BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ✻ HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NĂM THỨ 36 - RA HÀNG THÁNG
Số 5 (263)
1999

Những gương mặt, những tấm lòng dành cho *Toán học và Tuổi trẻ*

Nhà giáo ưu tú PGS PHAN ĐỨC CHÍNH sinh năm 1936 quê tại Hà Nội, bảo vệ luận án Phó tiến sĩ về Giải tích hàm tại Liên Xô. Từ năm 1979 đến 1984 PGS công tác tại báo Toán học và Tuổi trẻ, Phó tổng biên tập báo 1983-1984. Ông đã nhiều năm làm Trưởng, phó đoàn học sinh Việt Nam đi thi quốc tế, là tác giả của nhiều cuốn sách Toán sơ cấp và cao cấp trong đó có sách viết bằng tiếng Nga. Ông còn là Phó Chủ tịch Hội đồng bộ môn Toán Trung học của Bộ Giáo dục và Đào tạo. PGS đã có nhiều đề toán trên Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ.

Nhà giáo ưu tú, PGS NGUYỄN ĐĂNG PHẤT sinh ngày 2.10.1936 quê ở Tam Sơn, Tiên Sơn, Bắc Ninh, bảo vệ luận án PTS ở Liên Xô, nay là phó chủ nhiệm bộ môn Hình học, khoa Toán - Tin Đại học Sư phạm, ĐHQG Hà Nội. Từ 1964 là cộng tác viên và 1976 là ủy viên Hội đồng biên tập Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ. PGS là tác giả của nhiều đề toán trên Toán học và Tuổi trẻ và 6 cuốn sách về toán. Ông còn tham gia bồi dưỡng học sinh giỏi thi toán quốc tế, là phó trưởng đoàn học sinh Việt Nam thi toán quốc tế năm 1978 tại Rumani, được nhận nhiều bằng khen của Bộ Giáo dục và Chính phủ, huy chương Vì sự nghiệp Giáo dục. Hiện PGS vẫn tiếp tục tham gia chọn đề và chấm bài giải của học sinh gửi đến Toán học và Tuổi trẻ.

PGS TRẦN THÀNH TRAI sinh ngày 22.5.1939 quê ở Sài Gòn, bảo vệ luận án Phó tiến sĩ năm 1971. Tốt nghiệp đại học ông về làm ở báo Toán học và Tuổi trẻ từ số 2 năm 1964. Hiện nay PGS Trần Thành Trai là Phân viện trưởng Phân viện công nghệ thông tin tại thành phố Hồ Chí Minh. Hai năm công tác tại báo Toán học và Tuổi trẻ đã để lại trong ông nhiều kỉ niệm sâu sắc và những ấn tượng khó quên. Ông mong muốn tạp chí tiếp tục có các chuyên mục về Tin học, có một số bài viết về cơ sở Toán của Tin học cùng các loại bài tập toán với các lời giải mang đặc thù tin học.

Nhà giáo ưu tú VŨ HỮU BÌNH sinh ngày 16.9.1943 quê ở Phú Xuyên, Hà Tây hiện là giáo viên trường THCS Trưng Vương, Hà Nội. Dạy học từ 1961, ông đã có hơn 20 học sinh đạt giải Toán lớp 9 toàn quốc, trong đó 10 học sinh sau này đạt các giải quốc tế. Đặc biệt ông là tác giả và đồng tác giả hơn 70 quyển sách toán tham khảo cho học sinh phổ thông. Ông đã đăng một số bài trên tạp chí Toán học và Tuổi trẻ. Ông viết : "Từ số báo Toán học và Tuổi trẻ đầu tiên năm 1964, tờ báo đã cùng tôi đi vào những bài lên lớp, những bài bồi dưỡng các đội tuyển học sinh giỏi, mang đến cho các em học sinh niềm thích thú và sáng tạo trong học toán". Ông mong muốn "Toán học và Tuổi trẻ tiếp tục cải tiến như đã làm, giữ mối giao lưu gắn bó với bạn đọc và không quên các bạn đọc bậc THCS".

Toán học và Tuổi trẻ
Mathematics and Youth

Năm thứ 36
Số 263 (5-1999)
Tòa soạn : 25 Hàn Thuyên, Hà Nội
ĐT : 04.8262477-FAX: (84).4.9714359

TRONG SỐ NÀY

Bìa 1 : Thầy giáo Khúc Giang Sơn và đội tuyển toán lớp 11 của trường PTTH năng khiếu Trần Phú, Hải Phòng.
Bìa 2 : Những gương mặt, những tấm lòng dành cho Toán học và Tuổi trẻ
Bìa 3 : **Câu lạc bộ - Maths Club**
Bìa 4 : Trường PTTH Năng khiếu Trần Phú Hải Phòng.

CHÀO MỪNG ĐẠI HỘI LẦN THỨ IV HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM !

Dành cho các bạn
TRUNG HỌC CƠ SỞ

TỔNG CÁC CHỮ SỐ CỦA MỘT SỐ TỰ NHIÊN

NGUYỄN NGỌC HƯƠNG
(Tiền Giang)

Với mỗi số tự nhiên n, ta gọi $S(n)$ là tổng các chữ số của n (viết trong hệ thập phân).

I. Một số tính chất của hàm $S(n)$
(các bạn hãy tự chứng minh)

1) $0 \le S(n) \le n$, $S(n) = n \Leftrightarrow 0 \le n \le 9$.

2) $n \equiv S(n) \pmod 9$

3) Nếu $n \le \overline{a_k a_{k-1} \dots a_1 a_o}$ ($a_i, k \in \mathbf{N}; 0 \le a_i \le 9$; $k \ge 1$; $i = \overline{0,k}$) thì

$$\begin{cases} S(n) \le a_k + 9k \text{ nếu } a_{k-1} = a_{k-2} = \dots = a_1 = a_o = 9 \\ S(n) \le (a_k - 1) + 9k \text{ nếu có ít nhất một trong } k \\ \qquad \text{chữ số } a_{k-1}, a_{k-2}, \dots, a_o \text{ khác } 9 \end{cases}$$

4) Nếu $S(n) \ge r + 9q$ với $r, q \in \mathbf{N}$; $0 \le r \le 9$, $q \ge 1$ thì $n \ge \overline{r99\dots9}$ (sau r có q chữ số 9).

5) $S(n+m) \le S(n) + S(m)$ $\forall n, m \in \mathbf{N}$

6) $S(nm) \le S(n).S(m)$ $\forall n, m \in \mathbf{N}$.

II. Các bài toán

Bài 1. Tìm số tự nhiên n biết tổng các chữ số của n bằng n^2-1999n+28

Giải. • Nếu $0 \le n \le 1998$ thì ta có $S(n) = n^2 - 1999n + 28 < n^2 - 1999n + 1998 =$
$= (n-1)(n-1998) \le 0$ (loại)

• Nếu $n = 1999$ thì $S(n) = S(1999) = 28 = n^2 - 1999n + 28$ (đúng)

• Nếu $n > 1999$ thì ta có $S(n) = n^2 - 1999n + 28 > n(n-1999) > n$ (loại)

Vậy $n = 1999$.

Bài 2. Biết tổng các chữ số của một số tự nhiên bằng tổng các chữ số của tích số đó với 1998, chứng minh rằng số đó chia hết cho 9.

Giải. Gọi số tự nhiên đã cho là n. Ta có $n \equiv S(n) \pmod 9$ và $1998n \equiv S(1998n) \pmod 9$ mà $S(n) = S(1998n) \Rightarrow 1998n - n \equiv 0 \pmod 9 \Rightarrow 1997n \,\vdots\, 9 \Rightarrow n \,\vdots\, 9$ (đpcm).

Bài 3. Chứng minh rằng $\dfrac{S(2n)}{S(n)} \ge \dfrac{1}{5}$ $\forall n \in \mathbf{N}$

Giải. Ta có $S(n) = S(10n) = S(5.2n) \le S(5).S(2n) = 5.S(2n) \Rightarrow \dfrac{S(2n)}{S(n)} \ge \dfrac{1}{5}$ ($\forall n \in \mathbf{N}$)

Bài 4. a) Tìm số tự nhiên n sao cho $n+S(n) = 1998$

b) Chứng minh rằng có ít nhất một trong 2 số tự nhiên liên tiếp biểu diễn được dưới dạng $n+S(n)$ với n là một số tự nhiên nào đó.

Giải. a) *Cách 1:* Ta có $n = 1998 - S(n) \le 1997$
$\Rightarrow S(n) \le 9.3 = 27 \Rightarrow n = 1998 - S(n) \ge 1971$

Đặt $n = \overline{19ab}$ với $a, b \in \mathbf{N}$; $0 \le a, b \le 9$.

Ta có $\overline{19ab} + 10 + a + b = 1998 \Rightarrow 11a + 2b = 88$
$\Rightarrow 70 \le 11a \le 88 \Rightarrow a = 8, b = 0$.

Vậy $n = 1980$.

Cách 2. Ta có $1998 = n + S(n) =$
$= n - S(n) + 2S(n) \,\vdots\, 9 \Rightarrow 2S(n) \,\vdots\, 9 \Rightarrow S(n) \,\vdots\, 9$

Mặt khác $n = 1998 - S(n) \le 1997 \Rightarrow$
$S(n) \le 9.3 = 27$.

Do đó $S(n) = 9, 18$ hoặc 27. Thử trực tiếp chỉ có $S(n) = 18$ thỏa mãn ứng với $n = 1980$.

b) Đặt $S_n = n + S(n)$, $n \in \mathbf{N}$

Nhận xét. - Nếu n tận cùng bằng 9 thì $S_{n+1} < S_n$

- Nếu n tận cùng không phải là 9 thì $S_{n+1} = S_n + 1$

Đối với số tự nhiên $m > 2$ bất kì, ta chọn k là số lớn nhất sao cho $S_k < m \Rightarrow S_{k+1} \le m+1$. Do cách chọn k thì $S_{k+1} \ge m$. Do đó hoặc $S_{k+1} = m$ hoặc $S_{k+1} = m+1$.

Bài 5. Cho a là tổng các chữ số của $(2^9)^{1999}$, b là tổng các chữ số của a. Tính tổng các chữ số của b.

Giải. Ta có $n = (2^9)^{1999} = (2^3)^{3.1999} = 8^{5997} < 10^{5997} \Rightarrow a = S(n) \le 9.5997 = 53973$.
$\Rightarrow b = S(a) \le 4 + 9.4 = 40 \Rightarrow c = S(b) \le 3 + 9.1 = 12$. Vì $n = (2^3)^{5997} \equiv 8 \pmod 9$ và $n \equiv a \equiv b \equiv c \equiv 8 \pmod 9$ nên $c = 8$.

Bài 6. Tìm số tự nhiên n sao cho lũy thừa bậc 5 của tổng các chữ số của n bằng n^2.

Giải. Giả sử số cần tìm n có k chữ số và S là tổng các chữ số đó. Ta có $S^5 = n^2$ với
$S \le 9k$, $n \ge 10^{k-1} \Rightarrow 9^5k^5 \ge S^5 = n^2 \ge 10^{2k-2}$ (1)

Đặt $u_k = \dfrac{9^5k^5}{10^{2k-2}}$, $k \in \mathbf{N}$.

Ta có $\dfrac{9^5(k+1)^5}{9^5.k^5} = \dfrac{(k+1)^5}{k^5} \le 2^5 < 10^2 =$
$= \dfrac{10^{2(k+1)-2}}{10^{2k-2}}$ $\forall k \in \mathbf{N}$

$\Rightarrow u_{k+1} < u_k \Rightarrow$ dãy số $\{u_k\}$ là dãy giảm

Vì $u_6 < 1$ nên ta có $9^5k^5 < 10^{2k-2}$ $\forall k \geq 6$ (2)

Từ (1) (2) $\Rightarrow k \leq 5 \Rightarrow S \leq 9.5 = 45$

Mặt khác từ $S^5 = n^2$ suy ra S phải là số chính phương. Vậy S có thể là 1, 4, 9, 16, 25, 36. Thử trực tiếp chỉ đúng khi $S = 1$ và $S = 9$ ứng với $n = 1$ và $n = 243$.

Bài 7. Kí hiệu bình phương tổng các chữ số của n là $f_1(n)$. Đặt $f_k(n) = f_1(f_{k-1}(n))$. Tính $f_{1998}(2^{1999})$ và $f_{1999}(2^{1999})$

Giải. Ta có $n = 2^{1999} = 2.8^{666} \equiv 2 \pmod 9$

$\Rightarrow f_1(n) \equiv 4 \pmod 9 \Rightarrow f_2(n) \equiv 7 \pmod 9$.

Mặt khác $n = 2^{1999} = 2.8^{666} < 10^{667}$

$\Rightarrow f_1(n) \leq (9.667)^2 = 36036009$

$\Rightarrow f_2(n) \leq (2+9.7)^2 = 4225 \Rightarrow f_3(n) \leq (3+9.3)^2 = 30^2$

Gọi $S = S(f_2(n))$ thì ta có $S \equiv 7 \pmod 9$ và $S \leq 30$.

$\Rightarrow S$ bằng 7,16 hoặc 25 $\Rightarrow f_3(n)$ bằng 49,256 hoặc 625.

Vì 4+9 = 2+5+6 = 6+2+5 = 13 nên $f_4(n) = 13^2 = 169 \Rightarrow f_5(n) = 16^2 = 256$.

Vậy với $k \geq 4$ thì $\begin{cases} f_k(n) = 169 \text{ nếu } k \text{ chẵn} \\ f_k(n) = 256 \text{ nếu } k \text{ lẻ} \end{cases}$

Do đó $f_{1998}(n) = 169$, $f_{1999}(n) = 256$.

III. Các bài tập tự luyện :

1) Tổng các chữ số của một số chính phương có thể bằng 1995 hoặc 1997 được không ? Vì sao ?

2) Người ta viết dãy số tự nhiên liên tiếp từ 1 đến 1.000.000. Sau đó mỗi số được thay bằng tổng các chữ số của nó. Cứ làm như vậy cho đến khi trong dãy chỉ còn các số có 1 chữ số, lúc này trong dãy cuối cùng chữ số nào xuất hiện nhiều lần nhất ?

3) Tồn tại hay không số tự nhiên n sao cho $S(n) = m$, $S(n^2) = m^2$ với m là một số tự nhiên cho trước ?

4) Chứng minh rằng $\dfrac{S(8n)}{S(n)} \geq \dfrac{1}{8}$ $\forall n \in \mathbf{N}$

5) Tìm số tự nhiên n nhỏ nhất sao cho $S(S(n)) \geq 10$ và $S(S(S(n))) \leq 9$.

6) Với mỗi số tự nhiên n, chứng minh rằng tồn tại vô hạn số tự nhiên m sao cho $S(nm) \leq 2S(m)$

7) Tìm số tự nhiên n sao cho :

a) $n+S(n) = 1999$; b) $n-S(n) = 1998$

c) $2n + 3S(n) = 122$; d) $3n + 2S(n-3) = 6007$

e) $n+S(n) + S(S(n)) = 1998$

8) Cho a là tổng các chữ số của $(3^8)^{1999}$, b là tổng các chữ số của a, c là tổng các chữ số của b. Tính tổng các chữ số của c.

BẠN CÓ BIẾT

Lại chuyện số π

Mới đọc đầu đề chắc có bạn sẽ thốt lên "Biết rồi, khổ lắm, cứ nói mãi..."

Nhưng tôi tin rằng câu chuyện sau đây còn mới toanh, không đến nỗi "cơm nguội hấp lại".

Viết các chữ số thập phân của π cho đến chữ số thứ 51 539 600 000 là công trình của một nhóm các nhà toán học Nhật thực hiện vào tháng 7 năm 1997. Nhưng đó cũng chỉ là một kỉ lục trong cuộc thi chạy "ma-ra-tông" viết nhiều chữ số thập phân của π. Mới mà không mới ! Vì muốn viết chữ số thứ *n*, phải biết được *n*-1 chữ số trước nó.

Có cách nào chỉ ra chữ số thứ *n* mà không cần biết *n*-1 chữ số đứng trước nó ? Có đấy !

Ngày 19 tháng 9 năm 1995 ông Simon Plouffe, người Ca-na-đa, tìm ra được một "công thức cách mạng" của π. Công thức đó được rút ra từ máy tính. Công thức cho phép tính được chữ số thứ *n*, mà không cần biết *n*-1 chữ số trước nó. Phép tính được thực hiện trên hệ cơ số 2, nghĩa là chỉ dùng các chữ số 0 và 1.

(Trong hệ cơ số 10 chưa có công thức nào để tính chữ số thứ *n* của số π mà không cần biết các chữ số đứng trước).

Ba năm sau, ngày 21 tháng 8 năm 1998 ông Colin Percival người Ca-na-đa, tính được chữ số thứ 5000 tỉ của π trong hệ cơ số 2. Đó là số 0. Ông ta đã làm việc trên 25 máy tính chạy song song. Mỗi máy tính chạy một chương trình độc lập, rồi sau đó các kết quả được tập hợp lại.

Công thức của Simon Plouffe cho phép các nhà toán học chỉ ra chữ số thứ *n* bất kì của số π, dù *n* có lớn đến mấy ! (dĩ nhiên vẫn trong hệ cơ số 2). Sau kì công này, họ hi vọng có thể vén ra phần nào bí mật của số π (ví dụ chữ số nào được lặp lại nhiều hơn, số chữ số chẵn nhiều hay số chữ số lẻ nhiều hơn !).

Nhưng những tìm tòi đó chẳng qua chỉ là một thứ trò chơi trí tuệ cho thỏa tính tò mò. Vì theo nhà toán học Jean Paul Delahaye thì chỉ cần 30 chữ số thập phân của π là đủ xài cho bất cứ sự áp dụng thực tế nào mà con người có thể hình dung ra.

PHAN THANH QUANG

(TP. Hồ Chí Minh)

(Theo *Eureka*, số 40, 2/1999)

Bài T1/259. *Cho dãy số $p_1, p_2, p_3, \ldots$ được xác định như sau : $p_1 = 5$ và p_n là thừa số nguyên tố lớn nhất của số $1 + p_1p_2 \ldots p_{n-1}$ với mọi $n \geq 2$. Chứng minh rằng $p_n \neq 7$ với mọi n.*

Lời giải. Ta có $p_1 = 5, p_1 + 1 = 6 \Rightarrow p_2 = 3$; $p_1p_2 + 1 = 16 \Rightarrow p_3 = 2$.

Khi đó với $k \geq 4$ thì $N_k = 1 + 5.3.2 \ldots p_{k-1}$ sẽ không chia hết cho 2, 3, 5. Thành thử $p_k \neq 2, 3, 5$ với mọi $k \geq 4$.

Giả sử $\exists k \geq 4$ để $p_k = 7$. nếu thế thì $N_k = 7^r$ $\Rightarrow p_1p_2 \ldots p_{k-1} = 7^r - 1$. Vì $p_1 = 5 \Rightarrow 7^r \equiv 1$ (mod 5) $\Rightarrow r = 4t$.

Lại có $7 \equiv -1$ (mod 4) $\Rightarrow 7^r \equiv (-1)^{4t} \equiv 1$ (mod 4) $\Rightarrow$ $p_1p_2p_3 \ldots p_{k-1} \vdots 4 \Rightarrow p_1p_2p_4 \ldots p_{k-1} \vdots 2$. Điều này vô lí vì $p_i \neq 2$ với $i \neq 3$.

Nhận xét. Bài này có nhiều bạn tham gia giải và tất cả đều giải đúng. Các bạn có lời giải tốt là : **Bắc Ninh :** *Trương Bảo Nam*, 9A, thị xã Bắc Ninh; **Hải Phòng:** *Vũ Hoàng Hiệp*, 9T, PTNK Trần Phú; **Đắc Lắc:** *Hồ Thị Thanh Trang*, 8C, Nguyễn Du, TP Buôn Ma Thuột; **Vĩnh Phúc:** *Phạm Văn Hùng*, 9B, Yên Lạc; **Đồng Tháp:** *Nguyễn Văn Huấn*, $9A_1$, Thị xã Cao Lãnh; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Quang Linh*, 6A, Hương Khê; **Hải Dương:** *Nguyễn Đức Lương*, 9A, PTTH Nguyễn Trãi; **Quảng Bình:** *Hoàng Kim*, 9B, THCS Hải Đình; **Nam Định:** *Vũ Văn Hoan*, 9B, Giao Thủy; **Phú Thọ:** *Đào Quý Thịnh*, 9B, THCS Việt Trì; **Sơn La:** *Chu Tiến Dũng*, 9A, Mai Sơn, THCS Chu Văn An, **Khánh Hòa:** *Trần Trung Huy*, 9^{14}, THCS Thái Nguyên.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T2/259. *Chứng minh rằng nếu m, n là hai số thỏa mãn*

$$19|m| + 5|n| \geq 2000 \qquad (1)$$

thì phương trình sau có nghiệm

$$20mx^2 + 5nx + 100 - m = 0 \qquad (2)$$

Lời giải. của *Nguyễn Hồng Điệp*, 7A, THCS Vĩnh Tường, **Vĩnh Phúc**.

- Với $m = 0$ thì phương trình (2) trở thành

$$5nx + 100 = 0.$$

và điều kiện (1) cho ta thấy $n \neq 0$. Vậy (2) có nghiệm $x = \dfrac{-20}{n}$.

- Với $m \neq 0$, thì phương trình (2) có nghiệm khi $\Delta \geq 0$.

Xét $\Delta = (5n)^2 - 4(100 - m).20m$

$= 25n^2 - 8000m + 80m^2$

$\geq 25n^2 - 4(19|m| + 5|n|)m + 80m^2$

(do điều kiện (1))

$\geq 25n^2 + 4m^2 - 20m|n| = (5|n|)-2m)^2 \geq 0$

Vậy với m, n là hai số thỏa mãn (1) thì phương trình (2) luôn có nghiệm.

Nhận xét. Các bạn dưới đây có lời giải tốt : **Bắc Ninh:** *Vũ Vinh Quang*, 9A, Yên Phong; **Phú Thọ:** *Nguyễn Đình Hòa, Triệu Anh Tuấn*, 9B, THCS Việt Trì; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Thị Hường*, 8A; *Nguyễn Văn Phúc, Hoàng Xuân Quang*, 9A; *Nguyễn Thị Vân Anh, Lê Minh Hải*, 9B, THCS Vĩnh Tường; *Nguyễn Tuấn Linh*, 9A, THCS Vĩnh Yên; **Hà Nội:** *Nguyễn Mạnh Tuấn*, 8C, Hà Nội - Amsterdam; *Phạm Minh Tuấn*, $9A_1$, THCS Giảng Võ; **Hải Phòng:** *Vũ Trường Giang*, 8T, *Phạm Đức Hiệp*, 9T, Chu Văn An; *Đỗ Ngọc Kiên*, 9D, NK Trần Phú; **Hải Dương:** *Trần Kiều*, 9A, THCS Phú Thứ, Kim Môn, *Ngô Xuân Bách, Nguyễn Tuấn Dương, Đào Mạnh Tiến*, 9A, THCS Nguyễn Trãi, TX Hải Dương; **Thái Bình:** *Ngô Thị Phương Nhung*, 9D, THCS An Khê, Quỳnh Phụ; **Nam Định:** *Trần Anh Tuấn*, 8C, Yên Lợi, Ý Yên; *Vũ Văn Hoan*, 9D, Ngô Đồng; *Phạm Ngọc Anh*, 9A, Giao Hà, Giao Thủy; **Ninh Bình:** *Đặng Duy Hưng, Trịnh Ngọc Linh*, 9B, Trương Hán Siêu, TX Ninh Bình; **Thanh Hóa:** *Lương Ngọc Giáp, Nguyễn Văn Giáp*, 9A, Nhữ Bá Sĩ, Hoằng Hóa; **Nghệ An:** *Mai Thanh Hoàng, Nguyễn Hữu Phún, Nguyễn Vũ Nam Phương*, 9C, Đặng Thai Mai, Vinh; **Hà Tĩnh:** *Nguyễn Thị Thúy Điệp*, 9A, Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ; **Quảng Bình:** *Hoàng Kì, Hà Nhật Sang*, 9B, Hải Đình, Đồng Hới; **Bình Thuận:** *Đặng Quốc Dũng*, 9_1, Hòa Đa, Tây Phong; **Khánh Hòa:** *Nguyễn Hoa Lương*, 9^{14}, Thái Nguyên, Nha Trang; **TP Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Hoàng Hiến, Nguyễn Lâm Hưng, Đỗ Tiến Sĩ*, $8A_1$, Hồng Bàng, Q5; *Nguyễn Đình Khuông*, $8A_1$, Ngô Tất Tố, Q. Phú Nhuận; **An Giang:** *Phạm Ngọc Giao*, 9A, Thủ Khoa Nghĩa, TX Châu Đốc; *Võ Huy Phương*; $9A_1$, Thoại Ngọc Hầu, TX Long Xuyên; **Đồng Tháp:** *Châu Hoàng Huy*, 9T, *Nguyễn Văn Huấn*, $9A_1$, *Trần Minh Tùng*, $9A_2$, THCB Thị xã Cao Lãnh.

TÔ NGUYÊN

Bài T3/259. *Giải phương trình*

$$(x + 3\sqrt{x} + 2)(x + 9\sqrt{x} + 18) = 168x$$

Lời giải. Biến đổi tương đương phương trình đã cho

$$(x + 3\sqrt{x} + 2)(x + 9\sqrt{x} + 18) = 168x$$

$(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}+6) = 168x$

$(x+5\sqrt{x}+6)(x+7\sqrt{x}+6) = 168x$

$(x+6\sqrt{x}+6)^2 = 169x$

$x+6\sqrt{x}+6 = 13\sqrt{x}$ (do $\sqrt{x} \geq 0$ và $x \geq 0$)

$x - 7\sqrt{x} + 6 = 0$

$(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-6) = 0$ (do $x \geq 0$)

Từ đó $x = 1$ hoặc $x = 36$.

Nhận xét. - Bài này không khó nhưng nhiều bạn giải sai, do không loại đi hai giá trị không phải là nghiệm. Đa số các bạn giải bằng cách đặt ẩn phụ.

- Bài này còn có thể biến đổi về dạng

$(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-6)(x+19\sqrt{x}+6) = 0$ và nhận xét

$x+19\sqrt{x}+6 > 0$, từ đó suy ra 2 nghiệm.

- Giải tốt bài này có các bạn :

Sơn La: *Chu Tiến Dũng*, 9T, TTCLC huyện Mai Sơn; **Yên Bái:** *Đỗ Trung Kiên*, 9K, Lê Hồng Phong, Tx Yên Bái; **Thái Nguyên:** *Dương Việt Cường*, $9D_2$, THCS Trung tâm Sông Công, *Nguyễn Trung Kiên*, $9A_1$, Chu Văn An; **Bắc Giang:** *Giáp Ngọc Luyến*, 7A, Nghĩa Trung, Việt Yên, *Đặng Ngọc Dương*, 9A, TT Hiệp Hòa; **Quảng Ninh:** *Phạm Văn Nam*, 8A, TT Đông Triều, *Đỗ Quang Khánh*, $8A_1$ Nguyễn Trãi, Uông Bí; **Hải Phòng:** *Vũ Ngọc Minh, Phạm Đức Hiệp*, 9T, Chu Văn An, *Ngô Thành Sơn*, 9B, Trần Phú, *Bùi Văn Tuấn*, 8A Tự Cường, Tiên Lãng; **Hải Dương:** *Lê Anh Ngọc, Vũ Anh Tuấn*, 8A, Nguyễn Trãi, *Vũ Thành Long*, 9A Nguyễn Trãi, Nam Sách. **Vĩnh Phúc:** *Hoàng Xuân Quang*, 9A, Vĩnh Tường, *Trần Quốc Hội*, 7A Tự Lập, Mê Linh, *Phạm Văn Hùng*, 9B chuyên Yên lạc, *Nguyễn Thị Như Trang*, $9A_1$ Hai Bà Trưng, Mê Linh; **Hà Tây:** *Lê Quyết Thắng*, 9B chuyên Ứng Hòa; **Hà Nội:** *Nguyễn Hoàng Thạch*, 9C, Ngọc Lâm, Gia Lâm, *Ngô Trung Thành, Trương Đức Anh*, 9E, THCS Trưng Vương, *Đinh Nho Tâm*, 7H Trưng Vương, *Lê Thái Hưng*, 8AT chuyên ngữ, 299 Cầu Giấy; **Nam Định:** *Trịnh Anh Quang*, 9A, THCS Nguyễn Hiền, Nam Trực, *Nguyễn Thanh Tuấn*, $9A_2$ Lương Thế Vinh, *Trịnh Minh Đức*, 9B THCS TT Ngô Đồng, *Trần Anh Tuấn*, 8C Yên Lợi, Ý Yên, *Trần Quốc Việt*, 9A THCS Giao Thủy; **Thanh Hóa:** *Lưu Đức Chiến*, 9A Như Bá Sĩ, Hoằng Hóa, *Mai Văn Hà*, 9C, THCS Lê Quý Đôn, Bỉm Sơn; **Nghệ An:** *Nguyễn Ngọc Phi*, 9A THCS Hà Huy Tập, Vinh, *Mai Thanh Hoàng*, 9C Đặng Thai Mai, Vinh; **Hà Tĩnh:** *Lê Tâm*, 8E THCS Kỳ Anh; **Quảng Bình:** *Nguyễn Tuấn Anh*, 9B THCS Hải Đình, *Hoàng Ngọc Tùng*, 9A Nguyễn Hàm Ninh, Quảng Trạch, *Trần Tiến Hoàng*, 9A Gio Linh; **Thừa Thiên - Huế:** *Lê* Đình Bửu, VP huyện ủy Quảng Điền, **Quảng Nam**; Hoàng Anh Quyên, 8^4 Lê Quý Đôn, Tam Kỳ ; **Đà Nẵng:** *Lê Trần Phước Cường*, 9^1, Nguyễn Khuyến; **Phú Yên:** *Nguyễn Huỳnh Tấn Trung*, 9A, Lương Thế Vinh; **Khánh Hòa:** *Nguyễn Hoa Cương, Nguyễn Tôn Bảo, Hà Nguyên Vũ*, 9^{14} Thái Nguyên; **Gia Lai:** *Trần Thị Quý Ngọc*, 9^1 Diên Hồng, Pleiku; **Đắc Lắc:** *Thái Duy Cường*, 9C Nguyễn Du, Buôn Ma Thuột, **Lâm Đồng:** *Nguyễn Thị Thảo Nguyên*, 9C chuyên Lâm Đồng; **Đồng Nai:** *Vũ Xuân Ngọc Tín*, lớp 7, Quang Trung, Tâm Phú, **Tây Ninh:** *Đào Duy Bình*, $8A_5$ Suối Đá, Dương Minh Châu; **Bà Rịa Vũng Tàu:** *Trương Minh Doan*, 9A6 THCS Vũng Tàu; **TP Hồ Chí Minh:** Nguyễn Đình Khuông, 8A1, Ngô Tất Tố, Q. Phú Nhuận, *Trần Vĩnh Hưng*, 9B Nguyễn Du, Gò Vấp; **An Giang:** *Võ Huy Phương*, $9A_1$ Thoại Ngọc Hầu, Long Xuyên, *Phạm Ngọc Giao*, $9A_1$ Thủ Khoa Nghĩa, Châu Đốc; **Đồng Tháp:** *Nguyễn Văn Huấn, Châu Hoàng Huy*, $9A_1$ chuyên ban Cao Lãnh, *Ngô Trí Đạt* lớp 5 trường tiểu học Đội Cung, Vinh, **Nghệ An** cũng giải đúng bài này.

VŨ KIM THỦY

Bài T4/259. *Cho các đường tròn tâm O_1 bán kính R_1 và tâm O_2 bán kính R_2 sao cho tiếp tuyến chung ngoài M_1M_2 vuông góc với tiếp tuyến chung trong N_1N_2 tại điểm A. Gọi tiếp tuyến chung trong thứ hai là P_1P_2. (Các tiếp điểm M_1, N_1, P_1 thuộc đường tròn tâm O_1 và các tiếp điểm M_2, N_2, P_2 thuộc đường tròn tâm O_2). Tính diện tích tam giác AP_1P_2 theo R_1 và R_2.*

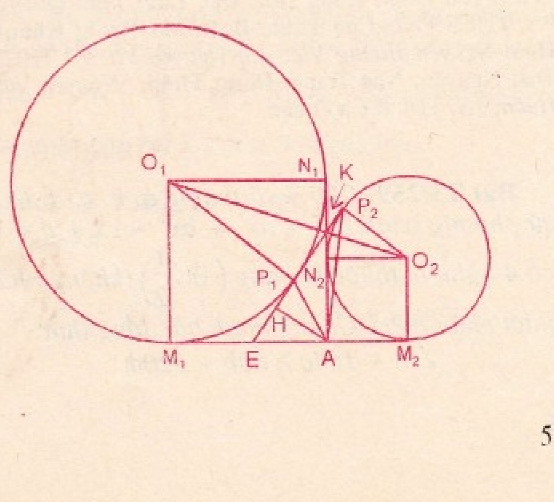
Lời giải.

Do đối xứng qua trục O_1O_2 nên N_1N_2, P_1P_2 và O_1O_2 đồng quy tại K và $N_1N_2 = P_1P_2$. Do $N_1N_2 \perp M_1M_2$ nên $AN_1 = R_1$ và $AN_2 = R_2$. Giả sử $R_1 > R_2$. Ta có $N_1N_2 = P_1P_2 = R_1 - R_2$ (1).

Mặt khác do $O_1N_1 // O_2N_2$ nên $\dfrac{N_2K}{N_1K} = \dfrac{R_2}{R_1} \Rightarrow$ $\dfrac{N_2K}{N_1N_2} = \dfrac{R_2}{R_1+R_2}$. Từ đó và (1) có $P_2K = N_2K = \dfrac{R_2(R_1-R_2)}{R_1+R_2}$ (2).

Từ đó $AK = AN_2 + N_2K =$

$$= R_2 + \frac{R_2(R_1-R_2)}{R_1+R_2} = \frac{2R_1R_2}{R_1+R_2} \quad (3).$$



Gọi E là giao điểm của 2 tiếp tuyến P_1P_2 và M_1M_2. Ta có $M_1M_2 = EM_1 + EM_2 = EM_1 + EP_2 = EM_1 + EP_1 + P_1P_2 = 2EM_1 + P_1P_2$. Mặt khác $M_1M_2 = R_1 + R_2 = AN_1 + AN_2 = 2AN_2 + N_1N_2$. Từ đó và (1) suy ra $EM_1 = AN_2 = R_2 \Rightarrow AE = AM_1 - EM_1 = R_1 - R_2$ (4) $\Rightarrow EM_2 = EA + AM_2 = R_1 - R_2 + R_2 = R_1$.

Từ đó và (3) ta có $EK = EP_2 - P_2K = EM_2 - P_2K = R_1 - \dfrac{R_2(R_1 - R_2)}{R_1 + R_2} = \dfrac{R_1^2 + R_2^2}{R_1 + R_2}$ (5).

Xét ΔAEK vuông tại A với đường cao AH, có $AH.EK = AE.AK$.

Từ (3) (4) (5) có

$$AH = \frac{AE.AK}{EK} = \frac{2R_1R_2(R_1 - R_2)}{R_1^2 + R_2^2}.$$

Từ đó và (1) suy ra

$$S_{AP_1P_2} = \frac{1}{2}AH.P_1P_2 = \frac{R_1R_2(R_1 - R_2)^2}{R_1^2 + R_2^2}$$

Nhận xét. Rất nhiều bạn giải được bài toán này nhưng một số bạn biến đổi dài, một số khác lại sử dụng đến công thức lượng giác ngoài chương trình toán THCS. Các bạn sau đây có lời giải ngắn gọn :

Phú Thọ: *Nguyễn Hùng Cường*, 9A$_1$, THCS Phong Châu, *Vương Quốc Tuấn*, 9B, THCS Việt Trì; **Vĩnh Phúc:** *Trần Hương Xuân, Phạm Quang Nhật*, 9A$_1$, THCS Hai Bà Trưng, Mê Linh; **Hà Nội:** *Nguyễn Hoàng Thạch*, 9C, THCS Gia Lâm, *Nguyễn Đức Nhật*, 9B, THCS Nguyễn Trường Tộ - Đống Đa ; **Hải Dương:** *Ngô Xuân Bách*, 9A, PT Nguyễn Trãi; **Hải Phòng:** *Bùi Văn Tuấn*, 8A, THCS Tự Cường, Tiên Lãng, *Phạm Đức Hiệp*, 9T, THCS Chu Văn An, *Ngô Thành Sơn*, 9B, *Đỗ Ngọc Kiên*, 9D, THNK Trần Phú; **Nam Định:** *Trần Anh Tuấn*, 8C, THCS Yên Lợi, Ý Yên, *Vũ Văn Hoan*, 9D, THCS Ngô Đồng, Giao Thủy; **Ninh Bình:** *Nguyễn Việt Hải, Đặng Duy Hưng*, 9B THCS Trương Hán Siêu, thị xã; **Thanh Hóa:** *Hà Xuân Giáp*, 9C, THCS Lê Quý Đôn, Bỉm Sơn, *Bùi Ngọc Hân*, 9C, THCS Trần Mai Ninh, TP Thanh Hóa; **Nghệ An:** *Nguyễn Việt Quang*, 9C, THCS Đặng Thai Mai, Vinh; **Quảng Bình:** *Hoàng Anh, Hà Nhật Sang*, 9B THCS Hải Đình, Đồng Hới; **Đắc Lắc:** *Trần Quang*, 9A, THCS Phan Chu Trinh, Buôn Ma Thuột; **Khánh Hòa:** *Nguyễn Hoàng Việt, Hà Nguyên Vũ*, 9[14] THCS Thái Nguyên, Nha Trang; **Đồng Tháp:** *Nguyễn Văn Huấn*, 9A$_1$ THCB Cao Lãnh.

VŨ ĐÌNH HÒA

Bài T5/259. *Cho 4 số dương a, b, c, d. Giả sử phương trình $ax^4 - ax^3 + bx^2 - cx + d = 0$ có 4 nghiệm thuộc khoảng $\left(0; \frac{1}{2}\right)$ (không nhất thiết phân biệt). Chứng minh bất đẳng thức :*

$21a + 164c \geq 80b + 320d$.

Lời giải. (của bạn *Trần Tuấn Anh*, 11 Toán, PTTH Lê Quý Đôn, Nha Trang, **Khánh Hòa**)

Giả sử 4 nghiệm của phương trình là x_1, x_2, x_3, x_4 thuộc $\left(0; \frac{1}{2}\right)$. Theo định lí Vi-et ta có :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = \dfrac{b}{a} \\ x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = \dfrac{c}{a} \\ x_1x_2x_3x_4 = \dfrac{d}{a} \end{cases}$$

Vì $a > 0$ nên bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với :

$$21 + 164\frac{c}{a} \geq 80\frac{b}{a} + 320\frac{d}{a}.$$

$\Leftrightarrow 21 + 164(x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4)$
$\geq 80(x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4)$
$= 320x_1x_2x_3x_4$ (*)

Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có :

$(1-2x_1)(1-2x_2)(1-2x_3) \leq$

$$\leq \left(\frac{1 - 2x_1 + 1 - 2x_2 + 1 - 2x_3}{3}\right)^3 = \left(\frac{1 + 2x_4}{3}\right)^3$$

$\Rightarrow 27(1-2x_1)(1-2x_2)(1-2x_3) \leq (1 + 2x_4)^3$ (1)

Tương tự :

$27(1-2x_1)(1-2x_2)(1-2x_4) \leq (1 + 2x_3)^3$ (2)
$27(1-2x_1)(1-2x_3)(1-2x_4) \leq (1 + 2x_2)^3$ (3)
$27(1-2x_2)(1-2x_3)(1-2x_4) \leq (1 + 2x_1)^3$ (4)

Nhân từng vế của (1), (2), (3), (4) và rút gọn ta có :

$81(1-2x_1)(1-2x_2)(1-2x_3)(1-2x_4)$
$\leq (1 + 2x_3)(1+2x_4)(1+2x_1)(1+2x_2)$

Khai triển và rút ta có bất đẳng thức (*).

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = \dfrac{1}{4}$

$\Leftrightarrow \dfrac{b}{a} = \dfrac{3}{8}; \dfrac{c}{a} = \dfrac{1}{16}; \dfrac{d}{a} = \dfrac{1}{256}.$

Nhận xét.

* Một số bạn mắc sai lầm khi lí luận : $f(x)$ có 4 nghiệm thuộc $\left(0; \frac{1}{2}\right)$ nên $f(0).f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$! Hoặc nhầm lẫn : $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1 = \frac{b}{a}$ (!). Từ những sai lầm như vậy, các bạn cho những lời giải ngắn gọn, thậm chí mạnh hơn.

* Bạn *Tô Minh Hoàng* và *Đào Văn Huy*, 10T, PTTH Nguyễn Trãi, **Hải Dương** cho lời giải bằng cách

xây dựng dãy số để đánh giá một hàm 4 đối số x_1, x_2, x_3, x_4 và cho kết quả đúng.

Các bạn có lời giải tốt là : **Hải Dương:** *Phạm Quốc Hoàng*, 11TT và *Phạm Hồng Quân*, 11 Toán, PTTH Nguyễn Trãi; **Quảng Trị:** *Lê Anh Tuấn* và *Trần Việt Anh*, 10 Toán, PTTH chuyên Lê Quý Đôn; **Bắc Ninh:** *Tạ Hoàng Hải*, 11 Toán, PTTH năng khiếu Hàn Thuyên; **Thừa Thiên - Huế:** *Trần Hoàng Đức Chính*, 12 chuyên Toán, trường ĐHKH Huế.

LÊ THỐNG NHẤT

Bài T6/259. *Cho hàm số $f.\mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ thỏa mãn: phương trình $f(4x) + 1999f(2x) = 2000f(x)$ với mọi $x \in \mathbf{R}^+$*

Chứng minh rằng tồn tại số thực $k > 1$ để $f(x) = f(kx)$ với mọi $x \in \mathbf{R}^+$.

Lời giải. (của các bạn *Trần Hoàng Đức Chính*, 12T ĐHKH Huế, *Phạm Ngọc Lợi*, *Phạm Hồng Quân*, 11T Nguyễn Trãi, **Hải Dương**, *Trần Tuấn Anh*, 11T, Lê Quý Đôn, Nha Trang, **Khánh Hòa**).

Với mỗi $x \in \mathbf{R}^+$, đặt $f(2^n x) = u_n$, $n = 0, 1, 2,...$ Từ điều kiện

$$f(4x) + 1999f(2x) = 2000f(x)$$

dễ dàng suy ra bằng quy nạp

$$f(2^{n+2}x) + 1999f(2^{n+1}x) = 2000f(2^n x).$$

hay $u_{n+2} + 1999u_{n+1} - 2000u_n = 0$ $(n = 0, 1, ...)$

Phương trình đặc trưng của dãy số

$X^2 + 1999X - 2000 = 0$ có nghiệm $X_1 = 1$, $X_2 = -2000$. Từ đó ta có

$$u_n = aX_1^n + bX_2^n = a + b(-2000)^n.$$

Vì $f(x) > 0$ nên $u_n > 0$, $\forall n \geq 0$.

- Nếu $b > 0$ thì với n lẻ và đủ lớn ta có $u_n < 0$, không xảy ra.

- Nếu $b < 0$ thì với n chẵn và đủ lớn ta có $u_n < 0$, không xảy ra.

Vậy $b = 0$ và $u_n = u_o$ hay

$$f(2^n x) = f(x)\ \forall n = 1, 2,...\ \forall x \in \mathbf{R}.$$

Nhận xét. Đây là một bài toán cơ bản loại khó, nên có rất ít lời giải đúng. Đa số các loại bạn đều chưa thành thạo sử dụng phương trình sai phân.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T7/259. *Cho ba dãy số (x_n), (y_n), (z_n) $(n = 0, 1, 2, ...)$ được xác định như sau : x_o, y_o, z_o là các số dương cho trước,*

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{y_n z_n},\ y_{n+1} = y_n + \frac{1}{z_n x_n},\ z_{n+1} = z_n + \frac{1}{x_n y_n}$$

với mọi $n \geq 0$.

Tìm tất cả các số thực a để $x_n > a\sqrt[3]{n}$ với mọi n.

Lời giải. Từ giả thiết suy ra : $x_n > 0$, $y_n > 0$, $z_n > 0$ và $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{z_{n+1}}{z_n} = 1 + \frac{1}{x_n y_n z_n}$ với mọi $n \geq 0$.

Do đó $\frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} = \frac{x_n}{y_n} = ... = \frac{x_o}{y_o}$,

$\frac{x_{n+1}}{z_{n+1}} = \frac{x_n}{z_n} = ... = \frac{x_o}{z_o}$.

Bởi vậy $x_{n+1} = x_n + \left(\frac{x_n}{y_n}\right).\left(\frac{x_n}{z_n}\right).\frac{1}{x_n^2}$

$$= x_n + \frac{u}{x_n^2} \text{ với mọi } n \geq 0 \qquad (1),$$

trong đó ta kí hiệu $u = \frac{x_o^2}{y_o z_o}$

Từ (1) ta có $0<x_o<x_1<x_2<...$, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$, do phương trình giới hạn $x = x + \frac{u}{x^2}$ không có nghiệm hữu hạn $x > 0$. Cũng từ (1) suy ra

$$x_{n+1}^3 = x_n^3 + 3u + 3.\frac{u^2}{x_n^3} + \frac{u^3}{x_n^6} \qquad (2)$$

$$> x_n^3 + 3u > ... > x_o^3 + 3(n+1)u > 3(n+1)u,$$

Tức là $x_n > \sqrt[3]{3u}.\sqrt[3]{n}$ với mọi $n \geq 0$.

Do đó a thỏa mãn yêu cầu của bài toán nếu $a \leq \sqrt[3]{3u}$.

Ta sẽ chứng tỏ rằng nếu $a > \sqrt[3]{3u}$ thì sẽ tồn tại $n \in \mathrm{N}$ mà $a\sqrt[3]{n} > x_n$ (3)

Thật vậy xét với $\varepsilon > 0$ mà $a > \sqrt[3]{3u+\varepsilon}$, từ (2), kết hợp với $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$, suy ra tồn tại $m \in N$ sao cho

$$x_{n+1}^3 < x_n^3 + 3u + \varepsilon \text{ với mọi } n \geq m.$$

Hệ quả là

$$\frac{x_n^3}{n} \leq \frac{x_m^3 + (3u+\varepsilon)(n-m)}{n} \text{ với mọi } n \geq m.$$

Mặt khác từ

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_m^3 + (3u+\varepsilon)(n-m)}{n} = 3u + \varepsilon < a^3, \text{ nên}$$

tồn tại $n \in \mathrm{N}$ mà $\frac{x_n^3}{n} < a^3$, tức là có (3).

Vậy các số thực a cần tìm là tất cả các số

$$a \leq \sqrt[3]{3u} = \sqrt[3]{\frac{3x_o^2}{y_o z_o}}$$

Nhận xét. Đây là bài toán tương đối lạ với nhiều học sinh. Có gần 50 bạn học sinh gửi lời giải của mình tới Tòa soạn. Hầu hết các bạn đều có suy nghĩ giống nhau trừ chứng minh khẳng định (3).

Các bạn sau có lời giải chặt chẽ hơn cả :

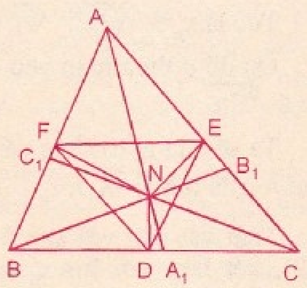
Hải Dương: *Phạm Ngọc Lợi*, 11 Toán, PTNK ; **Thanh Hóa:** *Phan Văn Tiến*, 10 Toán, PTTH Lam Sơn; **Nghệ An:** *Hoàng Minh Sơn*, $11G_1$, PTTH Nghi Lộc; **Quảng Trị:** *Trần Việt Anh*, 10 Toán, PTTH Lê Quý Đôn; **Thừa Thiên - Huế:** *Huỳnh Công Phước*, $11T_1$, Quốc học Huế; **Bà Rịa - Vũng Tàu:** *Lương Anh Hùng*, $12A_1$, PTTH Vũng Tàu.

NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T8/259. *Cho tam giác ABC. Các đường tròn bàng tiếp của tam giác đó tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại A_1, B_1, C_1. Các đường thẳng AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy tại điểm N. Gọi D, E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của N lên BC, CA, AB. Gọi R và r là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác ABC theo thứ tự. Chứng minh rằng :*

$$\frac{S_{DEF}}{S_{ABC}} = \frac{r}{R}\left(1 - \frac{r}{R}\right).$$

Lời giải 1. (Dựa theo *Trần Tuấn Anh*, 11T, Lê Quý Đôn, Nha Trang, **Khánh Hòa**, *Phạm Quốc Hoàng*, 11 Toán, PTTH chuyên Nguyễn Trãi, **Hải Dương** và một số bạn khác).



Dễ dàng tính được : $AB_1 = BA_1 = p-c$, $BC_1 = CB_1 = p-a$ và $CA_1 = AC_1 = p-b$. Áp dụng định lí Mênêlauyt vào tam giác ABA_1 và cát tuyến CNC_1 ta được :

$$\frac{\overline{CB}}{\overline{CA_1}} \cdot \frac{\overline{NA_1}}{\overline{NA}} \cdot \frac{\overline{C_1A}}{\overline{C_1B}} = 1.$$

Từ đó suy ra : $\frac{\overline{NA_1}}{\overline{NA}} = -\frac{p-a}{a}$,

vì $N \in [AA_1] \Rightarrow$

$$\frac{NA_1}{AN} = \frac{p-a}{a} \Rightarrow \frac{NA_1}{AA_1} = \frac{p-a}{p}; \quad (1)$$

Mặt khác, lại có : $\frac{NA_1}{AA_1} = \frac{ND}{h_a}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra (đặt $S = S_{ABC}$)

$$ND = \frac{(p-a)h_a}{p} = \frac{2S(p-a)}{ap}$$

Tương tự, ta được :

$$NE = \frac{2S(p-b)}{bp} \text{ và } NF = \frac{2S(p-c)}{cp}$$

và do đó :

$$S_{NEF} = \frac{1}{2}NE.NF\sin(\pi - A) =$$

$$= \frac{1}{2}NE.NF\sin A = \frac{S(p-b)(p-c)a^2}{4p^2R^2}.$$

Từ đó đặt $S' = S_{DEF}$ ta được :

$$\frac{S'}{S} = \frac{(p-b)(p-c)a^2 + (p-c)(p-a)b^2 + (p-a)(p-b)c^2}{4p^2R^2}$$

$$= \frac{T}{4p^2R^2} \quad (3)$$

Thay $2p = a+b+c$, $abc = 4RS$ và $S = pr$, vào tử số T của (4) ta được :

$$4T = a^2(c+a-b)(a+b-c) + b^2(a+b-c)(b+c-a) + c^2(b+c-a)(c+a-b)$$

$$= a^2[a^2-(b-c)^2] + b^2[b^2 - (c-a)^2] + c^2[c^2-(a-b)^2]$$

$$= a^4+b^4+c^4 - 2(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2) + 2abc(a+b+c)$$

$$= 4pacb - 16S^2 = 4p(4RS) - 16S^2 = 16p^2r(R-r)$$

Cuối cùng, thay vào (3), ta được

$$\frac{S'}{S} = \frac{r(R-r)}{R^2} = \frac{r}{R}\left(1 - \frac{r}{R}\right)$$

Lời giải 2. (của một số bạn). Trước hết, chứng minh hoặc sử dụng hệ thức $\frac{S'}{S} = \frac{1}{4}\left|1 - \frac{d^2}{R^2}\right|$ đã được nêu ra và chứng minh trong số 251 (5/1998) tạp chí THTT. Trong bài toán này $d = ON$ biểu thị khoảng cách từ tâm O đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC đến điểm Naghen N, $S = s(ABC)$ và $S' = s(DEF)$.

Sau đó chứng minh rằng $ON = R-2r$. Có thể có nhiều cách chứng minh hệ thức này, chẳng hạn sử dụng phương pháp vectơ :

$$(p-b)\overrightarrow{A_1B} + (p-c)\overrightarrow{A_1C} = \vec{0}$$

Từ đó và hai hệ thức tương tự thiết lập được hệ thức sau :

$$(p-a)\overrightarrow{NA} + (p-b)\overrightarrow{NB} + (p-c)\overrightarrow{NC} = \vec{0}$$

$\Leftrightarrow p\overrightarrow{ON} = (p-a)\overrightarrow{OA} + (p-b)\overrightarrow{OB} + (p-c)\overrightarrow{OC}$ với O bất kì.

Chọn O trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC để $OA = OB = OC = R$ thì tính được ON theo a, b, c và R, và cuối cùng suy ra $ON^2 = (R-2r)^2$. Nhưng $R \geq 2r$ nên $ON = R-2r$.

Nhận xét. 1) Đa số các bạn đều tính S' bằng cách thiết lập các hệ thức (3) hoặc (4), tuy nhiên lại biểu thị các đại lượng $p-a$, $p-b$, $p-c$ và cả S theo R, r và các hàm lượng giác của các góc hoặc nửa góc A, B, C của tam giác ABC thành thử phải huy động khá nhiều hệ thức lượng khác nhau liên quan đến các yếu tố trong hình tam giác.

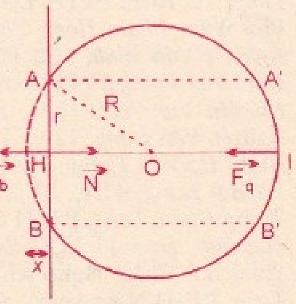
2) Để tính ON^2, một số bạn còn sử dụng cả các công thức Lagrang, Jacobi (thậm chí đến cả định lí Ptolémé rất ít liên quan đến bài toán). Ngoài ra, nhiều bạn viện dẫn định lí Van-Oben : $\frac{AN}{NA_1} = \frac{AB_1}{B_1C} + \frac{AC_1}{C_1B} = \frac{a}{p-a}$, thì việc thiết lập hệ thức (1) có phần nhanh hơn.

3) Với bài toán nào cũng vậy, lời giải hay hơn cả là lời giải không những ngắn gọn nhất, mà còn là sử dụng số kiến thức tối thiểu, càng ít vượt ra ngoài phạm vi SGK càng tốt. Các bạn sau đây có lời giải tốt :

Hà Tây: *Trần Ngọc Diệp*, 10T1, PTTH Nguyễn Huệ, Hà Đông ; **Hải Dương:** *Phạm Hồng Quân*, 11T, *Đào Văn Huy*, 10T, PTTH Nguyễn Trãi; **Hải Phòng:** *Lê Bảo Anh*, 10A_2, PTTH Ngô Quyền; **Quảng Trị:** *Lê Anh Tuấn*, 10T, Lê Quý Đôn; **Khánh Hòa:** *Lê Thị Khánh Hiền*, 10T, PTTH Lê Quý Đôn, Nha Trang

NGUYỄN ĐĂNG PHẤT

Bài L1/259. *Khi ta chạm nhẹ vào tường một quả bóng, nó bị biến dạng như hình vẽ. Khi đó độ biến dạng x của quả bóng là rất nhỏ so với bán kính R của nó và có thể coi gần đúng là áp suất p của không khí trong quả bóng không thay đổi trong quá trình va chạm. Bỏ qua độ đàn hồi của vỏ quả bóng. Hãy xác định thời gian va chạm giữa bóng và tường.*



Hướng dẫn giải.

Khi bóng va chạm vào tường, có 3 lực tác dụng vào bóng là trọng lực P, phản lực vuông góc N của tường và áp lực của khí quyển F_q. Xét theo phương ngang, trong thời gian va chạm, áp dụng định luật II Niutơn ta có :

$$F_q - N = mx'' \qquad (1).$$

Kí hiệu $\vec{F_b}$ là áp lực của bóng lên tường (bỏ qua độ đàn hồi của vỏ bóng), ta có : $F_b = pS = p.\pi r^2$ (S là diện tích bóng tiếp xúc với tường, r là bán kính của hình tròn tiếp xúc); suy ra $N = F_b = p.\pi.r^2$. Kí hiệu p_o là áp suất khí quyển, xét các lực $\vec{\Delta f}$ do khí quyển tác dụng lên các phần tử diện tích Δs, ta thấy $\vec{\Delta f}$ vuông góc với mặt Δs và có độ lớn $\Delta f = p_o.\Delta s$. Dễ dàng thấy rằng các áp lực khí quyển tác dụng lên các phần AA' và BB' của bóng triệt tiêu nhau, chỉ còn lại áp lực tác dụng lên chỏm cầu $A'IB'$ của bóng, hợp lực của các lực này chính là F_q có hướng IH và có độ lớn $F_q = p_o.\pi r^2$. Như vậy $F_q - N = \pi r^2(p_o-p)$. Mặt khác ta có : $r^2 = x(2R-x) \approx 2Rx$ (vì $x << R$). Do đó $F_q - N = 2\pi R(p_o-p)x$. Thay vào (1) ta được :

$$x'' + \frac{2\pi R(p-p_o)}{m}x = 0$$: bóng dao động điều hòa với chu kì :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2\pi R(p-p_o)}}.$$

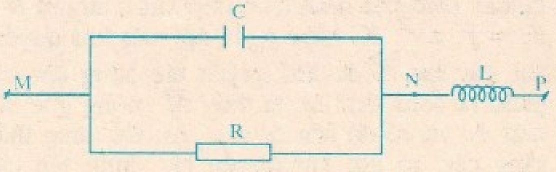
Suy ra thời gian bóng va chạm vào tường :

$$t = \frac{T}{2} = \sqrt{\frac{\pi m}{2R(p-p_o)}}.$$

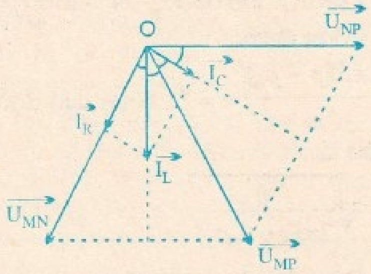
Nhận xét. Các em có lời giải đầy đủ và đúng : *Đặng Trần Trí*, 11CL, PTTH Lê Hồng Phong, **TP Hồ Chí Minh**; *Lương Minh Đức*, 11 Lí, *Võ Đình Khánh*, *Trần Tiến Dũng*, 11A_3, PTTH Phan Bội Châu, Vinh, **Nghệ An**; *Nguyễn Văn Đống*, 12A_1, THCB Đào Duy Từ, **Quảng Bình**; *Đặng Ngọc Hiến*, 11A_2, P Lê Quý Đôn, **TP Đà Nẵng**; *Lê Thị Thu Phương*, 10A_6, PTTH chuyên Vĩnh Phúc, **Vĩnh Phúc**; *Hồng Ngọc Tân*, 12A_2, TH chuyên Trà Vinh, **Trà Vinh**; *Nguyễn Thành Trung*, 11CL, PTTH chuyên Lương Thế Vinh, Biên Hòa, **Đồng Nai**; *Nguyễn Công Toàn*, B011A chuyên Lí, ĐHKHTN, ĐHQG **Hà Nội**; *Dương Quốc Đạt*, 11A_4, PTTH Hoàng Lê Kha, **Tây Ninh**; *Nguyễn Thị Hoàng Phương*, 11C, PTTH Duy Tiên B, **Hà Nam**.

MAI ANH

Bài L2/259. *Một mạch điện được mắc như hình vẽ. Cho biết : Hiệu điện thế giữa hai đầu cuộn cảm được biểu diễn bằng phương trình $u_{NP} = 40\sqrt{6}\sin\omega t$; cường độ dòng điện hiệu dụng qua điện trở R bằng 1A; cường độ dòng điện qua cuộn cảm nhanh pha $\frac{\pi}{6}$ so với hiệu điện thế giữa M và N, nhưng chậm pha $\frac{\pi}{6}$ so với hiệu điện thế giữa M và P. Tính U_{MN}, U_{MP}, R, Z_L, Z_C và lập phương trình biểu diễn u_{MP}, i_R, i_C và i_L.*



Hướng dẫn giải. Dùng phương pháp giản đồ vectơ. Lần lượt vẽ U_{NP}, $\vec{I_L}$ (vuông góc với $\vec{U_{NP}}$), $\vec{U_{MN}}$ (hợp với $\vec{I_L}$ góc $\frac{\pi}{6}$), $\vec{I_R}$, $\vec{I_C}$ (vuông



góc với $\vec{I_R}$), $\vec{U_{MP}}$ (hợp với $\vec{I_L}$ góc $\frac{\pi}{6}$ và $\vec{U_{MP}} = \vec{U_{NP}} + \vec{U_{MN}}$). Nhận xét : các vectơ liên tiếp hợp với nhau góc $\frac{\pi}{6}$. Từ hình vẽ suy ra :

$$U_{MN} = U_{NP} = U_{MP} = \frac{40\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = 40\sqrt{3}\text{ (V)}.$$

Từ đó

$$R = \frac{U_{MN}}{I_R} = 40\sqrt{3}\Omega; \quad I_C = I_R\, tg\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}(A);$$

$$Z_C = \frac{U_{MN}}{I_C} = 120\Omega; \quad I_L = \frac{I_R}{\cos\frac{\pi}{6}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\,(A);$$

$$Z_L = \frac{U_{NP}}{I_L} = 60\Omega;$$

Và $u_{MN} = 40\sqrt{6}\sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)$ (V);

$$u_{MP} = 40\sqrt{6}\,\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right)(V);$$

$$i_c = \sqrt{\frac{2}{3}}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{6}\right)(A);$$

$$i_L = 2\sqrt{\frac{2}{3}}\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)(A);$$

$$i_R = \sqrt{2}\sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)(A).$$

Nhận xét. Các em có lời giải đầy đủ và đúng : *Trần Quang Long*, 12A$_1$, PTTH Triệu Sơn II, *Hoàng Trường Minh*, 12A, PTTH Hoàng Lệ Kha, Hà Trung, *Lê Xuân Việt*, 11H, PTTH Hoằng Hóa II, **Thanh Hóa**; **Thanh Hóa**; *Trần Văn Thật, Hoàng Minh Tuấn*, 11A$_3$, *Đỗ Văn Bảo, Đào Nhật Tân*, 12A$_1$, PTTH chuyên, *Nguyễn Việt Hùng, Phạm Văn Yên*, 12A$_2$, PTTH Hai Bà Trưng, Mê Linh, PTTH chuyên **Vĩnh Phúc**; *Phạm Văn Lăng*, 12A$_2$, PTTH Giao Thủy A, *Trần Tuấn Anh*, 12A, PTTH Lương Thế Vinh, Vụ Bản, **Nam Định**; *Nguyễn Hồ Hữu Ngọc*, 12A$_4$, PTTH Hoàng lê Kha; *Đặng Ngọc Hiển*, 11A$_2$, Lê Quý Đôn, Đà Nẵng; *Lương Đức Hùng*, 29 Hoàng Văn Thụ, Lê Lợi, **Bắc Giang**; *Vũ Thị Như*, PTTH Bắc Đông Quan, Đông Hưng, **Thái Bình**; *Nguyễn Huy Việt*, 11A$_1$, PTTH số 2, Gia Lương, *Nguyễn Đăng Ái*, 12A, PTTH Thuận Thành I, **Bắc Ninh**; *Hồng Ngọc Tân*, 12A$_2$, chuyên **Trà Vinh**; *Nguyễn Bá Lân, Bùi Trung Hiếu*, 12 Lí Hóa, *Nguyễn Duy Phong*, 12 Lí, trường chuyên Lê Khiết, **Quảng Ngãi**; *Vũ Duy Thịnh*, 12A, PTTH Kim Bảng A, **Hà Nam**; *Hàng Quốc Hoa*, 12T, *Nguyễn Thanh Ngọc Tùng*, 12 Toán, PTTH Lương Văn Chánh, Tuy Hòa, **Phú Yên**; *Phạm Hồng Phúc*, 12A, PTTH Chí Linh, *Nguyễn Văn Bình*, 12I, PTTH Tứ Kỳ, **Hải Dương**; *Đinh Văn Trung* 11 Lí I, chuyên Nguyễn Du, **Đắc Lắc**; *Nguyễn Việt Anh*, 12A$_1$, PTTH Hạ Hòa, **Phú Thọ**; *Nguyễn Văn Đông*, 12A$_1$, THCN Đào Duy Từ, **Quảng Bình**; *Hồ Văn Tường*, 12A$_1$, PTTH Bến Tre, **Bến Tre**; *Vũ Hải Đăng*, 11A$_1$, PTTH chuyên Yên Bái; *Nguyễn Trọng Khoa*, 12A$_2$, PTTH Chu Văn An, **Ninh Thuận**; *Đào Anh Đức*, 11 Lí, *Trần Tiến Dũng*, 11A$_3$, PTTH Phan Bội Châu, **Nghệ An**; *Nguyễn Bỉnh Khiêm*, 12 Toán, PTTH Năng khiếu, **Sơn La**; *Thái Quang Nhật*, 11A$_1$, PTTH Trần Hưng Đạo, **Bình Thuận**.

MAI ANH

CÁC BÀI TOÁN KỈ NIỆM 35 NĂM TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

T1/THCS. *Giả sử a, b, c là các số thực thỏa mãn :* $|a(b-c)| > |b^2-ac| + |c^2-ab|$ *và phương trình* $ax^2 + bx + c = 0$ *có nghiệm thực.*

Chứng minh rằng phương trình trên có nghiệm thực dương nhỏ hơn $\sqrt{3} - 1$.

NGUYỄN MINH ĐỨC

(*Hà Nội*)

Lời giải. Từ giả thiết dễ thấy $a \neq 0$.

• Gọi s, t là hai nghiệm của phương trình $ax^2+bx+c = 0$ (s có thể bằng t). Từ giả thiết ta có

$$\left|\frac{b}{a} - \frac{c}{a}\right| > \left|\left(\frac{b}{a}\right)^2 - \frac{c}{a}\right| + \left|\left(\frac{c}{a}\right)^2 - \frac{b}{a}\right|$$

Áp dụng định lí Viét suy ra

$|s+t+st| > |s^2+t^2+st| + |s^2t^2+s+t| \geq st+s+t$

Do đó $0 > s+t+st$

Suy ra $-s-t-st > s^2+t^2+st+s^2t^2+s+t \Rightarrow$

$$3 > (s+1)^2 + (t+1)^2 + (st+1)^2 \qquad (*)$$

• Ta sẽ chứng minh trong 2 số s, t có ít nhất một số dương. Thật vậy, giả sử trái lại $s \leq 0$, $t \leq 0$ dễ thấy a, b, c cùng dấu. Từ giả thiết ta có $|a(b-c)| > |b^2-ac| + |-c^2+ab| \geq |b^2-ac-c^2+ab| = |(a+b+c)(b-c)|$. Vô lí (vì a, b, c cùng dấu).

Không mất tổng quát giả sử $s > 0$, từ (*) suy ra $3 > (s+1)^2$

Từ đó $\sqrt{3} - 1 > s > 0$ (đpcm).

Nhận xét. Giải tốt bài này có các bạn

Quảng Ninh: *Đỗ Quang Khánh*, 8A$_{1}$, Nguyễn Trãi, Uông Bí; **Hà Tây:** *Lê Tuấn Thuận*, 9A, Ngô Sĩ Liên, Chương Mĩ; **Hải Dương:** *Nguyễn Tuấn Dương*, 9A, Nguyễn Trãi; **Hà Nội:** *Đinh Thanh Tú*, 8T, Ngô Sĩ Liên; **Nam Định:** *Phùng Văn Thắng*, 9D THCS Ngô Đồng, Giao Thủy; **Thanh Hóa:** *Mai Văn Hà*, 9C, Lê Quý Đôn, Bỉm Sơn; **Khánh Hòa:** *Nguyễn Hoa Cương*, 9^{14}, Thái Nguyên, Nha Trang.

VKT

T2/THCS. *Cho đa giác đều $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ và điểm M bất kì. Chứng minh rằng $MA_1 + MA_3 + MA_5 + MA_7 \geq MA_2 + MA_4 + MA_6$*

NGUYỄN MINH HÀ
(Hà Nội)

Lời giải. Trước hết ta chứng minh *Định lí Ptôlêmê :*

Cho ΔABC và điểm D trên cùng một mặt phẳng thì

$$AB.CD + AD.BC \geq AC.BD$$

Đẳng thức xảy ra khi $ABCD$ là tứ giác nội tiếp, nghĩa là khi D thuộc cung AC không chứa B của đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

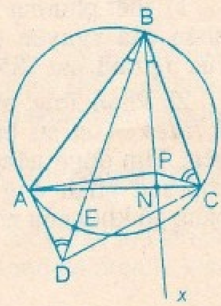
Chứng minh định lí. Với 4 điểm A, B, C, D không thẳng hàng bao giờ cũng có một điểm thuộc góc tạo bởi 3 điểm còn lại. Không mất tính tổng quát giả sử điểm D thuộc góc ABC (xem hình vẽ). Dựng tia Bx trong góc ABC sao cho $\angle CBx = \angle ABD$ (1)

Trên tia Bx lấy điểm P sao cho $\angle BCP = \angle ADB$ (2).

Từ (1), (2) suy ra $\Delta ABD \sim \Delta PBC$

$$\Rightarrow \frac{AD}{PC} = \frac{BD}{BC} = \frac{AB}{PB} \quad (3)$$

Từ (1) có $\angle ABP = \angle DBC$. Kết hợp điều này với (3) suy ra $\Delta ABP \sim \Delta DBC \Rightarrow \frac{AP}{DC} = \frac{AB}{DB}$ (4)



Từ (3), (4) có :

$AB.CD + AD.BC = DB.AP + BD.PC$

Do $AP+PC \geq AC$ nên có $AB.CD + AD.BC \geq BD.AC$.

Đẳng thức xảy ra khi P trùng với giao điểm N của AC và $Bx \Rightarrow D$ trùng với giao điểm E của tia BD với đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Lúc đó $AB.CE + AE.BC = AC.BE$.

Chứng minh bài toán. Đặt $A_1A_2 = a$, $A_1A_3 = b$, $A_1A_4 = c$. Áp dụng định lí trên cho $\Delta A_1A_2A_3$ và điểm M được

$$(MA_1 + MA_3).a \geq MA_2.b \qquad (5)$$

Áp dụng định lí trên cho $\Delta A_5A_6A_7$ và điểm M được

$$(MA_5 + MA_7).a \geq MA_6.b \qquad (6)$$

Từ (5), (6) có

$$(MA_1+MA_3+MA_5+MA_7).a \geq (MA_2+MA_6).b \quad (7)$$

Áp dụng định lí trên cho $\Delta A_2A_4A_6$ và điểm M được

$$(MA_2 + MA_6).b \geq MA_4.c \qquad (8)$$

Từ (7), (8) có

$$(MA_1+MA_3+MA_5+MA_7).a \geq MA_4.c \quad (9)$$

Từ (7), (9) có

$$(MA_1+MA_3+MA_5+MA_7).a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq MA_2 + MA_4 + MA_6 \qquad (10)$$

Áp dụng định lí trên cho tứ giác nội tiếp $A_1A_3A_4A_5$ có $ab + ac = bc \Leftrightarrow a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) = 1$.

Thay vào (10) được

$$MA_1 + MA_3 + MA_5 + MA_7 \geq MA_2 + MA_4 + MA_6$$

Đẳng thức xảy ra khi các đẳng thức ở (5) (6) (8) xảy ra nghĩa là khi M thuộc cung nhỏ A_1A_7 của đường tròn ngoại tiếp đa giác $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$.

Nhận xét. Một số bạn không xét khi nào đẳng thức xảy ra, một số khác không lập luận mà cho rằng đẳng thức xảy ra khi M trùng với A_1 hoặc A_7, hoặc khi M nằm trên đường tròn ngoại tiếp đa giác.

Các bạn sau đây có lời giải tốt :

Hải Dương: *Lê Đình Tiến, Nguyễn Tuấn Dương, Ngô Xuân Bách*, 9A Nguyễn Trãi, TP Hải Dương, *Vũ Thành Long*, 9A, THCS Nguyễn Trãi, Nam Sách.

Hải Phòng: *Vũ Nhân*, 8T, PTNK Trần Phú, *Phạm Đức Hiệp, Vũ Ngọc Minh*, 9T, THCS Chu Văn An; **Hà Tây:** *Lê Tuấn Thuận*, 9A, THCS Ngô Sĩ Liên, Chương Mỹ; **Nam Định:** *Phùng Văn Thắng*, 9D, THCS Ngô Đồng, Giao Thủy; **Hà Tĩnh:** *Lê Tâm*, 8E, THCS Kỳ Anh.

VIỆT HẢI

ĐỀ RA KÌ NÀY

CÁC LỚP THCS

Bài T1/263. Tìm giá trị của m để hệ phương trình sau có đúng 2 nghiệm :

$$\begin{cases}(x+y)^8 = 256 \\ x^8 + y^8 = m+2\end{cases}$$

VÕ GIANG GIAI
(Tp Hồ Chí Minh)

Bài T2/263. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$\frac{x^6}{x^3+y^3} + \frac{y^6}{y^3+z^3} + \frac{z^6}{z^3+x^3}$$

trong đó x, y, z là các số dương thỏa mãn điều kiện

$$xy\sqrt{xy} + yz\sqrt{yz} + zx\sqrt{zx} = 1.$$

HUỲNH TẤN CHÂU
(Phú Yên)

Bài T3/263. Cho hình vuông $ABCD$ với tâm E. Gọi M là trung điểm của AB. Trên các cạnh BC, CD lần lượt lấy hai điểm G, H sao cho hai đường thẳng MG và AH song song với nhau. Hãy tính số đo góc GEH.

TRẦN HÀ
(Hải Phòng)

Bài T4/263. Cho tam giác ABC với các đường trung tuyến AM, BN, CP. Chứng minh rằng :

$$AM + BN + CP \le 4R + r$$

trong đó R và r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của tam giác.

NGUYỄN MINH HÀ
(Hà Nội)

CÁC LỚP THPT

Bài T5/263. Cho dãy số (x_n) ($n = 0, 1, 2, \ldots$) được xác định bởi : $x_o = 1$,

$$x_{n+1} = \frac{2}{x_n} + \frac{\sqrt{3}}{x_n^2} \text{ với mọi } n = 0, 1, 2, \ldots$$

Hỏi khi $n \to \infty$ thì dãy số đó có giới hạn hữu hạn không ?

NGUYỄN THANH HẢI
(Hà Nội)

Bài T6/263. Tìm các giá trị a, b nguyên sao cho hai trong số các nghiệm thực của phương trình sau có tích là một số nguyên khác 1 :

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$$

PHẠM NGỌC BỘI
(Nghệ An)

Bài T7/263. Cho tam giác ABC. Tìm điều kiện cần và đủ đối với đường thẳng d để ba đường thẳng đối xứng với d qua các trục BC, CA, AB là đồng quy.

ĐOÀN KIM SANG
(Yên Bái)

Bài T8/263. Cho tứ diện $ABCD$. Tìm những điểm M sao cho các trọng tâm của các tứ diện $MBCD$, $MCDA$, $MDAB$, $MABC$ cách đều tâm của hình cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$.

NGUYỄN MINH PHƯƠNG
(Phú Thọ)

CÁC ĐỀ VẬT LÝ

Bài L1/263. Một con lắc lò xo, gồm một vật nặng bằng sắt khối lượng $m_1 = 200g$ gắn vào một lò xo khối lượng không đáng kể có độ cứng $k = 25N/m$, có thể dao động không ma sát trên một trục $x'x$ nằm ngang.

Gắn vật nặng m_1 nói trên với một nam châm nhỏ khối lượng $m_2 = 50g$ (phương bắc - nam của nam châm dọc theo trục $x'x$), rồi đẩy khối hai vật $m_1 + m_2$ khỏi vị trí cân bằng một đoạn $x_o = 1cm$ và thả cho chúng dao động không có vận tốc ban đầu.

1) Tìm phương trình dao động của chúng, giả thiết chúng luôn luôn gắn chặt với nhau. Tìm biểu thức của lực tác dụng vào m_2 (theo phương chuyển động).

2) Biết rằng lực từ do nam châm m_2 tác dụng lên m_1 không vượt quá trị số $0,1N$. Với x_o như thế nào thì m_2 luôn luôn gắn với m_1.

3) Đút một ống dây dẫn mà hai đầu nối với nhau thành mạch kín vào trục $x'x$ sao cho khối $m_1 + m_2$ dao động vào ra ống dây mà không bị vướng và giữ cố định ống dây. Khi đó dao động của con lắc lò xo sẽ xảy ra như thế nào ? Giải thích tại sao ?

Bỏ qua tác dụng của từ trường Trái Đất.

LÊ THANH
(Hà Nội)

Bài L2/263. Đồng vị phóng xạ rađi $^{226}_{88}Ra$, có chu kì bán rã $T = 1570$ năm, phóng ra hạt α và biến đổi thành hạt nhân con X.

1) Viết phương trình phản ứng. Hỏi X là hạt nhân của nguyên tố nào ? Tính độ phóng xạ của $3g$ rađi sau 785 năm.

2) Phản ứng trên tỏa một năng lượng là $2,7MeV$. Giả sử ban đầu hạt nhân rađi đứng yên. Tìm động năng của hạt α và của hạt nhân con sau phản ứng. Coi khối lượng hạt nhân bằng số khối của nó.

TÙNG ANH
(Hà Nội)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/263. Find the values of m such that the following system of equations has exactly two solutions :

$$\begin{cases}(x+y)^8 = 256\\ x^8+y^8 = m+2\end{cases}$$

T2/263. Find the least value of the expression

$$\frac{x^6}{x^3+y^3} + \frac{y^6}{y^3+z^3} + \frac{z^6}{z^3+x^3}$$

where x, y, z are positive numbers satisfying the condition

$$xy\sqrt{xy} + yz\sqrt{yz} + zx\sqrt{zx} = 1$$

T3/263. Let $ABCD$ be a square with center E. Let M be the midpoint of AB. Take the points G, H respectively on the sides BC, CD so that the lines MG and AH are parallel. Calculate the measure of the angle GEH.

T4/263. Let ABC be a triangle and AM, BN, CP its medians. Prove that

$$AM + BN + CP \leq 4R + r,$$

where R and r are respectively the radii of the circumcircle and the incircle of triangle ABC.

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T5/263. The sequence of numbers (x_n) ($n = 0$, 1, 2, ...) are difined by :

$$x_0 = 1,\ x_{n+1} = \frac{2}{x_n} + \frac{\sqrt{3}}{x_n^2} \text{ for every } n = 0, 1, 2, \ldots$$

Does it have finite limit ?

T6/263. Find the integers a, b such that the product of two of the real roots of the following equation is an integer distinct from 1 :

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0.$$

T7/263. Let ABC be a triangle. Find a necessary and sufficient condition for the line d such that the lines symmetric to d with respect to the lines AB, BC, CA are concurrent.

T8/263. Given a tetrahedron $ABCD$, find the points M such that the centers of gravity of the tetrahedra $MBCD$, $MCDA$, $MDAB$, $MABC$ are at the same distance from the center of the circumsphere of $ABCD$.

CUỘC THI GIẢI TOÁN KỈ NIỆM 35 NĂM TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

OLYMPIAD ON THE OCCASION OF THE 35th ANNIVERSARY OF THE JOURNAL

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T5/THCS. Find the prime numbers p such that $2^{11p} - 2$ are divisible by $11p$.

T6/THCS. Let be given a circle with center O, radius R and two points A, B on the outside of the circle such that $OA = 2R$. Determine the position of the point M on the circle such that $MA + 2MB$ attains its least value.

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T5/THPT. Prove that there exists an infinite sequence of distinct prime numbers (p_n) ($n = 1$, 2, 3, ...) so that $p_n \equiv 1 \pmod{1999^n}$ for every $n = 1, 2, 3, \ldots$

T6/THPT. Let ABC be an acute triangle. Prove that one can find a point D in the space such that the following conditions are satisfied simultaneously :

i) $DABC$ is a tetrahedron with concurrent altitudes ;

ii) there exists a triangle such that the lengths of its sides are DA, DB, DC and its area is equal to that of the triangle ABC.

CÁC LỚP THCS

T5/THCS. Tìm các số nguyên tố p sao cho $2^{11p} - 2$ chia hết cho $11p$.

T6/THCS. Cho đường tròn tâm O bán kính R và hai điểm A, B nằm ngoài đường tròn sao cho $OA = 2R$. Tìm điểm M trên đường tròn để $MA + 2MB$ đạt giá trị nhỏ nhất.

CÁC LỚP THPT

T5/THPT. Chứng minh rằng tồn tại dãy vô hạn (p_n) ($n = 1, 2, 3, \ldots$) các số nguyên tố phân biệt có tính chất $p_n \equiv 1 \pmod{1999^n}$ với mọi $n = 1, 2, 3, \ldots$

T6/THPT. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Chứng minh rằng có thể tìm được một điểm D trong không gian sao cho :

(1) $DABC$ là tứ diện có các đường cao đồng quy

(2) Tồn tại tam giác có độ dài ba cạnh bằng DA, DB, DC và có diện tích bằng diện tích ΔABC.

ĐỀ THI TOÁN VÀO CÁC KHỐI CHUYÊN TRƯỜNG ĐHKHTN, ĐHQG HÀ NỘI NĂM 1998

(Thời gian làm bài : 180 phút)

Câu I. 1) Giải phương trình

$$\sqrt{2-x^2}+\sqrt{x^2+8}=4.$$

2) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2+xy+y^2=7 \\ x^4+x^2y^2+y^4=21 \end{cases}$$

Câu II. Các số a và b thỏa mãn điều kiện :

$$\begin{cases} a^3-3ab^2=19 \\ b^3-3a^2b=98 \end{cases}$$

Hãy tính giá trị của biểu thức $P=a^2+b^2$.

Câu III. Cho các số $a, b, c \in [0, 1]$

Chứng minh rằng :

$$a+b^2+c^3-ab-bc-ca \le 1$$

Câu IV. Cho đường tròn (ε) bán kính R. A và B là hai điểm cố định trên đường tròn, $(AB < 2R)$. Giả sử M là một điểm thay đổi trên cung lớn AB của đường tròn.

1) Kẻ từ B đường thẳng vuông góc với AM, đường thẳng này cắt AM tại I và cắt đường tròn (ε) tại N. Gọi J là trung điểm của MN. Chứng minh rằng khi M thay đổi trên đường tròn thì mỗi điểm I, J đều nằm trên một đường tròn cố định.

2) Xác định vị trí của điểm M để chu vi của ΔAMB là lớn nhất.

Câu V. 1) Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho mỗi số $n+26$ và $n-11$ đều là lập phương của một số nguyên dương.

2) Cho các số x, y, z thay đổi thỏa mãn điều kiện $x^2+y^2+z^2=1$. Hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức :

$$P=xy+yz+zx+\frac{1}{2}[x^2(y-z)^2+y^2(z-x)^2+z^2(x-y)^2].$$

Chú ý. Thí sinh thi vào khối chuyên Sinh không phải làm câu V.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu I. 1) Điều kiện : $x^2 \le 2$. Bình phương hai vế của phương trình đã cho ta được phương trình tương đương.

$$2-x^2+x^2+8+2\sqrt{(2-x^2)(x^2+8)}=16$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{-x^4-6x^2+16}=3 \Leftrightarrow x^4+6x^2-7=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=1 \\ x^2=-7 \ (loại) \end{array}\right.$$

Nghiệm của phương trình là : $x=\pm 1$.

2) Giải hệ $\begin{cases} x^2+xy+y^2=7 & (1) \\ x^4+x^2y^2+y^4=21 & (2) \end{cases}$

$(2) \Leftrightarrow (x^2+y^2)^2-x^2y^2=21$

$\Leftrightarrow (x^2+y^2+xy)(x^2+y^2-xy)=21$

Từ đó và (1) $\Rightarrow (x^2+y^2-xy)=3$ (3)

Từ (1) và (3) $\Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=5 \\ xy=2 \end{cases}$

Từ đó suy ra hệ đã cho có 4 nghiệm :

$\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$ $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases}$

Câu II. Ta có :

$$\begin{cases} (a^3-3ab^2)^2=19^2 \ (1) \\ (b^3-3a^2b)^2=98^2 \ (2) \end{cases}$$

Cộng (1) và (2) ta nhận được :

$$a^6+b^6+3a^4b^2+3a^2b^4=19^2+98^2$$

$$\Leftrightarrow (a^2+b^2)^3=19^2+98^2$$

$$\Leftrightarrow a^2+b^2=\sqrt[3]{19^2+98^2}$$

Câu III. Do $a, b, c \in [0, 1]$

$\Rightarrow (1-a)(1-b)(1-c) \ge 0$

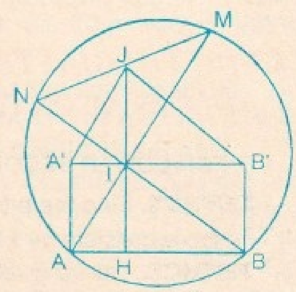
$\Rightarrow (1-a-b-c)+ab+bc+ca-abc \ge 0$

$\Rightarrow a+b+c-ab-bc-ca \le 1-abc \le 1.$

Chú ý rằng do $a, b, c \in [0, 1]$ nên $b^2 \le b$, $c^3 \le c$.

Vậy $a+b^2+c^3-ab-bc-ca \le a+b+c-ab-bc-ca \le 1$

Câu IV. 1) Vì góc $\angle AIB = 90^\circ$ nên khi M thay đổi (trên cung lớn AB) thì I nằm trên đường tròn cố định có đường kính AB.

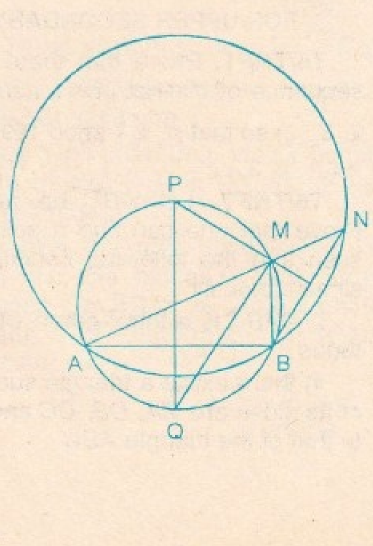


IJ là trung tuyến tam giác vuông MIN nên $IJ=\frac{1}{2}MN$. Do tổng 2 cung AB và MN là 180°, AB cố định nên MN có độ dài không đổi.

Kéo dài JI cắt AB ở H ta có $\angle JIM = \angle AIH = \angle JMI$ suy ra $\angle IAB + \angle AIH = 90^\circ$ hay $\angle IHA = 90^\circ$.

Đoạn JI vuông góc với AB và có độ dài không đổi.

Kẻ hai đoạn AA', BB' vuông góc với AB và có độ dài bằng JI (A', B', I nằm cùng phía đối với AB) Þ A', B' cố định. Do các tứ giác $AA'JI$



và $BB'JI$ là các hình bình hành nên $\angle A'JB' = \angle AIB = 90^o$. Vậy J nằm trên đường tròn cố định đường kính $A'B'$.

2) Kéo dài AM một đoạn $MN = MB$ khi đó

$$AN = AM + MN = AM + MB$$

Chu vi của ΔAMB bằng $AB + AN$. Do AB cố định nên chu vi ΔAMB lớn nhất khi AN lớn nhất.

Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của cung lớn AB và cung nhỏ AB, $MP \perp MQ$ và PQ là đường kính cố định của đường tròn. Vì MQ là phân giác góc AMB nên MP là phân giác góc BMN. Do ΔBMN là tam giác cân nên MP đồng thời là trung trực của $BN \Rightarrow PA = PB = PN \Rightarrow N$ nằm trên đường tròn cố định tâm P bán kính PA. Khi đó AN là dây cung của đường tròn này, suy ra AN lớn nhất khi AN là đường kính của đường tròn tâm P. Vậy khi M trùng với trung điểm P của cung lớn AB thì chu vi của ΔAMB lớn nhất.

Câu V. 1) Giả sử $\begin{cases} n + 26 = a^3 \ (1) \\ n - 11 = b^3 \ (2) \end{cases}$

với a và b là những số nguyên dương.

Lấy (1) trừ đi (2) ta nhận được :

$a^3 - b^3 = 37$

$\Leftrightarrow (a-b)(a^2 + ab + b^2) = 37 = 1.37$

Chú ý rằng $a-b < a^2 + ab + b^2 \Rightarrow$

$$\begin{cases} a - b = 1 \\ a^2 + ab + b^2 = 37 \end{cases}$$

Thay $a = b+1$ vào phương trình thứ 2 ta được

$b^2 + b - 12 = 0 \Rightarrow b_1 = 3$, $b_2 = -4$ (loại)

Với $b = 3 \Rightarrow n = 38$.

2) Trước hết, chú ý rằng với $\forall a, b$ và $\alpha \in [0, 1]$ ta luôn có :

$(a-b)^2(1-\alpha) \geq 0$

$\Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab + \alpha(a-b)^2$ (*)

Áp dụng (*) với hai số x, y và $\alpha = z^2 \in [0, 1]$, ta được: $x^2 + y^2 \geq 2xy + z^2(x-y)^2$

Tương tự $y^2 + z^2 \geq 2yz + x^2(y-z)^2$

và $z^2 + x^2 \geq 2zx + y^2(z-x)^2$

Cộng ba bất đẳng thức cùng chiều lại với nhau ta nhận được :

$$1 = x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx + \frac{1}{2}[x^2(y-z)^2 + y^2(z-x)^2 + z^2(x-y)^2] \Rightarrow P \leq 1.$$

Vậy $P_{max} = 1$, đạt được khi $x=y=z = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ./.

ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI 1998

MÔN THI : TOÁN, KHỐI A

A. PHẦN DÀNH CHO TẤT CẢ THÍ SINH

Câu I. Cho hàm số : $y = \frac{x+1}{x-1}$

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số đã cho.

2) Tìm những điểm trên trục tung mà từ mỗi điểm ấy chỉ kẻ được đúng một tiếp tuyến tới đồ thị (ở phần 1)

Câu II. 1) Giải phương trình :

$$2\text{tg}x + \text{cotg}2x = 2\sin2x + \frac{1}{\sin2x}$$

2) Chứng minh rằng nếu A, B, C là các góc của một tam giác thì

$$\cos^3\frac{A}{3} + \cos^3\frac{B}{3} + \cos^3\frac{C}{3} \leq$$
$$\leq \frac{3}{8} + \frac{3}{4}\left(\cos\frac{A}{3} + \cos\frac{B}{3} + \cos\frac{C}{3}\right)$$

Câu III. 1) Giải phương trình :

$\log_2(x^2+3x+2) + \log_2(x^2+7x+12) = 3 + \log_2 3$

2) Giả sử phương trình : $x^3-x^2+ax+b = 0$ có 3 nghiệm thực phân biệt, chứng minh rằng $a^2 + 3b > 0$

Câu IV. Tính giới hạn : $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3 - \sqrt{3x-2}}{x-1}$

Câu V. Trong không gian cho hệ tọa độ Đề các vuông góc $Oxyz$; và cho các điểm $A(a, 0, 0)$; $B(0, b, 0)$; $C(0, 0, c)$; (a, b, c dương). Dựng hình hộp chữ nhật nhận O, A, B, C làm bốn đỉnh và gọi D là đỉnh đối diện với đỉnh O của hình hộp đó.

1) Tính khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (ABD)

2) Tính tọa độ hình chiếu vuông góc của C xuống mặt phẳng (ABD). Tìm điều kiện đối với a, b, c để hình chiếu đó nằm trong mặt phẳng (xOy).

B. PHẦN DÀNH CHO TỪNG LOẠI ĐỐI TƯỢNG THÍ SINH

Câu VI.a. (Cho thí sinh thi theo chương trình chưa phân ban)

Tính tích phân : $\int_0^1 \frac{dx}{e^x + 1}$

Câu VI.b. (Cho thí sinh thi theo chương trình ban Khoa học Tự nhiên - Ban A).

Chứng minh rằng số phức $z = 2 + \sqrt{3} + i$ có acgumen bằng $\frac{\pi}{12} + 2k\pi$ ($k \in Z$)

Câu VI.b. (cho thí sinh thi theo chương trình ban Khoa học Tự nhiên và Kĩ thuật - Ban B)

Tính họ nguyên hàm của : $f(x) = x(1-x)^{20}$

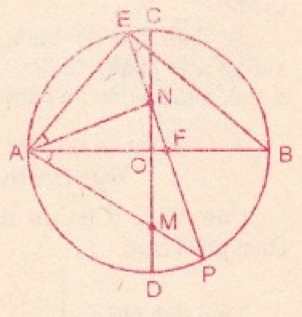
Diễn đàn
DẠY VÀ HỌC TOÁN

LỜI GIẢI ĐƠN GIẢN TỪ PHƯƠNG PHÁP SUY DIỄN LÔGIC

Trong bài báo "Bàn về lợi thế của phương pháp tọa độ" ở THTT số 260 (2/1999), tác giả ***Nguyễn Mộng Hy*** *đã nêu lên bài toán : "Cho đường tròn tâm O có hai đường kính vuông góc với nhau là AB và CD. Trên đoạn CO lấy điểm N và trên đoạn OD lấy điểm M sao cho CN = OM. Đường thẳng AM cắt đường cắt đường tròn tại P (P khác A). Hỏi tam giác ANP có vuông góc tại N không ?".*

Tác giả đã giải bài này bằng ***phương pháp tọa độ*** *không mấy khó khăn và khẳng định được góc ANP không vuông nếu N khác C và O. Bạn* ***Võ Trọng Trí****, khoa Toán ĐHSP Vinh – Nghệ An đã giải bài này bằng* ***phương pháp vectơ*** *khi sử dụng các tích vô hướng* $\vec{AP}\,.\,\vec{PB} = 0$ *và* $\vec{AM}\,.\,\vec{MP} = 0$*, đồng thời biểu diễn các vectơ theo 2 vectơ cơ sở là* $\vec{OB}$, $\vec{OC}$*. Tuy nhiên phương pháp vectơ và phương pháp tọa độ chỉ dành cho học sinh cấp 3. Xin giới thiệu 2 cách giải bài này bằng* ***phương pháp suy diễn lôgic*** *phù hợp trình độ học sinh cấp 2.*

Cách 1. Chứng minh phản chứng của bạn **Lê Quốc Hán**, GV trường ĐHSP Vinh - Nghệ An. Xem hình 1.



H.1

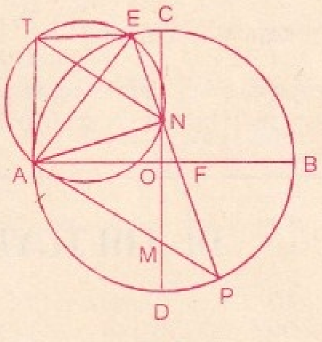
Giả sử tia PN cắt AB tại F và cắt cung nhỏ AC tại E (E khác C). Ta có $\angle BAP = \angle BEP$ (cùng chắn cung BP) (1)

Giả sử $\angle ANP = 90^o$ thì $\angle EAN = \angle BEP$ (2 góc có cạnh tương ứng vuông góc) (2)

Từ (1) (2) có $\angle EAN = \angle BAP$.

Từ đó và $\angle ENA = \angle AOM = 90^o$ suy ra $\Delta EAN \sim \Delta MAO \Rightarrow \dfrac{EN}{MO} = \dfrac{AN}{AO}$. Theo giả thiết $CN = OM$ nên $\dfrac{EN}{CN} = \dfrac{AN}{AO}$ (3). Mặt khác do $\angle ANF = \angle NOF = 90^o$ nên $\Delta ANO \sim \Delta NFO \Rightarrow \dfrac{AN}{AO} = \dfrac{NF}{NO}$ (4). Từ (3) (4) rút ra $\dfrac{EN}{CN} = \dfrac{NF}{NO}$, suy ra $\Delta ENC \sim \Delta FNO \Rightarrow \angle ECN = \angle NOF = 90^o \Rightarrow \Delta ECD$ có 2 góc vuông, mâu thuẫn. Vậy $\angle ANP$ không vuông (đpcm)

Cách 2. Chứng minh trực tiếp của bạn **Hồ Quang Được**, GV trường THCS An Ninh, huyện Mỹ Tú, tỉnh Sóc Trăng. Xem hình 2.



H.2

Giả sử tia PN cắt AB tại F và cắt cung nhỏ AC tại E (E khác C). Dựng hình vuông $AOCT$. Theo giả thiết $CN = OM$ nên $NM = NO+OM = NO+CN = CO = AT$. Mặt khác $NM // AT$ nên $AMNT$ là hình bình hành. Ta có

$\angle TAE = \angle APE$ (cùng chắn cung AE)

và $\angle TNE = \angle APE$ (đồng vị)

nên $\angle TAE = \angle TNE$, do đó $ANET$ là tứ giác nội tiếp, suy ra $\angle ANP = \angle ATE < \angle ATC = 90^o$ (đpcm).

Cách chứng minh của bạn Hồ Quang Được cho phép xác định được vị trí của N để góc ANP đạt giá trị nhỏ nhất. Thực vậy vì $\angle ANP = \angle ATE$ *mà A, T cố định nên khi điểm E chạy trên cung nhỏ CA càng gần đến A thì góc ATE càng nhỏ. Mặt khác điểm E phải nằm trên đường tròn qua 3 điểm A, T, N vì vậy điểm E chạy trên cung CA đến gần A nhất khi đường tròn (ATN) tiếp xúc với CO tại N, lúc đó N là trung điểm của CO. Kết luận : góc ANP đạt giá trị nhỏ nhất khi N là trung điểm của CO.*

Đến đây lại cần phải sử dụng ***phương pháp tọa độ*** *để tính giá trị nhỏ nhất* α *của góc ANP khi N là trung điểm CO. Áp dụng hệ thức* $S_{ANO} + S_{ONF} = \dfrac{1}{2} AN.NF \sin\alpha$ *ta tính được* $\sin\alpha \approx 0{,}99948$ nên $\alpha \approx 88^o05'$./.

DÀNH CHO CÁC BẠN CHUẨN BỊ THI ĐẠI HỌC

THẤY GÌ QUA CÁC BÀI THI TOÁN TUYỂN SINH ĐẠI HỌC

Để trao đổi kinh nghiệm cho các bạn chuẩn bị thi vào Đại học và Cao đẳng năm nay, chúng tôi xin ý kiến của các thầy giáo đã từng trực tiếp chấm thi tuyển sinh môn Toán. Trân trọng giới thiệu cùng các bạn.

PTS. NGUYỄN CÔNG SỬ
(*Học viện Kỹ thuật Mật mã, Hà Nội*)

Thực tế chấm thi các kì thi tuyển sinh vào Đại học, đặc biệt là hai năm gần đây, khi có sự đổi mới về phương pháp ra đề thi của Bộ Giáo dục và đào tạo cho thấy không quá 30% các bài làm toán của thí sinh đạt điểm từ trung bình trở lên. Trong bài viết này chúng tôi chỉ tập trung chú ý của mình vào các khiếm khuyết trong kiến thức của thí sinh, bởi lẽ chính cách tiếp cận phê phán sẽ giúp ích nhiều hơn cho việc hoàn thiện cả phương pháp giảng dạy của giáo viên lẫn việc chuẩn bị kiến thức cho các thí sinh tương lai.

Trước hết vẫn như thường lệ, khó khăn lớn nhất của hầu hết thí sinh là các bài toán hình học, đặc biệt là hình học không gian.

Nguyên nhân cơ bản của mọi vướng mắc và sai lầm ở đây là *sự yếu kém trong khả năng tưởng tượng không gian*. Nhiều thí sinh thậm chí không biết vẽ đúng các đường nét, không chỉ ra đúng được góc giữa đường thẳng và mặt phẳng, không biết cách xác định đường vuông góc chung giữa hai đường thẳng chéo nhau. Việc giải tích hóa cao độ các khái niệm hình học trong hình học giải tích có lẽ đã làm cho đại đa số (hơn 90%) thí sinh xa rời các khái niệm không gian. Ngoài ra sự thiếu làm chủ các vấn đề cơ sở của đại số vectơ cũng là một nguyên nhân làm cho chỉ khoảng 4% thí sinh dám sử dụng phương pháp này để giải các bài toán hình học trong các đề thi của chúng tôi mà ở đó có thể giải được cả bằng phương pháp cổ điển (hình học không gian) lẫn phương pháp vectơ.

Về các bài toán lượng giác, tình hình cũng không sáng sủa hơn. Chỉ khoảng 10% thí sinh dám đụng đến các bài toán lượng giác trong tam giác. *Với các phương trình lượng giác thì sai lầm thường không phải ở cách giải mà ở việc kết hợp nghiệm*, nguyên nhân là không nắm chắc vòng tròn đơn vị, một khái niệm cơ bản của lượng giác.

Xét về đại thể thì việc chuẩn bị kiến thức thí sinh về Đại số và Giải tích có vẻ như khả quan hơn. Tuy nhiên sự vượt trội của kết quả của các bài toán thi trong phần này dường như vẫn mang tính hình thức hơn là nội dung, bởi lẽ các bài toán có sẵn một lược đồ giải chung không đòi hỏi nhiều đến khả năng tư duy tổng hợp các kiến thức rút ra từ các nội dung khác nhau (như kiểu bài toán khảo sát hàm số và vẽ đồ thị thường gặp trong bộ đề thi) thì hầu hết thí sinh vượt qua một cách khá dễ dàng. Nhưng đến khi có một sự biến dạng nào đó lệch khỏi sự chuẩn tắc, *cần đến tư duy độc lập nhằm thiết lập các điều kiện tham số của một hàm số* để được một đồ thị thỏa mãn yêu cầu nào đó thì hầu hết học sinh tỏ ra lúng túng. Khi khảo sát hàm số truyền thống nhưng ít quen thuộc trong bộ đề, thì tất cả những khiếm khuyết trong các kiến thức về giải tích bộc lộ rất rõ. Hơn 60% thí sinh không vẽ nổi đồ thị hàm số vì không dám tin rằng đồ thị cắt đường tiệm cận ngang.

Do *hiểu biết kém về tính chất của hàm lôgarit và hàm số mũ* nên phần lớn thí sinh gặp sai lầm khi giải các bài toán về bất phương trình thuộc loại này. Chiếm số đông hơn là các thí sinh *không có hiểu biết đầy đủ về tính tương đương của các phương trình, bất phương trình dạng căn bậc hai có trị tuyệt đối*, không có thói quen xem xét các nghiệm tìm được.

Cuối cùng cũng cần nhấn mạnh rằng, rất nhiều thí sinh, thậm chí cả các thí sinh tỏ ra có kiến thức toán học khá vững vàng lại quá *yếu kém về kĩ năng tính toán*. Nhiều "sai lầm cơ học" làm hạ thấp đáng kể kết quả bài thi gây nên sự nuối tiếc ngay cả cho chính người chấm thi.

Tính cẩu thả, sự thiếu cẩn trọng trong trình bày và tính toán, khả năng diễn đạt không lôgic bài giải cũng là một nguyên nhân đáng kể dẫn đến thất bại của rất nhiều thí sinh. Do vậy trong các vấn đề cần luyện tập thì *luyện tập cách diễn đạt lôgic, ngắn gọn và đầy đủ một lời giải toán cũng không kém phần quan trọng.*

PTS DOÃN TAM HÒE
(*Đại học Xây dựng Hà Nội*)

Vì quá lo lắng đến kết quả thi cử nên các thí sinh học nhồi nhét quá nhiều , bị *mất tính sáng* *tạo*. Thí dụ thí sinh được học rất nhiều dạng bất phương trình, nhưng khi gặp một bất phương trình cụ thể, chẳng hạn $(f(x)/g(x)) > 2$ cũng có thể bị lúng túng, không nhớ rằng cần lập bảng xét dấu tử thức và mẫu thức, khi đó nếu $f(x)$ và $g(x)$ là các đa thức hoặc hàm vô tỉ thì khá đơn giản; nhưng khi một hàm là đa thức hoặc hàm vô tỉ còn hàm kia là siêu việt, thì việc tìm các "không điểm" của hàm sau thường phải đoán nghiệm, chứng minh tính duy nhất nghiệm và việc xét dấu có thể dùng đến đạo hàm (thí dụ bất phương trình $\left((\mathrm{tg}\frac{\pi x}{4} + 2x + 3) \ / \ (\sqrt{4 - x^2} - x) \right) > 0$ được lấy từ *bộ đề* theo tinh thần trên).

Thí sinh thường làm phức tạp hóa các bài toán đơn giản (trong lời giải bài thi "Giải và biện luận phương trình $m.\mathrm{cotg}2x = ((\cos^2 x - \sin^2 x) \ / \ (\cos^6 x + \sin^6 x))$ theo tham số m". - câu này được 1 điểm, có tới non một nửa số thí sinh biện luận tới 4; 5 trang mà phần biện luận đó chỉ được 0,5 điểm ; họ không biết rằng khi đưa về giải hệ $\begin{cases} t \neq 0 \\ f(t) = 0 \end{cases}$, trong đó $t = \sin 2x$; $f(t) = 3mt^2 + 4t - 4m$ sẽ xảy ra; khi $m = 0$ hệ vô nghiệm, ngược lại thì cả 2 nghiệm khác 0 và nghiệm $-2(1 + \sqrt{1 + 3m^2}) \ / \ 3m$ có trị tuyệt đối lớn hơn 1 nên bị loại, nghiệm kia : $2(-1 + \sqrt{1 + 3m^2})/3m$ nằm trong đoạn $[-1, 1]$ khi và chỉ khi $f(-1).f(1) \leq 0$, tức là $|m| \leq 4$). Nói chung mỗi câu hỏi nhỏ trong bài thi sẽ thường có số điểm từ 1/2 đến 3/2 điểm và những câu khó cũng sẽ không được nhiều điểm hơn các câu khác, nên khi làm bài *cần biết phân bổ thời gian cho các câu nhỏ một cách thích hợp, không nên sa đà vào một hai câu mà không kịp suy nghĩ đến các câu khác.*

Phần lớn thí sinh *không nắm vững các khái niệm cơ bản*. Thí dụ : Khi tìm cực đại, cực tiểu thí sinh không hiểu định nghĩa : hàm $f(x)$ đạt cực đại (cực tiểu) tại a nghĩa là $f(a) \geq f(x)$ (hoặc $f(a) \leq f(x)$) khi x ở lân cận a, điều đó không phụ thuộc vào việc tại a hàm có liên tục hay không, có đạo hàm hay không, nhưng nhớ rằng nếu tại a có đạo hàm thì $f'(a) = 0$ (chẳng hạn các hàm

$f(x) = \begin{cases} x^2 & khi \ x \neq 0 \\ 1 & khi \ x = 0 \end{cases}$; $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$; $f(x) = 1 - x^2$

đều đạt cực đại bằng 1 tại $x = 0$; trong đó chỉ có hàm sau cùng trong 3 hàm đó có đạo hàm tại $x = 0$). Thậm chí tuyệt đại đa số thí sinh không hiểu định nghĩa hàm số : f là hàm số xác định trên tập X nghĩa là ứng mỗi x thuộc X có một và chỉ một giá trị $f(x)$. Cũng từ định nghĩa hàm số suy ra các hàm số chẵn và các hàm số tuần hoàn không có hàm ngược (trên toàn tập số thực) từ đó mới có thể hiểu sâu về các hàm $\arcsin x$, $\arccos x$, ...; mới có thể bằng các lập luận đơn giản vẽ được đồ thị các hàm $y = \mathrm{arctg}(\mathrm{tg}x)$; $y = \mathrm{tg}(\mathrm{arctg}x)$; $y = \ln(e^x)$; $y = e^{\ln x}$;...

Ở một vài bài tập khi luyện thi các thày dùng đến *các kiến thức ngoài chương trình phổ thông* (như quy tắc Lôpitan, một số bất đẳng thức không thông dụng lắm,...) điều đó không ngại, vì người soạn đề thi không được phép soạn ra ngoài chương trình phổ thông, nên thường trong các câu hỏi thi đó có gợi ý trực tiếp hoặc gián tiếp để mọi người có thể làm được. Thí dụ "Khảo sát, vẽ đồ thị hàm số $y = x^2 e^x$", khi tìm tiệm cận ở phần cuối bài làm sẽ gặp giới hạn dạng "0/0" ($\lim\limits_{x \to -\infty} e^x / (1/x)$) nhưng nếu để nguyên chưa rút gọn : $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x^2 e^x}{x}$ thì ở phần trên đã có $x^2 e^x$ tăng trong khoảng từ $(-\infty, -1)$ chứng tỏ trong khoảng $(-\infty, -1)$ có $0 < x^2 e^x < 1^2.e^{-1} < 1$ từ đó suy ra giới hạn bằng 0.

Thí sinh cũng cần chú ý là *cùng một câu hỏi* nhưng khi đứng độc lập và khi đứng với tư cách một ý nhỏ của câu hỏi lớn sẽ *có số điểm khác nhau và bài giải cũng cần có mức độ tỉ mỉ khác nhau*. Thí dụ, việc tìm tiệm cận trong bài toán khảo sát nhiều khi thí sinh chỉ viết đúng các tiệm cận là được đủ số điểm (vì bài khảo sát có nhiều nội dung, nên điểm bị chia rất nhỏ, kết quả đúng thì ít khi bị bớt điểm), trái lại một câu hỏi riêng về tìm tiệm cận, thì nhất thiết phải làm qua các bước như đã học.

Thường thì khi gặp một bài tập khó ta cần *xem xét một số trường hợp riêng để rút ra những ý tưởng cần thiết*. Song đôi khi lại phải làm ngược lại, *cần khái quát bài toán sau đó mới xét đến trường hợp cụ thể* mà bài thi đề ra. Thí dụ "Tìm giá trị nhỏ nhất của $f(x) = |x-1| + |x-2| + |x-a|$", ta xét bài toán tổng quát hơn : "Tìm giá trị nhỏ nhất của $f(x) = |x-A| + |x-B| + |x-C|$", khi đó có thể giả thiết $A \leq B \leq C$ và có : Khi $x \leq A \Rightarrow f(x) = -3x+A+B+C$ (giảm); khi $A < x \leq B \Rightarrow f(x) = -x-A+B+C$ (giảm) khi $B < x \leq C \Rightarrow f(x) = x-A-B+C$ (tăng); khi $C < x \Rightarrow f(x) = 3x-A-B-C$ (tăng) do đó giá trị nhỏ nhất là $f(B)$, từ đó áp dụng vào bài tập trên : xét 3 trường hợp $a < 1$; $1 \leq a \leq 2$ và $a > 2$.

Những sai sót của thí sinh khi làm bài thi không thể vắn tắt mà nói hết được, trên đây chúng tôi chỉ xin góp một đôi lời cùng các sinh viên đại học tương lai với nguyện ước : sao cho các bạn đạt kết quả cao trong kì thi sắp tới !

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI MÔN TOÁN TRƯỜNG ĐẠI HỌC THỦY SẢN NHA TRANG NĂM 1998

Đề thi đăng số 262 (4/1999)

Câu I. (Bạn đọc tự giải)

Câu II. 1) Phương trình

$\sin^4 x + \cos 2x + 4\cos^6 x = 0$ (1) $\Leftrightarrow$

$(1-\cos^2 x)^2 + 2\cos^2 x - 1 + 4\cos^6 x = 0$

$\Leftrightarrow \cos^4 x + 4\cos^6 x = 0$

$\Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \pi/2 + k\pi$ với $k \in \mathbb{Z}$.

Cách khác:

$$(1) \Leftrightarrow \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 + \cos 2x + 4\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^3 = 0$$

$\Leftrightarrow 2\cos^3 2x + 7\cos^2 2x + 8\cos 2x + 3 = 0$

$\Leftrightarrow (\cos 2x+1)^2(2\cos x+3) = 0 \Leftrightarrow \cos 2x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \pi/2 + k\pi$.

2) Phương trình

$$\sqrt{\log_2 \sqrt[4]{2x} + \log_x \sqrt[4]{2x}} + \sqrt{\log_2 \sqrt[4]{\frac{x}{2}} + \log_x \sqrt[4]{\frac{2}{x}}} = \sqrt{\log_2 x}. \quad (1)$$

có điều kiện $\begin{cases} 0 < x \neq 1 \\ \log_2 x > 0 \end{cases}$

Khi đó :

$(1) \Leftrightarrow \sqrt{\log_2 x + \log_x 2 + 2} + \sqrt{\log_2 x + \log_x 2 - 2} =$

$= 2\sqrt{\log_2 x}$

$\Leftrightarrow \sqrt{(\log_2 x + 1)^2/\log_2 x} + \sqrt{(\log_2 x - 1)^2/\log_2 x}$

$= 2\sqrt{\log_2 x}$

$\Leftrightarrow \log_2 x + 1 + |\log_2 x - 1| = 2\log_2 x$ (2)

$\Leftrightarrow |\log_2 x - 1| = \log_2 x - 1 \Leftrightarrow \log_2 x - 1 \geq 0$

$\Leftrightarrow \log_2 x \geq 1 = \log_2 2 \Leftrightarrow x \geq 2$.

Kết luận: Phương trình có nghiệm $x \geq 2$.

Chú ý. Phương trình (1) có thể giải nhờ tính chất $|a+b| = a+b \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ b \geq 0 \end{cases}$ như sau :

$(2) \Leftrightarrow |\log_2 x + 1| + |\log_2 x - 1| = 2\log_2 x$

$= (\log_2 x + 1) + (\log_2 x - 1)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x + 1 \geq 0 \\ \log_2 x - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \log_2 x \geq 1.$

Câu 3.

Phương trình $\sqrt{2-x} + \sqrt{2+x} - \sqrt{(2-x)(2+x)}$ $= m$ (1), có điều kiện $-2 \leq x \leq 2$ (2).

Đặt $t = \sqrt{2-x} + \sqrt{2+x}$ thì $\sqrt{(2-x)(2+x)} = \dfrac{t^2-4}{2}$ và $2 \leq t \leq 2\sqrt{2}$.

Khi đó bài toán chuyển về xác định tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $f(t) = -t^2+2t+4 = 2m$ có nghiệm $t \in [2\ ,\ 2\sqrt{2}]$.

$f'(t) = -2t+2 \Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 1$.

Ta có bảng biến thiên :

t	1	2		$2\sqrt{2}$
$f'(t)$	0 -		-	
$f(t)$		4	$\searrow$	$4(\sqrt{2}-1)$

Từ bảng biến thiên ta có **kết luận** :

Phương trình (1) có nghiệm

$\Leftrightarrow 4(\sqrt{2} - 1) \leq 2m \leq 4$.

$\Leftrightarrow 2(\sqrt{2} - 1) \leq m \leq 2$.

Cách khác: (2) $\Leftrightarrow -1 \leq \dfrac{x}{2} \leq 1$ cho $x = 2\cos\varphi$ với $\varphi \in [0, \pi]$. Khi đó :

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{2(1-\cos\varphi)} + \sqrt{2(1+\cos\varphi)} - 2\sqrt{1-\cos^2\varphi} = m$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\sin\frac{\varphi}{2} + \cos\frac{\varphi}{2}\right) - 2\sin\varphi = m$$

(chú ý $\sin\varphi = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \cos 2\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$)

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - 2\left[2\cos^2\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - 1\right] = m$$

$$\Leftrightarrow -4\cos^2\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + 2 = m.$$

Đặt $t = \cos\left(\dfrac{\varphi}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \dfrac{\sqrt{2}}{2} \leq t \leq 1$, $\forall\varphi \in [0, \pi]$, thì bài toán trở về xác định tất cả các giá trị m để phương trình $f(t) = -4t^2 + 2\sqrt{2}t + 2 = m$ có nghiệm $t \in \left[\dfrac{\sqrt{2}}{2}\ ,\ 1\right]$. Lấy đạo hàm, lập bảng biến thiên đối với $f(t)$ ta có kết quả trên.

Câu IV: (Bạn đọc tự giải)

Câu Va.

$$1)\ \int_0^1 x(1+x^2)^n dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (1+x^2)^n d(1+x^2)$$

$$= \frac{(1+x)^{n+1}}{2(n+1)}\Big|_0^1 = \frac{2^{n+1}-1}{2(n+1)}$$

Hoặc đổi biến : $t = 1+x^2 \Rightarrow dt = 2xdx$.

Khi $x = 0 \Rightarrow t = 1$; khi $x = 1 \Rightarrow t = 2$.

Lúc đó $\int_0^1 x(1+x^2)^n dx = \frac{1}{2}\int_1^2 t^n dt =$

$$= \frac{t^{n+1}}{2(n+1)}\Big|_1^2 = \frac{2^{n+1}-1}{2(n+1)}$$

2) Ta có $\int_0^1 x(1+x^2)^n dx =$

$$= \int_0^1 x\left(C_n^0 + C_n^1x^2 + C_n^2x^4 + C_n^3x^6 + ... + C_n^nx^{2n}\right)dx$$

$$= \int_0^1 \left(C_n^0x + C_n^1x^3 + C_n^2x^5 + C_n^3x^7 + ... + C_n^nx^{2n+1}\right)dx.$$

$$= \left(\frac{1}{2}C_n^0x^2 + \frac{1}{4}C_n^1x^4 + \frac{1}{6}C_n^2x^6 + \frac{1}{8}C_n^3x^8 + ... + \frac{1}{2n+2}C_n^nx^{2n+2}\right)\Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}C_n^1 + \frac{1}{6}C_n^2 + \frac{1}{8}C_n^3 + ... + \frac{1}{2n+2}C_n^n.$$

Mặt khác, theo kết quả phần 1) ta lại có :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4}C_n^1 + \frac{1}{6}C_n^2 + \frac{1}{8}C_n^3 + ... + \frac{1}{2n+2}C_n^n = \frac{2^{n+1}-1}{2(n+1)}$$

Bởi vậy $1 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + \frac{1}{4}C_n^3 + ... + \frac{1}{n+1}C_n^n =$

$= \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$ (đpcm)

Cách khác. Từ khai triển $(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1x + C_n^2x^2 + C_n^3x^3 + ... + C_n^nx^n$, lấy tích phân 2 vế từ 0 đến 1 ta có lại kết quả trên.

Hoặc xuất phát từ tích phân $\int_0^1 (1+x)^n dx$.

Câu Vb.

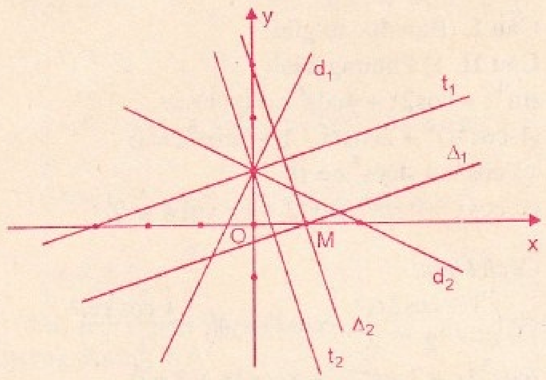
1) $\int_0^1 x^2(1+x^3)^n dc = \frac{1}{3}\int_0^1 (1+x^3)^n d(1+x^3) =$

$$= \frac{(1+x^3)^{n+1}}{3(n+1)}\Big|_0^1 = \frac{2^{n+1}-1}{3(n+1)}$$

Hoặc đổi biến : $t = 1 + x^3 \Rightarrow dt = 3x^2$dx. Khi $x = 0 \Rightarrow t = 1$, khi $x = 1 \Rightarrow t = 2$.

Lúc đó

$$\int_0^1 x^2(1+x^3)^n dx = \frac{1}{3}\int_1^2 t^n dt = \frac{t^{n+1}}{3(n+1)}\Big|_1^2 = \frac{2^{n+1}-1}{3(n+1)}$$



2) *Nhận xét:* Đường thẳng qua M (1, 0) tạo với d_1, d_2 một tam giác cân phải vuông góc với đường phân giác của góc tạo bởi d_1, d_2.

* Phương trình đường phân giác của các góc tạo bởi d_1, d_2 là

$$\frac{2x-y+1}{\sqrt{4+1}} = \pm\frac{x+2y-2}{\sqrt{1+4}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-3y+3=0 \ (t_1) \\ 3x+y-1=0 \ (t_2) \end{array}\right.$$

Phương trình đường thẳng cần lập qua M (1, 0) có hệ số góc $K = K_{t_1} = \frac{1}{3}$ là

$$y = \frac{1}{3}(x-1) \Leftrightarrow x\text{-}3y\text{-}1 = 0 \ (\Delta_1)$$

* Phương trình đường thẳng cần lập qua M (1, 0) có hệ số góc $K = K_{t_2} = -3$ là

$$y = -3(x-1) \Leftrightarrow 3x+y-3 = 0 \ (\Delta_2)$$

Kết luận: Có 2 đường thẳng thỏa yêu cầu bài toán đó là (Δ_1) và (Δ_2).

Cách khác. Để ý $d_1 \perp d_2$ do $K_{d_1} \cdot K_{d_2} = -1$, nên hệ số góc K của đường thẳng cần lập qua $M(1, 0)$ tạo với d_1 (hoặc d_2) một góc 45^o được xác định theo công thức :

$$\text{tg}45^o = \left|\frac{K-K_{d_1}}{1+K.K_{d_1}}\right| = \left|\frac{K-2}{1+2K}\right| = 1$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} K = 1/3 \\ K = -3 \end{array}\right.$$

Viết phương trình đường thẳng qua $M(1, 0)$ có hệ số góc K=1/3 và K = -3, ta có lại kết quả trên.

MAI THẮNG
(Đại học Thủy sản – Nha Trang)

Nhìn ra thế giới

ĐỀ THI OLYMPIC TOÁN CHÂU MỸ LATINH

(lần thứ 9 tại Braxin 9-1994)

NGÀY THỨ NHẤT (4h30ph)

Bài 1. *(Mêhicô)*

Một số tự nhiên n được gọi là *số braxin* nếu tồn tại số nguyên r với $1 < r < n-1$, sao cho sự biểu diễn số n trong hệ cơ số r có tất cả các chữ số đều bằng nhau. Chẳng hạn : 62 và 15 là các *số braxin* vì $62 = \overline{222}_5$ (cơ số 5) và $15 = \overline{33}_4$ (cơ số 4). Chứng minh rằng số 1993 không là *số braxin* nhưng số 1994 là *số braxin*.

Bài 2. *(Braxin)*

Giả sử $ABCD$ là hình tứ giác nội tiếp và tồn tại đường tròn với tâm nằm trên AB, tiếp xúc với các cạnh khác của tứ giác này.

1) Chứng minh rằng $AB = AD + BC$

2) Tính diện tích lớn nhất có thể được của tứ giác theo độ dài $x = AB$ và $y = CD$.

Bài 3. *(Braxin)*

Một bàn cờ *đam* (châu Âu) gồm $n \times n$ ô, ở mỗi ô có 1 ngọn đèn. Khi ấn công tắc một ngọn đèn, (công tắc chuyển trạng thái từ TẮT sang SÁNG và ngược lại) thì ngọn đèn này và tất cả các ngọn đèn cùng hàng, cùng cột với nó đều chuyển trạng thái. Ban đầu tất cả các ngọn đèn đều TẮT.

Chứng minh rằng bằng một dãy liên tiếp lần ấn công tắc luôn luôn có thể làm SÁNG tất cả các ngọn đèn trên bàn cờ, và tìm số ít nhất lần ấn (phụ thuộc n) theo thứ tự để tất cả các ngọn đèn trên bàn cờ đều SÁNG.

NGÀY THỨ HAI (4h30ph)

Bài 4. *(Braxin)*

Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn nội tiếp trong đường tròn (K). Giả sử P là một điểm nằm trong đường tròn (K). Các đường thẳng AP, BP, CP cắt đường tròn (K) lần nữa tại các điểm X, Y, Z. Xác định điểm P để XYZ là tam giác đều.

Bài 5. *(Braxin)*

Cho 2 số nguyên dương n và r. Chúng ta muốn thiết lập r tập con A_i $(i = 1, 2, ..., r)$ của tập $\{0, 1, ..., n-1\}$ sao cho

(1) số phần tử của mỗi A_i bằng k.

(2) với mỗi số nguyên x $(0 \le x \le n-1)$ thì tồn tại các số $x_i \in A_i$ mà $x = x_1 + x_2 + ... + x_r$.

Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của k theo n và r.

Bài 6. *(Braxin)*

Chứng minh rằng với mỗi số tự nhiên $n \le 2^{1\,000\,000}$ tồn tại một dãy hữu hạn các số tự nhiên $x_0, x_1, ..., x_k$ với $k < 1\,100\,000$, $x_0 = 1$, $x_k = n$ sao cho với mỗi $i = 1, 2, ..., k$ thì $x_i = x_r + x_s$ với $0 \le r < i$ và $0 \le s < i$

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN VÀ LỜI GIẢI

BÀI SỐ 17

Problem. Consider a decomposition of a convex n-gon into triangles by diagonals which do not intersect inside the n-gon. Prove that the number of the obtained triangles does not depend on the way the n-gon is divided and find this number.

Solution. Let m be the number of the triangles splitted by such a decomposition. Then $m.180^o$ is the sum of the angles of these triangles. This sum can be also evaluated in the following way. Since the diagonals of the decomposition do not intersect inside the n-gon, the vertices of the triangles must be vertices of the n-gon. Therefore, the sum of the angles of the triangles equals the sum of the angles of the n-gon, which is $(n-2)180^o$. From this it follows that $m.180^o = (n-2)180^o$. Hence $m = n-2$. So we have shown that the number of the triangles obtained by such a decomposition is always $n-2$.

Từ mới.

decomposition	= phân chia, phân hoạch
convex	= lồi (tính từ)
n-gon	= đa giác n đỉnh
diagonal	= đường chéo
inside	= bên trong
depend on	= phụ thuộc vào (động từ)
angle	= góc
split	= phân tách (động từ)
vertex	= đỉnh
vertices	= các đỉnh
equal	= bằng (động từ)
show	= chỉ ra, chứng tỏ (động từ)

NGÔ VIỆT TRUNG

Trả lời bạn đọc

• Qua "Đường dây nóng" dành cho các bạn, chúng tôi xin dành liên tiếp 2 số tạp chí 263 và 264 để tháo gỡ phần nào các băn khoăn của các bạn gửi về Tòa soạn. Hy vọng rằng : các bạn sẽ đỡ lúng túng hơn trong kì thi vào các trường Đại học năm nay.

? Trong đề thi vào trường Đại học Y Dược - TP Hồ Chí Minh năm 1998 có câu : "Tìm tất cả các điểm của trục tung sao cho từ đó có thể kẻ được ba tiếp tuyến tới đồ thị $y = -x^4 + 2x^2 - 1$", em đã đọc một số đáp án, nhưng vẫn nghi ngờ tính đúng đắn. Tòa soạn có thể cho một lời giải tin tưởng được không ?

N.D.H (PTTH Châu Văn Liêm, Cần Thơ)

Đáp: Đây là bài toán đã từng được giới thiệu trong đề 72 của Bộ đề thi trước đây và cũng là bài toán mà nhiều cuốn sách đưa ra những lời giải sai lầm. Trước hết xin nêu lời giải đúng :

Gọi điểm của trục tung là $A(0; y_0)$ thì đường thẳng đi qua A, có hệ số góc k là $y = kx + y_o$. Đường thẳng này là tiếp tuyến của đồ thị khi và chỉ khi hệ

$$\begin{cases} -x^4 + 2x^2 - 1 = kx + y_o & (1) \\ -4x^3 + 4x = k & (2) \end{cases}$$

có nghiệm đối với ẩn x.

Điều kiện cần Giả sử từ A kẻ được đúng 3 tiếp tuyến tới đồ thị. Nhận xét rằng : đồ thị có trục đối xứng là trục tung nên số các tiếp tuyến không cùng phương với trục hoành, kẻ từ A đến đồ thị phải là một số chẵn. Vì giả thiết số tiếp tuyến kẻ từ A đến đồ thị là 3, nên phải có tiếp tuyến cùng phương với trục hoành kẻ qua A. Suy ra hệ trên phải có nghiệm khi $k = 0$. Thay $k = 0$ vào hệ ta có :

$$-x^4 + 2x^2 - 1 = y_o$$

$$-4x^3 + 4x = 0$$

Từ đó : $x = 0 \Rightarrow y_o = -1$ hoặc $x = \pm 1 \Rightarrow y_o = 0$.

Điều kiện đủ :

1) Xét $y_o = -1$: Hệ ban đầu trở thành

$$\begin{cases} -x^4 + 2x^2 = kx & (3) \\ -4x^3 + 4x = k & (4) \end{cases}$$

Thế k từ (4) vào (3) ta có .

$$-x^4 + 2x^2 = (-4x^3 + 4x)x \Leftrightarrow 3x^4 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\dfrac{\sqrt{6}}{3} \end{array}\right.$$

Từ đó có các giá trị tương ứng của k là :

$$\left[\begin{array}{l} k = 0 \\ k = \pm\dfrac{4\sqrt{6}}{9} \end{array}\right.$$

Do đó từ điểm A (0; -1) kẻ được đúng 3 tiếp tuyến tới đồ thị

2. Xét $y_o = 0$: Hệ ban đầu trở thành

$$\begin{cases} -x^4 + 2x^2 - 1 = kx & (5) \\ -4x^3 + 4x = k & (6) \end{cases}$$

Thế k từ (6) vào (5) ta có

$$-x^4 + 2x^2 - 1 = (-4x^3 + 4x)x$$

$$\Leftrightarrow 3x^4 - 2x^2 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 1)(3x^2 + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Thay vào (6) ta có $k = 0$.

Vậy từ điểm A (0; 0) chỉ kẻ được đúng một tiếp tuyến tới đồ thị.

Tóm lại: Có duy nhất một điểm $A(0; -1)$ trên trục tung thỏa mãn bài toán.

Lưu ý. - Nhiều tài liệu đã thế k từ (2) vào (1) để được phương trình : $3x^4 - 2x^2 - 1 - y_o = 0$ (*) và lí luận : từ A kẻ được 3 tiếp tuyến tới đồ thị $\Leftrightarrow$ tồn tại 3 giá trị của k thỏa mãn để hệ có nghiệm $\Leftrightarrow$ tồn tại đúng 3 nghiệm x của phương trình (*) ! Các bạn có thể thấy rằng : số nghiệm x không đúng bằng số giá trị của k tức là không đúng bằng số các tiếp tuyến (một tiếp tuyến có 2 tiếp điểm với đồ thị thì sao ?)

- Lời giải trình bày ở trên giải quyết luôn bài toán yêu cầu từ A kẻ được duy nhất một tiếp tuyến đến đồ thị, khi đó phần điều kiện cần không thay đổi, chỉ thay đổi phần kết luận là A (0; 0).

? Khi tính $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx$ (đề 23 trong Bộ đề tuyển sinh) ta có kết quả

$$I_n = \begin{cases} \dfrac{(n-1)!!}{n!!} \cdot \dfrac{\pi}{2} & \text{nếu } n \text{ chẵn} \\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!} & \text{nếu } n \text{ lẻ} \end{cases}$$

Có cách nào viết I_n về một công thức được không ?

N.T.T.H (PTTH Kim Liên, Hà Nội)

Đáp : Được chứ ! $I_n = \dfrac{(n-1)!!}{n!!}\left[\dfrac{\pi+2}{4} + (-1)^n \cdot \dfrac{\pi-2}{4}\right]$.

Em kiểm tra lại nhé !

? Bạn em có đố em tính $I = \int^{2000\pi} \sin^{1999} x \, dx$ mà cả lớp em không giải được, Tòa soạn giải giúp được không ?

Nhóm bạn lớp 12, PTTH Biên Hòa, Hà Nam.

Đáp: Đây là bài toán khó. Các em phải nhận xét được $f(x) = \sin^{1999} x$ là hàm số lẻ, liên tục và tuần hoàn với chu kì 2π. Lưu ý thêm các kết quả :

1) Nếu $f(x)$ liên tục và là hàm số lẻ trên $[-a; a]$ thì $\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 0$ (xem đề 93 của Bộ đề tuyển sinh, câu này đã là đề thi của Đại học Kinh tế Quốc dân Hà Nội).

2) Nếu $f(x)$ liên tục trên R và tuần hoàn với chu kì T thì :

$$\int_0^T f(x)\, dx = \int_a^{a+T} f(x)\, dx \quad \text{với mọi } a \in R.$$

Thật vậy : $\int_a^{a+T} f(x)\, dx = \int_a^T f(x)\, dx + \int_T^{a+T} f(x)\, dx$ (7)

Xét $\int_T^{a+T} f(x) dx$, đặt $u = x - T \Leftrightarrow x = u + T$ thì $dx = du$ và đổi cận tích phân ta có :

$$\int_T^{a+T} f(x)dx = \int_0^a f(u+T)du = \int_0^a f(u)du = \int_0^a f(x)dx \qquad (8)$$

Thế (8) vào (7) ta được :

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_a^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = \int_0^T f(x)dx.$$

Áp dụng 2 kết quả trên ta có :

$$I = \int_0^{2\pi} f(x)dx + \int_{2\pi}^{4\pi} f(x)dx + \ldots + \int_{1998\pi}^{2000\pi} f(x)dx$$

$$= 999\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = 999\,.\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0.$$

$\boxed{?}$ Bài toán : "Biện luận số nghiệm của phương trình $(x-1)^2 = 2|x-k|$", chúng em đã biến đổi phương trình tương đương với

$$\left[\begin{array}{l} 2(x-k) = (x-1)^2 \\ 2(x-k) = -(x-1)^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^2 - 4x + 2k + 1 = 0 & (1) \\ x^2 - 2k + 1 = 0 & (2) \end{array}\right.$$

Nhưng sau đó lí luận lung tung quá vì phải xét những tình huống mà (1) và (2) có nghiệm chung. Liệu có cách nào "đỡ" hơn không ?

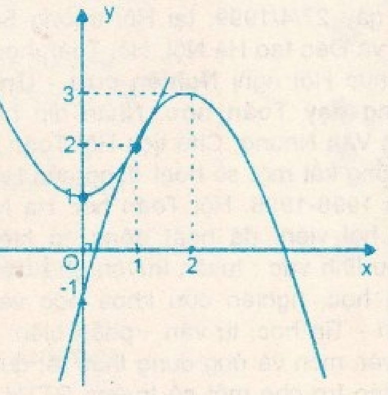
Nhóm học sinh PTTH Lê Quý Đôn, Đà Nẵng

Đáp: Các em đã hình dung ra tình huống (1) và (2) có nghiệm chung là rất tốt. Một số bạn cứ tưởng biện luận số nghiệm của từng phương trình rồi cộng lại ! Nhớ rằng : số nghiệm của phương trình ban đầu không phải là tổng số nghiệm của (1) và (2) !

Các em có thể viết tuyển gồm (1) và (2) về dạng

$$\left[\begin{array}{l} 2k = -x^2 + 4x - 1 \\ 2k = x^2 + 1 \end{array}\right.$$

Do đó số nghiệm của phương trình ban đầu đúng bằng số điểm chung của đường thẳng $y = 2k$ với hợp của hai đồ thị $y = -x^2 + 4x - 1$ và $y = x^2 + 1$.



Từ đồ thị sẽ có :

$$\text{* Nếu } \left[\begin{array}{l} 2k > 3 \\ 2k < 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k > \dfrac{3}{2} \\ k < \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

thì phương trình có 2 nghiệm

$$\text{* Nếu } \left[\begin{array}{l} 2k = 3 \\ 2k = 2 \\ 2k = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = \dfrac{3}{2} \\ k = 1 \\ k = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

thì phương trình có đúng 3 nghiệm.

* Nếu $2k \in (1;2) \cup (2;3) \Leftrightarrow k \in \left(\dfrac{1}{2};1\right) \cup \left(1;\dfrac{3}{2}\right)$

thì phương trình có 4 nghiệm.

L.T.N.
(Hà Nội)

Giải đáp bài

TẶNG BẠN HOA NÀO ?

Nếu Thảo nói thật thì cả ba bạn Thảo, Hương, Mai đều nói dối : mâu thuẫn. Vậy Thảo là người nói dối.

Nếu Mai nói dối thì sẽ xảy ra 2 trường hợp (trái với lời Mai). Hoặc cả 3 người đều nói dối $\Rightarrow$ bạn Thảo nói thật $\Rightarrow$ mâu thuẫn. Hoặc có ít nhất 2 người nói thật $\Rightarrow$ mâu thuẫn vì Thảo và Mai đều nói dối. Vậy Mai nói thật còn Thảo và Hương nói dối.

Từ đó ta tặng bạn Mai hoa lan, tặng bạn Hương hoa hồng, tặng bạn Thảo hoa lay ơn.

Các bạn sau có đáp án tốt : *Dương Tuấn Anh*, 5H, Tiểu học Ba Đồn, Quảng Trạch, **Quảng Bình**; *Hà Thế Hùng*, 10C, chuyên **Yên Bái**; *Hoàng Thị Liên*, 9A, THCS Vĩnh Tường; *Phan Duy Viện*, 10A, chuyên **Vĩnh Phúc**. *Nguyễn Việt Hà*, 7H, Trưng Vương; *Nguyễn Việt Dũng*, 8A, Nguyễn Trãi; *Nguyễn Anh Minh*, 9B, Ngọc Lâm, Gia Lâm, **Hà Nội**; *Trần Thị Tâm*, 7A, Tự Cường, Tiên Lãng, **Hải Phòng**; *Nguyễn Song Bảo*, 12A$_1$, Trần Cao Vân, Tam Kỳ, **Quảng Nam**; *Trần Trung Kiên*, 11A$_6$, Lý Tự Trọng, Nha Trang, **Khánh Hòa**.

BÌNH PHƯƠNG

DỰNG HÌNH TRÒN

Trong hình vuông đơn vị có n hình tròn ($n \in N$, $n \geq 2$) (O_1, R_1), (O_2, R_2), . .., (O_n, R_n) thỏa mãn $R_1 + R_2 + \ldots + R_n \leq \dfrac{1}{2}$.

Chỉ dùng compa dựng trong hình vuông đó hình tròn có diện tích bằng tổng diện tích của n hình tròn trên.

NGÔ VĂN THÁI

Ngày 9-10/4/1999, tại trường Đại học Bách Khoa Hà Nội, Hội thảo **Phát triển công cụ tin học trợ giúp cho giảng dạy, nghiên cứu và ứng dụng toán học** đã được tổ chức theo sáng kiến của nhiều nhà Toán học, Tin học, Giáo dục học. Hội thảo đã được sự tích cực ủng hộ của Bộ trưởng Bộ Giáo dục và Đào tạo Nguyễn Minh Hiển và sự chuẩn bị chu đáo của Khoa Toán ứng dụng cùng các cơ quan chức năng của trường Đại học Bách khoa Hà Nội. Hội thảo đã có hơn 40 báo cáo khoa học của nhiều nhà nghiên cứu và nhà giáo trong cả nước. Thành công của Hội thảo là nhờ sự phối hợp chặt chẽ giữa Bộ Giáo dục và Đào tạo, Trung tâm Khoa học tự nhiên và Công nghệ Quốc gia, trường đại học Bách Khoa Hà Nội, Viện Công nghệ Thông tin và Viện Toán học.

Trong các ngày 16-17-18 tháng 4 vừa qua, thành phố Đà Nẵng như tưng bừng lên với 38 đoàn học sinh từ 25 tỉnh, thành phía Nam về dự kì thi Olympic 30-4. Một ngày hội lớn của 1039 học sinh và 203 giáo viên của 10 môn thi : Toán, Lý, Hóa, Văn, Sinh, Sử, Anh Văn, Pháp Văn, Tin học, Địa cho 2 khối 10 và 11. Lễ khai mạc được tổ chức tại Nhà hát Trưng Vương vào chiều 16.4.1999. Đồng chí Trương Quang Được, Ủy viên BCHTW Đảng Cộng sản Việt Nam, Bí thư Thành ủy, Chủ tịch HĐND thành phố Đà Nẵng, đồng chí Nguyễn Hoàng Long, Phó Chủ tịch UBNDTP và các đồng chí lãnh đạo của các cơ quan, ban ngành thành phố, các đồng chí lãnh đạo Sở GD-ĐT đã đến dự. Ngay sau đó, Hội đồng chọn đề được thành lập, với sự tham gia ý kiến rất dân chủ về phương thức bốc thăm, chọn các thành viên ra đề từ các đề do 38 đoàn gửi tới. Công việc chọn, in ấn đề thi được thực hiện suốt từ 15h30 ngày 16.4 đến 6h.30 ngày 17.4 thật là khẩn trương, khoa học và rất vất vả. Sáng 17.4, cuộc thi bắt đầu ở 3 địa điểm : trường PTTH Phan Châu Trinh, Trường THCS Kim Đồng và trung tâm Tin học INDEX. Trong khi học sinh tiến hành làm bài thì các trưởng đoàn họp trao đổi về kinh nghiệm phát triển các trường chuyên và thể lệ cho cuộc thi lần thứ VI được tổ chức tại Đồng Nai. Chiều 17.4, Hội đồng chấm thi bắt đầu làm việc và đến tận 24h00 mới kết thúc.

Sáng 18.4, tại trường PTTH chuyên Lê Quý Đôn, Đà Nẵng đã tiến hành trọng thể lễ trao giải. Cuộc thi đã trao các giải đồng đội nhất, nhì, ba cho các đoàn : trường PTTH chuyên Lê Quý Đôn, Đà Nẵng ; trường PTTH chuyên Lê Hồng Phong, TP Hồ Chí Minh; Khối PT năng khiếu trường ĐHKHTN, ĐHQG TP Hồ Chí Minh. Giải cá nhân gồm 20 Huy chương vàng, 20 Huy chương bạc, 20 Huy chương đồng và 35 Bằng danh dự đã được trao cho các học sinh. 16 đoàn có học sinh nhận được huy chương cá nhân. Đặc biệt : tạp chí Toán học và Tuổi trẻ đã trao một giải **đề toán hay nhất** cho thầy giáo Lâm Văn Xương, trường chuyên Nguyễn Du, Đắc Lắc và một giải **học sinh có lời giải toán hay nhất** cho em Lương Thế Nhân, lớp 10, PT năng khiếu, ĐHKHTN, ĐHQG TP Hồ Chí Minh. Cuộc thi đã thành công tốt đẹp trong tiếng kèn của đoàn quân nhạc Quân khu V. Xin cảm ơn các nhà tài trợ : Ngân hàng Châu Á (ACB), Trung tâm tin học INDEX, ASDEC, Nhà sách Minh Đức, Hội Tin học thành phố Đà Nẵng, Công ty nước giải khát quốc tế IBC, Hãng nước ngọt Cocacola, Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ, ... đã quan tâm tới kì thi. Xin cảm ơn tất cả các cơ quan, ban ngành, trường học của thành phố Đà Nẵng đã giúp đỡ cuộc thi.

Đề thi được trao giải "đề toán hay nhất" của cuộc thi Olympic 30-4 - Tác giả : Lâm Văn Xương. Đề dành cho lớp 11 :

Cho dãy (x_k) (k = 1, 2, ..., 1999) được xác định bởi :

$$x_k = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \dots + \frac{k}{(k+1)!}$$

$$\text{Tính } \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{x_1^n + x_2^n + \dots + x_{1999}^n}$$

Ngày 27/4/1999, tại Hội trường Sở Giáo dục và Đào tạo Hà Nội, Hội Toán học Hà Nội đã tổ chức Hội nghị **Nghiên cứu - Ứng dụng và Giảng dạy Toán học**. Nhân dịp này, GS. TS Trần Văn Nhung, Chủ tịch Hội Toán học Hà Nội đã tổng kết một số hoạt động của Hội trong các năm 1996-1998. Hội Toán học Hà Nội, với hơn 600 hội viên, đã hoạt động có hiệu quả trên nhiều lĩnh vực : tuyên truyền phổ biến kiến thức toán học, nghiên cứu khoa học và ứng dụng Toán - Tin học, tư vấn - phản biện - giám định chuyên môn và ứng dụng thực tế, quan hệ quốc tế, bảo trợ cho một số trường PTTH dân lập tại Hà Nội.

Hội nghị đã có nhiều báo cáo có giá trị về : nghiên cứu toán học ; ứng dụng tin học và toán học trong đời sống, trong giáo dục ; phương pháp giảng dạy toán học ở các trường Đại học, trường phổ thông.

NGỌC MAI

GIẢI ĐỐ

Hàng trăm bạn từ khắp nơi tham gia giải đố và hầu hết là giải... bằng thơ. Một số bạn hơi ép khi giải, chẳng hạn : "Phương trình có nhánh phải chăng có chồi ?", "Số π chỉ đứng không ngồi", v.v... Nhiều bạn giải bằng thơ, nhưng dựa hẳn vào bài thơ đố. Xin trao giải nhất cho bạn Trương Hải Duyên (**10A**$_1$, **PTTH** chuyên Vĩnh Phúc, Vĩnh Phúc), với bài thơ :

Anh **Hàm số** chẳng **có răng**
Bao nhiêu dáng điệu chẳng **ăn được gì**
Đồ thị vươn **nhánh** làm chi ?
Thân. **chồi** không có nhớ ghi vào đời
Anh **hình trụ đứng** đây rồi
Hỏi sao anh lại chẳng **ngồi** mà chơi ?
Ngoài kia **mặt phẳng** kêu trời ?
Tôi **môi** chẳng có suốt đời phải **im**.
Anh **đường tròn** mới lim dim.
Tôi **tâm** thì có nhưng **tim** mất rồi
Hệ trục tọa độ nối lời :
Con tôi **gốc** có nhưng thời **rễ** đâu ?
Tiếp tuyến thấy vậy liền câu :
Riêng tôi chẳng biết **mời** nhau bao giờ
Hàm số **tang** vẻ tỉnh bơ :
Tôi là người chẳng bơ phờ **lâm ly**
Vectơ vươn ngọn rầm rì :
Đầu tôi tuy có **miệng** thì lại chưa
Đến phiên anh bạn **lũy thừa** :
Có **mũ** mà chẳng **nắng mưa** bao giờ
Tự dưng **lôga** bất ngờ :
Rít lên một tiếng mà chưa hề gào
Anh **đường cao** ở chỗ nào ?
Có **chân** mà chẳng **đi vào đi ra** ?
Đâu rồi **thuật toán** tài hoa ?
Ma đây mà chẳng thấy ra để trừ
Cát tuyến có vẻ lắc lư
Nhà **sàn** chưa dựng hỏi giờ ở đâu ?
Hỗn số là chúa hư lâu
Ấy thế mà chẳng khi nào bị **dần**
Hình bình hành mới góp phần :
Mặc dù tôi chẳng một lần **thơm tho**
Tôi xin kết thúc bài thơ
Vui xuân cùng bạn đợi chờ báo khen !

Xin trao thêm tặng phẩm cho các bạn : *Hoàng Sơn*, 112, A8, Vĩnh Hồ, **Hà Nội**; *Lê Phương Thanh*, 9, THCS Nguyễn Khuyến, Kim Thành, **Hải Dương**, Nguyễn Thu Hiền, 6B, THCS Hải Đình, Đồng Hới, **Quảng Bình**, *Bùi Công Thức*, khóm 4, khu 10, thị trấn Tân Phú, **Đồng Nai**.

LÊ THỐNG NHẤT

HỌA THƠ

Đa số các bạn chưa nắm vững luật thơ Đường, và nguyên tắc họa thơ, do đó phạm luật rất nhiều. Xin trao quà cho bạn Phan Đức Tuấn, 39C, khoa Toán, ĐHSP Vinh, **Nghệ An** với bài họa **Đón xuân** (số 261) và bạn Đoàn Thanh, ấp I, thị trấn Mỏ Cày, **Bến Tre** :

ĐI THI TỰ VỊNH

Đọc kỹ đề thi, tớ hoảng kinh
Than ôi, chịu bí cái đề Hình !
Thí sinh ngồi cạnh không thương bạn
Giám thị đi qua chẳng thể tình
Nhăn mặt, mày cau như khỉ đột
Vò đầu, tóc rối giống tinh tinh
Chuông reo báo hiệu : giờ thi hết !
Lẩm bẩm : kỳ sau ráng hết mình...

Xin cảm ơn tất cả các bạn và hẹn gặp lại dịp Xuân sau.

C.L.B

NHANH MẮT KÌ NÀY

TÌM TÊN TRONG BẢNG CHỮ

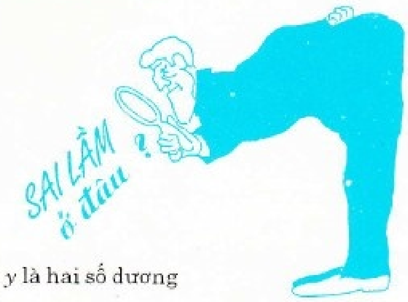
Bạn hãy tìm tên của một số vị "quen biết" với dân làm toán trong bảng dưới đây sao cho tên phải gồm một số chữ liên tiếp theo hàng ngang hoặc cột dọc hoặc đường chéo.

G	A	U	X	Ơ	B	C	C
D	I	C	A	L	C	Ô	Ă
M	F	O	S	E	E	S	N
L	E	P	N	I	T	I	G
A	C	O	V	E	M	Ơ	T
I	M	A	B	U	N	E	O
D	A	L	Ă	M	B	E	T

Một chữ cái có thể nằm trong nhiều tên.

Phần thưởng sẽ trao cho bạn nào gửi về nhanh nhất, với phát hiện nhiều nhất !

NGỌC MAI



Đề : Cho x, y là hai số dương thỏa mãn $x + \frac{1}{y} \le 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$M = 32 \cdot \frac{x}{y} + 1999 \cdot \frac{y}{x}$$

Lời giải. Từ $x, y > 0$ ta có $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \ge 2$

$x, y > 0$ và $x + \frac{1}{y} \le 1$, ta có :

$1 \ge \left(x + \frac{1}{y}\right)^2 \ge 4 \cdot x \cdot \frac{1}{y} \Rightarrow \frac{y}{x} \ge 4.$

Do vậy

$$M = 32\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + 1967\frac{y}{x} \ge 32.2 + 1967.4 = 7932.$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = y$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của M là 7932.

Bình luận Nhưng ! ... $x = y$ thì $M = 2031$.

Sai lầm của lời giải ở đâu ?

NGUYỄN ĐỨC TẤN

(TP Hồ Chí Minh)

Trường PTTH năng khiếu Trần Phú, Hải Phòng

Trường PTTH NK Trần Phú, Hải Phòng được thành lập từ tháng 6 -1986 với mục tiêu là đào tạo bồi dưỡng học sinh giỏi phục vụ chiến lược đào tạo bồi dưỡng nhân tài cho thành phố Hải Phòng và cho đất nước.

Trong những năm đầu tiên trường chỉ có bốn hệ chuyên : chuyên Toán, chuyên Văn, chuyên Vật lí, chuyên Nga văn. Cho đến nay trường đã có các hệ chuyên : chuyên Toán, chuyên Tin, chuyên Lý, chuyên Hóa, chuyên Sinh, chuyên Văn, chuyên Sử, chuyên Địa, chuyên Anh, chuyên Nga, chuyên Pháp, đáp ứng việc bồi dưỡng học sinh giỏi cho gần đủ các môn học trong một trường phổ thông trung học.

Đội ngũ các thầy cô giáo của nhà trường là những người có tâm huyết, giỏi chuyên môn, yêu nghề, tận tâm trong công việc. Cô giáo Trần Mai Hương nhà giáo ưu tú - Hiệu trưởng nhà trường trong 10 năm đầu của trường là một người như vậy. Bằng tấm lòng và sự am tường về chuyên môn, nghiệp vụ cô đã tạo dựng được nền móng vững chắc cho sự phát triển của nhà trường.; tạo nên sự đoàn kết nhất trí cao trong tập thể giáo viên. Trên nền tảng vững chắc đó, các cá nhân được phát huy hết năng lực tạo nên sự nổi trội trong sự tin yêu của đồng nghiệp và học sinh. Cô Nguyễn Bích Ngọc, giáo viên tiếng Nga đã từng có 3 học sinh đạt giải quốc tế. Thầy Khúc Giang Sơn, giáo viên chuyên Toán có 2 học sinh đạt giải Quốc tế và năm 1999 được tặng giải thưởng Lê Văn Thiêm. Thầy giáo Nguyễn Đình Thúy, nhà giáo ưu tú, cô Nguyễn Thanh Hà, thầy Lê Tự Cường, thầy Vũ Trường Sơn đã có học sinh đạt giải quốc tế và khu vực. Đặc điểm nổi bật và là niềm tự hào của nhà trường là sự đoàn kết nhất trí cao trong toàn thể hội đồng. Mỗi thành tích đạt được là công sức chung và cũng là niềm vui chung của mọi thành viên.

Các em học sinh trường năng khiếu Trần Phú đã xây dựng được phong cách của mình: chăm học, có ý thức rèn luyện, tự đào tạo cao về cả tri thức và đạo đức. Dưới sự chỉ bảo, hướng dẫn của các thầy cô giáo và sự chăm sóc, động viên của các bậc phụ huynh, các em đã có những vượt trội trong học tập. Nhiều em đã đạt những thành tích xuất sắc và là niềm tự hào của học sinh Hải Phòng. Các em Phạm Ngọc Long, Ngô Đức Duy - đạt giải nhất Quốc tế. Tô Trần Tùng, Nguyễn Thị Hoài Trang - đạt giải nhì Quốc tế. Nguyễn Xuân Long, Trần Trọng Thắng, Trần Thanh Huyền, Lê Thị Mai Trang - đạt giải ba Quốc tế. Lê Hải Dương - đạt giải khuyến khích môn Vật Lý quốc tế. Ngoài ra đã có 346 em đạt giải trong các kỳ thi học sinh giỏi quốc gia và hàng ngàn em đạt giải trong các kì thi học sinh giỏi thành phố.

Các em học sinh Trường PTTH NK Trần Phú không chỉ học tốt mà còn phát triển khá toàn diện. Sau khi ra trường các em vẫn giữ vững được truyền thống của học sinh trường năng khiếu Trần Phú và trở thành những sinh viên giỏi, những cán bộ xuất sắc trong nhiều lĩnh vực. Có nhiều em đã trở lại công tác tại trường, kế tục sự nghiệp bồi dưỡng học sinh các thế hệ tiếp theo một cách rất xứng đáng.

Trường PTTH NK Trần Phú đã thực sự là địa chỉ tin cậy trong công tác bồi dưỡng nhân tài cho thành phố và cho đất nước.

Ảnh : Thầy giáo Nguyễn Minh Hà (ngoài cùng bên phải) cùng nhóm giáo viên chuyên toán của trường PTTH NK Trần Phú

HÃY ĐÓN ĐỌC SỐ TỚI (264)

✔ Số tạp chí cuối năm học với những bài viết hấp dẫn và bổ ích :

- Đường dây nóng trả lời bạn đọc về môn thi Toán của kì thi tuyển sinh Đại học, Cao đẳng.
- Mối quan hệ giữa hai bất đẳng thức Côsi và Becnuli.
- Vài nét về dạy và học toán ở Singapo và Malaysia.

✔ Cuộc thi mới trong hè với yêu cầu VUI VẺ, TƯƠI TRẺ, THÔNG MINH; với 6 "pha" thử tài của bạn đăng ở hai số tạp chí tháng 6 và 7 ! Giải thưởng trao ngay dịp đầu năm học.

✔ Những chuyên mục thường kì mà các bạn vẫn yêu thích.

✔ Tin về Đại hội lần thứ IV của Hội Toán học Việt Nam tổ chức ngày 30-5-1999 tại Hà Nội.

TH&TT

ISSN : 0866-0853
Chỉ số : 12884
Mã số : 8BT65M9

Chế bản tại Tòa soạn
In tại Nhà máy in Diên Hồng, 57 Giảng Võ
In xong và nộp lưu chiểu tháng 5 năm 1999

Giá : 3.000đ
Ba nghìn đồng