BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ✻ HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

TOÁN HỌC & TUỔI TRẺ

NĂM THỨ 35 - RA HÀNG THÁNG
Số 11 (257)
1998

Lễ phát thưởng học sinh giỏi quốc gia tỉnh Hà Tĩnh năm học 1997 - 1998

TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ
MATHEMATICS AND YOUTH

MỤC LỤC

• **Ảnh bìa 1 :**
* *Ảnh dưới :* Các cô giáo Nguyễn Thị Chí, Đào Bích Vân, Phạm Khánh Hường và học sinh giỏi quốc gia Trường THCS Lê Quý Đôn, Lào Cai.

Trụ sở tòa soạn :
25 Hàn Thuyên, Hà Nội ĐT : 8.262477 - 9714359
Đại diện tại miền Nam :
TRẦN CHÍ HIẾU, ĐT: 8.323044
231 Nguyễn Văn Cừ, Q.5, TP Hồ Chí Minh

Thực hiện : NGUYỄN VIỆT HẢI
LÊ THỐNG NHẤT
VŨ KIM THỦY
Trị sự : VŨ ANH THƯ
Chế bản : NGUYỄN THỊ OANH

Dành cho các bạn
TRUNG HỌC CƠ SỞ

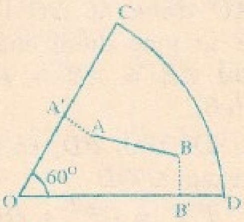
TÌNH HUỐNG THAY ĐỔI - CÁCH GIẢI THAY ĐỔI

VŨ HỮU BÌNH
(GV trường THCS Trưng Vương - *Hà Nội*)

Các bài toán sau đây đều có chung một nội dung, chúng chỉ khác nhau về con số. Nhưng chính sự khác nhau của con số lại đòi hỏi những cách giải quyết khác nhau.

Bài toán 1. *Bên trong đường tròn bán kính 5 cho 7 điểm. Chứng minh rằng tồn tại hai điểm có khoảng cách nhỏ hơn 5.*

Giải. Chia hình tròn tâm O ra 6 hình quạt bằng nhau. Theo nguyên lí Đirichlê, tồn tại hai điểm đã cho thuộc cùng một hình quạt, giả sử A và B thuộc hình quạt COD (h.1) (A, B không thuộc cung của hình quạt). Nếu một trong hai điểm A, B trùng O thì bài toán được chứng minh. Giả sử hai điểm A và B không trùng O. Trên OC lấy A' sao cho $OA' = OA$, trên OB lấy B' sao cho $OB' = OB$, thế thì $AB \le A'B'$ (hai tam giác có hai cặp cạnh tương ứng bằng nhau). $\Delta OA'B'$ có $\hat{O} = 60^o$ nên một trong hai góc $\hat{A}'$, $\hat{B}'$ không nhỏ hơn 60^o, chẳng hạn $\hat{A}' \ge 60^o$, thế thì $\angle A'OB' \le \hat{A}'$. Suy ra $A'B' \le OB' < OD = 5$. Như vậy $AB < 5$.



Hình 1

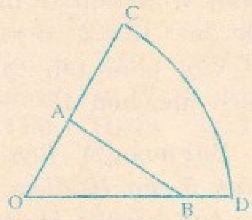
Bài toán 2. *Bên trong đường tròn bán kính 5 cho 6 điểm. Chứng minh rằng tồn tại hai điểm có khoảng cách nhỏ hơn 5.*

Nhận xét. Nếu giải theo cách ở bài toán 1, chia hình tròn thành 5 hình quạt bằng nhau để tồn tại một hình quạt chứa hai điểm thì chưa giải được bài toán vì trong hình quạt có cung $360^o : 5 = 72^o$, tồn tại hai điểm có khoảng cách lớn hơn bán kính, tức là lớn hơn 5. Ta giải bài toán 2 bằng cách xét các trường hợp để chọn được khoảng cách nhỏ nhất.

Giải. Xét hai trường hợp :

- Trường hợp trong 6 điểm đã cho, tồn tại một điểm là tâm đường tròn. Khi đó bất kì điểm nào trong 5 điểm còn lại cũng cách tâm một khoảng nhỏ hơn 5, bài toán được chứng minh.

- Trường hợp trong 6 điểm đã cho, không có điểm nào là tâm đường tròn. Nếu có hai điểm thuộc cùng một bán kính thì khoảng cách giữa hai điểm đó nhỏ hơn 5, bài toán được chứng minh. Nếu không có hai điểm nào thuộc cùng một bán kính, ta vẽ các bán kính qua mỗi điểm đã cho. Có 6 bán kính, tồn tại hai bán kính tạo với nhau một góc không quá 60^o, giả sử đó là các bán kính OC, OD theo thứ tự đi qua hai điểm đã cho A, B (h.2) ΔOAB có $\hat{O} \le 60^o$ nên một trong hai góc $\hat{A}$, $\hat{B}$ không nhỏ hơn 60^o, chẳng hạn $\hat{A} \ge 60^o$, thế thì $\hat{O} \le \hat{A}$ do đó $AB \le OB < OD = 5$. Như vậy $AB < 5$.



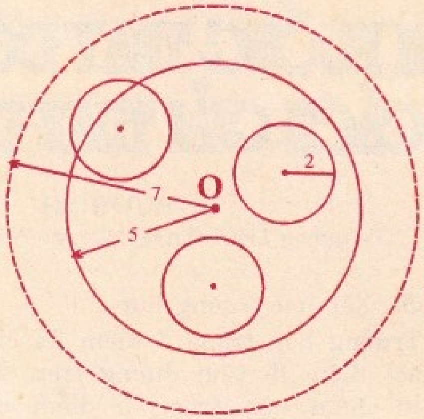
Hình 2

Bài toán 3. *Bên trong đường tròn bán kính 5 cho 13 điểm. Chứng minh rằng tồn tại hai điểm có khoảng cách nhỏ hơn 4.*

Nhận xét. Các cách chia hình tròn thành 12 hình quạt bằng nhau (như cách giải bài toán 1) hoặc chia hình tròn bởi các bán kính đi qua 13 điểm đã cho (như cách giải bài toán 2) không giúp ta giải được bài toán 3. Ta giải bài toán 3 bằng phương pháp phản chứng.

Giải. Giả sử bất kì hai điểm nào trong 13 điểm đã cho cũng có khoảng cách lớn hơn hay bằng 4. Ta sẽ chỉ ra điều mâu thuẫn.

Vì khoảng cách giữa hai điểm đã cho nào cũng lớn hơn hay bằng 4 nên nếu vẽ 13 đường tròn bán kính 2 có tâm là 13



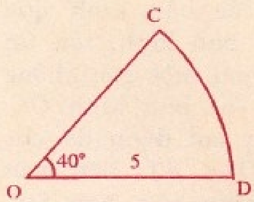
Hình 3

điểm đã cho thì chúng nằm ngoài nhau hoặc tiếp xúc ngoài và đều nằm trong hình tròn tâm O bán kính $5+2 = 7$ (h.3). Do đó : $13.\pi.2^2 < \pi.7^2 \Rightarrow 52\pi < 49\pi$, vô lí.

Vậy phải tồn tại hai điểm có khoảng cách nhỏ hơn 4.

Bài toán 4. *Bên trong đường tròn bán kính 5 cho 10 điểm. Chứng minh rằng tồn tại hai điểm có khoảng cách nhỏ hơn 4.*

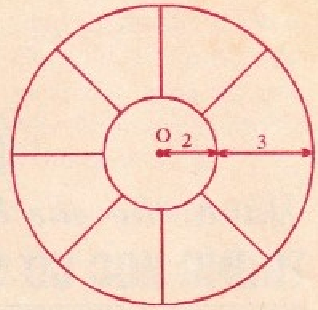
Nhận xét. Cách giải ở bài toán 3 không áp dụng được cho bài toán 4 vì quan hệ $10.\pi.2^2 < \pi.7^2$ không dẫn đến điều vô lí. Ta thử chia hình tròn O thành 9 phần bằng nhau (như cách giải ở bài toán 1), tồn tại một phần chứa hai điểm. Nhưng cách chia hình tròn thành 9 hình quạt bằng nhau không giải được bài toán 4 vì mỗi hình quạt (h.4) "dài quá" (bán kính bằng 5, tồn tại hai điểm của hình quạt có khoảng cách lớn hơn 4) và "hẹp quá" (cung hình quạt bằng $360^\circ : 9 = 40^\circ$, không cần thiết phải hẹp đến thế). Ta cải tiến cách giải này bằng cách làm cho các hình quạt "ngắn lại và rộng ra".



Hình 4

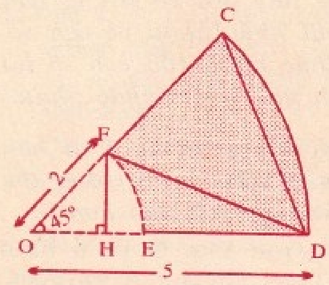
Giải. Chia hình tròn tâm O bán kính 5 thành hình tròn đồng tâm O bán kính 2 và hình vành khăn. Lại chia hình vành khăn làm 8 phần bằng nhau bởi các bán kính kẻ từ O và tạo thành các góc 45°. Như vậy hình tròn O được chia thành 9 phần. Theo nguyên lí Đirichlê, tồn tại hai điểm thuộc cùng một phần, chẳng hạn hai điểm A và B.

Nếu A, B nằm bên trong đường tròn tâm O bán kính 2 thì $AB < 4$, bài toán được chứng minh.



Hình 5

Nếu A, B thuộc một mảnh của hình vành khăn (có thể ở biên của mảnh hình vành khăn), ta sẽ chứng minh $AB < 4$ bằng cách chứng minh khoảng cách lớn nhất giữa hai điểm thuộc mảnh hình vành khăn nhỏ hơn 4. Khoảng cách lớn nhất đó là $\max\{FD = CE, CD\}$ (để chứng tỏ $AB > AC$ trong đó BC là một dây cung, ta gọi E là giao điểm của trung trực BC với AB thì $AB = AE + EB = AE + EC > AC$) (h.6).



Hình 6

Để tính FD, có thể dùng hệ thức lượng trong ΔFOD :

$$FD^2 = OF^2 + OD^2 - 2.OF.OD.\cos 45^\circ$$

$$= 4 + 25 - 2.2.5.\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= 29 - 10\sqrt{2} < 29 - 14 = 15 < 16,$$

suy ra $FD < 4$.

Nếu chưa học đến hệ thức lượng trong tam giác, tính FD như sau :

ΔOHF vuông cân $\Rightarrow FH = OH = \frac{OF}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

$$HD^2 = (5 - \sqrt{2})^2 = 27 - 10\sqrt{2}.$$

$$FD^2 = FH^2 + HD^2 = 2 + 27 - 10\sqrt{2}$$

$$= 29 - 10\sqrt{2} < 29 - 14 = 15 < 16.$$

suy ra $FD < 4$.

Bạn đọc tự tính tiếp $CD < 4$.

Vậy tồn tại hai điểm đã cho có khoảng cách nhỏ hơn 4.

Nhận xét. Cùng một nội dung, chỉ khác nhau về con số, bốn bài toán trên có bốn cách giải khác nhau. Thế mới biết trong giải toán không thể rập khuôn máy móc.

Mỗi tình huống cụ thể đòi hỏi một cách giải quyết thích hợp.

Các bạn hãy tìm cách giải quyết thích hợp đối với từng bài trong hai chùm bài tập dưới đây.

CHÙM BÀI TẬP THỨ NHẤT

1. Bên trong đường tròn bán kính 6 cho 5 điểm. Chứng minh rằng tồn tại hai điểm có khoảng cách nhỏ hơn 9.

2. Bên trong đường tròn bán kính 6 cho 4 điểm. Chứng minh rằng tồn tại hai điểm có khoảng cách nhỏ hơn 9.

3. Bên trong đường tròn bán kính 6 cho 17 điểm. Chứng minh rằng tồn tại hai điểm có khoảng cách nhỏ hơn 4.

CHÙM BÀI TẬP THỨ HAI

1. Bên trong hình chữ nhật kích thước 3×4 cho 7 điểm. Chứng minh rằng tồn tại hai điểm có khoảng cách nhỏ hơn 2,24.

2. Bên trong hình chữ nhật kích thước 3×4 cho 6 điểm. Chứng minh rằng tồn tại hai điểm có khoảng cách nhỏ hơn 2,24.

3. Bên trong hình chữ nhật kích thước 3×4 cho 5 điểm. Chứng minh rằng tồn tại hai điểm có khoảng cách không quá 2,5.

4*. Bên trong hình chữ nhật kích thước 3×4 cho 4 điểm. Chứng minh rằng tồn tại hai điểm có khoảng cách không quá $3\frac{1}{8}$.

Hướng dẫn. Chia hình chữ nhật ra bốn phần bởi một đường chéo và đường trung trực của đường chéo đó./.

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN VÀ LỜI GIẢI

BÀI SỐ 11

Problem. There are $2n$ knights who gather at the court of the king. Each knight has no more than n-1 enemies among them. Can the king arrange the knights at a round table so that none of them sits next to his enemy ?

Solution. If two knights are not enemies, we call them friends. Consider first an arbitrary arrangement of the knights at the round table. Suppose that there are two knights A and B who are enemies sitting next to each other, where B is on the right of A. Since A has no less than n friends, the number of the knights sitting on the right of a friend of A is no less than n. Among them we can find a friend B' of B, who sits on the right of a friend A' of A. Now we change the seats of the knights between B and A' in the reverse order. Then A' sits on the right of A and B' on the right of B. The number of the pairs of enemies sitting next to each other will decrease at least by one. If we continue to change the seats in the same manner, we will arrive at an arrangement where none of the knights sits next his enemy.

Từ mới.

knight = hiệp sĩ
gather = họp mặt (động từ)
court = cung vua
king = vua
enemy = kẻ thù
arrange = bố trí, thu xếp
round table = bàn tròn
next = cạnh
call = gọi (động từ)
consider = xét (động từ)
arbitrary = tùy ý
arrangement = sự sắp xếp, sự bố trí
less = ít hơn
change = thay, đổi (động từ)
reverse order = thứ tự ngược
pair = đôi, cặp
decrease = giảm (động từ)
continue = tiếp tục (động từ)
manner = cách thức
arrive = đến, đạt được

NGÔ VIỆT TRUNG
(Viện Toán học)

Bài T1/253. *Tìm số nguyên dương n bé nhất để $n^3+4n^2-20n-48$ chia hết cho 125.*

Lời giải. Ta có

$$A = n^3 + 4n^2 - 20n - 48$$
$$= (n-4)(n+2)(n+6)$$

Thử với $n = 1, 2, 3$ ta thấy $A \not\vdots\ 125$.

Với $n = 4$ thì $A = 0$ chia hết cho 125.

Thành thử số nguyên dương bé nhất cần tìm là $n = 4$.

Nhận xét : Đây là một bài toán dễ như nhiều bạn đã nhận xét. Một số bạn như bạn *Nguyễn Văn Phúc*, 8A, Vĩnh Tường, **Vĩnh Phúc**; *Nguyễn Trung Hòa*, 9I, Nguyễn Chí Diểu, **Thừa Thiên - Huế**; *Doãn Hoan*, Thị trấn Ân Thi, **Hưng Yên**, đề nghị thêm vài điều kiện : Tìm $n > 4$ nhỏ nhất để $A \vdots 125$. Khi đó ta xét các trường hợp sau :

Nếu $n \equiv 3 \pmod 5 \Rightarrow n-4 \not\vdots\ 5$, $n + 6 \not\vdots\ 5 \Rightarrow n-2 \vdots 125 \Rightarrow n$ nhỏ nhất là 123.

Nếu $n \equiv 4 \pmod 5 \Rightarrow n+6 \vdots 5$ và $n+2 \not\vdots\ 5$ do đó phải có $n + 6 \vdots 25$ hoặc $n-4 \vdots 25 \Rightarrow n$ nhỏ nhất là 19.

Các bạn tham gia giải bài này rất đông. Các bạn có lời giải tốt như : *Ngô Việt Dũng* 9B Hải Đình, Đồng Hới, **Quảng Bình** ; *Nguyễn Hoàng Long*, 9A THCS Hồng Bàng, **Hải Phòng**; *Nguyễn Tuấn Sơn*, 8A PTCS Thị xã, **Phú Thọ** ; *Nguyễn Anh Chiến*, 8A THCS Dệt Việt Trì, **Phú Thọ** ; *Đỗ Trung Tiến*, 8C Hà Nội - Amsterdam, **Hà Nội**.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T2/253. *Các số dương x, y, z thỏa mãn : $x^2+y^2+z^2 = 1$. Chứng minh rằng :*

$$\frac{x}{y^2+z^2} + \frac{y}{z^2+x^2} + \frac{z}{x^2+y^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Lời giải. (của *Trần Tất Đạt*, lớp 8/2 - THCS Nguyễn Khuyến, **Đà Nẵng** và nhiều bạn).

Từ giả thiết suy ra $0 < x, y, z < 1$. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho 3 số dương: $2x^2$; $1 - x^2$; $1 - x^2$ ta có :

$$\frac{2x^2+(1-x^2)+(1-x^2)}{3} \geq \sqrt[3]{2x^2(1-x^2)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3} \geq \sqrt[3]{2x^2(1-x^2)^2} \Rightarrow x(1-x^2) \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{1-x^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}x^2 \Rightarrow \frac{x}{y^2+z^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}x^2 \quad (1).$$

Tương tự ta có : $\dfrac{y}{z^2+x^2} \geq \dfrac{3\sqrt{3}}{2}y^2$ (2);

$$\frac{z}{x^2+y^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}z^2 \quad (3)$$

Cộng từng vế của (1), (2), (3) ta được :

$$\frac{x}{y^2+z^2} + \frac{y}{z^2+x^2} + \frac{z}{x^2+y^2} \geq$$
$$\geq \frac{3\sqrt{3}}{2}(x^2+y^2+z^2) = \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ (đpcm).}$$

Nhận xét : 1) Đây là một bài toán quen thuộc đối với các bạn THPT (đã có trong đề 26, Bộ đề thi tuyển sinh vào ĐHCĐ). THTT muốn giới thiệu với các bạn THCS để các bạn có thể giải không dùng đến kiến thức về đạo hàm của các anh chị lớp 12, tuy nhiên rất nhiều bạn (kể cả lớp 7; 8; 9) đã "chơi" rất "ngon lành" bằng công cụ này ! Nên khen hay nên chê những lời giải như vậy ?

2) Một số bạn, đã không dùng bất đẳng thức Cô-si để chứng minh (1) mà biến đổi tương đương:

$$\frac{x}{1-x^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}x^2 \Leftrightarrow 3\sqrt{3}\,x^3 - 3\sqrt{3}x + 2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{3}x)^3 - 3(\sqrt{3}x) + 2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{3}-1)^2(\sqrt{3}x+2) \geq 0$$

(hiển nhiên đúng với $x \in (0; 1)$).

3) Một vài bạn sai lầm khi viết : $\dfrac{x}{y^2+z^2} \geq \dfrac{x}{2yz}$ (thực ra bất đẳng thức phải đổi chiều lại).

4) Có bạn dẫn đến $A \geq \dfrac{27}{2}xyz$ (với A là vế trái của bất đẳng thức) rồi lí luận đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ và suy ra

$$A \geq \frac{27}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ (?)}$$

5) Rất nhiều bạn đã tổng quát hóa bài toán theo nhiều hướng :

a) Với $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là các số dương thỏa mãn $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 1$ thì

$$\frac{a_1}{1-a_1^{2k}}+\frac{a_2}{1-a_2^{2k}}+\ldots+\frac{a_n}{1-a_n^{2k}} \geq$$
$$\geq \frac{2k+1}{2k}\cdot\sqrt[2k]{2k+1} \qquad (k \in \mathbf{N}^*).$$

Bạn *Lê Nguyên Minh*, 9A, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa, Thanh Hóa còn chỉ ra điều tổng quát này chính là bài T7/187.

b) Với $n+1$ số dương $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$ thỏa mãn : $a_1^n+a_2^n+\ldots+a_{n+1}^n = 1$ thì

$$\frac{a_1^{n-1}}{1-a_1^n}+\frac{a_2^{n-1}}{1-a_2^n}+\ldots+\frac{a_{n+1}^{n-1}}{1-a_{n+1}^n} \geq \frac{n+1}{n}\sqrt[n]{n+1}$$

c) Với n số dương $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n \geq 3)$ thỏa mãn $a_1^{n-1}+a_2^{n-1}+\ldots+a_n^{n-1} = k > 0$ thì

$$\frac{a_1^{n-2}}{k-a_1^{n-1}}+\frac{a_2^{n-2}}{k-a_2^{n-1}}+\ldots+\frac{a_n^{n-2}}{k-a_n^{n-1}} \geq \frac{\sqrt[n-1]{n^n}}{(n-1)\sqrt[n-1]{k}}$$

v.v..

6) Các bạn sau đây có lời giải đúng và phát triển bài toán tốt : *Đào Thị Bích*, 8A, Vân Phú, Việt Trì, **Phú Thọ**; *Đỗ Ngọc Kiên*, 9D, Năng khiếu Trần Phú, **Hải Phòng**; *Lương Thế Nhân*, 9A, chuyên Bạc Liêu, **Bạc Liêu**; *Bùi Ngọc Hân*, 8C, THCS Trần Mai Ninh, **Thanh Hóa**; *Trần Thái An Nghĩa*, 9I, THCS Trần Hưng Đạo, **Quảng Ngãi**; *Lê Tất Thắng*, 9A, THCS Hồng Lam, Hồng Lĩnh, **Hà Tĩnh**; *Bùi Quang Minh*, 9CT, Trần Phú, Phủ Lý, **Hà Nam**; *Ngô Việt Dũng*, 8B, THCS Hải Đình, Đồng Hới, **Quảng Bình**; *Nguyễn Thị Hương Ly*, 8A, PTTH DL Tôn Đức Thắng, Ba Đình, **Hà Nội**; *Nguyễn Thị Hoa*, 9A, THCS Nghi Phú và *Nguyễn Như Phong*, 8A, THCS Hưng Đông, Vinh, **Nghệ An**; *Nguyễn Thị Ngừng*, 8D, THCS Đình Tổ, Thuận Thành, **Bắc Ninh**; *Nguyễn Trung Kiên*, 9A$_1$, THCS Chu Văn An, **Thái Nguyên**; v.v...

LÊ THỐNG NHẤT

Bài T3/253. *Giải phương trình*
$$x^4 - 13x^2 + 18x - 5 = 0$$

Lời giải. $x^4 - 13x^2 + 18x - 5 = 0$ (1)

$\Leftrightarrow (x^4 - 4x^2 + 4) - (9x^2 - 18x + 9) = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 - 2)^2 - (3x - 3)^2 = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 + 3x - 5)(x^2 - 3x + 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^2+3x-5 = 0 & (2) \\ x^2-3x+1 = 0 & (3) \end{array}\right.$$

Giải phương trình (2) ta được 2 nghiệm $x_{1,2} = \dfrac{-3\pm\sqrt{29}}{2}$

Giải phương trình (3) ta được 2 nghiệm $x_{3,4} = \dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

Vậy phương trình (1) có 4 nghiệm là :

$$x_{1,2} = \frac{-3\pm\sqrt{29}}{2},\ x_{3,4} = \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$$

Nhận xét. Có trên 500 lời giải từ 44 tỉnh và thành phố gửi về tòa soạn. Hầu hết các lời giải đều tốt.

Giải tốt bài này có các bạn :

Lào Cai : Nguyễn Đức Cường, 9, THCS Lê Quý Đôn; **Yên Bái:** *Nguyễn Xuân Mạnh*, 8C, THCS Nguyễn Du, Yên Bái, *Nguyễn Việt Hằng*, 9C, PTCS Sơn La; **Hòa Bình:** *Đào Mạnh Tùng*, 9, THCS B Yên Thủy; **Vĩnh Phúc:** *Hoàng Đình Tùng*, 8B, NK Vĩnh Yên; **Bắc Giang:** *Nguyễn Đức Hoàng Anh*, 9A, THCS Nguyễn Đăng Đạo; **Thái Nguyên:** *Lê Thế Trọng*, 9D$_1$, THCS Trung tâm Sông Công; **Quảng Ninh:** *Phạm Văn Nam*, 8A, THCS Đông Triều; **Hải Phòng:** *Đặng Văn Minh*, 9A5, THCS Lê ích Mộc, Quảng Thanh, Thủy Nguyên; **Hải Dương:** *Ngô Xuân Bách*, 9A, PT Nguyễn Trãi, THHD; **Hà Tây:** *Đặng Thành Tuấn*, 9A, THCS Thường Tín; **Thái Bình:** *Đinh Thị Thêu*, 8T, THCS Lương Thế Vinh; **Hà Nội:** *Nguyễn Thị Hương Ly*, 8A, DL Tôn Đức Thắng; **Nam Định:** *Trần Đức Hiệu*, 9I, Hàn Thuyên, *Trần Quang Vinh*, 9A$_1$, THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên, *Trần Văn Toàn*, 8B, THCS Trung Đông, Trực Ninh ; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Văn Trung*, 9B, THCS Lê Hữu Lập, Hậu Lộc, *Lê Vĩnh Thịnh*, 9C Trần Mai Ninh; **Nghệ An:** *Nguyễn Như Phong*, 8A, CII Hưng Đông; **Hà Tĩnh:** Hoàng *Trần Thông*, 8A, THCS Hồng Lam, Hồng Lĩnh, Phan Thị Phương Thảo, 9A, Hoàng Xuân Hãn; **Quảng Bình:** *Hoàng Tuấn Nhã*, 9A, THCS Nguyễn Hàm Ninh; **Quảng Trị:** *Trần Vũ Quỳnh*, 8B Hải Đình; **Thừa Thiên - Huế:** *Trần Huy Lập*, 8/1 trường Nguyễn Tri Phương, Huế; **Quảng Nam:** *Trương Văn Hiệu*, 8, THCS Lương Thế Vinh; **Quảng Ngãi:** *Phạm Tuấn Anh*, 9A, chuyên Lê Khiết; **Bình Định:** *Bùi Thị Thu Ngân*, 9A Quốc học; **Phú Yên:** *Nguyễn Huỳnh Tấn Trung*, 9A, Lương Văn Chánh; **Khánh Hòa:** *Nguyễn Tôn Bảo*, 8[14], THCS Thái Nguyên; **Ninh Thuận:** *Dương Nguyễn Khánh Linh*, 8A$_3$, THCS Lý Tự Trọng, Phan Rang - Tháp Chàm; **Đắc Lắc:** *Hồ Thị Thanh Trang*, 8C, Nguyễn Du; **Đồng Nai:** *Hoàng Hải Long*, THCS Lê Quý Đôn, *Nguyễn Ninh Thuận*, 9/1 THCS Quang Trung, TT Tân

Phú; **Tây Ninh:** *Đào Duy Bình*, 7A$_1$, PTTH Dương Minh Châu; **TP Hồ Chí Minh:** *Tô Vũ Khánh Vinh*, 9^7 Hồng Bàng, Q5, *Trần Vĩnh Hưng*, 8/1 Nguyễn Du, Gò Vấp; **Bà Rịa - Vũng Tàu:** *Trần Giang*, 8/1 Nguyễn An Ninh; **Đồng Tháp:** *Trần Minh Tùng*, 9A$_2$ THCB Cao Lãnh; **Bạc Liêu:** *Lương Thế Nhân*, 9A PTTH chuyên Bạc Liêu; **Cà Mau:** *Trần Vũ Khanh*, 9T, BC Cà Mau và nhiều bạn khác.

TỐ NGUYÊN

Bài T4/253. *Các đường phân giác trong BE và CF của các góc B và C cắt đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC lần lượt tại M và N. Chứng minh rằng tam giác ABC cân tại A khi EM = FN.*

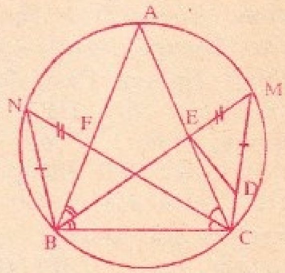
Lời giải. Giả sử ΔABC không cân tại A. Không giảm tổng quát, coi $AB < AC$. Ta có

$\angle ABC > \angle ACB$ (1)

suy ra

$\angle MBC > \angle NCB$.

Nên $MC > NB$.



Trên MC lấy D sao cho $MD = NB$.

Dễ thấy $\Delta FNB = \Delta EMD$ (cgc) suy ra $\angle NFB = \angle MED < \angle MEC$

hay $\angle ABC + \frac{1}{2}\angle ACB < \angle ACB + \frac{1}{2}\angle ABC$.

Nên $\angle ABC < \angle ACB$ (2)

Từ (1) và (2) ta thấy mâu thuẫn.

Vậy ΔABC cân tại A.

Nhận xét. Bài này còn nhiều cách giải khác.

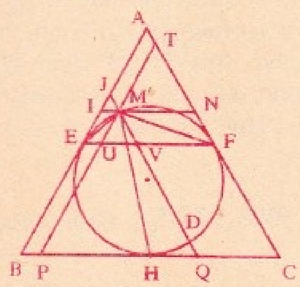
Giải tốt bài này có các bạn : **Hòa Bình** : *Bùi Hiếu*, 9B, Dân tộc nội trú; **Thái Nguyên :** *Nguyễn Văn Thắng*, 9A$_1$ Độc Lập; **Vĩnh Phúc:** *Hoàng Xuân Quang*, 9A, THCS Vĩnh Tường, *Kim Đình Thái*, 8B, PTCS Yên Lạc; **Quảng Ninh:** *Đỗ Quang Khánh*,7A2 TĐ Uông Bí; **Hải Phòng:** *Triệu Tuấn Đạt*, 9T PTCS Chu Văn An; **Hải Dương:** *Vũ Thành Long*, 8A THCS Nguyễn Trãi, Nam Sách, *Nguyễn Tuấn Dương*, 8A PT Nguyễn Trãi; **Hà Nội:** *Trần Minh Tuấn*, 9A3 Giảng Võ, *Phạm Bảo Trung*, 9A$_1$ Nguyễn Trường Tộ; **Nam Định:** *Đinh Thanh Hiện*, 8A, THCS Giao Thủy, *Trần Đức Hiệu*, 9I Hàn Thuyên, *Đặng Phương Thảo*, 8A$_2$ Lương Thế Vinh, *Phạm Xuân Trường*, 9A THCS Đào Sư Tích, Trực Ninh; **Thanh Hóa:** *Đỗ Hồng Lâm*, 9B NK, *Lê Vĩnh Thịnh*, 9C Trần Mai Ninh, *Bùi Ngọc Hân*, 8C Trần Mai Ninh, *Mai Văn Hà*, 8C THCS Lê Quý Đôn, Bỉm Sơn, *Hà Xuân Giáp*, 9C THCS Lê Quý Đôn, *Nguyễn Ngọc Hoan*, 8D, THCS Hoàng Quý, Hoàng Hóa; **Nghệ An:** *Lê Bá Dũng*, 8B, cấp II Sông Hiếu, Nghĩa Đàn; **Quảng Bình:** *Hà Văn Quý*, 9^1 THCS Vĩnh Ninh, Quảng Ninh; **Quảng Ngãi:** *Hồ Từ Thuấn*, 8C$_2$ Nguyễn Nghiêm, *Phạm Tuấn Anh*, 9A Lê Khiết, *Hà Quang Đạt*, 8J Trần Hưng Đạo; **Khánh Hòa:** *Nguyễn Hoa Cương*, 8^{14} THCS Thái Nguyên, Nha Trang; **Đắc Lắc:** *Võ Nhật Quý*, 9A cấp 2, 3 Nông Pac; *Ngô Quốc Anh*, 9C Nguyễn Du, Buôn Ma Thuột, *Hồ Thị Thanh Trang*, 8C Nguyễn Du, Buôn Ma Thuột; **Đồng Nai:** *Nguyễn Ninh Thuận*, 9$_1$, THCS Quang Trung, Tân Phú; **Long An:** *Trần Diễm Trang*, 9A$_1$ Nguyễn Thị Bảy, Cần Giuộc; **Bạc Liêu:** *Lương Thế Nhân*, 9A PTTH chuyên; **Cà Mau:** *Phạm Chí Thanh*, 9A^1, THCS thị trấn Đầm Dơi.

VŨ KIM THỦY

Bài T5/253. *Từ một điểm M trên đường tròn nội tiếp tam giác đều ABC cạnh bằng a kẻ các đường thẳng song song với AB và AC cắt BC tại P và Q. Chứng minh hệ thức*

$$BP^2 + PQ^2 + QC^2 = \frac{a^2}{2}.$$

Lời giải. Gọi H, E, F lần lượt là trung điểm các cạnh BC, AB, AC. Đường thẳng qua M song song với AB cắt BC ở P và cắt AC ở T, đường thẳng qua M song song với AC cắt BC ở Q và cắt AB ở J, đường thẳng qua M song song với BC cắt AB ở I và cắt AC ở N. (Hình 1).



Hình 1

Đặt $BP = x$, $PQ = y$, $QC = z$. Do ΔABC đều nên dễ dàng thấy :

$BP = AT = MI = MJ = IJ = x$,

$PQ = MQ = NC = MP = IB = y$

$QC = MN = AJ = MT = TN = z$.

Từ đó $BP^2 + PQ^2 + QC^2 =$
$= AT^2 + TN^2 + NC^2 = AJ^2 + JI^2 + IB^2$

Như vậy ta chỉ cần xét trường hợp M nằm trên cung nhỏ EF là đủ.

Cách 1. $a^2 = (x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2 + 2(xy+yz+zx)$ (1).

Gọi D là giao điểm của MQ với đường tròn nội tiếp ΔABC, ta có $\Delta MHQ \sim \Delta HDQ$ (góc Q chung, $\angle QMH = \angle QHD$), suy ra $\dfrac{QH}{QM} = \dfrac{QD}{QH}$ hay $QH^2 = QM.QD$ mà $QD = MJ = x$ (do tính đối xứng của tam giác đều ABC qua trục BF) nên $QH^2 = y.x$ (2).

Mặt khác vì $Q \in HC$ nên $QH = HC\text{-}QC = \dfrac{x+y+z}{2} - z = \dfrac{x+y-z}{2}$ (3)

Từ (2) và (3) có $\left(\dfrac{x+y-z}{2}\right)^2 = yx$, khai triển và rút gọn ta được

$$x^2+y^2+z^2 = 2(xy+yz+zx).$$

Thay vào (1) suy ra $x^2+y^2+z^2 = \dfrac{a^2}{2}$

Cách 2. (Theo *Nguyễn Lê Minh*, 9B THCS Hậu Lộc, **Thanh Hóa**)

Kí hiệu như ở hình 1. Giả sử EF cắt MP tại U và cắt MQ tại V. Ta có $\angle MEF = \angle MFN = \angle FMV$ và $\angle EMU = \angle MEI = \angle MFE$ nên $\Delta MEU \sim \Delta FMV$, suy ra $\dfrac{MU}{EU} = \dfrac{FV}{MV}$ hay $MU.MV = EU.FV$ hay $UV^2 = BP.QC$ (4)

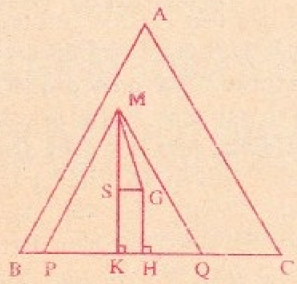
Mặt khác $PQ\text{-}UV = MQ\text{-}MV = VQ = \dfrac{a}{2}$ (5)

Sử dụng (4) (5) để biến đổi biểu thức

$$\begin{aligned} A &= xy + yz + zx = \\ &= BP.PQ + PQ.QC + QC.BP \\ &= PQ(BP + QC) + UV^2 \\ &= PQ(EF - UV) + UV^2 \\ &= PQ.\frac{a}{2} - UV(PQ - UV) \\ &= PQ \cdot \frac{a}{2} - UV \cdot \frac{a}{2} \\ &= \frac{a}{2}(PQ - UV) = \frac{a^2}{4} \end{aligned}$$

Thay vào (1) ta có $x^2 + y^2 + z^2 = \dfrac{a^2}{2}$

Cách 3. (Dựa theo *Đinh Thanh Thương*, 9A, THCS Nguyễn Trãi, Tân Kỳ, Nghệ An và *Lê Tiến Dũng*, 9C, THCS CLC Đông Sơn, **Thanh Hóa**).



Hình 2

Gọi G là tâm tam giác đều ABC, xét điểm M nằm trên đường tròn tâm G bán kính $GM=r$. Gọi H và K lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ G và M đến BC. Kẻ GS vuông góc với MK (hình 2).

Đặt $PQ = 2PK = 2KQ = y$.

Giả sử $K \in BH$ (nếu $K \in HC$ thì chứng minh tương tự).

$$\begin{aligned} & BP^2 + QC^2 = \\ &= (BH\text{-}PK\text{-}KH)^2 + (CH\text{-}KQ+KH)^2 \\ &= \left(\frac{a}{2} - \frac{y}{2} - KH\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - \frac{y}{2} + KH\right)^2 \\ &= 2\left(\frac{a}{2} - \frac{y}{2}\right)^2 + 2KH^2 \quad (6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Tính } KH^2 &= MG^2 - MS^2 = \\ &= r^2 - (MK\text{-}SK)^2 = r^2 - \left(\frac{y\sqrt{3}}{2} - \frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 \\ &= r^2 - \frac{3}{4}\left(y - \frac{a}{3}\right)^2 \quad (7) \end{aligned}$$

Từ (6) và (7) có $BP^2 + PQ^2 + QC^2 =$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}(a-y)^2 + y^2 + 2r^2 - \frac{3}{2}\left(y - \frac{a}{3}\right)^2 \\ &= \frac{a^2}{3} + 2r^2 \qquad (8). \end{aligned}$$

Khi M thuộc đường tròn nội tiếp ΔABC, nghĩa là $r = MG = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$ thì $BP^2+PQ^2+QC^2 = \dfrac{a^2}{2}$.

Nhận xét. 1) Trong 105 bài giải gửi về tòa soạn có 100 bạn giải đúng, tuy nhiên hơn 60 bạn chỉ xét trường hợp M thuộc cung nhỏ EF với điều ngộ nhận "không làm giảm tính tổng quát". Một số bạn giải bằng phương pháp tọa độ.

2) Đa số các bạn sử dụng đẳng thức

$$BP^2+PQ^2+QC^2 = \frac{4}{3}(MM_1^2 + MM_2^2 + MM_3^2)$$

trong đó MM_1, MM_2, MM_3 lần lượt là khoảng cách từ điểm M đến các cạnh BC, CA, AB rồi áp dụng kết quả bài toán số 5/248 là

$\sqrt{MM_1} = \sqrt{MM_2} + \sqrt{MM_3}$ (khi M thuộc cung EF) để dẫn đến $x^2+y^2+z^2 = 2(xy+yz+zx)$ và suy ra kết quả. 3) Một số bạn đã đề xuất ra kết luận tương tự hoặc tổng quát với M là điểm bất kì, còn cách xác định P, Q, M_1, M_2, M_3 như trên. (Phan vũ Toàn, 9A THCS Lê Quý Đôn, Cầu Giấy, Hà Nội, Nguyễn Thị Hương Ly, 8A PT dân lập Tôn Đức Thắng, Hà Nội; *Nguyễn Văn Khiêm*, 9A THCS Phan Bội Châu, Tứ Kỳ, Hải Dương)

• Khi M chạy trên đường tròn tâm G (G là tâm của tam giác đều ABC đều bán kính $GM = r$ thì

$$BP^2 + PQ^2 + QC^2 = \frac{a^2}{3} + 2r^2$$

Bài này đã được giải theo cách 3, bạn đọc cũng có thể chứng minh bằng cách dựng $\Delta A'B'C'$ đều, ngoại tiếp đường tròn tâm G và có các cạnh tương ứng song song với ΔABC rồi áp dụng kết quả bài toán đã cho đối với $\Delta A'B'C'$.

• Tìm giá trị cực tiểu của $BP^2+PQ^2+QC^2$

• Tìm quỹ tích của những điểm M sao cho

$MM_1^2 + MM_2^2 + MM_3^2 = c$ (hằng số $c > \frac{a^2}{4}$).

• Khi M nằm trên đường tròn nội tiếp tam giác đều ABC thì $MA^2 + MB^2 + MC^2 = \frac{5}{4}a^2$

4) Các bạn sau đây có lời giải tốt : - *Nguyễn Đức Cường*, 9, THCS Lê Quý Đôn, **Lào Cai**; *Chu Tiến Dũng*, 8 THCS Chu Văn An, Mai Sơn, **Sơn La**; *Nguyễn Việt Hằng*, 9C, Dân tộc NT Yên Bình, **Yên Bái** ; *Đào Mạnh Tùng*, 9, THCS B Yên Thủy, **Hòa Bình**; *Nguyễn Văn Phúc*, 8A, THCS Vĩnh Tường, **Vĩnh Phúc**; *Nguyễn Thành Trung*, 9M THCS Marie Curie, **Hà Nội**; *Đinh Thanh Hiện*, 8A, THCS Giao Thủy, *Trần Quang Vinh*, $9A_1$, THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên, **Nam Định**; *Lê Thị Thu Trang*, 9A, TH Nguyễn Trãi, **Hải Dương**; *Nguyễn Văn Trung*, 9B THCS Lê Hữu Lập, Hậu Lộc, **Thanh Hóa**; *Lê Tâm*, 8E THCS Kỳ Anh, **Hà Tĩnh**; *Đinh Trung Hiếu*, 9A TH Phú Bài, Hương Thủy, **Thừa Thiên - Huế**; *Trần Huy Lập*, 8/1 THCS Nguyễn Tri Phương, Huế, **Thừa Thiên - Huế**; *Ngô Quốc Anh*, 9C THCS Nguyễn Du, Buôn Ma Thuột, **Đắc Lắc**; *Nguyễn Du Thái*, 9A, THCS thị trấn Hải Lăng, **Quảng Trị**; *Nguyễn Hải Viễn*, 9/2, THCS Bình Sơn, *Hồ Tú Thuấn*, 8 C2 THCS Nguyễn Nghiêm, **Quảng Ngãi**; *Nguyễn Hoa Cương*, 8/14, *Trần Trung Dung* 9/14, THCS Thái Nguyên, Nha Trang, **Khánh Hòa.**

VIỆT HẢI

Bài T6/253. *Cho hai số thực x, y thỏa mãn*

$$\begin{cases} x^2 + y^2 > 4 \\ x^2 + y^2 - 2x - 2y \le 0 \end{cases}$$

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức

$$F = 2x + y$$

Lời giải. ***Cách 1.*** (của bạn *Nguyễn Mạnh Hà*, 12CT Nguyễn Huệ, **Hà Tây**)

Ta có

$F\text{-}3 = 2(x\text{-}1) + (y\text{-}1)$

$\Rightarrow (F\text{-}3)^2 = [2(x\text{-}1) + (y\text{-}1)]^2 \le$

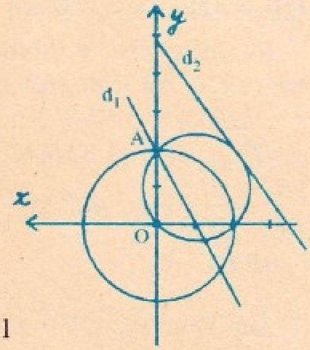
$\le 5\{(x\text{-}1)^2 + (y\text{-}1)^2\} \le 5\times 2 = 10$

$\Rightarrow |F\text{-}3| \le \sqrt{10} \Rightarrow \text{-}F \le 3 + \sqrt{10}$

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} \dfrac{(x-1)^2}{4} = (y-1)^2 \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 = 2 \end{cases}$

Giải ra ta được : $\begin{cases} x = \dfrac{5+2\sqrt{10}}{5}, \\ y = \dfrac{5+\sqrt{10}}{5}. \end{cases}$

Hai số này thỏa mãn điều kiện $x^2+y^2>4$.



Vậy

$F_{max} = 3 + \sqrt{10}$

Ta có

$2 \ge (x\text{-}1)^2+(y\text{-}1)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x+y \ge \dfrac{x^2+y^2}{2} > 2$

Nếu $x \le 0$

$\Rightarrow \ y>2 \ \Rightarrow \begin{cases} 1-x>1 \\ y-1>1 \end{cases}$

$\Rightarrow (x\text{-}1)^2 + (y\text{-}1)^2 > 2$

Vậy $x > 0 \Rightarrow 2x+y > x+y > 2$

Chọn $y = 2$, $x = \dfrac{\varepsilon}{2}$. Khi đó $x^2 + y^2 =$

$= 4 + \dfrac{\varepsilon^2}{4} > 4$ và $x^2\text{-}2x+y^2\text{-}2y^2 = \dfrac{\varepsilon}{4} - \varepsilon < 0$

nếu $0<\varepsilon<4$. $F=\varepsilon+2 > 2$ nhưng có thể gần 2 tùy ý. Vậy không tồn tại giá trị nhỏ nhất.

Cách 2 (của đa số các bạn) : Nếu điểm M có tọa độ (x, y) thỏa mãn hệ điều kiện như đầu bài thì M phải nằm ở miền (C) (nằm ngoài vòng tròn tâm O bán kính 2 và nằm trong vòng tròn tâm I (1, 1) bán kính $\sqrt{2}$). Xét tất cả các đường thẳng $2x+y = F$.

Đường thẳng này cắt (C) khi và chỉ khi nó nằm giữa đường thẳng (d_1) : $2x+y = 2$ và đường thẳng d_2. Đường thẳng (d_2) có phương trình là

$$2x + y = 3 + \sqrt{10}$$

Vậy $2 < F \leq 3 + \sqrt{10}$

Suy ra $F_{\max} = 3 + \sqrt{10}$, $F_{\min}$ không tồn tại vì F có thể gần 2 tùy ý.

Nhận xét. Các bạn sau đây có lời giải tốt : *Vũ Văn Phong* 11A$_1$ chuyên **Vĩnh Phúc**; *Nguyễn Hoa*, 12T PTNK **Quảng Bình**; *Trần Minh Quang*, 10PTCT Đại học Vinh, **Nghệ An**; *Lưu Văn Mạnh*, 11A Ba Đình, Nga Sơn, **Thanh Hóa**; *Huỳnh Công Phước*, 10 CT Quốc học Huế, *Trần Bá Đôn*, 12CT ĐHKH **Thừa Thiên - Huế**, *Nguyễn Đình Quân*, 11A$_1$ Phan Bội Châu, **Nghệ An**, *Trần Tất Đạt*, 11 Toán ĐHKH Tự nhiên, **Hà Nội**; *Nguyễn Danh Quân*, 12A$_1$ Nam Sách, **Hải Dương**; *Nguyễn Thanh Tùng*, 10A$_1$ Trần Quốc Tuấn, **Quảng Ngãi**; *Võ Sỹ Nam*, 12A$_1$ Minh Khai, **Hà Tĩnh**; *Thi Hồng Hạnh*, 11A$_1$ - Lê Quý Đôn, Tân An, **Long An**; *Trần Văn Hà*, 11CT, Trần Phú, **Hải Phòng**...

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T7/253. *Cho dãy* $\{x_n\}_{n=0}^{+\infty}$ *được xác định bởi :* $x_0 = 1$, $x_1 = 5$ *và* $x_{n+1} = 6x_n - x_{n-1}$ $\forall n \geq 1$.

Hãy tìm $\lim\limits_{n\to\infty} x_n\{\sqrt{2}x_n\}$. (Kí hiệu $\{a\} = a - [a]$ là phần lẻ của a).

Lời giải. (*của đa số các bạn*) : Phương trình đặc trưng của dãy $\{x_n\}$ là :

$$x^2 - 6x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \pm \sqrt{2}.$$

Từ đó, $\forall n \geq 0$ ta có :

$$x_n = a(3+2\sqrt{2})^n + b(3-2\sqrt{2})^n$$

trong đó a, b được xác định bởi :

$$\begin{cases} a+b=1 \\ (3+2\sqrt{2})a + (3-2\sqrt{2})b = 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}} \\ b = \dfrac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} \end{cases}$$

Vậy $\forall n \geq 0$ thì :

$$x_n = \frac{1}{2\sqrt{2}}[(\sqrt{2}+1)(3+2\sqrt{2})^n + (\sqrt{2}-1)(3-2\sqrt{2})^n] =$$

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}[(\sqrt{2}+1)^{2n+1} + (\sqrt{2}-1)^{2n+1}]$$

suy ra :

$$\sqrt{2}x_n - (\sqrt{2}-1)^{2n+1} = \frac{1}{2}[(\sqrt{2}+1)^{2n+1} - (\sqrt{2}-1)^{2n+1}] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sum_{k=0}^{2n+1}(\sqrt{2})^{2n+1-k}C_{2n+1}^k - \sum_{k=0}^{2n+1}(\sqrt{2})^{2n+1-k}.(-1)^k C_{2n+1}^k\right] =$$

$$= \frac{1}{2}.2\sum_{t=0}^{n}(\sqrt{2})^{2(n-t)}C_{2n+1}^{2t+1} = \sum_{t=0}^{n}2^{n-t}C_{2n+1}^{2t+1} \in \mathbf{Z} \quad (1)$$

Hơn nữa, dễ thấy, $0 < (\sqrt{2}-1)^{2n+1} < 1$ $\forall n \in \mathbf{N}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\{\sqrt{2}x_n\} = (\sqrt{2}-1)^{2n+1}$ $\forall n \in \mathbf{N}$.

Do vậy, $\forall n \in \mathbf{N}$ ta có :

$$x_n\{\sqrt{2}x_n\} = \frac{1}{2\sqrt{2}}[1 + (\sqrt{2}-1)^{4n+2}]$$

Dẫn tới :

$$\lim_{n\to\infty} x_n\{\sqrt{2}x_n\} = \frac{1}{2\sqrt{2}} + \lim_{n\to\infty}(\sqrt{2}-1)^{4n+2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Nhận xét. 1) Một số bạn cho lời giải quá rườm rà do đã sử dụng định nghĩa giới hạn của dãy số để chứng minh rằng $\lim\limits_{n\to\infty} x_n\{\sqrt{2}x_n\} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

2) Không ít bạn cho lời giải sai do tính sai $x_n\{\sqrt{2}x_n\}$ hoặc cho rằng $0.\infty = 0$ (!).

3) Các bạn sau đây có lời giải đúng và ngắn gọn hơn cả : **Bà Rịa - Vũng Tàu:** *Lê Huyền Đức, Lương Anh Hùng*, 12A$_1$ PTTH Vũng Tàu; **Bình Thuận:** *Phan Hữu Trọng Hiền*, 12A$_1$, PTTH Trần Hưng Đạo; **Đắc Lắc:** *Đặng Ngọc Châu*, 10T$_1$, PTTH Nguyễn Du, Buôn Ma Thuột. **Đồng Nai:** *Vũ Đức Hải*, 12A$_1$, PTTH Ngô Quyền, Biên Hòa, *Hà Minh Ngọc*, 11CT, PTTH Lương Thế Vinh, Biên Hòa; **Hà Giang:** *Vũ Anh Hải*, 11A, PTTH Lê Hồng Phong; **Hà Nội:** *Nguyễn Minh Công, Đỗ Tuyết Nhung*, 12T, 11 Anh, PTTH Amsterdam; **Hải Dương:** *Phạm Hoàng Hiệp*, 10A$_1$, PTTH Hồng Quang, *Nguyễn Thanh Hảo*, 10T, PTTH Nguyễn Trãi; **Hải Phòng:** *Trịnh Việt Anh, Vũ Huy Toàn, Trần Văn Hà*, 12T, 11T PTTH Trần Phú;

Thành phố Hồ Chí Minh: *Trần Đình Nguyên*, 10, PTNK; **Hòa Bình:** *Đỗ Quang Dương*, 11T, PTTH Hoàng Văn Thụ; **Hưng Yên:** *Nguyễn Tài Thu*, 11T Trường NK tỉnh; **Khánh Hòa:** *Trần Tuấn Anh*, *Võ Duy*, 10T, 11T PTTH Lê Quý Đôn, Nha Trang; **Ninh Bình**: *Nguyễn Sơn Hà*, 12A, PTTH A Yên Mô; **Quảng Bình:** *Nguyễn Hoa*, $12T_1$ PTNK tỉnh, *Trần Chí Hòa*, 12T, PTNK thị xã Đồng Hới; **Quảng Ninh:** *Trịnh Ngọc Nhật Huy*, $12A_0$ THCB Cẩm Phả); **Quảng Trị:** *Lê Thọ Kha*, 11T, PTTH Lê Quý Đôn; **Thanh Hóa:** *Hoàng Ngọc Dương*, 11A, PTTH Lương Đắc Bằng, Hoằng Hóa, *Lê Đức Hân*, 11T, PTTH Lam Sơn; **Thừa Thiên - Huế:** *Đinh Trung Hiếu*, 9A THCS Phú Bài - Hương Thủy; *Huỳnh Công Phước*, *Phạm Nguyên Quý*, 10CT, 11CT trường Quốc học; **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Đức Toàn*, *Phạm Hoàng Hà*, *Nguyễn Trung Hiếu*, *Trần Thu Hương*, *Nguyễn Hoàng Anh*, *Vũ Mạnh Cường*, *Nguyễn Duy Tân*, *Cao Thế Thụ*, *Đỗ Trung Kiên*, PTTH chuyên; **Yên Bái:** *Nguyễn Thế Doanh*, *Nguyễn Trường Thái*, *Nguyễn Kiên*, PTTH chuyên; **ĐHKH Huế:** *Đào Công Lợi*, *Trần Hoàng Đức Chính*, *Trần Bá Đôn A*, *Trần Bá Đôn B*, Khối PTCT; **ĐHQG Hà Nội:** *Tạ Quang Cường*, 11A, khối PTCT ĐHSP, *Trần Tất Đạt*, 11B Toán, khối PTCT-Tin ĐHKHTN).

NGUYỄN KHẮC MINH

Bài T8/253. *Chứng minh rằng hàm $\cos x^3$ không tuần hoàn.*

Lời giải. ***Cách 1.*** (Dựa theo cách giải của *Lê Thị Thanh An*, $12A_1$ PTTH Hai Bà Trưng, Mê Linh, **Vĩnh Phúc** và nhiều bạn khác).

Nhận xét rằng nếu có $f(x+T)=f(x)$ $\forall x \in \mathbf{R}$ và nếu $\exists f'(x)$ $\forall x \in \mathbf{R}$ thì :

$$f'(x+T) = f'(x)\ \forall x \in \mathbf{R}.$$

Như vậy $f'(x)$ cũng là hàm tuần hoàn. Giả sử hàm số $y = \cos x^3$ tuần hoàn. Khi đó, theo nhận xét trên, hàm $y' = -3x^2\sin x^3$ cũng là một hàm tuần hoàn (trên **R**)

Xét dãy $x_k = \sqrt[3]{\frac{\pi}{2}+2k\pi}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ thì : $y'(x_k) = -3x_k^2 \Rightarrow -\infty$ khi $x_k \Rightarrow +\infty$, điều này không thể xảy ra đối với một hàm tuần hoàn xác định và liên tục trên **R**.

Cách 2. (*Đặng Hoàng Minh Hiếu*, 12A chuyên **Thái Bình** và một số bạn khác). Giả sử $y = \cos x^3$ là hàm tuần hoàn chu kỳ $T > 0$.

Khi đó : $\cos x^3 = \cos(x+T)^3\ \forall x$

Cho $x=0 \Rightarrow 1=\cos T^3 \Leftrightarrow T^3 = 2k\pi$, $k \in \mathbf{N}^+$

Với $x_l = \sqrt[3]{2l\pi}$ $(l \in \mathbf{Z})$ thì :

$\cos 2l\pi = \cos\left(x_l + \sqrt[3]{2k\pi}\right)^3 \Rightarrow \exists m \in \mathbf{Z}$ sao cho : $\left(\sqrt[3]{2l\pi} + \sqrt[3]{2k\pi}\right)^3 = 2m\pi$

$\Rightarrow l + k + 3\sqrt[3]{lkm} = m$ (*)

Chọn $l = -(k+1) < 0$ thì (*) có dạng :

$$-1 - 3\sqrt[3]{k(k+1)m} = m \quad (**)$$

Rõ ràng (**) không xảy ra vì khi $m \geq 0$ thì VT < 0 < VP, nếu $m < 0$ thì VT > 0 > VP.

Cách 3. (của đa số các bạn)

Giả sử hàm số $y = \cos x^3$ là hàm tuần hoàn chu kỳ T $(T > 0)$. Khi đó :

$$\cos(x+T)^3 = \cos x^3\ \forall x$$

Cho $x = 0$ ta có : $\cos T^3 = \cos 0 \Leftrightarrow T^3 = 2k\pi$

Cho $x = \sqrt[3]{2}\,T$ thì :

$$\left[\begin{array}{ll} 2T^3 = T^3(3+3\sqrt[3]{2}+3\sqrt[3]{4})+m2\pi,\ m\in\mathbf{Z} & (1) \\ 2T^3 = -T^3(3+3\sqrt[3]{2}+3\sqrt[3]{4})+m2\pi,\ m\in\mathbf{Z} & (2) \end{array}\right.$$

(1) $\Rightarrow 3(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}) = -\frac{m}{k} - 1 \in \mathbf{Q}$, vô lí

(2) $\Rightarrow \sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4} = \frac{1}{3}\left(\frac{k}{m} - 5\right) \in \mathbf{Q}$, vô lí.

Nhận xét. Rất nhiều bạn đã nhận xét được rằng bài này là trường hợp riêng của bài toán T8/250, nên cũng có thể áp dụng kết quả của bài T8/250 để giải. Tòa soạn nhận được gần 200 bài giải trong đó gần một nửa có lời giải đúng.

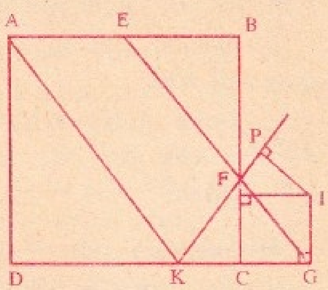
Giải tốt bài này có các bạn : **Quảng Ninh**: *Trịnh Ngọc Nhật Huy*, $12A_0$, THCB Cẩm Phả; **Vĩnh Phúc:** *Vũ Dũng*, 11A PTTH chuyên Vĩnh Phúc; **Bắc Giang:** *Nguyễn Minh Hoàng*, 12A PTTH Ngô Sĩ Liên; **Bắc Ninh:** *Trần Diệu Linh*, 11T Hàn Thuyên, *Nguyễn Thị Hảo*, $12A_1$ PTTH Lý Thái Tổ, Tiên Sơn; **Hưng Yên**: *Doãn Hoan*, TT Ân Thi, *Nguyễn Tài Thu*, NK Hưng Yên, *Trương Đức Minh*, $12A_2$, PTTH Trần Phú; **Hà Nội:** *Nguyễn Quang Hải*, 12H, PTTH Nguyễn Gia Thiều, *Tạ Quang Cường*, $11A_1$, ĐHSP, ĐHQG hà Nội; **Thái Bình:** *Đặng Hoàng Minh Hiếu*, 12A, PTTH chuyên Thái Bình; **Nghệ An:** *Thái Nguyễn Phương*, 11A, PTTH Quỳnh Lưu III; **Hà Tĩnh:** *Dương Chí Vinh*, 11CT, PTTH NK Hà Tĩnh; **Đà Nẵng:**

Nguyễn Tấn Phong, $12A_1$, PTTH *Hoàng Hoa Thám*; **Quảng Nam:** *Trần Công Linh*, $11A_7$, THCB Nguyễn Duy Hiệu, Điện Bàn; **Khánh Hòa:** *Trần Tuấn Anh*, 10T, Lê Quý Đôn; **Lâm Đồng:** *Đặng Duy Quang*, 11 Toán, PTTH chuyên Lâm Đồng; **Tây Ninh:** *Dương Quốc Đạt*, $11A_4$, THPT Hoàng Lệ Kha; **TP Hồ Chí Minh:** *Nguyễn Cẩm Thạch*, 10T, PTNK ĐH Quốc Gia; **An Giang:** *Nguyễn Anh Tuấn*, 11TL PTTH Thoại Ngọc Hầu.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T9/253. *Cho hình vuông ABCD cạnh bằng a, trung điểm E của AB, một điểm F trên cạnh BC sao cho FB > FC. Gọi G là giao điểm của tia EF với tia DC, (I) là đường tròn tiếp xúc với BC và tiếp xúc với DC tại điểm G. Tiếp tuyến thứ hai của (I) kẻ qua F cắt DC tại K. Chứng minh AEGK là hình bình hành.*

Lời giải. (Theo *Dương Quang Huy*, lớp $12A_1$, PTTH chuyên **Yên Bái**). Gọi P là tiếp điểm của tiếp tuyến FK với đường tròn (I) Vì $FB > FC$ nên K thuộc đoạn CD.



Vì (I) là đường tròn bàng tiếp đối diện với đỉnh K của tam giác FKC nên : $S(KFC) =$
$= IG.(KG - CF)$
($KG = KP$ = nửa chu vi ΔKFC)

$\Rightarrow KC.CF = 2CG.(KG - CF)$

$\Rightarrow CF(KC + 2CG) = 2CG.KG$

$$\Rightarrow \frac{CG}{CF} = \frac{KC + 2CG}{2KG} = \frac{KG + CG}{2KG} \qquad (1)$$

Mặt khác theo định lí Talét ta có :

$$\frac{CG}{CF} = \frac{BE}{BF} \qquad (2)$$

Từ (1) ; (2) suy ra :

$$\frac{BE}{BF} = \frac{KG + CG}{2KG} \Rightarrow \frac{2BE}{BF} = \frac{2KG + 2CG}{2KG}$$

$$\Rightarrow \frac{BC}{BF} = \frac{2KG + 2CG}{2KG} \Rightarrow \frac{CF}{BF} = \frac{2CG}{2KG} = \frac{CG}{KG}$$

$$\Rightarrow \frac{CG}{CF} = \frac{KG}{BF} \qquad (3)$$

Từ (2), (3) có $\dfrac{BE}{BF} = \dfrac{KG}{BF} \Rightarrow BE = KG$

$\Rightarrow AE = KG$. Suy ra :

$AEGK$ là hình bình hành.

Nhận xét. 1) Có khoảng 150 bạn tham gia giải bài này. 1 bạn giải sai. 1 bạn chứng minh không khớp kí hiệu.

2) Ngoài cách giải của bạn Huy, còn một số hướng giải khác có sử dụng:

- Định lí Pitago
- Công thức : $\text{tg}2\alpha = \dfrac{2\text{tg}\alpha}{1 - \text{tg}^2\alpha}$
- Phương pháp tọa độ
- Phép vị tự tâm F với tỉ số vị tự $k = \dfrac{FC}{FB}$.

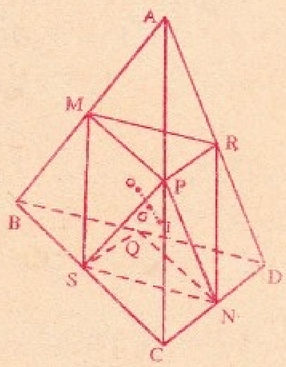
3) Các bạn sau đây có lời giải tốt : *Đỗ Quang Dương*, 11T, *Hoàng Văn Thụ*, **Hòa Bình**; *Nguyễn Thị Hường*, 11T, PTTH Nguyễn Trãi, **Hải Dương**; *Đỗ Trung Kiên*, $12A_1$, PTTH chuyên Vĩnh Phúc, *La Quang Hổ*, 9B, THCS Lê Hữu Lộc, Hậu Lộc, **Thanh Hóa**; *Đỗ Minh Tiến*, 10T, Lê Hồng Phong, **Nam Định**; *Phạm Gia Vinh Anh*, 9T, PTTH NK Trần Phú, **Hải Phòng**; *Nguyễn Thùy Linh*, 10A, PTTH Tây Tiền Hải, **Thái Bình**; *Nguyễn Ninh Thuận*, 9, THCS Quang Trung, Tân Phú, **Đồng Nai**.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài T10/253. *Cho tứ diện ABCD, trọng tâm G, tâm mặt cầu ngoại tiếp O. I là điểm đối xứng của O qua G. Biết O nằm trong tứ diện. Chứng minh rằng I cũng nằm trong tứ diện*

Lời giải. ***Cách 1.*** (của *Dương Quang Huy*, lớp $12A_1$, PTTH chuyên **Yên Bái**). Gọi M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của AB, CD, AC, DB, AD, BC.

Dễ thấy MN, PQ, RS đồng quy tại G và G là trung điểm của mỗi đoạn. Xét phép đối xứng tâm D_G với tâm G.



Ta có :
$D_G(M) = N$;
$D_G(P) = Q$;
$D_G(R) = S$.

Suy ra khối tám mặt *MPRNQS* nhận *G* làm tâm đối xứng. (*)

Vì $\angle OMA = \angle OPA = \angle ORA = 90^o$ nên các điểm *M, P, R* thuộc mặt cầu đường kính $AO \Rightarrow O$ không nằm trong tứ diện *AMPR*. Tương tự như vậy : *O* không nằm trong các khối tứ diện *BSQM* ; *CNSP* ; *DQNR*. Theo giả thiết *O* nằm trong tứ diện *ABCD*, vậy *O* thuộc khối tám mặt *MPRNQS*.

Suy ra : $I = D_G(O) \in MPRNQS$ (theo (*))

$\Rightarrow I$ thuộc tứ diện *ABCD*.

Cách 2. (của *Nguyễn Minh Công* lớp 12T, PTTH Amsterdam-Hà Nội) Đặt V, V_A, V_B, V_C, V_D lần lượt là thể tích của các tứ diện *ABCD, OBCD, OCDA, ODAB, OABC* thì $V = V_A + V_B + V_C + V_D$

Theo giả thiết $\overrightarrow{IO} = 2\overrightarrow{IG} \Rightarrow V.\overrightarrow{IO} = 2V.\overrightarrow{IG}$

$\Rightarrow (V_A + V_B + V_C + V_D)\overrightarrow{IO} = 2V.\overrightarrow{IG} \Rightarrow$

$V_A(\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{OA}) + V_B(\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{OB}) +$

$+ V_C(\overrightarrow{IC} - \overrightarrow{OC}) + V_D(\overrightarrow{ID} - \overrightarrow{OD}) =$

$$= \frac{V}{2}(\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{GA}) + \frac{V}{2}(\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{GB}) +$$

$$+ \frac{V}{2}(\overrightarrow{IC} - \overrightarrow{GC}) + \frac{V}{2}(\overrightarrow{ID} - \overrightarrow{GD})$$

Ta đã biết

$V_A.\overrightarrow{OA} + V_B.\overrightarrow{OB} + V_C.\overrightarrow{OC} + V_D\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{0}$ (1)

và $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{0}$ nên :

$$\left(\frac{1}{2}V - V_A\right)\overrightarrow{IA} + \left(\frac{1}{2}V - V_B\right)\overrightarrow{IB}$$

$$+ \left(\frac{1}{2}V - V_C\right)\overrightarrow{IC} + \left(\frac{1}{2}V - V_D\right)\overrightarrow{ID} = \overrightarrow{0} \quad (2)$$

Mặt khác, từ (1) ta có :

$-V_A\overrightarrow{OA} = V_B\overrightarrow{OB} + V_C\overrightarrow{OC} + V_D\overrightarrow{OD}$

$\Rightarrow |-V_A\overrightarrow{OA}| = |V_B\overrightarrow{OB} + V_C\overrightarrow{OC} + V_D\overrightarrow{OD})$

$\Rightarrow V_AR < V_B.R + V_CR + V_DR$

(R là bán kính của (O))

$\Rightarrow V_A < V_B + V_C + V_D$

$\Rightarrow 2V_A < V$

$\Rightarrow \frac{1}{2}V - V_A > 0$

Tương tự như vậy ta có :

$\frac{1}{2}V - V_B > 0$; $\frac{1}{2}V - V_C > 0$; $\frac{1}{2}V - V_D > 0$.

Từ đó, theo (2) ta có : *I* nằm trong tứ diện *ABCD*.

Nhận xét. 1) Có 8 bạn giải sai

2) Những sai lầm cơ bản là :

+ Vì *O* nằm trong tứ diện nên các mặt của tứ diện là các tam giác nhọn ! + Vì *O* nằm trong tứ diện nên hình chiếu của *O* xuống mỗi mặt của tứ diện thuộc các mặt đó !

3) Các bạn sau có lời giải tốt : *Vũ Duy*, 11T, *Trần Tuấn Anh*, 10T, Lê Quý Đôn, Nha Trang, **Khánh Hòa;** *Lương Anh Hùng*, $11A_1$ - PTTH CB Vũng Tàu, **Bà Rịa - Vũng Tàu**: *Đỗ Trung Kiên*, *Phạm Hoàng Hà*, $12A_1$, PTTH chuyên, **Vĩnh Phúc**

NGUYỄN MINH HÀ

Bài L1/253. *Một buồng thang máy, có khoảng cách giữa trần và sàn là 2,7m, bắt đầu từ mặt đất chuyển động đi lên với gia tốc không đổi hướng lên là 1,2m/s². Sau khi thang xuất phát 2s, một chiếc bulông ở trên trần thang máy bị long ra, rời khỏi trần. Hãy xác định :*

a) Khoảng thời gian từ lúc bulông rời trần đến lúc chạm sàn thang máy.

b) Độ dời của bulông trong khoảng thời gian nói trên.

c) Đoạn đường mà bulông đã đi qua từ lúc rời trần đến lúc chạm sàn : cho biết $g = 9,8m/s^2$

Hướng dẫn giải

Thang máy và bulông chỉ tham gia chuyển động thẳng đứng. Chọn trục *Ox*, có gốc *O* tại mặt đất, hướng thẳng đứng lên trên; gốc thời gian là lúc thang máy bắt đầu chuyển động. Tọa độ sàn thang máy :

$x_1 = \frac{at^2}{2} = 0,6t^2 (m)$.

Sau 2 giây chuyển động, vận tốc của thang máy là $v_o = at_1 = 2,4 m/s$; và tọa độ trần thang máy là : $x_o = 2,7 + 0,6t_1^2 = 5,1 (m)$ (cũng là tọa độ của bulông khi đó)

a) Phương trình tọa độ của bulông kể từ lúc rời khỏi trần :

$$x_2 = x_o + v_o(t - 2) - \frac{g(t-2)^2}{2} =$$

$$= -4,9t^2 + 22t - 19,3 \ (m).$$

Bulông chạm sàn khi $x_1 = x_2$, suy ra : $5,5t^2 - 22t + 19,3 = 0$.

Vì $t \geq 2s$, ta được $t = 2,7s$: Vậy thời gian từ lúc bulông rời trần đến lúc chạm sàn là $\Delta t = 2,7 - 2 = 0,7(s)$.

b) Tọa độ bulông lúc chạm sàn ứng với $t = 2,7$ là :

$x_2 = -4,9(2,7)^2 + 22(2,7) - 19,3 \approx 4,38(m)$.

Độ dời của bulông ứng với $t = 2,7$ là :

$\Delta x = x_2 - x_o = -0,72\ (m)$.

Bulông rơi xuống một đoạn là 0,72*m*.

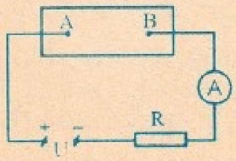
c) Sau khi rời khỏi trần bulông chuyển động chậm dần đi lên (với gia tốc bằng g), đến độ cao cực đại, sau đó rơi tự do cho đến khi chạm sàn : Độ cao cực đại mà bulông đạt tới bằng : $\max x_2 = \max(-4,9t^2 + 22t - 19,3) = 6,394(m)$. Suy ra đoạn đường mà bulông đi được :

$s = 2(5,394 - x_o) + |\Delta x| = 1,31(m)$.

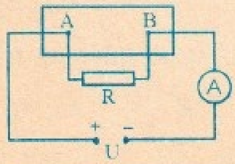
Nhận xét: Các bạn có lời giải gọn và đúng : *Đỗ Nguyên Nam Quân*, $12A_2$, PTTH Lê Quý Đôn, **Đà Nẵng**; *Nguyễn Tấn Huy*, 11 chuyên lí, PTTH chuyên Lương Thế Vinh, Biên Hòa, **Đồng Nai**; *Nguyễn Minh Lực*, 12A, PTTH Lê Quý Đôn, **Đà Nẵng**; *Dương Quốc Đạt*, $11A_4$, PTTH Hoàng Lê Kha, **Tây Ninh**; *Phạm Kim Trung*, $12A_2$, THCB Sơn Tịnh, **Quảng Ngãi** ; *Nguyễn Ngọc Minh*, 11A3, PTTH chuyên **Vĩnh Phúc**; *Phạm Đình Thắng*, $12A_1$, PTTH chuyên **Yên Bái** ; *Phạm Quang Huy*, 12 Lí-Hóa, chuyên Lê Khiết, **Quảng Ngãi**; *Phạm Thanh Tuyên*, 11L, PTNK **Quảng Bình**; *Ngô Xuân Lợi*, 10 chuyên lí, PTTH Lương Văn Tụy, **Ninh Bình**; *Lê Công Trung*, 11F, chuyên Hùng Vương, Việt Trì, **Phú Thọ**; *Nguyễn Văn Chuyển*, $10A_3$, THCB Uông Bí, **Quảng Ninh**; *Vũ Xuân*, 11A, THCB Vũng Tàu, **Bà Rịa - Vũng Tàu**; *Trịnh Quốc Chung*, $11A_1$, khối chuyên toán, ĐH Vinh, **Nghệ An**; *Trần Giang Nam*, $10A_1$, PTTH Hồng Quang, **Hải Dương**; *Hoàng Thế Long*, $10A_1$, PTTH Lê Quý Đôn, **Đà Nẵng**; *Phạm Doanh Tuyên*, 12A, PTTH chuyên Vĩnh Phúc, **Vĩnh Phúc**.

MAI ANH

Bài L2/253. *Trong "hộp đen" A, B có các pin e = 1,5V; r = 0,5Ω và một số điện trở. Để xác định cấu trúc của hộp đen người ta dùng một nguồn U = 10V; một điện trở R = 5Ω và một ampe kế với $R_A \approx 0$ mắc thành 2 sơ đồ như hình vẽ.*



Hình 1



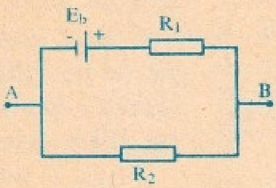
Hình 2

Ở sơ đồ 1 (A) chỉ 2A ;

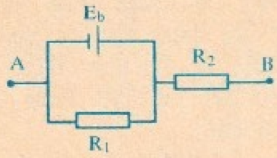
Ở sơ đồ 2 (A) chỉ 6A.

Bỏ qua điện trở của dây nối. Hãy xác định cấu trúc mạch điện trong hộp đen ở dạng đơn giản nhất.

Hướng dẫn giải. Cấu trúc đơn giản nhất gồm số phần tử (pin, điện trở) ít nhất mắc theo sơ đồ đơn giản nhất. Dễ dàng thấy rằng cấu trúc đó không thể là mạch gồm các phần tử mắc nối tiếp. Gọi E_b, r_b là suất điện động và bộ pin trong hộp, mạch điện trong hộp đen có thể có dạng 1 (hình 3) hoặc dạng 2 (hình 4). (chú ý riêng đầu *B* của hộp phải là cực dương)



Hình 3



Hình 4

Xét dạng 1. Áp dụng định luật Ôm cho sơ đồ 1 và sơ đồ 2, ta rút ra các phương trình :

$$E_b = 2(r_b + R_1) \qquad (1)$$

$$\frac{10}{R_1 + r_b} + \frac{10}{R_2} = 2 \qquad (2)$$

Từ (2) ta thấy phải có $R_1 + r_b > 5$.

Chú ý rằng $E_b = ne = 1,5n$, ta thấy, theo (1), $n \geq 7$. Theo yêu cầu của đề bài ta chọn $n=7$, suy ra $R_1=1,75\Omega$ và $R_2=105\ \Omega$.

Xét dạng 2. Áp dụng định luật Ôm cho sơ đồ 1 và 2, và đặt $E_b = ne$, $r_b = nr$, ta rút ra các phương trình :

$$2R_2\left(\frac{1}{R_1}+\frac{2}{n}\right)=1\ ;$$

và $(10-4R_2)\left(\frac{2}{n}+\frac{1}{R_1}\right)=1$

Từ hai phương trình này, suy ra :

$$R_2=\frac{5}{3}\ \Omega,\ \text{và}\ \frac{2}{n}+\frac{1}{R_1}=\frac{3}{10} \qquad (3).$$

Từ phương trình (3) ta thấy, phải có $n \geq 7$.

Theo yêu cầu của bài toán ta chọn $n=7$, suy ra $R_1 = 70\Omega$.

Như vậy cấu trúc mạch điện đơn giản nhất trong hộp đen có dạng 1 hoặc 2 (trong đó có tất cả 7 pin và 2 điện trở).

Nhận xét. Không có bạn nào có lời giải hoàn chỉnh (cả 2 dạng cấu trúc), chỉ có 3 bạn tìm được một trong hai dạng trên :

Đỗ Nguyễn Nam Quân, $12A_2$, PTTH Lê Quý Đôn, **Đà Nẵng**; *Lê Tiến Dũng*, 11TL, trường chuyên Lê Quý Đôn, **Quảng Trị**; *Đào Anh Đức*, 10 Lí, PTTH Phan Bội Châu, **Nghệ An**.

MAI ANH

ĐẠI HỘI TOÁN HỌC QUỐC TẾ 1998

Đại hội toán học quốc tế (ICM) là một đại hội lớn và quan trọng nhất của ngành toán trên toàn thế giới. Đại hội họp theo thông lệ 4 năm một lần. Năm nay ICM được tổ chức tại Beclin - thủ đô nước Đức từ 18 đến 27 tháng 8. Tham dự ICM'98 có khoảng 4.000 nhà toán học của trên 90 nước. Đoàn Việt Nam gồm GS Nguyễn Đình Trí (ĐHBK HN) làm trưởng đoàn và các ông Đỗ Ngọc Diệp, Nguyễn Đình Công, Phùng Hồ Hải (Viện Toán học), Võ Đăng Thảo (ĐHQG tp HCM), Hoàng Việt Hà (làm việc tại Anh), Lê Tự Quốc Thắng (giáo sư tại Mỹ), Tôn Thất Tường (Việt kiều tại Mỹ).

Tại ICM'98, Ban Tổ chức đại hội đã mời 21 nhà toán học đọc báo cáo toàn thể. Mỗi báo cáo toàn thể kéo dài một tiếng vào các buổi sáng, trình bày các thành tựu chính xác, các vấn đề quan trọng và đưa ra định hướng phát triển của toán học trong tương lai. Ban tổ chức cũng mời hơn 160 nhà toán học đọc các báo cáo tại các tiểu ban. Mỗi báo cáo mời này kéo dài 45 phút, thường là các bài tổng quan về những chủ đề quan trọng trong các lĩnh vực nghiên cứu của báo cáo viên. Ngoài các báo cáo toàn thể và báo cáo mời tại các tiểu ban, mọi người tham gia đại hội đều được phép trình bày một thông báo ngắn trong vòng 15 phút kể cả phần thảo luận.

Theo thông lệ năm nay có 4 nhà toán học trẻ (không quá 40 tuổi) được trao giải thưởng Fields là :

- *Richard E.Borcherds* (Đại học tổng hợp Cambridge, Anh, sinh ngày 29/11/1959) được giải về những kết quả nghiên cứu trong lĩnh vực các đại số Kac-Moody và các dạng tự đẳng cấu.

- *W.Timothy Gowers* (Đại học tổng hợp Cambridge, Anh, sinh ngày 20/11/1963) trong lĩnh vực lý thuyết không gian Banach, tổ hợp.

- *Maxim Kontsevich* (Viện nghiên cứu cao cấp KHTN, Pháp, sinh ngày 25/8/1964 ở Nga) trong lĩnh vực vật lí toán, hình học đại số và tôpô.

- *Curtis T. McMullen* (Đại học tổng hợp Harvard, Mỹ, sinh ngày 21/5/1958) trong lĩnh vực hệ động lực phức, hình học hypecbolic.

Một nhà toán học được trao giải thưởng Nevanlinna (dành cho các kết quả xuất sắc về các khía cạnh của tin học, cũng cho các nhà toán học trẻ) là :

- *Peter W.Shor* (ATT Labs Florham Park, Mỹ, New Jersey, Mỹ, sinh ngày 14/8/1959) trong lĩnh vực tính toán lượng tử và hình học tính toán.

Một giải thưởng rất đặc biệt đã được trao cho nhà toán học người Anh : *Andrew Wiles*, người đã giải quyết trọn vẹn bài toán Fermat (năm nay đã ngoài 40 tuổi nên không thể nhận giải thưởng Fields) và Andrew Wiles đã được mời đọc một bài giảng đặc biệt : "20 năm của lý thuyết số" dành cho đối tượng rộng rãi vào tối ngày 19/8/1998.

Tại ICM'98 còn có các hoạt động khác bố trí vào các buổi tối như hội thảo về việc xuất bản và thông báo bằng phương tiện điện tử do GS Mumford chủ trì, hội thảo bàn tròn về nghiên cứu so sánh các hệ thống giáo dục và bằng cấp đại học, hội thảo "Beclin, một trung tâm của hoạt động toán học", liên hoan phim Video về toán. Triển lãm "Các nhà toán học ở Beclin dưới chế độ phát xít 1933-1945", triển lãm sách của các nhà xuất bản lớn cũng được tổ chức. Trong lễ bế mạc ICM'98 chủ tịch liên hiệp toán học quốc tế (IMU) D.Mumford đã công bố chủ tịch mới của IMU là giáo sư Palis (Brazil). Buổi lễ bế mạc đã dành một phút mặc niệm những nhà toán học đã mất trong 4 năm qua, trong đó có những nhà toán học lớn như André Weil vừa mất ngày 06-08-1998 ở tuổi 92, P.Erdös, K.Kodaira. Chủ tịch Hội Toán học Trung Quốc Chang Kung Ching đã trân trọng mời các nhà toán học của các nước tới dự ICM2002 tại Bắc Kinh từ 20 đến 28/8/2002.

B.P

(Theo *Thông tin toán học* của Hội Toán học Việt Nam)

ĐỀ RA KÌ NÀY

CÁC LỚP THCS

Bài T1/257. Cho số $A = 1\underbrace{00...0}_{2000 \text{ chữ số } 0}1\underbrace{00...0}_{1999 \text{ chữ số } 0}x5$

Tìm các chữ số x để A chia hết cho 37.

TRẦN VĂN BÌNH
(*Nghệ An*)

Bài T2/257. Xét các số thực a, b, c sao cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có 2 nghiệm thuộc đoạn [0; 1]. Hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức :

$$P = \frac{(a-b)(2a-b)}{a(a-b+c)}$$

NGUYỄN KHẮC MINH
(*Hà Nội*)

Bài T3/257. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x^2 + 3y = 9 \\ y^4 + 4(2x-3)y^2 - 48y - 48x + 155 = 0 \end{cases}$$

HÀ DUY HƯNG
(*Hà Nội*)

Bài T4/257. Cho $ABCD$ là tứ giác nội tiếp và P là giao điểm của AD và BC ; Q là giao điểm của AB và CD. Tia phân giác góc $\angle AQD$ cắt PD, PC thứ tự ở M, N. Trên đường trung bình EF của tam giác PMN ($E \in PM$, $F \in PN$) lấy điểm O sao cho $EO = 2OF$. Đường thẳng vuông góc với PC tại F cắt tia phân giác góc $\angle DPC$ tại K. Chứng minh: $OK \perp NE$.

HÀ ĐỨC VƯỢNG
(*Hà Nam*)

Bài T5/1257. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm O, bán kính $R = \sqrt{5}$, có hai đường chéo AC, BD vuông góc với nhau tại I và $OI = 1$. Gọi S là diện tích tam giác ΔICD. Chứng minh rằng $1 \le S \le 4$.

VÕ GIANG GIAI
(*TP. Hồ Chí Minh*)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/257. Cho các số dương $a_1, a_2, .., a_n$ ($n \ge 2$). Chứng minh rằng với mọi $k \in \mathbb{N}^*$ ta có :

$$\frac{a_1^{2^k}}{(a_1+a_2)(a_1^2+a_2^2)...(a_1^{2^{k-1}}+a_2^{2^{k-1}})} + ... + \frac{a_i^{2^k}}{(a_i+a_{i+1})(a_i^2+a_{i+1}^2)...(a_i^{2^{k-1}}+a_{i+1}^{2^{k-1}})} + ... + \frac{a_n^{2^k}}{(a_n+a_1)(a_n^2+a_1^2)...(a_n^{2^{k-1}}+a_1^{2^{k-1}})} \ge \frac{a_1+a_2+...+a_n}{2^k}$$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

NGUYỄN THỊ BẮC
(*Hà Nội*)

Bài T7/257. Cho số thực $a > 1$. Cho dãy số $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ được xác định bởi : $u_1 = a$ và $u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Hãy tính $\lim\limits_{n \to \infty}\left(\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + ... + \frac{1}{u_n}\right)$.

NGUYỄN THANH HẢI
(*Hà Nội*)

Bài T8/257. Cho hai phương trình :

$$\cos 2x + a\cos x + 2 = 0$$
$$\cos 2x + b\cos x + 2 = 0$$

Giả sử mỗi phương trình trên đều có 4 nghiệm phân biệt thuộc khoảng $(0, 2\pi)$. Chứng minh rằng phương trình

$\cos 2x + (a+b)\cos x + 5 = 0$ vô nghiệm.

ĐẶNG ĐÌNH LAI
(*Thanh Hóa*)

Bài T9/257. Chứng minh rằng trong một tam giác vuông, hai đường trung tuyến thuộc hai cạnh góc vuông cắt nhau theo một góc nhọn có cosin không bé hơn 0,8.

PHẠM HÙNG
(*Hà Nội*)

Bài T10/257. Cho tứ diện $ABCD$, trọng tâm G. Cho M là một điểm bất kì trong không gian, N là điểm thỏa mãn điều kiện $\overrightarrow{MN} = 4\overrightarrow{MG}$. Chứng minh rằng :

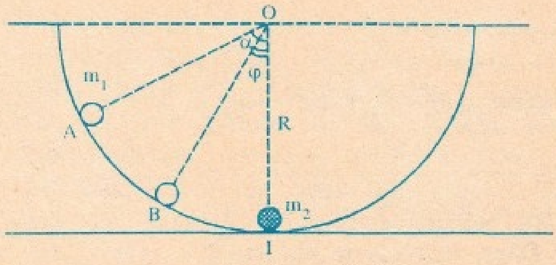
$$NA + NB + NC + ND \le$$
$$\le 2MN + MA + MB + MC + MD$$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

NGUYỄN MINH HÀ
(Hà Nội)

CÁC ĐỀ VẬT LÍ

Bài L1/257. Một quả cầu nhỏ khối lượng $m_1 = 200$g trượt tự do, vận tốc ban đầu bằng 0, từ vị trí mà bán kính hợp với phương thẳng đứng một góc $\alpha = 60^\circ$ (vị trí A) bên trong một máng bán trụ nằm ngang. Biết bán kính của máng trụ $R = 50$cm. Lấy gia tốc rơi tự do $g = 10m/s^2$.



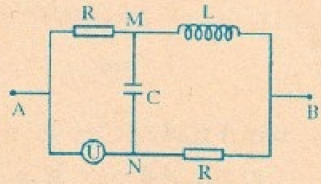
a) Tính vận tốc của quả cầu tại vị trí mà bán kính hợp với phương thẳng đứng $\varphi = 30^0$ (vị trí B).

b) Tính phản lực của máng tác dụng lên quả cầu cũng tại vị trí B. Vượt qua B phản lực đạt cực đại khi nào và có giá trị bằng bao nhiêu ?

c) Khi chuyển động tới vị trí I (điểm tiếp xúc của máng trụ với mặt phẳng ngang), quả cầu khối lượng m_1 va chạm tuyệt đối đàn hồi với quả cầu khối lượng $m_2 = 200$g đang đứng yên, hỏi các quả cầu sẽ chuyển động thế nào sau va chạm ?

ĐÀO TUẤN ĐẠT
(Hà Nội)

Bài L2/257. Cho mạch điện xoay chiều như hình vẽ. Cuộn dây thuần cảm kháng có $Z_L = \dfrac{2}{\pi} H$;



Biết rằng $C = \dfrac{10^{-4}}{\pi} F$; $R = 100\Omega$; $U_{AB} = 100\sqrt{2}\sin 100\pi t$ (V). Vôn kế có điện trở rất lớn. Tính số chỉ vôn kế.

NGUYỄN DUY TRUY
(Thái Bình)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/257. Let be given the number

$$A = \underbrace{1\ 00\ldots0}_{2000 \text{ digits } 0}\ \underbrace{1\ 00\ldots0}_{1999 \text{ digits } 0}x5$$

Find the digit x such that A is divisible by 37.

T2/257. Consider the real numbers a, b, c such that the equation $ax^2 + bx + c = 0$ has two roots in the segment $[0, 1]$. Find the greatest value of the expression

$$P = \frac{(a-b)(2a-b)}{a(a-b+c)}.$$

T3/257. Solve the system of equations :

$$\begin{cases} x^2 + 3y = 9 \\ y^4 + 4(2x-3)y^2 - 48y - 48x + 155 = 0 \end{cases}$$

T4/257. Let $ABCD$ be an inscribable quadrilateral, P be the point of intersection of AD and BC and Q be that of AB and CD. The angled-bisector of $\angle AQD$ cuts PD, PC respectively at M, N. Take on the segment connecting the midpoints E of PM and F of PN the point O such that $EO = 2OF$. The perpendicular of PC at F cuts the angled-bisector of $\angle DPC$ at K. Prove that $OK \perp NE$.

T5/257. Let be given a quadrilateral $ABCD$ inscribed in a circle with center O and with radius $R=\sqrt{5}$, the diagonals AC, BD of which cut each other perpendicularly at I such that $OI = 1$. Let S be the area of the triangle ICD. Prove that $1 \le S \le 4$.

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/257. Let be given n positive numbers $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n \ge 2)$. Prove that for every $k \in \mathbf{N}^*$, we have :

$$+ \frac{a_1^{2^k}}{(a_1+a_2)(a_1^2+a_2^2)\ldots(a_1^{2^{k-1}}+a_2^{2^{k-1}})} + \ldots$$
$$+ \frac{a_i^{2^k}}{(a_i+a_{i+1})(a_i^2+a_{i+1}^2)\ldots(a_i^{2^{k-1}}+a_{i+1}^{2^{k-1}})} + \ldots$$
$$+ \frac{a_n^{2^k}}{(a_n+a_1)(a_n^2+a_1^2)\ldots(a_n^{2^{k-1}}+a_1^{2^{k-1}})} \ge \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{2^k}.$$

When does equality occur ?

T7/257. Let be a real number $a > 1$. The sequence $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ is defined by : $u_1 = a$, $u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

Find $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{u_1} + \dfrac{1}{u_2} + \ldots + \dfrac{1}{u_n}\right)$.

T8/257. Consider the two equations :

$$\cos 2x + a\cos x + 2 = 0$$
$$\cos 2x + b\cos x + 2 = 0.$$

Suppose that each equation has 4 distinct roots in the interval $(0, 2\pi)$. Prove that the equation

$$\cos 2x + (a+b)\cos x + 5 = 0$$

has no root.

T9/257. Prove that in a right triangle, the cosinus of the acute angle formed by the medians corresponding to the legs is not less than 0,8.

T10/257. Let be given a tetrahedron $ABCD$ and let G be its center of gravity. M is an arbitrary point in space, let N be the point defined by $\overrightarrow{MN} = 4\overrightarrow{MG}$. Prove that

$$NA+NB+NC+ND \le 2MN+MA+MB+MC+MD.$$

When does equality occur ?

Diễn đàn **DẠY VÀ HỌC TOÁN**

NÊN TẬP CHO HỌC SINH NHÌN CÁC KHÁI NIỆM TOÁN HỌC DƯỚI NHIỀU GÓC ĐỘ KHÁC NHAU

BĂNG TÂM
(*Hà Nội*)

Một trong rất nhiều cách để rèn nếp tư duy sáng tạo qua việc học toán là tập cho học sinh quen nhìn một khái niệm toán học dưới nhiều góc độ khác nhau. Xin minh họa bằng một số ví dụ cụ thể.

Ví dụ 1. Khi giải phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ ta chia cả hai vế cho a ($a \neq 0$) rồi tiến hành các phép biến đổi đi đến $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + c = 0$ và cuối cùng được $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Nếu chỉ đặt yêu cầu "truyền thụ kiến thức" thì như vậy là được. Nhưng còn rèn nếp tư duy sáng tạo thì sao ? Phải làm nổi lên những suy nghĩ "ẩn náu" rồi kích thích học sinh nghĩ tiếp : Nhằm mục đích gì mà chia cho a ? - Để có x^2 rồi làm xuất hiện bình phương một nhị thức chứa x.

Tại sao có thể làm được như vậy ? - Vì vế sau là 0 và ta có quyền chia cả hai vế cho số $a \neq 0$. Giáo viên hướng dẫn để học sinh thấy hướng giải là đưa $ax^2+bx+c = 0$ về dạng đơn giản $X^2 = A \Rightarrow X = \pm\sqrt{A}$ (với $A \geq 0$). Đến đây có thể kích thích học sinh có những suy nghĩ mới mà lâu nay sách ít nói đến : Để đạt được ý tưởng trên có thể làm cách khác mà không cần chia cho a ? - Có thể nhân với a thành $a^2x^2+abx+ac = 0 \Rightarrow \left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4}$ v.v...

Sáng kiến lại kích thích suy nghĩ mới, chẳng hạn, nếu $a > 0$ thì có thể nhìn vế thứ nhất dưới dạng $(\sqrt{a}x)^2+bx+c$ dẫn đến : $\left(\sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c = 0$, còn nếu $a < 0$ thì lại đổi vế thứ nhất thành dạng $-ax^2 - bx - c$, rồi có : $\left(\sqrt{-a}x + \frac{b}{2\sqrt{-a}}\right)^2 + \frac{b^2}{4a} - c = 0$.

Làm như vậy được lợi gì ? - Tư duy học sinh bớt cứng nhắc.

Ví dụ 2. Dạy định lí : trong một hình thoi hai đường chéo vuông góc với nhau. Nếu mục đích chỉ là để truyền thụ kiến thức thì cần xướng định lý đó lên, chứng minh sao cho học sinh hiểu, sau đó ra vài bài tập ứng dụng. Nhưng muốn rèn óc thông minh sáng tạo thì có thể gợi ý như sau :

- Hai đường chéo của hình bình hành (không phải hình thoi) có vuông góc với nhau không ?

- Không

- Có vẻ như ngược đời vì hình bình hành tổng quát hơn hình thoi, phải không?

- Thử xem trong hình thoi, các đường chéo còn có thể xem là đường gì ?

Thầy gợi ý khéo léo để học sinh thấy rằng các đường chéo của hình thoi còn có thể xem là các đường phân giác của các góc để rồi đi đến bài toán giao cho họ về nhà làm : xem xét các đường phân giác của các góc trong một hình bình hành. Bài này không khó. Những học sinh khá, giỏi sẽ hứng thú tự mở rộng bài toán ra (ví dụ cho một tứ giác bất kỳ) hoặc xét nó trong một trường hợp đặc biệt (hình chữ nhật).

Lâu nay, học sinh thường được luyện đi tìm những thủ thuật để giải những bài toán khó. Việc đi tìm những thủ thuật đó cũng có ích, nhưng hạn chế, bởi lẽ những thủ thuật đó dường như phân tán, tản mạn, mỗi kiểu bài đòi hỏi một thủ thuật riêng. Hơn nữa, một thủ thuật ít tạo ra năng lực "phát hiện vấn đề mới". Mà "sáng tạo" phải bắt đầu từ chỗ "phát hiện ra vấn đề" rồi sau đó "giải quyết vấn đề". Nếu hạn chế về năng lực phát hiện vấn đề thì đành phải thụ động ngồi chờ người khác phát hiện vấn đề cho mà giải quyết, cụ thể, đối với học sinh là phải ngồi chờ thầy (hay sách) ra bài cho mà làm, làm hết các bài đó lại ngồi chờ.

Tập nhìn một khái niệm toán học theo nhiều cách khác nhau là một cách để nâng cao năng lực phát hiện vấn đề. Rèn luyện lâu sẽ hình thành thế giới quan : "mâu thuẫn là động lực của sự phát triển" và ở đây có những mâu thuẫn như giữa nội dung và hình thức, (như một phương trình có thể diễn tả bằng nhiều hình thức khác nhau); giữa cái chung và cái riêng (như hình bình hành và hình thoi) v.v... Việc ta có thể nhìn một khái niệm toán học dưới nhiều góc độ khác nhau có nguồn gốc sâu xa từ thế giới quan nói trên. Tập cho học sinh biết nhìn một khái niệm dưới nhiều cách khác nhau chính là vừa rèn tư duy sáng tạo, vừa giáo dục thế giới quan. Nhưng phải kiên trì, bền bỉ, liên tục mới có hiệu quả rõ rệt giống như tập thể dục phải kiên trì, bền bỉ, liên tục hàng năm mới khỏe mạnh./.

ĐỀ THI TUYỂN SINH MÔN TOÁN TRƯỜNG ĐẠI HỌC XÂY DỰNG HÀ NỘI 1998

Thời gian : 180 phút.

ĐỀ BÀI

A- PTTH KHÔNG PHÂN BAN

Câu I. Cho hàm số $f(x) = x + \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}$.

1) Tìm cực trị của hàm số $f(x)$; xét tính lồi lõm của đường cong $y = f(x)$ (1 điểm)

2) Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong $y = f(x)$ song song với đường thẳng $y = kx$ ($k \in \mathbf{R}$): (1 điểm)

3) Tìm giá trị lớn nhất của khoảng cách giữa đường thẳng $y = kx$ và tiếp tuyến nói trên khi $k \leq 0{,}5$ (1 điểm)

Câu II. 1) Giải phương trình $x^2 + \sqrt{x+1} = 1$; (1 điểm)

2) Giải và biện luận phương trình $m.cotg2x = \dfrac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^6 x + \sin^6 x}$ theo tham số m.

(1 điểm)

Câu III. 1) Cho hai hàm số

$f(x) = 4\cos x + 3\sin x$; $g(x) = \cos x + 2\sin x$.

a) Tìm các số A, B thỏa mãn

$g(x) = A.f(x) + B0.f'(x)$; (0,5 điểm)

b) Tính tích phân $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{g(x).dx}{f(x)}$ (0,5 điểm)

2) Tìm thể tích vật thể tạo bởi hình elíp $\dfrac{(x-4)^2}{4} + \dfrac{y^2}{16} \leq 1$ quay quanh trục Oy. (1 điểm)

Câu IV. 1) Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A_1B_1C_1D_1$; H và K là các hình chiếu vuông góc của A và C_1 xuống mặt phẳng (B_1CD_1). Chứng minh $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{KC_1}$. (1 điểm)

2) Cho hai đường tròn : tâm A (1, 0) bán kính $r_A = 4$ và tâm B (-1, 0) bán kính $r_B = 2$. Tìm tập hợp tâm I (x, y) của các đường tròn tiếp xúc với cả hai đường tròn trên. Tập hợp đó gồm những đường gì ? (1 điểm)

3) Viết phương trình đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng P : $x + y + z = 1$ và cắt cả hai đường thẳng d_1 : $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{-1} = z$;

d_2 : $\begin{cases} x - 2y + z - 4 = 0 \\ 2x - y + 2z + 1 = 0 \end{cases}$. (1 điểm)

B- PTTH PHÂN BAN

Các câu I; II; III; 1; IV.1 như trên. Câu IV.2 là câu IV.3 của đề trên. Dưới đây là các câu khác với đề trên :

Câu III. 2) Cho ba hộp giống nhau, mỗi hộp đựng 7 bút chì khác nhau về màu sắc.

Hộp thứ I có 3 bút màu đỏ, 2 bút màu xanh, 2 bút màu đen;

Hộp thứ II có 2 bút màu đỏ, 2 bút màu xanh, 3 bút màu đen;

Hộp thứ III có 5 bút màu đỏ, 1 bút màu xanh, 1 bút màu đen;

Lấy ngẫu nhiên một hộp và rút hú họa từ hộp đó ra 2 bút.

a) Tìm xác suất để 2 bút đó có cùng màu xanh; (1 điểm)

b) Tìm xác suất để 2 bút đó không có màu đen (0,5 điểm)

3) Có bao nhiêu số tự nhiên khác nhau, nhỏ hơn 10000 được tạo thành từ 5 chữ số : 0, 1, 2, 3, 4 (0,5 điểm)

ĐÁP ÁN VÀ THANG ĐIỂM

A- PTTH KHÔNG PHÂN BAN

Câu I. 1) (0,5đ) $f'(x) = 1 + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$ khi x khác 0, không tồn tại $f'(0)$; $f'(x) = 0$ tại $x = -1$ và tại đấy hàm đạt cực đại ($f(-1) = 0{,}5$); tại $x = 0$ hàm đạt cực tiểu ($f(0) = 0$).

(0,5đ) $f''(x) = \dfrac{-1}{3.\sqrt[3]{x^4}}$ (< 0) khi $x \neq 0$; $f''(0)$ không tồn tại. Đồ thị gồm hai cung lồi (lên).

2) (0,25đ) Hoành độ của tiếp điểm là nghiệm của phương trình $k = 1 + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \Rightarrow$

(0,5đ) Với k khác 1, thì $x = \frac{1}{(k-1)^3}$;

$$y = \frac{3k-1}{2(k-1)^3}.$$

Phương trình tiếp tuyến là :

$$y = k\left[x - \frac{1}{(k-1)^3}\right] + \frac{3k-1}{2(k-1)^3} = kx + \frac{1}{2(k-1)^2}.$$

(0,25đ) Với $k = 1$, thì không có tiếp tuyến.

3) (0,5đ) Vì hai đường thẳng song song, nên khoảng cách $d(k)$ giữa chúng bằng khoảng cách từ gốc tọa độ (thuộc đường thẳng $y = kx$) đến tiếp tuyến :

$$d(k) = \frac{\frac{1}{2(k-1)^2}}{\sqrt{1+k^2}} = \frac{1}{2(k-1)^2\sqrt{1+k^2}}.$$

(0,5đ) Vì $k \le 0,5$ nên

$$d'(k) = -\frac{3k^2-k+2}{2(1+k^2)^{3/2}.(k-1)^3} > 0.$$

Vậy $d(k)$ đồng biến, suy ra giá trị lớn nhất của khoảng cách giữa đường thẳng $y = kx$ và tiếp tuyến song song với nó khi $k \le 0,5$ là $d(0,5) = \frac{4}{\sqrt{5}}$.

Câu II. 1) ($4\times0,25$đ) Trong quá trình giải đặt điều kiện $|x| \le 1$; các nghiệm là -1 ; 0; $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

2) (0,25đ) Phương trình đã cho tương đương với $\cos2x \,.\left(\frac{m}{\sin2x} - \frac{4}{4-3\sin^2 2x}\right) = 0$

(0,25đ) $\cos2x = 0$, suy ra $x = 45^o + 90^o k$ ($k \in \mathbf{Z}$).

(0,25đ) (*) $\begin{cases} \sin2x \ne 0 \\ 3m\sin^2 2x + 4\sin2x - 4m = 0 \end{cases}$.

Đặt $t = \sin2x$, $f(t) = 3mt^2 + 4t - 4m$.

Khi $m = 0$ hệ (*) vô nghiệm ;

Khi m khác 0 cả hai nghiệm của $f(t) = 0$ là $t = \frac{-2 \pm 2\sqrt{1+3m^2}}{3m}$ đều khác 0, tuy nhiên nghiệm $\frac{-2-2\sqrt{1+3m^2}}{3m}$ bị loại (vì có trị tuyệt đối lớn hơn 1); nghiệm $\frac{-2+2\sqrt{1+3m^2}}{3m}$ nằm trong đoạn [-1, 1] khi và chỉ khi $f(-1).f(1) \le 0$ tức là $|m| \le 4$; khi đó tìm được nghiệm của phương trình lượng giác là $x = (-1)^k.\alpha + 90^o.k$ ($k \in \mathbf{Z}$) (với $\sin2\alpha = \frac{-2+2\sqrt{1+3m^2}}{3m}$).

Câu III. 1) (0,5đ) a) Đồng nhất hệ số hai vế đẳng thức sau

$A(4\cos x - 3\sin x) + B(-4\sin x + 3\cos x) = \cos x + 2\sin x$

được hệ phương trình $\begin{cases} 4A + 3B = 1 \\ 3A - 4B = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{2}{5} \\ B = \frac{-1}{5} \end{cases}$.

b) (0,5đ)

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{g(x).dx}{f(x)} = [Ax + B.\ln|f(x)|]\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{10} - \frac{1}{5}\ln\frac{7\sqrt{2}}{8}$$

2) (0,5đ) $V =$

$$\int_{-4}^{4} \pi\left[\left(4+2\sqrt{1-\frac{y^2}{16}}\right)^2 - \left(4-2\sqrt{1-\frac{y^2}{16}}\right)^2\right].dy$$

$$= 32\pi\int_{-4}^{4}\sqrt{1-\frac{y^2}{16}}\,.\,dy$$

(0,5đ) $V = 64\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2 z}.4\cos z.dz = 64\pi^2$

Câu IV. 1) (0,5đ) Chứng minh hai vectơ $\overrightarrow{AH}$; $\overrightarrow{KC_1}$ cùng phương cùng chiều (vì cùng vuông góc với mặt phẳng (B_1CD_1) và hai điểm A, C_1 nằm về hai phía của mặt phẳng đó).

(0,5đ) Độ dài AH bằng 2 lần KC_1 (có nhiều cách làm, còn nếu xây dựng hệ tọa độ sao cho tọa độ A, B, D, A_1 là (0,0,0), (a,0,0), (0,b,0), (0,0,c) thì tọa độ C_1 là (a,b,c) và

$$AH = 2KC_1 = 2 \times \frac{abc}{\sqrt{(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2}})$$

2) (0,5đ) Hai đường tròn A, B tiếp xúc nhau ở C (-3, 0). Đường tròn I tiếp xúc với hai đường tròn đó tại C khi và chỉ khi tâm I trên đường thẳng nối A với B (tức là đường thẳng $y = 0$);

(0,5đ) Đường tròn I tiếp xúc trong với đường tròn A và tiếp xúc ngoài với đường tròn B khi và chỉ khi bán kính đường tròn I bằng $IB - r_B$ và bằng $r_A - IA$, tức là I là điểm có tổng khoảng cách đến hai điểm A, B là $IA + IB = r_A + r_B = 6$ (không đổi). Vậy trường hợp này tập hợp các tâm I là elíp có hai tiêu điểm là A, B bán trục lớnlà $a = 3$, phương trình là $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$.

3) (0,25đ) Đường thẳng d là giao của hai mặt phẳng ; P_1 chứa d_1 và vuông góc với P, P_2 chứa d_2 và vuông góc với P.

(0,25đ) P_1 chính là mặt phẳng qua điểm (1,-1,0) song song với hai vectơ có tọa độ là (2,-1,1) và (1,1,1). Phương trình của P_1 là
$2x + y - 3z - 1 = 0$

(0,25đ) Lấy hai điểm (-2,-3,0) và (0,-3,-2) trên d_2. P_2 chính là mặt phẳng qua điểm (-2,-3,0) và song song với hai vectơ có tọa độ là (2,0,-2) và (1,1,1). P_2 có phương trình
$x - 2y + z - 4 = 0$.

(0,25đ) Phương trình đường thẳng

$$d \begin{cases} 2x + y - 3z - 1 = 0 \\ x - 2y + z - 4 = 0 . \end{cases}$$

B. PTTH PHÂN BAN

Câu III. 2) (1đ) a) Gọi A_j là sự kiện lấy ra hộp thứ j (j = I, II, III), B là sự kiện lấy được hai bút màu xanh. Khi đó $B = (B \cap A_I) \cup (B \cap A_{II}) \cup (B \cap A_{III})$. Số khả năng rút ra hai bút ở mỗi hộp đều bằng $C_7^2 = 21$. Số khả năng rút được hai bút xanh từ hộp I là 1, từ hộp II là 1, từ hộp III là 0. Ta có $P(A_j) = 1/3$; $P(B/A_I) = P(B/A_{II}) = 1/21$; $P(B/A_{III}) = 0$. Theo công thức nhân và cộng xác suất ta có

$P(B) = P(A_I).P(B/A_I) + P(A_{II}).P(B/A_{II}) + P(A_{III}).P(B/A_{III}) = 2/63$.

(0,5đ) b) Gọi C là sự kiện lấy được hai bút không có màu đen thì :

$$C = (C \cap A_I) \cup (C \cap A_{II}) \cup (C \cap A_{III}) ;$$

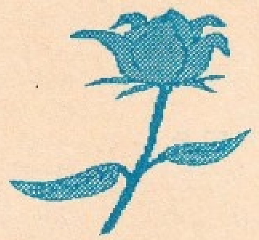
$$P(C) = P(A_I).P(C/A_I) + P(A_{II}).P(C/A_{II}) + P(A_{III}).P(C/A_{III}) =$$

$$= \frac{1}{3}.\frac{C_5^2}{C_7^2} + \frac{1}{3}.\frac{C_4^2}{C_7^2} + \frac{1}{3}.\frac{C_6^2}{C_7^2} = \frac{31}{63}.$$

3) (0,5đ) Mỗi số tự nhiên nhỏ hơn 10000 có không quá 4 chữ số, coi như những số có 1, 2, 3 chữ số đều là số có 4 chữ số (bằng cách thêm 3, 2, 1 chữ số 0 vào bên trái). Vậy mỗi số tự nhiên nhỏ hơn 10000 được coi là một bộ 4 chữ số có thứ tự của các chữ số 0, 1, 2, 3, 4. Số lượng chúng là $5^4 = 625$.

DOÃN TAM HÒE
(ĐHXD Hà Nội)

NHÂN NGÀY NHÀ GIÁO VIỆT NAM (20-11)



CÁC NHÀ TOÁN HỌC NÓI VỀ THẦY CÔ GIÁO CỦA MÌNH

Cũng như phần lớn các bạn, khi học ở trường trung học, tôi thích nhiều ngành: vật lí, y học, toán học. Tôi cũng ham mê âm nhạc và thơ. Tôi rất có thể trở thành một nhạc sĩ loại trung hay là một nhà thơ tồi, nếu không có cô giáo dạy toán. Cô bảo tôi rằng "nếu em không thi vào khoa toán thì gặp em cô không chào hỏi đâu ; con đường toán học là con đường của em, không được nghĩ đến con đường khác !"

Viện sĩ S.L.Sobolev (1908-1989)

Sự "chấn động" toán học đầu tiên xảy ra với tôi khi tôi được học thầy giáo đáng kính J.V. Moroskin. Tôi vẫn nhớ bài toán : Hai bà lão khởi hành đồng thời từ hai thành phố và đi từ thành phố này đến thành phố kia. Họ gặp nhau lúc giữa trưa và bà lão thứ nhất đến đích lúc 4 giờ chiều, bà lão thứ hai lúc 9 giờ tối. Hỏi họ đã khởi hành vào giờ nào ? Lúc đó, tôi chưa học đại số. Suy nghĩ tìm "lời giải số học" của bài toán, lần đầu tiên tôi cảm nhận được niềm vui sáng tạo và việc hướng đến niềm vui đó đã giúp tôi trở thành nhà toán học.

Viện sĩ V.I. Arnold (sinh năm 1937)

H.C sưu tầm
(theo *Họa báo Liên Xô*, số 7-1968 và *Tạp chí Kvant*, số 7-1990)

ĐỀ THI OLYMPIC TOÁN KHU VỰC ĐÔNG NAM Á LẦN THỨ NHẤT (SEAMO - 1998)

I. 20 câu hỏi ngắn (90 phút, mỗi câu được 1 điểm)

1. Tìm tổng của chuỗi số sau đây :

$$\frac{2}{3} - 4 + \frac{4}{9} - \frac{4}{7} + \frac{8}{27} - \frac{4}{49} + \ldots$$

2. Tìm chữ số hàng đơn vị của số 7^{2020}

3. Một hình cầu nội tiếp và một hình cầu khác ngoại tiếp cùng một hình lập phương. Tìm tỷ số của thể tích hình cầu nhỏ so với thể tích hình cầu lớn.

4. Trong một dãy số đã cho, số đầu tiên của dãy bằng 1, và với mọi $n \geq 2$ tích của n số đầu tiên của dãy bằng n^3. Tìm tổng của số thứ ba và số thứ năm trong dãy.

5. Hàm số $f(x)$ được định nghĩa như sau :

$$f(x) = \max\{4x+1,\ x+5,\ -2x+2\}$$

với mọi số thực x. Tìm giá trị nhỏ nhất của $f(x)$

6. Cho một hình vuông $ABCD$. Cung tròn với tâm D và bán kính DA cắt đường chéo BD tại X. Tương tự, cung tròn với tâm B và bán kính BC cắt BD tại Y. Cho biết $XY = 2$, hãy tìm diện tích của hình giới hạn bởi hai cung AXC và AYC.

7. Trong tam giác đều ABC, các điểm H, M, N, I là các trung điểm tương ứng của BC, AH, AC, NH. Biết diện tích của tam giác IMH bằng 10, hãy tìm diện tích của tam giác ABC.

8. Giả sử $P(x)$ là một đa thức. Các phần dư trong các phép chia $P(x)$ cho x và cho $(x-1)$ lần lượt là 1 và 2. Hãy tìm phần dư trong phép chia $P(x)$ cho $x(x-1)$

9. Độ dài các cạnh của một tam giác lần lượt bằng 7, 8 và 11 đơn vị. Hãy tìm diện tích của hình tròn nội tiếp tam giác đó.

10. Giải phương trình

$$\sqrt{2x^2 - 4x + 9} - \sqrt{2x^2 - 4x - 12} = 3$$

11. Cho các tập hợp $A = \{p, q, r\}$ và $C = \{p, q, s, t\}$. Tìm số các tập hợp B sao cho B là một tập con của C và giao của A với B chứa đúng một phần tử.

12. Có bao nhiêu cách xếp thành dãy tất cả các chữ cái trong từ PARALLEL sao cho thứ tự của các nguyên âm A, A, E không thay đổi ? (Mọi chữ cái trong từ nói trên phải được dùng trong mỗi cách sắp xếp).

13. Tìm giá trị nguyên dương của n sao cho $n^2 = x^2 + x + 6$ đối với một số x nguyên dương nào đó.

14. Giả sử α là một nghiệm của phương trình $x^{1999} = 1$ và $\alpha \neq 1$. Hãy tính

$$1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^{1998}$$

15. Cho tam giác ABC với góc A vuông. Đường tròn tâm A với bán kính AB cắt (phía trong) đoạn BC và AC tương ứng tại D và E. Cho biết $BD = 20$ và $DC = 16$, hãy tính AC^2.

16. Tìm số các cặp có thứ tự (x, y) trong đó x và y là các số nguyên dương, sao cho

$$\frac{xy}{x+y} = 1998$$

17. Gọi A và B là hai đỉnh đối xứng qua tâm của một hình lập phương có cạnh bằng 1 mét. Tìm độ dài đường đi ngắn nhất trên mặt hình lập phương đó nối với A và B.

18. Cho $f(1) = 2$ và $2f(n+1) = 2f(n)+1$ với $n = 1, 2, 3\ldots$ Hãy tìm n sao cho $f(n) = 1998$.

19. Trong một cấp số cộng $t_1 = 98$ và $t_{13} = 89$. Đặt $T_n = t_n + t_{n+1} + \ldots + t_{n+6}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|T_n|$.

20. Tìm giá trị của

$$\sin^2 0^\circ + \sin^2 1^\circ + \sin^2 2^\circ + \ldots + \sin^2 90^\circ$$

II. 5 bài kiểm tra năng lực cá nhân (180 phút, mỗi bài được 7 điểm)

1. a) Giả sử $f(x)$ là một hàm số với giá trị thực, xác định với mọi x khác 0, sao cho $f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x$. Hãy tìm tất các các nghiệm của phương trình $f(x) = f(-x)$.

b) Hàm số $g(x)$ thỏa mãn phương trình $g(x)+g(y) = g(x+y)-xy-1$, với mọi giá trị thực x và y. Cho biết $g(1) = 1$, hãy xác định tất cả các số nguyên n khác 1 sao cho $g(n) = n$.

2. Giả sử a, b, c là các số thực dương sao cho $a<b+c$, $b<a+c$, $c<a+b$ và $a+b+c = 2$. Chứng minh rằng

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2abc < 2.$$

3. Ngày 14 tháng bảy 1998 là một *ngày đặc biệt* bởi vì nếu ta viết ngày đó dưới dạng 14/7/98, ta dễ dàng thấy $14 \times 7 = 98$. Có ngày nào khác tương tự như thế trong năm 1998 hay không ? Hãy giải thích điều đó. Có bao nhiêu ngày đặc biệt như vậy trong khoảng thời gian từ ngày 1 tháng giêng năm 1900 tới ngày 31 tháng mười hai năm 1999 ?

4. Mười bốn đường thẳng khác nhau được vẽ trên một mặt phẳng sao cho

a) năm đường thẳng trong số đó đồng quy tại một điểm duy nhất,

b) ba đường thẳng khác trong số đó song song với nhau, và

c) ngoài các trường hợp kể trên, không có ba hoặc nhiều hơn các đường thẳng đồng quy nào khác, cũng không có cặp đường thẳng song song nào khác.

Hỏi mười bốn đường thẳng đã cho chia mặt phẳng thành bao nhiêu miền ?

5. Giả sử n và k là các số nguyên dương trong đó k là một số lẻ. Chứng minh rằng $1^k+2^k+3^k+\ldots+n^k$ chia hết cho $1+2+3+\ldots+n$.

III. 10 bài thi đồng đội (60 phút, mỗi bài được 2 điểm).

1. Cho ΔABC là một tam giác đều với cạnh bằng một đơn vị. Giả sử ΔPQR là một tam giác đều khác, với cạnh bằng a, ở đây $0<a<1$, tam giác này nằm trong ΔABC sao cho $AB//PQ$, $BC//QR$ và $CA//RP$. Giả sử Q_1, R_1, P_1 là các điểm nằm tương ứng trên các đoạn AB, BC, CA sao cho AQ_1QP, BR_1RQ, CP_1PR là các hình bình hành. Hãy tính tỷ số sau đây theo a :

$$\frac{\text{diện tích } AQ_1QP + \text{diện tích } BR_1RQ + \text{diện tích } CP_1PR}{\text{diện tích } \Delta APP_1 + \text{diện tích } \Delta BQQ_1 + \text{diện tích } \Delta CRR_1}$$

2. Tìm tất cả các cặp số thực có thứ tự (x, y) thỏa mãn hệ phương trình sau đây :

$$\begin{cases} x^3+y^3=1 \\ x^4+y^4=1. \end{cases}$$

3. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số sau đây $f(x)=(3\sin x-4\cos x-10)(3\sin x+4\cos x-10)$

4. Giả sử P và Q là các điểm nằm ngoài tam giác ΔABC sao cho các tam giác ΔBAP và ΔACQ không chồng lên tam giác ΔABC (tức là chúng chỉ có cạnh chung). Cho một điểm R nằm trong ΔABC. Chứng minh rằng nếu các tam giác ΔBAP, ΔACQ và ΔBCR đồng dạng với nhau với các đáy tương ứng là AB, AC và BC thì tứ giác $AQRP$ là hình bình hành.

5. Tìm tất cả các số nguyên dương a, b, c với $12<a<b<c<360$ sao cho :

i) ước số chung lớn nhất của a, b, c là 12, và

ii) bội số chung nhỏ nhất của a, b, c là 360.

6. Với những giá trị nào của số nguyên n thì $11(14^n)+1$ là một số nguyên tố ?

7. Tìm một số chính phương có bốn chữ số sao cho hai chữ số đầu tiên của nó bằng nhau và hai chữ số cuối cùng của nó cũng bằng nhau.

8. *Phần nguyên* $I(A)$ của số thực A là số nguyên lớn nhất không lớn hơn A, trong khi đó *phần còn dư* $F(A)$ được định nghĩa là $A-I(A)$. Hãy tìm một ví dụ về một số dương A sao cho

$$F(A)+F\left(\frac{1}{A}\right)=1.$$

Có thể tìm ví dụ trong đó A là số hữu tỷ hay không ? Hãy giải thích.

9. Mỗi đỉnh của một hình lập phương được gán một trong hai số nguyên 1 và -1. Sau đó, mỗi mặt của hình này được gán số nguyên là tích của 4 số đã gán cho các đỉnh của mặt đó. Tổng của 14 số được gán cho các đỉnh và các mặt của hình lập phương theo cách trên có thể bằng 0 được hay không ? Hãy giải thích điều đó.

10. Ba người A, B và C cần đi qua một chiếc cầu. A có thể đi qua cầu trong 10 phút, B có thể đi qua trong 5 phút, và C có thể đi qua trong 2 phút. Ba người có một chiếc xe đạp, mà mỗi người đều có thể dùng nó để đi qua cầu trong 1 phút. Hãy chỉ ra một cách mà cả ba người có thể vượt qua cầu trong vòng ít hơn 3 phút.

N.H.V.H.
(Đại học Quốc gia Hà Nội)

CÁC BẠN ĐOẠT GIẢI CHÚ Ý

Các bạn đã được giải hai cuộc thi giải Toán và Vật lí năm học 1995-1996 và 1996-1997 gửi ngay địa chỉ mới về Tòa soạn để TH&TT có thể gửi Bằng danh dự giải thưởng và tiền thưởng. Địa chỉ cần đề rõ : Họ và tên, thôn, xã, huyện, tỉnh hoặc số nhà, đường phố, phường, quận, thành phố. Ngoài phong bì ở góc phía dưới ghi thêm : Thư báo địa chỉ mới. Chỉ gửi về : Tòa soạn Toán học và Tuổi trẻ, 25 Hàn Thuyên, Hà Nội.

TH&TT

Kết Quả Cuộc Thi Mini VUI HÈ 98

Cuộc thi lẽ ra kết thúc nhận bài vào 30.8.1998 nhưng vì có quá nhiều bài giải gửi về sau đó nên chúng tôi đã quyết định kéo dài thời gian thi thêm 1 tháng.

Ban tổ chức rất băn khoăn khi chọn trao giải thưởng vì có nhiều bài làm tốt gần ngang nhau. Sau khi cân nhắc tòa soạn đã quyết định 14 bạn sau đây đoạt giải :

I. GIẢI NHẤT :

1. *Đinh Văn Năm*, xóm 6, Giao An, Giao Thủy, **Nam Định.**
2. *Ngô Mạnh Hùng*, lớp 10C, PTTH Sóc Sơn, **Hà Nội.**
3. *Mai Lệ Thủy*, 159/1C Bình Giã, Vũng Tàu, **Bà Rịa - Vũng Tàu.**

II. GIẢI NHÌ :

1. *Nguyễn Ngọc Cường*, lớp 9A, THCS Nguyễn Đăng Đạo, **Bắc Ninh.**
2. *Trần Mạnh Đức*, địa chỉ : Nguyễn Thu Thủy, Bảo tàng **Quảng Ninh.**
3. *Nguyễn Văn Bình*, lớp 11A2, PTTH Lệ Thủy, **Quảng Bình.**
4. *Đoàn Hồng Anh*, lớp 12A4, Hoàng Lê Kha, **Tây Ninh.**
5. *Nguyễn Lê Linh*, lớp 10 Toán 1, PTTH chuyên Lương Thế Vinh, **Đồng Nai.**

III. GIẢI BA:

1. *Lê Thị Nga*, lớp 4D, trường tiểu học Lương Ninh, Quảng Ninh, **Quảng Bình.**
2. *Trần Minh Tuấn*, lớp 9A3, Giảng Võ, **Hà Nội.**
3. *Hoàng Nguyên Vũ*, lớp 8P, THCS Trưng Vương, **Hà Nội.**
4. *Nguyễn Mai Hoa*, lớp 6, PTCS Chất lượng cao Tĩnh Gia, **Thanh Hóa.**
5. *Lưu Đức Trung*, lớp 8^{14}, THCS Thái Nguyên, Nha Trang, **Khánh Hòa.**
6. *Võ Nhân Văn*, lớp 9A, cấp 2-3 Krông Păk, **Đắc Lắc.**

Ngoài 14 bạn đoạt giải còn các bạn khác có bài trả lời tương đối khá : *Trịnh Khuyến Trung*, tổ 122^B Cẩm Phả, **Quảng Ninh**; *Phan Nhật Linh*, lớp 11A, PTTH Yên Lạc, **Vĩnh Phúc** ; *Trịnh Văn Thuấn*, Trà Giang, Kiến Xương, **Thái Bình**; *Lê Đức Vượng*, 11A5 THCB Hồng Quang, **Hải Dương**; *Nguyễn Tiến Hòa*, đội 1, Đại Hưng, Châu Giang, **Hưng Yên**; *Nguyễn Quang Chấn*, THCS Phạm Huy Thông, Ân Thi, **Hưng Tên**; *Doãn Xuân Huy*, giáo viên PTTH Ân thi, **Hưng Yên**; *Đỗ Thị Thúy*, Tây Ninh, Hải Chính, Hải Hậu, **Nam Định**; *Nguyễn Thế Kha*, 10 lý, PTTH Lê Hồng Phong, **Nam Định**; *Phan Thị Thu Thảo*, 14A đường Ninh Bình, **Nam Định**; *Tống Anh Quân*, 9I, THCS Hàn Thuyên, **Nam Định**; *Lê Khắc Hòa*, 11A, PTTH Lương Đắc Bằng, Hoằng Hóa, **Thanh Hóa**; *Bùi Ngọc Hân*, 8C, Trần Mai Ninh, **Thanh Hóa**; *Bùi Ngọc Hân*, 8C, Trần Mai Ninh, **Thanh Hóa**; *Nguyễn Huy Vũ*, 11A1, Phan Bội Châu, **Nghệ An**; *Đinh Thanh Thường*, 9A, THCS Nguyễn Trãi, Tân Kỳ, **Nghệ An**; *Phan Văn Nhân*, 12A3, PTTH chuyên ban Đông Hà, **Quảng Trị**; *Phạm Việt Tuấn*, $10T_1$ Quốc học, **Thừa Thiên - Huế,** *Trần Bá Đôn*, 11CT-ĐHKH, **Thừa Thiên - Huế**, *Lê Trung Kiên*, 11CTT2, Quốc Học, **Thừa Thiên-Huế**; *Lê Khắc Vĩnh*, 11 Chi Lăng (?), *Phạm Trường Giang*, giáo viên PTTH Lê Quý Đôn, Quy Nhơn, **Bình Định**; *Trương Quang Trung*, 11A2, TH chuyên **Kon Tum**; *Nguyễn Minh Phú*, 10A, PTTH A Yun Pa, **Gia Lai**; *Cao Cường*, 89 Phạm Ngũ Lão, Thủ Dầu Một, **Bình Dương** ; *Mai Thành Duy*, 165/1 Bình Giã, Vũng Tàu, **Bà Rịa - Vũng Tàu**; *Nguyễn Thị Thu Hoài*, 400/120 Lê Văn Sĩ, Q3, **TP Hồ Chí Minh.**

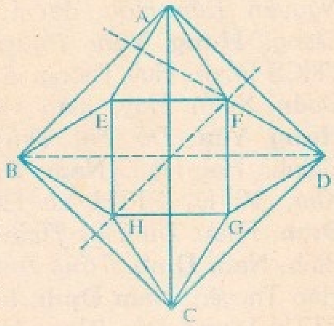
Sau đây là đáp án.

ĐÁP ÁN

Câu 1. Ảnh thứ 2 là nhà toán học Pytago (Pythagor) (khoảng 600-570 năm trước CN) người Hy Lạp. Một định lí của ông : *Nếu các cạnh của một tam giác vuông được đo theo cùng một đơn vị dài, thì bình phương độ dài của cạnh huyền bằng tổng các bình phương độ dài của các cạnh góc vuông* (nói gọn là : bình phương của cạnh huyền bằng tổng bình phương các cạnh góc vuông).

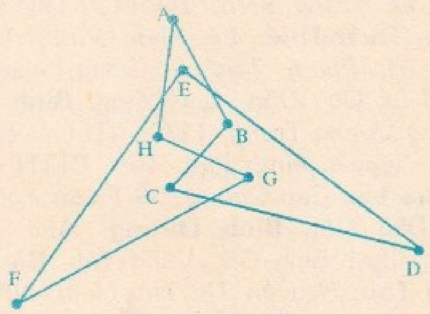
Ảnh thứ 3 (từ trên xuống) là nhà toán học Talét (Thales) (624-548 trước CN) người Hy Lạp. Ông còn là nhà triết học. Một định lí của ông : *Nếu trên một cạnh của một góc ta đặt các đoạn bằng nhau và qua các đầu mút của chúng ta kẻ các đường song song cắt cạnh thứ hai của góc thì các đường song song đó* *định trên cạnh thứ hai những đoạn thẳng bằng nhau.*

Câu 2. Bố trí 8 điểm như sau : *ABCDEFGH* mà *ABCD* là hình vuông, các tam giác *AEF, BEH, CHG, DFG* là đều, *EFGH* cũng là hình vuông. Như vậy, cứ trung trực của mỗi đoạn thẳng nối hai điểm đều đi qua 2 trong các điểm đã cho. Chẳng hạn trung trực của *EF* đi qua *A* và *C*, trung trực của *EA* đi qua *F* và *D*, trung trực của *AD* đi qua *H* và *F*, trung trực của *AC* đi qua *B* và *D*...



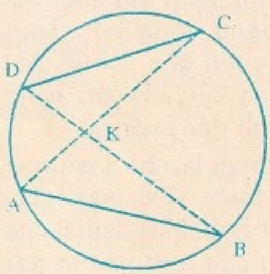
Câu 3: Đó là đặt chữ số 0 thêm vào các vị trí khác nhau của một số tự nhiên.

Câu 4:



Câu 5. Gọi giao điểm của *AC* và *BD* là *K*. Ta có $\Delta DKC \backsim \Delta AKB$. Suy ra $\frac{AB}{DC} = \frac{AK}{DK}$ (1)

Giả sử vận tốc canô là v_1, vận tốc thuyền máy là v_2. Vì thời gian canô đi từ *A* đến *B* và thời gian thuyền máy đi từ *D* đến *C* được giả thiết là bằng nhau nên



$$\frac{AB}{v_1} = \frac{DC}{v_2}$$

hay $\frac{AB}{DC} = \frac{v_1}{v_2}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có :

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{AK}{DK}$$

hay $\frac{AK}{v_1} = \frac{DK}{v_2}$

tức là thời gian canô chạy từ *A* đến *K* bằng thời gian thuyền máy chạy từ *D* đến *K*. Vậy nếu như (loại bỏ tác dụng của sóng và gió) canô chạy từ *A* đến *C*, thuyền máy chạy từ *O* đến *B* thì chúng sẽ đâm vào nhau tại *K*.

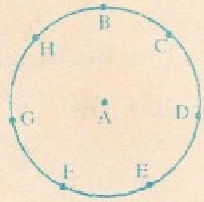
Câu 6. Có rất nhiều đáp án. Dưới đây là một đáp án :

Nếu một tứ giác có ba góc vuông thì có đúng bốn góc vuông.

NHẬN XÉT

1. **Câu 1.** Câu này được nhiều bạn trả lời đúng nhưng cũng không ít câu trả lời đã cắm râu ông nọ vào cằm bà kia. Chân dung thứ nhất là Menđêleep.

   Câu 2. Câu này tưởng dễ mà hóa khó. Không ít bạn đã vẽ sai. Ví dụ một kiểu bố trí sai mà nhiều bạn đã đưa ra (hình bên)

   Câu 3. Vui nhất là có bạn cho là *kiến thức*, là *tư duy*.

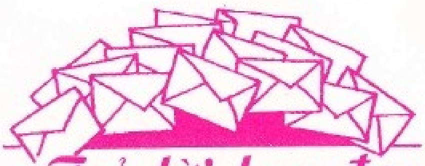
   Câu 4. Bạn *Đào Tuấn Hải*, $11A_4$ Hoàng Lê Kha, **Tây Ninh** nói là để "quẹt" ra đường "dễ ẹc" này đã mất gần cả trăm đồng giờ (giờ đồng hồ) và nửa quyển vở. Bạn bát đến tòa soạn vì mấy cái khúc, cái đoạn đó đã "hành" mình. Bạn *Lê Thị Nga* bé tí tẹo (lớp 4D, trường tiểu học Lương Ninh, Quảng Ninh, **Quảng Bình**) đã vẽ được đường này trong khi đi chăn trâu giúp bố mẹ. Thật đáng khen ! Một số bạn còn vẽ thêm cho trường hợp 6, 10 đoạn. Vài bạn hùng hồn tuyên bố bài toán không có lời giải sau khi đã chứng minh rất "chặt chẽ". Thật ra ta có thể vẽ được với mọi *n* chẵn lớn hơn 4.

   Câu 5. Đa số giải được. Chỉ có 1 bạn ở Vũng Tàu chả hiểu sao lại không biết thuyền máy và canô có xuất phát cùng một thời điểm hay không (!).

   Câu 6. 1. Câu này được nhiều bạn sáng tạo theo nhiều cách khác nhau. Bạn *Trần Hương Xuân, 9A1* THCS Hai Bà Trưng, Mê Linh, **Vĩnh Phúc** có nhiều cách phát biểu hay và rất toán. Bạn *Nguyễn Văn Thích*, Ngũ Kiên, Vĩnh Lạc, **Vĩnh Phúc** đưa ra 11 mệnh đề. Hài hước nhất là có bạn đưa ra mệnh đề "Nếu có ba con "cẩy" thì có đúng bốn nhân ba là mười hai cái chân "cẩy".

2. Rất đáng tiếc là có hai anh em địa chỉ ở Thanh Hóa có 2 bài giải giống nhau như hai giọt nước (!).

TH&TT



Trả lời bạn đọc

Hỏi: *Khi viết A:B.C thì hiểu là* $A.\dfrac{1}{B}.C$ *hay* $\dfrac{A}{B.C}$ *?*

Tập thể lớp 6A, ? Đức Thọ, Hà Tĩnh

Đáp: Khi biểu thức chỉ có 2 phép toán cộng và trừ, hoặc nhân và chia mà không có các dấu ngoặc thì các em phải thực hiện các phép toán theo thứ tự từ trái sang phải. Do đó khi viết $A{:}B.C$ thì phải hiểu là $A.\dfrac{1}{B}.C$.

Hỏi: *Với bài toán "Tìm m để hệ bất phương trình*

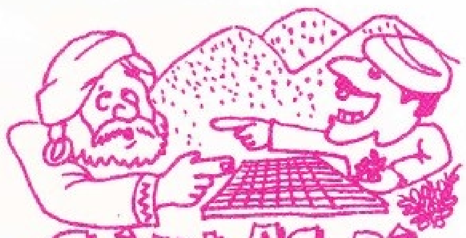
$$\begin{cases} x^2 - 1 \le 0 \\ (m - x^2)(x+m) < 0 \end{cases}$$

vô nghiệm", em giải bằng nhiều cách mà vẫn khác kết quả đã đăng trong tạp chí số 246 (đề thi tuyển sinh ĐHGTVT). Cách thứ nhất: từ x^2-1 ≤ 0 ⇔ -1≤x≤1 suy ra x = ±1 phải làm cho bất phương trình f(x) = $(m-x^2)(x+m)$ < 0 vô nghiệm ⇒ f(-1) < 0 và f(1) < 0, do đó -1 < m < 1. Cách thứ hai, em làm gián tiếp: tìm m để hệ có nghiệm dẫn đến bất phương trình f(x) < 0 có nghiệm thuộc [-1; 1] tức là f(x) > 0 với mọi x ∈ [-1;1] ⇒ f(-1) > 0 và f(1) > 0 ⇒ m ∈ (-∞; -1] ∪ (1; +∞). Loại các giá trị này ta có m ∈ [-1; 1].

LÊ KHẮC VĨNH
Lớp $10B_1$, trường Quốc học Huế

Đáp: Ngay hai cách giải của em đã khác kết quả nhau rồi. Như vậy là "có vấn đề" trong ít nhất một trong hai lời giải của em. Nhưng sự thật thì cả hai lời giải của em đều "trầm trọng" cả về lôgic và cả về diễn đạt. Ở cách giải thứ nhất : diễn đạt "x = ±1 phải làm cho bất phương trình f(x) < 0 vô nghiệm" là *nhầm lẫn vai trò của ẩn và tham số*. Khi em dẫn đến f(-1) < 0 ; f(1) < 0 chính là làm cho x = ± 1 là nghiệm của f(x) < 0 và *càng làm cho hệ có nghiệm* (vì ít nhất đã có x = ± 1 là nghiệm). Ở cách giải thứ hai : f(x) < 0 có nghiệm thuộc [-1; 1] tại sao lại tức là f(x) > 0 với mọi x ∈ [-1; 1]? Tốt nhất, em bình tĩnh và hiểu được các bước giải của đáp án đã đăng trên tạp chí, không nên tiếp tục rơi vào các vòng luẩn quẩn khác nhau.

L.T.N



CÂU LẠC BỘ

CHƠI ĐÔ-MI-NÔ KIỂU TOÁN !

Bạn hãy nhìn bảng ô vuông 7 × 8 với các chữ số đã ghi ở từng ô. Một đô-mi-nô là một hình chữ nhật kích thước 2 × 1. Như vậy mỗi đô-mi-nô cắt ra từng bảng này sẽ có 2 chữ số. Bạn hãy thử cắt ra từ bảng này đúng 28 đô-mi-nô sao cho không có 2 đô-mi-nô nào giống nhau (nghĩa là chứa cùng cặp chữ số) (Hạn gửi bài trước 15.12.1998)

0	6	2	5	0	0	5
0	4	3	2	6	6	2
6	1	6	1	3	1	1
6	1	2	5	1	1	6
0	2	2	5	3	4	4
3	1	2	4	0	4	4
3	0	3	3	5	5	4
5	5	0	2	6	3	4

NGỌC MAI

SAI LẦM ở đâu

Có khi nào mà các bạn giải toán lại dẫn đến những phi lý nhưng "soát" kĩ lời giải ta không tìm được một "mắt xích" nào có vẻ "trục trặc" ? Tình huống sau đây do bạn Bùi Lê Thanh Thao (thay mặt tập thể lớp 12A, PTTH chuyên Hùng Vương, Phú Thọ) gửi về để hỏi... chúng ta. Rất mong các nhà giáo và các bạn cho ý kiến gấp !

Bài toán. Tính $I = \int \dfrac{dx}{x\, lnx}$

Lời giải. Ta biết $\int u dv = uv - \int v du$

Đặt $u = \dfrac{1}{lnx} \Rightarrow du = \dfrac{-dx}{x(lnx)^2}$

$v = \int \dfrac{dx}{x} = lnx \Rightarrow dv = \dfrac{dx}{x}$

$v' = \frac{1}{x}$

$v = \ln|x|$

Ta có : $I = \int u dv = \dfrac{1}{\ln x}\,.\,lnx - \int lnx\,.\,\dfrac{-dx}{x(lnx)^2}$

$\Rightarrow I = 1 + I$???

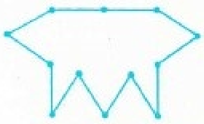
Hỏi: Cách giải sai ở đâu ? Hay là... công thức ... chưa chính xác ? (Mong nhận được câu giải đáp trước 15.12.1998).

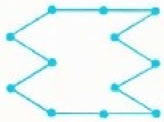
KIHIVI

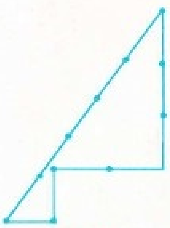
Giải đáp bài

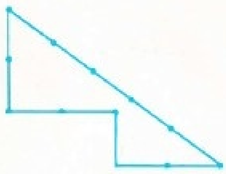
NHANH TRÍ NHANH TAY

Từ hình chữ thập ta thay đổi vị trí các que diêm sẽ được các hình có diện tích bằng 4 ô vuông (mỗi ô vuông có cạnh là 1 que diêm) dưới đây, từ các hình này có thể thay đổi một bộ phận để tạo thành các hình mới (chẳng hạn từ 1 thành 2, từ 3 thành 4, từ 5 thành 6, từ 9 thành 10...)

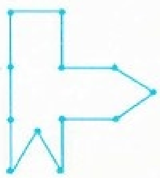

(1)

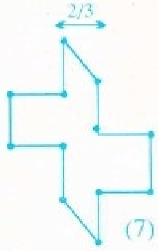

(2)


(3)

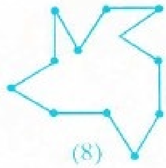

(4)

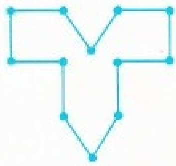

(5)

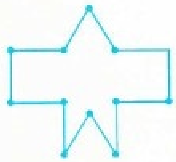

(6)



(7)


(8)


(9)


(10)

Theo đáp án của các bạn : *Vũ Đức Duy*, 10C, Nguyễn Trãi; *Đoàn Mạnh Tưởng*, 12B, Trực Ninh, **Nam Định**; *Hoàng Tuấn Nhã*, 9A, Nguyễn Hàm Ninh, Quảng Trạch, **Quảng Bình**; *Nguyễn Việt Hòa*, 9A1, Hồng Bàng, **Hải Phòng**; *Nguyễn Mạnh Tùng*, 9B, Nguyễn Trãi; **Hải Dương**; *Cao Ngọc Cường*, 9A, Diễn Thọ, Diễn Châu, **Nghệ An**; *Trương Văn Hiệu*, 9/2, Chu Văn An, Duy Xuyên, **Quảng Nam**.

BÌNH PHƯƠNG

DỰNG ĐOẠN THẲNG

Cho trước một đoạn thẳng độ dài a(cm). Hãy dựng đoạn thẳng có độ dài $a.6^{1/8}$ (cm)

PHẠM HÙNG

SỬA LẠI

Trong số 10 (256), trang bìa 4, cột trái

	in là	*sửa lại là*
dòng 13	28	31
" 15	28	31
" 16	10×28=280g	10×31=310g
" 17	$K = P - 280$	$K = P$-310

Thành thật xin lỗi độc giả

BP

ISSN : 0866-0853
Chỉ số : 12884
Mã số : 8BT59M8

Chế bản tại Tòa soạn.
In tại Nhà máy in Diên Hồng, 57 Giảng Võ
In xong và nộp lưu chiểu tháng 11 năm 1998

Giá : 3.000đ
Ba nghìn đồng