BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO * HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NĂM THỨ 36 - RA HÀNG THÁNG
Số 4 (262)
1999

Đề thi Olympic Tây Ban Nha

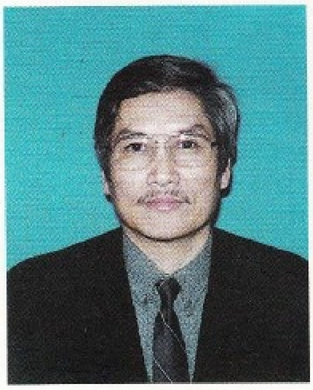
GIAI ĐIỆU PARABOL

Trường PTTH chuyên Lê Quý Đôn - Đà Nẵng

Những gương mặt, những tấm lòng dành cho *Toán học và Tuổi trẻ*

GS Phan Đình Diệu sinh ngày 12-6-1936, quê ở Can Lộc, Hà Tĩnh. Ông bảo vệ luận án PTS năm 1965 và TS năm 1967 tại Liên Bang Nga, được phong Giáo sư năm 1980. Ông giảng dạy tại khoa Toán tại trường Đại học sư phạm Hà Nội (1957-1962), sau đó chuyển về Ủy ban khoa học Nhà nước. GS từng là Viện trưởng Viện Khoa học tính toán và điều khiển (1977-1985), Phó Viện trưởng Viện Khoa học Việt Nam (1977-1993), Chủ tịch Hội Tin học Việt Nam (1988-1996), Phó trưởng ban thường trực Ban chỉ đạo Chương trình quốc gia về Công nghệ thông tin (1994-1997). Lĩnh vực nghiên cứu chủ yếu của giáo sư là : Lôgic toán và Toán học kiến thiết, Hệ thống điều khiển và ngôn ngữ hình thức, lí thuyết mật mã và an toàn thông tin. Giáo sư là đại biểu Quốc hội khóa 5 và 6, từ 1977 đến nay là ủy viên, rồi ủy viên Đoàn chủ tịch Ủy ban Trung ương Mặt trận Tổ quốc Việt Nam.

Nhà giáo LÊ HẢI CHÂU sinh năm 1926, quê ở Nghi Xuân, Hà Tĩnh. Ông là ủy viên thường vụ Hội toán học Việt Nam khóa 1, trong nhiều năm là ủy viên Hội đồng biên tập Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ. Ông phụ trách công tác chỉ đạo môn toán, bồi dưỡng học sinh giỏi toán tại Vụ Trung học phổ thông, Bộ Giáo dục từ năm 1957 đến 1990, là tác giả nhiều cuốn sách giáo khoa toán phổ thông và trên 50 cuốn sách tham khảo về toán. Ông là Trưởng đoàn học sinh Việt Nam dự thi toán quốc tế lần đầu và nhiều năm sau. Ông viết "chúng ta có quyền tự hào về thành tích liên tục suốt 25 năm qua của học sinh giỏi toán nước ta, đại biểu cho thế hệ trẻ Việt Nam thông minh, cần cù, đầy sức sáng tạo.



PGS VŨ DƯƠNG THỤY sinh ngày 10-3-1945, quê ở Hà Đông, Hà Tây. Ông bảo vệ luận án PTS năm 1980 tại Liên Bang Nga, được phong PGS năm 1991. Ông giảng dạy tại khoa Toán trường Đại học Sư phạm Hà Nội từ 1965, sau đó làm chủ nhiệm bộ môn Phương pháp giảng dạy Toán. Từ 1991, ông công tác tại Nhà xuất bản Giáo dục, sau đó làm Phó Tổng biên tập rồi Phó Giám đốc Nhà xuất bản Giáo dục, trực tiếp chỉ đạo Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ. PGS là Phó Chủ tịch kiêm Tổng thư kí Hội giảng dạy toán học Phổ thông. Là cộng tác viên của Toán học và Tuổi trẻ từ những số đầu tiên, ông nhớ lại những năm 1965-1966 khi trường Đại học Sư phạm sơ tán về làng quê ở Hưng Yên, vẫn thường mang báo Toán đến trao đổi với sinh viên những bài toán khó. PGS mong các bạn học sinh và sinh viên sư phạm - người thầy giáo tương lai - đến với tạp chí Toán học và Tuổi trẻ "chắc chắn sẽ tìm được nhiều điều bổ ích cho nghề nghiệp tương lai của các bạn".

PGS NGUYỄN XUÂN HUY sinh ngày 5-6-1944 quê ở Nam Định. Ông bảo vệ PTS năm 1981 và TS năm 1991, được phong PGS năm 1992. PGS là Trưởng phòng cơ sở dữ liệu và lập trình của Viện Công nghệ thông tin, là ủy viên Hội đồng biên tập Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ trong nhiều năm.

Là người đặt mua báo Toán từ những số đầu tiên, khi còn là giáo viên cấp 2 ở huyện Ba Vì Hà Tây, ông nhớ lại "Tôi háo hức mong báo đến như đứa trẻ mong mẹ đi chợ về. Cầm tờ báo mới, trong lòng tôi dấy lên một cảm xúc hồi hộp khó tả. Thời kì ấy chủ yếu tôi học theo báo, chọn ra những thông tin bổ ích để truyền thụ lại cho học trò. Tôi thường chọn các đề toán khó ở báo rồi làm dễ nó đi bằng cách thay đổi một vài giả thiết". Ông tâm sự "Đọc báo để hiểu thấu đáo đã khó, viết báo hình như còn khó hơn. Tôi tự cảm thấy mình còn nợ bạn đọc nhiều quá..."

Toán học và Tuổi trẻ
Mathematics and Youth

Năm thứ 36
Số 262 (4-1999)
Tòa soạn : 25 Hàn Thuyên, Hà Nội
ĐT : 04.8262477-04.9714359

TRONG SỐ NÀY

Dành cho các bạn
TRUNG HỌC CƠ SỞ

TỪ CÁC TÍNH CHẤT CƠ BẢN CỦA BẤT ĐẲNG THỨC

VŨ ĐỨC CẢNH
(*Đại học An Ninh – Hà Nội*)

Ta đã biết các tính chất cơ bản của bất đẳng thức được coi là những yếu tố nền tảng, cơ sở để từ đó xây dựng được các bất đẳng thức mới phức tạp hơn. Ngược lại muốn chứng minh một bất đẳng thức, ta cần phải sử dụng các tính chất cơ bản của bất đẳng thức và các bất đẳng thức quen thuộc như Côsi, Bunhiacôpxki sau khi biến đổi biểu thức hoặc thêm bớt vào biểu thức một số hạng nào đó.

Sau đây là một số ví dụ minh họa :

Ví dụ 1. Cho a, b, c là ba số thực dương. Chứng minh rằng :

$$\frac{(a+b)^2}{c}+\frac{(b+c)^2}{a}+\frac{(c+a)^2}{b} \ge 4(a+b+c) \qquad (1)$$

Giải. *Cách 1.* Ta có :

$$(1) \Leftrightarrow \frac{(a+b)^2}{c}+\frac{(b+c)^2}{a}+\frac{(c+a)^2}{b}+4(a+b+c) \ge 8(a+b+c) \qquad (2)$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức Côsi, ta có :

$$\frac{(a+b)^2}{c}+4c \ge 2\sqrt{\frac{(a+b)^2}{c}.4c}$$

hay $\dfrac{(a+b)^2}{c}+4c \ge 4(a+b)$

Chứng minh tương tự, ta cũng có :

$$\frac{(b+c)^2}{a}+4a \ge 4(b+c)\ ; \quad \frac{(c+a)^2}{b}+4b \ge 4(c+a).$$

Cộng từng vế ba bất đẳng thức trên sẽ thu được (2). Từ đó có điều phải chứng minh.

Cách 2. Ta có :

$$(1) \Leftrightarrow \left[\frac{(a+b)^2}{c}+\frac{(b+c)^2}{a}+\frac{(c+a)^2}{b}\right](a+b+c) \ge 4(a+b+c)^2 \qquad (3)$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpxki, ta có :

$$4(a+b+c)^2 = [(a+b)+(b+c)+(c+a)]^2$$

$$=\left[\left(\frac{a+b}{\sqrt{c}}\right).\sqrt{c}+\left(\frac{b+c}{\sqrt{a}}\right).\sqrt{a}+\left(\frac{c+a}{\sqrt{b}}\right).\sqrt{b}\right]^2 \le$$

$$\left[\left(\frac{a+b}{\sqrt{c}}\right)^2+\left(\frac{b+c}{\sqrt{a}}\right)^2+\left(\frac{c+a}{\sqrt{b}}\right)^2\right]\left[(\sqrt{c})^2+(\sqrt{a})^2+\sqrt{b})^2\right]$$

$$=\left[\frac{(a+b)^2}{c}+\frac{(b+c)^2}{a}+\frac{(c+a)^2}{b}\right](a+b+c)$$

Suy ra bất đẳng thức (3) đúng. Từ đó có điều phải chứng minh.

Ví dụ 2. Cho a, b, c là ba số dương. Chứng minh rằng :

$$\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a} \ge a^2+b^2+c^2 \ (4)$$

Giải. Ta có :

$$(2) \Leftrightarrow 2\left(\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\right)+(a^2+b^2+c^2) \ge 3(a^2+b^2+c^2) \qquad (5)$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi :

$$\frac{a^3}{b}+\frac{a^3}{b}+b^2 \ge 3\sqrt[3]{\frac{a^3}{b}.\frac{a^3}{b}.b^2}$$

hay $2.\dfrac{a^3}{b}+b^2 \ge 3a^2$

Chứng minh tương tự, ta cũng có :

$$2.\frac{b^3}{c}+c^2 \ge 3b^2\ ; \quad 2.\frac{c^3}{a}+a^2 \ge 3c^2$$

Cộng từng vế ba bất đẳng thức trên ta thu được (5). Từ đó có điều phải chứng minh.

Ví dụ 3. Cho a, b, c, d là các số dương.

Đặt $M=\dfrac{a+b}{a+b+c}+\dfrac{b+c}{b+c+d}+\dfrac{c+d}{c+d+a}+\dfrac{d+a}{d+a+b}$

Chứng minh rằng : $2 < M < 3$.

Giải. Vì a, b, c, d là các số dương nên $a+b+c$, $b+c+d$, $c+d+a$, $d+a+b$ đều nhỏ hơn $a+b+c+d$.

Do đó, ta có :

$$M > \frac{a+b}{a+b+c+d}+\frac{b+c}{a+b+c+d}+\frac{c+d}{a+b+c+d}+\frac{d+a}{a+b+c+d}$$

$$=\frac{2(a+b+c+d)}{a+b+c+d}=2 \qquad (6)$$

và $M = \left(1 - \frac{c}{a+b+c}\right) + \left(1 - \frac{d}{b+c+d}\right) + \left(1 - \frac{a}{c+d+a}\right) + \left(1 - \frac{b}{d+a+b}\right) =$

$= 4 + \frac{(-c)}{a+b+c} + \frac{(-d)}{b+c+d} + \frac{(-a)}{c+d+a} + \frac{(-b)}{d+a+b} <$

$< 4 + \frac{(-c)}{a+b+c+d} + \frac{(-d)}{a+b+c+d} + \frac{(-a)}{a+b+c+d} + \frac{(-b)}{a+b+c+d}$

$= 4 - \frac{(a+b+c+d)}{a+b+c+d} = 3$ (7)

Từ (6) và (7) ta có : $2 < M < 3$ (Đpcm).

Ví dụ 4. Cho $x \geq y \geq z > 0$. Chứng minh rằng :

$$\frac{x^2y}{z} + \frac{y^2z}{x} + \frac{z^2x}{y} \geq x^2 + y^2 + z^2$$

Giải. Xét hiệu :

$$H = \left(\frac{x^2y}{z} + \frac{y^2z}{x} + \frac{z^2x}{y}\right) - (x^2+y^2+z^2)$$

$$= \frac{x^2(y-z)}{z} + \frac{y^2(z-x)}{x} + \frac{z^2(x-y)}{y}$$

Từ giả thiết $z \leq y$ và $x^2(y-z) \geq 0$ suy ra : $\frac{x^2(y-z)}{z} \geq \frac{x^2(y-z)}{y}$, từ $x \geq y$ và $y^2(z-x) \leq 0$ suy ra : $\frac{y^2(z-x)}{x} \geq \frac{y^2(z-x)}{y}$

Do đó :

$$H \geq \frac{x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y)}{y} \Rightarrow$$

$yH \geq x^2[(y-x)+(x-z)] + y^2(z-x) + z^2(x-y) =$
$= (x-y)(z^2-x^2) + (x-z)(x^2-y^2)$
$= (x-y)(x-z)[(x+y) - (x+z)] =$
$= (x-y)(x-z)(y-z) \geq 0$ (do $x \geq y \geq z > 0$).

Vậy $H \geq 0$, từ đó ta có điều phải chứng minh.

Ví dụ 5. Cho a, b, c là ba số dương. Chứng minh rằng :

$$\frac{a^2}{b^2+c^2} + \frac{b^2}{c^2+a^2} + \frac{c^2}{a^2+b^2} \geq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}.$$

Giải. Do vai trò của a, b, c là như nhau nên ta có thể giả sử $a \geq b \geq c > 0$.

Vì $1 \geq \frac{b}{a} \geq \frac{c}{a} > 0$ nên $\left(\frac{b}{a}\right)^2 \leq \frac{b}{a}$; $\left(\frac{c}{a}\right)^2 \leq \frac{c}{a}$ suy ra $\frac{b}{a} + \frac{c}{a} \geq \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 \Leftrightarrow a^2(b+c) \geq a(b^2+c^2)$. Từ đó kết hợp với $0 < (b^2+c^2)(b+c) \leq (a^2+c^2)(a+c)$ có :

$$\frac{a^2}{b^2+c^2} - \frac{a}{b+c} = \frac{a^2(b+c) - a(b^2+c^2)}{(b^2+c^2)(b+c)} \geq$$

$$\frac{a^2(b+c) - a(b^2+c^2)}{(a^2+c^2)(a+c)}, \quad (8)$$

Vì $\frac{a}{c} \geq \frac{b}{c} \geq 1$ nên $\left(\frac{a}{c}\right)^2 \geq \frac{a}{c}$; $\left(\frac{b}{c}\right)^2 \geq \frac{b}{c}$ suy ra $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} \leq \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 \Leftrightarrow c^2(a+b) \leq c(a^2+b^2)$

Từ đó kết hợp với $0 < (a^2+c^2)(a+c) \leq (a^2+b^2)(a+b)$ có :

$$\frac{c^2}{a^2+b^2} - \frac{c}{a+b} = \frac{c^2(a+b) - c(a^2+b^2)}{(a^2+b^2)(a+b)} \geq$$

$$\frac{c^2(a+b) - c(a^2+b^2)}{(a^2+c^2)(a+c)} \quad (9)$$

Có $\frac{b^2}{c^2+a^2} - \frac{b}{c+a} = \frac{b^2(c+a) - b(c^2+a^2)}{(a^2+c^2)(a+c)}$ (10)

Cộng từng vế (8), (9) và (10), ta được :

$$\frac{a^2}{b^2+c^2} - \frac{a}{b+c} - \frac{a}{b+c} + \frac{c^2}{a^2+b^2} - \frac{c}{a+b} + \frac{b^2}{c^2+a^2} - \frac{b}{c+a} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{b^2+c^2} + \frac{b^2}{c^2+a^2} + \frac{c^2}{a^2+b^2} \geq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$$

(Đpcm).

Nhiều bất đẳng thức trong khi thi chọn học sinh giỏi hoặc thi vào Đại học có thể chứng minh tương tự như trên. Mời các bạn thử sức với các bài tập sau :

Bài tập 1. Cho a, b, c là độ dài các cạnh của một tam giác. Chứng minh :

1) $\sqrt{\frac{a}{b+c-a}} + \sqrt{\frac{b}{c+a-b}} + \sqrt{\frac{c}{a+b-c}} \geq 3$

2) $\frac{a(b+c)}{b+c-a} + \frac{b(c+a)}{c+a-b} + \frac{c(a+b)}{a+b-c} \geq 2(a+b+c)$

Bài tập 2. Cho a, b, c là ba số dương. Chứng minh :

1) $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{3(ab+bc+ca)}{2(a+b+c)}$

2) $\frac{a^2}{b^3} + \frac{b^2}{c^3} + \frac{c^2}{a^3} \geq \frac{ab+bc+ca}{abc}$

Bài tập 3. Cho n là một số nguyên dương. Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{n^3} < \frac{5}{4}.$$

Bài tập 4. Hãy tổng quát hóa kết quả của ví dụ 4 và ví dụ 5 ở trên./.

CÁC LỚP THCS

Bài T1/258. *Cho a, b, c là các số nguyên dương thỏa mãn*

$$a^2 + b^2 = c^2(1 + ab)$$

Chứng minh rằng $a \ge c$ và $b \ge c$.

Lời giải. *Cách 1.* (theo *Lê Chí Kiên*, 9B, THCS Việt Trì, **Phú Thọ**).

Điều kiện của đề bài cho ta :

$$a^2 - abc^2 + b^2 - c^2 = 0$$

Xét phương trình bậc hai

$$x^2 - bc^2x + b^2 - c^2 = 0 \qquad (1)$$

Ta thấy a là một nghiệm của (1). Theo định lí Viet nó còn một nghiệm a' nữa sao cho

$$\begin{cases} a + a' = bc^2 & (2) \\ a.a' = b^2 - c^2 & (3) \end{cases}$$

Do (2) ta thấy a' là số nguyên và theo (1) ta có :

$$a'^2 - bc^2a' + b^2 - c^2 = 0$$

hay $\quad c^2(ba' + 1) = b^2 + a'^2 > 0$

suy ra $\quad ba' + 1 > 0$ hay $a' > \dfrac{-1}{b} \ge -1$.

Vậy $a' \ge 0$ hay $aa' \ge 0 \Rightarrow b \ge c$ (do (3)).

Chứng minh một cách tương tự (do vai trò bình đẳng của a và b) ta cũng có $a \ge c$.

Cách 2. (Theo *Nguyễn Đình Hòa*, 9B, THCS Việt Trì, **Phú Thọ**).

Ta có $a^2 + b^2 = c^2(1 + ab) \qquad (1)$

$\Leftrightarrow b^2 - c^2 = a(bc^2 - a) \qquad (2)$

Giả sử : $b < c$. Từ (2) suy ra $a(bc^2 - a) < 0$

$\Rightarrow a > bc^2$ (3). Từ (1) ta có

$c^2 - b^2 = a(a - bc^2) \ge a > bc^2$ (do (3))

Vậy có $c^2 - b^2 - bc^2 > 0$ hay $c^2(1-b) - b^2 > 0$ (4)

Mặt khác ta thấy b nguyên dương nên $c^2(1 - b) - b^2 < 0$ (5). (4) và (5) mâu thuẫn.

Vậy giả thiết $b < c$ là sai tức ta phải có $b \ge c$.

Chứng minh một cách hoàn toàn tương tự ta cũng có $a \ge c$.

Nhận xét. 1. Có rất ít bạn giải theo cách 1.

2. Đa số các bạn giải theo cách 2. Nhưng có nhiều bạn đã phạm sai lầm trong cách chứng minh bằng phản chứng. Xuất phát từ giả thiết ngược lại lại *$a<c$ và $b<c$* dẫn đến mâu thuẫn đã vội và kết luận. Vậy phải có $a \ge c$ và $b \ge c$.

3. Các bạn sau đây có lời giải đúng :

Sơn La: *Chu Tiến Dũng*, 9T, Trung tâm Chất lượng cao Mai Sơn; **Phú Thọ:** *Lê Thanh Tâm*, $8A_1$, Thanh Ba; **Vĩnh Phúc:** *Phùng Thanh Quang*, $9A_1$, Hai Bà Trưng, Mê Linh, *Tạ Hồng Quảng*, 7A, Nguyệt Đức, Yên Lạc, *Nguyễn Thanh Hải*, Dân tộc Nội trú, Lập Thạch; **Hà Tây :** *Đỗ Thị Thanh Hồng*, $9B_2$, Lê Lợi, Hà Đông; **Hà Nội:** *Nguyễn Trọng Đại, Đinh Thanh Tú*, 8T, Ngô Sĩ Liên, *Nguyễn Hiền Phương Nam*, 9A, Lê Quý Đôn; **Hải Phòng:** *Nguyễn Diệu Ly, Nguyễn Ngọc Bảo*, $8A_1$, Hồng Bàng, *Đỗ Ngọc Kiên*, $9D_1$, NK Trần Phú; **Hải Dương:** *Phạm Thành Trung*, 8A, Nguyễn Trãi; **Nam Định:** *Phùng Văn Thắng*, 9D, Ngô Đồng, Giao Thủy, Hoàng *Văn Giang*, $9A_6$, Trần Đăng Ninh; **Ninh Bình:** *Trịnh Ngọc Linh, Đặng Duy Hưng, Phạm Viết Thạch, Nguyễn Việt Hải*, 9B, Trương Hán Siêu, Thị xã Ninh Bình; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Đức Tài*, 9A, Tây Đô, Vĩnh Lộc, *Lưu Đức Thi*, 9A, Nhữ Bá Sĩ, Hoằng Hóa, *Mai Văn Hà, Hà Xuân Giáp*, 9C, Lê Quý Đôn, Bỉm Sơn, *Bùi Ngọc Hân*, 9C, Trần Mai Ninh, *Chu Thanh Hà*, 9E, Đông Thọ, TP. Thanh Hóa. **Nghệ An:** *Quan Minh Vương*, 8B, Sông Hiền, Thái Hòa, Nghĩa Đàn; **Khánh Hòa:** *Nguyễn Hoa Cương*, 9^{14}, Thái Nguyên, Nha Trang; **Đồng Tháp:** *Nguyễn Văn Huấn*, $9A_1$, *Trần Minh Tùng*, $9A_2$, TH chuyên ban, Thị xã Cao Lãnh.

TỐ NGUYÊN

Bài T2/258. *Tìm các nghiệm nguyên dương của hệ phương trình*

$$\begin{cases} x + y = z & (1) \\ x^3 + y^3 = z^2 & (2) \end{cases}$$

Lời giải. Ta có (2) $\Leftrightarrow (x+y)(x^2-xy+y^2) = z^2$

Kết hợp với (1) và lưu ý x, y dương ta có :

$$x^2 - xy + y^2 = x + y$$

$\Leftrightarrow y^2 - y(x+1) + x^2 - x = 0 \qquad (3)$

Từ (3) ta thấy y tồn tại $\Leftrightarrow \Delta y \ge 0$ $\Leftrightarrow 3(x-1)^2 \le 4$.

Vì x nguyên dương nên $x = 1$ hoặc $x = 2$.

- Nếu $x = 1$ thay vào (3) ta có : $y^2 - 2y = 0$ $\Rightarrow y = 2$ (vì y dương) và dẫn đến $z = 3$.

- Nếu $x = 2$ thay vào (3) ta có: $y^2 - 3y + 2 = 0$ $\Leftrightarrow y=1$ hoặc $y=2$. Với $y=1$ thì $z=3$; với $y=2$ thì $z = 4$.

Tóm lại, hệ có 3 nghiệm :

$(x; y; z) = \{(1;2;3) ; (2;1;3) ; (2;2;4)\}$.

Nhận xét. Rất nhiều bạn tham gia giải bài này theo nhiều cách khá cầu kì, phức tạp. Một số bạn nhầm lẫn nên thừa nghiệm, thậm chí chứng minh hệ không có nghiệm nguyên dương. Bạn Lê Văn Hiếu, 9D, THCS Hoằng Quý, Hoằng Hóa, Thanh Hóa có lưu ý đúng : "Bài toán trên chỉ là biến dạng của bài toán : tìm x, y nguyên dương thỏa mãn phương trình (3), rất quen thuộc !". Những bạn có cách giải gọn và chính xác hơn :

Hải Phòng: *Phạm Hồng Kiên* và *Nguyễn Hải Tùng*, 8T, THCS Chu Văn An ; **Hà Nội:** *Nguyễn Hoài Anh*, 9A, THCS Lê Quý Đôn, Cầu Giấy; **Quảng Bình:** *Võ Trần Thành*, 9B, THCS Hải Đình, Đồng Hới; **Thừa Thiên - Huế:** *Nguyễn Văn*, 8^2, THCS Thủy An; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Cao Thắng*, 9B, THCS Yên Lạc; **Nghệ An:** *Đậu Tuấn Anh*, 9B, THCS Đặng Thai Mai, Vinh; **Tây Ninh:** *Đào Duy Bình*, $8A_5$, THCS Suối Đá, Dương Minh Châu; **TP Hồ Chí Minh:** *Trần Vĩnh Hưng*, 9/3, THCS Nguyễn Du, Gò Vấp; **Phú Yên:** *Huỳnh Tấn Trung*, 9A, THCS Lương Thế Vinh; **Yên Bái:** *Nguyễn Việt Hùng*, 8E, THCS Lê Hồng Phong; **Hà Tĩnh:** *Trần Nhật Sinh*, 9A, THCS Phan Huy Chú, Thạch Hà; **Hải Dương:** *Nguyễn Thanh Hoàn*, 8A, THCS Nguyễn Trãi; **Gia Lai:** *Nguyễn Minh Thùy Linh*, 9A, THCS huyện A Yun Pa ; **Khánh Hòa:** *Trần Trung Duy*, *Nguyễn Hoàng Niệt*, 9^{14}, THCS Thái Nguyên, Nha Trang; **Lâm Đồng:** *Nguyễn Thị Thảo Nguyên*, 9C, THPT chuyên tỉnh; **Vĩnh Long:** *Nguyễn Hải Long*, 9(3), THCS Nguyễn Bỉnh Khiêm, thị xã Vĩnh Long; **Đà Nẵng:** *Lê Anh Tuấn*, 9^1, THCS Nguyễn Khuyến; **Quảng Ninh:** *Đỗ Quang Khánh*, $8A_2$, THCS Trần Quốc Toản, Uông Bí; **Thanh Hóa:** *Lương Ngọc Giáp*, 9A, THCS Nhữ Bá Sỹ, *Mai Hải Lộc*, 7T, THCS Nga Hải, Nga Sơn, ...

LÊ THỐNG NHẤT

Bài T3/258. *Cho các số thực x, y, z thỏa mãn* $x^2 + 2y^2 + 2x^2z^2 + y^2z^2 + 3x^2y^2z^2 = 9$.

Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của tích xyz.

Lời giải. ***Cách 1.*** Ta có :

$x^2+2y^2+2x^2z^2+y^2z^2+3x^2y^2z^2 = 9$

$\Leftrightarrow (x^2+2xyz+y^2z^2) + 2(y^2+2xyz+x^2z^2) + 3((xyz)^2-2xyz+1) = 12$

$\Leftrightarrow (x+yz)^2 + 2(y+xz)^2 + 3(xyz-1)^2 = 12$

$\Rightarrow 3(xyz-1)^2 \le 12 \Rightarrow (xyz-1)^2 \le 4$

$\Rightarrow -2 \le xyz-1 \le 2 \Rightarrow -1 \le xyz \le 3$.

$$xyz = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} x + yz = 0 \\ y + xz = 0 \\ xyz = -1 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow (x, y, z) = \{(1,-1,1), (1,1,-1), (-1,1,1)\}$.

Vậy xyz có giá trị nhỏ nhất là -1.

Cách 2. (của bạn *Nguyễn Minh Khánh*, lớp 9, Lương Thế Vinh, Duy Xuyên, Quảng Nam và một số bạn khác) :

Ta có :

$x^2+2y^2+2x^2z^2+y^2z^2+3x^2y^2z^2 =$
$x^2+y^2+y^2+x^2z^2+x^2z^2+y^2z^2+x^2y^2z^2 + x^2y^2z^2 + x^2y^2z^2$

$\ge 9\sqrt[9]{x^{12}y^{12}z^{12}}$

Vậy $9 \ge 9\sqrt[9]{x^{12}y^{12}z^{12}} \Rightarrow |xyz| \le 1$

$\Rightarrow -1 \le xyz \le 1$.

Ta thấy $xyz = -1$ chẳng hạn khi $x = -1$, $y=z=1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của xyz là -1.

Nhận xét. 1) Từ cách giải 2 suy ra ngay rằng giá trị lớn nhất của xyz là 1 đạt được chẳng hạn khi $x=y=z=1$.

Ở cách giải 1 dễ ngộ nhận rằng giá trị lớn nhất của xyz là 3. Tuy nhiên xyz không bao giờ bằng 3 vì hệ

$$\begin{cases} x + yz = 0 \\ y + xz = 0 \\ xyz = 3 \end{cases}$$

sẽ vô nghiệm.

Muốn tìm giá trị lớn nhất của xyz theo cách 1, ta biến đổi vế trái như sau :

$x^2+2y^2+2x^2z^2+y^2z^2+3x^2y^2z^2 =$

$= (x-yz)^2 + 2(y-xz)^2 + 3(xyz+1)^2 = 12$

$\Rightarrow xyz+1 \le 2 \Rightarrow xyz \le 1$.

2) Cách giải đơn giản nhất, cho phép tìm luôn một lúc cả max và min của xyz mà không cần dùng đến bất đẳng thức Côsi cho nhiều số thuộc về bạn *Bùi Thu Hà*, 9B, PT năng khiếu Trần Phú, **Hải Phòng**.

Đặt $A = xyz$. Khi đó :

Nếu $A^2 > 1$ thì

$$9 = x^2 + \frac{A^2}{x^2} + 2y^2 + \frac{2A^2}{y^2} + 3A^2 > x^2 + \frac{1}{x^2} + 2\left(y^2 + \frac{1}{y^2}\right) + 3$$

$\ge 2 + 2.2 + 3 = 9$ Vô lí. Vậy $A^2 \le 1 \Rightarrow -1 \le A \le 1$

$A = -1$ khi chẳng hạn $x = 1$, $y = z = -1$.

$A = 1$ khi chẳng hạn $x=y=z=1$.

2) Các bạn sau đây cũng có lời giải tốt :

Vĩnh Phúc: *Trần Tuấn Dũng*, *Cao Việt Dũng*, 9A, THCS Vĩnh Tường; **Đắc Lắc:** *Trần Quang*, 9A, THCS Phan Chu Trinh, Buôn Ma Thuột; **Đà Nẵng:** *Lê Anh Vũ*, 9/1 Nguyễn Khuyến; **Hải Phòng:** *Hoàng Thanh Tùng*, 9A, Núi Đèo Thủy Nguyên; **Khánh Hòa:** *Nguyễn Tôn Bảo*, 9^{14}, THCS Thái Nguyên, Nha Trang; **Phú Thọ:** *Đoàn Duy Hảo*, 9B, THCS Việt Trì; **Đồng Nai:** *Vũ Xuân Ngọc Tú*, 7, Quang Trung, Tân Phú; **Bắc Ninh:** *Trương Bảo Nam*, 9A, THCS Nguyễn Đăng Đạo; **Quảng Ninh:** *Lê Thanh Loan*, 9B, Thành phố Hạ Long; **Hà Tĩnh:** *Phan Thị Thủy*, 9A, THCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ; **Thanh Hóa:** *Lưu Đức Thi*, 9A Hoằng Hóa; **Nam Định:** *Đinh Thanh Hiện*, 9D Ngô Đồng, Giao Thủy.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

GIẢI BÀI KỲ TRƯỚC

Bài T4/258. *Cho đoạn thẳng AB và điểm D nằm giữa A và B. Xét đường tròn tiếp xúc với đoạn thẳng AB tại điểm D. Trên tiếp tuyến AE (tiếp điểm E khác D) của đường tròn lấy điểm M đối xứng với điểm A qua điểm E. Trên tiếp tuyến BF (tiếp điểm F khác D) của đường tròn lấy điểm N đối xứng với điểm B qua điểm F. Đường thẳng EF cắt AN ở K và cắt BM ở H. Chứng minh rằng tam giác DKH là tam giác cân. Hãy xác định tâm của đường tròn để DKH là tam giác đều.*

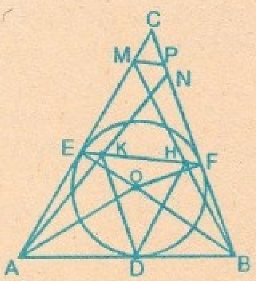
Lời giải. Gọi C là giao điểm của hai tia AE và BF (nếu $AE//BF$ thì không tạo thành ΔDKH nên không xét).

Từ M kẻ $MP//EF$ và cắt tia BN ở P. Do $\angle MEF = \angle PFE$ nên $ME = PF$. Theo định lí Talet thì : $\dfrac{MH}{HB} = \dfrac{PF}{FB} = \dfrac{ME}{DB} = \dfrac{AD}{DB} \Rightarrow DH//AM$ $\Rightarrow \angle DHE = \angle MEH$ (1)

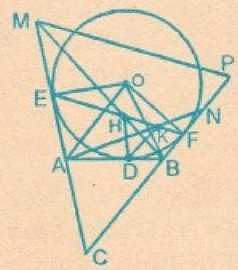
Tương tự có $DK//BN \Rightarrow \angle DKF = \angle NFK$ (2).

Từ (1) (2) suy ra $\angle DKH = \angle DHK$ nên ΔDKH là tam giác cân ở đỉnh D. Tâm O của đường tròn tiếp xúc với AB tại D phải nằm trên đường thẳng $DO \perp AB$ tại D (3).

ΔDKH là tam giác đều $\Leftrightarrow \angle KDH = \angle ECF = 60^o \Leftrightarrow \angle EOF = 120^o$ (4)



Hình 1



Hình 2

Khi đoạn thẳng OD không cắt EF thì từ (4) suy ra $\angle AOB = 120^o$ (5) (hình 1). Khi đoạn thẳng OD cắt EF thì từ (4) suy ra $\angle AOB = 60^o$ (6) (hình 2). Từ (3) (5) (6) kết luận được : Để ΔDKH là tam giác đều thì tâm O của đường tròn phải là giao điểm của đường thẳng $DO \perp AB$ tại điểm D và các cung tròn nhìn AB dưới góc 60^o hoặc 120^o.

Nhận xét. 1) Những sai sót mắc phải khi giải bài này :

- Khi xét điều kiện để ΔDKH là tam giác đều, khoảng 1/3 các bạn chỉ nêu được tâm O nằm trên cung chứa góc 120^o có hai đầu là A, B mà không nói đến O phải thuộc đường thẳng vuông góc với AB tại điểm D đã cho.

- Không có bạn nào chú ý về 2 trường hợp như hình 1 và hình 2 mà chỉ vẽ và kết luận được 1 trường hợp.

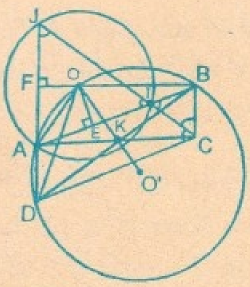
- Một số ít ngộ nhận rằng ΔDKH đều chỉ khi ΔABC là đều.

2) Chỉ có 1 bạn *Trần Quốc Việt* 9A, THCS Giao Thủy, **Nam Định** trả lời đúng về điều kiện để ΔDKH là đều, bằng cách tính được 2 giá trị của OD. Các bạn sau giải khá gọn :

Phú Thọ: *Vũ Chí Công*, 9B, THCS Việt Trì; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Hoàng Gia, Hoàng Xuân Quang*, 9A, THCS Vĩnh Tường, *Kim Đình Thái, Nguyễn Văn Giáp* 9B, THCS Yên Lạc; **Sơn La:** *Chu Tiến Dũng*, 9, TT CLC Mai Sơn; **Hà Nội:** *Nguyễn Hoàng Thạch*, 9C, THCS Ngọc Lâm, Gia Lâm; **Nam Định:** *Hoàng Văn Giang*, 9A_6, THCS Trần Đăng Ninh, *Đinh Thanh Hiện*, 9D, THCS Ngô Đồng, Giao Thủy; **Hải Dương:** *Ngô Xuân Bách, Nguyễn Tuấn Dương*, 9A, PT Nguyễn Trãi; **Hải Phòng:** *Nguyễn Kim Thanh*, 9A2, THCS Tiên Lãng, *Vũ Hoàng Hiệp*, 9T PTNK Trần Phú; **Thanh Hóa:** *Mai Văn Hà*, 9C, THCS Lê Quý Đôn, Bỉm Sơn; *Bùi Ngọc Hân*, 9C, THCS Trần Mai Ninh; **Nghệ An:** *Nguyễn Thị Hiền*, 9A, THCS Bến Thủy, Vinh; **Quảng Bình:** *Hoàng Anh*, 9B, THCS Hải Đình, Đồng Hới; *Phan Thanh Hương*, 9^I, THCS Đồng Mỹ, Đồng Hới.

VIỆT HẢI

Bài T5/258. *Cho đoạn thẳng AC cố định với trung điểm K; hai điểm B, D di động luôn luôn đối xứng với nhau qua K. Đường phân giác của góc BCD cắt các đường thẳng AB, AD lần lượt tại I, J. Gọi M là giao điểm thứ hai (khác A) của các đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD, AIJ. Chứng minh rằng M luôn luôn nằm trên một đường tròn cố định.*



Lời giải. Gọi K là giao của AC và BD, O và O' lần lượt là tâm của hai đường tròn ngoại tiếp tam giác AIJ và ABD. Trước hết ta chứng minh $AOBD$ là tứ giác nội tiếp. Thật vậy, gọi E và F là hình chiếu của O trên AB và AD ta có $\Delta FDO = \Delta EBO$ (c.g.c) do $OF = OE$, $FD = EB$ (vì tam giác AIJ cân tại A do $\angle AJI = \angle AIJ = \angle BCD/2$) nên ta có $\angle ADO = \angle ABO$ và $OD = OB$. Do $\angle ADO = \angle ABO$ nên tứ giác $AOBD$ là tứ giác nội tiếp. Vì O nằm trên (O')

và $OD = OB$ nên $OO' \perp BD$ và do đó OO' đi qua điểm giữa K của BD. Vì AM là dây chung cho nên OO' là trung trực của AM, ta có $AK=KM$. Vậy M luôn nằm trên đường tròn tâm K bán kính KA.

Nhận xét. Nhiều bạn giải đúng bài toán này, những bạn sau đây trình bày ngắn gọn và rõ ràng. **Đồng Tháp:** *Nguyễn Văn Huấn*, $9A_1$ trường THCB thị xã Cao Lãnh. **Hà Tây:** *Đặng Thành Tuấn*, 9A, THCS Thường Tín, *Đỗ Thị Thanh Hồng*, $9B_2$, THCS Lê Lợi, Hà Đông, *Trịnh Xuân Tuấn*, 9B Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hòa; **Hà Nội:** *Nguyễn Hoài Anh*, 9A, THCS Lê Quý Đôn, Cầu Giấy, *Phạm Bảo Trung*, 9A, Nguyễn Trường Tộ, *Nguyễn Hoàng Thạch*, 9c, THCS Ngọc Lâm, Gia Lâm; **Hải Phòng:** *Phạm Đức Hiệp*, 9T Chu Văn An, *Phạm Gia Vĩnh Anh*, *Vũ Hoàng Hiệp*, 9T, *Đỗ Ngọc Kiên*, 9D trường PTTH năng khiếu Trần Phú; **Vĩnh Phú:** *Hoàng Xuân Quang*, THCS Vĩnh Tường; **Thanh Hóa:** *Hà Xuân Giáp*, *Mai Văn Hà*, *Đỗ Mạnh Cường*, 9C, THCS Lê Quý Đôn, Thị xã Bỉm Sơn, *Bùi Ngọc Hân*, 9C, THCS Trần Mai Ninh; **Hải Dương:** *Đỗ Ngọc Quỳnh*, *Nguyễn Tuấn Dương*, *Ngô Xuân Bách*, *Lê Hải Yến* 9A, *Nguyễn Thanh Nam*, 8A PTTH Nguyễn Trãi, *Phạm Mạnh Tuấn*, 9B, THCS Chu Văn An, Thanh Hà, ; **Nam Định:** *Phùng Văn Thắng*, 9D, THCS Ngô Đồng Giao Thủy, *Trần Thanh Tùng*, 9A, *Hoàng Văn Giang*, $9A_6$, THCS Trần Đăng Ninh; **Quảng Bình:** *Đinh Quang Thắng*, 9A, THCS Nguyễn Hàm Vinh; **Yên Bái:** *Trần Thu Huế*, 9A, Lê Hồng Phong; **Phú Thọ:** *Nguyễn Đình Hòa*, 9B, THCS Việt Trì; **Đắc Lắc :** *Trần Quang*, 9A Phan Chu Trinh, Buôn Ma Thuột.

VŨ ĐÌNH HÒA

CÁC LỚP THPT

Bài T6/258. *Dãy số không âm a_o, a_1, a_2, ... thỏa mãn :*

$$a_{m+n} + a_{m-n} = \frac{1}{2}(a_{2m} + a_{2n})$$

với mọi cặp chỉ số m, n mà $m \geq n$. Tính a_{1998} biết $a_1 = 1$.

Lời giải. Cho $m=n=0$ ta được $a_o = 0$. Hơn nữa, với $m=1$, $n = 0$ và $m=n=1$ ta có

$$a_1 + a_1 = \frac{1}{2}(a_2 + a_o).$$

Từ đó suy ra $a_2 = 4$. Ta chứng minh $a_n = n^2$ bằng quy nạp. Thật vậy, khẳng định trên đúng với $n = 0, 1, 2$. Giả sử $a_n = n^2$ với $n = 0, 1, 2, ..., k$. Cho $m=k$ và $n=0$ ta được

$$a_k + a_k = \frac{1}{2}(a_{2k} + a_o).$$

Suy ra $\quad a_{2k} = 4a_k = 4k^2$

Cho $m = k$, $n = 1$ ta được

$$a_{k+1} + a_{k-1} = \frac{1}{2}(a_{2k} + a_2).$$

Từ đó suy ra

$$a_{k+1} = \frac{1}{2}a_{2k} + 2 - a_{k-1} =$$
$$= 2k^2 + 2 - k^2 + 2k - 1 =$$
$$= k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$$

Vậy, $a_n = n^2$, $\forall n = 0, 1, 2, ...$, Do đó ta có $a_{1998} = 1998^2$.

Nhận xét. Các bạn sau đây có lời giải tốt :

Đồng Tháp: *Nguyễn Đức Tùng*, *Nguy Đức Thuận*, 10T, THCB Cao Lãnh; *Trần Minh Tùng*, $9A_2$ Cao Lãnh; **Phú Thọ:** *Nguyễn Đình Hòa*, *Vũ Tuấn Tài*, *Vũ Chí Công*, 9B, PTCS Việt Trì; **Nam Định:** *Hoàng Văn Giang*, *Nguyễn Hải Tùng*, $9A_6$, THCS Trần Đăng Ninh; *Trần Quang Đức*, $10T_1$, PTTH Lê Hồng Phong; *Trần Anh Tuấn*, 8C, THCS Yên Lợi, Ý Yên; *Ngô Minh Đức*, $11A_1$, THCB Giao Thủy; *Phùng Văn Thuận*, 10D, PTTH Giao Thủy; *Trần Quốc Việt*, THCS Giao Thủy; **Quảng Bình:** *Nguyễn Văn Bình*, $11A_2$, PTTH Lệ Thủy; *Nguyễn Thanh Xuân*, 10 Toán, PTTH Năng khiếu; *Tưởng Bình Minh*, $12A_1$, PTTH Lệ Thủy; **Đắc Lắc:** *Tạ Quốc Hưng*, *Nguyễn Thị Hồng Hạnh*, 10 Toán, *Đặng Ngọc Châu*, $11T_1$, PTTH chuyên Nguyễn Du, Buôn Ma Thuột; *Trần Quang*, 9A, THCS Phan Chu Trinh, Buôn Ma Thuột; **Bắc Ninh:** *Trần Trung*, *Tạ Hoàng Hải*, 11 Toán, *Nguyễn Đức Thịnh*, *Nguyễn Ngọc Cường*, 10 toán, PTTH Hàn Thuyên; *Nguyễn Thị Thảo*, $12A_1$ PTTH Lý Thái Tổ, Tiên Sơn; **Hà Tây:** *Nguyễn Tường Việt*, 10 Toán, *Đinh Thị Hương*, 10TN1, *Lương Quang Anh*, 12A, PTTH chuyên Nguyễn Huệ, Hà Đông; *Khương Anh Tuấn*, 10K1, PTTH Mỹ Đức; *Nguyễn Thị Lan*, $11A_4$, PTTH CB Quốc Oai; **Quảng Trị:** *Ngô Quang Thắng*, 11 Toán, *Trần Việt Anh*, *Hoàng Minh Phụng*, *Dương Mai Phương*, 10 Toán, PTTH Lê Quý Đôn, Đông Hà; **Hà Tĩnh:** *Trương Xuân Chiến*, lớp 10D, PTCB Phan Đình Phùng; *Phan Lệ Hằng*, *Lê Anh Ngọc*, 10T, Trường Năng khiếu; *Lê Tâm*, 8E, PTCS Kỳ Anh; **Nghệ An:** *Đinh Thị Thúy Vinh*, $10A_2$, *Nguy Lê Giang*, 10CT, *Nguyễn Công Thành*, $10A_1$, PTTH Phan Bội Châu, Vinh; *Đinh Thanh Thường*, 10A, PTTH Hermann Gmeiner, Vinh; *Lê Bá Dũng*, 9B, THCS Sông Hiếu, Nghĩa Đàn; *Nguyễn Hoàng Lân*, 10A, PTTH Đô Lương I; *Phan Trọng Tông*, $11A_1$, khối chuyên toán, ĐHSP Vinh; **Hà Nội:** *Nguyễn Việt Tùng*, *Trần Tất Đạt*, 11B Toán, *Hoàng Tùng*, 11 Toán, Lê Minh Tuấn, 10B Toán; *Vũ Thái Sơn*, *Ngô Quốc Anh*, 10A Toán, *Đỗ Phương Thảo*, 11A Toán, PTCT ĐH KHTN - ĐHQG; *Lê Đức Nguyên*, $10A_2$, *Nguyễn Mạnh Thắng*,

$10A_1$, *Nguyễn Cảnh Toàn*, $10A_2$, PTCT ĐHSP - ĐHQG ; *Nguyễn Chi Mai*, 12 Toán, *Đỗ Tuyết Nhung*, 12A, *Lê Hải Bình, Vũ Anh Tuấn*, 11 tin, PTTH Hà Nội Amsterdam; *Nguyễn Hải Quang*, 12B, PTTH Nguyễn Gia Thiều, Gia Lâm; *Ngô Mạnh Hùng*, 11C, PTTH Sóc Sơn, *Phạm Bảo Trung*, 9A, THCS Nguyễn Trường Tộ, Đống Đa; *Nguyễn Hoàng Thạch*, 9C, THCS Ngọc Lâm, Gia Lâm.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T7/258. *Tìm tất cả các hàm số $f(x)$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau đây :*

a) $f(x)$ xác định và liên tục trên R,

b) Với mỗi bộ số gồm 1997 giá trị $x_1, x_2 x_3,..., x_{1997}$ mà $x_1<x_2<x_3<... <x_{1997}$ luôn xảy ra:

$$f(x_{1999}) \geq \frac{1}{1996}(f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_{998})+ + f(x_{1000})+ f(x_{1001})+... +f(x_{1997})),$$

c) $f(x) > 0$ với mọi $x \in Z$ và $f(1997) = \log_{1998}1997$.

Lời giải. Giả sử $f(x)$ là hàm số thỏa mãn hai điều kiện a) và b), chúng ta sẽ chứng minh rằng $f(x) = \text{const}$.

Do đó chỉ có duy nhất một hàm số $f(x)$ thỏa mãn các điều kiện a), b) và c) là hàm số

$$f(x) = \log_{1998}1997.$$

Thật vậy nếu $a<b$ là hai số thực tùy ý, xét các bộ số

$$a = x_1<x_2<x_3<...<x_{1997} = b.$$

Cho $x_{998} \to a$, $x_{999} \to b$, do $f(x)$ là hàm số liên tục, từ (1) chuyển qua giới hạn ta có :

$$f(b) \geq \frac{f(a) + f(b)}{2}.$$

Suy ra $f(b) \geq f(a)$.

Nhưng nếu cho $x_{999} \to a$, $x_{1000} \to b$ ta lại có

$$f(a) \geq \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Suy ra $f(a) \geq f(b)$.

Bởi vậy $f(a) = f(b)$ (đpcm).

Nhận xét. 1) Hầu hết các bạn tham gia giải bài toán này nhận xét rằng : điều kiện c) thực tế là thừa.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt : **Hà Giang** : Vũ Anh Hải, 12A, PTTH Lê Hồng Phong; **Hà Nội:** *Nguyễn Mạnh Thắng*, $10A_1$, PTCT-ĐHSP, ĐHQG; *Đinh Trung Hiếu*, 10M, Marie Curie; *Đỗ Tuyết Nhung*, 12A, PTTH Hà Nội - Amsterdam; **Hà Tây:** *Lương Quang Anh*, 12A, PTTH Nguyễn Huệ; **Vĩnh Phúc:** *Trịnh Quốc Khánh, Nguyễn Trung Lập, Vũ Văn Phong*, $11A_1$; *Đỗ Trung Kiên, Nguyễn Duy Tân, Cao Thế Thụ*, $12A_1$, PTTH chuyên; **Hải Dương:** *Phạm Ngọc Lợi*, 11, PTNK; *Trần Quang Đại, Phạm Hồng Quân*, 11, PTTH Nguyễn Trãi; **Nghệ An:** *Đinh Thanh Thường*, 10A, PTTH Hermann Gmeiner; **Quảng Trị:** *Trần Việt Anh*, 10, PTTH Lê Quý Đôn; **Thừa Thiên - Huế:** *Huỳnh Công Phước*, $11T_1$, Quốc học Huế; *Trần Hoàng Đức Chính*, 12, ĐHKH; **TP Hồ Chí Minh:** *Trần Đình Nguyên*, 11T, PTNK-ĐHQG; **Khánh Hòa:** *Trần Tuấn Anh, Võ Duy*, 11T, PTTH Lê Quý Đôn; **Trà Vinh:** *Bùi Minh Khoa*, $11A_1$, PTTH chuyên; **Bà Rịa - Vũng Tàu:** *Lương Anh Hùng*, $12A_1$, PTTH Vũng Tàu.

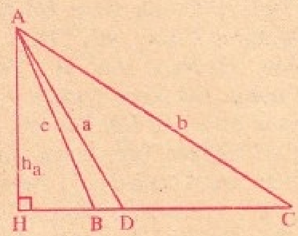
NGUYỄN MINH ĐỨC

Bài T8/258. *Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để trên cạnh BC tồn tại một điểm D sao cho AD = BC là :*

$$\sin A \geq \sin B \sin C \ (*)$$

Lời giải.

Kẻ đường cao AH và kí hiệu diện tích, độ dài các cạnh và chiều cao của tam giác ABC như sau :



$S(ABC) = S$, $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $AH = h_a$. Ta có các hệ thức sau (dù cho $\hat{B}$ hoặc $\hat{C}$ tù hay nhọn) :

$$h_a = c\sin B = b\sin C.$$

Giả sử D là một điểm trên đường thẳng BC thế thì : $AH \leq AD$.

Từ đó suy ra : D thuộc đường thẳng BC và

$$AD = BC \Leftrightarrow a \geq h_a \Leftrightarrow ah_a \geq h_a^2.$$

$$\Leftrightarrow bc\sin A \geq bc\sin B\sin C$$

$$\Leftrightarrow \sin A \geq \sin B\sin C \ (*)$$

Ta được điều kiện (*), đpcm.

Như vậy điều kiện (*) là cần và đủ để $AD=BC$ với D thuộc đường thẳng BC.

Kết luận: (*) chỉ là điều kiện cần, không phải là điều kiện đủ để điểm D thỏa mãn yêu cầu bài toán đặt ra.

Ta cần bổ sung để đi đến kết luận sau :

$$\begin{cases} D \in [BC] \\ AD = BC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin A \geq \sin B\sin C \\ \min(b, c) \leq a \leq \max(b, c) \end{cases}$$

Nhận xét. Bài toán trên đây thuộc loại dễ và tòa soạn nhận được gần 400 lời giải của các bạn, trong đó có khá đông các bạn đang học PTCS. Trên 50% các bạn đã chỉ ra sơ suất của tác giả đề toán : (*) *chỉ là điều kiện cần nhưng không đủ*. Tuy nhiên, khi bổ sung điều kiện đủ thì nhiều bạn không chú ý đến $AD \geq \min(AB, AC)$, hoặc có đưa ra phản thí dụ đúng nhưng không chỉ rõ phải bổ sung điều kiện gì để trở thành điều kiện cần và đủ của sự tồn tại điểm D thỏa mãn bài toán đặt ra.

NGUYỄN ĐĂNG PHẤT

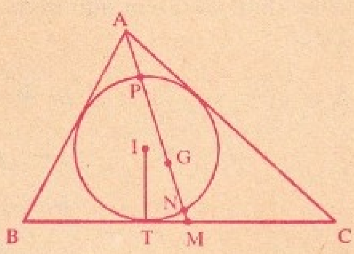
Bài T9/258. *Cho tam giác ABC, trọng tâm G nằm trong đường tròn nội tiếp (I). Chứng minh rằng :*

$\max\{a^2, b^2, c^2\} < 4\min\{bc, ca, ab\}$.

Lời giải. *Cách 1.* (của bạn *Hồng Phương Đông*, 12T, PTTH Lam Sơn, **Thanh Hóa**).

Không mất tính tổng quát giả sử $a \geq b \geq c$.

Ta phải chứng minh : $a^2 < 4bc$.



Gọi M là trung điểm của BC, G là trọng tâm tam giác ABC. AM cắt (I) tại N, P (h.1). T là tiếp điểm của (I) và BC. Ta có :

$MT^2 = MN.MP$ (hệ thức lượng trong đường tròn) và $MN.MP < MG.MA$ (vì G nằm trong (I)).

Suy ra : $MT^2 < MG.MA \Rightarrow MT^2 < \frac{1}{3}MA^2$

Ta có :

$$MT = BM - BT = \frac{a}{2} - \frac{c+a-b}{2} = \frac{b-c}{2}$$

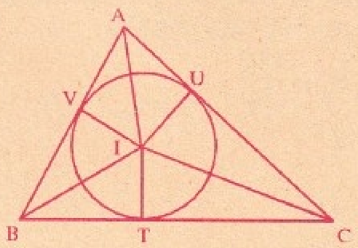
và $MA^2 = \dfrac{2(b^2+c^2)-a^2}{4}$.

Suy ra : $\dfrac{(b-c)^2}{4} < \dfrac{1}{3}\,\dfrac{2(b^2+c^2)-a^2}{4}$

$\Rightarrow a^2 < 2(b^2+c^2) - 3(b-c)^2$

$\Rightarrow a^2 < 4bc - (b-c)^2$

$\Rightarrow a^2 < 4bc$ (đpcm).



Cách 2. (của bạn *Vũ Văn Phong*, 11A_1, PTTH chuyên Vĩnh Phúc, **Vĩnh Phúc**).

Giả sử (I) tiếp xúc với BC, CA, AB tại T, U, V ta có :

$AU = p-a$; $BV = p-b$; $CT = p-c$.

Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên theo công thức Lepnit ta có :

$IA^2 + IB^2 + IC^2 = 3IG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$

$\Rightarrow IA^2 + IB^2 + IC^2 \leq 3r^2 + GA^2 + GB^2 + GB^2$

(vì G nằm trong (I))

$\Rightarrow r^2 + (p-a)^2 + r^2 + (p-b)^2 + r^2 + (p-c)^2$

$\leq 3r^2 + \dfrac{a^2+b^2+c^2}{3}$ (Định lí Pitago)

$\Rightarrow (p-a)^2 + (p-b)^2 + (p-c)^2 \leq \dfrac{a^2+b^2+c^2}{3}$

$\Rightarrow 5(a^2+b^2+c^2) \leq 6(bc+ca+ab)$ (*)

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c$.

Từ (*) suy ra :

$3[a-(b+c)]^2 + 2(b-c)^2 \leq 2(4bc-a^2)$

vì $a<b+c$ nên dấu bằng không thể xảy ra ở bất đẳng thức trên, vậy :

$3[a-(b+c)]^2 + 2(b-c)^2 < 2(4bc-a^2)$

$\Rightarrow 4bc - a^2 > 0 \Rightarrow a^2 < 4bc$

Suy ra : $\max\{a^2, b^2, c^2\} < 4\min\{bc, ca, ab\}$.

Nhận xét. 1) Có 95 bạn tham gia giải bài này, 2 bạn giải sai. Một số bạn giải quá dài.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt :

Thanh Hóa: *Đỗ Duy Sơn, Hàn Ngọc Sơn*, 10T, PTTH Lam Sơn; **Hải Dương:** *Trần Quang Đại*, 11T, PTTH Nguyễn Trãi; **Hà Nội:** *Phạm Ngọc Lợi*, 11T, *Hoàng Tùng*, 11T_A, *Trần Tất Đạt*, 11T_B, PTCT, ĐHKHTN-ĐHQG Hà Nội; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Trung Lập*, 11A_1, PTTH năng khiếu; **Quảng Ngãi:** *Mai Hàn Giang*, 11T, trường chuyên Lê Khiết; **TP Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Anh Dũng*, 10T, PT năng khiếu, ĐHKHTN - ĐHQG.

3) Các bạn : *Tô Minh Hoàng*, 10T, PTTH Năng khiếu **Hải Dương** ; *Nguyễn Duy Tân*, 12A_1, PTTH năng khiếu, **Vĩnh Phúc** đã chỉ ra rằng trong bất đẳng trên không thể thay số 4 bởi một số nhỏ hơn.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài T10/258. *Cho $\alpha \in \left(0 ; \frac{\pi}{2}\right)$.*

Đặt $n = \left[\dfrac{2}{\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}\right] + 1$.

Hỏi trong không gian có thể dựng được hay không n đường thẳng cùng đi qua một điểm và góc giữa hai đường thẳng bất kì trong chúng không nhỏ hơn α ? Vì sao ?

Lời giải. Giả sử, qua điểm O trong không gian ta dựng được n đường thẳng thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Lấy O làm tâm, dựng hình cầu bán kính 1. Lấy mỗi đường thẳng trong số n đường thẳng nói trên làm trục dựng hình nón xoay đỉnh O, đường sinh có độ dài 1 và góc ở đỉnh bằng α. Khi đó ta sẽ có $2n$ hình nón đôi một không có điểm chung trong (do góc giữa 2 trục của 2 hình nón bất kì $\geq \alpha$) và mỗi hình nón đều nằm trọn vẹn trong hình cầu. Suy ra :

Thể tích hình cầu lớn hơn $2n$ lần thể tích một hình nón

$$\Leftrightarrow \frac{4}{3}\pi > 2n \cdot \frac{1}{3}\pi \sin^2\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$$

$$\Leftrightarrow n < \frac{2}{\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}, \text{ hay}$$

$$\left[\frac{2}{\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}\right] + 1 < \frac{2}{\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Mâu thuẫn vừa nhận được cho thấy giả sử ban đầu là sai. Vậy, không thể dựng được n đường thẳng thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Nhận xét. 1) Có ít bạn gửi tới Tòa soạn lời giải cho bài toán. Các bạn sau đây có lời giải đúng (tuy nhiên, lời giải của một số bạn chưa chính xác do các bạn đã cho rằng hai hình nón bất kì đều có điểm chung duy nhất là O) :

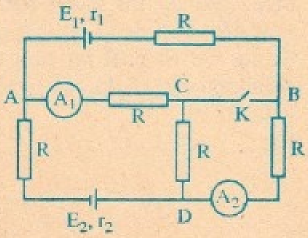
TP Hồ Chí Minh: *Hoàng Thanh Lâm, Trần Đình Nguyên*, 11CT, PTNK, ĐHKHTN - ĐHQG ; **Hà Nội:** *Hoàng Tùng*, 11A Toán, khối PTCT, ĐHKHTN - ĐHQG, *Đinh Trung Hiếu*, 10M Trường Marie Curie ; **Hải Dương:** *Trần Quang Đại*, 11T, PTTH Nguyễn Trãi ; **Ninh Bình:** *Nguyễn Sơn Hà*, 12A PTTH A Yên Mô ; **Thái Nguyên**: *Nguyễn Văn Thắng*, 10T, PTNK ; **Vĩnh Phúc:** *Trịnh Quốc Khánh, Nguyễn Trung Lập, Vũ Văn Phong, Phạm Hoàng Hà, Phạm Danh Tuyên, Cao Thế Thụ, Đỗ Trung Kiên*, 11A$_2$, 12A$_1$ PTTH chuyên.

2) Có một bạn cho rằng điều kiện $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ (*) là không cần thiết và nên thay (*) bởi điều kiện $\alpha \in (0, \pi)$. Thiết nghĩ khi đọc lại định nghĩa góc giữa hai đường thẳng bạn sẽ thấy điều kiện (*) nhằm tránh cho bài toán rơi vào trường hợp tầm thường.

NGUYỄN KHẮC MINH

CÁC BÀI VẬT LÝ

Bài L1/258. *Cho mạch điện như hình 1, trong đó $r_1 = r_2 = \frac{1}{5}R$; $R_{A_1} = R_{A_2} = \frac{1}{20}R$; $E_1 = 5E_2$. Bỏ qua điện trở của dây nối và khóa K. Khi K đóng, số chỉ của ampe kế A_2 là 1A. Xác định số chỉ các ampe kế khi K mở và khi K đóng.*



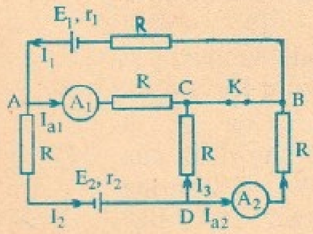
Hình 1

Hướng dẫn giải. *Khi K đóng mạch* các dòng điện có chiều như hình 2.

Ta có :

$$I_3 = \frac{U_{DB}}{R}\text{ ; suy ra}$$

$$I_3 = I_{a_2} \cdot \frac{(R_A + R)}{R} = \frac{21}{20}A;$$



Hình 2

$$I_2 = I_3 + I_{a_2} = \frac{41}{20}A\text{ ;}$$

$$U_{AB} = I_2(R + r_2) - E_2 + I_{a_2}(R_A + R)$$

$$\Rightarrow U_{AB} = 3{,}51R - E_2 \text{ (1),}$$

$$\text{Từ đó } I_{a_1} = \frac{U_{AB}}{R + R_A} = \frac{70{,}2}{21} - \frac{20E_2}{21R} \text{ (2)}$$

$$\Rightarrow I_1 = I_2 + I_{a_1} = \frac{2265}{420} - \frac{20E_2}{21R}$$

$$\Rightarrow U_{AB} = E_1 - I_1(r_1 + R) =$$

$$= 5E_2 - \frac{453R}{70} - \frac{120}{105}E_2 \quad (3)$$

Từ (1) và (2) rút ra $\frac{E_2}{R} = 2{,}055$ (4). Từ (4) và (2) ta có $I_{a_1} = 1{,}386A$.

Khi K mở: (hình 1) Điện trở của các đoạn mạch ABD, AE_2D và ACD lần lượt là :

$$R_1 = 2R + r_1 + R_A = \frac{45R}{20};$$

$$R_2 = R + r_2 = \frac{6R}{5},$$

và $R_3 = 2R + R_A = \dfrac{41R}{20}$.

Ta có (chú ý đến (4) và biết $E_1 = 5E_2$) :

$$U_{AD} = \frac{\frac{E_1}{R_1} - \frac{E_2}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} = \frac{1{,}539}{R}.$$

Suy ra

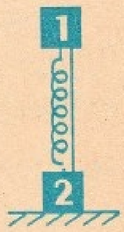
$$I_{a_1} = \frac{U_{AD}}{R_3} = 0{,}75\text{A và}$$

$$I_{a_2} = I_1 = \frac{E_1 - U_{AD}}{R_1} = 3{,}88\text{A}.$$

Nhận xét. Không có em nào có lời giải đúng vì không tìm được cách giải tối ưu và nhầm lẫn trong tính toán.

MAI ANH

Bài L2/258. *Một hệ gồm hai khối lập phương giống nhau, cùng khối lượng m, được nối với nhau bằng một sợi dây sao cho một lò xo có khối lượng không đáng kể, có chiều dài tự nhiên l_o và độ cương k, bị nén lại giữa hai khối đó (xem hình vẽ). Hãy xác định :*



a) Độ co ban đầu $\Delta l = l_o - l$ của lò xo để cho khối lập phương ở dưới được nâng lên khi ta đốt dây.

b) Độ cao ban đầu được nâng lên của khối tâm của hệ nếu độ co ban đầu $\Delta l = l_o - l = \frac{7mg}{k}$.

Hướng dẫn giải. a) Ta hãy đặt vấn đề ngược lại : Tìm độ co ban đầu cực đại của lò xo để cho khối lập phương 2 ở dưới không bị nâng lên khi đốt dây, khi đó chỉ có khối 1 dao động điều hòa. Khi khối 1 nằm ở vị trí cân bằng, độ co của lò xo là Δl_o, tính theo phương trình : $F = k\Delta l_o = mg \Rightarrow \Delta l_o = \frac{mg}{k}$ (1).

Lực đàn hồi của lò xo kéo khối 2 lên sẽ đạt giá trị cực đại khi khối 1 lên tới vị trí biên cao nhất, cách vị trí cân bằng một đoạn A, ta có : $k(A - \Delta l_o) = mg \Rightarrow A = \frac{mg}{k} + \Delta l_o = \frac{2mg}{k}$. Do đó độ co của lò xo đạt cực đại khi khối 1 nằm ở vị trí thấp nhất (biên dưới), nghĩa là $\Delta l = \Delta l_o + A = \frac{3mg}{k}$. Như vậy có nghĩa là nếu $\Delta l \leq \frac{3mg}{k}$ thì khối 2 không bị nâng lên. Do đó, ngược lại, muốn nâng được khối 2 lên thì độ co ban đầu của lò xo phải bằng $\Delta l \geq \frac{3mg}{k}$.

b) Ta thấy $\Delta l = \frac{7mg}{k} > \frac{3mg}{k}$. Như vậy khối 2 sẽ được nâng lên khỏi mặt đất khi ta đốt dây. Để tìm vận tốc của khối 1 khi khối 2 bắt đầu rời khỏi sàn ta áp dụng định luật bảo toàn cơ năng :

$$\frac{k}{2}\left(\frac{7mg}{k}\right)^2 = \frac{k}{2}\left(\frac{3mg}{k}\right)^2 + \frac{mv_o^2}{2} + mgh,$$ với h là độ cao của khối 1 so với lúc đầu và bằng

$$h = \frac{7mg}{k} - \frac{3mg}{k} = \frac{4mg}{k}.$$

Thay vào ta được $v_o^2 = \frac{32mg^2}{k}$. Xét chuyển động khối tâm của hệ khi khối 2 rời khỏi sàn, khi đó $v_G = \frac{v_o}{2}$. Vì lực đàn hồi là nội lực nên không ảnh hưởng đến chuyển động của khối tâm và khối tâm chuyển động như một chất điểm ném lên thẳng đứng với vận tốc ban đầu bằng v_G. Độ cao cực đại mà khối tâm đạt được so với vị trí ban đầu (khi khối 2 bắt đầu rời khỏi sàn) được tính theo công thức :

$$h_G = \frac{v_G^2}{2g} = \frac{v_o^2}{8g} = \frac{4mg}{k}.$$

Như vậy khối tâm được nâng lên một độ cao tổng cộng (kể từ lúc bắt đầu đốt dây) :

$$H = \frac{h}{2} + h_G = \frac{6mg}{k}$$

Nhận xét. Không có em nào có đáp số đúng. Một số em có đáp số câu a) đúng và tính được h_G, nhưng lại tính H theo công thức : $H = h + G$ nên kết quả sai.

MAI ANH

ĐỀ RA KÌ NÀY

CÁC LỚP THCS

Bài T1/262. Tìm các số tự nhiên $\overline{abcdef}$ sao cho các số $\overline{abcdef}$, $\overline{bcdef}$, $\overline{cdef}$, $\overline{def}$, $\overline{ef}$ đều là số chính phương.

LĂNG LÂM HUY HOÀNG
(Bạc Liêu)

Bài T2/262. Giải phương trình

$$\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{2x-1}=\sqrt{3x^2+4x+1}$$

NGUYỄN HỮU DỤ
(Nghệ An)

Bài T3/262. Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau với x là số thực :

$$|x|+|2x+1|+|3x+2|+\ldots+|99x+98|$$

NGUYỄN NGỌC KHOA
(Quảng Ngãi)

Bài T4/262. Cho tam giác đều ABC cạnh bằng a. Với mỗi điểm M nằm trong ΔABC hãy tìm ba điểm D, E, F lần lượt thuộc các cạnh CA, AB, BC sao cho $DE=MA$, $EF=MB$, $FD=MC$. Hãy xác định vị trí của M để diện tích tam giác DEF đạt giá trị lớn nhất và tính giá trị đó theo a.

NGÔ VĂN HIỆP
(Hà Nội)

Bài T5/262. Xét tam giác ABC có ba góc nhọn với đường cao AH. Trên đoạn thẳng AH lấy điểm D sao cho D không trùng với A, H và trực tâm tam giác. Tia BD cắt AC tại M, tia CD cắt AB tại N. Đường thẳng vuông góc với BM tại M và đường thẳng vuông góc với CN tại N cắt nhau ở S. Chứng minh rằng ΔABC cân tại A khi và chỉ khi S nằm trên đường thẳng AH.

NGUYỄN XUÂN HÙNG
(Thanh Hóa)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/262. Cho dãy số (a_n) $(n \in N)$ được xác định bởi : $a_o = 2$ và $a_{n+1} = 4a_n + \sqrt{15a_n^2-60}$ với mọi $n \in N$. Hãy tìm số hạng tổng quát của a_n. Chứng minh rằng số $\frac{1}{5}(a_{2n}+8)$ có thể biểu diễn thành tổng bình phương của 3 số nguyên liên tiếp với mọi $n \geq 1$.

NGUYỄN DUY LIÊN
(Vĩnh Phúc)

Bài T7/262. Cho số nguyên tố p và n, k là các số nguyên dương, $k > 1$. Giả sử b_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ là các số nguyên thỏa mãn :

(1) $0 \leq b_i \leq k-1$ với mọi i

(2) $p^{nk}-1$ là ước số của số

$$A=\left(\sum_{i=1}^{k} p^{nb_i}\right)-p^{n(k-1)}-p^{n(k-2)}-\ldots-p^n-1$$

Hãy chứng tỏ rằng dãy số $(b_1, b_2, \ldots, b_k)$ là một hoán vị của dãy số $(0, 1, \ldots, k-1)$.

TUẤN ANH
(Hà Nội)

Bài T8/262. Không dùng bảng số, máy tính, hãy tính giá trị biểu thức :

$$\sin\frac{\pi}{14}+6\sin^2\frac{\pi}{14}-8\sin^4\frac{\pi}{14}$$

ĐOÀN THẾ PHIỆT
(Nam Định)

Bài T9/262. Cho một họ các parabol

(P_i) có phương trình $y = 2p_i x^2$ với $p_i > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Đường thẳng d_i đi qua điểm $F_i\left(0, \frac{1}{8p_i}\right)$ và cắt (P_i) ở A_i, B_i với mọi i. Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{\sqrt[n]{F_1A_1.F_2A_2\ldots F_nA_n}}+\frac{1}{\sqrt[n]{F_1B_1.F_2B_2\ldots F_nB_n}} \leq$$
$$\leq 8\sqrt[n]{p_1.p_2\ldots p_n}$$

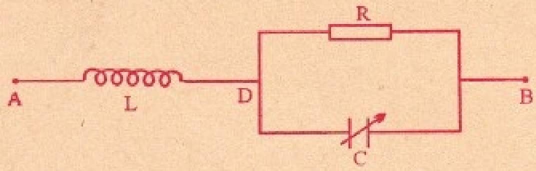
ĐÀM VĂN NHỈ
(Thái Bình)

Bài T10/262. Cho tứ diện $ABCD$, hãy tìm các điểm X, Y, Z, T theo thứ tự thuộc các mặt (BCD), (CDA), (DAB), (ABC) sao cho tổng sau nhỏ nhất : $XY^2+XZ^2+XT^2+YZ^2+YT^2+ZT^2$

NGUYỄN MINH HÀ
(Hà Nội)

CÁC ĐỀ VẬT LÝ

Bài L1/262. Cho mạch điện xoay chiều có sơ đồ như trên hình vẽ. L là cuộn dây thuần cảm có $L=\frac{2}{\pi}H$. . Đặt vào mạch hiệu điện thế $u_{AB}=u=100\sqrt{2}\sin(100\pi t)$ (V).



1) Điều chỉnh C, người ta thấy khi $C = \frac{10^{-4}}{4\pi} F$ thì cường độ dòng điện mạch chính cùng pha với u_{AB}. Tính R. Lập các biểu thức của các cường độ dòng điện và hiệu điện thế trên mạch. Tính tổng trở và công suất tiêu thụ của mạch.

2) Bây giờ người ta mắc tụ điện C nối tiếp với R và với L. Điều chỉnh C để hiệu điện thế hiệu dụng giữa hai đầu tụ điện đạt cực đại. Tìm giá trị của C khi đó.

VŨ THANH KHIẾT
(Hà Nội)

Bài L2/262. Trong thí nghiệm giao thoa ánh sáng của Iâng, khoảng cách giữa hai khe sáng bằng 2mm, khoảng cách từ hai khe sáng đến màn quan sát bằng 3m.

1) Khi chiếu sáng các khe bằng một nguồn sáng đơn sắc người ta đo được khoảng cách từ vân sáng bậc 5 đến vân sáng chính giữa bằng 4,5mm. Tính bước sóng ánh sáng.

2) Ở phía trước một trong hai khe đặt một bản mỏng phẳng trong suốt có hai mặt song song, dày e = 8μm và có chiết suất n = 1,5. Khi đó hệ vân giao thoa ở câu 1 có gì thay đổi. Xác định độ dịch chuyển của hệ vân.

3) Bỏ bản mỏng đi và chiếu sáng các khe bằng nguồn ánh sáng trắng có bước sóng từ 0,4μm đến 0,75μm. Tại điểm M cách vân sáng chính giữa 0,5cm có những bức xạ nào của nguồn cho vân sáng, những bức xạ nào cho vân tối.

MAI ANH
(Hà Nội)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/262. Find all natural numbers $\overline{abcdef}$ such that the numbers $\overline{abcdef}$, $\overline{bcdef}$, $\overline{cdef}$, $\overline{def}$, $\overline{ef}$ are perfect squares.

T2/262. Solve the equation

$$\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{2x - 1} = \sqrt{3x^2 + 4x + 1}$$

T3/262. Find the least value of the expression

$$|x| + |2x+1| + |3x+2| + \ldots + |99x+98|,$$

where x is a real number.

T4/262. Let be given an equilateral triangle ABC with side a. For every point M inside the triangle ABC, find the points D, E, F lying respectively on the sides CA, AB, BC so that $DE = MA$, $EF = MB$, $FD = MC$. Determine the position of M so that the area of triangle DEF attains its greatest value and find this value in terms of a.

T5/262. Consider an acute triangle ABC with its altitude AH. On the segment AH, take a point D, distinct from A, H and the orthocenter of ΔABC.

The ray BD cuts AC at M, the ray CD cuts AB at N. The line, perpendicular to BM at M and the line, perpendicular to CN at N, intersect at S. Prove that the triangle ABC is isosceles at A if and only if S lies on the line AH.

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/262. The sequence of numbers (a_n) $(n \in \mathbf{N})$ is defined by : $a_0 = 2$, $a_{n+1} = 4a_n + \sqrt{15a_n^2 - 60}$ for every $n \in \mathbf{N}$. Find the general term a_n. Prove that for every $n \geq 1$, the number $\frac{1}{5}(a_{2n} + 8)$ can be expressed as the sum of the squares of three consecutive integers.

T7/262. Let be given a prime number p and two positive integers n, k $(k>1)$. Suppose that the integers b_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ satisfy the conditions :

(1) $0 \leq b_i \leq k-1$ for every i,

(2) p^{nk} is a divisor of the number

$$A = \left(\sum_{i=1}^{k} p^{nb_i}\right) - p^{n(k-1)} - p^{n(k-2)} - \ldots - p^n - 1$$

Prove that the sequence $(b_1, b_2, \ldots, b_k)$ is a permutation of the sequence $(0, 1, \ldots, k-1)$.

T8/262. Not using numerical tables, computers, ..., calculate the value of the expression :

$$\sin\frac{\pi}{14} + 6\sin^2\frac{\pi}{14} - 8\sin^4\frac{\pi}{14}.$$

T9/262. Let be given a system of parabolas (P_i) with equations $y = 2p_ix^2$, $p_i > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, and for every i, a line d_i passing through $F_i\left(0, \frac{1}{8p_i}\right)$, cutting (P_i) at A_i, B_i. Prove that

$$\frac{1}{\sqrt[n]{F_1A_1 . F_2A_2 . \ldots . F_nA_n}} + \frac{1}{\sqrt[n]{F_1B_1 . F_2B_2 . \ldots . F_nB_n}} \leq 8\sqrt[n]{p_1p_2 \ldots p_n}.$$

T10/262. Find the points X, Y, Z, T lying respectively on the faces (BCD), (CDA), (DAB), (ABC) of a given tetrahedron $ABCD$ so that the sum

$$XY^2 + XZ^2 + XT^2 + YZ^2 + YT^2 + ZT^2$$

attains its least value.

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI TUYỂN SINH MÔN TOÁN TRƯỜNG ĐẠI HỌC NGOẠI THƯƠNG HÀ NỘI NĂM 1998

Đề bài xem số 261 (3/1999)

Câu I. 1) Bạn đọc tự giải

2) Hàm số đã cho có thể viết lại dưới dạng :

$$y = (x+m)^3 - 3(x+m)$$

Ta có : $y' = 3(x+m)^2 - 3 = 3[(x+m)^2 - 1] = 3(x+m+1)(x+m-1)$

$\Rightarrow$ đạo hàm luôn có hai nghiệm phân biệt $x_1 = -m-1$ và $x_2 = -m+1$.

Vậy hàm số luôn luôn có cực đại và cực tiểu với các hoành độ tương ứng là x_1, x_2.

Dễ thấy $y(-m-1) = 2$

$y(-m+1) = -2 \quad \forall m$

Từ đó suy ra điểm cực đại của đồ thị hàm số luôn luôn chạy trên đường thẳng $y = 2$ và điểm cực tiểu của đồ thị hàm số luôn luôn chạy trên đường thẳng $y = -2$.

Câu II. 1) Phương trình đã cho tương đương với :

$$(\sin x - \cos x) + (\sin^2 x - \cos^2 x) + (\sin^3 x - \cos^3 x) + (\sin^4 x - \cos^4 x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x - \cos x)[1 + \sin x + \cos x + 1 + \sin x.\cos x + \sin x + \cos x] = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sin x - \cos x)[2 + 2(\sin x + \cos x) + \sin x\cos x] = 0$$

a) $\sin x - \cos x = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$. $(k \in Z)$

b) $2 + 2(\sin x + \cos x) + \sin x\cos x = 0$

Đặt $\sin x + \cos x = t \Rightarrow \sin x\cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$ ta được :

$$2 + 2t + \frac{t^2-1}{2} = 0 \Leftrightarrow t^2 + 4t + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = -1 \\ t_2 = -3 \Rightarrow \text{ loại.} \end{array}\right.$$

Với $t = -1$ ta có :

$$\sin x + \cos x = -1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \pi + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in Z)$$

2) Chú ý rằng $\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x = \frac{2}{\sin 2x}$ với mọi x để biểu thức có nghĩa

Lần lượt cho $x = \frac{A}{2}$, $x = \frac{B}{2}$, $x = \frac{C}{2}$ và cộng ba đẳng thức nhận được lại với nhau ta có :

$$\frac{2}{\sin A} + \frac{2}{\sin B} + \frac{2}{\sin C}$$

$$= \operatorname{tg}\frac{A}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2} + \operatorname{cotg}\frac{A}{2} + \operatorname{cotg}\frac{B}{2} + \operatorname{cotg}\frac{C}{2}$$

Vì trong mọi tam giác ta có :

$$= \operatorname{cotg}\frac{A}{2} + \operatorname{cotg}\frac{B}{2} + \operatorname{cotg}\frac{C}{2} = \operatorname{cotg}\frac{A}{2} . \operatorname{cotg}\frac{B}{2} . \operatorname{cotg}\frac{C}{2}$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Câu III. 1) Tính được $(xy)^2 = 4$

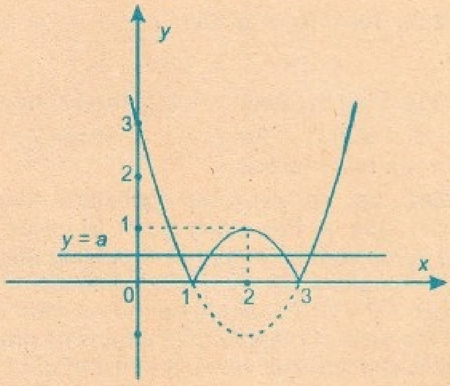
$\Rightarrow$ Hệ có 8 nghiệm :

(1, 2), (2, 1), (-1, -2), (-2, -1), (-1, 2), (2, -1), (1, -2), (-2, 1).

2) Phương trình đã cho tương đương với

$$|x^2 - 4x + 3| = \log_{1/5}(m^4 - m^2 + 1)$$

Phương trình đã cho có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi đường thẳng $a = \log_{1/5}(m^4 - m^2 + 1)$ cắt đồ thị hàm số $y = |x^2 - 4x + 3|$ tại 4 điểm phân biệt.



Căn cứ vào đồ thị ta phải có :

$$0 < \log_{1/5}(m^4 - m^2 + 1) < 1$$

$$\Leftrightarrow 1 > m^4 - m^2 + 1 > \frac{1}{5}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m < 1 \\ m \neq 0 \end{cases}$$

3) $P = xy + yz + zt + tx = (x+z)(y+t) = -(x+z)^2 \leq 0$ (do $y + t = -(x+z)$)

Dấu bằng xảy ra khi $x = \frac{1}{2}$; $y = \frac{1}{2}$; $z = -\frac{1}{2}$; $t = -\frac{1}{2}$ nên $P_{\max} = 0$.

Ta lại có :

$xy \geq -\dfrac{x^2+y^2}{2}$; $\quad yz \geq -\dfrac{y^2+z^2}{2}$;

$zt \geq -\dfrac{z^2+t^2}{2}$; $\quad tx \geq -\dfrac{t^2+x^2}{2}$

Từ đó $P \geq -1$. Dấu bằng xảy ra khi $x = \dfrac{1}{2}$, $y = -\dfrac{1}{2}$, $z = \dfrac{1}{2}$, $t = -\dfrac{1}{2}$ nên $P_{\min} = -1$.

Câu IV. 1) Hạ $OH \perp BC \Rightarrow AH \perp BC$.

Ta có $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{1}{c^2} = \dfrac{b^2+c^2}{b^2c^2}$

$\Rightarrow OH^2 = \dfrac{b^2c^2}{b^2+c^2}$

$AH^2 = OA^2 + OH^2 =$

$= a^2 + \dfrac{b^2c^2}{b^2+c^2} = \dfrac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{b^2+c^2}$

$\Rightarrow AH = \sqrt{\dfrac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{b^2+c^2}}$

$S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}AH.BC = \dfrac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$

2) Với $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$

$\Rightarrow AB = \sqrt{a^2+b^2}$, $BC = \sqrt{b^2+c^2}$, $CA = \sqrt{c^2+a^2}$

Ta có :

$k = a+b+c + \sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{b^2+c^2} + \sqrt{c^2+a^2} \geq$

$3\sqrt[3]{abc} + \sqrt{2}(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}) \geq$

$3\sqrt[3]{abc} + 3\sqrt{2}.\sqrt[3]{abc} = 3(1+\sqrt{2})\sqrt[3]{abc}$

$\Rightarrow \sqrt[3]{abc} \leq \dfrac{k}{3(1+\sqrt{2})} \Rightarrow abc \leq \left[\dfrac{k}{3(1+\sqrt{2})}\right]^3$

Như vậy $V_{OABC} = \dfrac{1}{6}abc \leq \dfrac{1}{6}\left[\dfrac{k}{3(1+\sqrt{2})}\right]^3$

Dấu bằng đạt được khi và chỉ khi $a=b=c$.

Vậy $V_{\max} = \dfrac{1}{6}\left[\dfrac{k}{3(1+\sqrt{2})}\right]^3$

KHỐI A

Câu Va. Ta có : $\displaystyle\int\frac{x^4-2}{x^3-x}dx = \int\frac{x^4-1-1}{x(x^2-1)}dx$

$\displaystyle = \int\frac{x^2+1}{x}dx - \int\frac{dx}{x(x^2-1)}$

Ta có :

$\displaystyle I = \int\frac{x^2+1}{x}dx = \int\left(x+\frac{1}{x}\right)dx = \frac{x^2}{2} + \ln|x| + C_1$

$\displaystyle J = \int\frac{dx}{x(x^2-1)} = \int\frac{x^2+1-x^2}{x(x^2-1)}dx = \int\frac{x}{x^2-1}dx - \int\frac{dx}{x}$

$\displaystyle = \frac{1}{2}\int\frac{d(x^2-1)}{x^2-1} - \ln|x| = \frac{1}{2}\ln|x^2-1| - \ln|x| + C_2$

$\displaystyle \Rightarrow \int\frac{x^4-2}{x^3-x}dx = I - J =$

$\displaystyle = \frac{x^2}{2} + \ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x^2-1| + \ln|x| + C$

$\displaystyle = \frac{x^2}{2} + 2\ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x^2-1| + C$

Câu Vb. $\displaystyle\int\frac{dx}{x^3-x} = \frac{1}{2}\ln|x^2-1| - \ln|x| + C$

(Xem câu Va.)

KHỐI D

Câu Va. $\displaystyle\int tg^3x\,dx = \int tgx\,.\,tg^2x\,dx =$

$\displaystyle = \int tgx\left(\frac{1}{\cos^2x} - 1\right)dx =$

$\displaystyle = \int tgx\,d(tgx) - \int tgx\,dx$

$\displaystyle = \frac{tg^2x}{2} + \int\frac{d(\cos x)}{\cos x} = \frac{tg^2x}{2} + \ln|\cos x| + C$

Câu Vb. $\displaystyle\int tg^4x\,dx = \int tg^2x\,.\,tg^2x\,dx$

$\displaystyle = \int tg^2x\left(\frac{1}{\cos^2x} - 1\right)dx =$

$\displaystyle = \int tg^2x\,d(tgx) - \int tg^2x\,dx$

$\displaystyle = \frac{tg^3x}{3} - \int\left(\frac{1}{\cos^2x} - 1\right)dx =$

$\displaystyle = \frac{tg^3x}{3} - tgx + x + C$

PHẠM VĂN HÙNG
(ĐHKHTN–ĐHQG Hà Nội)

ĐỀ THI TUYỂN SINH MÔN TOÁN TRƯỜNG ĐẠI HỌC THỦY SẢN NĂM 1998

A. PHẦN CHUNG (dành cho tất cả thí sinh)

Câu I. 1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số

$$y = x^3 - x^2 - x + 1.$$

2) Biện luận theo tham số m số nghiệm của phương trình

$$(x-1)^2\,|x+1| = m.$$

Câu II. Giải các phương trình :

1) $\sin^4 x + \cos 2x + 4\cos^6 x = 0$

2) $$\sqrt{\log_2 \sqrt[4]{2x} + \log_x \sqrt[4]{2x}} + \sqrt{\log_2 \sqrt[4]{\frac{x}{2}} + \log_x \sqrt[4]{\frac{2}{x}}} = \sqrt{\log_2 x}$$

Câu III. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình sau có nghiệm :

$$\sqrt{2-x} + \sqrt{2+x} - \sqrt{(2-x)(2+x)} = m.$$

Câu IV. Cho tứ diện $SABC$ với góc tam diện đỉnh S là vuông. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC. Chứng minh rằng :

1) $SH \perp (ABC)$.

2) $$\frac{1}{SH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{SB^2} + \frac{1}{SC^2}.$$

B. PHẦN RIÊNG

Câu Va. (dành cho thí sinh theo chương trình *phân ban*)

Cho $n \in \mathbf{N}$.

1) Tính tích phân : $\displaystyle\int_0^1 x(1+x^2)^n dx.$

2) Chứng minh rằng :

$$1 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + \frac{1}{4}C_n^3 + \ldots + \frac{1}{n+1}C_n^n = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}.$$

trong đó C_n^k là số tổ hợp chập k của n phần tử.

Câu Vb. (Dành cho thí sinh theo chương trình *chưa phân ban*)

1) Tính tích phân $\displaystyle\int_0^1 x^2(1+x^3)^n dx \quad (n \in \mathbf{N}).$

2) Lập phương trình đường thẳng đi qua điểm M (1, 0) sao cho đường thẳng đó cùng với hai đường thẳng

$(d_1) : 2x - y + 1 = 0.$

$(d_2) : x + 2y - 2 = 0$

tạo ra một tam giác cân có đỉnh là giao điểm của hai đường thẳng d_1, d_2./.

ĐỀ THI MÔN TOÁN TUYỂN SINH VÀO LỚP 10

TRƯỜNG PTTH CHU VĂN AN VÀ HÀ NỘI - AMSTERDAM

Thời gian làm bài : 150 phút

Bài I. (2 điểm)

Cho phương trình :

$$x^3 - 2mx^2 + (m^2+1)x - m = 0 \qquad (*)$$

với m là tham số.

Tìm các giá trị của m để mọi nghiệm của (*) đều thuộc khoảng (-1 ; 1)

Bài II. (2 điểm)

Chứng minh bất đẳng thức :

$$\sqrt{\frac{a}{b+c+d}} + \sqrt{\frac{b}{c+d+a}} + \sqrt{\frac{c}{d+a+b}} + \sqrt{\frac{d}{a+b+c}} > 2.$$

với a, b, c, d cùng dấu.

Bài III. (3 điểm)

Xét hình thang $ABCD$ vuông tại A và D ($AB<DC$) có M là trung điểm của AD. Các đỉnh A, D, C cố định ; độ dài đáy nhỏ AB thay đổi.

1. Cho $DC = 2DA$, chứng minh rằng chu vi tam giác MBC nhỏ nhất khi hình thang $ABCD$ ngoại tiếp được một đường tròn.

2. Kẻ tia AA' vuông góc với MB tại A' và tia DD' vuông góc với MC tại D', hai tia này cắt nhau ở K. Tia MK cắt đường thẳng BC tại I, tìm quỹ tích của điểm I.

Bài IV. (1,5 điểm)

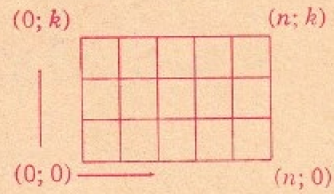
Từ dãy số 1; 2; 3; ...; 1998 chọn ra 1000 số tùy ý. Chứng minh rằng trong 1000 số được chọn có ít nhất hai số mà số này là bội số của số kia.

Bài V. (1,5 điểm)

Xét một lưới $n \times k$ ô vuông với các nút được kí hiệu theo chỉ số cột và theo chỉ số hàng (xem hình vẽ). Một dãy các ô vuông liên tiếp (theo chiều sang phải hoặc lên trên) nối liền nút (0; 0) với nút (n; k) được gọi là một *đường đi* của lưới.

1. Tìm tất cả các đường đi của lưới 2×2

2. Hỏi có bao nhiêu đường đi của lưới $n \times k$ với $n > k$.



DÀNH CHO CÁC BẠN CHUẨN BỊ THI VÀO ĐẠI HỌC

PHƯƠNG PHÁP GỌI SỐ HẠNG VẮNG

PHẠM QUỐC PHONG
(GV trường PTTH Hồng Lĩnh, Hà Tĩnh)

Bản chất khử dạng không xác định $\frac{0}{0}$ là làm xuất hiện nhân tử chung để :

- Hoặc là khử nhân tử chung đưa về dạng xác định.

- Hoặc là đưa giới hạn về các dạng giới hạn cơ bản, quen thuộc đã biết rõ kết quả hoặc cách giải.

Trong các bài tập khó, trong các đề thi tuyển vào các trường Đại học, các hạng tử cấu thành nhân tử chung thường thiếu vắng. Để giải quyết bài toán, điểm mấu chốt là khôi phục các hạng tử thiếu vắng đó. Việc khôi phục, gọi lại các hạng tử đó như thế nào, bằng cách nào đó là nội dung của bài viết này.

1. Nội dung phương pháp.

Xin nêu 2 phương pháp để gọi số hạng vắng và trình bày thông qua các ví dụ.

Phương pháp 1. (Phương pháp hệ số bất định)

Thí dụ 1. Tìm $A = \lim\limits_{x\to 1} F(x)$

với $F(x) = \dfrac{\sqrt{5-x^3} - \sqrt[3]{x^2+7}}{x^2-1}$

Lời giải. $A = \lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{\sqrt{5-x^3}-2}{x^2-1} - \dfrac{\sqrt[3]{x^2+7}-2}{x^2-1}\right)$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{5-x^3}-2}{x^2-1} = \lim_{x\to 1}\frac{1-x^3}{(x^2-1)(\sqrt{5-x^3}+2)}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{-(x^2+x+1)}{(x+1)(\sqrt{5-x^3}+2)} = -\frac{3}{8} \qquad (*)$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x^2+7}-2}{x^2-1} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{(x^2-1)(\sqrt[3]{(x^2+7)^2}+2\sqrt[3]{x^2+7}+4)} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt[3]{(x^2+7)^2}+2\sqrt[3]{x^2+7}+4} = \frac{1}{12} \qquad (**)$$

Từ (*), (**) $\Rightarrow A = \frac{1}{12} - \frac{3}{8} = -\frac{1}{6}$

Đáp số : $A = -\frac{1}{6}$

Trong lời giải trên ta đã thêm bớt 2 vào tử thức của $F(x)$. Ba câu hỏi đặt ra :

1. Tại sao phải có số 2 ?
2. Tại sao lại là số 2 ?
3. Tìm số 2 như thế nào ?

Trả lời 3 câu hỏi đó ta có phương pháp giải loại toán này.

Trả lời câu hỏi 3 : để tìm số 2, ta đưa ra thuật toán gọi số hạng vắng.

Bước 1. $\forall c \in R$ ta có :

$$\frac{\sqrt{5-x^3}-c}{x^2-1} - \frac{\sqrt[3]{x^2+7}-c}{x^2-1}$$

Bước 2: Trong các số c đó, ta tìm số c sao cho x^2-1 cùng có nhân tử chung với $f_1(x) = \sqrt{5-x^3} - c$ và $f_2(x) = \sqrt[3]{x^2+7} - c$

Điều đó xảy ra khi và chỉ khi c là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} f_1(\pm 1) = 0 \\ f_2(\pm 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} c=\sqrt{6} \\ c=2 \end{array}\right. \\ c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow c = 2.$$

Đáp số $c = 2$ là câu trả lời cho câu hỏi 1 và 2.

Tổng quát : Giả sử $F(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$

Thuật toán tìm số hạng vắng trong bài toán tìm giới hạn dạng $\frac{0}{0}$ của hàm chứa căn thức gồm 2 bước.

Bước 1. Phân tích $F(x) = \dfrac{f_1(x)+c}{g(x)} + \dfrac{f_2(x)-c}{g(x)}$

Bước 2. Tìm c. Gọi x_1, x_2 là nghiệm của $g(x) = 0$ khi đó c là nghiệm của hệ :

$$\left[\begin{array}{l} f_1(x_1)+c=0 \\ f_1(x_2)+c=0 \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} f_2(x_1)-c=0 \\ f_2(x_2)-c=0 \end{array}\right.$$

Với c tìm được thì

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f_1(x)+c}{g(x)}; \qquad \lim_{x\to x_0}\frac{f_2(x)-c}{g(x)}.$$

hoặc là dạng xác định, hoặc là dạng quen thuộc. Việc tìm các giới hạn này đơn giản.

Sau khi tìm được số c, trình bày lời giải như đã làm.

Ta thử áp dụng phương pháp trên để xét :

Thí dụ 2: Tìm $\lim\limits_{x\to 0} F(x)$

với $F(x) = \dfrac{2\sqrt{x+1} - \sqrt[3]{8-x}}{x}$

(Đề thi tuyển sinh ĐHQG Hà Nội 1997)

Bước 1. Phân tích

$F(x) = \dfrac{2\sqrt{x+1} - c}{x} - \dfrac{\sqrt[3]{8-x}-c}{x}$ với $c \in R$

Bước 2. Tìm c : Nghiệm của mẫu thức là $x = 0$ $\Rightarrow c$ là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} 2\sqrt{0+1} - c = 0 \\ \sqrt[3]{8-0} - c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow c = 2.$$

Vậy : $\lim\limits_{x\to 0} F(x) =$

$$= 2\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x} - \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1-x/8}-1}{x}\right)$$

$$= 2\left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+x}+1} + \lim_{x\to 0}\frac{1/8}{\sqrt[3]{(1-x/8)^2}+\sqrt[3]{1-x/8}+1}\right)$$

$$= 2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{24}\right) = \frac{13}{12}$$

Đáp số : $A = \dfrac{13}{12}$.

Trong phương pháp 1 nhân tử chung được khử để đưa giới hạn về dạng xác định hoặc dạng quen thuộc.

Chú ý. Bằng cách đặt ẩn phụ $t = \sqrt[n]{1+ax}$, dễ dàng chứng minh

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+ax}-1}{x} = \frac{a}{n} \qquad (*)$$

Thí dụ 3. Tìm $\lim\limits_{x\to 0} F(x)$ với

$$F(x) = \frac{(x^2+1998)\sqrt[7]{1-2x} - 1998}{x}$$

Giải. $F(x) = (x^2+1998)\dfrac{\sqrt[7]{1-2x}-1}{x} + x$

$$\Rightarrow A = \lim_{x\to 0}(x^2+1998)\frac{\sqrt[7]{1-2x}-1}{x} + \lim_{x\to 0} x$$

$$= -\frac{3996}{7}$$

Trong thí dụ trên ta đã thêm bớt $P(x) = x^2+1998$ vào tử thức làm xuất hiện dạng $\dfrac{\sqrt[n]{1+ax}-1}{x}$, đây là điểm mấu chốt của lời giải.

Như vậy ta có **phương pháp 2** là :

Để tìm $\lim\limits_{x\to 0} F(x)$ ta thêm bớt $P(x)$ vào $f(x)$ làm xuất hiện dạng $\dfrac{\sqrt[n]{1+ax}-1}{x}$ Hạng tử vắng ở đây là $P(x)$; đã "*xưng danh*" trong biểu thức giới hạn. Nhân tử chung trong phương pháp này không giản ước. Khi tìm giới hạn thì $\lim P(x)$ là một số xác định.

Thí dụ 4.

Tìm $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}\,\sqrt[3]{1+x/2}\,\sqrt[4]{1+x/3} - \sqrt[4]{1-x}}{(3/2)\sqrt{4+x} - \sqrt[3]{8-x} - \sqrt[4]{1+x}}$

Giải. Gọi tử thức là T, mẫu thức là M ta có :

$$T = \sqrt{1+x}\,\sqrt[3]{1+x/2}\,\sqrt[4]{1+x/3} - \sqrt[3]{1+x/2}\,\sqrt[4]{1+x/3}$$
$$+ \sqrt[3]{1+x/2}\,\sqrt[4]{1+x/3} - \sqrt[4]{1+x/3}$$
$$+ \sqrt[4]{1+x/3} - 1 - \sqrt[4]{1-x} + 1$$
$$= \sqrt[3]{1+x/2}\,\sqrt[4]{1+x/3}\,(\sqrt{1+x}-1)$$
$$+ \sqrt[4]{1+x/3}\,(\sqrt[3]{1+x/2}-1)$$
$$+ (\sqrt[4]{1+x/3}-1) - (\sqrt[4]{1-x}-1)$$

Áp dụng công thức (*) ta có :

$$\lim_{x\to 0}\frac{T}{x} = \frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4} = 1$$

$$M = \frac{3}{2}.2\sqrt{1+x/4} - 2\sqrt[3]{1-x/8} - \sqrt[4]{1+x}$$

$$= 3(\sqrt{1+x/4}-1) - 2(\sqrt[3]{1-x/8}-1) - (\sqrt[4]{1+x}-1)$$

Cũng áp dụng (*) ta có :

$$\lim_{x\to 0}\frac{M}{x} = \frac{3}{8}+\frac{2}{24}-\frac{1}{4} = \frac{5}{24}$$

Cuối cùng :

$$A = \lim_{x\to 0}\frac{T}{M} = \lim_{x\to 0}\frac{T/x}{M/x} = \frac{24}{5}$$

Đáp số : $A = \dfrac{24}{5}$

Bây giờ, xin các bạn hãy dùng các phương pháp đã trình bày ở trên để giải một số bài tập sau :

Bài 1. Tìm $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{x+2} - \sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-2}$

Hướng dẫn. Đặt $x = y + 7$

Bài 2. Tìm $\lim\limits_{x\to +\infty}\left[\sqrt[3]{x^3+3x^2} - \sqrt{x^2-2x}\right]$

Hướng dẫn. Đặt $x = \dfrac{1}{y}$.

Bài 3. Tìm $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$

Hướng dẫn. Đặt $\sin^2 x = y$.

Bài 4. Tìm $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{F(x)}{G(x)}$ với

$$F(x) = \sqrt[1.2^2]{1+2\text{tg}x} - \sqrt[2.3^2]{1+3\text{tg}x} - \ldots -$$
$$\ldots - \sqrt[99.100^2]{1+100\text{tg}x} - \sqrt[100]{1-\text{tg}x}$$

và $G(x) = \dfrac{3}{2}\sqrt{4+\text{tg}x} - \sqrt[3]{8-\text{tg}x} - \sqrt[4]{1+\text{tg}x}$

Hướng dẫn. Đặt $\text{tg}x = y$.

Chúc các bạn thành công ở kì thi tới !

Giai điệu Parabol

LÊ HỮU DŨNG
(Trường PTTH Lê Quý Đôn, Đà Nẵng)

Bài toán 1. Từ điểm A ngoài parabol (P) vẽ các tiếp tuyến AM, AN (M, N là các tiếp điểm). Một đường thẳng tiếp xúc với (P) tại T và cắt các tia AM, AN lần lượt tại B và C.

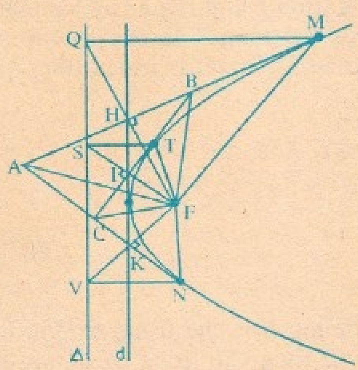
Chứng minh rằng : $\dfrac{BM}{BA} = \dfrac{CA}{CN} = \dfrac{TB}{TC}$.

Giải. Ta sử dụng tính chất tiếp tuyến của (P) :

Hình chiếu của tiêu điểm của parabol lên một tiếp tuyến thì nằm trên tiếp tuyến qua đỉnh của parabol (1)

(Bạn đọc tự chứng minh).

Xem hình 1.



Hình 1

Gọi F là tiêu điểm. Gọi Q, S, V lần lượt là hình chiếu vuông góc của M, T, N lên đường chuẩn Δ.

Theo (1) thì $MA \perp FQ$ tại H, $TC \perp FS$ tại I, $NA \perp FV$ tại K và ba điểm H, I, K đều nằm trên tiếp tuyến d đi qua đỉnh parabol (P). Từ đó từng bộ 4 điểm sau nằm trên đường tròn : (B, F, H, I), (A, T, F, K), (C, I, F, K). Áp dụng tính chất của các góc nội tiếp và các góc có cạnh tương ứng vuông góc ta có :

$\angle FMH = \angle HMQ = \angle SQF = \angle IHF = \angle FAK$
và $\angle IHF = \angle IBF$ (2)

Tương tự có : $\angle FTC = \angle CTS = \angle FSV = \angle FIK = \angle FCK$ và $\angle FIK = \angle FBH$.

Từ đây suy ra $\angle FBM = \angle FTB = \angle FCA$ (3).

Từ (2) và (3) suy ra $\Delta FBM \sim \Delta FTB \sim \Delta FCA$

nên $\dfrac{BM}{BF} = \dfrac{TB}{TF} = \dfrac{CA}{CF}$ (4)

Tương tự có $\Delta ABF \sim \Delta CTF \sim \Delta NCF$ nên

$\dfrac{BA}{BF} = \dfrac{TC}{TF} = \dfrac{CN}{CF}$ (5)

Từ (4) và (5) có $\dfrac{BM}{BA} = \dfrac{TB}{TC} = \dfrac{CA}{CN}$ (đpcm).

2. Bài toán 2. Với giả thiết như bài toán 1, một cát tuyến tùy ý qua A cắt (P) ở R, Q và cắt MN ở D. Chứng minh $(ADRQ)$ là một hàng điểm điều hòa (tức là $\dfrac{\overline{RA}}{\overline{RD}} = -\dfrac{\overline{QA}}{\overline{QD}}$ kí hiệu : $(ADRQ) = -1$)

Giải. Xem hình 2. Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho phương trình của (P) là $y = ax^2$.

Phương trình đường thẳng AQ qua $A(x_o, y_o)$ là : $y = k(x-x_o) + y_o$. Vì $R, Q \in (P) \cap AQ$ nên x_R, x_Q là nghiệm của phương trình :

$$ax^2 - kx + kx_o - y_o = 0 \qquad (6)$$

Gọi D' là điểm sao cho $(AD'RQ) = -1$

$\Rightarrow AR.D'Q = RD'.AQ$

$\Rightarrow 2(x_o.x_{D'} + x_R.x_Q) = (x_o + x_{D'}).(x_R + x_Q)$

$\Rightarrow 2\left(x_o.x_{D'} + \dfrac{kx_o - y_o}{a}\right) = \left(x_o + x_{D'}\right)\dfrac{k}{a}$ (do (6))

$\Rightarrow k(x_{D'} - x_o) = 2(ax_o x_{D'} - y_o)$ (7)

$D' \in AQ \Rightarrow y_{D'} = k(x_{D'} - x_o) + y_o$. Từ đó và (7) có $y_{D'} = 2ax_o x_{D'} - y_o$

Vậy $D' \in$ đường thẳng $y = 2ax_o x - y_o$ (8)

Dễ thấy điểm $M(x_M, y_M)$ nằm trên tiếp tuyến tại M, đi qua $A(x_o, y_o)$ nên tọa độ thỏa mãn (8). Tương tự, tọa độ $N(x_N, y_N)$ cũng thỏa mãn (8), nghĩa là đường thẳng (8) đi qua M, N.

$\Rightarrow D'$ là giao điểm của MN và AQ

$\Rightarrow D' \equiv D \Rightarrow$ Đpcm.

3. Bình luận : Cuộc hòa tấu của bài toán 1 và 2 cho ta 1 giai điệu đẹp ngất

$$\begin{cases} \dfrac{BM}{BA} = \dfrac{CA}{CN} = \dfrac{TB}{TC} \\ (ADRQ) = -1 \end{cases} \qquad (*)$$

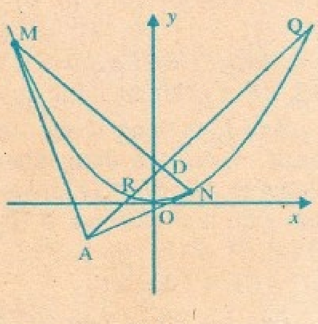
Xin tạm dịch (*) thành lời :

Ba dây hòa điệu nhịp nhàng.
Một dây, bốn ngón chạy hàng nối hoa.

4. Áp dụng. Với giả thiết bài toán 1, chứng minh :

a) Trực tâm của ΔABC thuộc đường chuẩn của (P)

b) Nếu A thuộc trục của (P) thì $AB+AC$ không đổi.



Hình 2

c) Nếu A chạy trên đường thẳng không cắt (P) thì MN đi qua 1 điểm cố định.

Tìm quỹ tích tâm đường tròn nội tiếp ΔCBF .

Diễn đàn DẠY VÀ HỌC TOÁN

BÀN LUẬN VỀ CÁCH XÉT BA ĐƯỜNG THẲNG ĐỒNG QUY

NGUYỄN VIỆT HẢI
(*Hà Nội*)

Xuất phát từ một bài toán quen thuộc ở THCS :

Bài toán 1. *Về phía ngoài ΔABC dựng các tam giác đều ABD, BCE, CAF. Chứng minh rằng ba đường thẳng AE, BF, CD đồng quy,* bạn Nguyễn Văn Ban đã nêu ra *một bài toán thú vị* trong THTT số 253 (7/1998) :

Bài toán 2. *Về phía ngoài ΔABC dựng các tam giác ABD, BCE, CAF sao cho AD = DB = BE = EC = CF = FA. Hỏi ba đường thẳng AE, BF, CD có đồng quy không ?*

Để tìm câu trả lời tác giả đặt ΔABC trong mặt phẳng tọa độ Đềcác (Descartes) và sau khi viết phương trình các đường thẳng *AE, BF, CD* ta thấy các giao điểm của từng cặp trong 3 đường thẳng trên rất gần nhau nhưng không trùng nhau. *Phản thí dụ bất ngờ* này cho phép kết luận : có trường hợp ba đường thẳng đang xét không đồng quy. Tác giả đề nghị bạn đọc tìm thêm lời giải khác cho bài toán này. Đề nghị đó ngay lập tức được nhiều bạn đọc hưởng ứng. Bạn Nguyễn Hữu Bình (PTTH Tùng Thiện, Hà Tây) trong thư gửi về Tòa soạn đã đưa ra nhận xét :

(1) Nếu ΔABC cân thì ba đường thẳng đang xét đồng quy (do tính chất đối xứng của tam giác cân).

(2) Đặt ΔABC vuông tại *A* trong mặt phẳng tọa độ Đềcác với $A\ (0, 0)$; $B\ (0, 4)$; $C\ (2, 0)$; $D(-\sqrt{21}, 2)$; $E(5, 4)$; $F\ (1, -2\sqrt{6})$ thì $AD = DB = BE = EC = CF = FA = 5$. Lúc đó tính toán được *AE, BF, CD* không đồng quy.

Bạn Mai Song (Nga Sơn, Thanh Hóa) chọn ΔABC vuông và dùng phương pháp tọa độ để chứng tỏ *AE, BF, CD* không đồng quy bằng cách đơn giản hơn như sau: $A\ (0, 2)$, $B(0, 0)$, $C(4, 0)$, $D\ (-3, 1)$, $E\ (2, -\sqrt{6})$, $F\ (3, 3)$, $AD = DB = BE = EC = CF = FA = \sqrt{10}$.

Bạn Lê Hữu Dũng (PTTH Lê Quý Đôn, Đà Nẵng) cũng đưa ra khẳng định (1) ở trên, đồng thời nêu ra bài toán 3 và 4 :

Bài toán 3. *Về phía ngoài ΔABC vuông ở A dựng các tam giác ABD, CAF sao cho AD = DB = CF = FA = $\frac{BC}{2}$. Gọi E là trung điểm của BC. Tìm điều kiện để AE, BF, CD đồng quy.*

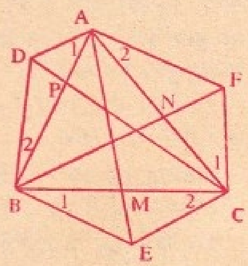
Tác giả dùng định lí Xêva và biến đổi lượng giác để rút ra điều kiện cần và đủ là ΔABC cân ở *A*.

Bài toán 4. *Về phía ngoài ΔABC dựng các tam giác ABD, BCE, CAF cân tại đỉnh D, E, F và đồng dạng. Chứng minh rằng AE, BF, CD đồng quy.*

Bạn *Vũ Hoàng Thái* (ĐH BK Hà Nội) cũng nêu ra bài toán 4 và chỉ ra trong 5 trường hợp riêng thì bài toán này đúng.

Tôi xin góp phần bàn luận thêm về các bài toán dạng này. Trước hết dễ thấy rằng bài toán 1 là trường hợp riêng của bài toán 4, còn bài toán 4 và bài toán 3 là các trường hợp riêng của bài toán 2. Ta xét bài toán tổng quát hơn bài toán 2 nhưng hạn chế trong trường hợp các giao điểm của từng cặp trong ba đường thẳng *AE, BF, CD* nằm bên trong ΔABC (cách làm tương tự khi các giao điểm này nằm ngoài ΔABC)

Bài toán 5. *Về phía ngoài ΔABC dựng các tam giác ABD, BCE, CAF sao cho các điểm D, E, F theo thứ tự nằm bên trong các góc ACB, BAC, CBA. Tìm điều kiện để AE, BF, CD đồng quy.*



Giải. Theo giả thiết *AE, BF, CD* phải cắt các cạnh *BC, CA, AB* tại *M, N, P* theo thứ tự. Thế thì *AE, BF, CD* đồng quy ⇔ *AM, BN, CP* đồng quy ⇔

$$\frac{MB}{MC} \cdot \frac{NC}{NA} \cdot \frac{PA}{PB} = 1 \ (1).$$

(Định lí Xêva khi 3 điểm *M, N, P* nằm trên 3 cạnh của ΔABC).

Kí hiệu $S(ABC)$ là diện tích ΔABC, các kí hiệu góc xem hình vẽ.

$$\frac{MB}{MC} = \frac{S(BAE)}{S(CAE)} = \frac{BA.BE.\sin(B+B_1)}{CA.CE.\sin(C+C_2)} \qquad (2)$$

$$\frac{NC}{NA} = \frac{S(CBF)}{S(ABF)} = \frac{CB.CF.\sin(C+C_1)}{AB.AF.\sin(A+A_2)} \qquad (3)$$

$$\frac{PA}{PB} = \frac{S(ACD)}{S(BCD)} = \frac{AC.AD.\sin(A+A_1)}{BC.BD.\sin(B+B_2)} \qquad (4)$$

Từ (2) (3) (4) có : (1) ⇔

$$\frac{AD.BE.CF}{AF.BD.CE} \cdot \frac{\sin(A+A_1).\sin(B+B_1).\sin(C+C_1)}{\sin(A+A_2).\sin(B+B_2).\sin(C+C_2)} = 1 \quad (5)$$

Điều kiện (5) là cần và đủ để AE, BF, CD đồng quy trong bài toán 5. Nếu bắt D, E, F bị ràng buộc bởi các điều kiện nào đó thì đẳng thức (5) sẽ đơn giản hơn.

Trong bài toán 2 khi cho điều kiện $AD=DB=BE=EC=CF=FA$ thì $\hat{B}_2 = \hat{A}_1$, $\hat{C}_2 = \hat{B}_1$, $\hat{A}_2 = \hat{C}_1$, lúc đó (5) trở thành

$$\frac{\sin(A+A_1).\sin(B+B_1).\sin(C+C_1)}{\sin(A+C_1).\sin(B+A_1).\sin(C+B_1)} = 1 \quad (6)$$

Điều kiện (6) là cần và đủ để AE, BF, CD đồng quy trong bài toán 2 khi AE, BF, CD phải cắt 3 cạnh của ΔABC.

Áp dụng vào bài toán 3, trong đó $\hat{B}_1 = 0$ và $\hat{A} = 90^0$ ta đưa điều kiện (6) về cách giải của bạn Lê Hữu Dũng.

Ta cũng thấy điều kiện ΔABC có 1 góc vuông không có tác dụng quyết định làm đơn giản (6) mà chỉ góp phần tính toán nhanh gọn hơn khi dùng phương pháp tọa độ.

Trong bài toán 4 do các tam giác ABD, BCE, CAF cân tại D, E, F nên $\frac{AD}{BD} \cdot \frac{BE}{CE} \cdot \frac{CF}{AF} = 1$, mặt khác $\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \hat{B}_1 = \hat{B}_2 = \hat{C}_1 = \hat{C}_2$ nên tỉ số của tích các sin ở vế trái (5) cũng bằng 1, suy ra điều kiện (5) thỏa mãn, nghĩa là AE, BF, CD đồng quy.

Như vậy trong bài toán 2 xét ba đường thẳng đồng quy nếu phương pháp tọa độ giúp ta tính toán để khẳng định rằng tồn tại trường hợp ba đường thẳng đang xét không đồng quy thì phương pháp suy diễn lôgic dựa vào hình vẽ trực quan cho ta cách nhìn tổng quát, hệ thống về các bài toán 1, 2, 3, 4, 5, 6 và tìm được điều kiện cần và đủ để 3 đường thẳng đang xét là đồng quy. Các bạn hãy tìm xem điều kiện (5) hoặc (6) có thể áp dụng cho các trường hợp khác nữa không ? Mời các bạn giải tiếp hai bài toán cùng loại.

Bài toán 6. *Về phía ngoài ΔABC có 3 góc nhọn dựng ba tam giác đồng dạng ABD, BCE, CAF, trong đó $\angle ABD = \angle CBE = \angle AFC$; $\angle BAD = \angle CAF = \angle BEC$. Chứng minh rằng các đường thẳng AE, BF, CD đồng quy.*

Bài toán 7. *Về phía ngoài ΔABC dựng các tam giác ABD, BCE, CAF sao cho $AD=DB=BE=EC=CF=FA$ và các điểm A, B, C theo thứ tự nằm trên các đường thẳng FD, DE, EF. Chứng minh rằng AE, BF, CD đồng quy./.*

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN VÀ LỜI GIẢI

BÀI SỐ 16

Problem. Let $C(n, m)$ denote the binomial coefficient $\frac{n!}{m!(n-m)!}$ for $n \geq m$. Evaluate the following expression :

$$C(n, 0) - C(n, 1) + C(n, 2) - \dots + (-1)^m C(n, m)$$

Solution. Notice that $C(n, i)$ is the coefficient of x^i in the expansion of the polynomial $(1-x)^n$ for $0 \leq i \leq n$. Then the above expression is the coefficient of x^n in the polynomial

$$x^n(1-x)^n + x^{n-1}(1-x)^n + \dots + x^{n-m}(1-x)^n.$$

Simplifying the above polynomial we obtain

$$x^n(1-x)^n + x^{n-1}(1-x)^n + \dots + x^{n-m}(1-x)^n =$$
$$= x^{n-m}(x^m + x^{m-1} + \dots + 1)(1-x)^n$$
$$= x^{n-m}(x^{m+1} - 1)(1-x)^n/(x-1)$$
$$= -x^{n-m}(x^{m+1} - 1)(1-x)^{n-1}$$
$$= x^{n-m}(1-x)^{n-1} - x^{n+1}(1-x)^{n-1}$$

The coefficient of x^n of the last polynomial is the one of the polynomial $x^{n-m}(1-x)^{n-1}$. Consequently, it is $(-1)^m C(n-1, m)$ if $m < n$ and it is zero if $m = n$.

Từ mới :

denote = ký hiệu (động từ)
binomial = nhị thức
evaluate = xác định giá trị, tính giá trị (động từ)
following = sau đây, tiếp theo (tính từ)
expression = biểu thức (danh từ)
notice = chú ý (động từ)
expansion = sự khai triển
simplify = đơn giản hóa, rút gọn (động từ)
above = phía trên (tính từ)
the one = ám chỉ là cụm từ : the coefficient of x^n (có thể dùng cho câu khác với cụm từ khác).

NGÔ VIỆT TRUNG

Nhìn ra thế giới

ĐỀ THI OLYMPIC TOÁN CỦA TÂY BAN NHA (2-1995)

NGÀY THỨ NHẤT (4 giờ)

Bài 1. Xét các tập hợp A thỏa mãn : A gồm 100 số tự nhiên phân biệt sao cho nếu a, b, c là các phần tử của A (có thể phân biệt hoặc không) thì tồn tại tam giác cạnh là a, b, c mà không có góc tù. Gọi $S(A)$ là tổng các chu vi các tam giác được xét khi xác định tập A. Tìm giá trị nhỏ nhất của $S(A)$.

Bài 2. Trên tờ giấy phẳng có một số hình tròn mà một vài hình tròn giao nhau, nhưng không có hình tròn nào nằm hoàn toàn trong hình tròn khác. Chứng minh rằng không thể ghép các phần hình tròn không giao nhau thành những hình tròn rời nhau.

Bài 3. Một đường thẳng đi qua trọng tâm G của ΔABC cắt cạnh AB tại P và cắt cạnh AC tại Q. Chứng minh rằng :

$$\frac{PA}{PB}\cdot\frac{QC}{QA}\le\frac{1}{4}.$$

NGÀY THỨ HAI (4 giờ)

Bài 4. Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình

$p(x+y) = xy$ trong đó p là số nguyên tố.

Bài 5. Chứng minh rằng nếu các phương trình $x^3+mx-n=0$ và $nx^3-2m^2x^2-5mnx-2m^3-n^2=0$ ($m\neq0$, $n\neq0$) có một nghiệm chung thì phương trình thứ nhất có 2 nghiệm bằng nhau và khi đó hãy tính các nghiệm của cả hai phương trình theo n.

Bài 6. AB là một đoạn thẳng cố định và C là một điểm thay đổi trong đoạn AB. Trên một nửa mặt phẳng bờ AB dựng các tam giác đều ACB', CBA' và trong nửa mặt phẳng đối dựng tam giác đều ABC'.

a) Chứng minh các đường thẳng AA', BB', CC' đồng quy.

b) Gọi P là giao điểm của AA', BB', CC', hãy tìm quỹ tích của P khi C chạy trên AB.

c) Chứng minh các tâm A'', B'', C'' của ba tam giác đều nói trên là đỉnh của một tam giác đều.

d) Chứng minh các điểm A'', B'', C'' và P nằm trên cùng một đường tròn./.

LỜI CỦA BẠN

Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ đã được sự quý mến của cả các bạn đọc nước ngoài. Xin được đăng lại thư trao đổi giữa bạn Mohammed Assila ở Canada và GS.TS Trần Văn Nhung, Vụ trưởng Vụ Quan hệ Quốc tế, Bộ Giáo dục và Đào tạo. Tạp chí xin ủng hộ những ý tưởng và tình cảm tốt đẹp của các bạn. Tạp chí mong nhận được cả các bài viết, các đề toán từ các bạn nước ngoài. Cảm ơn GS. TS. Trần Văn Nhung.

Kính gửi : GS Trần Văn Nhung

Tôi tên là Mohammed Assila - Nghiên cứu sinh Tiến sĩ, thành viên của Trung tâm nghiên cứu toán, Trường ĐHTH ở Montreal, Canada. Tôi rất quan tâm đến các cuộc thi toán và mong muốn đặt mua tờ tạp chí "Toán học và Tuổi trẻ" của Việt Nam. Tôi biết rằng phần lớn các bài báo trong tạp chí nói trên viết bằng tiếng Việt, trừ các bài toán mới. Tuy nhiên tôi vẫn rất thích đặt mua nó. Nếu gặp khó khăn, tôi sẽ hỏi các đồng nghiệp Việt Nam của tôi. Rất cảm ơn sự giúp đỡ của ông.

Thân ái

Mohammed Assila

Thưa ngài Tiến sĩ M. Assila

Xin cảm ơn về bức thư của ông ngày 16/2/1999 và sự quan tâm chú ý của ông tới tờ Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ. Và tôi muốn nói rằng : trước hết, tôi sẽ gửi biếu ông tờ tạp chí khi tôi có nó. Về sau, chúng ta sẽ thảo luận tiếp. Xin hãy giữ liên lạc với tôi qua địa chỉ này. Đừng ngại gì liên hệ với tôi nếu tôi có thể làm điều gì đó giúp ông.

Thân ái

Trần Văn Nhung

Ông Trần Văn Nhung thân mến !

Tôi rất cảm ơn vì sự thông báo tốt đẹp của ông. Tôi thực sự chưa biết cảm ơn ông như thế nào. Tôi sẽ đợi nhận được tạp chí và sẽ thảo luận với ông về vấn đề này.

Thân ái

Mohammed Assila

SỬA THƠ

Ai đó sửa đi và bây giờ các bạn khắp nơi đã tham gia sửa lại. So với yêu cầu trao giải, nhiều bạn không thỏa mãn đủ các tiêu chuẩn : sửa ít từ nhất, chỉnh nhất và... nhanh nhất. Bài thơ mà nhiều bạn đã gặp nhau là :

GIAO THỪA

Giao thừa là lúc Xuân sang
Bốn phương trời đất rộn ràng, ai ơi !
Công trình vươn khắp muôn nơi
Tinh nguyên đào nở nụ cười đón Xuân
Bài thơ chưa kịp gieo vần
Đã nghe ***thổn*** *thức từ gần đến xa*
Chuyển ***mùa*** *Xuân tới Đông qua*
Lòng người - Trời - Đất giao hòa cùng nhau.

Những phương án khác thường là sửa nhiều chữ hơn hoặc tương đương, hoặc ít có... lý hơn.

Chẳng hạn : Nghiệm nguyên → cao nguyên, Thái nguyên, trinh nguyên; đa thức → thao thức, đánh thức; bình phương → muôn phương, tám phương.

Xin tặng chút quà Xuân cho các bạn : *Phí Hồng Nhung*, THCS Thanh Ba, Thanh Ba, **Phú Thọ**; nhóm bạn *Lê Anh Xuân, Đinh Thị Tâm, Trần Nam Thái*, 9AI, THCS Độc Lập, TP Thái Nguyên; *Trương Tất Mạnh*, THCS Nông trường IASAO, IAGRAI, Gia Lai; *Lê Bá Đạt*, 545 Điện Biên Phú, Phường 3, Quận 3, TP Hồ Chí Minh; *Trần Thu Hương*, 6A, THCS Lê Quý Đôn, Cầu Giấy, **Hà Nội**.

L.V.N.M

TỪ ĐIỂN VUI

Xin không "bình" mà phát "hành" ngay các định nghĩa :

1. Nếu "bành hình" chữ nhật thì ta có ngay !

(*Đặng Quang Huy*, 9/1, THCS Lương Thế Vinh, Duy Xuyên, Quảng Nam)

2. Cái "bình" đựng "hành" (muối) bị chiếu nghiêng !

(*Phạm Quốc Hùng*, 11T, THCS Nguyễn Trãi, Hải Dương)

3. "Hình" nhiều khi "hành" giới mê toán tới mức "hành hình"

(*Đào Thùy Dương*, Giáo viên THCS Nguyễn Huệ, Cẩm Giàng, Hải Dương).

4. Có méo nữa cũng là ... nó !

(*Trịnh Khuyến Trung*, 12A, THPT Lê Hồng Phong, Cẩm Phú, Cẩm Phả, Quảng Ninh) và *Đoàn Anh Tính*, 9A, THCS Nguyễn Du, Quảng Xương, Thanh Hóa).

Quà Xuân, CLB sẽ gửi cho 5 bạn qua... Bưu Điện ! Cám ơn.

L.T.N

DỊCH MÃ

100% các dịch giả đều có tư tưởng gặp nhau :

9-in+uc = "chín" bớt "in" thêm "uc" = chúc

10-ơi+ng = "mười" bớt "ơi" thêm "ng" = mừng

5 = năm

1-ôt+ới = "một" bớt "ôt" thêm "ới" = mới.

Vậy câu mà C.L.B gửi tới các bạn là: "Chúc mừng năm mới !". Cám ơn tất cả các hội viên của C.L.B.

C.L.B

Nhắn tin: * C.L.B nhận được rất nhiều thơ giải đố và thơ họa của các bạn. Ai sẽ được giải ? Các bạn đón xem ở tạp chí số 263 !

* Xin bạn H.D, tác giả của rất nhiều thơ gửi C.L.B, đừng "tím u" nữa ! Cần liên hệ gấp !

Bài toán : Tính

$$A = \left(\sqrt[6]{25+4\sqrt{6}} - \sqrt[3]{1+2\sqrt{6}}\right)\sqrt[3]{1-2\sqrt{6}}$$

Giải.

*** Cách 1:***

$$A = \sqrt[6]{25+4\sqrt{6}}\,\sqrt[3]{1-2\sqrt{6}} - \sqrt[3]{1+2\sqrt{6}}\,\sqrt[3]{1-2\sqrt{6}}$$

$$= \sqrt[6]{25+4\sqrt{6}}\,\sqrt[6]{(1-2\sqrt{6})^2} - \sqrt[3]{(1+2\sqrt{6})(1-2\sqrt{6})}$$

$$= \sqrt[6]{(25+4\sqrt{6})(25-4\sqrt{6})} - \sqrt[3]{(-23)}$$

$$= \sqrt[6]{23^2} - \sqrt[3]{(-23)} = \sqrt[3]{23} + \sqrt[3]{23} = 2\sqrt[3]{23}$$

*** Cách 2:***

Ta có : $\sqrt[3]{1+2\sqrt{6}} = \sqrt[6]{(1+2\sqrt{6})^2} = \sqrt[6]{25+4\sqrt{6}}$

Suy ra :

$$A = \left(\sqrt[6]{25+4\sqrt{6}} - \sqrt[3]{1+2\sqrt{6}}\right)\sqrt[3]{1-2\sqrt{6}}$$

$$= \left(\sqrt[6]{25+4\sqrt{6}} - \sqrt[6]{25+4\sqrt{6}}\right)\sqrt[3]{1-2\sqrt{6}}$$

$$= 0 \,.\, \sqrt[3]{1-2\sqrt{6}} = 0$$

Ít nhất có một cách giải sai ! Ý kiến của các bạn thế nào ?

Lưu ý các bạn là : phải chỉ rõ ra nguyên nhân sai lầm.

PHẠM MINH HIỀN
(Lớp Toán 4A, ĐHSP, ĐHQG TP HCM)

Giải đáp bài

NỬA NẠC NỬA MỠ

Hai người cùng ăn 1 thùng thịt mỡ trong 60 ngày. Riêng Tam Nương phải ăn 210 ngày. Vậy Vương Anh ăn hết 1 thùng thịt mỡ trong :

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{60}-\frac{1}{210}\right)}=84 \text{ (ngày)}$$

Một cách tương tự Tam Nương ăn hết 1 thùng thịt nạc trong :

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{56}-\frac{1}{280}\right)}=70 \text{ (ngày)}$$

Tam Nương ăn nửa thùng thịt nạc trong 35 ngày. Trong khi đó Vương Anh mới ăn hết 35/84 của thùng thịt mỡ. Cả hai Vương Anh và Tam Nương còn phải cùng ăn phần thịt mỡ còn lại trong :

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{35}{84}\right):\frac{1}{60}=5 \text{ (ngày)}.$$

Vậy cả hai người Vương Anh và Tam Nương cùng ăn một thùng nửa nạc, nửa mỡ trong

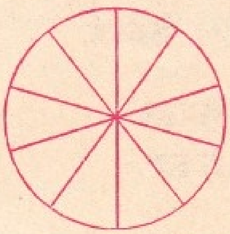
$$35+5=40 \text{ (ngày)}.$$

Dựa theo các đáp án của *Hoàng Vũ Tuấn Anh*, 6/3, Lê Quý Đôn, thị xã Hải Dương, **Hải Dương**; *Lê Minh Tâm*, 6A, Sông Hiếu, Nghĩa Đàn, **Nghệ An**; *Vũ Quang Thanh*, 7B, Nguyễn Hữu Tiến, Duy Tiên, **Hà Nam**; *Trịnh Lan Hương*, 74, Trưng Vương, Hoàn Kiếm, **Hà Nội**; *Nguyễn Quang Thắng*, 7A, Quang Trung, Tây Sơn, **Bình Định**; *Vũ Văn Hưng*, 9C, Lê Quý Đôn, Bỉm Sơn, **Thanh Hóa**.

BÌNH PHƯƠNG

VIẾT SỐ VÀO HÌNH TRÒN

Một hình tròn được chia thành 10 hình quạt bằng nhau như hình vẽ.



Các bạn hãy viết 10 số từ 1 đến 10, mỗi số vào một hình quạt sao cho tổng hai số ở hai hình quạt kề nhau bất kì bằng tổng hai số ở hai hình quạt đối xứng với hai hình quạt đó qua tâm hình tròn.

NGÂN HỒ

TẠP CHÍ TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ SỐ 263 CÓ GÌ ?

Một tháng nữa, các bạn sẽ có trong tay :

- Đề thi Olympic Khu vực Mỹ La tinh
- Đáp án đề thi tuyển sinh môn toán của trường Đại học Thủy sản (Nha Trang, Khánh Hòa) năm 1998.
- Những lưu ý khi thi môn Toán vào các trường Đại học ? Ý kiến của nhiều thầy chấm thi !
- Đề thi môn Toán vào lớp 10, khối chuyên của ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội năm 1998.
- Kết quả họa thơ và giải đố bằng thơ.

Còn gì nữa ? Xin mời các bạn đón đọc !

TH&TT

NHẮN TIN

- Các bạn có tên sau đây được giải trong các cuộc thi trên tạp chí, nay đã thay đổi địa chỉ, xin gửi gấp địa chỉ mới về Tòa soạn.
  - *Trần Mai Sơn Hà*, 12CL, PTTH năng khiếu Quảng Bình - tỉnh Quảng Bình - *Trần Đức Thịnh*, $9A_6$ Trần Đăng Ninh, Nam Định
  - *Lê Quang Nẫm*, 12T, PT năng khiếu, ĐHQG - TP Hồ Chí Minh
  - *Phạm Tuấn Anh*, 8C, Trường năng khiếu TP Thanh Hóa
  - *Trần Quang Vinh*, $9A_2$ THCS Ý Yên - Nam Định
  - *Nguyễn Lê Lực*, 12T, PTNK, ĐHQG TP Hồ Chí Minh
  - *Doãn Quý Hiếu*, $9A_6$, trường Trần Đăng Ninh, Nam Định
  - *Hoàng Nguyên Vũ*, 8C, THCS Trưng Vương, Hà Nội
  - *Lê Thị Na*, 4D Tiểu học Lương Ninh, Quảng Ninh, tỉnh Quảng Bình.
  - *Mai Anh Tuấn*, $12A_2$ chuyên Lê Quý Đôn, Đà Nẵng.
  - *Huỳnh Công Thành*, 9/1 Nguyễn Du, Q.1, TP Hồ Chí Minh.
- Các bạn Đặng Đình Lai (Thanh Hóa), Nguyễn Thị Bắc (Hà Nội), Nguyễn Đình Quân (Nghệ An), Vi Quốc Dũng (Thái Nguyên), Hà Duy Hưng (Hà Nội) đã có bài đăng trên tạp chí năm 1998, xin liên hệ gấp với Tòa soạn để cho biết tên thật (nếu các tên trên là bút danh) và địa chỉ !
- Chuyên mục **TRẢ LỜI BẠN ĐỌC** mở **đường dây nóng** cho các câu hỏi về thi Đại học môn Toán và thi vào lớp 10 chuyên Toán - Tin. Hãy ghi thêm ngoài phong bì : **Đường dây nóng - Trả lời bạn đọc**.
- Các bạn *tham gia giải bài* chú ý : Mỗi bài viết trên một tờ giấy riêng cùng với tên và địa chỉ (nếu nhiều bài viết chung vào 1 tờ giấy thì chỉ chấm bài đầu tiên).

TH&TT

ISSN : 0866-0853
Chỉ số : 12884
Mã số : 8BT64M9

Chế bản tại Tòa soạn
In tại Nhà máy in Diên Hồng, 57 Giảng Võ
In xong và nộp lưu chiểu tháng 4 năm 1999

Giá : 3.000đ
Ba nghìn đồng

TRƯỜNG PHỔ THÔNG TRUNG HỌC CHUYÊN LÊ QUÝ ĐÔN, ĐÀ NẴNG

Nhà giáo Lê Phú Kỳ
Hiệu trưởng Nhà trường

✻ NHỮNG NÉT CHUNG:

Đà Nẵng là một trong số ít tỉnh thành ở phía Nam sớm mở hệ chuyên. Từ năm học 1981-1982, theo Quyết định của UBND TP, các lớp chuyên Văn ; Toán ; Lý, Anh, Pháp, Nga được mở và đặt tại trường PTTH Phan Châu Trinh. Từ 1982 đến 1986, Đà Nẵng đạt được nhiều giải quốc gia và quốc tế. Giải quốc tế có : Trần Nam Dũng (Toán), Chung Quý Hoàng (Lý) ; Ngô Văn Hoàng (Lý) ; Nguyễn Văn Hưng (Toán) ; Võ Thu Tùng (Toán) ; Lâm Tùng Giang (Toán). Những thầy giáo có công bồi dưỡng : Ngô Thế Phiệt ; Lê Hoành Phò, Mai Chánh Trí, Nguyễn Văn Kính.

Năm 1986, "Trường Năng khiếu cấp II, III Quảng Nam Đà Nẵng" được thành lập, và từ năm học 1991-1992 đổi tên là : "Trường PTTH chuyên Lê Quý Đôn". Năm học đầu tiên trường có 14 lớp chuyên, đến nay có 25 lớp, ngoài các lớp chuyên có thêm lớp chọn.

Thành tích: **- 1 giải quốc tế (môn Lý),**
- mỗi năm có trên 20 giải quốc gia.
- thi đậu vào đại học từ 96% trở lên.

✻ VỀ RÈN LUYỆN TRI THỨC :

Trường phân các lớp theo bốn khối A, B, C, D nhằm tăng cường rèn luyện các môn thi đại học.

Các đội tuyển được bồi dưỡng thêm, thường từ 3 đến 6 tiết mỗi tuần.

Học sinh được tổ chức thêm các hoạt động bổ trợ cho việc học như tham gia câu lạc bộ "Hóa học Vui", câu lạc bộ văn học "Hoa Hàm Tiếu", một số tập san "Hoa hàm tiếu" đã được nhiều bạn học sinh mến mộ. Học sinh của trường đã tự thực hiện được tờ báo "Toán học" cho cấp 2, cấp 3 bán rộng rãi trong thành phố.

Nhiều học sinh có bài giải được khen trên tạp chí *Toán học và Tuổi trẻ* và có bài đăng trong các tạp chí "Văn học và tuổi trẻ" ; "Mực tím", "Hoa học trò"...

Các thầy cô giáo chẳng những nhiệt tâm trong giảng dạy mà còn say sưa nghiên cứu. Các thầy cô đã xuất bản trên 20 đầu sách (Toán, Lý, Hóa, Anh, ...). Tập sách "Bài tập hình học 12A" của thầy Hiệu trưởng Lê Phú Kỳ đã được Nhà xuất bản Hà Nội phát hành.

Nhiều thầy cô giáo tham gia viết bài cho các báo, tạp chí : thầy Lê Quang Đức là cây bút có uy tín về các vấn đề văn học; thầy Ngô Thế Phiệt, Nguyễn Sinh Nguyên có bài trên báo Toán học và Tuổi trẻ, thầy Lê Hoành Phò có bài trên tạp chí Khoa học của Thành phố Đà Nẵng...

Trường tham gia tích cực các cuộc thi như thi chọn học sinh giỏi quốc gia, thi toán châu Á - Thái Bình Dương, thi Olympic truyền thống 30-4, thi Hóa Hoàng gia Ôxtralia... và đã đạt được một số kết quả đáng phấn khởi.

✻ VỀ RÈN LUYỆN VĂN THỂ MỸ

Nhà trường coi trọng việc giáo dục toàn diện cho học sinh các em được tổ chức tham gia nhiều sinh hoạt ngoài giờ như :

- *Công tác xã hội :* tham gia các công tác từ thiện, cải thiện môi sinh, sinh hoạt cộng đồng...

- *Hoạt động văn nghệ*: Học sinh trường Lê Quý Đôn đã đạt nhiều giải cấp thành phố, quốc gia như học sinh Đỗ Khoa Nam đạt Huy chương Bạc Hội thi giọng hát phổ thông toàn quốc, học sinh Trần Thu Trang đạt á hậu thi nam nữ sinh thanh lịch thành phố Đà Nẵng.

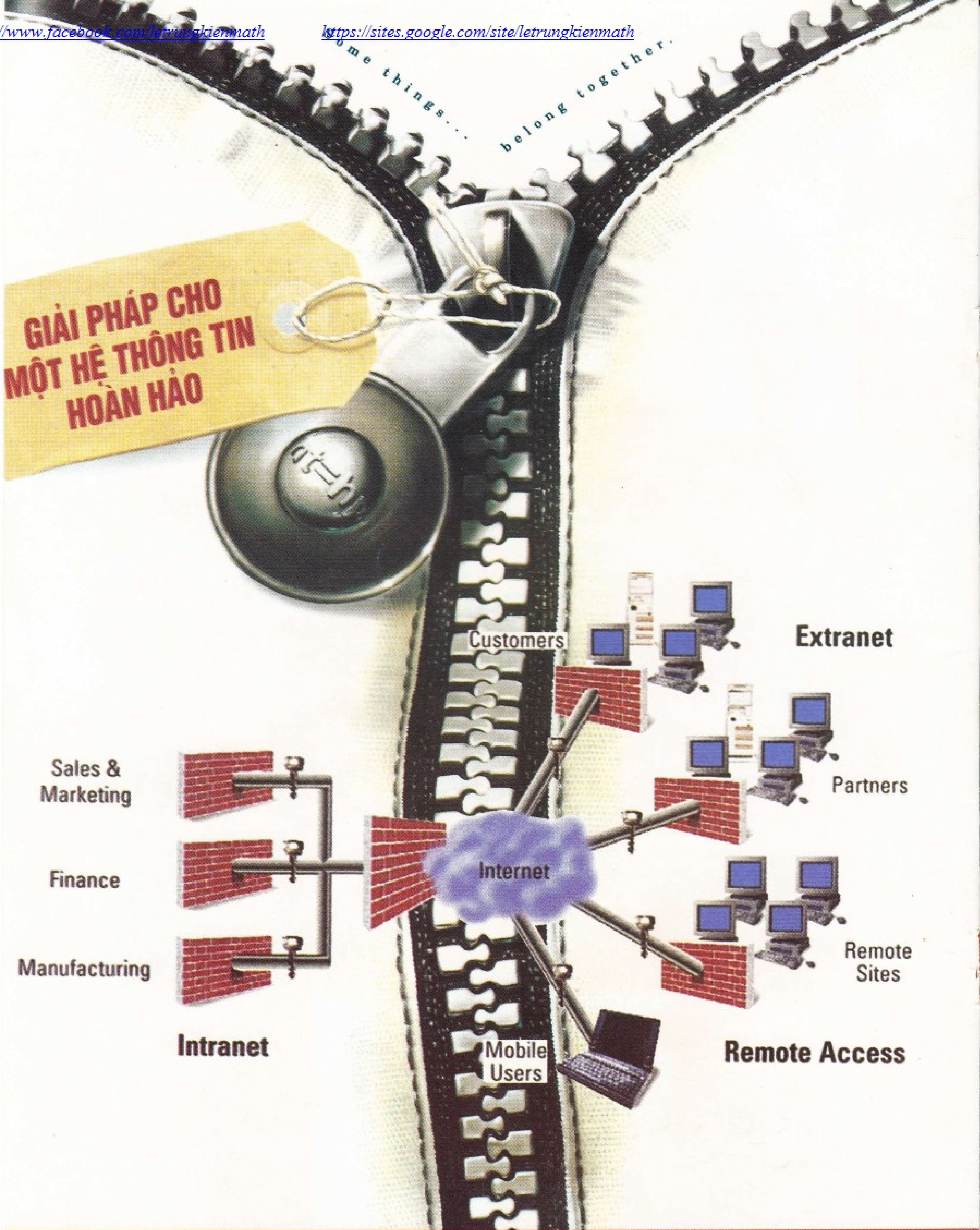
- *Hoạt động thanh niên:* học sinh cắm trại dã ngoại, như năm 1998 tại Hội An, năm 1997 tại Lăng Cô Huế.

- *Hoạt động thể thao:* Tích cực động viên các em trau dồi thể lực, hoạt động thể thao, đạt nhiều huy chương trong Hội khỏe Phù Đổng cấp thành phố hoặc cấp Quốc gia.

Nhiều học sinh cũ của trường đã trưởng thành công tác, phục vụ đất nước ở khắp mọi miền, trong đó có hai Tiến sĩ, nhiều Phó tiến sĩ và nhiều học sinh khác đang du học nước ngoài.

Thầy và trò trường PTTH chuyên Lê Quý Đôn Đà Nẵng đã đạt được một số kết quả bước đầu, đang được nhân dân của TP tin tưởng, mến mộ, được các cấp lãnh đạo tin tưởng. Trường đã được các trường bạn yêu mến, nên đã giao cho trọng trách tổ chức cuộc thi Olympic truyền thống 30-4 từ 15-4-99 tại Đà Nẵng. Xin chúc tất cả các bạn gần xa tham gia cuộc thi lần này đạt kết quả tốt đẹp.

Cô Phó Hiệu trưởng, thầy Tuấn và Đội tuyển Tin học năm 1999


things.... belong together.
GIẢI PHÁP CHO
MỘT HỆ THÔNG TIN
HOÀN HẢO
Customers
Extranet
Partners
Sales &
Marketing
Finance
Manufacturing
Internet
Remote
Sites
Intranet
Mobile
Users
Remote Access