

T&A TOÁN HỌC Tuổi trẻ

hồ thư

NĂM THỨ 35 - RA HÀNG THÁNG
Số 10 (256)
1998

**Kì thi Olympic Toán
khu vực Đông Nam Á
lần thứ nhất**



**LỊCH SỬ ĐỊNH LÍ
PYTHAGORE**



TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

MATHEMATICS AND YOUTH

MỤC LỤC

- **Dành cho các bạn Trung học cơ sở - For Lower Secondary School Level Friends**
 - Vũ Đức Cảnh - Tìm GTLN và GTNN của đa thức bậc hai 1
 - Đào Xuân Sinh - Tìm dấu hiệu chia hết cho một số 2
- **Học sinh tìm tòi - Young Friend's Search in Maths**
 - Hoàng Hà - Lời giải đơn giản để tính tổng... 3
- **Tiếng Anh qua các bài toán và lời giải - English Throught Problems and Solutions - Ngô Việt Trung.** 4
- **Giải bài kì trước - Solutions of Problems in Previous Issue**
 - Các bài của số 252 5
- **Đề ra kì này - Problems in This Issue**
 - T1/256, ..., T10/256, L1/256, L2/256 16
- **Ngô Việt Trung - Lịch sử định lý Pitago** 18
- **Diễn đàn dạy và học toán - Maths Teaching and Learning Tribune**
 - Nguyễn Công Sứ - Giáo dục tư duy thống kê và vấn đề giảng dạy xác suất thống kê cho HSPT 20
- **Dành cho các bạn chuẩn bị thi vào đại học - For College and University Entrance Exam Preparers**
 - Phạm Quốc Phong - Phương pháp tìm giá trị nhỏ nhất của tập hợp các giá trị lớn nhất của hàm số 21
- **Nguyễn Hữu Việt Hưng - Kỳ thi Olympic toán khu vực Đông Nam Á lần thứ nhất SEAMO-98** 23
- **Câu lạc bộ - Club**
 - L.T.N - Từ điển vui 3
 - Ngọc Mai - Đâu cái diên ? 3
 - KIHIVI - Sai lầm ở đâu ? 3
- **Giải trí toán học - Fun with Mathematics**
 - Bình Phương - Giải đáp bài Chỉ một lần cân 4
 - Ngân Hồ - Viết số trong hình vuông 4
- **Bạn có biết ? - Do you know ?**
 - 10 số nguyên tố có 93 chữ số lập thành cấp số cộng
- **Ảnh bìa 1 :**
 - * Đào Thị Thu Hà - học sinh chuyên toán ĐHKHTN-ĐHQG Hà Nội, huy chương đồng IMO 39.
 - * Đoàn Việt Nam tại SEAMO-98 : Ngô Văn Sáng, Đặng Anh Tuấn, Thầy Nguyễn Hữu Việt Hưng, Nguyễn Anh Hoa, Trịnh Kim Chi.

Tổng biên tập :
NGUYỄN CẢNH TOÀN

Phó tổng biên tập:
NGÔ ĐẠT TỨ
HOÀNG CHÚNG

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

Nguyễn Cảnh Toàn,
Hoàng Chúng, Ngô Đạt
Tứ, Lê Khắc Bảo, Nguyễn
Huy Đoan, Nguyễn Việt
Hải, Đinh Quang Hảo,
Nguyễn Xuân Huy, Phan
Huy Khải, Vũ Thanh
Khiết, Lê Hải Khôi,
Nguyễn Văn Mậu, Hoàng
Lê Minh, Nguyễn Khắc
Minh, Trần Văn Nhung,
Nguyễn Đăng Phát, Phan
Thanh Quang, Tạ Hồng
Quảng, Đặng Hùng Thắng,
Vũ Dương Thụy, Trần
Thành Trai, Lê Bá Khánh
Trình, Ngô Việt Trung,
Đặng Quan Viễn.

Trụ sở tòa soạn :

25 Hàn Thuyên, Hà Nội

ĐT: 8.262477 - 9714359

Đại diện tại miền Nam :

TRẦN CHI HIẾU,

ĐT: 8.323044

231 Nguyễn Văn Cừ, Q.5, TP Hồ Chí Minh

Thực hiện : NGUYỄN VIỆT HẢI

LÊ THỐNG NHẤT

VŨ KIM THUY

Trị sự : VŨ ANH THU

Chế bản : NGUYỄN THỊ OANH



Dành cho các bạn

TRUNG HỌC CƠ SỞ

TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA ĐA THỨC BẬC HAI

VŨ ĐỨC CẢNH
(Hà Nội)

Các bạn thân mến ! Trong chương trình toán lớp 8, lớp 9, các bạn có thể gặp bài toán tìm giá trị lớn nhất (GTLN), giá trị nhỏ nhất (GTNN) của đa thức bậc hai, chẳng hạn như :

"Tìm GTNN của biểu thức $M = x^2 + 2y^2 - 2xy + 2x - 10y$ ". Có thể giải bài toán này như sau :

Ta có :

$$\begin{aligned} M &= (x^2 - 2xy + y^2) + (2x - 2y) + 1 + (y^2 - 8y + 16) - 17 \\ &= [(x-y)^2 + 2(x-y) + 1] + (y-4)^2 - 17 \\ &= (x-y+1)^2 + (y-4)^2 - 17 \geq -17 \end{aligned}$$

Khi $x = 3$ và $y = 4$ thì $M = -17$.

Vậy GTNN của M bằng -17 .

Tuy nhiên, lời giải trên có vẻ thiếu tự nhiên, thiếu một đường lối chung. Đối với đa thức hai biến, để đưa các biến vào các bình phương của tổng, có thể dựa vào hằng đẳng thức : $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$, nhưng khi số biến càng nhiều thì việc này càng khó khăn.

Các ví dụ dưới đây sẽ nêu ra một phương pháp tìm GTLN, GTNN của đa thức bậc hai bằng cách "đưa dần" các biến vào trong các bình phương của tổng theo dạng của hằng đẳng thức : $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$.

Ví dụ 1. Tìm GTNN của biểu thức

$$A = (x+1)^2 + (x-3)^2$$

Giải. Ta có :

$$\begin{aligned} A &= (x^2 + 2x + 1) + (x^2 - 6x + 9) = 2x^2 - 4x + 10 \\ &= 2(x^2 - 2x + 1) + 8 = 2(x-1)^2 + 6 \geq 8. \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Vậy $\min A = 8$.

Ví dụ 2. Cho x, y là hai số thay đổi nhưng luôn thỏa mãn $x+y = 1$. Tìm GTNN của biểu thức $B = x^3 + y^3 + x^2 + y^2$.

Giải. Do $(x+y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x+y)$ và $(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$ nên ta có :

$$\begin{aligned} B &= (x+y)^3 - 3xy(x+y) + (x+y)^2 - 2xy = \\ &= 2 - 5xy = 2 - 5x(1-x) = 5x^2 - 5x + 2 \\ &= 5\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) + \frac{3}{4} = 5\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$\text{Khi } x = y = \frac{1}{2} \text{ thì } B = \frac{3}{4}.$$

$$\text{Vậy } \min B = \frac{3}{4}.$$

Ví dụ 3. Biết rằng $x+y+z = 3$. Tìm GTLN của biểu thức

$$C = xy + yz + zx.$$

Giải. Ta có :

$$\begin{aligned} C &= xy + z(x+y) = xy + [3 - (x+y)](x+y) = \\ &= xy + 3(x+y) - (x+y)^2 = \\ &= -x^2 - y^2 - xy + 3x + 3y = \\ &= -x^2 - (y-3)x + 3y - y^2 = \\ &= -\left[x^2 + x(y-3) + \left(\frac{y-3}{2}\right)^2\right] + 3y - y^2 + \left(\frac{y-3}{2}\right)^2 \\ &= -\left(x + \frac{y-3}{2}\right)^2 + \frac{-3y^2 + 6y + 9}{4} \\ &= -\left(x + \frac{y-3}{2}\right)^2 + \frac{-3(y^2 - 2y + 1) + 12}{4} \\ &= -\left(x + \frac{y-3}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}(y-1)^2 + 3 \leq 3 \end{aligned}$$

Khi $x = y = z = 1$ thì $C = 3$.

Vậy $\max C$ bằng 3.

Ví dụ 4. Tìm GTNN của biểu thức

$$D = x^2 + 6y^2 + 14z^2 - 8yz + 6zx - 4xy$$

Giải. Ta có :

$$\begin{aligned} D &= x^2 + 2(3z-2y)x + 6y^2 + 14z^2 - 8yz \\ &= [x^2 + 2(3z-2y)x + (3z-2y)^2] + 6y^2 + \\ &\quad + 14z^2 - 8yz - (3z-2y)^2 \\ &= (x+3z-2y)^2 + 2y^2 + 4yz + 5z^2 \\ &= (x-2y+3z)^2 + 2(y^2 + 2yz + z^2) + 3z^2 \end{aligned}$$

$$= (z-2y+3z)^2 + 2(y^2+z)^2 + 3z^2 \geq 0.$$

Khi $x = y = z = 0$ thì $D = 0$.

Vậy $\min D = 0$.

Ví dụ 5. Tìm GTNN của biểu thức

$$E = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2xy + 2xz - 2y - 8z + 1998$$

Giải. Ta có :

$$\begin{aligned} E &= x^2 - 2x(y-z+1) + 2y^2 + 3z^2 - 2y - 8z + 1998 = \\ &= [x^2 - 2x(y-z+1) + (y-z+1)^2] + 2y^2 + 3z^2 - \\ &\quad - 2y - 8z + 1998 - (y-z+1)^2 = \\ &= [x - (y-z+1)]^2 + y^2 + 2z^2 + 2yz - 4y - \\ &\quad - 6z + 1997 = \\ &= (x-y+z-1)^2 + y^2 + 2y(z-2) + 2z^2 - 6z + \\ &\quad + 1997 = \\ &= (x-y+z-1)^2 + [y^2 + 2y(z-2) + (z-2)^2] + 2z^2 - \\ &\quad - 6z + 1997 - (z-2)^2 = \\ &= (x-y+z-1)^2 + (y+z-2)^2 + z^2 - 2z + 1993 = \\ &= (x-y+z-1)^2 + (y+z-2)^2 + (z^2 - 2z + 1) + 1992 = \\ &= (x-y+z-1)^2 + (y+z-2)^2 + (z-1)^2 + 1992 \geq 1992 \end{aligned}$$

Khi $x = y = z = 1$ thì $E = 1992$.

Vậy $\min E = 1992$

Cuối cùng, mời các bạn luyện tập với một số bài tập sau :

Bài tập 1: Cho $x + 2y = 3$. Tìm GTNN của biểu thức : $M = x^2 + 2y^2$

Bài tập 2: Cho a, b, c, d là 4 số thực thỏa mãn $a + b = c + d$. Tìm GTNN của biểu thức $N = (x+a)(x+b)(x+c)(c+d)$.

Bài tập 3: Cho $x+y+z = 3$. Tìm GTNN của biểu thức

$$P = x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx.$$

Bài tập 4: Biết rằng $x \neq 0$. Tìm GTLN của biểu thức

$$Q = \frac{x^2 - 2x - 1}{x^2}$$

Bài tập 5: Tìm GTNN của biểu thức

$$R = x^2 + y^2 + xy + x + y.$$

TÌM DẤU HIỆU CHIA HẾT CHO MỘT SỐ

ĐÀO XUÂN SINH
(Hà Nội)

Khi học toán lớp 6 các bạn đã biết các dấu hiệu chia hết cho 2; 3; 5; 9, công nhận các dấu hiệu này thông qua các ví dụ cụ thể. Ở đây tôi muốn nêu lại dấu hiệu chia hết cho một số bất kì của Patscan. Từ dấu hiệu này các bạn có thể tự tìm và chứng minh được các dấu hiệu chia hết cho 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 11.

Để cho tiện ta xét số có 4 chữ số $\overline{abcd}$. Dấu hiệu tổng quát để số này chia hết cho số tự nhiên n như sau :

Nếu $d + cr_1 + br_2 + ar_3 : n$ thì $\overline{abcd} : n$ (*)

Trong đó r_1 là số dư của phép chia 10 cho n ; r_2 là số dư của phép chia $10r_1$ cho n ; r_3 là số dư của phép chia $10r_2$ cho n .

Chứng minh:

Thật vậy

$$10 = n.q_1 + r_1 \Rightarrow r_1 = 10 - n.q_1$$

$$10r_1 = n.q_2 + r_2 \Rightarrow r_2 = 10r_1 - n.q_2$$

$$10r_2 = n.q_3 + r_3 \Rightarrow r_3 = 10r_2 - n.q_3$$

Khi đó

$$d + cr_1 + br_2 + ar_3 =$$

$$= d + c(10 - n.q_1) + b(10r_1 - n.q_2) + a(10r_2 - n.q_3)$$

$$\begin{aligned} &= d + 10c - cnq_1 + 10b(10 - nq_1) - bnq_2 + \\ &\quad + 10a(10r_1 - nq_2) - anq_3 \\ &= d + 10c + 100b + 100a(10 - nq_1) - \\ &\quad - (cnq_1 + bnq_2 + anq_3 + 10nq_1 + 10anq_2) \\ &= d + 10c + 100b + 1000a - n(cnq_1 + bq_2 + \\ &\quad + aq_3 + 10bq_1 + 10aq_2 + 100aq_1) \\ &= \overline{abcd} - nk \quad (k \text{ là số nguyên}) \end{aligned}$$

Đây là điều phải chứng minh.

Xét dấu hiệu chia hết của số có 6 chữ số $\overline{abcdef}$.

1) Dấu hiệu chia hết cho 2.

$$10 : 2 \text{ dư } 0 \quad (r_1)$$

$$10.0 : 2 \text{ dư } 0 \quad (r_2)$$

$$10.0 : 2 \text{ dư } 0 \quad (r_3)$$

$$10.0 : 2 \text{ dư } 0 \quad (r_4)$$

$$10.0 : 2 \text{ dư } 0 \quad (r_5)$$

Từ (*) ta có $f + e.0 + d.0 + c.0 + b.0 + a.0 : 2 \Leftrightarrow f : 2$

• $\overline{abcdef} : 2 \Leftrightarrow f$ bằng 0; 2; 4; 6; 8

2) Tương tự ta có dấu hiệu chia hết cho 3.

• $\overline{abcdef} : 3 \Leftrightarrow f + e + d + c + b + a : 3$.

3) Dấu hiệu chia hết cho 4.

• $\overline{abcdef} : 4 \Leftrightarrow f + 2e : 4$ hoặc $\overline{ef} : 4$.

(Xem tiếp trang 4)

BẠN ĐỌC TÌM TÒI

Bài toán : Tính tổng :

$$A = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + n(n+1)$$

Với bài toán này, các bạn học sinh THCS cũng như ở một số tài liệu thường đưa cách giải sau :

Ta có :

$$\begin{aligned} A &= 1(1+1) + 2(2+1) + 3(3+1) + \dots + n(n+1) \\ &= 1^2 + 1 + 2^2 + 2 + 3^2 + 3 + \dots + n^2 + n \\ &= (1 + 2 + 3 + \dots + n) + (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) \end{aligned}$$

Ta biết rằng :

$$S_1 = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} S_2 &= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad (2) \end{aligned}$$

Do đó :

$$\begin{aligned} A &= S_1 + S_2 = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1+3)}{6} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \end{aligned}$$

Ở cách giải trên đã phải sử dụng đến 2 công thức (1) và (2) mà chưa được chứng minh qua các tài liệu sách giáo khoa phổ thông. Chính vì vậy mà việc chứng minh 2 công thức (1) và (2) tạo cho lời giải trên khá dài.

Sau đây là lời giải khá đơn giản mà không cần sử dụng đến công thức (1) và (2) :

Ta có :

$$\begin{aligned} A &= 1.2 + 2.3 + \dots + n(n+1) \\ \Rightarrow A.3 &= 1.2.3 + 2.3.3 + \dots + n(n+1).3 \\ &= 1.2(3-0) + 2.3(4-1) + n(n+1)[(n+2) - (n-1)] \\ &= 1.2.3 - 0.1.2 + 2.3.4 - 1.2.3 + \dots + \\ &\quad + n(n+1)(n+2) - (n-1)n(n+1) = n(n+1)(n+2) \\ \Rightarrow A &= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \end{aligned}$$

HOÀNG HÀ

(9A THCS Vĩnh Yên - Vĩnh Phúc)

LỜI TÒA SOẠN

Để tìm công thức của tổng các số hạng một dãy số sắp xếp theo một quy luật tương đối đơn giản, bạn Hoàng Hà đã sử dụng *phương pháp thay*

LỜI GIẢI ĐƠN GIẢN ĐỂ TÍNH TỔNG CÁC SỐ HẠNG CỦA MỘT DÂY SỐ

thế mỗi số hạng của tổng bằng hiệu 2 số hạng của một dãy số khác (nếu mỗi số hạng là một tích thì thay thế một thừa số bằng hiệu 2 số rồi biến đổi số hạng chứa tích thành hiệu 2 số hạng của dãy số khác). Phương pháp đó có dạng tổng quát như sau :

Cho dãy số : $u_1 = f(1), u_2 = f(2), \dots, u_k = f(k), \dots (k \in \mathbb{N})$. Cần tính $S_n = f(1) + f(2) + \dots + f(n)$.
Nếu có thể biến đổi $f(k)$ thành hiệu của 2 số hạng liên tiếp của một dãy số mới, nghĩa là $f(k) = g(k+1) - g(k)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) thì có thể tìm được công thức tính tổng của dãy $f(k)$ như sau :

$$\begin{aligned} S_n &= f(1) + f(2) + \dots + f(n-1) + f(n) \\ &= (g(2) - g(1)) + (g(3) - g(2)) + \dots + (g(n) - g(n-1)) + \\ &\quad + (g(n+1) - g(n)) = g(n+1) - g(1). \end{aligned}$$

Có thể áp dụng phương pháp này để tính một số tổng dưới đây :

$$\begin{aligned} \text{Ví dụ 1 : } S_1 &= 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n \Rightarrow \\ 2S_1 &= 1.2 + 2.2 + 3.2 + \dots + (n-1).2 + n.2 \\ &= 1.(2-0) + 2.(3-1) + 3.(4-2) + \dots + (n-1).(n-(n-2)) + \\ &\quad + n((n+1) - (n-1)) = n(n+1) \end{aligned}$$

$$\text{suy ra } S_1 = \frac{n(n+1)}{2}.$$

$$\begin{aligned} \text{Ví dụ 2 : } S_2 &= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2 \\ &= 1(2-1) + 2(3-1) + 3(4-1) + \dots + (n-1)(n-1) + \\ &\quad + n((n+1) - 1) \\ &= 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + (n-1)n + n(n+1) - \\ &\quad - (1+2+3+\dots+n) = \\ &= A - S_1 = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} - \frac{n(n+1)}{2} = \\ &= n(n+1) \left(\frac{n+2}{3} - \frac{1}{2} \right) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \end{aligned}$$

Mặt khác nhờ mối liên hệ giữa hai dãy số $f(k) = g(k+1) - g(k)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) có thể biểu diễn công thức $g(n)$ bằng một tổng các số hạng của dãy số $f(k)$ như sau :

$$\begin{aligned} T &= g(1) + g(2) + g(3) + \dots + g(n) \\ T &= g(1) + g(2) + \dots + g(n-1) + g(n) \end{aligned}$$

Trừ từng vế hai đẳng thức trên theo từng cột được

$$0 = g(1) + (g(2) - g(1)) + (g(3) - g(2)) + \dots + (g(n) - g(n-1)) - g(n)$$

$$\text{hay } S_{n-1} = f(1) + f(2) + \dots + f(n-1) = g(n) - g(1).$$

Chú ý rằng ở đây không cần biết công thức của tổng T mà điều mới là biết được công thức của tổng S_n .

Ví dụ 3:

$$T = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + n(n+1)$$

$$T = 1.2 + 2.3 + \dots + (n-1)n + n(n+1)$$

Trừ từng vế hai đẳng thức trên theo từng cột được

$$0 = 1.2 + 2.2 + 3.2 + \dots + n.2 - n(n+1)$$

$$\Rightarrow n(n+1) = 2(1 + 2 + 3 + \dots + n)$$

$$\text{hay } S_1 = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Ví dụ 4 :

$$S_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$$

$$S_2 = 1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2$$

Trừ từng vế hai đẳng thức trên theo từng cột được

$$0 = 1 + (2^2 - 1^2) + (3^2 - 2^2) + \dots + (n^2 - (n-1)^2) - n^2$$

$$\Rightarrow n^2 = 1 + (2-1)(2+1) + (3-2)(3+2) + \dots + 1(n+n+1)$$

$$\text{hay } 1 + 3 + 5 + \dots + (2n+1) = n^2.$$

Bạn đọc hãy thử áp dụng hai phương pháp trên để tìm ra các công thức của tổng các số hạng của dãy số khác.

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN VÀ LỜI GIẢI

BÀI SỐ 10

Problem. Take a chess board of n rows and n columns and put a number x_{ij} on the square of row i and column j for all $i, j = 1, \dots, n$. Suppose that $x_{ij} + x_{jk} + x_{ki} = 0$ for any i, j, k . Prove that there exist numbers $t_1, \dots, t_n$ such that $x_{ij} = t_i - t_j$.

Solution. Putting $i = j = k$ in the equation $x_{ij} + x_{jk} + x_{ki} = 0$ we get $3x_{ii} = 0$. Hence $x_{ii} = 0$ for $i = 1, \dots, n$. For $i = j \neq k$ we get $x_{ij} + x_{ik} + x_{ki} = 0$. Hence $x_{ik} = -x_{ki}$. Summing up all the equations $x_{ij} + x_{jk} + x_{ki} = 0$ for fixed i, j and $k = 1, \dots, n$ we obtain

$$\begin{aligned} nx_{ij} + (x_{j1} + \dots + x_{jn}) + (x_{1i} + \dots + x_{ni}) &= \\ = nx_{ij} + (x_{j1} + \dots + x_{jn}) - (x_{1i} + \dots + x_{ni}) &= 0. \end{aligned}$$

$$\text{Now, if we put } t_i = \frac{1}{n} (x_{i1} + \dots + x_{in})$$

$$\text{for } i = 1, \dots, n, \text{ then } x_{ij} = t_i - t_j.$$

Từ mới :

take	= lấy (động từ)
row	= hàng
column	= cột
put	= đặt (động từ)
suppose	= giả sử
exist	= tồn tại (động từ)
get	= nhận được (động từ)
sum up	= lấy tổng toàn bộ (động từ)
fixed	= cố định (tính từ)

NGÔ VIỆT TRUNG

TÌM DẤU HIỆU... (tiếp theo trang 2)

4) Dấu hiệu chia hết cho 5.

• $\overline{abcdef} : 5 \Leftrightarrow f$ bằng 0 hoặc 5.

5) Dấu hiệu chia hết cho 6

• $\overline{abcdef} : 6 \Leftrightarrow \overline{def} + 4(c + b + a) : 6$.

6) Dấu hiệu chia hết cho 7

• $\overline{abcdef} : 7 \Leftrightarrow (1f + 3e + 2d) - (1c + 3b + 2a) : 7$.

Chú ý: hệ số tuần hoàn theo chu kỳ 1; 3; 2

7) Dấu hiệu chia hết cho 8.

• $\overline{abcdef} : 8 \Leftrightarrow \overline{def} : 8$

8) Dấu hiệu chia hết cho 9

• $\overline{abcdef} : 9 \Leftrightarrow f + e + d + c + b + a : 9$

9) Dấu hiệu chia hết cho 11

• $\overline{abcdef} : 11 \Leftrightarrow (a + c + e) - (d + b + f) : 11$.



Bài T1/252. Chứng minh rằng trong 12 số nguyên tố phân biệt luôn luôn chọn ra được 6 số, gọi là $a_1, a_2, \dots, a_6$ sao cho

$$(a_1 - a_2)(a_3 - a_4)(a_5 + a_6) : 1800$$

Lời giải. (của bạn Nguyễn Tuấn Dương, 8A Nguyễn Trãi, Hải Dương) Trong 12 số nguyên tố đã cho có ít nhất 9 số lớn hơn 5. Ta hãy kí hiệu chúng là $a_1, a_2, \dots, a_9$.

i) 9 số trên khi chia cho 3 có dư 1 hoặc 2. Vậy phải tồn tại ít nhất 5 số đồng dư với nhau (mod 3). 5 số này sẽ có ít nhất hai số, kí hiệu là a_1, a_2 mà $a_1 \equiv a_2 \pmod{5}$ (vì nhiều nhất chỉ có 4 số dư là 1, 2, 3, 4). Vậy $a_1 - a_2 : 15 = 3 \times 5$. Mà $a_1 - a_2 : 2$ nên $a_1 - a_2 : 30$.

ii) Xét 7 số còn lại. Tồn tại 4 số đồng dư với nhau (mod 3). Đem 4 số này chia cho 5. Nếu có hai số, chẳng hạn a_3, a_4 sao cho $a_3 \equiv a_4 \pmod{5}$ thì tương tự như i) ta có $a_3 - a_4 : 30$. Lấy hai số a_5, a_6 bất kì. Khi đó $a_5 + a_6 : 2$. Vậy $(a_1 - a_2)(a_3 - a_4)(a_5 + a_6) : (30)(30)(2) = 1800$.

Nếu 4 số này khi chia cho 5 có các số dư khác nhau là $\{1, 2, 3, 4\}$. Giả sử $a_5 \equiv 1 \pmod{5}$, $a_6 \equiv 4 \pmod{5}$. Khi đó $a_5 + a_6 : 5$. Với hai số còn lại a_3 và a_4 thì $a_3 - a_4 : 3$. Vì a_5, a_6, a_3, a_4 lẻ $\rightarrow a_5 + a_6 : 10, a_3 - a_4 : 6$. Do đó

$$(a_1 - a_2)(a_3 - a_4)(a_5 + a_6) : 30.10.6 = 1800$$

Nhận xét. Lời giải của bạn Dương rất tốt, ngắn gọn chính xác. Ngoài ra cũng có nhiều bạn giải đúng nhưng lập luận còn đôi chỗ chưa rõ ràng hoặc lập luận dài dòng. Các bạn sau đây có lời giải đúng : Đỗ Hải Ninh, 7T3, Giảng Võ, Hà Nội; Đinh Thị Thêu, 8T, Lương Thế Vinh, Thị xã Thái Bình; Lê Vĩnh Thịnh, Bùi Ngọc Hân, 8C, Thanh Hóa; Lê Minh Châu, 9A, Nguyễn Trường Tộ, Trần Quang Ninh, 8A Quốc học Quy Nhơn, Trần Quốc Việt, 9A, Giao Thủy, Nam Định; Võ Nhật Quý, 9A, Đắc Lắc; Hoàng Hồng Nam, 8T Nha

Trang, Khánh Hòa; Phạm Đức Hiệp, 8T, Chu Văn An, Hải Phòng; Đào Duy Hào, 9B, Việt Trì, Phú Thọ; Nguyễn Hoàng Thạch, 8C, Ngọc Lâm, Gia Lâm, Hà Nội; Nguyễn Thị Hạnh, 9A Trần Hưng Đạo, Hải Dương; Nguyễn Tiến Quang, 9, THCS Lê Quý Đôn, Lào Cai; Trần Trung Duy, 8¹⁴, Nha Trang, Khánh Hòa; Nguyễn Khánh, 9T, Lê Hồng Phong, Yên Bái; Trương Văn Hiệu, 8, Lương Thế Vinh, Duy Xuyên, Quảng Nam.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T2/252. Giải phương trình

$$2(x^2 - 3x + 2) = 3\sqrt{x^3 + 8}$$

Lời giải. của Đặng Phương Thảo, 8A₂, Lương Thế Vinh, Nam Định.

Điều kiện để phương trình có nghĩa :

$$x^2 - 3x + 2 \geq 0, x^3 + 8 \geq 0 \text{ hay } -2 \leq x \leq 1 \text{ và } x \geq 2.$$

$$\text{Đặt } u = \sqrt{x^2 - 2x + 4}, v = \sqrt{x + 2} \quad (u > 0; v \geq 0)$$

$$2(x^2 - 3x + 2) = 3\sqrt{x^3 + 8}$$

$$\Leftrightarrow 2(u^2 - v^2) = 3uv$$

$$\Leftrightarrow (u - 2v)(2u + v) = 0$$

$$\Leftrightarrow u - 2v = 0 \text{ (vì } 2u + v > 0)$$

$$\text{Vậy có } \sqrt{x^2 - 2x + 4} - 2\sqrt{x + 2} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 4 = 4x + 8$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x - 4 = 0$$

Giải phương trình này ta được :

$$x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{13}$$

Ta thấy $x_1 = 3 + \sqrt{13} > 2$ và $x_2 = 3 - \sqrt{13} ; -2 < x_2 < 0$. Vậy phương trình có hai nghiệm là $x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{13}$.

Nhận xét. 1) Rất nhiều bạn quên điều kiện để phương trình có nghĩa.

2) Các bạn có lời giải tốt : Nguyễn Văn Thắng, 9A₁, Độc Lập; Mai Nguyên Dũng, 9A₁, Chu Văn An, Thái Nguyên. Nguyễn Văn Thích, 8A, NK Yên Phong; Nguyễn Thị Ngọc, 8D, Đình Tổ; Bùi Thị Lê Hiền, 9², Song Hồ; Nguyễn Đăng Quý, 9A, THCS Thuận Thành; Bắc Ninh. Nguyễn Tiến Quang, Nguyễn Đức Cường, 9, Lê Quý Đôn, Lào Cai. Nguyễn Việt Hằng, 9C, DTNT Yên Bình; Trần Thu Huế, 8K Lê Hồng Phong, TX Yên Bái, Yên Bái. Nguyễn Đình Hòa, 8B, Việt Trì; Nguyễn Hùng Cường, 9A₁, Phong Châu, Phú Thọ. Vũ Nhật Huy, 7A; Hoàng Xuân Quang, Vĩnh Tường; Trần Trung Hiếu, 9B, Lập Thạch; Phạm Văn

Hùng, 9B, Yên Lạc, **Vĩnh Phúc**. Nguyễn Văn Minh, 8B, Nguyễn Thượng Hiền; Lê Quyết Thắng, 8B, chuyên Ứng Hòa, **Hà Tây**. Lê Lương Hùng, 9T, Nguyễn Hữu Tiến, Duy Tiên, **Hà Nam**. Phan Vũ Toàn, 9A, Lê Quý Đôn, Cầu Giấy; Phạm Bảo Trung, 9A₁, Nguyễn Trường Tộ; Lê Bá Ngọc, 8I₁, Marie Curie, **Hà Nội**. Lê Huyền, 9A; Phạm Văn Năm, 8A, TT Đông Triều, **Quảng Ninh**. Vũ Ngọc Minh, Phạm Đức Hiệp, 8T, Chu Văn An; Nguyễn Thủy Dung, 8B, NK Trần Phú; Lê Văn Thanh, 9A₁, Ngô Quyền; Nguyễn Hoàng Long, 9A₁, Hồng Bàng, **Hải Phòng**. Nguyễn Văn Khiêm, 9A, Phan Bội Châu, Tứ Kỳ; Vũ Bá Toàn, 9A₁, Nguyễn Huệ, Cẩm Giàng; Nguyễn Xuân Cường, 9B, Chu Văn An, Thanh Hà; Trần Thế Hiền, 9A, Nguyễn Trãi, Nam Sách; Bùi Đức Quyết, 9A, Võ Thị Sáu; Nguyễn Tuấn Dương, Lê Hải Yến, 8A; Nguyễn Phương Thảo, Đào Mạnh Tiến, Bùi Duy Dương, 9A, Nguyễn Trãi, TP Hải Dương, **Hải Dương**. Đỗ Trọng Linh, 9A, Phạm Huy Thông, Ân Thi, **Hung Yên**. Đinh Thị Thêu, 8T, Lương thế Vinh, TX Thái Bình, **Thái Bình**. Lê Minh Bằng, 8B, Nhữ Bá Sỹ; Lưu Đức Thi, 8A, TĐ CLC Hoàng Hóa; Vũ Đức Nghĩa, Dương Đình Thuận, 9B, Đông Cương, TP Thanh Hóa, **Thanh Hóa**. Nguyễn Thị Lua, 9, Quán Hành, Nghi Lộc; Đinh Thanh Thường, 9A, Nguyễn Trãi, Tân Kỳ; Nguyễn Thị Hương Giang, 9A, Quang Trung; Vũ Ngọc Dũng, 9B, Đặng Thai Mai, TP Vinh, **Nghệ An**. Phan Thị Nga, 7B, Tiên Điền, Nghi Xuân; Nguyễn Khắc Trung, Lê Thanh Hùng, 8A, Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ, **Hà Tĩnh**. Hà Văn Quý, 9₁, Vĩnh Ninh, Quảng Ninh, **Quảng Bình**. Hoàng Minh Phụng, 9A, Cam Hiếu, Cam Lộ; Lê Anh Tuấn, 9⁵, Nguyễn Trãi, Đông Hà, **Quảng Trị**. Nguyễn Trung Hòa; 9I, Nguyễn Chí Diểu, **Thừa Thiên - Huế**. Trần Tất Đạt, 8/2, Nguyễn Khuyến, **Đà Nẵng**. Đặng Đình Thuận, 9B, Hành Phước, Nghĩa Hành; Nguyễn Tiến Khai, 8J, Trần Hưng Đạo; Phạm Tuấn Anh, 9A, chuyên Lê Khiết, **Quảng Ngãi**. Ngô Lâm Xuân Châu, TH Bùi Thị Xuân, Quy Nhơn, **Bình Định**. Trần Thị Dương An, Nguyễn Khánh Nam, Hoàng Hồng Nam, Hà Nguyên Vũ, 8¹⁴, Thái Nguyên, Nha Trang, **Khánh Hòa**. Đào Duy Bình, 7A, Dương Minh Châu, **Tây Ninh**. Trần Minh Đức, 9⁶, Tam Phước, Long Thành, **Đồng Nai**. Tô Vũ Khánh. Vinh, 9⁷, Hồng Bàng, **TP. Hồ Chí Minh**. Nguyễn Anh Cường, 9₁, Nguyễn An Ninh, TP Vũng Tàu, **Bà Rịa - Vũng Tàu**.

TỔ NGUYÊN

Bài T3/252. Xét các số $x, y, z > 1$ thỏa mãn điều kiện : $x + y + z = xyz$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$P = \frac{y-2}{x^2} + \frac{z-2}{y^2} + \frac{x-2}{z^2}.$$

Lời giải. (của bạn Nguyễn Đức Nhật, 8A₂, THCS Nguyễn Trường Tộ, **Hà Nội**)

Từ giả thiết ta có

$$\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} = 1$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } P &= \frac{(x-1)+(y-1)}{x^2} + \frac{(y-1)+(z-1)}{y^2} + \\ &+ \frac{(z-1)+(x-1)}{z^2} - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \\ &= (x-1) \left[\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \right] + (y-1) \left[\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \right] + \\ &+ (z-1) \left[\frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} \right] - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \\ &\geq \frac{2(x-1)}{xz} + \frac{2(y-1)}{xy} + \frac{2(z-1)}{yz} - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \\ &= \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - 2 \quad (1) \end{aligned}$$

Mặt khác :

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right)^2 \geq 3 \left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} \right) = 3$$

Từ (1), (2) suy ra : $P \geq \sqrt{3} - 2$.

Đẳng thức xảy ra khi $x = y = \sqrt{3}$, nên P nhỏ nhất là $\sqrt{3} - 2$.

Nhận xét. 1) Bạn Nhật còn đưa ra bài toán tổng quát và giải đúng bài đó.

2) Bạn Lê Minh Đức, 9A, THCS Lê Quý Đôn, **Hải Dương** nhận xét $(y-1) \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right)^2 \geq 0$ để có $\frac{y}{x^2} + \frac{1}{y} - \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} + \frac{2}{xy} \geq 0$ và thêm hai bất đẳng thức tương tự nữa, đã nhận được :

$$P \geq \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) - 2 \left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} \right)$$

Từ đó bạn Đức cũng có kết quả bài toán.

3) Một số bạn nhận xét là x, y, z bình đẳng nên giả sử $x \geq y \geq z > 1$. Thực ra biểu thức P rất phụ thuộc vào thứ tự của x, y, z . Có bạn nhận xét P nhỏ nhất khi và chỉ khi từng số hạng $\frac{y-2}{x^2}, \frac{z-2}{y^2}, \frac{x-2}{z^2}$ nhỏ nhất và dẫn đến

kết quả sai. Có bạn chứng minh $P \geq Q$ với Q là biểu thức chứa x, y, z rồi kết luận: P nhỏ nhất khi và chỉ khi đẳng thức xảy ra (?)

4) Các bạn có lời giải tốt: Vũ Đức Nghĩa, THCS Đông Cường, TP Thanh Hóa; Ngô Trung Hiếu, 9₁, Trường Nguyễn Du, Q1, TP Hồ Chí Minh.

LÊ THỐNG NHẤT

Bài T4/252. Cho tam giác ABC với phân giác góc trong AD . Lấy điểm E và F nằm giữa A, D sao cho $\angle ABE = \angle CBF$. Chứng minh rằng $\angle ACE = \angle BCF$.

Lời giải. • Nếu E nằm giữa A và F .

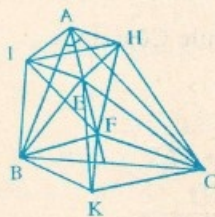
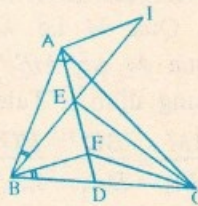
Cách 1: Kéo dài BE gặp đường tròn ngoại tiếp ΔAEC tại I .

Ta có $\angle EIC = \angle EAC = \angle EAB$ nên $\Delta ABE \sim \Delta IBC$.

Suy ra $\frac{BF}{BC} = \frac{BA}{BI}$ hay $\frac{BF}{BA} = \frac{BC}{BI}$. Lại có $\angle ABE = \angle CBF$.

Nên $\Delta ABI \sim \Delta FBC$.

Vậy $\angle BCF = \angle ACE$.



Cách 2: Gọi I, H lần lượt là điểm đối xứng của E qua AB và AC , K là đối xứng của F qua BC .

Ta có ΔAIH cân, AD là phân giác nên AD là trung trực của IH .

Suy ra $FI = FH$ (1)

$\Delta FBI = \Delta KBE$ nên $FI = KE$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $KE = FH$.

Nên $\Delta CEK = \Delta CHF$ (c.c.c)

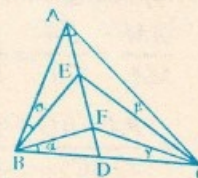
Suy ra $\angle HCF = \angle ECK$.

Từ đó $\angle ACE = \angle BCF$.

Cách 3: Gọi $\angle ABE = \angle CBF = \alpha$, $\angle ACE = \beta$, $\angle BCF = \gamma$.

Ta có:

$$\frac{S_{\Delta ACE}}{S_{\Delta DCF}} = \frac{\frac{1}{2} AC \cdot CE \cdot \sin \beta}{\frac{1}{2} DC \cdot CF \cdot \sin \gamma}$$



$$\text{Mà } \frac{S_{\Delta ACE}}{S_{\Delta DCF}} = \frac{S_{\Delta ABE}}{S_{\Delta DBF}} = \frac{\frac{1}{2} AB \cdot BE \cdot \sin \alpha}{\frac{1}{2} BD \cdot BF \cdot \sin \alpha} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$\frac{AC}{CD} \cdot \frac{CE}{CF} \cdot \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{AB}{BD} \cdot \frac{BE}{BF}$$

Mặt khác $\frac{AC}{CD} = \frac{AB}{BD}$, $\frac{CE}{CF} = \frac{BE}{BF}$ (do E, F thuộc AD)

Nên $\frac{\sin \beta}{\sin \gamma} = 1$ tức $\angle ACE = \angle DCF$.

• Trường hợp F nằm giữa A và E bạn đọc tự chứng minh.

Nhận xét. 1) Các bạn có thể xem lại bài toán T4/237 để từ hai bài toán này dẫn đến bài tổng quát hơn.

2) Bài này còn nhiều cách giải khác.

3) Giải tốt bài này có các bạn:

Lào Cai: Nguyễn Đức Cường, lớp 9, THCS Lê Quý Đôn; **Yên Bái:** Trần Thu Huế, Đào Lâm Quế, Nguyễn Huệ Hương, 8K, THCS Lê Hồng Phong; **Thái Nguyên:** Nguyễn Đức Hạnh, 9A₁, PTCS Chu Văn An; **Vĩnh Phúc:** Kim Đình Thái, 8B, Bùi Việt Hải, Phạm Văn Hùng, 9B, THCS Yên Lạc; **Vũ Nhật Huy:** 7A, THCS Vĩnh Tường, Trần Trung Hiếu, 9B THCS Lập Thạch; **Hải Dương:** Nguyễn Xuân Cường, 9B THCS Chu Văn An, Thanh Hà, Phạm Tiến Toàn, 9A₁, THCS Lê Thanh Nghị, Gia Lộc, Vũ Bá Toán, 9A₁, THCS Nguyễn Huệ, Cẩm Giàng, Nguyễn Phương Thảo, 9A PTTH Nguyễn Trãi; **Bắc Giang:** Đặng Ngọc Dương, 9A THCS TT Hiệp Hòa, Nguyễn Đăng Quý, 9A THCS Thuận Thành, Bùi Thị Lê Hiền, 9² THCS Song Hồ, Thuận Thành; **Hà Tây:** Ngô Ngọc Quang, 8B THCS Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hòa; **Hà Nội:** Tô Thùy Linh, 7H THCS Trung Vương, Trịnh Hoàng Nam, 8C, Hà Nội - Amsterdam. **Hải Phòng:** Phạm Đức Hiệp, 8T Chu Văn An, Vũ Tuấn Khôi, 9A₁, THCS Ngô Quyền, Nguyễn Hoàng Long, 9A₁, THCS Hồng Bàng, Bùi Thanh Dương, 8CT PTTH Trần Phú; **Nam Định:** Nguyễn Công Thanh, 8A₆, Trần Đăng Ninh, Đào Tiến Thành, Trần Đức Hiệu, 9I, Hàn Thuyên, Đinh Văn Năm, xóm 6 Giao An, Giao Thủy, Phùng Văn Thắng, 9A, THCS Giao Thủy, Trần Quang Vinh, 9A₁ THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên; **Thanh Hóa:** Phan Văn Tiến, 9C, Quang Trung, Đỗ Mạnh Cường, 8C Lê Quý

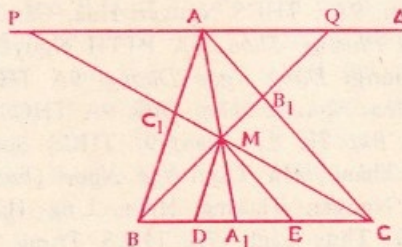
Đôn, Nguyễn Sơn Tùng, Phùng Thanh Cường, 8C năng khiếu TP, Bùi Ngọc Hân, 8C Trần Mai Ninh; **Ngệ An:** Đinh Thanh Thường, 9A THCS Nguyễn Trãi, Tân Kỳ, Vũ Ngọc Dũng, Nguyễn Công Thành, 9B, Đặng Thai Mai; **Hà Tĩnh:** Phan Thị Nga, 7B, Tiên Điền, Nghi Xuân; Nguyễn Đình Dũng, 9, Lê Văn Thiêm; **Thừa Thiên - Huế:** Nguyễn Trung Hòa, 9I Nguyễn Chí Diểu; **Quảng Nam:** Đặng Quang Huy, 8, Lương Thế Vinh, Duy Xuyên; **Quảng Ngãi:** Trần Cao Thanh Ngọc, 8J, Trần Hưng Đạo, Nguyễn Tăng Vũ, 8A Nguyễn Nghiêm, Đức phổ, Võ Trung Thu, 9A, Trương Quang Trọng, Sơn Tịnh, Phạm Tuấn Anh, 9A, Lê Khiết; **Khánh Hòa:** Lưu Đức Trung, 8¹⁴, Thái Nguyên, Nha Trang; **Bạc Liêu:** Lương Thế Nhân, 9A chuyên Bạc Liêu.

VŨ KIM THỦY

Bài T5/252. M là một điểm nằm bên trong tam giác ABC . Đường thẳng AM , BM , CM cắt BC , CA , AB lần lượt tại A_1 , B_1 , C_1 . Tìm vị trí của điểm M sao cho biểu thức $\frac{AM}{MA_1} \cdot \frac{BM}{MB_1} \cdot \frac{CM}{MC_1}$ đạt giá trị bé nhất.

Lời giải. (Xem hình)

Cách 1. Gọi S_1 , S_2 , S_3 lần lượt là diện tích các tam giác ABM , ACM , BCM . Chú ý rằng hai tam giác có cùng đường cao thì tỉ số diện tích của chúng bằng tỉ số hai cạnh đáy.



$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \frac{AM}{MA_1} &= \frac{S_{ABM}}{S_{BMA_1}} = \frac{S_{ACM}}{S_{CMA_1}} \\ &= \frac{S_{ABM} + S_{ACM}}{S_{BMA_1} + S_{CMA_1}} = \frac{S_1 + S_2}{S_3} \end{aligned}$$

Tương tự có:

$$\frac{BM}{MB_1} = \frac{S_1 + S_3}{S_2}, \quad \frac{CM}{MC_1} = \frac{S_2 + S_3}{S_1}$$

Từ đó áp dụng bất đẳng thức Côsi được:

$$\begin{aligned} \frac{AM}{MA_1} \cdot \frac{BM}{MB_1} \cdot \frac{CM}{MC_1} &= \\ &= \frac{S_1 + S_2}{S_3} \cdot \frac{S_1 + S_3}{S_2} \cdot \frac{S_2 + S_3}{S_1} \geq \\ &\geq \frac{2\sqrt{S_1 S_2} \cdot 2\sqrt{S_1 S_3} \cdot 2\sqrt{S_2 S_3}}{S_3 \cdot S_2 \cdot S_1} = 8 \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi $S_1 = S_2 = S_3 = \frac{1}{3} S_{ABC}$

$\Rightarrow \frac{AM}{MA_1} = 2 = \frac{BM}{MB_1}$ lúc đó M là trọng tâm ΔABC .

Cách 2. (của bạn Kim Đình Thái, THCS Yên Lạc, Vĩnh Phúc).

Qua M kẻ $MD \parallel AB$ và cắt BC tại D . Qua M kẻ $ME \parallel AC$ và cắt AC tại E . Áp dụng định lý Talet có:

$$\frac{AM}{MA_1} = \frac{BD}{DA_1} = \frac{EC}{EA_1} = \frac{BD + EC}{DA_1 + EA_1} = \frac{BD + EC}{DE}$$

$$\text{Mặt khác } \frac{BM}{MB_1} = \frac{BE}{EC} = \frac{BD + DE}{EC}$$

$$\frac{CM}{MC_1} = \frac{DC}{BD} = \frac{DE + EC}{BD}$$

Từ đó áp dụng bất đẳng thức Côsi được:

$$\begin{aligned} \frac{AM}{MA_1} \cdot \frac{BM}{MB_1} \cdot \frac{CM}{MC_1} &= \\ &= \frac{BD + EC}{DE} \cdot \frac{BD + DE}{EC} \cdot \frac{DE + EC}{BD} \geq \\ &\geq \frac{2\sqrt{BD \cdot EC} \cdot 2\sqrt{BD \cdot DE} \cdot 2\sqrt{DE \cdot EC}}{DE \cdot EC \cdot BD} = 8 \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi $BD = DE = EC \Rightarrow MC = 2MC_1$ và $MB = 2MB_1$, lúc đó M là trọng tâm ΔABC .

Cách 3. Qua A kẻ đường thẳng $\Delta \parallel BC$. Các tia BM và CM cắt Δ lần lượt tại Q và P . Áp dụng định lý Talet có:

$$\begin{aligned} \frac{AM}{MA_1} &= \frac{PA}{CA_1} = \frac{AQ}{BA_1} = \frac{PA + AQ}{CA_1 + BA_1} \\ &= \frac{PA + AQ}{BC} = \frac{PA}{BC} + \frac{AQ}{BC} = \frac{AC_1}{BC_1} + \frac{AB_1}{CB_1} \end{aligned}$$

Tương tự có:

$$\frac{BM}{MB_1} = \frac{BC_1}{AC_1} + \frac{BA_1}{CA_1}, \quad \frac{CM}{MC_1} = \frac{CA_1}{BA_1} + \frac{CB_1}{AB_1}$$

Từ đó áp dụng bất đẳng thức Côsi được

$$\frac{AM}{MA_1} \cdot \frac{BM}{MB_1} \cdot \frac{CM}{MC_1} \geq 2\sqrt{\frac{AC_1 \cdot AB_1}{BC_1 \cdot CB_1}} \cdot 2\sqrt{\frac{BC_1 \cdot BA_1}{AC_1 \cdot CA_1}} \cdot 2\sqrt{\frac{CA_1 \cdot CB_1}{BA_1 \cdot AB_1}} = 8$$

Dấu bằng xảy ra khi

$$\frac{AC_1}{BC_1} = \frac{AB_1}{CB_1}, \frac{BC_1}{AC_1} = \frac{BA_1}{CA_1}, \frac{CA_1}{BA_1} = \frac{CB_1}{AB_1} \text{ suy ra } \frac{AC_1}{BC_1} = \frac{AB_1}{CB_1} = \frac{BA_1}{CA_1} = \frac{BC_1}{AC_1} \Rightarrow AC_1 = (BC_1 \text{ và } AB_1 = CB_1, BA_1 = CA_1.$$

Nhận xét. 1) Trong 399 bài gửi tới tòa soạn có 380 bài giải tốt. Hầu hết các bạn đều giải theo cách 1. Cần lưu ý rằng khi đề bài đòi hỏi xét tỉ số các đoạn thẳng thì ngoài hướng chuyển về xét tỉ số diện tích các tam giác, nên tìm cách kẻ đường thẳng song song để áp dụng được định lý Talet (cách 2 và cách

3). Ngoài ra còn có thể đặt $\frac{AA_1}{MA_1} = x, \frac{BB_1}{MB_1} = y,$

$$\frac{CC_1}{MC_1} = z \text{ với } \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 \text{ và biến đổi}$$

$$\frac{AM}{MA_1} \cdot \frac{BM}{MB_1} \cdot \frac{CM}{MC_1} = (x-1)(y-1)(z-1) = \dots = x+y+z-1$$

$$z-1 = (x+y+z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) - 1 \geq 9 - 1 = 8.$$

2) Các bạn sau đây đã giải bài này bằng 2 hoặc 3 cách :

- Nguyễn Đức Nhật, 8A₂, THCS Nguyễn Trường Tộ, **Hà Nội**; Nguyễn Minh Khang, 9A, THCS Tam Đảo, **Vĩnh Phúc**; Lê Lương Hùng, 9 toán, THCS Nguyễn Hữu Tiến, Duy Tiên, **Hà Nam**; Đỗ Ngọc Kiên, 9D, PTTH Trần Phú, **Hải Phòng**; Khuơng Thu Phương, 8A, THCS NK Hoàng Hóa, **Thanh Hóa**; Nguyễn Ngọc Hoan, 8D, THCS Hoàng Quý, Hoàng Hóa, **Thanh Hóa**; Vũ Trung Thu, 9A, THCS Trương Quang Trọng, Sơn Tịnh, **Quảng Ngãi**.

3) Các bạn sau đây có lời giải đầy đủ và gọn :

Đình Công Hoàng, 8T₂, THCS Giảng Võ, Ba Đình; Nguyễn Hải Đăng, 9A, THCS Tô Hoàng, Hai Bà Trưng, **Hà Nội**; Nguyễn Tiến Quang, 9, THCS Lê Quý Đôn, **Lào Cai**; Nguyễn Việt Hằng, 9C, THCS DTNT, Yên Bình, **Yên Bái**; Lê Kim Thu, 8A, THCS hai Bà Trưng, Mê Linh, **Vĩnh Phúc**; Đỗ Đình Tử, 9K,

THCS Lê Lợi, Hà Đông, **Hà Tây**; Vũ Chí Minh, 9A, THCS trị trấn Hiệp Hòa, **Bắc Giang**; Hà Thị Mai Dung, 9A, THCS Nguyễn Trãi, **Hải Dương**; Nguyễn Công Thành, 8A6, THCS Trần Đăng Ninh, **Nam Định**; Nguyễn Văn Hải, 9A2, THCS Tiên Lãng, **Hải Phòng**; Lê Trọng Sơn, 8A, THCS Nhữ Bá Sỹ, Hoàng Hóa, **Thanh Hóa**; Trần Quốc Hùng, 9B, THCS Đặng Thai Mai, Vinh; Nguyễn Thị Lụa, 9, Nguyễn Thế Anh, 9B, THCS Quán Hành, Nghi Lộc, **Nghệ An**; Hồ Tú Thuận, 8C₂, THCS Nguyễn Nghiêm, **Quảng Ngãi**; Vũ Ngọc Diễm, 9/2, THCS Lê Quý Đôn, Tam Kỳ, **Quảng Nam**; Hoàng Đức Hèo, 8C, THCS Giao Châu, Gio Linh, **Quảng Trị**; Nguyễn Khánh Nam, 8/14, THCS Thái Nguyên, Nha Trang, **Khánh Hòa**; Đỗ Hoàng Nam, 9C, THCS Nguyễn Du, Buôn Ma Thuột, **Đắk Lắk**; Lương Thế Nhân, 9A, PTTH chuyên, **Bạc Liêu**; Phan Chí Thanh, 9A, THCS thị trấn Đầm Dơi, **Cà Mau**.

VIỆT HẢI

Bài T6/252. Tìm tất cả các số nguyên dương x, y, z thỏa mãn $x^2 + y^2 = z^2$ biết rằng z là một số tự nhiên lẻ và x, y là lũy thừa của một số nguyên tố.

Lời giải. (của bạn Trần Bá Đôn, 11CT ĐHKHTN Huế, Thừa Thiên - Huế)

Vì z lẻ suy ra x và y khác tính chẵn lẻ. Không giảm tổng quát giả sử x chẵn, y lẻ. Theo giả thiết $x = 2^k, y = p^t$ (p lẻ, nguyên tố)

$$\text{Ta có } x^2 = 2^{2k} = (z - y)(z + y)$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} z - y = 2^u \\ z + y = 2^v \\ u + v = 2k, u < v \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } y = 2^{v-1} - 2^{u-1}.$$

$$\text{Vì } y \text{ lẻ nên } u = 1 \text{ và } y = 2^{2k-2} - 1 = (2^{k-1} - 1)(2^{k-1} + 1) = p^t.$$

Nếu $2^{k-1} - 1 > 1$ thì $2^{k-1} - 1 : p$ và $2^{k+1} + 1 : p \Rightarrow 2 : p$ mâu thuẫn.

$$\text{Thành thử } 2^{k-1} - 1 = 1 \Rightarrow k = 2 \Rightarrow x = 4, y = 3 \text{ và } z = 5.$$

Vậy ta có nghiệm (3, 4, 5), (4, 3, 5)

Nhận xét. 1) Giả thiết z lẻ thực ra là không cần thiết. Thật ra x, y không thể cùng lẻ vì nếu thế $z^2 \equiv 2 \pmod{4}$ không xảy ra. Giả sử x, y chẵn, $x = 2^a, y = 2^b$. Dễ thấy $x \neq y$ nên ta giả thiết $x > y \Leftrightarrow a > b$. Khi đó $x^2 + y^2 = z^2 \Rightarrow 2^{2a} + 2^{2b} = z^2 \Rightarrow 2^{2b}(2^{2(a-b)} + 1) = z^2$. Giả sử

$$z = 2^c m \text{ với } m \text{ lẻ} \Rightarrow 2^{2b}(2^{2(a-b)} + 1) = 2^{2c} m^2 \Leftrightarrow \begin{cases} b=c \\ 2^{2(a-b)} + 1 = m^2 \end{cases}$$

Đặt $a-b = t > 0 \Rightarrow 2^{2t} = m^2 - 1$

$$= (m-1)(m+1) \Rightarrow \begin{cases} m+1 = 2^\alpha \\ m-1 = 2^\beta \Rightarrow 2 = 2^\beta(2^{\alpha-\beta} - 1) \\ \alpha > \beta \end{cases}$$

$\Rightarrow \beta = 1 \Rightarrow m = 3 \Rightarrow 2^{2t} = 8$. Mâu thuẫn.

Như vậy x, y cùng chẵn cũng không xảy ra.

2) Phương trình $x^2 + y^2 = z^2$ với x, y nguyên tố cùng nhau có nghiệm là $\begin{cases} x = 2mn \\ y = m^2 - n^2 \\ z = m^2 + n^2 \end{cases}$

hoặc $\begin{cases} x = m^2 - n^2 \\ y = 2mn \\ z = m^2 + n^2 \end{cases}$ trong đó m, n là hai số nguyên tố cùng nhau bất kì.

Các bạn có thể xem chứng minh kết quả này trong cuốn "Bài giảng số học", NXB Giáo dục 1996.

3) Bài này được rất nhiều bạn tham gia giải. Các bạn có lời giải tốt như: Nguyễn Thanh Hào, 10T, Nguyễn Trãi, **Hải Dương**; Đặng Thị Thanh Huyền, 10, Nguyễn Du, **Thái Bình**; Phạm Quang Huy, 10A, Chu Văn An, Hà Nội; Lương Thế Nhân, 9A PTTH chuyên Bạc Liêu; Đỗ Trường Giang, 9A Lập Thạch, Vĩnh Phúc; Trần Quốc Việt, 8A Lương Thế Vinh, Nam Định; Nguyễn Văn Bình, 11A₂ PTTH Lê Thủy, **Quảng Bình**; Hà Minh Ngọc, 11C Toán, Lương Thế Vinh, **Đồng Nai**; Trần Thu Hương, 11A chuyên **Vĩnh Phúc**; Trần Tuấn Anh, Võ Duy, 10T Lê Quý Đôn, Nha Trang, **Khánh Hòa**; Trần Tất Đạt, 10T **ĐHKHTN**; Trần Văn Hà, 11T, Trần Phú, **Hải Phòng**; Nguyễn Như Thắng, 9A Thuận Thành, Hà Bắc; Đặng Hoàng Minh Hiếu, 12A chuyên **Thái Bình**; Lưu Ngọc Tuấn, 9C, Thanh Hóa; Đào Hải Long, 8A THCS Cầu Diễn, Từ Liêm, Hà Nội.

Hoan nghênh nhiều bạn ở THCS đã tham gia giải bài toán này.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T7/252. Cho số thực $\alpha > 2$. Cho dãy số thực dương $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ thỏa mãn điều kiện:

$$a_n^\alpha = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} \text{ với mọi } n \geq 2.$$

Chứng minh rằng, dãy $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}_{n=1}^\infty$ có giới hạn hữu hạn khi $n \rightarrow \infty$ và hãy tìm giới hạn đó.

Lời giải. Cách 1. (của đa số các bạn)

Ta có:

$$a_{n+1}^\alpha = a_1 + a_2 + \dots + a_n = a_n^\alpha + a_n > a_n^\alpha$$

$$\text{hay } a_2 < a_3 < a_4 < \dots$$

Suy ra:

$$a_n^\alpha + a_n = a_{n+1}^\alpha = a_1 + a_2 + \dots + a_n < a_1 + (n-1)a_n$$

$$\text{hay } a_n^\alpha < a_1 + (n-2)a_n \quad (*)$$

$$+ \text{ Nếu } a_1 < 1 \text{ thì } a_2^\alpha = a_1 < 1$$

$$\Rightarrow a_2 > a_1 \Rightarrow a_n > a_1.$$

$$\text{Từ } (*) \Rightarrow a_n^\alpha < a_n + (n-2)a_n = (n-1)a_n$$

$$\Rightarrow a_n^{\alpha-1} < n-1 \Rightarrow$$

$$0 < \left(\frac{a_n}{n}\right)^{\alpha-1} < \frac{n-1}{n^{\alpha-1}} = \frac{1-\frac{1}{n}}{n^{\alpha-2}}$$

$$\text{Vì } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-\frac{1}{n}}{n^{\alpha-2}} = 0 \text{ nên } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{n}\right)^{\alpha-1} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = 0.$$

$$+ \text{ Nếu } a_1 \geq 1 \text{ thì } a_n > 1 \quad \forall n \geq 2.$$

Từ (*) suy ra:

$$0 < \left(\frac{a_n}{n}\right)^{\alpha-1} < \frac{a_1}{n^{\alpha-1} \cdot a_n} + \frac{n-2}{n^{\alpha-1}} < \frac{a_1}{n^{\alpha-1}} + \frac{n-2}{n^{\alpha-1}}$$

$$\text{Vì } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_1}{n^{\alpha-1}} + \frac{n-2}{n^{\alpha-1}}\right) = 0 \text{ nên}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{n}\right)^{\alpha-1} = 0$$

Cách 2.

$$\text{Từ kết luận } a_2 < a_3 < a_4 < \dots$$

Ta có:

$$a_{n+1}^\alpha = a_n^\alpha + a_n = a_n(a_n^{\alpha-1} + 1) < a_{n+1}(a_n^{\alpha-1} + 1)$$

$$\text{hay } a_{n+1}^{\alpha-1} < a_n^{\alpha-1} + 1 \text{ với } n = 2, 3, \dots$$

Suy ra (theo quy nạp)

$$a_{n+1}^{\alpha-1} < a_2^{\alpha-1} + n - 1 \text{ hay:}$$

$$0 < \left(\frac{a_{n+1}}{n+1}\right)^{\alpha-1} < \left(\frac{a_2}{n+1}\right)^{\alpha-1} + \frac{n-1}{(n+1)^{\alpha-1}}$$

$$\text{Do } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_2}{n+1}\right)^{\alpha-1} = 0; \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{(n+1)^{\alpha-1}} = 0$$

$$\text{nên } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_{n+1}}{n+1}\right)^{\alpha-1} = 0$$

$$\text{Vậy : } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = 0$$

Nhận xét. Các bạn sau đây có lời giải tốt :
Dương Quang Huy, 11A₁, Trường chuyên, **Yên Bái**. **Nguyễn Trung Lập**, 11A₁; **Nguyễn Duy Tân**, 12A, **Phạm Hoàng Hà**, 12A₁, chuyên, **Vĩnh Phúc**. **Bùi Thu Thái**, **Nguyễn Dũng**, **Đào Thu Mai**, 12T, **Nguyễn Trãi**, **Hải Dương**. **Nguyễn Trọng Kiên**, 10CT, **Lê Hồng Phong**, **Nam Định**. **Hoàng Ngọc Dương**, 11A, **Lương Đắc Bằng**, **Hoàng Hóa**, **Thanh Hóa**. **Trần Bá Đôn**, 11CT, ĐHKHTN, **Huế**. **Trương Hoàng Phương**, 11A₁, **Lê Huyền Đức**, 12A₁, PTTH **Vũng Tàu**, **Bà Rịa - Vũng Tàu**.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T8/252. Điền 29 số nguyên dương đầu tiên vào các ô vuông con của bảng 6×5 như sau :

Cho phép thay đổi vị trí của các số trong bảng theo quy tắc :
 Mỗi lần, lấy một số nằm ở ô kề với ô trống rồi chuyển số đó sang ô trống.

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12		13	14
15	16	17	18	19
20	21	22	23	24
25	26	27	28	29

Bảng 1

Hỏi nhờ việc thực hiện liên tiếp một số hữu hạn lần phép chuyển số nói trên đối với bảng số ban đầu ta có thể nhận được bảng số sau hay không :

29	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12		13	14
15	16	17	18	19
20	21	22	23	24
25	26	27	28	1

Bảng 2

bảng số nhận được trong quá trình chuyển số, ta liệt kê tất cả các số trong bảng theo thứ tự từ trái qua phải, từ trên xuống dưới. Khi đó, ứng với mỗi bảng số ta sẽ có một hoán vị của 30 số tự nhiên đầu tiên. Và do đó, giả sử (*) cho thấy : từ hoán vị (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 0, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29) (gọi là hoán vị I) ta có thể nhận được hoán vị (29, 2, 3, 4, ..., 11, 12, 0, 13, 14, 15, ..., 27, 28, 1) (gọi là hoán vị

Lời giải. Giả sử, nhờ phép chuyển số theo quy tắc của đề bài, từ Bảng 1 ta có thể nhận được Bảng 2.
 (*) Ta coi ô trống của mỗi bảng là ô được điền số 0. Với mỗi

II) nhờ việc thực hiện liên tiếp một số hữu hạn lần phép đổi chỗ các số hạng trong hoán vị theo quy tắc : mỗi lần, lấy một số hạng khác 0 của hoán vị rồi đổi vị trí của số hạng đó và 0 cho nhau (1).

Giả sử $(a_1, a_2, \dots, a_{30})$ là một hoán vị của 30 số tự nhiên đầu tiên. Ta gọi cặp số (a_i, a_j) là cặp số ngược của hoán vị vừa nêu nếu $a_i > a_j$ và $i < j$. Dễ thấy, sau một lần thực hiện phép đổi chỗ các số hạng theo quy tắc (1) đối với hoán vị $(a_1, a_2, \dots, a_{30})$ thì số cặp số ngược của hoán vị đó sẽ tăng hoặc giảm một số lẻ đơn vị. (2) Ta có : số cặp số ngược của hoán vị I là 12 và số cặp số ngược của hoán vị II là 67. Từ đó, kết hợp với (2), suy ra từ hoán vị I ta chỉ có thể nhận được hoán vị II sau một số lẻ lần thực hiện phép đổi chỗ các số hạng. Điều này cho thấy, nếu từ Bảng 1 ta nhận được Bảng 2 thì số lần chuyển số phải là số lẻ (3).

Tô màu tất cả các ô vuông con của bảng 6×5 bởi hai màu xanh, đỏ sao cho hai ô kề nhau có màu khác nhau. Thế thì, sau mỗi lần chuyển số số 0 sẽ được chuyển từ ô có màu này sang ô có màu kia. Và vì thế, do số 0 ở Bảng 1 và số 0 ở Bảng 2 nằm ở hai ô cùng màu nên từ Bảng 1 ta chỉ có thể nhận được Bảng 2 sau một số chẵn lần chuyển số. Điều này mâu thuẫn với (3) và mâu thuẫn đó cho thấy : Từ Bảng 1 ta không thể nhận được Bảng 2 nhờ phép chuyển số theo quy tắc của đề bài.

Nhận xét. Tòa soạn đã nhận được lời giải của 9 bạn gửi tới. Trong số đó có 3 bạn cho rằng câu trả lời cho Bài toán là "Có thể". Trong 6 bạn có câu trả lời cho Bài toán là "Không thể" chỉ có 3 bạn cho lời giải đúng. Đó là các bạn : **Nguyễn Trọng Kiên**, 10CT, THPT **Lê Hồng Phong**, **Nam Định**; **Nguyễn Trung Lập**, 11A₁, trường chuyên **Vĩnh Phúc**; và **Hoàng Tùng**, 10 Toán, khối PTCT-Tin, ĐHKHTN-ĐHQG, **Hà Nội**.

NGUYỄN KHẮC MINH

Bài T9/252. Gọi H_i , D_i , M_i lần lượt là chân các đường cao, phân giác, trung tuyến hạ từ đỉnh A_i của tam giác $A_1A_2A_3$ ($i = 1, 2, 3$). Tồn tại hay không một tam

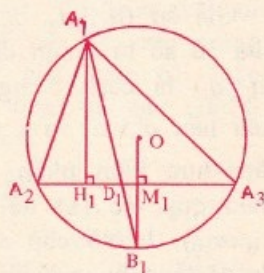
giác $A_1A_2A_3$ có độ dài các cạnh đôi một khác nhau sao cho :

$$D_iH_i = D_iM_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

Lời giải.

Cách 1. (của Đỗ Trung Kiên, 12A₁ PTTH chuyên Vĩnh Phúc)

Giả sử tồn tại tam giác $A_1A_2A_3$ thỏa mãn điều kiện đề bài. Gọi (O) là đường tròn ngoại tiếp tam giác;



Đặt : $A_2A_3 = a$; $A_3A_1 = b$; $A_1A_2 = c$ vì $A_1A_2A_3$ có độ dài các cạnh đôi một khác nhau nên các điểm H_i, D_i, M_i đôi một phân biệt ($i = 1, 2, 3$).

Dễ thấy D_i thuộc đoạn H_iM_i ($i = 1, 2, 3$) vì $D_1H_1 = D_1M_1$ nên $\Delta A_1H_1D_1 = \Delta B_1M_1D_1$ (B_1 là giao điểm của OM_1 và (O) (hình vẽ)) $\Rightarrow A_1D_1 = B_1D_1 \Rightarrow A_1D_1^2 = B_1D_1 \cdot A_1D_1 \Rightarrow A_1D_1^2 = A_2D_1 \cdot A_3D_1$ (Hệ thức lượng trong đường tròn)

Vì A_1D_1 là phân giác của góc $\angle A_2A_1A_3$ nên $A_1D_1^2 = \frac{bc}{(b+c)^2} (a+b+c)(-a+b+c)$;

$$A_2D_1 = \frac{ac}{b+c} ; A_3D_1 = \frac{ab}{b+c}$$

Từ đó suy ra :

$$\begin{aligned} \frac{bc}{(b+c)^2} (a+b+c)(-a+b+c) &= \frac{a^2bc}{(b+c)^2} \\ \Rightarrow (a+b+c)(-a+b+c) &= a^2 \\ \Rightarrow (b+c)^2 - a^2 &= a^2 \\ \Rightarrow (b+c) &= 2a^2 \\ \Rightarrow b+c &= \sqrt{2}a \quad (1) \end{aligned}$$

Tương tự như vậy ta có :

$$c+a = \sqrt{2}b \quad (2) ; a+b = \sqrt{2}c \quad (3)$$

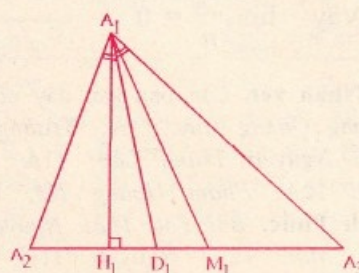
Từ (1), (2), (3) suy ra : $2(a+b+c) = \sqrt{2}(a+b+c)$

$$\Rightarrow \sqrt{2} = 1. \text{ Mâu thuẫn !}$$

Vậy : không tồn tại tam giác $A_1A_2A_3$ thỏa mãn điều kiện đề bài.

Cách 2 : (Nguyễn Trung Lập - 11A₁ PTTH chuyên Vĩnh Phúc)

Giả sử tồn tại tam giác $A_1A_2A_3$ thỏa mãn điều kiện đề bài. Trong tam giác $A_1A_2A_3$ có không ít hơn hai góc nhọn. Giả sử $A_2, A_3 < 90^\circ$.



Đặt $a_2 = A_1A_3$; $a_3 = A_1A_2$. Vì A_1D_1 là phân giác nên :

$$\overrightarrow{A_1D_1} = \frac{a_2}{a_2+a_3} \overrightarrow{A_1A_2} + \frac{a_3}{a_2+a_3} \overrightarrow{A_1A_3} \quad (1)$$

Vì A_1D_1 là trung tuyến của tam giác

$$A_1H_1M_1 \text{ nên : } \overrightarrow{A_1D_1} = \frac{1}{2} \overrightarrow{A_1H_1} + \frac{1}{2} \overrightarrow{A_1M_1}$$

Lại có :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A_1H_1} &= \frac{\tan A_2}{\tan A_2 + \tan A_3} \overrightarrow{A_1A_2} + \frac{\tan A_3}{\tan A_2 + \tan A_3} \overrightarrow{A_1A_3} \\ \overrightarrow{A_1M_1} &= \frac{1}{2} \overrightarrow{A_1A_2} + \frac{1}{2} \overrightarrow{A_1A_3} \end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A_1D_1} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\tan A_2}{\tan A_2 + \tan A_3} + \frac{1}{2} \right) \overrightarrow{A_1A_2} + \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{\tan A_3}{\tan A_2 + \tan A_3} + \frac{1}{2} \right) \overrightarrow{A_1A_3} \end{aligned}$$

Từ (1), (2) suy ra :

$$\begin{aligned} \frac{a_2}{a_2+a_3} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\tan A_2}{\tan A_2 + \tan A_3} + \frac{1}{2} \right) \\ \Rightarrow \frac{2a_2}{a_2+a_3} &= \frac{\tan A_2}{\tan A_2 + \tan A_3} + \frac{1}{2} \\ \Rightarrow \frac{a_2-a_3}{a_2+a_3} &= \frac{\tan A_3 - \tan A_2}{2(\tan A_2 + \tan A_3)} \quad (\text{trừ 1 vào hai vế}) \end{aligned}$$

$\Rightarrow a_2 - a_3$ và $\tan A_3 - \tan A_2$ cùng dấu.

$$\text{Nếu } A_2 > A_3 \Rightarrow \begin{cases} a_2 - a_3 > 0 \\ \tan A_3 - \tan A_2 < 0 \end{cases} \text{ Mâu thuẫn.}$$

$$\text{Nếu } A_2 < A_3 \Rightarrow \begin{cases} a_2 - a_3 < 0 \\ \tan A_3 - \tan A_2 > 0 \end{cases} \text{ Mâu thuẫn.}$$

Tóm lại : không tồn tại tam giác $A_1A_2A_3$ thỏa mãn điều kiện đề bài.

Nhận xét. 1) Có 4 bạn giải sai, tuy nhiên số bạn giải hoàn toàn chính xác không nhiều.

2) Khi giải một bài toán hình học nếu lời giải phụ thuộc vào hình vẽ thì phải vẽ hết các thể hình có thể và tiến hành chứng minh trong từng trường hợp một.

3) Trong đề bài cần phải có giả thiết các cạnh tam giác $A_1A_2A_3$ đôi một khác nhau. Bạn Nguyễn Như Thắng, 9A, THCS Thuận Thành, Bắc Ninh đã chỉ ra một tam giác không đều mà có tính chất : $D_iH_i = D_iM_i$ ($i = 1, 2, 3$). Đó là tam giác $A_1A_2A_3$ thỏa mãn : $A_1A_3 = A_2A_3 = x$; $A_1A_2 = (\sqrt{2} - 1)x$.

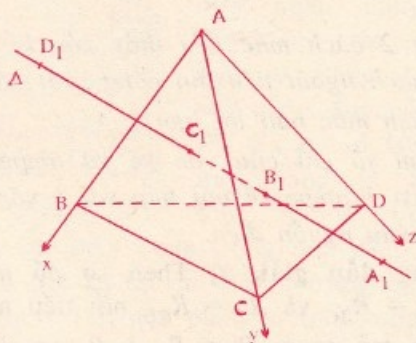
4) Các bạn sau đây có lời giải tốt : Triệu Tuấn Đạt, Vũ Ngọc Minh, 9T, PTCS Chu Văn An; Nguyễn Chiến Thắng, 12T, PTTHNK Trần Phú, Hải Phòng; Trần Tất Đạt, 10B Toán, ĐHKHTN-ĐHQG Hà Nội; Trần Tuấn Anh, 10T, Lê Quý Đôn, Nha Trang, Khánh Hòa; Đinh Trung Hiếu, 9A, PTCS Phú Bài, Hương Thủy, Thừa Thiên - Huế; Dương Quang Huy, 11A₁, PTTH chuyên, Yên Bái.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài T10/252. Cho tứ diện $ABCD$ và điểm M thỏa mãn điều kiện : $\alpha\vec{MA} + \beta\vec{MB} + \gamma\vec{MC} + \delta\vec{MD} = \vec{0}$. Δ là đường thẳng bất kì qua M , theo thứ tự cắt các mặt phẳng (BCD) , (CDA) , (DAB) , (ABC) tại A_1, B_1, C_1, D_1 . Chứng minh rằng :

$$\frac{\alpha}{MA_1} + \frac{\beta}{MB_1} + \frac{\gamma}{MC_1} + \frac{\delta}{MD_1} = 0 \quad (*)$$

Lời giải. (của tác giả)



Nếu $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$ thì (*) đúng một cách tầm thường. Nếu $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ không đồng thời bằng 0 thì từ giả thiết : $\alpha\vec{MA} + \beta\vec{MB} + \gamma\vec{MC} + \delta\vec{MD} = \vec{0}$ dễ dàng suy ra : $\alpha + \beta + \gamma + \delta \neq 0$. Không mất tính tổng quát giả sử $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 1$ Xét

hệ tọa độ $Axyz$. Ta thấy trong hệ tọa độ này các mặt phẳng : (ACD) , (ADB) , (ABC) , (BCD) lần lượt có phương trình là : $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$; $x + y + z = 1$.

$$\text{Vì } \alpha\vec{MA} + \beta\vec{MB} + \gamma\vec{MC} + \delta\vec{MD} = \vec{0} \Rightarrow \vec{AM} = \beta\vec{AB} + \gamma\vec{AC} + \delta\vec{AD} \Rightarrow M = (\beta, \gamma, \delta)$$

Giả sử Δ có vector chỉ phương $\vec{u} = (a, b, c)$. Vì Δ cắt tất cả các mặt phẳng : (ACD) ; (ADB) ; (ABC) ; (BCD) nên dễ thấy : $a \neq 0$; $b \neq 0$; $c \neq 0$; $a + b + c \neq 0$. Đường thẳng Δ có phương trình tham số :

$$\Delta : \begin{cases} x = \beta + ta \\ y = \gamma + tb \\ z = \delta + tc \end{cases}$$

Từ đó suy ra :

$$\begin{cases} A_1 = \left(\beta + \frac{\alpha a}{a+b+c}, \gamma + \frac{\alpha b}{a+b+c}, \delta + \frac{\alpha c}{a+b+c} \right) \\ B_1 = \left(0, \gamma - \frac{\beta b}{a}, \delta - \frac{\beta c}{a} \right) \\ C_1 = \left(\beta - \frac{\gamma a}{b}, 0, \delta - \frac{\gamma c}{b} \right) \\ D_1 = \left(\beta - \frac{\delta a}{c}, \gamma - \frac{\delta b}{c}, 0 \right) \end{cases}$$

Suy ra :

$$\begin{cases} \vec{MA_1} = \left(\frac{\alpha a}{a+b+c}, \frac{\alpha b}{a+b+c}, \frac{\alpha c}{a+b+c} \right) \\ \vec{MB_1} = \left(-\beta, -\frac{\beta b}{a}, -\frac{\beta c}{a} \right) \\ \vec{MC_1} = \left(-\frac{\gamma a}{b}, -\gamma, -\frac{\gamma c}{b} \right) \\ \vec{MD_1} = \left(-\frac{\delta a}{c}, -\frac{\delta b}{c}, -\delta \right) \end{cases}$$

Qua M, A_1, B_1, C_1, D_1 lần lượt dựng các mặt phẳng song song với (ACD) cắt AB tại các điểm tương ứng $M', A'_1, B'_1, C'_1, D'_1$. Theo định lý Talét tồn tại số $k \neq 0$ sao cho :

$$\begin{cases} \overline{MA_1} = k \overline{MA'_1} = k \frac{\alpha a}{a+b+c} \\ \overline{MB_1} = k \overline{MB'_1} = k(-\beta) \\ \overline{MC_1} = k \overline{MC'_1} = k\left(-\frac{\gamma a}{b}\right) \\ \overline{MD_1} = k \overline{MD'_1} = k\left(-\frac{\delta a}{c}\right) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Vậy : } & \frac{\alpha}{MA_1} + \frac{\beta}{MB_1} + \frac{\gamma}{MC_1} + \frac{\delta}{MD_1} \\ &= \frac{1}{k} \left(\frac{\alpha}{\frac{\alpha a}{a+b+c}} + \frac{\beta}{-\beta} + \frac{\gamma}{-\frac{\gamma a}{b}} + \frac{\delta}{-\frac{\delta a}{c}} \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{k} \left(1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} - 1 - \frac{b}{a} - \frac{c}{a} \right) = 0 \text{ (dpcm)}$$

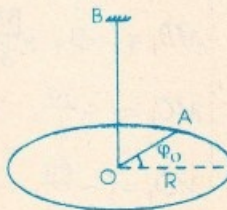
Nhận xét. 1) Vì không sử dụng phương pháp tọa độ trong không gian nên nhiều bạn giải dài và thiếu sáng sủa. Có bạn phải sử dụng khái niệm tích ngoài của ba vectơ trong không gian. Có bạn chỉ giải được bài toán trong trường hợp M nằm trong tứ diện $ABCD$ thông qua khái niệm thể tích.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt : Vũ Thái Hòa, 10A, ĐHSPT Hà Nội; Đặng Minh Hiền, 12A, PTTH chuyên Thái Bình; Lương Anh Hùng, 11A₁, PTTH CB Vũng Tàu, Bà Rịa - Vũng Tàu; Đoàn Phương, 10T, Lê Hồng Phong, Nam Định; Nguyễn Duy Tân, 12A, PTTH chuyên, Vĩnh Phúc.

3) Bạn Đoàn Phương còn đưa ra nhận xét đúng sau : Các trung điểm của các đoạn AA_1 , BB_1 , CC_1 , DD_1 nằm trên một mặt phẳng. Nhận xét này có thể chứng minh khá dễ dàng bằng phương pháp tọa độ trong không gian như trên.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài L1/252. Một hệ cấu tạo từ một đĩa đồng tính nằm ngang A , có khối lượng m , bán kính R và một thanh mỏng OB có hệ số xoắn k . Tìm biên độ dao động xoắn bé và năng lượng dao động, nếu tại thời điểm ban đầu người ta quay lệch đĩa một góc φ_0 khỏi vị trí cân bằng và truyền cho nó một vận tốc góc φ'_0 .



Hướng dẫn giải. Có thể dùng phương pháp động lực học hoặc phương pháp bảo toàn năng lượng. Ở một vị trí bất kì (đĩa lệch một góc φ), thế năng của hệ $W_t = \frac{k\varphi^2}{2}$

và động năng của hệ $W_d = \frac{I\omega^2}{2}$, với $I = \frac{mR^2}{2}$. Cơ năng của hệ $E = \frac{k\varphi^2}{2} + \frac{mR^2\omega^2}{2}$.

Ở thời điểm ban đầu $E_0 = \frac{k\varphi_0^2}{2} + \frac{mR^2\varphi_0'^2}{2}$.

Tại vị trí biên : $E_A = \frac{k\varphi_A^2}{2}$. Áp dụng định

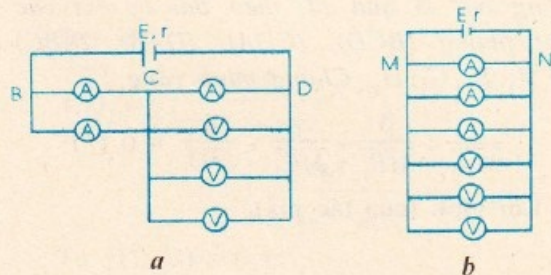
luật bảo toàn cơ năng $E_0 = E_A$, suy ra

$$\varphi_A = \varphi_0 \sqrt{1 + \frac{mR^2\varphi_0'^2}{2k\varphi_0^2}} \text{ và } E = E_0 = \frac{k\varphi_0^2}{2} + \frac{mR^2\varphi_0'^2}{2}$$

Nhận xét. Các bạn có lời giải đúng : Đinh Văn Trung, 11 Lí 1, chuyên Nguyễn Du, Đắc Lắc; Lê Đức Dũng, 12 Lí, PTTH NK Quảng Bình; Lê Hải Bình, 11 Tin, PTTH Hà Nội - Amsterdam, Hà Nội; Lê Đăng Khoa, 10A₁, PTTH Bến Tre; Trương Minh Hải, 10 chuyên Lí, PTTH Lương Thế Vinh, Đồng Nai; Đàm Hữu Thu, 12 Lí, PTTH chuyên Lương Văn Chánh; Lê Thành Bình, 11 Lí, PTTH Lương Văn Tụy, Ninh Bình; Lê Tiến Dũng, 11 LT, trường chuyên Lê Quý Đôn, Quảng Trị; Nguyễn Đình Thắng, 12A₁, PTTH chuyên Yên Bái; Nguyễn Ngọc Đức, 12A₁, THPT Đức Phổ I, Quảng Ngãi; Đào Phúc Lâm, 12A₂, PTTH chuyên Yên Bái, Yên Bái; Trần Khắc Nguyên, 12 Lí, trường Lê Khiết, Quảng Ngãi.

MAI ANH

Bài L2/252. Có 3 ampe kế giống nhau và 3 vôn kế giống nhau mắc vào 1 nguồn điện (E , r) theo 2 sơ đồ a và b vẽ như ở hình dưới.



Trong 2 cách mắc đều thấy vôn kế chỉ 6V và mạch ngoài tiêu thụ công suất 36W.

a) Cách mắc nào lợi hơn ?

b) Tìm số chỉ của vôn kế và ampe kế khi chỉ có 1 ampe kế nối tiếp với 1 vôn kế rồi mắc vào nguồn điện.

Hướng dẫn giải. a) Theo sơ đồ a) 2 đoạn $R_1 = R_{BC}$ và $R_2 = R_{CD}$ nối tiếp nhau nên điện trở ngoài $R = R_1 + R_2$ và dòng chính là I . Theo sơ đồ b), có $R_1 // R_2$ nên $R' = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} < R$; do đó dòng chính $I' > I$

và tổn hao ở mạch trong $I'^2 r > I^2 r$. Vì mạch ngoài tiêu thụ công suất giống nhau nên cách 1 (sơ đồ a) lợi hơn.

b) Ở sơ đồ a) ta có $U_V = \frac{R_2 E}{r + R_1 + R_2}$, và

$$P = \frac{(R_1 + R_2) E^2}{(r + R_1 + R_2)^2}$$

Ở sơ đồ b) ta có : $U_V = \frac{R_1 R_2 E}{r R_1 + r R_2 + R_1 R_2}$, và

$$P' = \frac{R_1 R_2 (R_1 + R_2) E^2}{(r R_1 + r R_2 + R_1 R_2)^2}$$

Theo đề bài $U_V = U'_V = 6V$ và $P' = P = 36W$, từ đó suy ra $r = R_1 = R_2 = 2\Omega$ và $E = 18V$. Vì $R_1 = \frac{R_A}{2} = 2$ suy ra $R_A = 4\Omega$.

Vì $\frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_A} + \frac{3}{R_V}$ nên ta có $R_V = 12\Omega$.

Từ đó số chỉ ampe kế sẽ là :

$$I_A = \frac{E}{r + R_A + R_V} = 1A, \text{ và số chỉ vôn kế là } I_A \cdot R_V = 12V.$$

Nhận xét. Các bạn có lời giải đúng và gọn : *Phạm Lê Minh*, 11B, PTTH NK Ngô Sĩ Liên, **Bắc Giang** ; *Khuất Nguyên Bình*, 12 Lí, PTTH NK Hàn Thuyên; *Hoàng Văn Hậu*, 12B2, PTTH chuyên. **Tuyên Quang**; *Phạm Mạnh Hùng*, 12A₂, PTTH chuyên **Yên Bái**; *Nguyễn Quốc Dũng*, 10CL, trường Phan Bội Châu, Vinh; *Hồ Khánh Nam*, 10 Lí, Phan Bội Châu, Vinh, **Nghệ An**; *Hồng Ngọc Tân*, 12A2, PTTH chuyên Trà Vinh, **Trà Vinh**; *Nguyễn Minh Lục*, 12A₁, PTTH Lê Quý Đôn, **Đà Nẵng**; *Phạm Văn Yên*, 12A, PTTH Yên Lạc, **Vĩnh Phúc**; *Nguyễn Anh Phúc Đức*, 10A₃, PTTH Phan Bội Châu, Vinh, **Nghệ An**; *Lê Thanh Bình*, 11 Lí, PTTH Lương Văn Tuy, **Ninh Bình**; *Trương Quang Tri*, 12A₁, THPT Sơn Tịnh I, **Quảng Ngãi**.

MAI ANH

PHƯƠNG PHÁP TÌM ... (Tiếp theo trang 22)

nếu $p+a+b = 0 \Rightarrow |f(t_1)| + |f(0)| = |f(t_2)| + |f(0)| = |ab|$ (10)

Giả sử α là giá trị nhỏ nhất (nếu có) của $\text{Max} \left[-\frac{(b-a)}{2}, \frac{(b-a)}{2} \right] |f(t)|$.

Từ (8), (9), (10) suy ra : giá trị nhỏ nhất α tồn tại chỉ khi $p+a+b = 0$. (khi đó $\alpha = \frac{|ab|}{2}$).

Bây giờ giả sử có $p+a+b = 0$. Khi đó

$$f(t) = t^2 + \frac{(a+b)^2}{4} + \frac{p(a+b)}{2} + q$$

Dễ dàng thấy hàm $f(t)$ thỏa mãn các điều kiện của định lí và $M - m = ab$, nên

$$\min \left\{ \max \left[\frac{(b-a)}{2}, \frac{(b-a)}{2} \right] |f(t)| \right\} = \frac{|ab|}{2}$$

Vậy : điều kiện cần và đủ để tập các giá trị lớn nhất của hàm $y = |x^2 + px + q|$ trên $[a, b]$ đạt giá trị nhỏ nhất là $p+a+b = 0$.

Cuối cùng, đề nghị các bạn áp dụng định lí và các phương pháp lập luận trên để giải các bài toán sau đây.

Bài toán 1. Tìm a sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = |-2x^2 + x + a|$ trên đoạn $[-1; 1]$ là nhỏ nhất.

Bài toán 2. Tìm a để giá trị lớn nhất trên $[-1, 0]$ của hàm số $y = \left| \frac{x^2 + (a+1)x + 1 - a}{x - 1} \right|$ là nhỏ nhất.

Bài toán 3. Tìm giá trị nhỏ nhất của tập các giá trị lớn nhất của hàm $y = |x^2 + px + q|$ trên $[-1; 1]$.

Bài toán 4. Tìm mối liên hệ giữa a, b, c để tập các giá trị lớn nhất của hàm số $y = |ax^2 + bx + c|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

ĐÍNH CHÍNH

Số 8 (254). Trang 17, cột phải, dòng 16 xin sửa lại là :

“Đương (a, b) sao cho $a^2b + a + b$ chia hết cho $ab^2 + b + 7$ ”.

Thành thật xin lỗi tác giả và bạn đọc.



ĐỀ RA KÌ NÀY

CÁC LỚP THCS

Bài T1/256. Tìm số có 6 chữ số $\overline{abcdefg}$ sao cho $\overline{abcdefg} = (\overline{abc} + \overline{deg})^2$

NGUYỄN DUY LIÊN
(Vĩnh Phúc)

Bài T2/256. Xét các số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện :

$$a + b + c = 1$$

Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$P = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}$$

NGUYỄN ĐÌNH QUÂN
(Nghệ An)

Bài T3/256. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ 125y^5 - 125y^3 + 6\sqrt{15} = 0 \end{cases}$$

ĐOÀN THẾ PHIỆT
(Nam Định)

Bài T4/256. Cho tam giác ABC ($AB < AC$). AD, AE và AM tương ứng là phân giác trong, phân giác ngoài và trung tuyến của tam giác ABC . Đường tròn ngoại tiếp tam giác ADM cắt đường thẳng AB và đường thẳng AC tương ứng tại I và K . Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEM cắt đường thẳng AB và đường thẳng AC tương ứng tại J và H . Gọi P và Q tương ứng là trung điểm của HJ và IK . Hãy tính góc PMQ .

LÊ QUỐC HÁN
(Nghệ An)

Bài T5/256. Cho ngũ giác lồi $ABCDE$. Gọi M là giao điểm của AC và BE , N là giao điểm của BD và AC , P là giao điểm của CE và BD , Q là giao điểm AD và CE , và R là giao điểm của BE và AD .

Hãy so sánh diện tích của ngũ giác $MNPQR$ và tổng diện tích của 5 tam giác MAB, NBC, PCD, QDE và RAE .

VŨ ĐÌNH HÒA
(Hà Nội)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/256. Cho số nguyên dương s và cho s số nguyên tố đôi một khác nhau $p_1, p_2, \dots, p_s$.

Cho $k_1, k_2, \dots, k_s$ là các số nguyên dương. Đặt

$m = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_s^{k_s}$. Chứng minh rằng :

$$\frac{1 - p_1^{k_1+1}}{1 - p_1} \cdot \frac{1 - p_2^{k_2+1}}{1 - p_2} \dots \frac{1 - p_s^{k_s+1}}{1 - p_s} < m(\ln m + 1)$$

ĐÀM VĂN NHÌ
(Thái Bình)

Bài T7/256. Dãy các hàm số $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện :

i) $f_n(x) : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty) \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

ii) $f'_n(x) = x \quad \forall x \in (0, +\infty)$

iii) $f_{n+1}(x) = \sqrt{x^2 + 6f_n(x)} \quad \forall x \in (0, +\infty)$

và $\forall n \in \mathbb{N}$.

a) Chứng minh rằng với mỗi $n = 1, 2, 3, \dots$ tồn tại duy nhất số $x_n \in (0, +\infty)$ thỏa mãn $f_n(x_n) = 2x_n$

b) Chứng minh rằng $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ là dãy số tăng và $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 4$.

NGUYỄN MINH ĐỨC
(Hà Nội)

Bài T8/256. Xét tam giác ABC . Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$T = \cotg A + \cotg B + \cotg C + \tg \frac{A}{2} + \tg \frac{B}{2} + \tg \frac{C}{2}$$

NGUYỄN KHÁC MINH
(Hà Nội)

Bài T9/256. Cho $\triangle ABC$; M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh BC, AC, AB . Dựng ra phía ngoài tam giác hai tia : $Px \perp AB$ và $Ny \perp AC$. Trên tia Px lấy điểm D sao cho $PD = AB$ và trên tia Ny lấy điểm E sao cho $NE = AC$. Dựng tia Dz song song và cùng hướng với tia BC , trên Dz lấy điểm F sao cho $DF = \frac{BC}{2}$. Chứng minh rằng :

a) $EF \perp AM$

b) $BC^2 + EF^2 = 2(AB^2 + AC^2)$

NGÔ VĂN HIỆP
(Hà Nội)

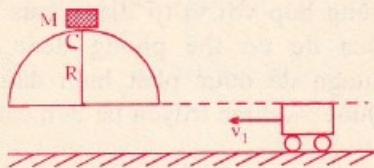
Bài T10/256. Cho tứ diện $OABC$ có góc tam diện đỉnh O là tam diện vuông. Tìm tập hợp các điểm M trong không gian thỏa mãn điều kiện :

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MO^2$$

HỒ QUANG VINH
(Nghệ An)

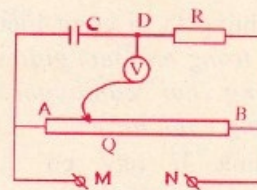
CÁC ĐỀ VẬT LÝ

Bài L1/256. Từ đỉnh một tháp hình bán cầu bán kính $R = 15\text{m}$, vật M trượt xuống không ma sát không vật tốc (hình vẽ). Cùng lúc đó cách chân tháp 20 mét một xe đang tiến về chân tháp với vận tốc không đổi $v_1 = 36\text{km/h}$. Hỏi vật có rơi vào xe không? Lấy $g = 10\text{m/s}^2$ và lực cản không khí không đáng kể.



ĐỖ QUỐC HÙNG
(Vĩnh Phúc)

Bài L2/256. Mạch điện mắc như hình vẽ. Cho $R = 50\Omega$; $C = \frac{2}{\pi} 10^{-4} \text{F}$; R_V rất lớn; $R_{AB} = 100\Omega$; $U_{MN} = 200\sin 100\pi t (\text{V})$. Tìm vị trí con chạy Q để U_{PQ} vuông pha với U_{MN} , xác định số chỉ vôn kế lúc đó.



PHẠM HÙNG QUYẾT
(Hà Nội)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS.

T1/256. Find 6-digit number $\overline{abcdef}$ such that $\overline{abcdef} = (\overline{abc} + \overline{def})^2$.

T2/256. Consider positive numbers a, b, c satisfying the condition: $a + b + c = 1$.

Find the least value of the expression:

$$P = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}.$$

T3/256. Solve the system of equations:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ 125y^5 - 125y^3 + 6\sqrt{15} = 0 \end{cases}$$

T4/256. Let be given a triangle ABC ($AB < AC$) and let AD, AE, AM be respectively its internal, external angled bisectors and median issued from A . The circumcircle of the triangle ADM cuts the lines AB and AC respectively at I and K , that of the triangle AEM cuts the lines AB and AC respectively at J and H . Let P and Q be respectively the midpoints of HJ and IK . Calculate the angle PMQ .

T5/256. Let be given a convex pentagon $ABCDE$ and let M, N, P, Q, R be respectively the points of intersection of AC and BE , of BD and AC , of CE and BD , of AD and CE , of BE and AD . Compare the area of the pentagon $MNPQR$ with the sum of the areas of the five triangles MAB, NBC, PCD, QDE and RAE . for upper secondary schools.

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/256. Let be given a positive integer s, s distinct prime numbers $p_1, p_2, \dots, p_s$ and s positive integers $k_1, k_2, \dots, k_s$. Put $m = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_s^{k_s}$. Prove that

$$\frac{1-p_1^{k_1+1}}{1-p_1} \cdot \frac{1-p_2^{k_2+1}}{1-p_2} \dots \frac{1-p_s^{k_s+1}}{1-p_s} < m (\ln m + 1).$$

T7/256. Let be given a sequence of functions

$$\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$$

i) $f_n(x) : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty), \forall n \in \mathbb{N}$,

ii) $f_0(x) = x, \forall x \in (0, +\infty)$,

iii) $f_{n+1}(x) = \sqrt{x^2 + 6f_n(x)}, \forall x \in (0, +\infty), \forall n \in \mathbb{N}$.

a) Prove that for every $n = 1, 2, 3, \dots$ there exists a unique number $x_n \in (0, +\infty)$ such that $f_n(x_n) = 2x_n$.

b) Prove that $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ is an increasing sequence of numbers and $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 4$.

T8/256. Consider the triangle ABC . Find the least value of the expression:

$$T = \cot A + \cot B + \cot C + \frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2}.$$

T9/256. Let be given a triangle ABC and let M, N, P be respectively the midpoints of its sides BC, CA, AB . Draw on the outside of the triangle ABC the rays $Px \perp AB$ and $Ny \perp AC$ and take on Px the point D such that $PD = AB$ and on Ny the point E such that $NE = AC$. Draw the ray Dz parallel to and with same direction with the ray BC , and take on Dz the point F such that $DF = \frac{BC}{2}$. Prove that:

a) $EF \perp AM$,

b) $BC^2 + EF^2 = 2(AB^2 + AC^2)$.

T10/256. Let be given a tetrahedron $OABC$, the trihedral angle at O of which is right. Find the locus of points M in space such that

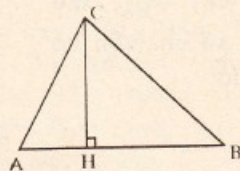
$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MO^2.$$

Lịch sử định lý PITAGO

NGÔ VIỆT TRUNG

Chúng ta ai cũng biết Định lý Pitago nói rằng trong một tam giác vuông, tổng các bình phương hai cạnh góc vuông bằng bình phương cạnh huyền.

Định lý này có cách chứng minh đơn giản như sau : Trong tam giác vuông ABC kẻ đường cao CH .



Ta thấy ngay các tam giác ABC , ACH , CBH đồng dạng với nhau. Từ đây suy ra

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AH}{AC}, \frac{CB}{AB} = \frac{HB}{CB}$$

hay $AC^2 = AH \cdot AB$; $CB^2 = HB \cdot AB$.

Cộng các vế với nhau ta sẽ nhận được

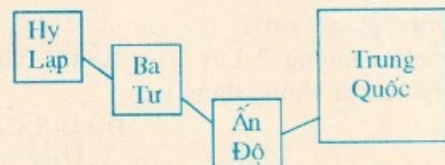
$$AC^2 + CB^2 = (AH + HB) \cdot AB = AB^2.$$

Chứng minh trên thật là dễ. Nhưng để có được cái dễ này ta phải sử dụng đến tính chất hai tam giác đồng dạng có độ dài các cạnh tương ứng tỉ lệ với nhau mà Pitago chắc là chưa biết đến.

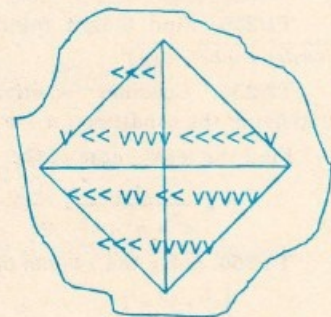
Pitago sống ở Hy Lạp và Italia khoảng 500 năm trước công nguyên (cách thời đại chúng ta gần 2500 năm). Có thể vì trình độ toán học của Pitago lúc đó như trình độ của một đứa trẻ mới lên 9 tuổi, mới biết cộng trừ nhân chia. Làm thế nào đứa trẻ đó có thể chứng minh được định lý trên. Các tài liệu để lại không cho chúng ta biết Pitago chứng minh định lý như thế nào. Nhiều người cho rằng ông biết được định lý nhờ các nền văn minh khác. Có một điều chắc chắn là sinh thời Pitago đã đi du lịch qua nhiều vùng khác như Ai Cập và Ba Tư. Có thể ông cũng đã đến Ấn Độ vì thế giới quan của Pitago có nhiều điểm tương đồng với triết lý của người Ấn Độ cổ đại. Thời đó những nơi này có một nền toán học phát triển sớm hơn vùng Hy Lạp.

Các chứng tích lịch sử cho thấy Định lý Pitago được biết đến sớm nhất ở Trung Quốc, sau đó là ở Ấn Độ, rồi mới đến các vùng Ba Tư, Ai Cập, cuối cùng là Hy Lạp. Điều này

trùng hợp với vị trí địa lý của các vùng này. Qua đó có thể phỏng đoán rằng Định lý Pitago đã được phát hiện đầu tiên ở Trung Quốc và được truyền bá đến các vùng khác.



Ba Tư là vùng gồm những nước Irak và Iran hiện nay. Người ta đã khai quật được ở vùng này những tấm bảng đất sét có niên đại từ 1900-1500 năm trước công nguyên. Một trong những tấm bảng đó có vẽ một hình như hình bên :



Người ta đã tốn nhiều công để giải thích các kí hiệu trên đó. Có lẽ điều sau đây là đúng với sự thật :

- số 30 ở cạnh hình vuông,
- số 1,24510 ở giữa phía trên,
- số 42,2523 ở giữa phía dưới.

Nếu tính theo hệ phân số 60 mà người Ba Tư cổ đại hay dùng ta sẽ nhận được :

$$\begin{aligned} 1,(24)(51)(10) &= \\ &= 1 + 24/60 + 51/602 + 35/603 \\ &= 1,41421297 \end{aligned}$$

Số này xấp xỉ bằng $\sqrt{2} = 1,41421356...$ Nếu tính độ dài d của đường chéo hình vuông theo Định lý Pitago thì

$$\begin{aligned} d^2 &= 30^2 + 30^2 \\ d &= \sqrt{2}(30) = 1,(24)(51)(10) \times (30) = \\ &= (42),(25)(35). \end{aligned}$$

Một tấm bảng khác chứa đựng bài toán : Tìm bán kính đường tròn ngoại tiếp một tam

giác có các cạnh là 50, 50 và 60 với đáp số được viết là 31,25.

Có thể giải bài toán này như sau :

$$AD = AB^2 - BD^2 = 50^2 - 30^2 = 40.$$

$$OC^2 = CD^2 + (AD - OA)^2 = 30^2 + (40 - OA)^2$$

Gọi r là bán kính đường tròn. Ta có

$$r^2 = 30^2 + 40^2 - 80r + r^2$$

$$80r = 2500$$

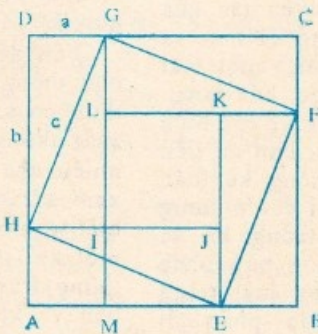
$$r = 2500/80 = (31), (25)$$

(theo hệ phân số 60).

Như vậy là người Ba Tư cổ đại đã phải biết đến Định lý Pitago trước Pitago 1000 năm (ít ra cho tam giác vuông cân hay tam giác vuông có tỉ lệ cạnh là 5:4:3). Tuy nhiên không có những dấu tích gì chứng tỏ người Ba Tư hiểu sâu sắc Định lý Pitago như người Trung Quốc cổ đại cùng thời kì đó.

Ở Trung Quốc, người ta tìm thấy một cuốn sách bằng thẻ tre của thời Xuân Thu Chiến Quốc (500-200 năm trước công nguyên) trong đó Định lý Pitago được nêu lên và chứng minh một cách gián tiếp. Theo truyền thuyết thì cuốn sách này đã có từ thời nhà Ân (1500-1000 năm trước công nguyên) và người ta không rõ tác giả là ai. Cuốn sách này có đưa ra một định lý được gọi là "định lý các cạnh góc vuông" như sau :

"Hãy dựng một hình chữ nhật có các cạnh là 3 và 4. Đường chéo sẽ có độ dài là 5. Trên đường chéo dựng một hình vuông. Trên các cạnh hình vuông dựng các tam giác vuông về phía ngoài để được một hình vuông lớn hơn. Bốn tam giác vuông bên ngoài sẽ hợp thành hai hình chữ nhật. Cắt hai hình chữ nhật này đi sẽ được một phần có diện tích là 25".



vuông về phía ngoài để được một hình vuông lớn hơn. Bốn tam giác vuông bên ngoài sẽ hợp thành hai hình chữ nhật. Cắt hai hình chữ nhật này đi sẽ được một phần có diện tích là 25".

Ta thấy hình vuông lớn có cạnh là $3+4$ và do đó có diện tích là $(3+4)^2$. Diện tích của từng hình chữ nhật là 3.4. Nếu cắt bốn tam giác vuông bên ngoài ta có hình vuông có cạnh là 5 và diện tích là 25. Nếu cắt hai hình chữ nhật đi ta có một hình ghép hai hình vuông có cạnh là 3 và 4. Như vậy phần còn lại có diện tích là $32+42$. Phiên dịch những lời trên thành các phép tính ta nhận được

$$5^2 = (3+4)^2 - (2(3.4)) = 3^2 + 4^2.$$

Do người đời xưa chỉ biết đến một độ dài cụ thể nên họ đã chọn tam giác vuông có các cạnh 3, 4, 5. Tuy nhiên phép chứng minh trên vẫn đúng nếu ta xét một tam giác vuông bất kì.

$$S_{ABCD} - (S_{AEH} + S_{EBF} + S_{FCG} + S_{GDH}) = S_{EFGH} = c^2$$

$$S_{ABCD} - (S_{HIGD} + S_{LFCE}) = S_{AMIH} + S_{MBFL} = a^2 + b^2.$$

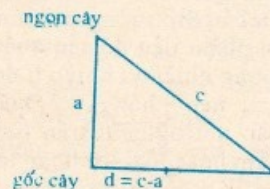
$$\text{Do } S_{AEH} + S_{EBF} + S_{FCG} + S_{GDH} = S_{HIGD} + S_{LFCE} \text{ nên}$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Thực tế là người Trung Quốc ở các thế kỉ sau đã chứng minh Định lý Pitago như trên. Do chưa biết đến việc dùng các kí hiệu để mô tả và làm tính với các con số không cụ thể (như các cạnh của một tam giác), họ đã dựa vào quy luật trực quan sau đây : Diện tích của một hình sẽ không thay đổi nếu ta cắt nó ra làm nhiều bộ phận rồi ghép lại theo một cách khác. Người Trung Quốc cổ đại có một sự hiểu biết sâu sắc về Định lý Pitago. Điều này được thể hiện qua việc họ đã áp dụng định lý này để giải nhiều bài toán cụ thể trong cuộc sống. Một cuốn sách khác từ đầu thời nhà Hán (200 năm trước công nguyên) có nêu hai bài toán sau kèm với đáp số.

Bài toán 1. Trên đỉnh một cái cây có treo một sợi dây thông xuống đến đất còn thừa một đoạn là 3 trượng.

Nếu kéo thẳng sợi dây ra sao cho đầu dây chạm đất thì đầu dây cách gốc cây 8 trượng. Hỏi sợi dây dài bao nhiêu ?



(Xem tiếp trang 24)



những loại sản phẩm không phù hợp hoặc khước từ (phủ định) những loại sản phẩm thích hợp. Để làm điều đó cần thiết phải có

trung thống kê là cơ sở của mối quan hệ đa dạng của một hiện tượng vật lý. Hiểu được bản chất của mối quan hệ đó sẽ giúp cho học sinh có được nhận quan sâu sắc sự thống nhất của thế giới xung quanh.

Như vậy trên con đường

GIÁO DỤC TƯ DUY THỐNG KÊ VÀ VẤN ĐỀ GIẢNG DẠY XÁC SUẤT THỐNG KÊ CHO HỌC SINH PHỔ THÔNG

NGUYỄN CÔNG SỬ
(Hà Nội)

Khoa học tự nhiên, khoa học xã hội và khoa học kỹ thuật thường dựa trên các khái niệm thống kê và sử dụng rộng rãi các phương pháp thống kê.

Các mô hình ngẫu nhiên thường phản ánh về các hiện tượng thực tế đầy đủ và sát hợp hơn là các mô hình tất định. Không chỉ trong khoa học mà cả trong đời sống với các biểu hiện đa dạng của nó (sản xuất công nghiệp, kinh tế nông nghiệp, quân sự...) và nói chung khi xác định chiến lược phát triển sản xuất kinh tế và văn hóa xã hội ta luôn phải đụng chạm đến những quá trình, hiện tượng chứa đựng các yếu tố ngẫu nhiên mà ở đó nếu không biết các quy luật thống kê thì không thể điều khiển được quá trình sản xuất và phát triển xã hội.

Ví dụ: Khi nói về sản xuất công nghiệp, sản xuất hàng hóa chúng ta phải chú ý ngay đến nét đặc trưng cơ bản của nó. Đó là tính quy mô lớn của nền sản xuất và do vậy đòi hỏi phải biết áp dụng các phương pháp thống kê kiểm tra chất lượng sản phẩm, đánh giá mức độ phù hợp với nhu cầu thị trường của từng loại sản phẩm tiến độ sản xuất v.v... Đương nhiên vì nhiều lý do khác nhau nên không thể kiểm tra hoặc thử nghiệm trên từng sản phẩm hoặc loại trừ hoàn toàn sai lầm. Khi kiểm tra thống kê Do vậy càng quan trọng hơn các phải tổ chức quá trình kiểm tra, hoặc thử nghiệm thế nào để làm giảm tối thiểu việc chấp nhận

các kiến thức cơ bản về xác suất thống kê không chỉ đối với các nhà quản lý, các nhân vật có trách nhiệm cao với quá trình sản xuất mà còn ở từng người trực tiếp tham gia vào quá trình đó, tức là ở tất cả mọi người.

Như vậy tính toán đúng, biết sử dụng các nguyên tắc của các quy luật thống kê sẽ nâng cao khả năng tư duy khoa học, óc thực tiễn và đặc biệt là khả năng "tư duy kinh tế" trong từng con người, trong mọi lĩnh vực hoạt động của đời sống xã hội. Vậy thì giáo dục thống kê cần phải bắt đầu từ bậc học phổ thông và có lẽ không chỉ ở trong chương trình toán mà trong cả các môn học khác. Mối liên quan tương hỗ giữa toán học và vật lý, toán học với sinh học, toán học với hóa học, ... dựa trên các nguyên tắc của các quy luật thống kê thực ra là có tính hai mặt: một mặt thì vật lý, sinh học, hóa học... cung cấp các ví dụ về các hiện tượng ngẫu nhiên, làm cứ liệu xuất phát cho thống kê toán học, mặt khác thì các phương pháp xác suất thống kê sẽ giúp các môn học này phát họa được các quy luật riêng của mình. Ví dụ phần di truyền học trong giáo trình sinh vật cả ở bậc cơ sở và trung học phổ thông chỉ cho học sinh thấy được rằng quy luật của tính di truyền cũng như đa số các quy luật sinh học khác mang đặc trưng xác suất thống kê. Ngoài ra đặc

nhận thức thế giới của học sinh phổ thông trong mối quan hệ đa dạng của nó sẽ có một vật cản nghiêm trọng nếu thiếu các kiến thức cơ bản về xác suất thống kê trong học sinh phổ thông.

Trong chương trình phổ thông trung học hiện hành (chương trình không phân ban dùng cho phần lớn học sinh phổ thông), phần lý thuyết xác suất và thống kê được đề cập đầy đủ và hệ thống, mặc dù ở cuối cấp phổ thông cơ sở (lớp 9) đã có đưa chương "thống kê mô tả" (phần ứng dụng của lý thuyết xác suất). Nếu coi mục đích chuyên ban là làm sâu sắc thêm kiến thức phổ thông chung và có định hướng chuyên môn, thì việc đưa xác suất thống kê (mà hiện tại chỉ là lý thuyết xác suất) lại không hợp lý.

Vấn đề đưa vào giáo trình phổ thông trung học các kiến thức cơ sở của lý thuyết xác suất thống kê cũng đã được nhiều nhà toán học, sư phạm xem xét đến. Vấn đề đó đặc biệt trở nên cấp thiết hiện nay, một khi mà chương trình phổ thông trung học với hệ phân ban và không phân ban đang được bàn đến. Để các kiến thức phổ thông sát hợp với đời sống và hoạt động thực tế của học sinh sau khi tốt nghiệp thì giáo dục phổ thông phải được quan tâm không chỉ về hình thức cấu trúc mà cả nội dung chương trình môn học.

DÀNH CHO CÁC BẠN CHUẨN BỊ THI VÀO ĐẠI HỌC

PHƯƠNG PHÁP TÌM GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA TẬP HỢP CÁC GIÁ TRỊ LỚN NHẤT CỦA HÀM SỐ

PHẠM QUỐC PHONG
(Hà Tĩnh)

Các bài toán về giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số rất phong phú về nội dung và phương pháp giải. Trong bài báo này, chúng tôi đề cập đến bài toán :

Tìm giá trị nhỏ nhất của tập hợp các giá trị lớn nhất của hàm số $y = |f(x)|$, trong đó $f(x)$ có chứa tham số

Đây là bài toán mà trên các tài liệu hiện lưu hành ta thấy :

- Các "mẫu" hàm số đưa ra xét chưa nhiều.
- Một số lời giải chỉ dừng lại ở mức độ "mô tả" kết quả (Đề 141, câu I, Bộ đề TSĐH).

Dưới đây, chúng tôi trình bày một định lý và một bài toán (thí dụ 3) để làm cơ sở cho phương pháp giải loại toán này.

Cho hàm số $y = f(k, x)$ xác định trên $D = [a, b] \subset \mathbf{R}$ trong đó x là ẩn, k là tham số.

Giả sử tồn tại $M = \max_D f(k, x)$, $m = \min_D f(k, x)$. Kí hiệu u_i là tập giá trị của hàm số $y = f(k, x)$ ứng với $k = i$, $U = \{u_i\}$.

Ta có định lý sau :

Định lý : Nếu hàm số $y = f(k, x)$ liên tục trên D thỏa mãn hai điều kiện :

1. $M - m = 2c^2$ (trong đó c là hằng số)
2. $U \supset [-c^2, c^2]$

thì giá trị lớn nhất của hàm số $y = |f(k, x)|$ trên D đạt nhỏ nhất khi $M + m = 0$.

Chứng minh: Giả sử $\alpha = \max_D |f(k, x)|$ tồn tại. Khi đó $\alpha = \max\{|M|, |m|\}$.

Vì $y = f(k, x)$ liên tục trên D , nên theo định lý về giá trị trung gian của hàm số liên tục thì tồn tại $x_0 \in D$ sao cho $f(x_0) = \frac{1}{2}(M + m)$.

$$\text{Khi đó } \begin{cases} M = f(x_0) + c^2 \\ m = f(x_0) - c^2 \end{cases}$$

$$\text{nên } \begin{cases} |M| = |f(x_0) + c^2| \\ |m| = |f(x_0) - c^2| \end{cases}$$

Do đó

$$f(x_0) > 0 \Rightarrow |M| > c^2 \Rightarrow \alpha > c^2 \quad (1)$$

$$f(x_0) < 0 \Rightarrow |m| > c^2 \Rightarrow \alpha > c^2 \quad (2)$$

$$f(x_0) = 0 \Rightarrow |M| = |m| = c^2 \Rightarrow \alpha = c^2 \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra $\min \alpha = c^2$ khi và chỉ khi $f(x_0) = 0$. (4)

Theo điều kiện (2) : $U \supset [-c^2, c^2]$, suy ra tồn tại $x_0 \in D$ sao cho $f(x_0) = 0$. (5)

Do đó, từ (4) và (5) suy ra giá trị nhỏ nhất của $\max_D |f(k, x)|$ đạt được khi $M + m = 0$ (dpcm)

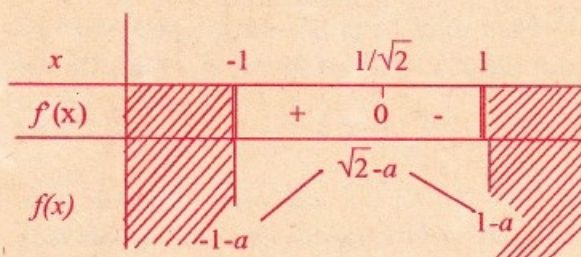
Thí dụ 1. Cho hàm số $y = x + \sqrt{1 - x^2} - a$, trong đó a là tham số. Tìm điều kiện của a để giá trị lớn nhất của $y = |f(x)| = |x + \sqrt{1 - x^2} - a|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Giải. Tập xác định $D = [-1; 1]$.

$$f(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Ta có bảng xét dấu của $f'(x)$ và bảng biến thiên của $f(x)$:



KỶ THI OLYMPIC TOÁN KHU VỰC ĐÔNG NAM Á LẦN THỨ NHẤT SEAMO 98

PGS.TS. NGUYỄN HỮU VIỆT HUNG
(Trưởng đoàn Việt Nam)

Kỳ thi Olympic Toán khu vực Đông Nam Á lần thứ nhất SEAMO 98 được tiến hành từ 14 đến 18/9/1998 tại Trung tâm giáo dục Khoa học và Toán học (RECSAM) trực thuộc Tổ chức Bộ trưởng Giáo dục các nước Đông Nam Á (SEAMEO) đặt tại Penang (Malaysia). Kỳ thi này được RECSAM dự định tổ chức hai năm một lần vào những năm chẵn, nhằm khích lệ việc học toán của học sinh trong khu vực. Tham dự kì thi lần này có 9 nước : Brunây, Campuchia, Ấn Độ, Lào, Malaysia, Philippin, Singapo, Thái Lan và Việt Nam. Mỗi nước được cử một trưởng đoàn và 4 học sinh (Riêng Myanmar không tham dự).

Khác với kì thi Toán quốc tế trong đó thí sinh phải qua 2 vòng thi, mỗi vòng 3 bài toán khó trong thời gian 4 giờ rưỡi, không có vòng thi đồng đội, trong kì thi SEAMO, thí sinh phải qua 3 vòng thi : 2 vòng cá nhân và 1 vòng đồng đội. Vòng thi cá nhân thứ nhất (thi trả lời ngắn) : 20 câu hỏi, thời gian 90 phút. Vòng thi cá nhân thứ hai : 5 bài toán, thời gian 180 phút. Vòng thi đồng đội (các thành viên trong đội có quyền thảo luận tìm lời giải) : 10 câu hỏi, thời gian 60 phút. Như vậy, SEAMO không chỉ coi trọng việc giải các bài toán khó trong một thời gian khá dài (việc này vốn là sở trường của các học sinh giỏi nước ta), mà còn coi trọng việc phản ứng mau lẹ trước các tình huống cơ bản. Ngoài ra, SEAMO cũng coi trọng khả năng hợp tác trong một nhóm làm việc. Trong phiên họp cuối

SEAMO 98 bàn về các kì thi sau, các trưởng đoàn đã thống nhất đề nghị tăng độ khó cho bài thi đồng đội, đưa thời gian vòng thi này lên 90 phút hoặc hơn, với số điểm tối đa là 200 thay vì 80 như hiện nay, nhằm cân bằng với tổng số điểm tối đa của cả 4 học sinh mỗi đoàn trong 2 vòng thi cá nhân là 220. Điều này sẽ làm cho vòng thi đồng đội trở nên thành quyết định hơn tới thứ hạng toàn đội.

Từ chiều 14 tới chiều 16/9, các trưởng đoàn được đưa tới khách sạn Paradise, một khách sạn đẹp nằm sát mép biển, cách ly với học sinh của mình, để thảo luận đề thi. Trong thời gian này, các trưởng đoàn không được phép ra khỏi khách sạn, và không được sử dụng mọi hình thức liên lạc viễn thông. Đề thi của 3 vòng được soạn thảo dựa trên các đề thi do các nước tham dự gửi đến từ trước. Hội đồng thi gồm 3 người sơ bộ chọn đề, rồi đưa ra thảo luận với các trưởng đoàn. Nếu không thống nhất được ý kiến thì tiến hành biểu quyết giữa các trưởng đoàn. Các thành viên hội đồng thi không được tham gia biểu quyết.

Để soạn thảo đề thi chúng tôi đã phải làm việc liên tục 3 ngày, mỗi ngày 14 giờ, từ 8 giờ tới 11 giờ đêm, chỉ trừ hai bữa ăn. Đầu tiên là chọn ra những đề thích hợp trong số những đề do hội đồng thi đề cử, sau đó tu chỉnh lại đề, thay đổi số liệu hoặc cách phát biểu nếu cần, rồi tìm cách diễn đạt lại văn bản tiếng Anh cho sáng sủa. Cuối cùng, các trưởng đoàn dịch đề

sang tiếng nước mình, trừ các đoàn Brunây, Philippin, Singapo trực tiếp dùng bản tiếng Anh.

Hội đồng thi và các trưởng đoàn đã dành thêm 1 ngày làm việc 14 giờ nữa để chấm 3 vòng thi. Khi chấm mỗi vòng thi, 9 trưởng đoàn được chia đều thành 3 nhóm. Các nhóm này sẽ được chia lại trong mỗi vòng thi tiếp theo, để tránh việc có thể hình thành những mối liên kết. Các trưởng đoàn tự chấm bài của học sinh mình trước, rồi chuyển cho hai trưởng đoàn khác cùng nhóm chấm. Nếu có sự khác biệt trong việc cho điểm, các trưởng đoàn trong cùng nhóm cùng thảo luận với nhau. Nếu vẫn không thống nhất được thì mời chủ tịch hội đồng tới quyết định. Việc chấm thi đã được tiến hành nghiêm túc và thiện cảm.

Theo thể lệ thi tổng số huy chương bằng khoảng một nửa số thí sinh. Số huy chương vàng, bạc, đồng được tính theo số điểm và tương ứng với tỉ lệ 1: 2:3. Các thí sinh không được huy chương nhưng bài làm tốt sẽ được bằng khen (BK). Để khuyến khích học sinh ở mỗi nước, giữ sự cân bằng tương đối giữa số huy chương vàng dành cho các đội tuyển, Ban Tổ chức SEAMO quy định số huy chương vàng của mỗi nước chỉ được không quá nửa số huy chương vàng được quy định của cuộc thi. Điểm tối đa của 2 vòng thi cá nhân là 5,5 điểm.

Dưới đây là thành tích của đoàn Việt Nam :

TT	Họ và tên	Đơn vị	Điểm	Huy Chương
1	Ngô Văn Sáng	PTTH Hà Nội - Amsterdam	54	HC vàng
2	Trịnh Kim Chi (nữ)	PTTH NK Hà Tĩnh	53	HC vàng
3	Đặng Anh Tuấn	PTTH Trần Phú, Hải Phòng	53	HC bạc
4	Nguyễn Anh Hoa	PTTH Lê Hồng Phong, Nam Định.	44	HC bạc

Thành tích của các đội như sau :

TT	Tên đội	HC Vàng	HC Bạc	HC Đồng	BK	Tổng số điểm	HC đồng đội
1	Việt Nam	2	2			284	Vàng
2	Singapo	1	2	1		224	Bạc
3	Thái Lan	1	1	2		220	Đồng
4	Indônêxia		1	3		166	
5	Philippin		1	2	1	121	
6	Malaixia			1	2	107	
7	Campuchia			2		105	
8	Brunây				1	74	
9	Lào					40	

Đề thi SEAMO 98 sẽ được giới thiệu trong số tạp chí sau.

LỊCH SỬ ĐỊNH LÝ....(Tiếp theo trang 19)

Đáp số trong cuốn sách được viết dưới dạng :

$$\frac{1}{2} (64/3+3) = 73/6 \text{ trượng}$$

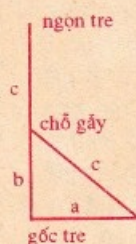
Ta có thể phục hồi lại lời giải như sau. Bài toán có dạng tìm cạnh huyền c của một tam giác vuông biết một cạnh a của góc vuông và hiệu d của cạnh huyền và cạnh góc vuông kia. Ta thấy

$$c^2 = a^2 + (c - d)^2$$

$$2cd = a^2 + d^2$$

$$c = \frac{1}{2} (a^2/d + d).$$

Bài toán 2. Có một cây tre dài 10 trượng. Bỗng nhiên cây tre bị gãy và ngọn cây tre chạm đất ở một chỗ xa gốc cây tre 3 trượng. Hỏi chỗ gãy của cây tre cao bao nhiêu ?



Đáp số của bài toán được viết dưới dạng :

$$\frac{1}{2} (10 - 9/10) = 92/20 \text{ trượng}$$

Bài toán này có dạng tìm một cạnh a của góc vuông của một tam giác vuông biết tổng d của cạnh này với cạnh huyền và cạnh góc vuông kia là a . Ta thấy

$$(d-a)^2 = a^2 + b^2$$

$$2da = d^2 - b^2$$

$$a = \frac{1}{2} (d - b^2/d)$$

Ở Ấn Độ bài toán này xuất hiện trong một cuốn sách ở thế kỉ 9 (sau công nguyên) và sau đó ở châu Âu. Như vậy, bài toán cổ này của Trung Quốc đã được truyền bá qua Ấn Độ rồi sang châu Âu.

Sự phát hiện ra "định lý về cạnh của góc vuông" đã đưa người Trung Quốc cổ đại đến những phát hiện quan trọng khác về tính tỉ lệ cạnh các tam giác đồng dạng, về phép lấy căn bậc hai và ba, về lời giải nhiều loại phương trình bậc hai, v.v... Thời kì đó họ đã đi xa hơn các nền văn minh khác trong toán học, đặc biệt là trong hình học. Tuy nhiên, cách học phụ thuộc quá nhiều vào việc trích dẫn các tác gia cổ điển đã kìm hãm sự sáng tạo toán học ở các thế hệ sau này ở Trung Quốc (và cả ở Việt Nam ta).



TỪ ĐIỂN VUI

Đã bàn về hình vuông nay bàn về Hình tròn, các "từ điển gia" cho nhiều "ý" thú vị.

Nguyễn Minh Phú, 11A, PTTH AYun, Gia Lai : "Đường tròn là loài vật rất khôn ngoan : luôn đặt tim mình vào chính giữa".

WTG, Đại học kiến trúc Hà Nội : "Đường tròn là loại đường không ngọt, ngậm càng nhiều càng đắng".

Nguyễn Khánh Toàn, 10A, PTTH Năng khiếu Thái Nguyên : "Đường tròn là loại đường kì lạ: người ta đi không cần rẽ để rồi lại gặp được chính mình ở thời điểm ban đầu".

Tăng Tự Tiến, 9A, THCS Phúc Thành, Kim Thành, Hải Dương : "Đường tròn là một mê cung đáng sợ : dù đi chiều nào cũng trở lại chỗ ban đầu".

Vương Hoàng Phương, thôn Đoài, Đại Đồng Thành, Thuận Thành, Bắc Ninh : "Đường tròn là một đoạn thẳng uốn cong đều đặn tạo thành một đường khép kín".

Đinh Khánh Quỳnh, 12A3, PTTH Phan Chu Trinh, Đà Nẵng : "Đường tròn là tập hợp những chàng trai không hơn kém gì nhau nhưng cùng muốn tiến tới một cô gái".

Bạn Quỳnh còn gửi về một khổ thơ của thầy Trần Đại Tăng có nói về ... đường tròn :

"Vòng tròn, ờ, vòng tròn...
Tròn như đôi môi em
Tròn như đôi mắt em
Tròn như tình yêu em."

Ngoài ra còn nhiều liên tưởng đường tròn với trái đất, trái táo, trái mận và... chị Hằng. Cảm ơn các bạn và xin mời các bạn định nghĩa cho khái niệm Chia hết.

L.T.N

ĐẦU CÁI ĐIỀN ?

Câu lạc bộ không muốn các bạn phải "đầu cái điền" để tham gia vào trò chơi mới : điền chữ cái vào các ô trống sao cho mỗi hàng, mỗi cột, mỗi đường chéo đều có những chữ cái như nhau. Ai bảo điền chữ dễ hơn điền số ?

T	O	A	N	V	U	I
			A	N	I	
			V	U	N	
				T	O	A

Hạn nhận bài trước 15.11.1998.

NGỌC MAI



Sai lầm vì tưởng là đúng ? Vâng, có biết bao nguyên nhân để dẫn tới sai lầm khi giải toán. Nhà giáo dục toán học Polya đã nói : "Con người phải biết học ngay ở những sai lầm của mình". Một sân chơi mới của Cầu lạc bộ, xin mời các bạn cùng tìm ra sai lầm của lời giải và... hãy gửi gấp cả những sai lầm mà bạn thấy ở đâu đó về đây để chúng ta cùng ... chơi !

Bài toán: Chứng minh rằng nếu $a, b, c > 0$ thì $\frac{a^{99} + b^{99} + c^{99}}{a^{98} + b^{98} + c^{98}} \geq \sqrt[3]{abc}$

Lời giải. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho ba số dương ta có :

$$a^{99} + b^{99} + c^{99} \geq 3 \sqrt[3]{a^{99} b^{99} c^{99}} \quad (1)$$

$$a^{98} + b^{98} + c^{98} \geq 3 \sqrt[3]{a^{98} b^{98} c^{98}} \quad (2)$$

Vì các vế của (1) và (2) đều dương nên chia từng vế của (1) cho (2) ta có :

$$\frac{a^{99} + b^{99} + c^{99}}{a^{98} + b^{98} + c^{98}} \geq \sqrt[3]{abc} \quad (\text{đpcm}).$$

Câu hỏi : Sai ở đâu ? Bài toán có đúng không ? (Hạn nhận bài trước 15.11.1998).

KIHIVI



Giải đáp bài

CHỈ MỘT LẦN CÂN

Ta ghi dấu các hòm tiền từ 1 đến 5 bởi I, II, III, IV, V. Lấy trong mỗi hòm một số đồng tiền theo quy tắc :

- Số đồng tiền lấy ra ở mỗi hòm là khác nhau.

- Số đồng tiền lấy ra ở bất kì hòm nào đều không là tổng của 2 hay nhiều số đồng tiền lấy ra ở các hòm còn lại.

Cụ thể từ các hòm I II III IV V
ta lấy ra 1 2 4 8 16 đồng tiền

Đem 28 đồng tiền này lên cân ở một chiếc cân bàn chính xác. Giả sử ta được trọng lượng là P . Nếu 28 đồng tiền này là thật cả thì trọng lượng sẽ là $10 \times 28 = 280g$. Như vậy $K = P - 280$ sẽ là số các đồng tiền giả (vì trọng lượng các đồng tiền giả là $11g$). Ta phân tích K thành :

$K = a.1 + b.2 + c.4 + d.8 + e.16$
trong đó a, b, c, d, e chỉ lấy các giá trị hoặc bằng 0 hoặc bằng 1. Vậy hòm nào ứng với các giá trị bằng 1 của a, b, c, d, e thì hòm ấy là tiền giả.

Thí dụ $K = 5 = 1 + 4$, tức $a = 1, c = 1$ còn $b = d = e = 0$. Nghĩa là các hòm I và III là tiền giả.

Nhận xét: Rất nhiều bạn có đáp án tốt như trên.

BÌNH PHƯƠNG

VIẾT SỐ TRONG HÌNH VUÔNG

Trong hình vuông bên có ghi sẵn hai số 19 và 12 nhắc ta nhớ đến ngày Toàn quốc kháng chiến. Các bạn hãy viết 14 số tự nhiên từ 4 đến 18 (trừ số 12 đã có) vào các ô còn lại của hình vuông sao cho tổng các số ở mỗi hàng ngang, mỗi hàng dọc và mỗi đường chéo đều bằng nhau.

19	12	

NGÂN HỒ

BẠN CÓ BIẾT

10 SỐ NGUYÊN TỐ CÓ 93 CHỮ SỐ LẬP THÀNH CẤP SỐ CỘNG

Trên hình là một số nguyên tố gồm có 93 chữ số. Kỷ lục mà 70 nhà toán học vừa lập được này sẽ không dễ đánh bại sớm được. Họ đã mất nhiều tháng tính toán mới tìm được mười số nguyên tố tạo thành một cấp số cộng.

Từ mục trò chơi trong một tạp chí khoa học, hai nhà nghiên cứu ở trường đại học Lyon 1 (Pháp) đã đào sâu ý tưởng : tìm sáu số nguyên tố sao cho hiệu của hai số liên tiếp luôn luôn như nhau. Điều đó là dễ đối với các chuyên gia. Nhưng họ muốn đi xa hơn. Cũng không có vấn đề gì khó đối với một dãy bảy số. Họ cần có sự hỗ trợ một chút để đạt được tám số, một sự hỗ trợ hơn nữa để đạt tới chín số. Cuối cùng, tháng 3-1998, 70 nhà toán học đến từ khắp nơi trên thế giới, cùng với 200 máy điện toán hoạt động liên tục đã tìm ra mười số nguyên tố, mỗi số có 93 chữ số, mà hiệu số của hai số liên tiếp luôn luôn là 210. Từ số nguyên tố ở trên hình chỉ cần thêm vào 210 là được số nguyên tố thứ hai, v.v... Kỷ lục có lẽ dừng ở đó: theo ước tính của các nhà toán học, muốn tìm được một dãy 11 số nguyên tố thì phải mất hơn 10 tỉ năm.

1	0	0	9	9	6	9	7
2	4	6	9	7	1	4	2
4	7	6	3	7	7	8	6
6	5	5	5	8	7	9	6
9	8	4	0	3	2	9	5
0	9	3	2	4	6	8	
9	1	9	0	0	4	1	8
0	3	6	0	3	4	1	7
7	5	8	9	0	4	3	4
1	7	0	3	3	4	8	8
8	2	1	5	9	0	6	7
2	2	9	7	1	9		

Từ số nguyên tố có 93 chữ số này chỉ cần cộng thêm vào 210 là được số nguyên tố thứ hai và v.v...

NGUYỄN VĂN THIÊM
(theo Sciences et Avenir, tháng 9-1998)

ISSN : 0866-0853
Chỉ số : 12884
Mã số : 8BT58M8

Chế bản tại Tòa soạn.
In tại Nhà máy in Diên Hồng, 57 Giảng Võ
In xong và nộp lưu chiểu tháng 10 năm 1998

Giá : 3.000đ
Ba nghìn đồng