263. *Cho tam giác ABC. Tìm điều kiện cần và đủ đối với đường thẳng d để ba đường thẳng đối xứng với d qua các trục BC, CA, AB là đồng qui.*

Lời giải. Ta sẽ chứng minh ba đường thẳng d_1, d_2, d_3 đối xứng với d tương ứng qua các trục BC, CA, AB là đồng qui khi và chỉ khi d đi qua trực tâm H của ΔABC.



Điều kiện đủ. Giả sử d đi qua trực tâm H của ΔABC. Gọi A', B', C' là các điểm đối xứng của H qua các trục BC, CA, AB theo thứ tự. Dễ dàng thấy A', B' và C' nằm trên đường tròn (O) ngoại tiếp ΔABC. Gọi I là giao điểm của d_1 và d_3.

Ta sẽ chỉ ra rằng I phải nằm trên đường tròn (O). Nếu I trùng với A' thì I thuộc (O). Xét I khác A'. Qua phép đối xứng trục BC vectơ $\overrightarrow{IA'}$ biến thành $\overrightarrow{I_1H}$, qua phép đối xứng trục AB vectơ $\overrightarrow{I_1H}$ biến thành $\overrightarrow{I_2C'}$. Gọi α là góc không tù tạo bởi 2 đường thẳng BC và BA. Dễ thấy $\Delta A'BC'$ và ΔIBI_2 đều là tam giác cân tại B và $\angle A'BC' = 2\alpha = \angle IBI_2 \Rightarrow \Delta BA'I = \Delta BC'I_2 \Rightarrow \angle BIA' = \angle BI_2C'$ và $\angle BA'I = \angle BC'I_2$. Từ đó : nếu I nằm trong góc $A'BC'$ thì $\angle A'IC' = 180^o - 2\alpha$, còn nếu I nằm ngoài góc $A'BC'$ thì $\angle A'IC' = 2\alpha$. Trong cả hai trường hợp đó, do $\angle A'BC' = 2\alpha$ nên 4 điểm A', B, C', I đều nằm trên đường tròn (O).

Nếu I nằm trên đường tròn (O) thì $\angle B'HI_1 = \angle BHE = \angle BC'I = \angle BB'I$ suy ra đường thẳng đối xứng với d qua trục AC chính là $B'I$. Vậy d_1, d_2, d_3 đồng qui ở I.

Điều kiện cần (của bạn *Trần Tất Đạt*, 11B toán, ĐHKHTN−ĐHQGHN). Xét đường thẳng d tùy ý. Gọi d' là đường thẳng qua H và song song với d và I là giao điểm ba đường thẳng đối xứng với d' qua các trục BC, CA, AB. Nếu h là khoảng cách từ H tới d thì do phép đối xứng trục bảo tồn khoảng cách giữa các đường thẳng cho nên ba đường thẳng đối xứng với d qua các trục BC, CA, AB sẽ cách đều I một khoảng bằng h. Do đó để ba đường thẳng đối xứng với d qua các trục BC, CA, AB đồng qui (giả sử tại P) mà nếu $h \neq 0$ thì từ P ta dựng được 3 tiếp tuyến phân biệt với đường tròn

$(I, h) \Rightarrow$ mâu thuẫn. Vậy $h = 0 \Rightarrow d$ đi qua điểm H.

Nhận xét. Phần lớn các bạn giải bài này rất dài. Nhiều bạn sử dụng đường thẳng Sim–son như một kiến thức cơ bản và quên không gọi tên đường thẳng ra. Nhiều bạn nêu điều kiện cần và đủ khác, nhưng không dễ kiểm tra như chứng minh trên. Có bạn phát biểu bài toán tương tự cho không gian đối với tứ diện. Nhiều bạn quên chứng minh điều kiện cần hoặc điều kiện đủ. Có bạn chứng minh điều kiện đủ đối với một vài vị trí đặc biệt của d.

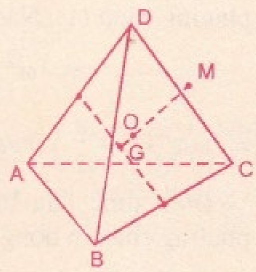
Một số bạn THCS đã chứng minh điều kiện cần bằng cách xét khoảng cách từ A, B, C tới d, d_1, d_2, d_3.

Các bạn sau đây có lời giải đầy đủ và chặt chẽ:

Hà Nội: *Trần Tất Đạt*, 11B và *Đỗ Đức Nhật Quang*, 11A, ĐHKHTN–ĐHQG; **Nam Định:** *Phùng Văn Thắng*, 9D, THCS Ngô Đồng, Giao Thủy; **Thanh Hóa:** *Hà Xuân Giáp*, 9C, THCS Lê Quý Đôn, Bỉm Sơn; **Khánh Hòa:** *Võ Dung Hòa*, 11 Toán, PTTH Lê Quý Đôn, Nha Trang; **Nghệ An:** *Đinh Thanh Thường*, 10A, PTTH Hermann Gmeiner, Vinh; **Hải Phòng:** *Phạm Đức Hiệp*, 9T, Chu Văn An, *Phạm Gia Vĩnh Anh*, 9, chuyên toán, PTTH NK Trần Phú.

VŨ ĐÌNH HÒA

Bài T8/263. *Cho tứ diện ABCD. Tìm những điểm M sao cho các trọng tâm của các tứ diện MBCD, MCDA, MDAB, MABC cách đều tâm hình cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD.*



Lời giải 1. Gọi G và O lần lượt là trọng tâm tứ diện $ABCD$ và tâm hình cầu ngoại tiếp tứ diện đó; A', B', C' và D' lần lượt là trọng tâm các tứ diện $MBCD$, $MCDA$, $MDAB$ và $MABC$. Bằng cách đặt : $\overrightarrow{OM} + 4\overrightarrow{OG} = \vec{v}$ (1)

ta được :

$4\overrightarrow{OA'} = \vec{v} - \overrightarrow{OA}$

Tương tự, ta được các đẳng thức :

$$4\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OA} = 4\overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OB} = 4\overrightarrow{OC'} + \overrightarrow{OC} = = 4\overrightarrow{OD'} + \overrightarrow{OD} = 4\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OM} = \vec{v} \quad (2)$$

Từ đó suy ra :

$OA' = OB' = OC' = OD' \Leftrightarrow$

$$(\vec{v} - \overrightarrow{OA})^2 = (\vec{v} - \overrightarrow{OB})^2 = (\vec{v} - \overrightarrow{OC})^2 = (\vec{v} - \overrightarrow{OD})^2$$

$$\Leftrightarrow \vec{v}.\overrightarrow{OA} = \vec{v}.\overrightarrow{OB} = \vec{v}.\overrightarrow{OC} = \vec{v}.\overrightarrow{OD}$$

$$\Leftrightarrow \vec{v}.\overrightarrow{DA} = \vec{v}.\overrightarrow{DB} = \vec{v}.\overrightarrow{DC} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \vec{v} = \vec{0}$$

(vì 3 véctơ $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$ và $\overrightarrow{DC}$ không đồng phẳng)

Từ đó $\overrightarrow{OM} = -4\overrightarrow{OG}$; (3)

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GM} = 5\overrightarrow{GO}$ hay $M = V_G^5(O)$ (4)

Vậy có duy nhất một điểm M, thỏa mãn điều kiện của bài toán, xác định bởi hệ thức véctơ (4).

Lời giải 2. Chứng minh như phần đầu của lời giải 1, ta thu được các đẳng thức véctơ (2). Các đẳng thức (2) chứng tỏ rằng cả 5 đoạn thẳng AA', BB', CC', DD' và MG đều đồng qui ở một điểm P thỏa mãn $\vec{v} = 5\overrightarrow{OP}$, điểm P này chia trong các đoạn thẳng trên theo tỉ số số học $k = 4$.

Như vậy, phép vị tự $V_P^{-1/4}$ tâm P, hệ số $-\frac{1}{4}$ biến tứ diện $ABCD$ thành tứ diện $A'B'C'D'$; do đó, biến tâm O của mặt cầu ngoại tiếp $ABCD$ thành tâm O' của mặt cầu ngoại tiếp $A'B'C'D'$ nghĩa là, nếu $OA = OB = OC = OD = R$ thì $O'A' = O'B' = O'C' = O'D' = \frac{R}{4}$. Từ đó suy ra, muốn cho A', B', C' và D' cách đều O, cần và đủ là O và O' trùng nhau ở điểm $P \Rightarrow$ điểm O chia trong đoạn MG theo tỉ số đại số $(MG, 0) = -4$, nghĩa là ta được (3) hoặc (4), đpcm.

Nhận xét. 1) Lời giải 1 thuần túy sử dụng phương pháp véctơ thiên về tính toán để tìm ra kết quả, lời giải 2 sử dụng cả phương pháp vectơ và phép biến hình, ít tính toán hơn, thiên về lí luận và sử dụng tính chất hình học của các hình. Lời giải 2 còn chỉ ra rằng các đoạn thẳng AA', BB', CC' và DD' không những đồng qui ở tâm O mặt cầu $(ABCD)$ mà còn bằng nhau : $AA' = BB' = CC' = DD' = \frac{5}{4}R$, trong đó R là bán kính mặt cầu $(ABCD)$.

2) Lời giải của nhiều bạn còn quá rườm rà, nặng về tính toán cồng kềnh, nhất là những bạn sử dụng phương pháp véctơ rồi chuyển sang phương pháp tổng hợp để xác định điểm M. Một số bạn sử dụng tích 2 phép vị tự nhưng trình bày thiếu sáng sủa.

3) Một số bạn nhận xét rằng bài toán T8/263 này là một dạng biến thể của bài toán T10/233 (11/1996) mà chúng ta đã gặp. Tuy bạn *Hoàng Minh Sơn*, 11G1, PTTH Nghi Lộc, **Nghệ An** không có nhận xét trên,

nhưng đã đưa ra lời giải sau đây khá ngắn gọn dựa theo ý tưởng bài toán đã gặp đó.

Trước hết cũng thiết lập các hệ thức véctơ (2) và đặt $\vec{v} = 5\vec{OP}$. Từ đó suy ra (vì $OA = OB = OC = OD = R$) :

$$OA' = OB' = OC' = OD' \Leftrightarrow \vec{OA}.\vec{OA'} = \vec{OB}.\vec{OB'} = \vec{OC}.\vec{OC'} = \vec{OD}.\vec{OD'}$$

$$\Leftrightarrow AA' = BB' = CC' = DD'$$

Đồng thời do AA', BB', CC', DD' và MG đồng qui ở điểm P, ta có :

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{AA'}} = \frac{\overline{BP}}{\overline{BB'}} = \frac{\overline{CP}}{\overline{CC'}} = \frac{\overline{DP}}{\overline{DD'}} = \frac{\overline{MP}}{\overline{MG}} = \frac{4}{5}$$

Bởi vậy :

$$AA' = BB' = CC' = DD' \Leftrightarrow AP = BP = CP = DP$$

$$\Leftrightarrow P \equiv O \Leftrightarrow \vec{OM} = \frac{4}{5}\vec{GM} \Leftrightarrow \vec{GM} = 5\vec{GO}$$

$$\Leftrightarrow M = V_G^5(O)$$

4) Các bạn sau cũng có lời giải tốt : **Nghệ An:** *Đinh Thanh Thường*, 10A, PTTH Hermann Gmeiner, Vinh; **Khánh Hòa:** *Nguyễn Xuân Hưng*, 10L, Lê Quý Đôn, Nha Trang, Khánh ; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Đức Thắng*, 10A1, PTTH Thuận Thành 1. Các bạn còn có nhận xét : Bài toán có thể tổng quát hóa cho một hệ n điểm $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ cùng thuộc một mặt cầu.

NGUYỄN ĐĂNG PHẤT

Bài L1/263. *Một con lắc lò xo, gồm một vật nặng bằng sắt khối lượng $m_1 = 200g$ gắn vào một lò xo khối lượng không đáng kể có độ cứng $k = 25N/m$, có thể dao động không ma sát trên một trục x'x nằm ngang. Gắn vật nặng m_1 nói trên với một nam châm nhỏ khối lượng $m_2 = 50g$ (phương bắc – nam của nam châm dọc theo trục x'x), rồi đẩy khối hai vật m_1+m_2 ra khỏi vị trí cân bằng một đoạn $x_o = 1cm$ và thả cho chúng dao động không có vận tốc ban đầu.*

1) Tìm phương trình dao động của chúng, giả thiết chúng luôn luôn gắn chặt với nhau. Tìm biểu thức của lực tác dụng vào m_2 (theo phương chuyển động).

2) Biết rằng lực từ do nam châm m_2 tác dụng lên m_1 không vượt quá trị số 0,1N. Với x_o như thế nào thì m_2 luôn luôn gắn với m_1.

3) Đút một ống dây dẫn mà hai đầu nối với nhau thành mạch kín vào trục x'x sao cho khối $m_1 + m_2$ dao động vào ra ống dây mà không bị vướng và giữ cố định ống dây. Khi đó dao động của con lắc lò xo sẽ xảy ra như thế nào ? Giải thích tại sao ? Bỏ qua tác dụng của từ trường Trái Đất.

Hướng dẫn giải.

1) Xét các lực tác dụng lên hệ hai vật $m_1 + m_2$ theo phương chuyển động. Chọn gốc tọa độ O là vị trí cân bằng. Áp dụng định luật II Niutơn ta có phương trình : $ma = -kx$, với $m = m_1 + m_2$, suy ra $x'' + \frac{k}{m}x = 0$.

Phương trình dao động có dạng :

$$x = A\sin(\omega t + \varphi)$$

với $\omega = \sqrt{\frac{k}{m_1+m_2}} = 10rad/s$.

Lấy gốc thời gian ($t = 0$) là lúc thả vật : $x_o = A\sin\varphi$; $v_o = 0 = \omega A\cos\varphi$. Từ đó tìm được $\varphi = \frac{\pi}{2}$; $A = x_o$, $\Rightarrow x = x_o\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$

$$\Rightarrow x = \sin\left(10t + \frac{\pi}{2}\right)\text{(cm)}. \qquad (1)$$

Theo phương trình chuyển động, nam châm m_2 hút vật m_1 bằng lực từ $\vec{F'_o}$ do đó theo định luật III Niutơn, vật m_1 hút m_2 bằng lực $\vec{F_o} = -\vec{F'_o}$. Do chịu tác dụng của lực $\vec{F_o}$ nam châm m_2 (cùng với m_1) dao động điều hòa theo phương trình (1). Nam châm m_2 có gia tốc

$$a_2 = -\omega^2 x = -\omega^2 x_o \sin\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= -\sin\left(10t + \frac{\pi}{2}\right)(m/s^2).$$

Biểu thức của lực tác dụng vào m_2 theo phương chuyển động :

$$F_o = m_2 a_2 = -m_2\omega^2 x_o \sin\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) \qquad (2)$$

$$\Rightarrow F_o = -0{,}05\sin\left(10t + \frac{\pi}{2}\right)(N)$$

2) Muốn cho m_2 luôn luôn gắn với m_1, phải có

$$m_2\omega^2 x_o \le 0{,}1 \Rightarrow x_o \le \frac{0{,}1}{m_2\omega^2} = 0{,}02\text{m}$$

$$\Rightarrow x_o \le 2\text{cm}.$$

3) Nam châm dao động vào ra ống dây làm cho từ thông giữ qua ống dây biến thiên, do đó trong ống dây xuất hiện dòng điện cảm ứng, theo định luật Lenxơ dòng điện này có tác

dụng chống lại nguyên nhân sinh ra nó, tức là chống lại chuyển động của nam châm. Do đó dao động của hệ vật $m_1 + m_2$ tắt dần và cuối cùng chúng dừng lại.

Nhận xét. Các bạn có lời giải đúng và gọn :

Hà Nội: *Lê Cường*, Bo11A, khối chuyên Lí, ĐHKHTN–ĐHQG Hà Nội; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Huy Việt*, 11A1, PTTH số 2, Gia Lương; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Xuân Kiên*, 11E, PTTH Hoằng Hóa 2; **Vĩnh Phúc:** *Trần Thanh Thọ*, 12A3, PTTH chuyên Vĩnh Phúc; **Nghệ An:** *Đào Anh Đức*, 11 Lí, *Nguyễn Anh Phúc Đức*, 11A3, PTTH Phan Bội Châu, Vinh;

MAI ANH

Bài L2/263. *Đồng vị phóng xạ Rađi $^{226}_{88}Ra$, có chu kì bán rã T = 1570 năm, phóng xạ hạt α và biến đổi thành hạt nhân con X.*

1) Viết phương trình phản ứng. Xác định hạt nhân X. Tính độ phóng xạ của 3g rađi sau 785 năm.

2) Phản ứng trên tỏa một năng lượng là 2,7 MeV. Giả sử ban đầu hạt nhân rađi đứng yên. Tìm động năng của hạt α và của hạt nhân con sau phản ứng. Coi khối lượng hạt nhân bằng số khối.

Hướng dẫn giải.

1) Phương trình phản ứng :

$$^{226}_{88}Ra \to {}^{4}_{2}He + {}^{A}_{Z}X.$$

Áp dụng định luật bảo toàn số khối và bảo toàn điện tích tìm được $Z = 86$; $A = 222$. Đó là hạt nhân Rađon $^{222}_{86}Rn$.

Sau thời gian $t = 785$ năm $= \frac{T}{2}$, độ phóng xạ là : $H = \frac{H_o}{2^{t/T}} = \frac{H_o}{\sqrt{2}}$, với $H_o = \lambda N_o = \frac{0{,}693.3N_A}{T.226} \Rightarrow T = 1570.365.86400s$.

Từ đó $H = 7{,}91.10^{10}Bq \approx 2{,}14$ Ci.

2) Áp dụng định luật bảo toàn động lượng và bảo toàn năng lượng :

$W_\alpha + W_x = 2{,}7$ MeV ; (1)

$\vec{p}_\alpha + \vec{p}_x = 0 \to m_\alpha W_\alpha = m_x W_x$ (2)

Thay số, từ (1) và (2) tìm được :

$W_\alpha = 2{,}65$ MeV; $W_x \approx 0{,}05MeV$.

Nhận xét. Các bạn có lời giải đúng và gọn :

Hà Nội: *Ngô Lê Vinh*, 12C1, PTTH Việt Đức; *Lê Cường*, Bo11A, khối chuyên lí, ĐHKHTn–ĐHQGHN; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Huy Việt*, 11A1, PTTH số 2, Gia Lương; **Vĩnh Phúc:** *Đỗ Văn Tuấn*, 12A3, *Đỗ Ngọc ánh*, 11A1, PTTH chuyên Vĩnh Phúc; **Thanh Hóa:** *Trần Đức Nam*, 11A6, THCB Đào Duy Từ, Tp Thanh Hóa; *Nguyễn Biên Cương*, 10C, PTTH Bỉm Sơn; **Phú Yên:** *Hoàng Quốc Hoa*, 12 Toán, PTTH Lương Văn Chánh; **Tây Ninh:** *Ngô Minh Triết*, 12Á, PTTH Trần Hưng Đạo, Tx Tây Ninh; **Nghệ An:** *Lương Minh Đức*, 11 Lí, *Đào Anh Đức* và *Trần Tiến Dũng*, 11 Lí, PTTH Phan Bội Châu, Vinh; **Cà Mau:** *Vũ Lâm Chí Nhân*, 22 Lí Bôn, P.2, Tp Cà Mau.

MAI ANH

CUỘC THI GIẢI TOÁN KỈ NIỆM 35 NĂM TẠP CHÍ THVTT

Bài T5/THCS. *Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho $2^{11p} - 2$ chia hết cho 11p.*

ĐẶNG HÙNG THẮNG
(*Hà Nội*)

Lời giải. Giả sử p là số cần tìm, ta có $2^{11p} \equiv 2 \pmod p$ (1). Áp dụng định lí Fermat đối với số nguyên tố p, ta lại có : $2^{11p} = (2^{11})^p \equiv 2^{11} \pmod p$ (2). Từ (1) và (2) suy ra p là ước số của $2^{11} - 2 = 2046 = 2.3.11.31$. Mà p là số nguyên tố nên $p \in \{2, 3, 11, 31\}$.

1) $p = 2$. Ta có $2^{22} \equiv 2 \pmod{22}$. Suy ra $2^{21} \equiv 1 \pmod{22} \equiv 1 \pmod{11}$ (3). Ta lại có $2^{10} \equiv 1 \pmod{11}$ (4) nên $2^{20} = (2^{10})^2 \equiv 1 \pmod{11}$, suy ra $2^{21} \equiv 2 \pmod{11}$, mâu thuẫn với (3). Vậy $p = 2$ bị loại.

2) $p = 3$. Từ (4) ta có :

$2^{32} = (2^{10})^3.2^2 \equiv 4 \pmod{11}$.

Do đó $2^{32} \not\equiv 1 \pmod{11}$ suy ra $2^{32} \not\equiv 1 \pmod{33}$, và $2^{33} \not\equiv 2 \pmod{33}$. Vậy $p = 3$ bị loại.

3) $p = 11$. Ta có

$$2^{11p} - 2 = 2^{121} - 2 = 2((2^{30})^4 - 1)$$
$$= 2((2^{30})^2 + 1)((2^{30}+1)(2^5+1)(2^{10}-2^5+1) \times (2^5-1)(2^{10}+2^5+1).$$

Thay 2^5 bằng 32 và kết hợp với (4), suy ra trong tích này chỉ có nhân tử 2^5+1 là chia cho 11 được 3 còn các nhân tử khác đều không chia hết cho 11, nên tích không chia hết cho $11p = 121$. Vậy $p = 11$ bị loại.

4) $p = 31$. Ta cần kiểm tra xem $2^{340} \equiv 1 \pmod{341}$ hay không. Từ (4), suy ra $2^{340} = (2^{10})^{34} \equiv 1 \pmod{11}$ (5). Ta lại có $2^5 \equiv 1 \pmod{31}$ nên $2^{340} = (2^5)^{68} \equiv 1 \pmod{31}$. Kết hợp điều này với (5) suy ra điều cần kiểm tra là đúng (vì 11 và 31 đều là số nguyên tố).

Vậy số nguyên tố cần tìm là $p = 3$.

Nhận xét. Có 79 bài giải trong đó có 48 bài giải đúng. Có bạn cho đáp số là mọi số nguyên p khác 2 và khác 3 (!). Thậm chí có bạn trả lời $p = 1$ (!). Nhiều bạn không loại trừ $p = 11$ hoặc nêu lí do loại trừ chưa xác đáng. Lời giải tốt gồm có các bạn sau đây : **Hải Dương:** *Nguyễn Tuấn Đạt*, 8A, THCS Nguyễn Trãi, Nam Sách; **Khánh Hòa:** *Nguyễn Hoa Cương*, 9^{14}, THCS Thái Nguyên, Nha Trang; **Hà Nội:** *Đinh Thanh Tú*, 8T, THCS Ngô Sĩ Liên; **Nam Định:** *Phùng Văn Doanh*, 8D, THCS Ngô Đồng, Giao Thủy; **Đắc Lắc:** *Võ Thị Thái Hà*, 9A, PT cấp II, III Krông Pắc; **Hải Phòng:** *Võ Hoàng Hiệp*, 9T, PTTH NK Trần Phú; **Tp Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Phú Sĩ*, 10A2, PTTH Lê Hồng Phong, Q5; **Thanh Hóa:** *Lê Hữu Tuấn*, 8A, THCS Lê Thánh Tông, Thọ Xuân; **Nghệ An:** *Đậu Quốc Chung*, 8B, THCS Đặng Thai Mai, Tp Vinh; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Thanh Hải*, 9B, THCS Dân tộc Nội trú Lập Thạch.

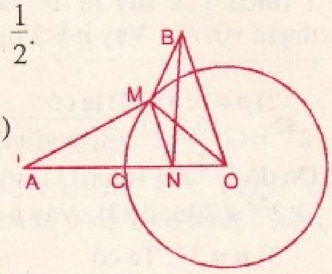
ĐẶNG VIỄN

Bài T6/THCS. *Cho đường tròn tâm O bán kính R và hai điểm A, B nằm ngoài đường tròn sao cho OA = 2R. Tìm điểm M trên đường tròn để MA + 2MB đạt giá trị nhỏ nhất.*

VĂN NHƯ CƯƠNG
(Hà Nội)

Lời giải. Gọi N là trung điểm CO. Suy ra

$$\frac{ON}{OM} = \frac{OM}{OA} = \frac{1}{2}.$$



Do đó

$\Delta ONM \sim \Delta OMA$ (cgc)

Từ đó $AM = 2MN$

Ta có

$MA + 2MB = 2(MN + MB) \geq 2BN$

Vậy $MA + 2MB$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $2BN$, lúc đó M chính là giao điểm của BN với đường tròn đã cho.

Nhận xét. 1. Một số bạn xét thêm trường hợp O, A, B thẳng hàng. Chứng minh như trên không phụ thuộc vào vị trí của điểm B.

2. Đa số bạn đọc chứng minh rất dài.

Giải tốt bài này gồm có các bạn :

Hải Dương: *Nguyễn Thành Nam*, 8A, PTTH Nguyễn Trãi; **Hà Tây:** *Lê Tuấn Thuận*, 9A, Ngô Sĩ Liên, Chương Mĩ; **Hải Phòng:** *Phạm Đức Hiệp*, *Vũ Ngọc Minh*, 9T, Chu Văn An; **Hà Nội:** *Đinh Thanh Tú*, 8T, Ngô Sĩ Liên; **Nam Định:** *Đinh Thanh Hiện*, 9D, Ngô Đồng, Giao Thủy; **Thanh Hóa:** *Đỗ Mạnh Cường*, 9C, Lê Quý Đôn, Bỉm Sơn, **Tp Hồ Chí Minh:** *Trần Vĩnh Hưng*, 9^3, Nguyễn Du, Gò Vấp.

VŨ KIM THỦY

Bài T5/THPT. *Chứng minh rằng tồn tại dãy vô hạn (p_n) ($n = 1, 2, 3, \ldots$) các số nguyên tố phân biệt có tính chất $p_n \equiv 1 \pmod{1999^n}$ với mọi $n = 1, 2, 3, \ldots$*

ĐẶNG HÙNG THẮNG
(Hà Nội)

Lời giải. (của bạn *Nguyễn Trung Lập*, 11A1, PTTH chuyên **Vĩnh Phúc**)

Để cho gọn kí hiệu $p = 1999$ (p là số nguyên tố). Xét dãy $A_n = 2^{p^n} - 1$ ($n \in N^*$).

$$A_n = A_{n-1}\left[\sum_{i=0}^{p-1}\left(2^{p^{n-1}}\right)^i\right] = A_{n-1} \cdot B_{n-1}.$$

Giả sử p_n là ước nguyên tố của B_{n-1}. Ta chứng minh $A_{n-1} \not\vdots\ p_n$.

Thật vậy nếu trái lại đặt $a = 2^{p^{n-1}}$ ta có $a \equiv 1$ $(\text{mod } p_n) \Rightarrow B_{n-1} = \sum_{i=0}^{p-1} a^i \equiv p \equiv 0 \pmod{p_n}$.

Vậy $p = p_n$. Tức là $a \equiv 1 \pmod{p}$. Nhưng $a = 2^{p^{n-1}} \equiv 2 \pmod{p}$ (do định lí Phecma). Mâu thuẫn này chứng tỏ $A_{n-1} \not\vdots\ p_n$.

Vì $A_n \vdots A_m$ nếu $n > m$ nên ta suy ra với mọi mọi $n > m$ thì $p_n \mid A_n$ và $p_n \not\vdots\ A_m$

Nói riêng (p_n) là dãy các số nguyên tố phân biệt.

Tiếp theo ta chứng minh (p_n) là dãy cần tìm. Thật vậy do $p_n \mid A_n$ nên $2^{p^n} \equiv 1 \pmod{p_n}$. Gọi h_n là số nguyên dương nhỏ nhất để $2^{h_n} \equiv 1 \pmod{p_n}$.

Ta có $\begin{cases} h_n \mid p^n & (*) \\ h_n \mid p_n - 1 & (**) \end{cases}$

Từ (*) suy ra $h_n = p^k$ với $k \le n$.

Nếu $k < n$ thì $2^{h_n} - 1 = 2^{p^k} - 1 = A_k \not\vdots\ p_n$. do đó $k = n$ tức là $h_n = p^n$.

Từ (**) suy ra $p_n \equiv 1 \pmod{p^n}$ với mọi n.

Bài toán được giải xong.

Nhận xét. Các bạn sau đây có lời giải tốt :

Thanh Hóa: *Nguyễn Phi Lê*, 11T, Lam Sơn; **Hà Nội:** *Bùi Viết Lộc, Nguyễn Minh Hoài, Hoàng Tùng*, 11 ĐHKHTN, *Lưu Tiến Đức*, 10A1, ĐHSP; **Hải Phòng:** *Nguyễn Thị Hải Bình*, 10 Trần Phú ; **Gia Lai:** *Hoàng Việt Cường*, 10C3, PTTH Hùng Vương, Pleiku ; **Hà Tây:** *Phan Lạc Linh*, 11, Nguyễn Huệ ; **Thái Bình:** *Lê Thành Công*, 10, trường chuyên Thái Bình.

Có không ít bạn giải sai bài toán này.

Bạn *Trần Tuấn Anh*, 11 Toán, Lê Quý Đôn, Nha Trang, **Khánh Hòa**) đã nêu ra và chứng minh bài toán tổng quát : "Cho $(a, b) = 1$. Chứng minh rằng tồn tại vô hạn các số nguyên tố p_n thỏa mãn $p_n \equiv a \pmod{b^n}$". Để chứng minh bạn đã sử dụng mệnh đề Đirichlê : "Nếu $(a, b) = 1$ thì có vô hạn các số nguyên tố dạng $ak + b$". Mệnh đề này cho đến nay chưa có cách chứng minh bằng sơ cấp đối với a, b tùy ý mà $(a, b) = 1$.

Vì vậy không được sử dụng mệnh đề này trong các kì thi học sinh giỏi. (nếu dùng mệnh đề trên thì bài toán này trở nên tầm thường).

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T6/THPT. *Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Chứng minh rằng có thể tìm được một điểm D trong không gian sao cho :*

(1) ABCD là một tứ diện có các đường cao đồng qui (tứ diện trực tâm); (2) Tồn tại tam giác có độ dài ba cạnh bằng DA, DB, DC và có diện tích bằng diện tích tam giác ABC.

NGUYỄN ĐĂNG PHÁT
(Hà Nội)

Lời giải 1. Thực chất đây là một bài toán dựng hình trong không gian : Dựng một điểm D trong không gian, $D \notin$ mp(ABC) đồng thời thỏa mãn hai điều kiện (1) và (2) của bài toán đặt ra.

Dễ thấy rằng : $ABCD$ là một tứ diện trực tâm khi và chỉ khi hình chiếu (vuông góc) H của D trên mặt phẳng (ABC) là trực tâm của tam giác ABC; nói khác đi là : $D \in$ đường thẳng (Δ), $\Delta \perp$ mp(ABC), $\Delta \cap (ABC) = H$ là trực tâm của ΔABC. (xem hình trang 24).

$ABCD$ là tứ diện trực tâm $\Leftrightarrow DA^2 + BC^2 = DB^2 + CA^2 = DC^2 + AB^2$ Đặt $BC = a$, $CA = b$, $AC = c$, $DA = x$, $DB = y$ và $DC = z$ thì : (1) $\Leftrightarrow$ $x^2 + a^2 = y^2 + b^2 = z^2 + c^2$ (1)

Kí hiệu $\mathcal{T}(x, y, z)$ là tam giác có độ dài các cạnh là x, y, z và giả sử tồn tại $\mathcal{T}(x, y, z)$ mà diện tích $s(\mathcal{T}) = s(ABC)$, sử dụng công thức Hêrông, điều kiện đó trở thành :

$$(x^2+y^2+z^2)^2 - 2(x^4+y^4+z^4) =$$
$$= (a^2+b^2+c^2)^2 - 2(a^4+b^4+c^4) \quad (2)$$

Như vậy bài toán tìm điểm D qui về tìm nghiệm của hệ phương trình 3 ẩn x, y, z thỏa mãn (1) và (2) sao cho $DA = x > HA$ hay là :

$$x^2+a^2 = y^2+b^2 = z^2+c^2 \text{ và}$$
$$(x^2+y^2+z^2)^2 - (a^2+b^2+c^2)^2 =$$
$$= 2[(x^4-a^4) + (y^4-b^4) + (z^4-c^4)]$$ với $x = AD > AH = \sqrt{4R^2 - a^2}$ (trong đó R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC).

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+a^2 = y^2+b^2 = z^2+c^2 \text{ (đặt là } t) \\ x^2+y^2+z^2 = a^2+b^2+c^2 \end{cases}$$

với $x > \sqrt{4R^2 - a^2}$ (vì $AH^2 + BC^2 = 4R^2$)

$$\Rightarrow t = \frac{2}{3}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Từ đó ta được : $x = km_a$, $y = km_b$ và $z = km_c$, trong đó $k = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ và m_a, m_b, m_c là độ dài các đường trung tuyến ứng với ba cạnh $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ của tam giác ABC.

Nhận xét. Vì m_a, m_b và m_c luôn biểu thị độ dài các cạnh của một tam giác $\mathcal{T}$ nào đó có diện tích $s(\mathcal{T}_0) = \frac{3}{4}s(ABC)$ nên suy ra tam giác $\mathcal{T}(x, y, z)$ đồng dạng với tam giác $\mathcal{T}_0(m_a, m_b, m_c)$ với tỉ số đồng dạng $k = \frac{2}{\sqrt{3}}$, và do đó $s(\mathcal{T}) = s(ABC)$.

Điểm D được xác định trên đường thẳng Δ nói trên bởi khoảng cách $DH = h$, thỏa mãn hệ thức :

$h^2 = DA^2 - HA^2 = x^2 - (4R^2 - a^2) =$

$= t - 4R^2 = \frac{2}{3}(a^2 + b^2 + c^2 - 6R^2)$

Vậy : $DH = h = \sqrt{\frac{2}{3}(a^2 + b^2 + c^2 - 6R^2)}$

Biểu thức này dựng được bằng thước và compa, chú ý rằng $a^2 + b^2 + c^2 > 6R^2$.

Biện luận. Điểm $D \in (\Delta)$, tồn tại khi và chỉ khi $x = DA > HA$ ($\Rightarrow y > HB$, $z > HC$) cũng tức là $h^2 > 0$, hay là :

$a^2+b^2+c^2 > 6R^2$

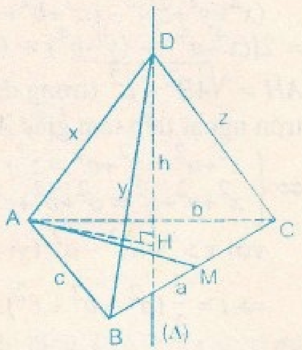
$\Leftrightarrow \sin^2A + \sin^2B + \sin^2C > \frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow \cos2A + \cos2B + \cos2C < 0$ (*)

$\Leftrightarrow \cos A\cos B\cos C > -\frac{1}{4}$ (**)

Vậy (*) hoặc (**) là điều kiện cần và đủ đối với tam giác ABC để tồn tại điểm D theo đề bài. Vì ABC là một tam giác nhọn, nên điều kiện (*) được thỏa mãn.

Lời giải 2. (của *Chu Việt Tuấn*, 11A1, PTTH Phan Bội Châu, Vinh, **Nghệ An**). Gọi (Δ) là đường thẳng vuông góc với mặt phẳng của tam giác ABC tại trực tâm H của nó. Vì tam giác ABC có ba góc nhọn nên H nằm trong ΔABC,



do đó $\frac{2}{\sqrt{3}} m_a > m_a$

$= AM > AH \Rightarrow$ luôn tồn tại điểm D trên (Δ) sao cho $AD = \frac{2}{\sqrt{3}} m_a$.

1) Khi đó tứ diện $ABCD$ có các cặp cạnh đối vuông góc đôi một, suy ra các đường cao của nó đồng qui.

2) Từ $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC} = 0$ suy ra : $DA^2 + BC^2 = DB^2 + CA^2 = DC^2 + AB^2$; rồi từ $DA = \frac{2}{\sqrt{3}} m_a$ suy ra ngay : $DB = \frac{2}{\sqrt{3}} m_b$, $DC = \frac{2}{\sqrt{3}} m_c$. Như vậy ta được :

$$\frac{DA}{m_a} = \frac{DB}{m_b} = \frac{DC}{m_c} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Mặt khác theo phần đầu của **Nhận xét** nêu trên ta suy ra DA, DB và DC là độ dài ba cạnh của một tam giác $(\mathcal{T})$ nào đó có diện tích bằng diện tích tam giác ABC.

Vậy điểm D (và điểm D' đối xứng với D qua mặt phẳng ABC) thỏa mãn điều kiện bài toán đặt ra. Đó là đ.p.c.m.

Nhận xét. 1) Đề toán phát biểu trong dạng bài toán chứng minh nhưng *thực chất* đây là bài toán dựng hình. Lời giải 2 sở dĩ ngắn gọn hơn lời giải 1 chính vì chỉ trình bày các phần dựng hình, chứng minh và biện luận mà bỏ qua phần phân tích. Tuy nhiên đối với số đông các bạn, việc trình bày bắt đầu bằng việc "phân tích" là hết sức cần thiết cho việc rèn luyện tư duy lôgic, nâng cao khả năng phân tích và tổng hợp trong việc giải một bài toán dựng hình tương đối khó.

2) Đa số lời giải của các bạn đều sử dụng tính chất đặc trưng của tứ diện trực tâm (như lời giải 1) và công thức Hêrông về diện tích tam giác. Tuy nhiên, cũng có một số bạn sử dụng phương pháp dựng hình hộp ngoại tiếp một tứ diện (hình hộp mà mỗi mặt chứa một cạnh của tứ diện) : $ABCD$ là một *tứ diện trực tâm* khi và chỉ khi hình hộp $AB'CD'.C'DA'B$ ngoại tiếp nó là một *hình hộp thoi* (tất cả các cạnh bằng nhau). Rồi tính cạnh của hình hộp thoi đó theo các cạnh a, b, c của tam giác đã cho : $x = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{6}}$

Nhưng tiếc rằng đa số các bạn không chú ý biện luận bài toán nên không thấy phải sử dụng giả thiết tam giác ABC có 3 góc nhọn.

3) Có 51 bạn tham gia giải nhưng 12 bạn đã giải sai. Các bạn sau đây có lời giải tốt :

Vĩnh Phúc: *Nguyễn Trung Lập*, 11A1, PTTH chuyên Vĩnh Phúc; **Hòa Bình:** *Đỗ Quang Dương*, 12T, PTTH Hoàng Văn Thụ; **Hải Phòng:** *Nguyễn Thị Hải Bình*, 10 Lí, PTTH NK Trần Phú; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Thừa Thắng*, 10T, PTTH NK Hà Tĩnh; **Nghệ An:** *Nguyễn Trọng Huy, Võ Khắc Minh*, 11A1, Phan Bội Châu, Tp. Vinh; **Khánh Hòa:** *Trần Tuấn Anh*, 11 toán, PTTH Lê Quý Đôn, Nha Trang

NGUYỄN ĐĂNG PHẤT

Ghi chú về đề thi giải toán 35 năm THVTT : *Bài T3/THCS và T4/THPT của tác giả Trần Nam Dũng (Tp Hồ Chí Minh). Bài T4/THCS của tác giả Nguyễn Đăng Phất (Hà Nội). Bài T3/THPT của tác giả Trần Xuân Đáng (Nam Định).*

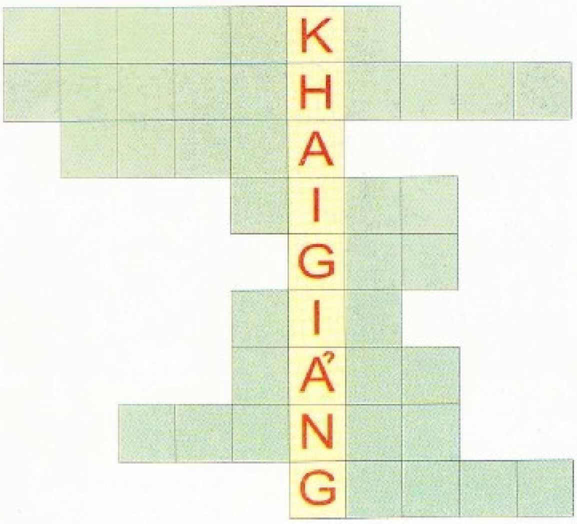
Ô CHỮ NGÀY KHAI GIẢNG

Bạn thử hoàn chỉnh ô chữ ở hình dưới, biết rằng từng dòng có ý nghĩa như sau :

1) Dụng cụ học tập
2) Phép nhân hai số giống nhau.
3) Lại dụng cụ học tập
4) Kết quả của phép trừ
5) Một khái niệm của hình học
6) Một hàm số lượng giác
7) Ngồi học trong lớp nhớ nhìn lên đó
8) Một khái niệm toán thời lớp năm
9) Nhà toán học tài năng mất khi chưa tròn 21 tuổi.

Năm phần thưởng cho 5 bạn nhanh tay nhất và tất nhiên... hay nhất.

NGỌC MAI



TÌM GIỚI HẠN THẬT LÀ ĐƠN GIẢN !

Một bạn đọc tìm giới hạn $\lim\limits_{x \to +\infty}(\sqrt{x^2-2x+3} - x)$ như sau :

Ta có $L = \lim\limits_{x \to +\infty}\left[x\sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}} - x\right]$

Vì $\lim\limits_{x \to +\infty}\sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}} = 1$

nên $L = \lim\limits_{x \to +\infty}(x - x) = 0$.

Cách làm trên "nom" đơn giản hơn cách làm sau đây :

$$L = \lim_{x \to +\infty}\frac{-2x+3}{\sqrt{x^2-2x+3}+x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty}\frac{-2+\frac{3}{x}}{\sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}} + 1} = -1.$$

Cách nào đúng ? Cách nào sai ? Sai ở đâu ?

KIHIVI

ĐI TÌM CÁC ĐẲNG THỨC ĐẸP

Đẳng thức $\overline{ab} \times \overline{cd} = \overline{ba} \times \overline{dc}$ (viết trong hệ thập phân) trông thật là đẹp, có phải không các bạn ?

Để đỡ tầm thường giả sử $a \neq b$. Bạn thử tìm tất cả các đẳng thức đẹp như trên nhé !

NGÔ HÂN
(Bắc Ninh)

TRƯỜNG PTTH CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG, NAM ĐỊNH

Hiệu trưởng
NGUYỄN VIẾT HÙNG

Năm 1920, trên đất học giàu truyền thống văn hiến Nam Định, trường Thành Chung ra đời. Nhiều lãnh tụ tiền bối của nước ta đã từng học ở đây. Thành Chung cũng là tiền thân của nhiều trường Phổ thông trung học sau này.

Sau thắng lợi của cuộc kháng chiến chống Pháp, năm 1955 các trường cấp III hợp nhất thành trường PT cấp II Liên khu III, sau đó chuyển về thành phố Nam Định. Từ năm 1959-1960 trường được mang tên Lê Hồng Phong.

Chỉ tính riêng từ năm học 1994-1995 trở lại đây, nhà trường đã có 4 thầy giáo được phong tặng danh hiệu Nhà giáo ưu tú, 2 thầy giáo được tặng Huân chương lao động hạng Ba, nhiều thầy cô giáo được nhận bằng khen của Thủ tướng Chính phủ, của Bộ trưởng Bộ Giáo dục - Đào tạo, của Chủ tịch UBND tỉnh, 238 lượt thầy giáo và cô giáo được công nhận là giáo viên giỏi, chiến sĩ thi đua cấp cơ sở.

Với đội ngũ giáo viên giàu kinh nghiệm, yêu ngành, yêu nghề, hết lòng với sự nghiệp nên trường đã đào tạo được nhiều thế hệ học sinh có phẩm chất đạo đức tốt, trình độ văn hóa giỏi. Tỉ lệ tốt nghiệp PTTH hằng năm đạt từ 99,7% trở lên (trong đó 83,5% khá giỏi), tỉ lệ học sinh thi đỗ vào đại học và cao đẳng đạt 94%. Trong 5 năm học gần đây nhất, trường đã có 2623 học sinh đoạt giải trong các kì thi học sinh giỏi toàn tỉnh, 291 học sinh đạt giải quốc gia. Đặc biệt, năm học nào trường cũng có học sinh tham dự và đoạt giải trong các kì thi học sinh giỏi quốc tế. Các em đã mang về cho Tổ quốc và cho trường 11 huy chương các loại (trong đó có 3 huy chương vàng, 4 huy chương bạc, 4 huy chương đồng).

Từ năm học 1994-1995 đến năm 1998-1999 đã có 34 học sinh đạt giải môn Toán, 18 học sinh đoạt giải môn Tin học tại các kì thi học sinh giỏi toàn quốc, trong đó có em Nguyễn Anh Hoa đạt giải nhất tuyệt đối 40/40 điểm (năm học 1997-1998). Trong 5 năm học vừa qua đã có 22 học sinh dự tuyển vòng 2 chọn học sinh giỏi toán của Việt Nam đi thi quốc tế trong đó có 6 em được tham gia đội tuyển chính thức và đã có 5 em đoạt giải, trong đó có 3 huy chương bạc, 2 huy chương đồng...

Trường đã được tặng thưởng nhiều phần thưởng cao quý của Đảng và Nhà nước : 3 Huân chương Lao động hạng ba, 1 Huân chương Lao động hạng nhì, 1 Huân chương Lao động hạng nhất, 1 Huân chương Độc lập hạng 3, 1 lẵng hoa của Chủ tịch nước và nhiều bằng khen của Thủ tướng Chính phủ, của Bộ trưởng Bộ Giáo dục và Đào tạo, của Chủ tịch UBND tỉnh. Nhà trường cũng liên tục được công nhận là trường tiên tiến xuất sắc của ngành Giáo dục - Đào tạo và một phần thưởng vô giá mà nhà trường đã giành được là lòng tin yêu, mến mộ của Đảng bộ, Chính quyền và nhân dân trong tỉnh.

Chúng tôi tin rằng nhà trường PTTH chuyên Lê Hồng Phong Nam Định sẽ vững bước tiến vào thế kỉ XXI với những thắng lợi mới.

Tổ Toán - Tin

ISSN : 0866-0853
Chỉ số : 12884
Mã số : 8BT69M9

Chế bản tại Tòa soạn
In tại Nhà máy in Diên Hồng, 57 Giảng Võ
In xong và nộp lưu chiểu tháng 9 năm 1999

Giá : 3.000đ
Ba nghìn đồng