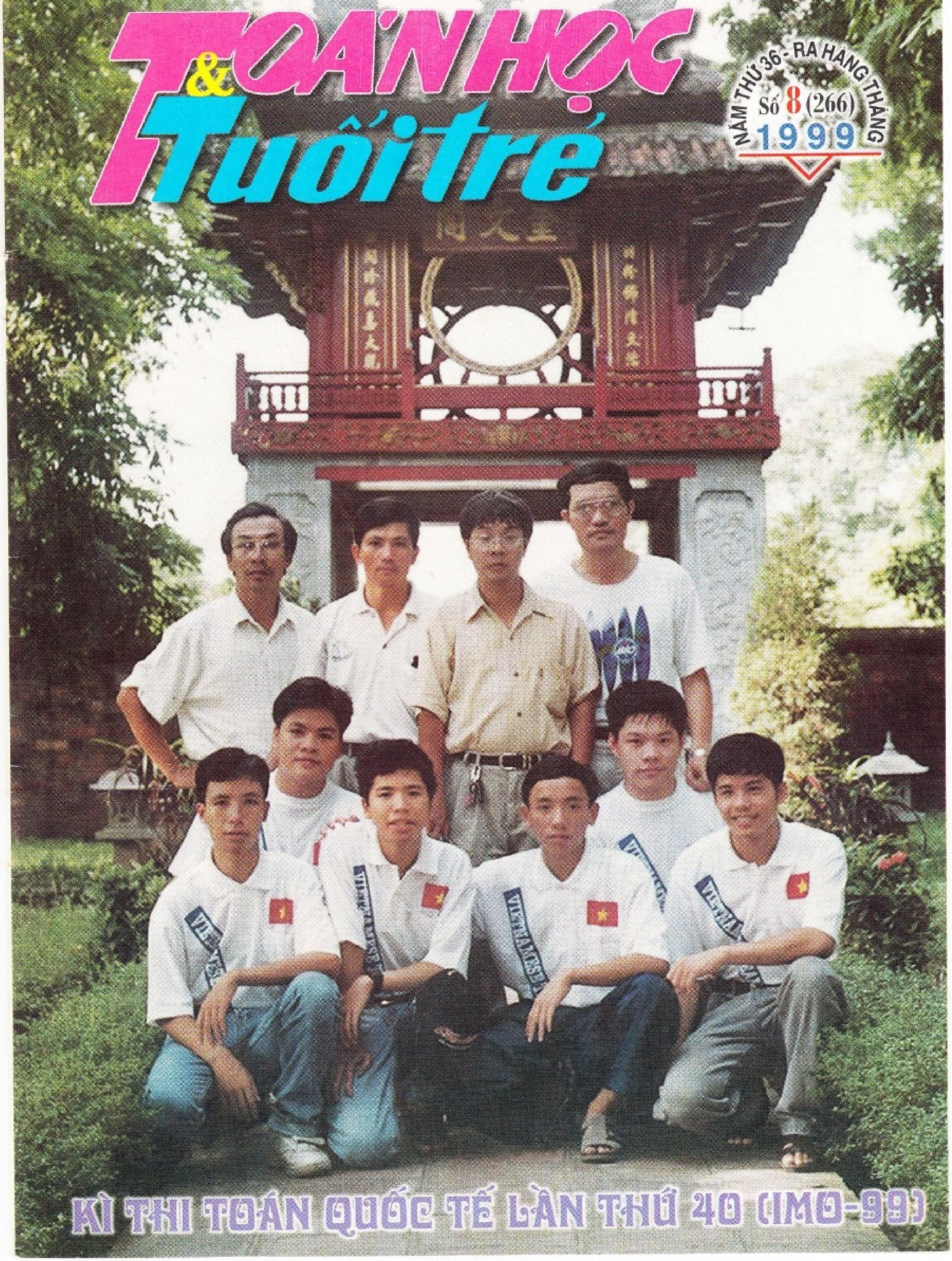
BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ❋ HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

TOÁN HỌC & TUỔI TRẺ

NĂM THỨ 36 - RA HÀNG THÁNG
Số 8 (266)
1999



KÌ THI TOÁN QUỐC TẾ LẦN THỨ 40 (IMO-99)

Những gương mặt, những tấm lòng dành cho *Toán học và Tuổi trẻ*

Nhà giáo ưu tú PGS PHAN ĐỨC THÀNH sinh ngày 28.4.1939, quê ở Hưng Nguyên, Nghệ An. Ông bảo vệ luận án PTS năm 1967 tại Liên Xô, được phong PGS năm 1984. Ông giảng dạy tại các trường Đại học Tổng hợp Hà Nội, Đại học Sư phạm Vinh và là Hiệu trưởng Trường ĐHSP Vinh từ 1989 đến 1997. Ông là ủy viên BCH Hội Toán học Việt Nam các khóa 2, 3. Là cộng tác viên của THVTT những năm 1980-1990, ông vui mừng nhận thấy THTT đã và đang góp phần đắc lực trong việc bồi dưỡng những mầm non nhân tài, các nhà toán học tương lai cho đất nước.

Nhà giáo ưu tú PGS NGUYỄN MỘNG HY sinh ngày 4.9.1934, quê ở Nam Đàn, Nghệ An. Ông bảo vệ luận án PTS năm 1974 tại Hunggari được phong PGS năm 1991. Ông giảng dạy tại Khoa Toán, Trường ĐHSP Vinh từ 1961, làm Chủ nhiệm bộ môn Hình học. Từ 1981 ông công tác tại Khoa Toán, Trường ĐHSP TP Hồ Chí Minh, Chủ nhiệm bộ môn Hình học. Ông đã tham gia viết sách giáo khoa ở bậc PTTH. Ông đã có một số bài đăng trên THVTT. Ông mong THVTT sẽ có nhiều bài nhằm rèn luyện trí thông minh, bồi dưỡng năng lực sáng tạo và khả năng tự học cho học sinh.

PTS NGUYỄN MINH HÀ sinh ngày 27.2.1955, quê tại Hải Phòng, tốt nghiệp Đại học sư phạm năm 1977. Ông đã từng phục vụ trong quân đội 6 năm, dạy ở Trường PTTH năng khiếu Trần Phú, Hải Phòng, bảo vệ luận án PTS năm 1996 rồi dạy Khối chuyên Toán-Tin, khoa Toán, trường ĐHSP-ĐHQG Hà Nội. Ông đã góp phần đào tạo được nhiều học sinh đạt giải Olympic Toán quốc gia và quốc tế. Với PTS Nguyễn Minh Hà, ngay từ khi ở bộ đội, báo THVTT đã là người bạn thân thiết. Ông có nhiều đề toán, nhiều bài viết đăng trên THVTT mà mỗi bài viết đều là kết quả của sự trăn trở, suy nghĩ lâu dài.

Thạc sĩ NGUYỄN VĂN VĨNH sinh ngày 14.9.1950 tại Nam Định, hiện là Chủ nhiệm bộ môn Phương pháp giảng dạy toán, Khoa Toán Trường ĐHSP-ĐHQG TP Hồ Chí Minh ; ủy viên Ban chấp hành Hội Giảng dạy Toán học phổ thông. Nhận xét về tạp chí, ông viết : "Những năm vừa qua tạp chí THVTT đã có nhiều đổi mới, cải tiến các chương mục làm cho tạp chí trở nên sinh động hơn, hấp dẫn hơn với các bạn trẻ say mê học toán ngay từ bậc Trung học cơ sở".

Toán học và Tuổi trẻ
Mathematics and Youth

Năm thứ 36
Số 266 (8-1999)
Tòa soạn : 25 Hàn Thuyên, Hà Nội
ĐT : 04.8262477-FAX: (84).4.9714359

TRONG SỐ NÀY

Bìa 1 : Đoàn VN trước khi đi thi Olympic toán Quốc tế tại Rumani. (Hàng trên, các thầy giáo *Hoàng Hoa Trại, Lưu Xuân Tình, Vũ Đình Hòa, Đặng Hùng Thắng.* Hàng dưới, các thí sinh : *Bùi Mạnh Hùng, Nguyễn Trung Tú, Lê Thái Hoàng, Trần Văn Nghĩa, Phạm Trần Quân, Đỗ Quang Yên*).

Bìa 2 : Những gương mặt, những tấm lòng dành cho Toán học và Tuổi trẻ

Bìa 3 : **Giải trí toán học - Math Recreation**
Bình Phương - Giải đáp bài *Sinh năm nào*
Man Đức Tân - Điền số vào các ô tròn
Câu lạc bộ - Math Club
Sai lầm ở đâu ? Nghiệm duy nhất ? Thật không ?

Bìa 4 : Trường PTTH chuyên tỉnh Thái Bình

Dành cho các bạn
TRUNG HỌC CƠ SỞ

TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT CỦA BIỂU THỨC CÁC SỐ NGUYÊN

TRẦN HỮU THÁP - NGUYỄN NGỌC KHOA
(Quảng Ngãi)

Bài toán 1. Cho $k \in \mathbf{N}$, $k \geq 2$, $x, y \in \mathbf{N}^*$ thỏa mãn $x+y = k$. Tính giá trị lớn nhất của tích xy, viết tắt là $GTLN\,(xy)$.

Giải : Cách 1. Nếu k chẵn dùng BĐT Côsi ta có ngay $xy \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = \left(\frac{k}{2}\right)^2$, lúc đó GTLN (xy) $= \frac{k^2}{4}$ khi $x = y = \frac{k^2}{4}$.

Trường hợp tổng quát có thể giả sử $x \geq y \Rightarrow$ $y \leq \frac{k}{2} \Rightarrow y \leq \left[\frac{k}{2}\right]$ (kí hiệu $[x]$ chỉ phần nguyên của x) thì $xy = (k-y)y = -y^2 + ky \leq -\left[\frac{k}{2}\right]^2 + k\left[\frac{k}{2}\right]$ (do $f(t) = -t^2 + kt$ đồng biến trên $(-\infty, \frac{k}{2})$) $\Rightarrow$ GTLN$(xy) = \left[\frac{k}{2}\right]\left(k - \left[\frac{k}{2}\right]\right)$ khi $x_o = k - \left[\frac{k}{2}\right]$, $y_o = \left[\frac{k}{2}\right]$

Dù k chẵn hay lẻ ta đều có : $x_o - y_o \leq 1$ điều này gợi ý cách chứng minh sau :

Cách 2.

Không giảm tính tổng quát, giả sử $x \geq y$. Do x, y chỉ nhận hữu hạn giá trị, nên xy đạt được giá trị lớn nhất tại $x = x_o$, $y = y_o$. Giả sử $x_o - y_o > 1$. Ta có bộ hai số nguyên dương (x_o-1, y_o+1) thỏa mãn $x_o - 1 \geq y_o + 1$ và $(x_o - 1) + (y_o + 1) = k$, nhưng $(x_o - 1)(y_o + 1) = x_oy_o + (x_o - y_o) - 1 > x_oy_o \Rightarrow$ mâu thuẫn. Vậy phải có $x_o - y_o \leq 1$. Xét hai trường hợp $x_o - y_o = 0$, $x_o - y_o = 1$ ta nhận được kết quả trên.

Bài toán 2. Cho $k \in \mathbf{N}$, $k \geq 3$; $x, y, z \in \mathbf{N}^*$ thỏa mãn $x + y + z = k^{(*)}$. Tính GTLN(xyz).

Giải. Nếu $k \vdots 3$ dùng BĐT Côsi ta có ngay

$$xyz \leq \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3 = \left(\frac{k}{3}\right)^3 \text{ khi } x = y = z = \frac{k}{3}$$

Với k bất kì, phương pháp khảo sát hàm bậc 2 để giải bài toán 2 không còn hiệu quả nữa, như vậy để giải được bài toán 2, ta phải tìm một "kĩ thuật" khác, một phương pháp khác.

Cách giải thứ 2 của bài toán 1 gợi ý giải bài toán 2 như sau :

Không giảm tính tổng quát, giả sử $x \geq y \geq z$ (**).

Do x, y, z nhận hữu hạn giá trị nên xyz đạt được giá trị lớn nhất tại $x = x_o$, $y = y_o$, $z = z_o$.

Giả sử $x_o - z_o > 1$. Xét các trường hợp xảy ra:

a) $x_o = y_o > z_o + 1$. Bộ ba số nguyên dương (x_o, y_o-1, z_o+1) thỏa mãn điều kiện (*) và (**), nhưng :

$x_o(y_o-1)(z_o+1) = x_oy_oz_o + x_o(y_o-z_o-1) > x_oy_oz_o$ $\Rightarrow$ mâu thuẫn.

b) $x_o > y_o > z_o$. Bộ ba số nguyên dương (x_o-1, y_o, z_o+1) thỏa mãn điều kiện (*) và (**), nhưng :

$(x_o-1)y_o(z_o+1) = x_oy_oz_o + y_o(x_o-z_o-1) > x_oy_oz_o$ $\Rightarrow$ mâu thuẫn.

c) $x_o - 1 > y_o = z_o$. Bộ ba số nguyên dương (x_o-1, y_o+1, z_o) thỏa mãn điều kiện (*) và (**), nhưng :

$(x_o-1)(y_o+1)z_o = x_oy_oz_o + z_o(x_o-y_o-1) > x_oy_oz_o$ $\Rightarrow$ mâu thuẫn. Từ (a) (b) (c) chỉ có thể : $x_o - z_o \leq 1$ $\Rightarrow$ xảy ra hai trường hợp :

a) $x_o - z_o = 0 \Rightarrow x_o = y_o = z_o = \frac{k}{3}$, xảy ra $\Leftrightarrow k \equiv 0 \pmod 3$.

b) $x_o - z_o = 1$: xảy ra hai trường hợp :

*) $x_o = y_o + 1 = z_o + 1 \Rightarrow x_o = \frac{k+2}{3}$, $y_o = z_o = \frac{k-1}{3}$, xảy ra $\Leftrightarrow k \equiv 1 \pmod 3$.

*) $x_o = y_o = z_o + 1 \Rightarrow x_o = y_o = \frac{k+1}{3}$, $z_o = \frac{k-2}{3}$, xảy ra $\Leftrightarrow k \equiv 2 \pmod 3$.

Kết luận :

1) $k \equiv 0 \pmod 3$: GTLN$(xyz) = \left(\frac{k}{3}\right)^3$

2) $k \equiv 1 \pmod 3$: GTLN$(xyz) = \left(\frac{k+2}{3}\right)\left(\frac{k-1}{3}\right)^2$

3) $k \equiv 2 \pmod 3$: GTLN$(xyz) = \left(\frac{k+1}{3}\right)^2\left(\frac{k-2}{3}\right)$

Ta đã giải các bài toán 1, 2 theo các bước sau ;

- Tìm GTLN của biểu thức khi coi các biến là số thực, ở đây có thể sử dụng các BĐT.

- Dự đoán giá trị nguyên của các biến để biểu thức đạt GTLN.

- Chứng minh các giá trị đã dự đoán trên là đúng, ở đây có thể dùng phương pháp chứng minh phản chứng và phương pháp so sánh giá trị biểu thức khi cho các biến tăng hoặc giảm 1 đơn vị.

Bài toán 3. Cho $k \in \mathbf{N}$, $k \geq 3$; $x, y, z \in \mathbf{N}^*$ thỏa mãn :

$x+y+z = k$. Tính GTLN$(xy+xz+yz)$

Hướng dẫn giải : Sử dụng BĐT

$$3(xy+yz+zx) \leq (x+y+z)^2$$

Bài toán 4. Cho $k \in \mathbf{N}$, $k \geq 3$; $x, y, z \in \mathbf{N}^*$ thỏa mãn: $x+y+z=k$. Tính GTLN$(xy+2xz+3yz)$.

Hướng dẫn giải :

Khác với các bài toán 1, 2, 3, trong bài toán 4 vai trò x, y, z đã không còn "bình đẳng". Đặt $A(x,y,z) = xy+2xz+3yz$. Nhận xét rằng : nếu $x > 1$, khi x giảm 1 đơn vị và y hoặc z tăng 1 đơn vị, dùng phương pháp so sánh ta có hoặc $A(x-1, y+1, z)$ hoặc $A(x-1, y, z+1)$ đều lớn hơn $A(x, y, z)$, điều này cho phép ta dự đoán A đạt giá trị lớn nhất khi $x = 1$. Ta chứng minh bằng phương pháp phản chứng như sau :

Do x, y, z nhận hữu hạn giá trị, nên A đạt GTLN tại $x=x_0$, $y=y_0$, $z=z_0$. Giả sử $x_0>1$. Xét hai trường hợp xảy ra :

a) $z_0 \geq y_0$

Ta có bộ ba số nguyên dương (x_0-1, y_0+1, z_0) thỏa mãn $(x_0-1) + (y_0+1) + z_0 = k$,

nhưng : $(x_0-1)(y_0+1) + 2(x_0-1)z_0 + 3(y_0+1)z_0 = x_0y_0 + 2x_0z_0 + 3y_0z_0 + (z_0-y_0) + (x_0-1) > x_0y_0 + 2x_0z_0 + 3y_0z_0 \Rightarrow$ mâu thuẫn.

b) $y_0 \geq z_0$. Ta có bộ ba số nguyên dương (x_0-1, y_0, z_0+1) thỏa mãn $(x_0-1) + y_0 + (z_0+1)=k$ nhưng $(x_0-1)y_0 + 2(x_0-1)(z_0+1) + 3y_0(z_0+1) = x_0y_0 + 2x_0z_0 + 3y_0z_0 + 2(y_0-z_0) + 2(x_0-1) >$ $x_0y_0 + 2x_0z_0 + 3y_0z_0 \Rightarrow$ mâu thuẫn. Vậy $x_0 = 1$.

Dùng phương pháp so sánh để xét tiếp $A(1, y, z)$.

Bài toán 5. Cho $k \in \mathbf{N}^*$, $k \geq 6$, $x, y, z \in \mathbf{N}^*$. Tính GTLN $((x+y+z)(y+2z) + (y+z)z)$

Hướng dẫn giải : Do x, y, z nhận hữu hạn giá trị nên $(x+y+z)(y+2z) + (y+z)z$ đạt giá trị lớn nhất tại $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$.

Giả sử $x_0 > 1$ và $y_0 > 1$, chọn bộ ba số nguyên dương (x_0-1, y_0-1, z_0+1) để dẫn đến mâu thuẫn. Vậy $x_0 = 1$, hoặc $y_0 = 1$. Xét hai trường hợp để tìm GTLN. Cuối cùng, xin bạn giúp chúng tôi giải quyết một số vấn đề sau : hoàn chỉnh tất cả các bài giải, tìm lời giải hay hơn, đẹp hơn, tổng quát hóa các bài toán trên./.

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN

BÀI SỐ 20

Problem. Assume that $x + 1/x = 2\cos a$. Prove that

$$x^n + 1/x^n = 2\cos na.$$

Solution. Rewrite the given equation in the form

$$x^2 - 2x\cos a + 1 = 0.$$

Solving this quadratic equation we obtain

$$x = \cos a \pm \sqrt{\cos^2 a - 1} = \cos a \pm i\sin a,$$

where i denotes the imaginary number. By De Moivre's formula, this implies

$$x^n = \cos na \pm i\sin na,$$

$$1/x^n = \cos na \mp \sin na.$$

Summing up both sides of these two equations yields the required equation

$$x^n + 1/x^n = 2\cos na.$$

Từ mới :

assume	= giả sử, giả thiết
rewrite	= viết lại
given	= cho trước (tính từ)
quadratic	= bậc hai, toàn phương (tính từ)
denote	= kí hiệu
imaginary	= ảo (tính từ)
by	= theo
formula	= công thức
sum up	= cộng vào, tổng cộng (động từ)
yield	= cho, cho thấy (động từ)
require	= đòi hỏi, yêu cầu (động từ)

NGÔ VIỆT TRUNG

TRẢ LỜI NHANH

Hỏi : Trong bảng ô chữ ở Câu Lạc Bộ số 265 còn có một vị ĐALĂMBE nữa ở dòng cuối, có phải không ? *(Lê Minh, 484, Trương Công Định, P8, Tp Vũng Tàu).*

Đáp: Đúng như bạn phát hiện, tên ĐALĂMBE đã được thể hiện bởi màu vàng nhạt. Tuy nhiên khi kể ra 9 vị, Tòa soạn lại ghi sót mất tên ông. Cảm ơn bài viết về Giăng Đalămbe của bạn.

NHẮN TIN

Các bạn được giải thưởng năm học 1997-1998 và được tặng phẩm của Câu Lạc bộ gửi địa chỉ mới về Tòa soạn để nhận bằng khen và tặng phẩm.

KÌ THI TOÁN QUỐC TẾ LẦN THỨ 40 (IMO-99)

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Kì thi Toán Quốc tế (gọi tắt là IMO) lần thứ 40 được tổ chức tại Bucaret, thủ đô của Rumani từ ngày 10/7 tới ngày 22/7/1999. Rumani là nước có sáng kiến tổ chức cuộc thi Toán Quốc tế lần đầu tiên vào năm 1959, lúc đó mới chỉ có 7 nước tham dự. Kì thi lần thứ 40 có 453 thí sinh từ 82 nước và vùng lãnh thổ, mỗi đội có nhiều nhất 6 thí sinh). Đội tuyển Việt Nam gồm 6 học sinh : *Lê Thái Hoàng* (12 ĐHSP-ĐHQG Hà Nội), *Đỗ Quang Yên* (12 Lam Sơn, Thanh Hóa), *Trần Văn Nghĩa* (12 Lê Khiết, Quảng Ngãi), *Bùi Mạnh Hùng, Nguyễn Trung Tú* và *Phạm Trần Quân* (12, ĐHKHTN-ĐHQG Hà Nội). Trưởng đoàn là PGS. TS Đặng Hùng Thắng (ĐHKHTN-ĐHQG Hà Nội) và Phó đoàn là TS Vũ Đình Hòa (Viện Công nghệ thông tin). Đoàn có có hai quan sát viên : thầy giáo Lưu Xuân Tình (PTTH Lam Sơn, Thanh Hóa) và thầy giáo Hoàng Hoa Trại (PTTH chuyên Lê Khiết, Quảng Ngãi).

Trong 3 ngày từ 11/7 tới 14/7, tại một khu nghỉ mát cách Bucaret trên 200km, Hội đồng giám khảo (gồm trưởng đoàn của các nước tham dự) đã họp và thảo luận sôi nổi để từ 27 bài toán dự tuyển chọn ra 6 bài toán làm đề thi chính thức cho hai ngày. Sau đó đề thi được trao cho các trưởng đoàn để dịch ra tiếng nước mình, các bản dịch được trưng bài công khai cho tất cả trưởng đoàn các nước cùng xem và kiểm tra.

Ngày 15/7 lễ khai mạc được tổ chức trọng thể tại Cung Hoàng gia. Trong hai ngày thi (16 và 17/7), mỗi ngày thí sinh phải giải 3 bài toán với thời gian là 4 giờ 30 phút.

Việc chấm thi được tiến hành như sau : Trước hết, bài thi của học sinh nước nào được giao cho trưởng, phó đoàn của nước đó chấm, đồng thời một bản chụp các bài thi đó cũng được giao cho các cặp giám khảo của nước chủ nhà chấm. Mỗi cặp phụ trách chấm chỉ một bài toán của một số nước với biểu điểm đã được thống nhất ở Hội đồng giám khảo. Tiếp theo trưởng, phó đoàn lần lượt gặp 6 cặp chấm của nước chủ nhà để bảo vệ bằng miệng bài làm của học sinh nước mình rồi thống nhất điểm với họ. Rất giống như một cuộc thi vấn đáp ở trường Đại học, chúng tôi rất hồi hộp trong khi chờ đợi đến lượt mình. Kết quả chấm đến đâu được niêm yết công khai ngay lập tức. Căn cứ vào kết quả thi và điều lệ của IMO, ban tổ chức đã quyết định trao giải :

+ 38 huy chương vàng (HCV) cho các thí sinh đạt từ 28 điểm trở lên (điểm tối đa là 42 điểm = 7 điểm × 6 bài).

+ 70 huy chương bạc (HCB) cho các thí sinh đạt từ 19 điểm đến 27 điểm.

+ 117 huy chương đồng (HCĐ) cho các thí sinh đạt từ 12 điểm đến 18 điểm.

Kết quả cụ thể của đội tuyển Việt Nam như sau :

Họ và tên	*Bài 1*	*Bài 2*	*Bài 3*	*Bài 4*	*Bài 5*	*Bài 6*	*Điểm*	*Giải*
Lê Thái Hoàng	7	7	3	7	7	7	38	HCV
Đỗ Quang Yên	7	7	1	7	7	7	36	HCV
Bùi Mạnh Hưng	7	7	0	7	7	1	29	HCV
Phạm Trần Quân	7	7	4	1	7	1	27	HCB
Trần Văn Nghĩa	6	6	1	3	6	1	24	HCB
Nguyễn Trung Tú	7	2	0	7	6	1	23	HCB

Căn cứ vào tổng số điểm của toàn đội, 10 đội đứng đầu trong kì thi này là : Trung Quốc (182 điểm), LB Nga (182 điểm), Việt Nam (177 điểm), Rumani (173 điểm), Bungari (170 điểm), Belarus (167 điểm), Hàn Quốc (164 điểm), Iran (158 điểm), Đài Loan (153 điểm) và Mỹ (150 điểm). Như vậy, nếu xếp hạng theo tổng số điểm hoặc theo tổng số huy chương vàng, Việt Nam đều xếp thứ ba. (Trung quốc và LB Nga có 4 HCV, Rumani có 3 HCV, Bungari có 2 HCV). Đây là thành tích cao nhất của nước ta trong 23 lần thi IMO.

Lễ bế mạc IMO 99 được tổ chức trọng thể tại Nhà Quốc hội vào ngày 21-7. Tổng thống Rumani đã đến dự, đọc lời phát biểu và trao huy chương vàng cho 10 thí sinh đầu tiên. Kì thi IMO lần thứ 41 sẽ được tổ chức tại Hàn Quốc vào năm 2000.

Dưới đây chúng tôi xin giới thiệu với bạn đọc đề thi IMO 99.

Đề thi năm nay được đánh giá là khó, có chất lượng chuyên môn cao, phân loại khá tốt các thí sinh. Bài khó nhất là bài 6, chỉ có 11 em được điểm 7. Bài khó thứ nhì là bài 3, chỉ có 22 em được điểm 7. Không có thí sinh nào đạt điểm tuyệt đối (42 điểm) và chỉ có 3 thí sinh đạt điểm cao nhất 39 điểm là T. Terpai (Hunggari), S.Hornet (Rumani) và M.Fedorchuk (Ukraina).

ĐỀ THI OLYMPIC TOÁN QUỐC TẾ LẦN THỨ 40 (7/1999)

Bài 1. Xác định tất cả các tập hữu hạn điểm S trên mặt phẳng sao cho S có ít nhất 3 điểm và thỏa mãn điều kiện sau đây :

Với hai điểm phân biệt A và B bất kì thuộc S, đường trung trực của đoạn thẳng AB là một trục đối xứng của S.

Bài 2. Cho trước số nguyên dương $n \geq 2$.

a) Xác định hằng số C nhỏ nhất sao cho với bất kì n số thực không âm $x_1 ..., x_n \geq 0$, ta đều có bất đẳng thức sau

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) \leq C\Big(\sum_{1 \leq i < n}\Big)^4$$

b) Với hằng số C này, hãy xác định xem khi và chỉ khi nào ta có dấu đẳng thức.

Bài 3. Cho trước một bảng hình vuông kích thước $n \times n$, ở đó n là một số nguyên dương chẵn cố định trước. Bảng này được chia thành n^2 ô vuông đơn vị. Ta nói rằng hai ô vuông khác nhau trên bảng là *kề nhau*, nếu chúng có một cạnh chung.

Người ta đánh dấu N ô vuông trên bảng sao cho mỗi ô vuông trên bảng (dù được đánh dấu hay không được đánh dấu) đều kề với ít nhất một ô vuông được đánh dấu. Xác định giá trị nhỏ nhất có thể của N.

Bài 4. Xác định tất cả các cặp số nguyên dương (n, p) sao cho p là một số nguyên tố, $n \leq 2p$, và $(p-1)^n + 1$ chia hết cho n^{p-1}.

Bài 5. Hai đường tròn Γ_1 và Γ_2 nằm trong đường tròn Γ và tiếp xúc với Γ tương ứng tại hai điểm phân biệt M và N. Đường tròn Γ_1 đi qua tâm của đường tròn Γ_2. Đường thẳng đi qua hai giao điểm của Γ_1 và Γ_2 cắt Γ tại hai điểm A và B. Các đường thẳng MA và MB cắt Γ_1 tương ứng tại C và D. Chứng minh rằng CD tiếp xúc với Γ_2.

Bài 6. Tìm tất cả các hàm $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(x-f(y)) = f(f(y)) + xf(y) + f(x) - 1$$

với mọi $x, y \in \mathbf{R}$./.

Tổng thống Rumani Giáo sư H.E. Emil Constantinescu trao Huy chương Vàng cho Lê Thái Hoàng trong Lễ bế mạc IMO-99

TÌM HIỂU SÂU THÊM TOÁN HỌC PHỔ THÔNG

LỜI GIẢI MỘT BÀI TOÁN MỞ CỦA JACK GARFUNKEL

NGUYỄN MINH HÀ
(GV trường ĐHSP–ĐHQG Hà Nội)

Nhà Toán học Mĩ Jack Garfunkel là một người rất quan tâm tới toán sơ cấp, đặc biệt là các bất đẳng thức hình học. Ông là tác giả của nhiều bất đẳng thức hình học khó và sâu sắc. Nhiều bất đẳng thức hình học do ông đặt ra cho đến nay vẫn chưa được chứng minh. Bài viết này xin đưa ra và chứng minh một bất đẳng thức như vậy :

Bài toán : *Cho tam giác ABC với trọng tâm G, đường tròn nội tiếp (I). Các đoạn thẳng IA, IB, IC cắt (I) tại U, V, W. Các đoạn thẳng GA, GB, GC cắt (I) tại D, E, F. Chứng minh rằng : $p(UVW) \le p(DEF)$, ở đây $p(.)$ kí hiệu chu vi tam giác.*

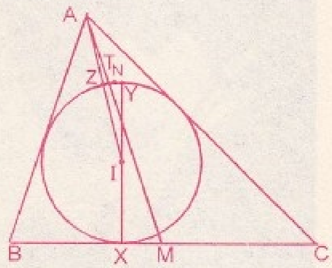
Bài toán trên được nhà xuất bản MathPro Press, liệt vào danh sách những bài toán mở (chưa có lời giải) và được giới thiệu trong cuốn "Index to mathematical problems 1980-1984" (trang 469). Ta sẽ chứng minh bài toán trên thông qua ba bổ đề.

Bổ đề 1. Nếu trọng tâm G của tam giác ABC nằm trong đường tròn nội tiếp (I) thì

$$\max\{a^2, b^2, c^2\} < 4\min\{bc, ca, ab\}$$

Phép chứng minh bổ đề 1 đã được giới thiệu trong tạp chí Toán học và Tuổi trẻ số 262 (4/1999).

Bổ đề 2. Cho tam giác ABC. Đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với cạnh BC tại X. Gọi Y là điểm đối xứng của X qua I. Đoạn thẳng AI cắt (I) tại Z. Trung tuyến AM cắt cung nhỏ YZ của (I) tại T. Nếu $a^2 < 4bc$ thì $TZ \le TY$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $b = c$.



Hình 1

Chứng minh :

+ Nếu $b = c$ thì $Y \equiv Z \equiv T \Rightarrow TZ = TY$

+ Nếu $b > c$ (h.1) thì dễ thấy $\angle YIZ = \frac{B-C}{2}$.

Gọi N là trung điểm của cung nhỏ YZ. Ta có :

$$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IN}$$
$$= \overrightarrow{AI} + \frac{1}{2\cos\frac{B-C}{4}}(\overrightarrow{IZ} + \overrightarrow{IY})$$
$$= \overrightarrow{AI} + \frac{1}{2\cos\frac{B-C}{4}}\left(\sin\frac{A}{2}\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IA} - \overrightarrow{AX}\right)$$
$$= \left(1 - \frac{\sin\frac{A}{2} - 1}{2\cos\frac{B-C}{4}}\right)\overrightarrow{AI} - \frac{1}{2\cos\frac{B-C}{4}}\overrightarrow{AX}$$
$$= \left(1 - \frac{\sin\frac{A}{2} - 1}{2\cos\frac{B-C}{4}}\right)\left(\frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}\right) + \frac{1}{2\cos\frac{B-C}{4}}\left(\frac{p-c}{a}\overrightarrow{AB} + \frac{p-b}{a}\overrightarrow{AC}\right)$$
$$= \left[\left(1 - \frac{\sin\frac{A}{2} - 1}{2\cos\frac{B-C}{4}}\right)\frac{b}{a+b+c} - \frac{1}{2\cos\frac{B-C}{4}}\frac{p-c}{a}\right]\overrightarrow{AB}$$
$$+ \left[\left(1 - \frac{\sin\frac{A}{2} - 1}{2\cos\frac{B-C}{4}}\right)\frac{c}{a+b+c} - \frac{1}{2\cos\frac{B-C}{4}}\frac{p-b}{a}\right]\overrightarrow{AC}$$

Do đó : $ZT < YT \Leftrightarrow ZT < ZN$.

$$\Leftrightarrow \left(1 - \frac{\sin\frac{A}{2} - 1}{2\cos\frac{B-C}{4}}\right)\frac{b}{a+b+c} - \frac{1}{2\cos\frac{B-C}{4}}\frac{p-c}{a}$$
$$< \left(1 - \frac{\sin\frac{A}{2} - 1}{2\cos\frac{B-C}{4}}\right)\frac{c}{a+b+c} - \frac{1}{2\cos\frac{B-C}{4}}\frac{p-b}{a}$$
$$\Leftrightarrow \left(1 - \frac{\sin\frac{A}{2} - 1}{2\cos\frac{B-C}{4}}\right)\frac{b-c}{a+b+c} < \frac{1}{2\cos\frac{B-C}{4}}\frac{b-c}{a}$$
$$\Leftrightarrow 1 - \frac{\sin\frac{A}{2} - 1}{2\cos\frac{B-C}{4}} < \frac{a+b+c}{2a\cos\frac{B-C}{4}}$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\frac{B-C}{4} - \sin\frac{A}{2} + 1 < \frac{a+b+c}{a}$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\frac{B-C}{4} - \sin\frac{A}{2} + 1 < 1 + \frac{b+c}{a}$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\frac{B-C}{4} - \sin\frac{A}{2} < \frac{2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\frac{B-C}{4} < \sin\frac{A}{2} + \frac{\cos\frac{B-C}{2}}{\sin\frac{A}{2}}$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^2\frac{B-C}{2} < \sin^2\frac{A}{2} + 2\cos\frac{B-C}{2} + \frac{\cos^2\frac{B-C}{2}}{\sin^2\frac{A}{2}}$$

$$\Leftrightarrow 2\left(1 + \cos\frac{B-C}{2}\right) < \sin^2\frac{A}{2} + 2\cos\frac{B-C}{2} + \frac{\cos^2\frac{B-C}{2}}{\sin^2\frac{A}{2}}$$

$$\Leftrightarrow 1 - \sin^2\frac{A}{2} < \frac{\cos^2\frac{B-C}{2}}{\sin^2\frac{A}{2}} - 1$$

$$\Leftrightarrow \sin^2\frac{A}{2}\cos^2\frac{A}{2} < \cos^2\frac{B-C}{2} - \cos^2\frac{B+C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin^2 A}{4} < \frac{1+\cos(B-C)}{2} - \frac{1+\cos(B+C)}{2}$$

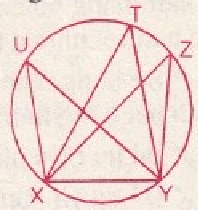
$$\Leftrightarrow \sin^2 A < 2\,[\cos(B-C) - \cos(B+C)]$$

$$\Leftrightarrow \sin A^2 < 4\sin B\sin C \Leftrightarrow a^2 < 4bc.$$

Theo giả thiết $a^2 < 4bc$. Do đó $TZ < TY$

+ Nếu $b < c$ thì tương tự như vậy ta cũng có $TZ < TY$. Bổ đề 2 đã được chứng minh.

Bổ đề 3. Cho ngũ giác $XYZTU$ nội tiếp. Khi đó : $p(XYT) \geq \min\{p(XYZ), p(XYU)\}$. (h.2)



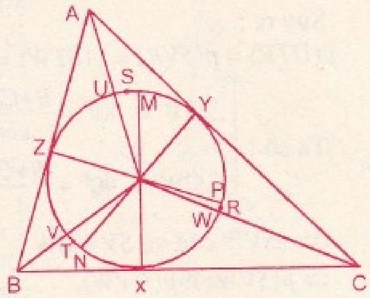
Hình 2

Nếu $p(XYZ) < p(XYU)$ thì đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $T \equiv Z$. Nếu $p(XYT) > p(XYU)$ thì đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $T \equiv U$. Nếu $p(XYZ) = p(XYU)$ thì đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $T \equiv Z$ hoặc $T \equiv U$.

Việc chứng minh bổ đề 3 là dễ dàng.

Nhờ các bổ đề 1.2.3, ta chứng minh bất đẳng thức $p(UVW) \leq p(DEF)$ như sau :

Không mất tính tổng quát giả sử $A \geq B \geq C$. Gọi X, Y, Z là tiếp điểm của (I) với các cạnh BC, CA, AB. Gọi M, N, P là các điểm đối xứng của X, Y, Z qua I. Gọi S, T, R là điểm chính giữa của các cung nhỏ UM, VN, WP. Với giả thiết $A \geq B \geq C$ các điểm U, V, W, M, N, P được sắp đặt trên (I) như trong hình 3.



Hình 3

Vì G nằm trong (I) nên theo bổ đề 1 ta có : $a^2 < 4bc$; $b^2 < 4ca$; $c^2 < 4ab$. Theo bổ đề 2 các điểm D, E, F thuộc các cung nhỏ US, VT, WR. Theo bổ đề 3 :

$p(DEF) \geq \min\{p(UVW); p(SVW); p(UTW); p(UVR); p(STR); p(UTR); p(SVR); p(STW)\}$. (*)

Ta có :

$$\begin{cases} \angle VIW = 90^o + \frac{A}{2} \\ \angle WIU = 90^o + \frac{B}{2} \\ \angle WIV = 90^o + \frac{C}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \angle VUW = 45^o + \frac{A}{4} \\ \angle WVU = 45^o + \frac{B}{4} \\ \angle UWV = 45^o + \frac{C}{4} \end{cases}$$

Do đó, theo định lí hàm số sin $p(UVW) = r\sum_i \sin\left(45^o + \frac{A_i}{4}\right)$ với $A_1 = A, A_2 = B, A_3 = C$.

Ta có :

$$\begin{cases} \angle TIR = 90^o + \frac{B+C}{4} \\ \angle RIS = 90^o + \frac{C+A}{4} \\ \angle SIT = 90^o + \frac{A+B}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \angle TSR = 45^o + \frac{B+C}{8} \\ \angle RTS = 45^o + \frac{C+A}{2} \\ \angle SRT = 45^o + \frac{A+B}{8} \end{cases}$$

Do đó, theo định lí hàm số sin

$$p(STR) = r\sum_i \sin\left(45^o + \frac{\pi - A_i}{8}\right).$$

Hiển nhiên là

$$\sum_i \sin\left(45^o + \frac{A_i}{4}\right) \leq \sum_i \left(45^o + \frac{\pi - A_i}{8}\right)$$

Từ đó suy ra : $p(UVW) \leq p(STR)$ (1)

Ta có : $\begin{cases} \angle UIT = 90^o + \frac{A+C}{4} \\ \angle SIR = 90^o + \frac{A+C}{4} \end{cases}$

$\Rightarrow \Delta UTR = \Delta SRT$

Tương tự : $\Delta VRS = \Delta TSR$; $\Delta WST = \Delta RST$.

Suy ra :

$$p(UTR) = p(SVR) = p(STW) = p(STR) \quad (2)$$

Ta có : $\begin{cases} \angle SIV = 90^o + \dfrac{B+C}{4} \\ \angle SIW = 90^o + \dfrac{B+C}{4} \end{cases}$

$\Rightarrow \Delta SVW$ cân và $SV = SW$

$\Rightarrow p(SVW) \geq p(UVW)$.

Tương tự :

$p(UTW) \geq p(UVW)$; $p(UVR) \geq p(UVW)$

Suy ra :

$\min\{p(SVW); p(UTW); p(UVR)\} \geq p(UVW)$ (3)

Từ (1), (2), (3), ta có :

$\min\{p(UVW);\ p(SVW);\ p(UTW);\ p(UVR);\ p(STR); p(UTR); p(SVR); p(STW)\} = p(UVW)$ (**)

Từ (*) và (**) ta có : $p(UVW) \leq p(DEF)$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC đều.

Để kết thúc, xin giới thiệu với bạn đọc một loạt các bất đẳng thức hình học được đặt ra bởi Jack Garfunkel :

Bài toán 1. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng : $m_a + l_b + h_c \leq \dfrac{\sqrt{3}}{2}(a+b+c)$

Bài toán 2. Cho tam giác ABC. M là một điểm trong tam giác. MA, MB, MC theo thứ tự cắt BC, CA, AB tại A_1, B_1, C_1. Gọi A_2, B_2, C_2 theo thứ tự là hình chiếu của M trên BC, CA, AB. Chứng minh rằng :

$$p(A_1B_1C_1) \geq p(A_2B_2C_2)$$

Bài toán 3. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng :

$$\frac{h_b}{m_c} + \frac{h_c}{m_a} + \frac{h_a}{m_b} \leq 3.$$

Bài toán 4. Cho tam giác nhọn ABC với các đường cao AH, BI, CK và các trung tuyến AL, BM, CN. Gọi $P = AM \cap BI$, $Q = BM \cap CK$, $R = CN \cap AH$. Chứng minh rằng :

$$\frac{AP}{PL} + \frac{BQ}{QM} + \frac{CR}{RN} \geq 6.$$

Các bài toán 1, 2, 3 đều rất khó và cũng được giải bởi nhà toán học người Mĩ, C.S. Garder. Bài toán 4 không phải là bài toán mở nhưng bản thân tôi không hề biết lời giải của nó. Rất mong các bạn cùng quan tâm tới việc giải bài toán này.

ĐỀ THI OLYMPIC TOÁN PTTH THÁI BÌNH (1998)

Bài 1. Tìm tất cả các đa thức bậc 4

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx$$

ở đó a, b, c, d là các số thực dương sao cho

$f(1) = 1, f(5) = 70;$

$f(2), f(-2), f(-1)$ là các số nguyên.

Bài 2. Xét phương trình Diophante

$$x^2 - 3y^2 = -2$$

1) Chứng minh phương trình có vô số nghiệm nguyên dương.

2) Tìm tất cả các nghiệm nguyên dương của phương trình đã cho.

Bài 3. Cho k là số chẵn, p là số nguyên tố lẻ. Chứng minh rằng nếu k không chia hết cho p-1 thì $\sum_{i=1}^{p-1}\left(C_p^i\right)^k$ chia hết cho p^{k+1}

Bài 4. Giả sử M là điểm nằm trong tam giác ABC có độ dài các cạnh $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Gọi x, y, z lần lượt là khoảng cách từ M đến các cạnh BC, CA, AB.

1) Chứng minh rằng các số $ax.MA$, $by.MB$, $cz.MC$ là biểu thị độ dài các cạnh của tam giác T nào đó.

2) Xác định vị trí của điểm M để tam giác T có diện tích lớn nhất./.

Diễn đàn
DẠY VÀ HỌC TOÁN

MỘT SAI LẦM KHI GIẢI BÀI TOÁN CỰC TRỊ

Những sai lầm khi giải các bài toán cực trị khá đa dạng. Trong chuyên mục "Sai lầm ở đâu" nhiều bạn đã tham gia "mổ xẻ" lời giải về loại toán này. Ngay bài toán T3/262, Tòa soạn nhận được số lời giải sai gấp nhiều lần số lời giải đúng. Trong diễn đàn tháng này, chúng ta trở lại một bài toán cách đây 27 năm đã từng đăng lời giải trên tạp chí, đó là bài T9/108. Ý kiến ở diễn đàn này là của thầy giáo Trần Xuân Đáng (trường PTTH Lê Hồng Phong, Nam Định) và bạn Trần Nam Dũng (nguyên là học sinh trường chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An). Các tác giả trên đã chứng minh lời giải sai, nhưng ***sai ở "mắt xích" nào thì ... còn chờ ý kiến của đông đảo bạn đọc.***

Bài toán T9/108. *Tìm tất cả các dãy số nguyên không giảm $x_1, x_2, ..., x_{1997}$ gồm 1979 số hạng thỏa mãn các điều kiện sau :*

1) $1 \le x_k \le 1964$, $k = 1, 2, ..., 1979$

2) Biểu thức

$$P = \frac{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_{1979}^2}{(x_1 + x_2 + ... + x_{1979})^2}$$

đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải của bài toán này được trình bày trong cuốn sách "Tuyển tập 30 năm Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ" (Bài toán 58) như sau :

Đặt $a = x_1 = \min(x_1, x_2, ..., x_{1979})$, ta có :

$(x_k - a)(x_k - 1964) \le 0$ $(k = 1, 2, ..., 1979)$

$\Leftrightarrow x_k^2 - (a + 1964)x_k + 1964a \le 0.$

Lấy tổng từ 1 đến 1979 và đặt

$$A = \frac{(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_{1979}^2)}{1979}$$

$$B = \frac{(x_1 + x_2 + ... + x_{1979})}{1979}$$

thì ta được $A - (a + 1964)B + 1964a \le 0$

hay $A \le (a + 1964)B - 1964a$

$$\frac{A}{B^2} \le -\frac{1964a}{B^2} + \frac{(a + 1964)}{B}$$

Đặt vế phải bằng $f\left(\frac{1}{B}\right)$, nó là tam thức bậc hai đối với $\frac{1}{B}$ có hệ số của $\left(\frac{1}{B}\right)^2$ là $-1964a<0$, vì vậy

$$f\left(\frac{1}{B}\right) \le f\left(\frac{a + 1964}{2.1964a}\right) = \frac{(a + 1964)^2}{4.1964a}$$

Do đó $\dfrac{A}{B^2} \le \dfrac{(a + 1964)^2}{4.1964a}$

Ta có $P = \dfrac{1979A}{1979^2 B^2} = \dfrac{A}{1979 B^2}$ nên

$$P \le \frac{1}{1979} \cdot \frac{(a + 1964)^2}{4.1964a}$$

Như vậy P đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi

$(x_k - a)(x_k - 1964) = 0$ $(k = 1, 2, ..., 1979)$

và $B = \dfrac{2.1964a}{(a + 1964)}$

Gọi x là số các số hạng của dãy số bằng 1964 ta có

$$B = \frac{(1979 - x)a + 1964x}{1979} = \frac{2.1964a}{a + 1964}$$

$$\Rightarrow (1964\text{-}a)x = \frac{(1964 - a)1979a}{(a + 1964)}$$

1) Nếu $1964\text{-}a \ne 0$ thì $x = \dfrac{1979a}{a + 1964}$

Dễ chứng minh được rằng x nguyên khi và chỉ khi $a+1964 = 1979$ tức là khi $a=15$, $x=15$ (chú ý rằng 1979 là số nguyên tố).

Ta có dãy số $x_1 = x_2 = ... = x_{1964} = 15$, $x_{1965} = x_{1966} = ... = x_{1979} = 1964$.

Khi đó

$$P_1 = \left(\frac{1}{1979}\right)\frac{(15+1964)^2}{4.1964.15} = \frac{1979}{60.1964}$$

2) Nếu 1964-a = 0 thì a = 1964, khi đó

$$x_1 = x_2 = ... = x_{1979} = 1964$$

$$P_2 = \frac{1}{1979}.$$

Lời giải khác :

Với $x_2, ..., x_{1979} \in \mathbf{Z}$ và $1 \le x_k \le 1964$ (k = 2, 3, ..., 1979) xét hàm số

$$f(x) = \frac{x^2 + x_2^2 + ... + x_{1979}^2}{(x + x_2 + ... + x_{1979})^2}.$$

Đặt $M = x_2^2 + ... + x_{1979}^2$, $N = x_2 + ... + x_{1979}$

ta có $f(x) = \dfrac{x^2 + M}{(x+N)^2}$ $(1 \le x \le 1964)$

$$f'(x) = \frac{2xN - 2M}{(x+N)^3}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{M}{N}$$

Ta có

$$x_2 + x_3 + ... + x_{1979}$$
$$\le M = x_2^2 + x_3^2 + ... + x_{1979}^2$$
$$\le 1964(x_2 + x_3 + ... + x_{1979})$$
$$\Rightarrow 1 \le \frac{M}{N} \le 1964.$$

Bảng biến thiên của $f(x)$ như sau :

x	1		M/N		1964
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

$$\Rightarrow f_{\max} = \max\{f(1), f(1964)\}$$

Suy ra P đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $x_k = 1$ hoặc $x_k = 1964$ với mọi k thỏa mãn $1 \le k \le 1979$.

Giả sử trong 1979 số $x_1, x_2, ..., x_{1979}$ có m số bằng 1, n số bằng 1964 ($m, n \in \mathbf{Z}$; $m, n \ge 0$; $m+n = 1979$)

Khi đó

$$P = \frac{m + n.1964^2}{(m + n.1964)^2} = \frac{1979 + 1963.1965n}{(1979 + 1963n)^2}$$

Xét hàm số

$$g(x) = \frac{1979 + 1963.1965x}{(1979 + 1963x)^2}\ (0 \le x \le 1979)$$

$$\text{Ta có : } g'(x) = \frac{1979.1963^2 - 1963^2.1965x}{(1979 + 1963x)^3}$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1979}{1965} \in (1, 2)$$

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ như sau :

x	0	1	1979/1965	2	1979
$g'(x)$		+	0	-	
$g(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

Suy ra $P_{\max} = \max\{g(1), g(2)\}$

Ta có

$$g(1) = \frac{1979 + 1963.1965}{(1963 + 1979)^2},$$

$$g(2) = \frac{1979 + 2.1963.1965}{(1979 + 2.1963)^2}$$

Ta có $g(1) > g(2)$ (bạn đọc hãy thử lại !)

Vậy P đạt được giá trị lớn nhất khi và chỉ khi trong 1979 số $x_1, x_2, ..., x_{1979}$ có *1 số bằng 1964 và các số còn lại đều bằng 1.*

Từ đó ta thấy rằng chỉ có một dãy thỏa mãn điều kiện của bài toán. Đó là dãy $x_1 = x_2 = ... = x_{1978} = 1$, $x_{1979} = 1964$ với $P_{\max} = g(1)$.

$(x_1, x_2, ..., x_{1979})$ mà $x_1 = 1$, $x_k = 1964$ $\forall k = 2, 1979$.

Ta cũng dễ dàng chứng minh được

$$g(1) > \frac{1979}{(60.1964)} > \frac{1}{1979}$$

Vậy lời giải của bài toán 58 được trình bày trong cuốn sách "Tuyển tập 30 năm tạp chí Toán học và Tuổi trẻ" là sai !

TOÁN HỌC VÀ ĐỜI SỐNG

TOÁN HỌC VÀ LÁ CỜ CỦA HỢP CHÚNG QUỐC HOA KỲ

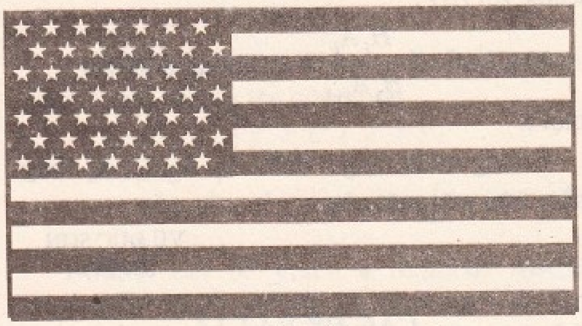
Những đổi thay các ngôi sao trên lá cờ của Hoa Kỳ xét về phương diện lịch sử, xã hội và Toán học có nhiều điều hết sức thú vị.

Ngày 4/4/1918, một đạo luật của Quốc hội Hoa Kỳ cho phép thêm một ngôi sao vào lá cờ khi có một bang nữa được nhận vào liên bang.

Lá cờ đầu tiên được phác họa theo đạo luật này có dạng một hình chữ nhật; trong hình chữ nhật nhỏ góc trên bên trái người ta sắp xếp 20 ngôi sao trắng, đại diện cho 20 bang trên nền xanh; bảy vạch màu đỏ và sáu vạch trắng được xếp đan xen liên tiếp ở phần còn lại. Hiển nhiên vì $20 = 4 \times 5$ nên người ta xếp được một cách ngay ngắn các ngôi sao vào một khung chữ nhật góc trên bên trái lá cờ.

Từ năm 1913 cho đến năm 1959 có 48 bang gia nhập Hợp chúng quốc Hoa Kỳ và vì $48 = 6 \times 8$ nên các ngôi sao được xếp một cách đẹp đẽ thành 6 hàng, mỗi hàng 8 sao.

Vào năm 1959 việc bang Alaska gia nhập liên bang nâng tổng số các ngôi sao của lá cờ ở giai đoạn 1959 - 1960 lên con số 49. Vì $49 = 7 \times 7$ nên người ta sắp chúng thành 7 hàng, mỗi hàng 7 sao (xem hình 1) và xếp luân phiên các hàng dịch sang trái hoặc sang phải như hình vẽ để đảm bảo tính thẩm mĩ, việc sắp xếp như thế không đạt đến độ "hoàn mĩ" như hai lần đầu.



Hình 1

Vào năm 1960 với việc thêm bang Hawaii, trên lá cờ của Hoa Kỳ phải có 50 ngôi sao! Một lần nữa lại phải sắp xếp lại các ngôi sao.

Vì $50 = 5 \times 6 + 4 \times 5$ nên người ta quyết định xếp các ngôi sao thành 5 hàng 6 ngôi sao, đan xen với 4 hàng 5 sao, điều này đạt đến sự cân đối trong việc bố trí các ngôi sao như ta thấy trên lá cờ của Hoa Kỳ hiện nay (xem hình 2).

Một câu hỏi xuất hiện một cách tự nhiên là : Người ta sẽ xếp các ngôi sao như thế nào nếu có thêm một bang nữa ?

Nếu xếp 51 ngôi sao thành 3 hàng, mỗi hàng gồm 17 ngôi sao thì không đạt yêu cầu cả về phương diện hiện thực lẫn phương diện thẩm mĩ.

TRƯƠNG CÔNG THÀNH
(Nhà xuất bản Giáo dục)

Phương án xếp các ngôi sao thành từng hàng trong khung chữ nhật phải đáp ứng các yêu cầu sau :

1. Số các ngôi sao trong hai hàng liền nhau sai khác ít tới mức có thể được, tức là bằng nhau hoặc chỉ hơn kém nhau một ngôi sao.

2. Số các hàng chẵn và số các hàng lẻ sai khác ít tới mức có thể được tức là số các hàng chẵn bằng số các hàng lẻ hoặc sai khác 1.

Đặt x là số các hàng, mỗi hàng có r sao và y là số các hàng, mỗi hàng có s sao, ta cần có :

$$\begin{cases} xr + ys = 51 \\ r - s = 1 \end{cases}$$

Xảy ra 2 trường hợp :

(a) Nếu $x = y$ thì $x(s+1) + xs = 51$

Suy ra : $x = \dfrac{51}{2s+1}$.

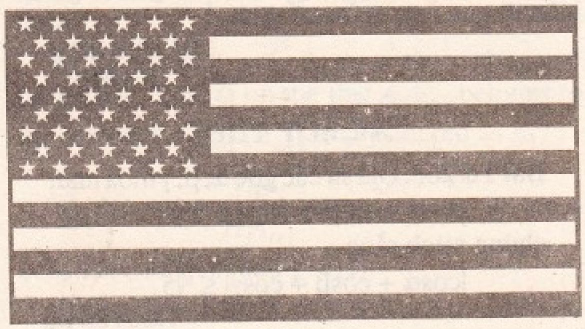
Vì $51 = 3 \times 17$ và x là số nguyên nên mẫu số $2s+1$ chỉ có thể là 1, hoặc 3 hoặc 17 hoặc 51.

Nếu $x = 51$ thì $s = 0$,
nếu $x = 17$ thì $s = 1$,
nếu $x = 1$ thì $s = 25$.

Các trường hợp này đều không đạt.

Còn với $x = 3$ thì $s = 8$ kéo theo $y = 3$ và $r = 9$, lúc đó $51 = 3 \times 9 + 3 \times 8$. Lá cờ với 51 ngôi sao có thể được xếp theo 3 hàng 9 sao và 3 hàng 8 sao. Ý định này quả thực có thể được chấp nhận để sắp xếp cho lá cờ trong tương lai

(b) Nếu $x - y = 1$ thì phương trình trên trở thành $x(s+1) + (x-1)s = 51$ hay $2xs + x = 51+s$, mà $x = \dfrac{51+s}{2s+1}$ là một số nguyên $\Rightarrow 2\left(\dfrac{s+51}{2s+1}\right)$ cũng là số nguyên, tức là $\dfrac{2s+1+101}{2s+1} = 1 + \dfrac{101}{2s+1}$ cũng là số nguyên. Vì 101 là số nguyên tố nên chỉ có thể $s = 50$ hoặc $s = 0$. Cả hai trường hợp này đều bị loại, như vậy chỉ có thể sử dụng phương án như ở trường hợp (a).



Hình 2

(Xem tiếp trang 14)

ĐỀ RA KÌ NÀY

CÁC LỚP THCS

Bài T1/266. Tìm mọi nghiệm nguyên của hệ phương trình :

$$\begin{cases} 2x^3 - 7x^2 + 8x - 2 = y \\ 2y^3 - 7y^2 + 8y - 2 = z \\ 2z^3 - 7z^2 + 8z - 2 = x \end{cases}$$

NGUYỄN CÔNG SỨ
(Hà Nội)

Bài T2/266. Giả sử các số thực x, y, z, t thỏa mãn điều kiện $a(x^2+y^2) + b(z^2+t^2) = 1$; trong đó a, b là hai số thực dương cho trước.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $(x+z)(y+t)$.

VŨ ĐỨC CẢNH
(Hà Nội)

Bài T3/266. Giả sử các số thực x, y, z đều lớn hơn -1 và thỏa mãn :

$$x^3 + y^3 + z^3 \geq x^2 + y^2 + z^2 \,;$$

chứng minh rằng :

$$x^5 + y^5 + z^5 \geq x^2 + y^2 + z^2$$

LÊ QUANG NẪM
(TP Hồ Chí Minh)

Bài T4/266. Cho hình thoi $ABCD$ với $\angle A = 120^\circ$. Tia Ax tạo với tia AB góc BAx bằng 15° và cắt cạnh BC tại M, cắt đường thẳng CD tại N. Chứng minh rằng :

$$\frac{3}{AM^2} + \frac{3}{AN^2} = \frac{4}{AB^2}$$

ĐẶNG NHƠN
(Đà Nẵng)

Bài T5/266. Cho tam giác ABC vuông cân tại A và M là điểm di động trên đường thẳng BC (M khác B, C). Hình chiếu của M lên các đường thẳng AB và AC là H và K tương ứng. Gọi I là giao điểm của các đường thẳng CH và BK. Chứng minh rằng các đường thẳng MI luôn đi qua một điểm cố định.

HÀ DUY HƯNG
(Hà Nội)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/266. Giả sử các góc α, β, γ thỏa mãn

$$|\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma| \geq 2 \,;$$

chứng minh rằng :

$$|\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma| \leq \sqrt{5}.$$

NGUYỄN ĐỄ
(Hải Phòng)

Bài T7/266. Tìm mọi cặp số thực (b, c) sao cho với bất kì số thực a thì phương trình

$$a\cos 2x + b\cos x + c = 0$$

có nghiệm thuộc khoảng $\left(0\,;\,\frac{\pi}{2}\right)$

NGUYỄN MINH ĐỨC
(Hà Nội)

Bài T8/266. Giả sử hai số thực x, y thuộc khoảng $(0; 1)$ và $x + y = 1$; tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $x^x + y^y$.

LƯU XUÂN TÌNH
(Thanh Hóa)

Bài T9/266. Giả sử M là điểm nằm trong ΔABC. Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là hình chiếu của M lên các đường thẳng BC, CA, AB. Chứng minh rằng :

$$\frac{MA^2}{(MB_1+MC_1)^2} + \frac{MB^2}{(MC_1+MA_1)^2} + \frac{MC^2}{(MA_1+MB_1)^2} \geq 3,$$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

LÊ QUỐC HÁN
(Nghệ An)

Bài T10/266. Giả sử n ($n \geq 3$) điểm phân biệt A_i ($i = 1, 2, ..., n$) trong không gian có tính chất : tồn tại điểm Q thỏa mãn các điều kiện:

a) Các hình chiếu H_i của Q lên $A_i\,A_{i+1}$ đều thuộc đoạn thẳng A_iA_{i+1} với mọi i (coi A_{n+1} trùng với A_1) ;

b) Các tỉ số $\dfrac{H_iA_i}{H_iA_{i+1}} = k$ (không đổi) với mọi i.

Chứng minh rằng n điểm $A_1, A_2, ..., A_n$ cùng nằm trên một mặt cầu.

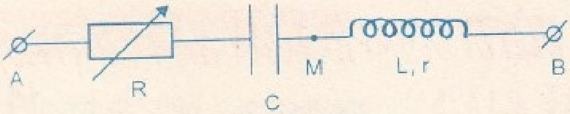
VŨ ĐỨC SƠN
(Hà Nội)

CÁC ĐỀ VẬT LÍ

Bài L1/266. Một vật trượt không vận tốc ban đầu từ đỉnh của một mặt phẳng nghiêng với góc nghiêng α. Hệ số ma sát μ giữa vật và mặt phẳng nghiêng tăng tỉ lệ với khoảng cách x từ đỉnh tới chân mặt phẳng nghiêng : $\mu = bx$. Vật dừng lại trước khi đến chân mặt phẳng nghiêng. Hãy tìm thời gian t kể từ lúc vật bắt đầu chuyển động cho đến lúc dừng lại.

TÔ GIANG *(sưu tầm)*
(Hà Nội)

Bài L2/266. Cho mạch điện xoay chiều có sơ đồ như hình vẽ :



Hiệu điện thế xoay chiều giữa hai đầu A, B là : $u_{AB} = 80\sqrt{2}\sin 100\pi t\ (V)$. R là biến trở.

1) Khi $R=R_1$ thì $u_{MB} = 60\sqrt{2}\sin(100\pi t+\frac{\pi}{2})(V)$, $i = \sqrt{2}\sin(100\pi t + \frac{\pi}{6})(A)$.

Viết biểu thức u_{AM} và tính các giá trị R_1, L, r, C.

2) Khi $R = R_2$ thì công suất trên biến trở R có giá trị cực đại. Tìm R_2 và giá trị cực đại của công suất.

ĐỖ VĂN TOÁN
(Nghệ An)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/266. Find all integer-solutions of the system of equations :

$$\begin{cases} 2x^3 - 7x^2 + 8x - 2 = y \\ 2y^3 - 7y^2 + 8y - 2 = z \\ 2z^3 - 7z^2 + 8z - 2 = x \end{cases}$$

T2/266. The real numbers x, y, z, t satisfy the condition

$$a(x^2 + y^2) + b(z^2 + t^2) = 1,$$

where a and b are two given positive real numbers. Find the greatest value of the expression

$$(x+z)(y+t).$$

T3/266. The real numbers x, y, z are greater than -1 and satisfy the condition

$$x^3 + y^3 + z^3 \geq x^2 + y^2 + z^2.$$

Prove that

$$x^5 + y^5 + z^5 \geq x^2 + y^2 + z^2.$$

T4/266. Let be given a rhombus $ABCD$ with $\angle A = 120^\circ$. A ray Ax, forming with the ray AB an angle $\angle BAx = 15^\circ$, cuts the side BC at M, cuts the side CD at N. Prove that

$$\frac{3}{AM^2} + \frac{3}{AN^2} = \frac{4}{AB^2}.$$

T5/266. Let ABC be an isosceles triangle with $\angle A = 90^\circ$ and let M be a moving point on the line BC (M is distinct from B and C). The orthogonal projections of M on the lines AB and AC are respectively H and K. Let I be the point of intersection of the lines CH and BK. Prove that the lines MI pass through a fixed point.

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/266. Suppose that the angles α, β, γ satisfy the condition $|\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma| \geq 2$.

Prove that $|\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma| \leq \sqrt{5}$.

T7/266. Find all pairs of real numbers (b, c) such that for every real number a, the equation

$$a\cos 2x + b\cos x + c = 0$$

has a root in the interval $\left(0 ; \frac{\pi}{2}\right)$.

T8/266. The real numbers x, y are in the interval $(0, 1)$ and satisfy the condition $x+y=1$. Find the least value of the expression

$$x^x + y^y.$$

T9/266. M is a point in the interior of a triangle ABC. Let A_1, B_1, C_1 be respectively the orthogonal projections of M on the lines BC, CA, AB. Prove that :

$$\frac{MA^2}{(MB_1+MC_1)^2} + \frac{MB^2}{(MC_1+MA_1)^2} + \frac{MC^2}{(MA_1+MB_1)^2} \geq 3.$$

When does equality occur ?

T10/266. Let be given n distinct points A_i ($i = 1, 2, ..., n$; $n \geq 3$) in space such that there exists a point Q satisfying the conditions :

a) for every $i = 1, 2, ..., n$ the orthogonal projection H_i of Q on the line A_iA_{i+1} belongs to the segment A_iA_{i+1} (A_{n+1} is considered as A_1) ;

b) the ratios $\frac{H_iA_i}{H_iA_{i+1}}$ ($i = 1, 2, ..., n$) are a constant (not depending on i).

Prove that these n points $A_1, A_2, ..., A_n$ lie on a sphere.

Nhìn ra thế giới

ĐỀ THI OLYMPIC TOÁN NAM TƯ (1995)

VÒNG THỨ NHẤT

Bài 1. Cho tập $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Hãy xác định số các tập con S của A mà S gồm 5 phần tử và thỏa mãn điều kiện :
$\{r(x+y) : x, y \in S, x \neq y\} = A$, trong đó $r(n)$ kí hiệu số dư trong phép chia n cho 10.

Bài 2. Cho $\triangle ABC$ với 3 góc nhọn. Gọi D là chân đường vuông góc từ C tới AB, gọi E là chân đường vuông góc từ D tới AC và F là điểm thuộc đoạn thẳng DE sao cho $\frac{DF}{FE} = \frac{DA}{DB}$. Chứng minh rằng BE vuông góc với CF.

Bài 3. Một đa giác đều 1995 cạnh $A_1A_2...A_{1995}$ nội tiếp trong một đường tròn và một điểm P trên đường tròn đó. Chứng minh rằng có thể chọn 1000 dây cung trong số các dây cung PA_1, PA_2, ..., PA_{1995} để tổng độ dài của chúng bằng tổng độ dài của 995 dây cung còn lại.

Bài 4. Chứng minh rằng tồn tại tập S gồm 1995 số nguyên dương thỏa mãn 2 điều kiện sau :

a) Tổng của n (n bất kì ≥ 2) phần tử khác nhau của S không phải là số nguyên tố.

b) Hai phần tử khác nhau bất kì của S đều nguyên tố cùng nhau.

VÒNG THỨ HAI

Bài 5. Chứng minh rằng $2^{2^{1995}} - 1$ có ít nhất 1995 ước số nguyên tố phân biệt.

Bài 6. Giả sử $ABCDEF$ là lục giác lồi nội tiếp trong đường tròn. Giả sử $AB.CD.EF = BC.DE.FA$. Chứng minh rằng các đường chéo AD, BE, CF cắt nhau tại một điểm.

Bài 7. Giả sử M là đa giác lồi với chu vi p. Chứng minh rằng tập hợp các cạnh của M có thể phân chia thành hai tập rời nhau A_1 và A_2 sao cho $|s(A_1) - s(A_2)| \leq \frac{p}{3}$, trong đó $s(A_j)$ kí hiệu tổng độ dài các cạnh thuộc A_j ($j = 1,2$).

Bài 8. Một hình vuông kích thước 5×5 được chia thành 25 ô vuông. Hai người A và B chơi trò viết số như sau :

Người A bắt đầu viết số 1 vào một trong các ô vuông, người B viết số 0 vào một trong các ô vuông còn lại, tiếp theo người A viết số 1 vào một trong các ô vuông còn lại rồi người B viết số 0... và 2 người cứ luân phiên viết số như thế. Khi tất cả các ô vuông đã được điền số (sau 25 lần viết số), người ta tính tổng các số trong mỗi hình vuông con kích thước 3×3 và giả sử m là số nhỏ nhất trong các tổng được tính. Chứng minh rằng :

a) Người A có thể chơi để luôn luôn đạt được $m \geq 6$.

b) Người B có thể chơi để luôn luôn đạt được $m \leq 6$.

TOÁN HỌC VÀ LÁ CỜ... *(Tiếp trang 11)*

...Điều gì xảy ra vào thời điểm trước đây khi số ngôi sao tăng từ 49 lên 50 ? Dĩ nhiên có thể xếp 50 ngôi sao thành 5 hàng 10 sao hoặc 2 hàng 25 sao, nhưng cả hai phương án đó đều không phù hợp với tính thẩm mĩ.

Sử dụng các biến như đã nêu trên, trong trường hợp (a), ta có : $\begin{cases} xr + ys = 50 \\ r - s = 1 \end{cases}$

và $x = y$, suy ra $x(s+1) + xs = 50$

hay $x = \frac{50}{2s+1} = \frac{2.5.5}{2s+1}$

Vì $2s+1$ là một số lẻ lớn hơn 1 nên nó chỉ có thể là 5 hoặc 25 từ đó $s = 2$ hoặc $s = 12$

• Nếu $s=2$ thì $x=y=10$ và $r=3$, điều này tạo ra hình ảnh một khung hình chữ nhật "quá cao", có 10 hàng 3 sao và 10 hàng 2 sao !

• Nếu $s=12$ thì $x=y=2$ và $r=13$ thì ta cũng nhận được một phương án không đạt.

Ta xét tiếp trường hợp (b).

Từ $\begin{cases} xr + ys = 50 \\ r - s = 1 \end{cases}$ và $x - y = 1$ suy ra $x(s+1) + (x-1)s = 50$

$\Rightarrow 2xs + x = 50 + s$ hay $x = \frac{50+s}{2s+1}$ là một số nguyên, nên

$2\left(\frac{50+s}{2s+1}\right) = \frac{2s+1+99}{2s+1} = 1 + \frac{99}{2s+1}$ cũng là số nguyên.

Ta có bảng các giá trị của s, r, x, y sau :

$2s+1$	:	3	9	11	33
s	:	1	4	5	16
r	:	2	5	6	17
x	:	17	6	5	2
y	:	16	5	4	1

Hai cột thứ nhất và thứ tư trong bảng giá trị trên cho phương án không đạt.

Hai cột thứ hai và thứ ba ứng với $50 = 5\times6 + 4\times5$ chính là phương án sắp xếp lá cờ hiện nay và nó đã được chấp nhận.

Theo The Mathematics Teacher

GIẢI BÀI KÌ TRƯỚC

Bài T1/262. *Tìm các số tự nhiên $\overline{abcdef}$ sao cho các số $\overline{abcdef}$, $\overline{bcdef}$, $\overline{cdef}$, $\overline{def}$, $\overline{ef}$ đều là số chính phương.*

Lời giải. Của *Nguyễn Hoa Cương*, 9^{14}, THCS Thái Nguyên, Nha Trang, **Khánh Hòa.**

1. *Ta chứng minh* $\overline{ef} = 25$

Thật vậy, đặt $\overline{ef} = m^2$ $(4 \le m \le 9)$ và $\overline{def} = n^2$ $(11 \le n \le 31)$, ta có ;

$\overline{def} - \overline{ef} = n^2 - m^2 = (n-m)(n+m)$
$= 100d \,\vdots\, 100$ (1)

Vì $(n-m)$, $(n+m)$ cùng tính chẵn lẻ nên

(1) $\Rightarrow$ $(n-m)$, $(n+m)$ đều là bội của 2 (2)

Mà $n-m \le n+m \le 40$ nên từ (1) và (2) suy ra $(n-m)$, $(n+m)$ đều là bội của 5.

Từ đó $(n+m) - (n-m) = 2m \,\vdots\, 10$ suy ra $m = 5$ và $\overline{ef} = 25$ (đpcm).

2. *Nhận xét.* Một số chính phương có dạng $100A+25$ thì A là tích của hai số tự nhiên liên tiếp.

Thật vậy

$100A+25 = (10k+5)^2 = 100k(k+1) + 25 \Leftrightarrow A = k(k+1)$.

3. *Tìm* $\overline{abcdef}$.

Theo giả thiết và nhận xét trên thì d, $\overline{cd}$, $\overline{bcd}$, $\overline{abcd}$ đều là tích của hai số tự nhiên liên tiếp và không chứa chữ số 0. Vậy chỉ có thể :

$d = \{2(=1.2), 6(=2.3)\}$ $(0 < d < 10) \Rightarrow$

$\overline{cd} = \{12\,(=3.4),\ 42\,(=6.7),\ 72\,(=8.9),\ 56\,(=7.8)\}$, $(9 < \overline{cd} < 100) \Rightarrow$

$\overline{bcd} = \{812\,(=28.29),\ 342\,(=18.19),\ 272\,(=16.17),\ 156\,(=12.13);\ 756\,(=27.28)\}$, $(99 < \overline{bcd} < 1000) \Rightarrow$

$\overline{abcd} = \{2756(=52.53)\}$. $(999 < \overline{abcd} < 10.000)$

$\Rightarrow \overline{abcdef} = 275625 = 525^2$.

Thử lại ta thấy số này thỏa mãn yêu cầu của đầu bài.

Nhận xét : 1. Có rất nhiều bạn có lời giải đúng. Trong đó có bạn *Nguyễn Thị Ánh Nguyệt*, 6A1, THCS Lê Thanh Nghị, Gia Lộc, **Hải Dương**.

2. Các bạn sau đây có lời giải tốt : **Phú Thọ:** *Phạm Minh Hoàng*, 8A1, THCS Phong Châu; **Vĩnh Phúc:** *Vũ Hồng Tuân*, 7A, *Lê Minh Thắng*, 8A, THCS Vĩnh Tường; **Hải Phòng:** *Phạm Đức Hiệp*, 9T, Chu Văn An, Tp Hải Phòng; **Thái Bình:** *Nguyễn Tài Khoa*, 9B, THCS Tiền Đức, Hưng Nhân, Hưng Hà; **Khánh Hòa:** *Lương Trần Hy Hiến*, 9D, THCS Cam Đức, Cam Ranh.

TỐ NGUYÊN

Bài T2/262. *Giải phương trình :*

$$\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{2x-1}=\sqrt{3x^2+4x+1}$$

Lời giải. Trước hết, tìm tập xác định :

$x^2+2x \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge 0 \\ x \le -2 \end{array}\right.$; $2x-1 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge \frac{1}{2}$.

$3x^2+4x+1 \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le -1 \\ x \ge -1/3 \end{array}\right.$

Vậy tập xác định là : $\{x \in \mathbf{R} \mid x \ge \frac{1}{2}\}$ (1).

Theo bất đẳng thức Bunhiacôpxki thì :

$\sqrt{x}\,.\sqrt{x+2} + 1\,.\sqrt{2x-1}$

$\le \sqrt{\sqrt{x}^2+1^2}\,.\sqrt{\sqrt{(x+2)}^2+\sqrt{(2x-1)}^2}$

$\le \sqrt{(x+1)(x+2+2x-1)}$

$\le \sqrt{3x^2+4x+1}$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2x-1}} \Leftrightarrow \sqrt{2x^2-x} = \sqrt{x+2}$

$\Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0.$

Tính ra $x_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$; $x_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

(loại do (1))

Vậy, phương trình có nghiệm là :

$x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Thử lại đúng.

Nhận xét. 1. Phương pháp nêu trên tỏ ra thuận tiện hơn phương pháp nâng lên lũy thừa cả 2 vế khi giải phương trình sau đây :

$\sqrt{3x^2-1}+\sqrt{x^2-x}-x\sqrt{x^2+1}=\sqrt{x(x^2+2)(5x-1)}$.

Tuy nhiên phương pháp đó chỉ thích hợp trong một số trường hợp mà thôi. Thường thì phương pháp nâng lên lũy thừa hai vế rồi loại trừ nghiệm ngoại lai vẫn là cơ bản. Nhiều bạn đã dùng nó để giải bài này và cũng cho lời giải ngắn gọn. Ngoài ra, bạn Trương Minh Đoan (9A6 THCS Vũng Tàu) dùng ẩn phụ $a = x^2 + 2x$ và $b = 2x-1$ sau đó biến đổi thành phương trình bậc hai đối với $a:b$ đã trình bày một lời giải ngắn gọn.

2. Có 434 bài giải trong đó có 82 bài giải sai (với 10 bài trả lời vô nghiệm!). Các bạn sau đây có lời giải tốt :

Bình Định: *Nguyễn Công Nam*, 9A, Quốc học Quy Nhơn, *Đặng Hữu Phước*, 9A, THCS Ngô Mây Phú Cát; **TP Hồ Chí Minh:** *Lâm Nguyên*, $8A_1$, THCS Võ Thị Sáu, *Nguyễn Tấn Duy*, 8, THCS Hồng Bàng; **Ninh Thuận:** *Lâm Hưng Quốc Nguyên*, 9CT, PTTHNK ???; **Hà Nội:** *Bạch Phương Thảo*, 8^A, THCS Đông Anh, *Nguyễn Mạnh Tuấn*, 9C, PTTH Hà Nội-Amsterdam; **Hà Nam:** *Phạm Tiến Thành*, $9B_1$, THCS Trần Phú, Tx. Phủ Lý; **Đồng Nai:** *Trần Võ Huy*, 8B, THCS Nguyễn Bỉnh Khiêm, Biên Hòa; **Nghệ An:** *Lê Thành Đạt*, 9A, PTTH Nghi Lộc III, *Phạm Đức Hải*, 9B, THCS Đặng Thai Mai; **Vĩnh Phúc:** *Trần Vũ Sơn Hà*, 9A, THCS Tam Hợp, Bình Xuyên, *Nguyễn Thu Hương*, 9^B, PTCS Hai Bà Trưng, Mê Linh; **Bắc Giang:** *Nguyễn Văn Chính*, 9A, THCS Hiệp Hòa; **Hà Tĩnh:** *Võ Thành Trung*, 9K, PTCS Tt Hương Khê; **Khánh Hòa:** *Dương Nguyễn Thạch Thảo*, 9^{14}, THCS Thái Nguyên, Tp Nha Trang; **Hải Phòng:** *Bùi Hải Nam*, 8 Toán, NK Trần Phú; **Bình Thuận:** *Phan Hoàng Duy Thái*, 9_1, THCS Hòa Đa, Tuy Phong; **Bà Rịa - Vũng Tàu:** *Chu Hồng Tú*, 8B, THCS Đặng Thai Mai, Tp Vinh, *Trương Minh Đoan*, $9A_6$, THCS Vũng Tàu, *Nguyễn Minh Tuấn*, $9A^1$, THCS Tx. Bà Rịa; **Hải Dương:** *Lê Tiến Dũng*, 9D, PTCS Thanh Hồng, h. Thanh Hà.

ĐẶNG VIỄN

Bài T3/262. *Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau với x là số thực :*

$$|x| + |2x+1| + |3x+2| + \dots + |99x+98|.$$

Lời giải. Ta có :

$$|70x+69| = \left|70\left(x+\frac{69}{70}\right)\right| \geq \left|50\left(x+\frac{69}{70}\right)\right|$$

với mọi x.

Gọi biểu thức đã cho là A thì

$A = |x| + |2x+1| + \dots + |70x+69| + |-71x-70|$
$+ |-72x-71| + \dots + |-99x-98|$

$\geq |x| + |2x+1| + \dots + |69x+68| + \left|50\left(x+\frac{69}{70}\right)\right|$
$+ |-71x-70) + |-72x-71| + \dots + |-99x-98|$

$\geq |x + (2x+1) + \dots + (69x+68) + 50\left(x+\frac{69}{70}\right)$
$+ (-71x-70) + (-72x-71) + \dots + (-99x-98)|$

$= \frac{285}{7} = 40\frac{5}{7}.$

Với $x = -\frac{69}{70}$ thì $A = 40\frac{5}{7}$ nên A nhỏ nhất là $40\frac{5}{7}$.

Nhận xét. 1) Ngoài lời giải trên, bạn Đặng Ngọc Dương, 9A, THCS thị trấn Hiệp Hòa, Bắc Giang còn nhận xét : với $x < -\frac{69}{70}$ thì A là hàm nghịch biến với đối số x và với $x > -\frac{69}{70}$ thì A là hàm đồng biến với đối số x, để từ đó dẫn đến A nhỏ nhất khi $x = -\frac{69}{70}$.

2) Chưa bao giờ, các bạn lại giải sai theo nhiều kiểu khác nhau như lần này. Các sai lầm chủ yếu là :

a) "$|ax + b| \geq b$ với mọi x" (?)

b) "Từ $f(x) \geq g(x)$, kết luận $f(x)$ nhỏ nhất khi và chỉ khi đẳng thức xảy ra" (?)

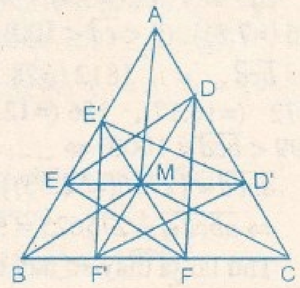
3) Các bạn có lời giải tốt là :

Đắc Lắc : *Trần Quang*, 9T, THCS Phan Chu Trinh, Ban Mê Thuột; **Khánh Hòa:** *Trần Minh Bình*, 8^{15}, THCS Thái Nguyên, Nha Trang; **Hải Dương:** *Ngô Xuân Bách*, *Trần Tuấn Dương*, 9A, THCS Nguyễn Trãi, TP Hải Dương; *Vũ Xuân Hiệu*, 8B, THCS Lai Cách, Cẩm Giàng; **Hải Phòng:** *Vũ Ngọc Minh*, *Phạm Đức Hiệp*, 9T, THCS Chu Văn An, Tp Hải Phòng; *Phạm Hồng Thịnh*, 8B và *Vũ Hoàng Hiệp*, 9T, THCS Lê Quý Đôn, Bỉm Sơn; **Nam Định:** *Trần Anh Tuấn*, 8C, THCS Yên Lợi, Ý Yên, ; *Phùng Văn Thắng*, 9D, THCS Ngô Đồng, Giao Thủy; **Bắc Giang:** *Đặng Ngọc Dương*, 9A, THCS thị trấn Hiệp Hòa; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Văn Phúc*, 9A, THCS Vĩnh Tường; *Nguyễn Văn Giáp*, 9B, THCS Yên Lạc; **Phú Thọ:** *Hoàng Ngọc Minh*, 8C, THCS Việt Trì; **Hà Nội:** *Ngô Mạnh Dũng*, 9A, THCS Phù Lỗ, Sóc Sơn.

LÊ THỐNG NHẤT

Bài T4/262. *Cho tam giác đều ABC cạnh bằng a. Với mỗi điểm M nằm trong ΔABC hãy tìm ba điểm D, E, F lần lượt thuộc các cạnh CA, AB, BC sao cho DE = MA, EF = MB, FD = MC. Hãy xác định vị trí của M để diện tích ΔDEF đạt giá trị lớn nhất và tính giá trị đó theo a.*

Lời giải. Đường thẳng qua M song song với BC cắt AB ở E và cắt AC ở D'. Đường thẳng qua M song song với AB cắt AC tại D và cắt BC tại F'. Đường thẳng qua M song song với AC cắt BC tại F và cắt AB tại E' (h.1) Do tính chất hình thang cân ta có :



Hình 1

$DE = MA = D'E'$, $EF = MB = E'F'$, $FD = MC = F'D'$. Như vậy ta dựng được hai tam giác DEF và $D'E'F'$ thỏa mãn đề bài.

Đặt $MD = x$, $ME = y$, $MF = z$. Do tính chất tam giác đều có $x+y+z = DD' + DA + D'C = AC = a$. Sử dụng công thức tính diện tích tam giác : $S_{DEF} = S_{MDE} + S_{MEF} + S_{MFD} =$

$$= \frac{1}{2}xy\sin 60^o + \frac{1}{2}yz\sin 60^o + \frac{1}{2}zx\sin 60^o$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}(xy+yz+zx).$$

Áp dụng bất đẳng thức quen thuộc ta được :

$$3(xy+yz+zx) \le 2(xy+yz+zx) + x^2 + y^2 + z^2 = (x+y+z)^2 = a^2 \Rightarrow S_{DEF} \le \frac{\sqrt{3}}{12}a^2.$$

Đẳng thức xảy ra khi $x=y=z \Leftrightarrow M$ là tâm của tam giác đều ABC.

Nhận xét. 1) Các bạn đã đưa ra nhiều cách tính giá trị lớn nhất của S_{DEF}. Chẳng hạn

Cách 1. $S_{DEF} = S_{ABC} - (S_{ADE} + S_{BEF} + S_{CFD})$

$$\Rightarrow \frac{S_{DEF}}{S_{ABC}} = 1 - \left(\frac{AD.AE}{a^2} + \frac{BE.BF}{a^2} + \frac{CF.CD}{a^2}\right)$$

$$= \frac{a^2 - (a-z)x + (a-x)y + (a-y)z}{a^2} = \frac{xy + yz + zx}{(x+y+z)^2} \le \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow S_{DEF} \le \frac{1}{3}S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{12}a^2.$$

Cách 2:

$$S_{DEF} = \frac{1}{2}\left(S_{ABC} - S_{MDD'} - S_{MEE'} - S_{MFF'}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{a^2\sqrt{3}}{4} - \frac{x^2\sqrt{3}}{4} - \frac{y^2\sqrt{3}}{4} - \frac{z^2\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{8}[(x+y+z)^2 - (x^2+y^2+z^2)] \le \frac{\sqrt{3}}{12}a^2$$

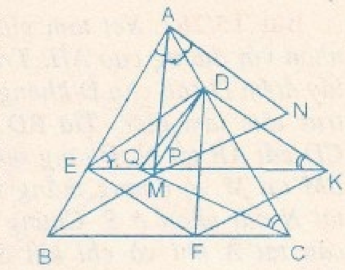
2) Khá nhiều bạn không đọc kĩ đề bài nên mắc những sai sót như sau :

- Có 35 bạn chỉ ra một bộ 3 điểm D, E, F nhưng không chú ý còn cần chỉ ra 1 bộ 3 điểm D', E', F' cũng thỏa mãn ;

- Có 13 bạn tính sai GTLN S_{DEF} hoặc tính $S_{DEF} \le \frac{1}{3}S_{ABC}$ mà không tính S_{DEF} theo a.

- Có 9 bạn tính GTLN S_{DEF} nhưng không chỉ ra cách dựng các điểm D, E, F trên 3 cạnh ΔABC.

3) Hai bạn *Đặng Duy Hưng*, 9B, THCS Trương Hán Siêu, Tx Ninh Bình, tỉnh **Ninh Bình**; *Nguyễn Đình Hòa*, 9B, THCS Việt Trì, **Phú Thọ** đã chứng minh được : "Chỉ tồn tại 2 bộ 3 điểm D, E, F thỏa mãn đề bài" như sau : (h.2)



Hình 2

Giả sử tồn tại 3 điểm D, E, F thuộc CA, AB, BC tương ứng thỏa mãn $DE = MA$, $EF = MB$, $FD = MC$ (1). Dựng ΔAMN đều (MN cắt AC) (2). Từ $AC = AB$, $AN = AM$, $\angle NAC = \angle MAB$ có $\Delta ANC = \Delta AMB \Rightarrow NC = MB = EF$. Từ đó và (1) (2) có $\Delta DEF = \Delta MNC$ (c.c.c) (3)

$\Rightarrow \angle EDF = \angle NMC$ (4)

Dựng ΔDFK đều (EK cắt DF) (5)

Từ (4) (5) có $\angle EDK = \angle EDF + \angle FDK = \angle EDF + 60^o = \angle NMC + \angle AMN = \angle AMC$. Từ đó và (1) (3) (5) có $\Delta EDK = \Delta AMC$ (c.g.c), suy ra $\angle EKD = \angle ACM$ (6) và $\angle DEK = \angle MAC$ (7). Giả sử EK cắt tia AM tại P và cắt tia CM tại Q. Từ (6) suy ra điểm Q nằm trên đường tròn đi qua 4 điểm $D, K, C, F \Rightarrow \angle DQK = \angle DFK = 60^o$ (8). Từ (7) suy ra điểm P nằm trên đường tròn đi qua 3 điểm $D, A, E \Rightarrow \angle DPK = \angle DAE = 60^o$ (9). Từ (8) (9) rút ra các điểm P, Q, M trùng nhau. Vậy tứ giác $ADME$ là nội tiếp mà $AM = DE$ nên $ADME$ là hình thang cân, lúc đó $AE // MD$ hoặc $AD // ME$, nghĩa là bài toán có 2 nghiệm.

3) Các bạn sau đây cũng có lời giải tốt :

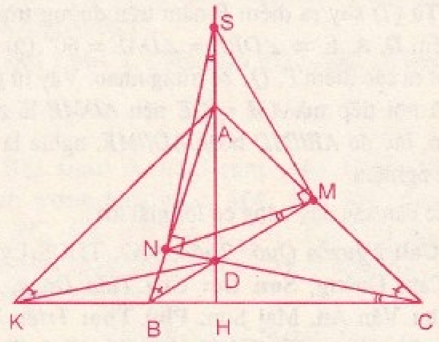
Lào Cai: *Nguyễn Quốc Tuấn*, 9A2, THCS Lý Tự Trọng, Cam Đường; **Sơn La:** *Chu Tiến Dũng*, 9T, THCS Chu Văn An, Mai Sơn; **Phú Thọ:** *Triệu Anh Tuấn*, *Vũ Chí Công*, 9B, THCS Việt Trì; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Văn Giáp*, 9B, THCS Yên Lạc; **Bắc Ninh:** *Đoàn Đắc Huy*, 9A, THCS Lê Văn Thịnh, Gia Lương; **Hà Nam:** *Nguyễn Minh Tuấn*, 9B, THCS Trần Phú, Phủ Lý; **Nam Định:** *Đinh Thanh Hiện*, 9D, THCS Ngô Đồng, Giao Thủy, *Trần Anh Tuấn*, 8C, THCS Lê Lợi, Ý Yên. **Hải Dương:** *Nguyễn Tuấn Dương*, 9A, TH Nguyễn Trãi; **Hải Phòng:** *Vũ Hoàng Hiệp*, 9T, *Phạm Gia Vĩnh Anh*, 9B, THNK Trần Phú; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Đức Tài*, 9A, THCS Tây Đô, Vĩnh Lộc, *Mai Hải Lộc*, 7T, THCS Nga Hải, Nga Sơn; **Nghệ An:** *Quan Minh Vương*, 8B, THCS Sông Hiếu, Nghĩa Đàn, *Phạm Hương Trà*, 9C, THCS Đặng Thai Mai, Vinh, *Lưu Quang Giáp*, 9A, THCS Lê Hồng Phong, Hưng Nguyên; **Đắc Lắc:** *Hồ Thị Thanh Trang*, 9C, THCS Nguyễn Du, Buôn Ma Thuột; **Đồng Tháp:** *Trần Minh Tùng*, 9A2, TH Cao Lãnh.

VIỆT HẢI

Bài T5/262. *Xét tam giác ABC có ba góc nhọn với đường cao AH. Trên đoạn thẳng AH lấy điểm D sao cho D không trùng với A, H và trực tâm tam giác. Tia BD cắt AC tại M, tia CD cắt AB tại N. Đường thẳng vuông góc với BM tại M và đường thẳng vuông góc với CN tại N cắt nhau ở S. Chứng minh rằng ΔABC cân tại A khi và chỉ khi S nằm trên đường thẳng AH.*

Lời giải. *Điều kiện cần.* Dễ dàng ta thấy ΔAMN cân tại A và do đó AH là trục đối xứng của ΔAMN. Ta có $\angle CNM = \angle BMN$. Lại có $\angle SND = \angle SMD = 90^o$. Nên $\angle SMN = \angle SNM$. Suy ra S nằm trên AH.

Điều kiện đủ. Không mất tổng quát, giả sử $AC > AB$. Gọi K là điểm đối xứng với C qua H. Ta có $AK = AC$ và $\angle AKD = \angle ACD$ (1). Vì $\angle SNC = \angle SMB = 90^o = \angle SHC$ nên tứ giác $SNDM$ và $SCHN$ nội tiếp được. Do đó $\angle NSD = \angle NMD = \angle NCH$. Từ đó tứ giác $NMCB$ nội tiếp. Suy ra $\angle ABM = \angle ACN$ (2).



Từ (1) và (2) ta có $\angle ABM = \angle AKD$, suy ra $AKBD$ nội tiếp. Do đó $\angle ADM = \angle AKC = \angle ACB$. Mà $\angle BDH + \angle DBC = 90^o \Rightarrow \angle ACB + \angle MBC = 90^o$ hay $BM \perp AC$. Mâu thuẫn.

Vậy ΔABC cân tại A khi và chỉ khi S nằm trên đường thẳng AH.

Nhận xét. Giải tốt bài này có các bạn :

Sơn La: *Nguyễn Hoàng Quân, Chu Tiến Dũng*, 9 Toán, TTCLC Mai Sơn; **Thái Nguyên:** *Trần Nam Thái*, 9AI, THCS Độc Lập; **Vĩnh Phúc:** *Kim Đình Thái, Phạm Văn Hùng, Nguyễn Văn Giáp*, 9B, THCS Yên Lạc, *Nguyễn Trường Thu*, 9B, THCS Vĩnh Tường;

Bắc Giang: *Đặng Ngọc Dương*, 9A, THCS Hiệp Hòa; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Thị Hoàng Phương*, 9A, Lê Văn Thịnh, Gia Lương; **Hải Dương:** *Vũ Thành Long*, 9A, THCS Nguyễn Trãi, Nam Sách; **Hải Phòng:** *Phạm Gia Vĩnh Anh*, 9 Toán, PTTH NK Trần Phú, *Vũ Ngọc Minh*, 9T, THCS Chu Văn An; **Hà Nội:** *Nguyễn Mạnh Hùng*, PTTH Cổ Loa; **Hà Nam:** *Trần Quang Dũng*, 8B1, THCS Trần Phú, Phủ Lý; **Nam Định:** *Trần Trung Kiên*, 7A2, THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên, *Trần Anh Tuấn*, 8C, THCS Yên Lợi, Ý Yên, *Trần Quốc Việt*, 9A, THCS Giao Thủy, *Phùng Văn Thắng*, 9B, *Đinh Thanh Hiện*, 9D, THCS Ngô Đồng, Giao Thủy; **Thanh Hóa:** *Bùi Ngọc Hân*, 9C, THCS Trần Mai Ninh, *Mai Hải Lộc*, 7T, THCS Nga Hải, Nga Sơn; **Nghệ An:** *Chu Hồng Tú*, 8B, THCS Đặng Thai Mai, Vinh; *Lê Bá Dũng*, 9B, THCS Sông Hiếu, Nghĩa Đàn; **Thừa Thiên - Huế:** *Trần Huy Lập*, 9/1 Nguyễn Tri Phương, Huế; **Khánh Hòa:** *Trần Minh Bình*, 8^{15}, THCS Thái Nguyên; **Đắc Lắc:** *Trần Quang*, 9A, THCS Phan Chu Trinh, Ban Mê Thuột.

VŨ KIM THỦY

Bài T6/262. *Cho dãy (a_n), $n \in N$ được xác định bởi:*

$$a_o = 2;\ a_{n+1} = 4a_n + \sqrt{15a_n^2 - 60}$$

Hãy xác định số hạng tổng quát của a_n. Chứng minh rằng số $\frac{1}{5}(a_{2n}+8)$ có thể biểu diễn thành tổng bình phương 3 số nguyên liên tiế với mọi $n \geq 1$.

Lời giải. Theo bài ra ta có :

$$a_{n+1}^2 - 8a_na_{n+1} + a_n^2 + 60 = 0 \qquad (1)$$

Thay n bởi n-1 ta được

$$a_n^2 - 8a_{n-1}a_n + a_{n-1}^2 + 60 = 0 \qquad (2)$$

Trừ (1) cho (2) được

$$a_{n+1}^2 - a_{n-1}^2 + 8a_{n-1}a_n - 8a_na_{n+1} = 0$$

hay $(a_{n+1} - a_{n-1})(a_{n+1} - 8a_n + a_{n-1}) = 0$

Dễ thấy từ $a_{n+1} > 4a_n > 16a_{n-1}$ suy ra $(a_{n+1} - a_{n-1}) > 0$. Do đó

$$a_{n+1} - 8a_n + a_{n-1} = 0$$

Phương trình đặc trưng có dạng

$$t^2 - 8t + 1 = 0$$

với hai nghiệm $t_{1,2} = 4 \pm \sqrt{15}$. Ta xác định được công thức tổng quát của dãy $\{a_n\}$ là

$$a_n = (4+\sqrt{15})^n + (4-\sqrt{15})^n.$$

Bây giờ ta chứng minh $\frac{1}{5}(a_{2n}+8)$ luôn được biểu diễn dưới dạng tổng bình phương của 3 số nguyên liên tiếp. Thật vậy, với mỗi $n \geq 1$, thì $\exists k \in N$ để

$$(4+\sqrt{15})^n - (4-\sqrt{15})^n = \sqrt{15}k$$

Suy ra

$$\left((4+\sqrt{15})^n - (4-\sqrt{15})^n \right)^2 = 15k^2$$

hay $(4+\sqrt{15})^{2n} + (4-\sqrt{15})^{2n} = 15k^2 + 2.$

Do vậy

$$\frac{1}{5}(a_{2n}+8) =$$

$$= \frac{1}{5}\left((4+\sqrt{15})^{2n} + (4-\sqrt{15})^{2n} + 8 \right)$$

$$= 3k^2 + 2 = (k\text{-}1)^2 + k^2 + (k+1)^2.$$

Nhận xét. Các bạn sau đây có lời giải tốt : **An Giang:** *Nguyễn Anh Tuấn*, 11 TL, PTTH Thoại Ngọc Hầu, Long Xuyên; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Ngọc Cường*, 10 toán, PTTH NK Hàn Thuyên, thị xã Bắc Ninh; **Bình Dương:** *Nguyễn Tiến Hùng*, 11T, Hùng Vương; **Đắc Lắc:** *Đặng Ngọc Châu*, 11 T1, chuyên Nguyễn Du, Tp Buôn Ma Thuột; **Kon Tum:** *Hoàng Phi Dũng*, 11A1, PTTH CB Kom Tum; **Hà Nam:** *Nguyễn Thanh Hải* và *Nguyễn Trung Hiếu*, 11A1, THCB Hà Nam; **Hà Nội:** *Phạm Bảo Trung*, 9A, THCS Nguyễn Trường Tộ; *Hàn Thế Anh*, và *Phạm An Khang*, 10A2, ĐHSP Hà Nội 1, *Hoàng Công Hòa*, 11D2, PTTH Chu Văn An, *Nguyễn Thanh Hải*, 11C, PTTH Sóc Sơn; **Hà Tĩnh:** *Trương Quang Dũng*, 10 Toán, PTTH NK Hà Tĩnh; **Ninh Bình:** *Ngô Văn Giang*, 11B7, PTTH Tam Điệp; **Quảng Bình:** *Nguyễn Thanh Xuân*, 10 Toán, PTTH NK Quảng Bình; **Quảng Nam:** *Trần Công Linh*, 11A7, THCB Nguyễn Duy Hiệu, huyện Điện Bàn; **Quảng Trị:** *Lê Anh Tuấn* và *Trần Việt Anh*, 10 toán, PTTH chuyên Lê Quý Đôn; **Tây Ninh:** *Hồ Nam*, 11A4, PTTH Hoàng Lê Kha; **Thái Bình:** *Bùi Hà Thái*, 11A, PTTH Nam Đông Quang, Đông Hưng.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T7/262. *Cho số nguyên tố p và n, k là các số nguyên dương, k > 1. Giả sử b_i (i = 1, 2, ..., k) là các số nguyên thỏa mãn :*

(1) $0 \le b_i \le k-1$ với mọi i,

(2) $p^{nk}-1$ là ước số của số

$$A = \left(\sum_{i=1}^{k} p^{nb_i}\right) - p^{n(k-1)} - p^{n(k-2)} - \dots - p^n - 1.$$

Hãy chứng tỏ rằng dãy số $(b_1, b_2, ..., b_k)$ là một hoán vị của dãy số (0, 1, ..., k–1).

Lời giải. Kí hiệu $q = p^n$.

Ta có : $q \in N$, $q \ge 2$. Trước hết ta có nhận xét sau : nếu $u, v \in N$ và $(u\text{-}v) \vdots k$ thì

$$q^u - q^v \vdots (q^{k-1} + q^{k-2} + \dots + q + 1). \quad (1)$$

Thật vậy giả sử $u = v + t.k$ với $t \in N$.

Khi đó $(q^u - q^v) \vdots (q^k - 1)$.

Chú ý

$$(q^k - 1) = (q-1)(q^{k-1} + q^{k-2} + \dots + q + 1).$$

Áp dụng vào bài toán : từ giả thiết ta suy ra $\left(q^{b_k} + q^{b_{k-1}} + q^{b_1}\right) \vdots \left(q^{k-1} + q^{k-2} + \dots q + 1\right).$

Do đó với mọi $j \in \{0, 1, ..., k\text{-}1\}$ thì

$$(q^{b_k+j} + q^{b_{k-1}+j} + \dots + q^{b_1+j}) \vdots (q^{k-1} + q^{k-2} + \dots + q + 1)$$

Ký hiệu $b_{i,j}$ là phần dư khi ta lấy $(b_i + j)$ chia cho k.

Theo nhận xét (1) ta có :

$$\left(q^{b_{k,j}} + q^{b_{k-1,j}} + \dots + q^{b_{1,j}}\right) \vdots \left(q^{k-1} + q^{k-2} + \dots + q + 1\right) \quad (2)$$

Mặt khác ta thấy rằng với mọi $i \in \{1, ..., k\}$ $\left(b_{i,o}, b_{i,1}, ..., b_{i,k-1}\right)$ là một hoán vị của $(0, 1, ..., k\text{-}1)$.

Bởi vậy $\sum_{j=0}^{k=1} \left(q^{b_{k,j}} + q^{b_{k-1,j}} + \dots + q^{b_{1,j}}\right)$

$$= k\left(q^{k-1} + q^{k-2} + \dots + q + 1\right).$$

Nhưng từ (2) ta suy ra

$$\sum_{j=0}^{k-1} \left(q^{b_{k,j}} + q^{b_{k-1,j}} + \dots + q^{b_{1,j}}\right) \ge k\left(q^{k-1} + q^{k-2} + \dots + q + 1\right)$$

Do đó ta có :

$$q^{b_{k,j}} + q^{b_{k-1,j}} + \dots + q^{b_{1,j}} = q^{k-1} + q^{k-2} + \dots + q + 1$$

với mọi $j \in \{0, 1, ..., k\text{-}1\}$.

Hệ quả : với mọi $j \in \{0, 1, ..., k\text{-}1\}$ tồn tại $i \in \{1, ..., k\}$ mà $b_{i,j} = 0$ (vì $q^{k-1} + q^{k-2} + \dots + q + 1 \not\vdots\ q$), tức là

$$b_i + j = \begin{cases} k & \text{nếu } 1 \le j \le k-1 \\ 0 & \text{nếu } j = 0 \end{cases} \quad (3)$$

(vì theo giả thiết (1) $0 \le b_i \le k\text{-}1$ với mọi i nên

$$1 \le b_i + j \le 2k\text{-}2 \text{ nếu } 1 \le j \le k\text{-}1,$$

Từ (3) ta suy ra : trong các số $\{b_k, b_{k-1}, ..., b_1\}$ có số bằng 0, có số bằng 1, ..., có số bằng $(k$-1), tức là $(b_1, b_2, ..., b_k)$ là một hoán vị của (0, 1, ..., k-1).

Nhận xét. 1) Lời giải trên chỉ sử dụng các giả thiết $q \in N, q \geq 2$ và
$$\left(q^{b_k}+q^{b_{k-1}}+...+q^{b_1}\right) \vdots \left(q^{k-1}+q^{k-2}+...+q+1\right)$$
yếu hơn rất nhiều so với các giả thiết của đề bài.

2) Các bạn sau có lời giải tốt : **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Trung Lập*, 11A1, PTTH chuyên; **Hà Nội:** *Bùi Viết Lộc*, 11T, ĐHKHTN-ĐHQG, *Đinh Trung Hiếu*, 10M, Marie Curie; **Hải Dương:** *Phạm Ngọc Lợi*, *Phạm Hồng Quân*, 11T, PTTH Nguyễn Trãi; **TP Hồ Chí Minh:** *Hoàng Thanh Lâm*, *Trần Đình Nguyên*, 11T, PTNK-ĐHQG; **Khánh Hòa:** *Trần Tuấn Anh*, 11T, Lê Quý Đôn.

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T8/262. *Không dùng bảng số, máy tính, hãy tính giá trị biểu thức :*
$$\sin\frac{\pi}{14} + 6\sin^2\frac{\pi}{14} - 8\sin^4\frac{\pi}{14}$$

Lời giải. (của đa số các bạn)

Đặt $\frac{\pi}{14} = x \Leftrightarrow 14x = \pi$. Biến đổi biểu thức

$A = \sin\frac{\pi}{14} + 6\sin^2\frac{\pi}{14} - 8\sin^4\frac{\pi}{14}$ như sau :

$A = \sin x + 6\sin^2 x - 8\sin^4 x$

$= \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 3(1-\cos 2x) - 2(1-\cos 2x)^2$

$= \cos 6x + 3 - 3\cos 2x - 2 + 4\cos 2x - 2\cos^2 2x$

$= \cos 6x + \cos 2x - \cos 4x$

$= \cos 2x + \cos 6x + \cos 10x \qquad (*)$

Từ đó

$2A\sin 2x = 2\cos 2x\sin 2x + 2\cos 6x\sin 2x + 2\cos 10x\sin 2x$

$= \sin 4x + \sin 8x - \sin 4x + \sin 12x - \sin 8x$

$= \sin 12x = \sin 2x$

Vì $\sin 2x \neq 0$ nên $A = \frac{1}{2}$.

Nhận xét. 1) 347 bạn gửi bài về TS đã đưa ra lời giải đúng bằng nhiều cách biến đổi lượng giác biểu thức A, trong đó một số rất ít biến đổi dài dòng.

Các bạn : *Trần Đức Nam*, 11A6, THCB Đào Duy Từ, Tp Thanh Hóa, *Nguyễn Tùng Linh*, 11H, PTTH Nông Cống 1, **Thanh Hóa**, *Nguyễn Văn Sơn*, 11A7, PTTH Nguyễn Du, Châu Đức, **Bà Rịa - Vũng Tàu** nhận xét rằng biểu thức (*) là trường hợp riêng của biểu thức tổng quát

$S = \cos y + \cos 3y + \cos 5y + ... + \cos(2k+1)y$ và tính được bằng cách tương tự như trên.

2) Có thể đặt $\frac{\pi}{7} = t \Leftrightarrow 7t = \pi$. Từ đó có $\sin(3x+4x) = 1$ hoặc $\sin(x+6x) = 1$ hoặc $\sin 2t = \cos 5t$ hoặc $\cos 4t = -\cos 3t$. Biến đổi các biểu thức này về dạng đa thức của $\sin t$ hoặc $\cos t$ sẽ dẫn đến kết quả. Một số bạn khác giải phương trình $\sin 7t = 1$ hoặc $\cos 4t = \cos(\pi - 3t) \Leftrightarrow \cos 4t + \cos 3t = 0$, mặt khác biến đổi vế trái của các phương trình trên về dạng đa thức của $\sin t$ hoặc $\cos t$, sau đó sử dụng định lí Viet để tính tổng các nghiệm của phương trình. Từ cách giải này bạn đọc có thể sáng tạo ra nhiều đẳng thức về hàm số lượng giác. Các bạn có nhận xét trên là :

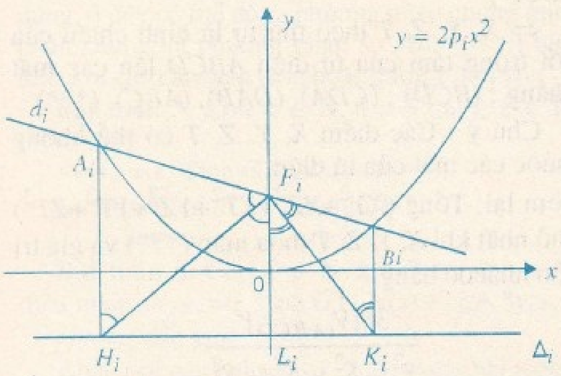
Thái Nguyên: *Nguyễn Ngọc Anh*, 10T, PTTH NK Tp Thái Nguyên; **Phú Thọ:** *Nguyễn Đình Hòa*, 9B, THCS Việt Trì; **Vĩnh Phúc:** *Lê Tuấn Hưng*, 11A3, *Nguyễn Trung Lập*, 11A1, PTTH chuyên; **Bắc Giang:** *Ngô Quang Vịnh*, 10A, PTTH Ngô Sĩ Liên; **Hà Nội:** *Bùi Viết Lộc, Đinh Hữu Toàn*, 11A Toán, *Ngô Quốc Anh*, 10A Toán, ĐHKHTN-ĐHQG, *Nguyễn Việt Anh*, 11 Tin, ĐHSP-ĐHQG; **Hải Dương:** *Phạm Tiến Toàn*, 10T, *Phạm Ngọc Lợi*, 11T, *Bùi Duy Cường*, 12T, PTTH Nguyễn Trãi; *Nguyễn Anh Dũng*, 10A1, PTTH Tứ Kỳ. **Nam Định:** *Phùng Văn Thắng*, 9D, THCS Ngô Đồng, Giao Thủy ; **Thanh Hóa:** *Lại Thương Tâm*, 11A0, PTTH Bỉm Sơn, *Lê Hoàng Tuấn*, 10T, PTTH Lam Sơn, Tp Thanh Hóa; **Nghệ An:** *Hà Văn Đạt*, 11A3, PTTH Phan Bội Châu, Vinh, ; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Duy Đạt*, 10L, PTTH Kỳ Anh ; **Đà Nẵng:** *Tô Thị Kim Phượng*, 10A1, PTTH Lê Quý Đôn, *Đỗ Minh Thiện*, 10/21, PTTH Phan Châu Trinh, *Nguyễn Quốc Khánh*, 11A1,, PTTH Hoàng Hoa Thám; **Khánh Hòa:** *Lê Thị Khánh Hiền*, 10T, PTTH Lê Quý Đôn, Nha Trang ; **Kon Tum:** *Hoàng Phi Dũng*, 11A1, THCB KonTum; **Bình Dương:** *Nguyễn Thị Kim Ngân*, 11T, PTTH Hùng Vương ;**Tp Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Đăng Thành*, 10A1, PTTH Gia Định ;**Tiền Giang:** *Hồ Thanh Sơn*, 10T, PTTH chuyên.

PHI PHI

Bài T9/262. *Cho một họ các Parabol* (P_i) *có phương trình* $y = 2p_i x^2$ *với* $p_i > 0$ $(i = 1, 2, ..., n)$. *Đường thẳng* d_i *đi qua điểm* $F_i\left(0, \frac{1}{8p_i}\right)$ *và cắt* (P_i) *ở* A_i, B_i *với mọi* i.

Chứng minh rằng :
$$\frac{1}{\sqrt[n]{F_1A_1 \cdot F_2A_2 \ldots F_nA_n}} + \frac{1}{\sqrt[n]{F_1B_1 \cdot F_2B_2 \ldots F_nB_n}} \leq 8\sqrt[n]{p_1 \cdot p_2 \ldots p_n}$$

Lời giải. (của bạn *Nguyễn Du Thái*, 10T, Khối PTCT, ĐHKH Huế)



Trước hết ta chứng minh :

$$\frac{1}{F_iA_i} + \frac{1}{F_iB_i} = 8p_i \qquad \forall i$$

Dễ thấy F_i là tiêu điểm của (P_i). Gọi Δ_i là đường chuẩn của (P_i). Giả sử H_i, K_i, L_i là hình chiếu tương ứng của A_i, B_i, F_i trên Δ_i (xem hình vẽ). Theo định nghĩa của Parabol ta có :

$$\begin{cases} A_iF_i = A_iH_i \\ B_iF_i = B_iK_i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \angle A_iF_iH_i = \angle A_iH_iF_i \\ \angle B_iF_iK_i = \angle B_iK_iF_i \end{cases} \quad (1)$$

Vì $A_iH_i // F_iL_i // B_iK_i$ nên theo định lí Talét :

$$\begin{cases} \angle A_iH_iF_i = \angle H_iF_iL_i \\ \angle B_iK_iF_i = \angle K_iF_iL_i \end{cases} \quad (2)$$

Từ (1); (2) dễ thấy :

$$\angle H_iF_iL_i + \angle K_iF_iL_i = 90^o$$

Đặt $\angle H_iF_iL_i = \alpha_i$, ta có :

$$\angle K_iF_iL_i = 90^o - \alpha_i$$

Dễ thấy :

$$\begin{cases} F_iA_i = \dfrac{F_iH_i}{2\cos\alpha_i} = \dfrac{F_iL_i}{2\cos^2\alpha_i} \\ F_iB_i = \dfrac{F_iK_i}{2\sin\alpha_i} = \dfrac{F_iL_i}{2\sin^2\alpha_i} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{F_iA_i} + \frac{1}{F_iB_i} = \frac{2}{F_iL_i}(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = \frac{2}{F_iL_i}$$

Mặt khác :

$$OF_i = OL_i = \frac{1}{8p_i} \Rightarrow F_iL_i = \frac{1}{4p_i}$$

Vậy : $\dfrac{1}{F_iA_i} + \dfrac{1}{F_iB_i} = 8p_i$.

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpxki mở rộng ta có :

$$\frac{1}{\sqrt[n]{F_1A_1 . F_2A_2 \dots F_nA_n}} + \frac{1}{\sqrt[n]{F_1B_1 . F_2B_2 \dots F_nB_n}}$$

$$\le \sqrt[n]{\left(\frac{1}{F_1A_1} + \frac{1}{F_1B_1}\right)\left(\frac{1}{F_2A_2} + \frac{1}{F_2B_2}\right) \dots \left(\frac{1}{F_nA_n} + \frac{1}{F_nB_n}\right)}$$

$$= \sqrt[n]{8^n p_1p_2 \dots p_n} = 8\sqrt[n]{p_1p_2 \dots p_n} \text{ (đpcm).}$$

Nhận xét. 1) Bài này có 86 bạn tham gia giải, 6 bạn giải sai. Các bạn sau đây có lời giải tốt. **Khánh Hòa:** *Trần Tuấn Anh*, 11T, Lê Quý Đôn, Nha Trang; **Thái Nguyên:** *Nguyễn Văn Thắng*, 10T, PTTHNK Thái Nguyên; **Nghệ An:** *Hoàng Văn Hiệu*, 11C, PTTH Nghĩa Đàn; **Hải Phòng:** *Vũ Ngọc Minh*, 9T, Chu Văn An, *Vũ Hoàng Hiệp*, 9T, PTTHNK Trần Phú...

2) Để chứng minh đẳng thức : $\dfrac{1}{F_iA_i} + \dfrac{1}{F_iB_i} = 8p_i$ ta có thể dùng các biến đổi đại số thông qua định lí Viét.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài T10/262. Cho tứ diện ABCD. hãy tìm các điểm X, Y, Z, T theo thứ tự thuộc các mặt phẳng : (*BCD*); (*CDA*); (*DAB*); (*ABC*) sao cho tổng sau nhỏ nhất :

$$XY^2 + XZ^2 + XT^2 + YZ^2 + YT^2 + ZT^2$$

Lời giải. Trước hết xin nêu ra những khái niệm và kết quả liên quan đến bài toán của ta.

Định nghĩa 1. Cho tứ diện *ABCD*. *M* là trung điểm của *CD*. Mặt phẳng (*MAB*) được gọi là *mặt trung diện* xuất phát từ cạnh *AB* của tứ diện.

Một tứ diện có sáu mặt trung diện : Dễ thấy sáu mặt trung diện của tứ diện đồng quy tại trọng tâm của tứ diện.

Định nghĩa 2. Cho tứ diện *ABCD*. Giả sử (α), (β) lần lượt là mặt phân giác, mặt trung diện xuất phát từ cạnh *AB* của tứ diện. Giả sử (γ) là ảnh của (β) qua phép đối xứng mặt (α) thì (γ) được gọi là *mặt đối trung* xuất phát từ cạnh *AB* của tứ diện.

Một tứ diện có sáu mặt đối trung, người ta đã chứng minh được rằng : sáu mặt đối trung của tứ diện đồng quy tại một điểm. Điểm này được gọi là *đối trọng tâm* của tứ diện.

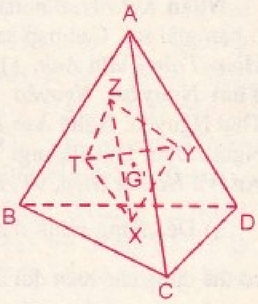
Định lí: Cho tứ diện $ABCD$. M là một điểm nằm trong tứ diện. H, I, J, K là hình chiếu của M xuống các mặt phẳng : (BCD); (CDA); (DAB) ; (ABC). Khi đó các điều kiện sau là tương đương :

1) M là đối trọng tâm của tứ diện $ABCD$.

2) $$\frac{V_{(MBCD)}}{S_A^2} = \frac{V_{(MCDA)}}{S_B^2} = \frac{V_{(MDAB)}}{S_C^2} = \frac{V_{(MABC)}}{S_D^2}$$

3) M là trọng tâm của tứ diện $HIJK$.

Ở đây S_A, S_B, S_C, S_D theo thứ tự là diện tích của các mặt (BCD), (CDA), (DAB), (ABC) của tứ diện. Việc chứng minh định lí trên là dễ dàng. Xin dành cho bạn đọc.



Trở lại bài toán của ta.

Gọi G là trọng tâm của tứ diện $XYZT$ (xem hình vẽ). Ta có :

$$GX.S_A = GY.S_B + GZ.S_C + GT.S_D \geq 3V(ABCD)$$

Theo bất đẳng thức Bunhiacôpxki ta có :

$$(GX^2 + GY^2 + GZ^2 + GT^2)(S_A^2 + S_B^2 + S_C^2 + S_D^2) \geq 9[V(ABCD)]^2$$

Chú ý rằng :

$$XY^2 + XZ^2 + XT^2 + YZ^2 + YZ^2 + ZT^2 = 4(GX^2 + GY^2 + GZ^2 + GT^2)$$

Ta có :

$$XY^2 + XZ^2 + XT^2 + YZ^2 + YT^2 + ZT^2 \geq \frac{36[V(ABCD)]^2}{S_A^2 + S_B^2 + S_C^2 + S_D^2} \quad (*)$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

[G nằm trong tứ diện $ABCD$; $GX \perp (BCD)$; $GY \perp (CDA)$; $GZ \perp (DAB)$; $GT \perp (ABC)$;

$$\frac{GX}{S_A} = \frac{GY}{S_B} = \frac{GZ}{S_C} = \frac{GT}{S_D}\ ] \quad (**)$$

$\Leftrightarrow$ [G nằm trong tứ diện $ABCD$; $GX \perp (BCD)$; $GY \perp (CDA)$; $GZ \perp (DAB)$; $GT \perp (ABC)$

$$\frac{V_{(GBCD)}}{S_A^2} = \frac{V_{(GCDA)}}{S_B^2} = \frac{V_{(GDAB)}}{S_C^2} = \frac{V_{(GABC)}}{S_D^2}\ ]$$

$\Leftrightarrow$ [$GX \perp (BCD)$; $GY \perp (CDA)$; $GZ \perp (DAB)$; $GT \perp (ABC)$: G là đối trọng tâm của tứ diện $ABCD$].

$\Leftrightarrow$ X, Y, Z, T theo thứ tự là hình chiếu của đối trọng tâm của tứ diện $ABCD$ lên các mặt phẳng : (BCD) ; (CDA), (DAB), (ABC) (***)

Chú ý : Các điểm X, Y, Z, T có thể không thuộc các mặt của tứ diện.

Tóm lại: Tổng $(XY^2+XZ^2+XT^2+YZ^2+YT^2+ZT^2)$ nhỏ nhất khi X, Y, Z, T thỏa mãn (***) và giá trị nhỏ nhất đó bằng

$$\frac{36[V_{(ABCD)}]^2}{S_A^2 + S_B^2 + S_C^2 + S_D^2}$$

Nhận xét. 1) Bài toán này có 22 bạn tham gia giải, 4 bạn giải sai. Các bạn sau đây có lời giải tương đối tốt.

Tp Hồ Chí Minh: *Phạm thanh Phong, Hoàng Thanh Lâm*, 11T, ĐHKHTN-ĐHQG ; **Hà Nội:** *Hoàng Tùng, Đào Quang Minh*, 11A, *Nguyễn Như Thắng*, 10A1, ĐHSP-ĐHQG Hà Nội; **Khánh Hòa:** *Trần Tuấn Anh*, 11T, Lê Quý Đôn, Nha Trang; **Hải Dương:** *Phạm Ngọc Lợi*, 11T, PTNK tỉnh.

2) Bài toán này không phải là thật khó. Tuy nhiên để giải được nó ta cần có sự hiểu biết khá đầy đủ về tứ diện. Do khuôn khổ của tờ báo, nhiều tính chất của tứ diện chỉ được giới thiệu mà không chứng minh. Bạn đọc nên tự chứng minh các kết quả này xem như bài luyện tập.

3) Có nhiều bạn sau khi đi đến bất đẳng thức (*) và nói: Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi có (**)

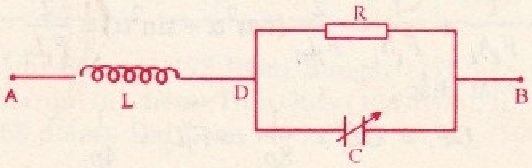
Sau đó thì dừng lại và kết luận ...

Điều này hoàn toàn không hợp lí. Vì không có gì đảm bảo sự tồn tại của bộ X, Y, Z, Y thỏa mãn hệ điều kiện mà bạn nêu trên.

Có những bạn khá hơn đã cố gắng chỉ ra sự tồn tại và duy nhất của bộ X, Y, Z, T thỏa mãn hệ điều kiện trên nhưng lại không chỉ ra được ý nghĩa hình học của bộ X, Y, Z, T này. Như vậy lời giải của bạn cũng không thể xem là hoàn chỉnh.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài L1/262. *Cho mạch điện xoay chiều có sơ đồ như trên hình vẽ. L là cuộn dây thuần cảm có* $L = \frac{2}{\pi}$ *H. Đặt vào mạch hiệu điện thế* $u_{AB} = u = 100\sqrt{2}\sin(100\pi t)(V)$.

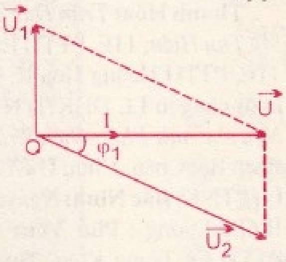


1) Điều chỉnh C, người ta thấy khi $C=\frac{10^{-4}}{4\pi}F$ thì cường độ dòng điện mạch chính cùng pha với U_{AB} Tính R. Lập các biểu thức của các cường độ dòng điện và hiệu điện thế trên mạch. Tính tổng trở và công suất tiêu thụ của mạch.

2) Bây giờ người ta mắc tụ điện C nối tiếp với R và với L. Điều chỉnh C để hiệu điện thế hiệu dụng giữa hai bản tụ điện đạt giá trị cực đại. Tìm giá trị của C khi đó.

Hướng dẫn giải.

1) $Z_L = 200\Omega$; $Z_C = 400\Omega$. Đặt $U_{AD} = U_1$, $U_B = U_2$. Xét đoạn mạch DB: $I_C = \frac{U_2}{400}$, $I_R = \frac{U_2}{R}$.



Vẽ giản đồ vectơ, chọn $\overrightarrow{U_{AB}}$ làm trục pha, vẽ $\overrightarrow{I_C}, \overrightarrow{I_R}$ và $\overrightarrow{I}=\overrightarrow{I_C}+\overrightarrow{I_R}$.

Suy ra U_2 trễ pha so với i một góc φ_1 mà

$\mathrm{tg}\varphi_1 = \frac{I_C}{I_R} = \frac{R}{Z_C}$ (1) và $I = \sqrt{I_C^2 + I_R^2}$

$\Rightarrow U_2 = \frac{IRZ_C}{\sqrt{R^2+Z_c^2}}$.

U_1 sớm pha góc $\frac{\pi}{2}$ so với i và $U_1 = Z_L I$. Vẽ giản đồ vectơ như hình bên, chọn $\overrightarrow{I}$ làm trục pha, vẽ $\overrightarrow{U_1}$, $\overrightarrow{U_2}$ và $\overrightarrow{U} = \overrightarrow{U_1} + \overrightarrow{U_2}$ với chú ý rằng $\overrightarrow{U}$ và $\overrightarrow{I}$ cùng hướng.

Từ hình vẽ có : $U = \sqrt{U_2^2 - U_1^2}$,

$\sin\varphi_1 = \frac{U_1}{U_2} = \frac{Z_L\sqrt{R^2+Z_C^2}}{RZ_C}$ (2)

Từ (1) và (2), thay số tìm được $R = 400\Omega$; $\mathrm{tg}\varphi_1 = 1$ hay $\varphi_1 = \frac{\pi}{4}$; $U_2 = \frac{U_1}{\sin\varphi} = U_1\sqrt{2}$, $U = U_1\mathrm{tg}\varphi_1 = U_1$. Suy ra $U_1 = 100V$; $U_2 = 100\sqrt{2}(V)$; $I_C = I_R = \frac{\sqrt{2}}{4}(A)$; $I_L = I = 0{,}5A$.

Từ đó $i = 0{,}5\sqrt{2}\sin100\pi t\ (A)$;

$i_R = 0{,}5\sin\left(100\pi t - \frac{\pi}{4}\right)(V)$;

$u_R = u_C = 200\sin\left(100\pi t - \frac{\pi}{4}\right)(V)$;

$Z = \frac{U}{I} = 200\Omega$; $P = 50W$;

2) Ta có $U_C = Z_C I = \frac{UZ_C}{\sqrt{R^2+(Z_L-Z_C)^2}}$.

U_C đạt cực đại khi $Z_C Z_L = R^2 + Z_L^2$. Suy ra $Z_C = 1000\Omega$ và $C = \frac{10^{-5}}{\pi}(F)$.

Nhận xét. Các bạn có lời giải đầy đủ và đúng :

Yên Bái: *Vũ Hải Đăng*, 12A1, PTTH chuyên Yên Bái; **Thanh Hóa:** *Trịnh Thị Bạch Tuyết*, 11A6, PTTH Ba Đình, Nga Sơn; **Hà Nội:** *Ngô Lê Vinh*, 12C1, PTTH Việt Đức ; **Ninh Thuận:** *Nguyễn Trọng Khoa*, 12A2, PTTH Chu Văn An; **Sơn La:** Nguyễn *Thái Bình*, 10T3, PTTH NK Sơn La; **Tây Ninh:** *Châu Quốc Phong*, 11A6, PTTH Lí Thường Kiệt, Hòa Thành; **Bắc Ninh:** *Trần Diệu Linh*, 11 Toán, PTTH NK Hàn Thuyên, *Nguyễn Thị Kim Cương*, Lí 11, PTTH NK Bắc Ninh; **Cà Mau:** *Vũ Lâm Chí Nhân* 22 Lí Bôn, Phường 2, Tp Cà Mau; **Bà Rịa - Vũng Tàu:** *Nguyễn Xuân Nghiên*, 11T2, PTTH Lê Quý Đôn; **Nghệ An:** *Hồ Khánh Nam*, 11 Lí, PTTH Phan Bội Châu, Vinh, *Hoàng Minh Sơn*, 11G1, PTTH Nghi Lộc 1 ; **Phú Yên:** *Nguyễn quốc Dân*, 12 Lí, *Hoàng Quốc Hoa*, 12 Toán, PTTH Lương Văn Chánh, Tuy Hòa; **Quảng Ngãi:** *Lê Đức Thọ*, 12A6, PTTH Trần Quốc Tuấn; *Lê Hoàng Cường*, 11A1, THCB Sơn Tịnh I; **Quảng Trị:** *Trần Quốc Minh*, 12A3, PTTHCB Hồ Xá, Vĩnh Linh; **Bình Thuận:** *Trần Thiện*, 11A4, PTTH chuyên Trần Hưng Đạo; **Đồng Tháp:** *Trần Trung Dũng*, 11A1, THCB Cao Lãnh ; **Tp Hồ Chí Minh:** *Đặng Trần Trí*, 11CL, PTTH Lê Hồng Phong; **Nam Định:** *Nguyễn Trung Dũng*, 11 Lí, PTTH Lê Hồng Phong; **Đà Nẵng:** *Đặng Ngọc Hiến*, 11A2, PTTH Lê Quý Đôn; **Trà Vinh:** *Dương Tấn Khải*, 12A, THCB Trà Vinh; **Hà Tĩnh:** *Bùi Việt Hoàng Sơn*, 11 Lí, PTTH NK Hà Tĩnh; **Bình Định:** *Nguyễn Đình Tuyên*, 12A5, PTTH Nguyễn Trân, Hoài Nhơn; **Thái Bình:** *Bùi Thái Hà*, 11A, PTTH Nam Đông Quan, Đông Hưng ; **Hải Phòng:** *Phạm Anh Đức*, 12 Lí, PTTH Trần Phú; **Bắc Giang:** *ThânVăn Thuyết*.Trường NKNSL; **Phú Thọ:** *Nguyễn Hiền Lương*, 11A, PTTH Hùng Vương, Tx Phú Thọ; **Vĩnh Phúc:** *Phạm Văn Phong*, 11I, *Lê Thị Thu Hương*, 10A6 và *Đỗ Ngọc ánh*, 11A1, PTTH chuyên Vĩnh Phúc.

MAI ANH

Bài L2/262. *Trong thí nghiệm giao thoa ánh sáng của Iâng, khoảng cách giữa hai khe sáng bằng 2mm, khoảng cách từ hai khe sáng đến màn quan sát bằng 3m.*

1) Khi chiếu sáng các khe bằng một nguồn sáng đơn sắc người ta đo được khoảng cách từ vân sáng bậc 5 đến vân sáng chính giữa bằng 4,5mm. Tính bước sóng ánh sáng.

2) Ở phía trước một trong hai khe đặt một bản mỏng phẳng trong suốt có hai mặt song song, dày e = 8μm và có chiết suất n = 1,5. Khi đó hệ vân giao thoa ở câu 1 có gì thay đổi. Xác định độ dịch chuyển của hệ vân.

3) Bỏ bản mỏng đi và chiếu sáng các khe bằng nguồn ánh sáng trắng có bước sóng từ 0,4μm đến 0,75μm. Tại điểm M cách vân sáng chính giữa 0,5cm có những bức xạ nào của nguồn cho vân sáng, những bức xạ nào cho vân tối ?

Hướng dẫn giải. 1) Ta có $\lambda = \frac{ax}{kD}$, với $x = 4{,}5mm$; $k = 5$. Suy ra $\lambda = 0{,}5\mu m$.

2) Khoảng vân không thay đổi, nhưng hiệu đường đi bây giờ bằng $d_2 - d'_1 = \frac{ax}{D} - (n-1)e$. Vị trí vân sáng trung tâm bây giờ ứng với $k=0$, hay $d_2 - d'_1 = 0$, suy ra $x_o = \frac{(n-1)eD}{a} = 6$mm; Hệ vân dịch chuyển một đoạn $x_o = 6$mm về phía khe có đặt bản mỏng.

3) Nếu tại M có vân sáng thì $x_M = k\frac{\lambda D}{a} \Rightarrow \lambda = \frac{10}{3k}$ (μm). Vì $0{,}4\mu m \le \lambda \le 0{,}75\mu m$ nên suy ra $4{,}4 \le k \le 8{,}3$ nghĩa là k có các giá trị : 5, 6, 7, 8. Như vậy có 4 bức xạ cho vân sáng tại M, có bước sóng $\lambda_5 = 0{,}67\mu m$; $\lambda_6 = 0{,}56\mu m$; $\lambda_7 = 0{,}48\mu m$; $\lambda_8 = 0{,}42\mu m$ Nếu tại M có vân tối thì tương tự như trên $\lambda = \frac{1}{2k+1} \cdot \frac{20}{3}$ μm. Suy ra $k = 4, 5, 6, 7$; có 4 bức xạ cho vân tối tại M :

$\lambda'_4 = 0{,}74\mu m$; $\lambda'_5 = 0{,}61\mu m$; $\lambda'_6 = 0{,}51\mu m$; $\lambda'_7 = 0{,}44\mu m$.

Nhận xét. Các bạn có lời giải đúng và gọn :

Thanh Hóa: *Trần Đức Tiến*, 12A, PTTH Hậu Lộc I; *My Thu Hiền*, 11F, PTTH Lam Sơn, *Nguyễn Xuân Kiên*, 11E, PTTH Hoằng Hóa II; **Hà Nội:** *Lê Cường*, Bo11A, khối chuyên Lí, ĐHKHTN-ĐHQG Hà Nội; **Nghệ An:** *Nguyễn Anh Phúc Đức*, *Trần Tiến Dũng*, 11A3, PTTH Phan Bội Châu, Vinh; **Hà Tĩnh:** *Bùi Việt Hoàng Sơn*, 11 Lí, PTNK; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Huy Việt*, 11A1, PTTH số II Gia Lương ; **Phú Yên:** *Đàm Thị Thu Thủy*, 11A5, PTTH Lê Trung Kiên, Tuy Hòa, *Nguyễn Thanh Ngọc Tùng*, 12T, PTTH Lương Văn Chánh, Tuy Hòa; **Quảng Bình:** *Nguyễn Văn Đồng*, 12A1, THCB Đào Duy Từ ; **An Giang:** *Cao Minh Đăng*, 12A2, số 6, Cử Trị, Châu Đốc; **Cà Mau:** *Vũ Lâm Chí Nhân*, 12 Lý Bôn, Phường 2, Cà Mau; **Hưng Yên:** *Bùi Hùng Sơn*, 12A1, THCB Tx Hưng Yên; **Vĩnh Phúc:** *Phạm Văn Yên*, 12A2, PTTH Hai Bà Trưng, *Vũ Thanh Tùng*, 11A1, *Lê Quốc Hưng*, 11A3 và *Phạm Doanh Tuyên*, 12A1, PTTH chuyên Vĩnh Phúc.

MAI ANH

THÔNG BÁO
Về việc tăng trang của Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ

Với tinh thần không ngừng đổi mới, theo yêu cầu của nhiều bạn đọc và được phép của Vụ Báo chí, Bộ Văn hóa và Thông tin, từ số 268 (tháng 10 năm 1999) Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ sẽ *tăng thêm 4 trang*.

Đặc biệt, tạp chí sẽ dành trang phục vụ việc dạy và học chương trình Toán cấp Tiểu học. Rất mong các thầy giáo, cô giáo và các vị phụ huynh gửi bài, đồng thời động viên các em học sinh đến với Tạp chí.

Mỗi học sinh nên có Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ - kho tư liệu quý giá được sử dụng trong suốt các năm học phổ thông và không dễ gì kiếm lại các số tạp chí đã qua.

Hãy đặt mua Tạp chí tại cơ sở Bưu điện gần nhất.

Từ số 268 (tháng 10/1999) giá của Tạp chí là 3300đ.

Rất mong sự ủng hộ của bạn đọc.

TH&TT

GIẢI TRÍ TOÁN HỌC

Giải đáp bài SINH NĂM NÀO

Gọi số năm sinh của cô giáo là $\overline{19ab}$
Giả sử năm cô giáo 16 tuổi là $\overline{19xy}$
Ta có $\overline{19xy} = \overline{19ab} + 16$
Theo lời cô giáo ta có
$\overline{ba91} - \overline{19ab} = 2(\overline{yx91} - \overline{19xy})$
$= 2.\overline{yx91} - 2.\overline{19ab} - 32$
$\Rightarrow \overline{ba91} + \overline{19ab} + 32 = 2.\overline{yx91}$
$\Rightarrow \overline{baab} + 1991 + 32 - 182 = 2.\overline{yx00}$
$\Rightarrow \overline{ba00} + \overline{ab} + 1841 = 2.\overline{yx00}$
$\Rightarrow \overline{ab} = 59 \Rightarrow \overline{xy} = 75.$

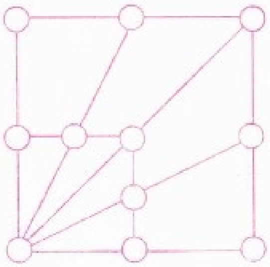
Cô giáo sinh năm 1959 và năm nay 40 tuổi.

Các bạn sau đây có đáp án ngắn gọn : *Phan Anh Sơn*, 10CT, ĐH Vinh; *Nguyễn Thị Soa*, 9C, Vinh Quang, Ninh Xá, Tx. **Bắc Ninh**; *Nguyễn Xuân Kiện*, 10C, chuyên **Yên Bái**; *Đỗ Gia Nam*, 8A, Vĩnh Tường, **Vĩnh Phúc**; *Nguyễn Đức Minh*, 7H, THCS Trưng Vương, **Hà Nội**; *Trần Thế Phiên*, 9, Sơn Tịnh, **Quảng Ngãi**; *Lê Phạm Thái Duy*, 11A1, *Lê Trung Kiên*, Tuy Hòa, **Phú Yên**; *Trần Quang Anh*, 9A, THCS Ngô Mây, Phù Cát, **Bình Định**.

BÌNH PHƯƠNG

ĐIỀN SỐ VÀO CÁC Ô TRÒN

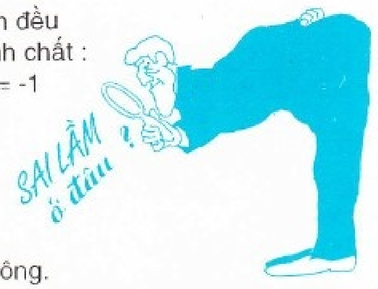
Hãy điền các số tự nhiên từ 1 đến 11, mỗi số vào một ô tròn ở hình bên sao cho các tổng ba số thuộc ba ô nằm trên mỗi đoạn thẳng đều bằng nhau. Có bao nhiêu cách điền số khác nhau nếu coi hai cách điền số đối xứng qua đường chéo hình vuông là không khác nhau.



Ở hình tương tự như trên mà trên mỗi đoạn thẳng có 4 ô tròn thì có thể điền được các số tự nhiên từ 1 đến 22 vào các ô tròn để có các tổng 4 số nằm trên mỗi đoạn thẳng đều bằng nhau hay không ?

MAN ĐỨC TÂN
(Gia Lai)

MỘT TÍNH CHẤT MỚI CỦA TAM GIÁC ?



Tất cả các bạn đều dễ dàng *chỉ ra* tính chất : $\cos A.\cos B.\cos C = -1$ là sai bằng cách *chỉ ra* tam giác đặc biệt, chẳng hạn tam giác đều hoặc tam giác vuông.

Một số bạn đã phân tích các "phép nhân" trong : $P = (\vec{e_1}.\vec{e_2}).(\vec{e_2}.\vec{e_3}).(\vec{e_3}.\vec{e_1})$ là có ý nghĩa khác nhau, chẳng hạn $\vec{e_1}.\vec{e_2}$ là *phép nhân vô hướng của hai vectơ*, còn phép nhân $(\vec{e_1}.\vec{e_2}).(\vec{e_2}.\vec{e_3})$ là *phép nhân hai số thực*.

Điều quan trọng là không có tính chất $\vec{a}.(\vec{b}.\vec{c}) = (\vec{a}.\vec{b}).\vec{c}$, nên việc "sắp xếp" lại các véctơ trong P là không được !

Các bạn có ý kiến tốt là : *Đào Tiến Thành*, 10T1, PTTH Lê Hồng Phong, Nam Định; *Ngô Văn Minh*, 10 Hóa, PTTH chuyên Nguyễn Trãi, Hải Dương; *Hoàng Tự Phúc Đại*, 10A5, PTTH Kiến An, Hải Phòng ; *Tạ Minh Hiếu*, giáo viên trường THCS Yên Lạc, Vĩnh Phúc ; *Nguyễn Hy Ngọc*, T1D, ĐHSP Tp Hồ Chí Minh; *Võ Viết Tính*, Hải Ba, Hải Lăng, Quảng Trị.

Bạn *Phạm Thanh Bình*, xóm 5, Yên Mỹ, Yên Mô, Ninh Bình đã chứng minh tính chất : $\cos A.\cos B.\cos C = -1$ không đúng với bất kì tam giác ABC nào, nhờ dựa vào hệ thức :

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 + 2\cos A\cos B\cos C$$

NGHIỆM DUY NHẤT ? THẬT KHÔNG ?

Mời các bạn xem xét phép giải phương trình : $5^x.8^{\frac{x-1}{x}} = 500$ của tác giả P.H.N trong một cuốn sách NXB ĐN :

"Điều kiện $x \neq 0$. Phương trình tương đương với $5^x.2^{\frac{3x-3}{x}} = 5^3.2^2 \Leftrightarrow 5^{x-3}.2^{\frac{x-3}{x}} = 1$

$\Leftrightarrow (x-3)\ln 5 + \dfrac{x-3}{x}\ln 2 = 0$

Xét hàm số $f(x) = (x-3)\ln 5 + \dfrac{x-3}{x}\ln 2$ với $x \neq 0$ thì $f'(x) = \ln 5 + \dfrac{3}{x^2}\ln 2 > 0$ với mọi $x \neq 0$. Suy ra $f(x)$ là hàm tăng. Mà $f(3) = 0$. Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là $x = 3$". Cảm ơn bạn *Nguyễn Thanh Bảo Trân*, PTTH Lê Hồng Phong, Tp Hồ Chí Minh đã phát hiện ra... lời giải trên.

KIHIVI

TRƯỜNG PTTH CHUYÊN THÁI BÌNH

Hiệu trưởng
NGUYỄN LUẬN

Từ tháng 10 năm 1968 UBHC tỉnh Thái Bình cho phép thành lập lớp cấp 3 PT dạy học sinh có năng khiếu về Toán và đến tháng 10 năm 1988 trường PTTH Chuyên Thái Bình được thành lập. Sự trưởng thành của trường chuyên ngày nay là sự nối tiếp những truyền thống xưa.

Từ các lớp chuyên toán 1968-1972 tại cấp 3 thị xã (nay là PTTH Lê Quý Đôn), các lớp chuyên Toán 1974-1988 tại trường cấp 3 Nam Thư Trì (nay là PTTH Nguyễn Trãi), các lớp chuyên Văn 1984-1988 tại trường PTTH Lê Quý Đôn đến các lớp chuyên tại trường PTTH chuyên Thái Bình 1988-1998.

Mười năm phát triển và trưởng thành nhà trường đã có 9 khóa học sinh lớp 12 ra trường gồm 1588 em. Có thể điểm lại một số thành tựu như sau :

Trường đã đạt được 253 giải HS giỏi quốc gia trong đó có 3 giải nhất, 30 giải nhì, 100 giải ba, 120 giải khuyến khích. 5 HS được dự thi quốc tế và đạt 4 giải quốc tế : Tô Huy Quỳnh đạt huy chương bạc thi Toán quốc tế (1993). Đoàn Nhật Dương đạt huy chương vàng thi Toán Châu Á - Thái Bình Dương, huy chương bạc thi Toán quốc tế (1998) và được trao tặng giải thưởng Lê Văn Thiêm. Trần Văn Hoàng đạt huy chương đồng thi Toán Châu Á - TBD (1998).

Thi đỗ đại học đạt tỉ lệ cao và đã có hàng chục em được các trường ĐH chọn đi học nước ngoài. Các hoạt động văn nghệ TDTT của trường được đánh giá là cơ sở mạnh và được cấp trên khen thưởng.

Đội ngũ các thầy cô giáo lớn mạnh cả về số lượng, cả về chất lượng. Hàng năm trên 40% số giáo viên của nhà trường đạt giáo viên giỏi các cấp. Từ năm 1990 đến nay 5 giáo viên của trường đã được Nhà nước phong tặng Nhà giáo ưu tú : Đặng Thuyên, Tô Mạnh Hoan, Nguyễn Văn Ngọc, Bùi Đình Khiết, Nguyễn Luận. Tổng Liên đoàn Lao động Việt Nam đã công nhận 4 *bằng Lao động sáng tạo* cho 4 thầy giáo. 3 thầy giáo được TW Đoàn TNCS HCM tặng *huy chương Vì thế hệ trẻ*. Đảng bộ luôn được công nhận là Đảng bộ "trong sạch và vững mạnh". Đoàn TNCS HCM và Công đoàn nhà trường đều được danh hiệu xuất sắc. 10 năm qua trường đã được tặng 2 *Bằng khen của Bộ trưởng Bộ GD-ĐT, Bằng khen của Thủ tướng Chính phủ* và tháng 11/1998 vừa qua được Chủ tịch nước CHXHCN Việt Nam tặng *Huân chương Lao động hạng ba.*

ISSN : 0866-0853
Chỉ số : 12884
Mã số : 8BT68M9

Chế bản tại Tòa soạn
In tại Nhà máy in Diên Hồng, 57 Giảng Võ
In xong và nộp lưu chiểu tháng 8 năm 1999

Giá : 3.000đ
Ba nghìn đồng