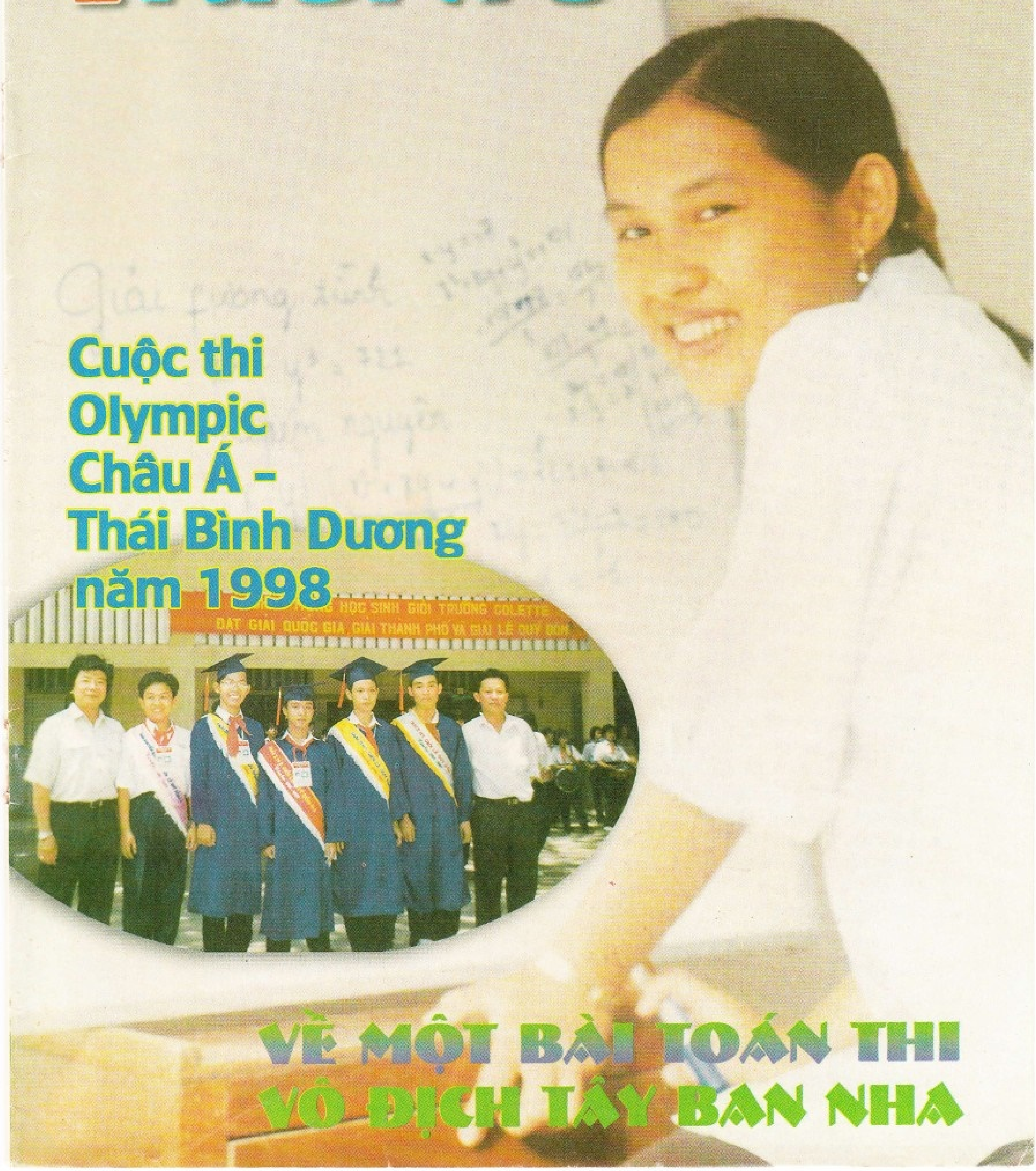
BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO * HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

TOÁN HỌC & Tuổi trẻ

NĂM THỨ 35 - RA HÀNG THÁNG
Số 9 (255)
1998



Cuộc thi Olympic Châu Á - Thái Bình Dương năm 1998

VỀ MỘT BÀI TOÁN THI VÔ ĐỊCH TÂY BAN NHA

TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ
MATHEMATICS AND YOUTH

MỤC LỤC

- **Ảnh bìa 1 :** - Trịnh Kim Chi - học sinh lớp 12 trường PTTH năng khiếu Hà Tĩnh, giải nhì Toán quốc gia 1998, dự thi Olympic Toán Đông Nam Á (Ảnh : *Xuân An*).
  - Các thầy Nguyễn Đức Tấn và Phan Huy Triều cùng học sinh giỏi toán Quận 3 TP Hồ Chí Minh.

Trụ sở tòa soạn :
25 Hàn Thuyên, Hà Nội ĐT : 8.262477 - 9714359
Đại diện tại miền Nam :
TRẦN CHÍ HIẾU, ĐT: 8.323044
231 Nguyễn Văn Cừ, Q.5, TP Hồ Chí Minh

Thực hiện : NGUYỄN VIỆT HẢI
LÊ THỐNG NHẤT
VŨ KIM THỦY
Trị sự : VŨ ANH THƯ
Chế bản : NGUYỄN THỊ OANH

Dành cho các bạn

TRUNG HỌC CƠ SỞ

VỀ MỘT BÀI TOÁN THI VÔ ĐỊCH TÂY BAN NHA

TẠ TOÀN
(TP Hồ Chí Minh)

Trong kì thi vô địch toán Tây Ban Nha năm 1990 có bài toán sau :

Cho tam giác ABC. Gọi AN và AD lần lượt là các đường trung tuyến và phân giác trong của góc A. Đường thẳng đối xứng với AM qua phân giác AD cắt BC tại N. Chứng minh rằng: $\dfrac{BN}{CN} = \dfrac{AB^2}{AC^2}$

Bài viết "Định lí hàm số sin, định lí hàm số cos và ứng dụng" (*Trần Nam Dũng*, THTT số 5 (251)/1998) đã cho lời giải bằng cách áp dụng định lí hàm số sin, một kiến thức ở PTTH. Có thể giải cách khác cho học sinh lớp 8 như sau :

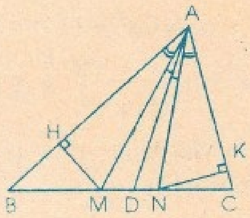
Từ giả thiết, suy ra $\angle BAM = \angle CAN$, $\angle BAN = \angle CAM$. Vẽ $NK \perp AC$, $MH \perp AB$ ($K \in AC$, $H \in AB$). $\Delta HAM \backsim \Delta KAN \Rightarrow \dfrac{AM}{AN} = \dfrac{MH}{NK}$

Do đó $\dfrac{S(ABM)}{S(ACN)} = \dfrac{BM}{CN} = \dfrac{MH.AB}{NK.AC} = \dfrac{AM.AB}{AN.AC}$

Vậy $\dfrac{BM}{CN} = \dfrac{AM.AB}{AN.AC}$ (1)

Tương tự :

$\dfrac{BN}{CM} = \dfrac{AN.AB}{AM.AC}$ (2)



Từ (1) và (2), ta có $\dfrac{BM}{CM}\cdot\dfrac{BN}{CN} = \dfrac{AB^2}{AC^2}$ mà $BM = CN$ nên $\dfrac{BN}{CN} = \dfrac{AB^2}{AC^2}$.

Lời giải này giúp ta giải được bài toán tổng quát hơn sau :

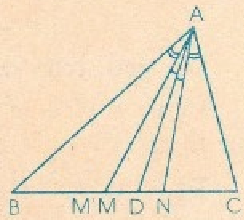
Cho tam giác ABC có đường phân giác trong AD. Ở miền trong góc BAD và góc CAD dựng lần lượt hai tia AM, AN sao cho $\angle MAD = \angle NAD$ *(M thuộc đoạn BD, N thuộc đoạn CD). Chứng minh rằng* $\dfrac{BM}{CM}\cdot\dfrac{BN}{CN} = \dfrac{AB^2}{AC^2}$

(Đề thi chọn học sinh giỏi toán 9, Tp Hồ Chí Minh năm 1997).

Rõ ràng là không có gì thay đổi khi M, N thuộc đường thẳng BC, và đây chính là định lí *Steiner* (xem *Hình học của tam giác* của *Nguyễn Văn Ban và Hoàng Chúng*, NXB Giáo dục 1996).

Một câu hỏi được đặt ra là : liệu có "bài toán đảo" chăng ?

Ta tìm câu trả lời.



Gọi M' là điểm trên đường thẳng BC sao cho $\angle M'AD = \angle NAD$, $M' \neq N$. Từ bài toán trên, ta có : $\dfrac{BM'}{CM'}\cdot\dfrac{BN}{CN} = \dfrac{AB^2}{AC^2}$

Mà $\dfrac{BM}{CM}\cdot\dfrac{BN}{CN} = \dfrac{AB^2}{AC^2}$

Suy ra :

$\dfrac{BM'}{CM'} = \dfrac{BM}{CM} \Rightarrow \dfrac{BM'}{BM' + CM'} = \dfrac{BM}{BM + CM}$

hay $\dfrac{BM'}{BC} = \dfrac{BM}{BC} \Rightarrow BM' = BM \Rightarrow M' \equiv M$

$\Rightarrow \angle MAD = \angle NAD$. Như vậy ta đã giải được bài toán :

Cho tam giác ABC; AD là phân giác trong của góc A; M và N thuộc đường thẳng BC. Chứng minh rằng

$$\angle MAD = \angle NAD \Leftrightarrow \frac{BM}{CM}\cdot\frac{BN}{CN} = \frac{AB^2}{AC^2}$$

Đặc biệt :

1) $\angle MAD = \angle NAD = 0^\circ \Leftrightarrow M \equiv N \equiv D \Leftrightarrow \dfrac{BD^2}{CD^2} = \dfrac{AB^2}{AC^2} \Leftrightarrow \dfrac{BD}{CD} = \dfrac{AB}{AC}$ (tính chất đường phân giác trong của tam giác).

2) AD' là phân giác ngoài của tam giác ABC:

$\angle MAD = \angle NAD = 90^\circ \Leftrightarrow M \equiv N \equiv D' \Leftrightarrow \dfrac{BD'^2}{CD'^2} = \dfrac{AB^2}{AC^2} \Leftrightarrow \dfrac{BD'}{CD'} = \dfrac{AB}{AC}$ (tính chất đường phân giác ngoài của tam giác).

Bài T1/251. *Tìm tích xyz biết*

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x^3+y^3+z^3=1 \end{cases}$$

Lời giải. (của đa số các bạn)

Vì $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ nên $|x| \le 1$, $|y| \le 1$ và $|z| \le 1$.

Ta có $(x^2+y^2+z^2) - (x^3+y^3+z^3) = 0$
$\Rightarrow x^2(1-x) + y^2(1-y) + z^2(1-z) = 0$
vì $x^2(1-x) \ge 0$, $y^2(1-y) \ge 0$, $z^2(1-z) \ge 0$

nên suy ra $\begin{cases} x^2(1-x)=0 \\ y^2(1-y)=0 \\ z^2(1-z)=0 \end{cases}$

Nếu $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$ thì từ hệ trên suy ra $x = y = z = 1$ mâu thuẫn với $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Vậy phải có một số bằng 0. Do đó $xyz = 0$.

Nhận xét. Những bạn có lời giải tốt : *Đinh Nho Nam*, 9B Đặng Thai Mai, Vinh, **Nghệ An;** *Trần Thu Lan*, 7A$_1$ Phong Châu, **Phú Tho;**. *Trịnh Hải Hà*, 9B Đông Sơn, **Hải Phòng;** *Nguyễn Văn Tiến*, 9A Gia Lương, **Bắc Ninh;** *Vũ Anh Tuấn*, 7A Nguyễn Trãi, **Hải Dương;** *Phạm Văn Tiến*, 9C Quang Trung, **Thanh Hóa;** *Lưu Đức Trung*, 8^{14}, Thái Nguyên, **Nha Trang.**

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T2/251. *Tìm giá trị bé nhất của n ∈ N sao cho số $n^2 + n + 1$ phân tích được thành tích 4 số nguyên tố.*

Lời giải. (của *Lương Thế Nhân*, 9A chuyên **Bạc Liêu**).

Giả sử $n^2+n+1 = p_1.p_2.p_3.p_4$ với p_1, p_2, p_3, p_4 là 4 số nguyên tố và $p_1 \le p_2 \le p_3 \le p_4$. Vì $n^2+n+1 = n(n+1)+1$ nên p_1, p_2, p_3, p_4 là các số nguyên tố lẻ và vì tìm n bé nhất nên giả sử $p_1 \ge 3$.

Mặt khác $n(n+1)$ sẽ tận cùng là 0, 2, 6 nên n^2+n+1 sẽ tận cùng là 1, 3, 7 nghĩa là $n^2+n+1 \not\vdots\, 5$. Vậy p_2, p_3, $p_4 \neq 5$.

Với $p_1 = 3$ ta có $n^2+n+1 = 3p_2p_3p_4$ hay $n^2+n+1 \,\vdots\, 3$ suy ra $n = 3k + 1$ ($k \in$ N).

Nên $3k^2 + 3k + 1 = p_2p_3p_4$. Vì $3k^2 + 3k + 1 \not\vdots\, 3$ suy ra $p_2 \ge 7$.

Với $p_2 = 7$ ta có $3k^2+3k+1 = 7p_3p_4$; $3k^2+3k+1 \,\vdots\, 7$, suy ra $k = 7t+1$ hoặc $k=7t+5$. Vì tìm n bé nhất nên ta chọn $k = 7t+1$. Với $k = 7t+1$ ta có $21t^2 + 9t + 1 = p_3p_4$

Ta có thể chọn $p_3 = p_2 = 7$. Khi đó

$$21t^2 + 9t + 1 = 7p_4.$$

Nhưng từ $21t^2 + 9t + 1 \,\vdots\, 7$ suy ra $t = 7m+3$ ($m \in N$). Vậy có

$$n = 3[7(7m+3)+1] + 1 = 147m + 67$$

Vì tìm n bé nhất nên ta chọn $n = 67$. Với $n = 67$ ta có $n^2+n+1 = 67^2+67+1 = 3.7.7.31$. Ta thấy $n = 67$ thỏa mãn điều kiện của đầu bài.

Nhận xét. Các bạn sau đây có lời giải đúng : *Nguyễn Thị Hồng Phượng*, *Nguyễn Hoàng Gia*, *Nguyễn Văn Phúc*, 8A, PTCS Vĩnh Tường, **Vĩnh Phúc;** *Nguyễn Hoàng Thạch*, 9C, THCS Ngọc Lâm, Gia Lâm, **Hà Nội;** *Nguyễn Phương Ngọc*, 9B, NK Trần Phú, *Vũ Thanh Bình*, *Phạm Đức Hiệp*, 8T, Chu Văn An, **Hải Phòng;** *Vũ Đức Nghĩa*, 9B, THCS Đông Cương, **Thanh Hóa.**

TỐ NGUYÊN

Bài T3/251. *Giải phương trình*

$$6x^4 + 8x^2 + 6 = (x^4 + 2x^2 + 1)(1 + 4y - y^2) \quad (*)$$

Lời giải. (của nhiều bạn)

Vì $x^4 + 2x^2 + 1 = (x^2 + 1)^2 > 0$ với mọi x nên

$$(*) \Leftrightarrow \frac{6x^4+8x^2+6}{x^4+2x^2+1} = -y^2+4y+1$$

Ta có :

$$\frac{6x^4+8x^2+6}{x^4+2x^2+1} = \frac{5(x^4+2x^2+1)+(x^2-1)^2}{x^4+2x^2+1}$$

$$= 5 + \left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^2 \ge 5 \text{ với mọi } x \ (1)$$

Mặt khác $-y^2 + 4y + 1 = 5 - (y - 2)^2 \le 5$ với mọi y (2).

Từ (1) và (2) suy ra :

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^2 = 0 \\ (y-2)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

Vậy nghiệm $(x; y) \in \{(1; 2); (-1; 2)\}$.

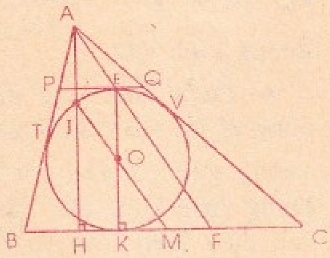
Nhận xét. 1) Gần 500 bạn gửi lời giải về, chỉ có 32 bạn giải sai (kết luận phương trình vô nghiệm, thiếu nghiệm, tính sai nghiệm...)

2) Các bạn lưu ý khi diễn đạt về nghiệm của phương trình hai ẩn, mỗi nghiệm là một cặp số $(x; y)$. Ở bài trên có thể viết như kết luận trên, hoặc viết $\begin{cases} x = \pm 1 \\ y = 2 \end{cases}$ hay là $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases} \end{array}\right.$

L.T.N

Bài T4/251. *Gọi (O, r) là đường tròn nội tiếp ΔABC, M là trung điểm BC. MO cắt đường cao của AH của ΔABC tại I. Chứng minh rằng $AI = r$.*

Lời giải. Giả sử đường tròn tâm O tiếp xúc với các cạnh BC, AB, AC lần lượt tại K, T, V và KE là đường kính. Đường thẳng qua E và song song với BC cắt AB và AC lần lượt tại P và Q thì PQ là tiếp tuyến của đường tròn. Tia AE cắt BC tại F (hình 1). Kí hiệu $AB + BC + CA = 2p$.



Hình 1

Áp dụng định lí Talet có :

$$\frac{AQ}{AC} = \frac{EQ}{FC} = \frac{AQ+EQ}{AC+FC} = \frac{AV}{AC+FC} \quad (1)$$

$$\frac{AQ}{AC} = \frac{AP}{AB} = \frac{PQ}{BC} = \frac{AQ+AP+PQ}{AC+AB+BC} =$$

$$= \frac{AT+AV}{2p} = \frac{2AV}{2p} = \frac{AV}{p} \quad (2)$$

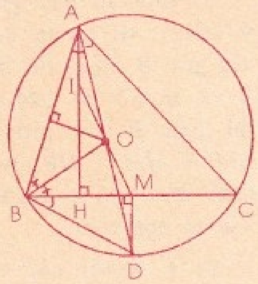
Từ (1), (2) suy ra $FC = p - AC$ (3)

Mặt khác $2BK = 2p - 2AC$ nên $BK = p - AC$ (4)

Từ (3), (4) có $FC = BK$, suy ra $MK = MF$. Từ đó MO là đường trung bình của ΔEKF nên $MO // EF$, do đó $AIOE$ là hình bình hành, suy ra $AI = OE = r$.

Cách 2. Tia OA cắt đường tròn ngoại tiếp ΔABC tại điểm D (hình 2) thì $DB = DC$ nên $MD \perp BC$ và $MD // AH$. Áp dụng định lí Talet có: $\frac{AI}{MD} = \frac{AO}{OD}$ (1).

Ta có $\angle BOD = \angle BAO + \angle ABO = \angle CBD + \angle OBC = \angle OBD$ suy ra $OD = BD$ (2).



Hình 2

Gọi T là tiếp điểm của AB với đường tròn tâm O ta có $\Delta AOT \backsim \Delta BDM$ (g-g) nên $\frac{AO}{BD} = \frac{OT}{MD}$ (3). Từ (1), (2), (3) suy ra $\frac{AI}{MD} = \frac{AO}{OD} =$ $= \frac{AO}{BD} = \frac{OT}{MD}$ nên $AI = OT = r$.

Cách 3. Đặt $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ và $a+b+c = 2p$. Giả sử $AC > AB$, lúc đó H và K đều nằm trên tia MB (hình 1).

Ta có $b^2 - c^2 = HC^2 - HB^2 =$ $= (HC + HB)(HC - HB) = 2a.MH$ (1).

Chú ý điều này đúng trong cả 2 trường hợp : điểm H nằm giữa B, M hoặc điểm B nằm giữa H, M. Từ đó $MK = KC - MC =$ $p - AB - \frac{BC}{2} = \frac{b-c}{2}$ (2)

Từ (1), (2) có

$$\frac{MH}{MK} = \frac{b^2-c^2}{2a} \cdot \frac{2}{b-c} = \frac{b+c}{a} \quad (3)$$

Mặt khác $AH.a = 2S = 2r(a+b+c)$ nên $\frac{AH}{r} = \frac{a+b+c}{a} = 1 + \frac{b+c}{a}$ (4).

Từ (3), (4) có

$$\frac{AI}{r} = \frac{AH-HI}{r} = \frac{AH}{r} - \frac{HI}{OK} = \frac{AH}{r} - \frac{MH}{MK} =$$

$= 1 + \frac{b+c}{a} - \frac{b+c}{a} = 1$, do đó $AI = r$.

Nhận xét. 1) Trong 169 bài gửi tới Tòa soạn có 165 lời giải đúng. Nhiều bạn nhận xét rằng kết luận không đúng nếu $AB = AC$, tuy nhiên trong đề bài khi cho tia MO cắt AH tại điểm I là ngụ ý biết AM và AH không trùng nhau.

2) Một số bạn chứng minh $\Delta OEQ \backsim \Delta CKO$ và ΔOEP ΔBKO suy ra $EQ.KC = EP; KB = r^2$ nên A, E, F thẳng hàng (xem hình 1) rồi xét tiếp như ở cách 1. Một số bạn chọn trước điểm F chẳng hạn F là tiếp điểm của BC với đường tròn bàng tiếp ΔABC, hoặc lấy $CF = BK$...

(xem hình 1), sau đó chứng minh A, E, F thẳng hàng rồi lập luận tiếp như ở cách 1.

3) Một số bạn giải theo cách 3 không chú ý đến vị trí tương đối của ba điểm B, H, M : khi góc B nhọn thì điểm H nằm giữa hai điểm B và M, lúc đó $BM = BH + HM$, khi góc B tù thì điểm B nằm giữa hai điểm H và M, lúc đó $BM = HM - HB$, tuy nhiên với $b > c$ công thức $b^2 - c^2 = 2a.MH$ vẫn đúng cho cả hai trường hợp trên.

4) • Ngoài các cách giải nêu trên có các cách giải : Cách xét diện tích các tam giác và tứ giác của *Lê Minh Đức*, THCS Lê Quý Đôn, **Hải Dương**; cách dựa vào tính chất đường phân giác trong tam giác của *Nguyễn Đình Hòa*, THCS Việt Trì, **Phú Thọ**; cách tạo ra các tam giác đồng dạng của *Nguyễn Tiến Cường*, THCS Lê Hồng Phong, **Yên Bái**.

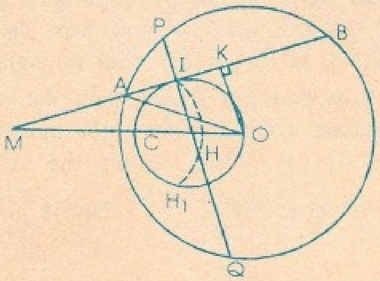
• Các bạn có 2 hoặc 3 cách giải là : *Trần Thái An Nghĩa*, THCS Trần Hưng Đạo, **Quảng Ngãi;** *Nguyễn Tuấn Dương*, THCS Nguyễn Trãi, **Hải Dương;** *Ngô Quang Vịnh*, THCS NK Lạng Giang, **Bắc Giang;** *Dương Mạnh Hồng* THCS Hiệp Hòa, **Bắc Giang;** *Lưu Anh Tú*, THCS Đặng Thái Mai, Vinh, Nghệ An. Các bạn có lời giải tốt là: *Nguyễn Xuân Toản*, Trung tâm chất lượng cao Diễn Châu, **Nghệ An;** *Triệu Thanh Hải*, THCS Võ Thị Sáu, **Yên Bái;** *Nguyễn Mạnh Thường*, THCS Thạch Thất, **Hà Tây;** *Chu Tiến Dũng*, THCS Chu Văn An, Mai Sơn, **Sơn La;** *Phạm Ngọc Thắng*, trường trọng điểm Nghĩa Hưng, **Nam Định;** *Lê Thành Công*, THCS Đông Hưng, **Thái Bình;** *Lê Thị Thu Trang*, THCS Nguyễn Trãi, **Hải Dương;** *Dương Tuấn Anh*, THCS chuyên, **Bạc Liêu;** *Trần Phương Vũ*, THCS Trần Hưng Đạo, **Quảng Ngãi;** *Nguyễn Thành Hiếu*, PTTH Phan Chu Trinh, Diên Khánh, **Khánh Hòa.**

VIỆT HẢI

Bài T5/251. *Từ điểm M ở bên ngoài đường tròn (O, R) kẻ cát tuyến MAB của đường tròn đó. Trung trực của MB cắt đường tròn tại P, Q. Khi cát tuyến MAB quay xung quanh M tìm tập hợp H trung điểm của PQ.*

Lời giải.

• ***Phần thuận.*** Đặt I, K tương ứng là trung điểm của MA, AB. Rõ ràng $OHIK$ là hình chữ nhật, d đó $OH = IK = IB - KB = \frac{MB}{2} - \frac{AB}{2} = \frac{MA}{2}$. Đặt C là trung điểm của MO, ta có $\Delta HOC \backsim \Delta AMO$. Suy ra $\frac{CH}{OA} = \frac{OH}{MA} = \frac{1}{2}$ hay $CH = \frac{R}{2}$. Vậy H thuộc đường tròn tâm C bán kính $\frac{R}{2}$. Giới hạn : $\angle CHO = \angle OAM \geq 90^o$ do đó H chỉ nằm trên cung H_oH_1 của đường tròn $(C, \frac{R}{2})$ với H_o, H_1 là giao của $(C, \frac{R}{2})$ với đường tròn đường kính CO.



• ***Phần đảo.*** Lấy điểm H bất kì thuộc cung H_oH_1 nói trên. Qua H kẻ đường thẳng vuông góc với OH cắt (O, R) tại P và Q. Dựng bán kính OA của (O, R) thỏa mãn các điều kiện: OA và CH nằm trên 2 nửa mặt phẳng cách nhau bởi MO và $\angle AOM = \angle HCO$. MA cắt PQ tại I và cắt (O, R) tại điểm thứ hai B. Hiển nhiên H là trung điểm của PQ và $\Delta HCO \backsim \Delta AOM$. Từ đó $OH = \frac{1}{2}MA$ và $\angle AMO = \angle HOC$. Suy ra $MA // HO$, do đó $MA \perp PQ$ (tại I).

Từ O hạ $OK \perp AB$ thì $OHIK$ là hình chữ nhật nên $IK = HO = \frac{MA}{2}$; $KB = \frac{AB}{2}$.

Do đó $IB = IK + KB = \frac{MA}{2} + \frac{AB}{2} = \frac{MB}{2}$ tức I là trung điểm của MB. Vậy PQ là trung trực của MB.

Kết luận: Quỹ tích của H trung điểm PQ khi MAB quay xung quanh M là cung H_oH_1 thuộc đường tròn $(C, \frac{R}{2})$.

Chú ý: Quỹ tích trên chỉ tồn tại khi điểm M không nằm ngoài đường tròn tâm O, bán kính $3R$. Đặc biệt nếu M nằm trên đường tròn $(O, 3R)$ thì quỹ tích suy biến thành 1 điểm duy nhất.

Nhận xét. Giải tốt bài này có các bạn : **Lào Cai:** *Nguyễn Đức Cường*, 9 THCS Lê Quý Đôn; **Yên Bái:** *Lê Đình Hinh*, 9A, *Triệu Thanh Hải*, 9C Võ Thị Sáu, *Lê Minh Huệ*, 9D Quang Trung; **Thái Nguyên:** *Nguyễn Đức Hạnh*, $9A_1$ Chu Văn An; **Hòa Bình:** *Đào Tùng* (?); **Vĩnh Phúc:** *Kim Đình Thái*, 8B Yên Lạc; **Hải Dương:** *Lê Minh Đức*, 8A Lê Quý Đôn, *Nguyễn Tuấn Dương*, 8A Nguyễn Trãi, *Trần Quang Khải*, 9A Phú Thứ; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Văn Thích*, 8A NK Yên Phong; **Hải Phòng:** *Phạm Gia Vĩnh Anh*, 8 chuyên toán, Trần Phú; **Hà Nội:** *Nguyễn Hoàng Thạch*, 9C, Ngọc Lâm; **Nam Định:** *Tống Anh Quân*, Trần Đức Hiêu, 9I Hàn Thuyên, *Phùng Văn Huân*, Giao Hà, Giao Thủy, *Phùng Văn Thắng*, *Trần Quốc Việt*, *Nguyễn Xuân Trường*, 8A THCS Giao Thủy; **Thanh Hóa:** *Lê Nguyên Minh*, 8A Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa, *Đỗ Mạnh Cường*, 8T Bỉm Sơn, *Vũ Đức Nghĩa*, 9B Đông Cương, *Bùi Ngọc Hân*, 8C NK tỉnh; **Nghệ An:** *Đặng Văn Cường*, 9A THCS Đô Lương, *Vũ Ngọc Dũng*, 9B Đặng Thai Mai, *Đinh Thanh Thường*, 9A Nguyễn Trãi, Tân Kỳ; **Quảng Trị:** *Trần Việt Anh* : 9^2 THCS Nguyễn Trãi, Đông Hà; **Thừa Thiên - Huế:** *Trần Đình Khiêm*, 9^1 Nguyễn Tri Phương, *Huỳnh Trọng Nhật Minh*, 10CT ĐHTH; **Quảng Nam:** *Nguyễn Hồng Lộc*, 9^2 Lê Quý Đôn, Tam Kỳ; **Quảng Ngãi:** *Phạm Tuấn Anh*, 9A Lê Khiết; **Bình Định:** *Trần Đăng Khoa*, 8A QH Quy Nhơn; **Khánh Hòa:** *Lê Giáo*, 8C, Phương Sài; **Đắc Lắc:** *Tạ Quốc Hưng*, 9C, Nguyễn Du; **Cà Mau:** *Phạm Chí Thanh*, $9A^1$, THCS Đầm Dơi.

VKT

Bài T6/251. *Cho dãy $\{x_n\}$ xác định như sau* $x_1 = 7; x_2 = 50, x_{n+1} = 4x_n + 5x_{n-1} - 1975$ *Chứng minh rằng* $x_{1996} \vdots 1997$

Lời giải. (của bạn *Bùi Thu Cúc*, 11A PTCT-ĐHSP Hà Nội).

Xét dãy $\{y_n\}$ với $y_1 = 7$, $y_2 = 50$

$$y_{n+1} = 4y_n + 5y_{n-1} + 22$$

Dễ thấy $y_n \equiv x_n$ (mod1997). Do đó chỉ cần chứng minh $y_{1996} \equiv 0$ (mod1997)

Ta có :

$$4y_{n+1} + 11 = 4(4y_n + 11) + 5(4y_{n-1} + 11)$$

Đặt $z_n = 4y_n + 11$ ta được $z_{n+1} = 4z_n + 5z_{n-1}$ với $z_1 = 39$, $z_2 = 211$. Dùng phương trình đặc trưng của dãy truy hồi cấp 2 ta tìm được

$$z_n = \frac{8(-1)^n + 25.5^n}{3} \Rightarrow z_{1996} = \frac{8 + 25.5^{1996}}{3}$$

Theo định lí Fecma $5^{1996} \equiv 1$ (mod1997)

Vậy $8 + 25.5^{1996} \equiv 33$ (mod1997)

$\Rightarrow 3z_{1996} \equiv 33$ (mod1997)

$\Rightarrow z_{1996} \equiv 11$ (mod1997)

$\Rightarrow 4y_{1996} \equiv 0$ (mod1997)

$\Rightarrow y_{1996} \equiv 0$ (mod1997) (đpcm)

Nhận xét. 1) Có thể tìm được công thức tổng quát của dãy x_n bằng cách đặt

$$u_n = x_n - \frac{1975}{8} \Rightarrow u_{n+1} = 4u_n + 5u_{n-1}$$

và từ đó

$$x_{1996} = \frac{-(1747)5^{1996} + 49675}{120}$$

$\Rightarrow 120\, x_{1996} = -1747(5^{1996} - 1) + 1997.24 \vdots 1997$

do đó $x_{1996} \vdots 1997$

như bạn *Dương Quang Huy*, $11A_1$ PTTH chuyên Yên Bái và một số bạn khác.

2) Một số bạn mắc sai lầm khi thừa nhận rằng

$$x_n \equiv x_{n+1996} \text{ (mod1997)}$$

3) Các bạn sau đây có lời giải tốt : *Trần Đại Nghĩa*, 11T Nguyễn Trãi, **Hải Dương.** *Nguyễn Trường Sinh*, 12A Đào Duy Từ, **Thanh Hóa.** *Lê Thị Thanh An*, $11A_1$ PTTH Hai Bà Trưng, **Vĩnh Phúc.** *Nguyễn Thanh Tuấn*, $12A_1$ Phan Chu Trinh, **Đà Nẵng.** *Đào Thị Chi*, 7B THCS Yên Dũng, **Bắc Giang.** *Đặng Hoàng Minh Hiếu*, 12A PTTH chuyên Thái Bình, *Đào Thị Mỹ Châu*, 11 Toán Lê Quý Đôn, **Quảng Trị.** *Cao Minh Quang*, 12T Nguyễn Bỉnh Khiêm, **Vĩnh Long.** *Trần Tuấn Anh*, 10 Toán Lê Quý Đôn, **Khánh Hòa.** *Lê Huyền Đức*, $11A_1$, **Bà Rịa - Vũng Tàu.**

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T7/251. *Cho phương trình bậc ba* $x^3 - px^2 + qx - p = 0$ *(1) với* $p > 0$, $q > 0$.

Chứng minh rằng nếu (1) có 3 nghiệm thực thì ta có :

$$p \geq \left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{2}}{8}\right)(q + 3) \qquad (2)$$

Lời giải. Đa số các bạn đều phát hiện ra rằng bất đẳng thức (2) không đúng trong nhiều trường hợp,chẳng hạn theo bạn

Cao Thế Thụ (11A, chuyên **Vĩnh Phúc**), chọn $p = \frac{180}{19}$, $q = \frac{461}{19}$ thì (1) có 3 nghiệm $x_1 = 4$; $x_2 = 5$; $x_3 = \frac{9}{19}$ và (2) không xảy ra.

Xin sửa lại đề bài như sau :

Cho phương trình bậc ba

$$x^3 - px^2 + qx - p = 0 \qquad (3)$$

với $p > 0$, $q > 0$. Chứng minh rằng nếu phương trình (3) có 3 nghiệm ≥ 1 thì

$$p \geq \left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{2}}{8}\right)(p+3) \qquad (4)$$

Lời giải. (của các bạn *Nguyễn Sơn Hà*, 11A, Yên Mô, **Ninh Bình;** *Đỗ Quang Dương*, 11T Hoàng Văn Thụ, **Hòa Bình;** *Trần Chí Hòa*, 11CT, Đồng Hới, **Quảng Bình;** *Nguyễn Đức Mạnh*, 12A, Cổ Loa, **Hà Nội**)

Giả sử (3) có 3 nghiệm thực x_1, x_2, x_3 $(x_1 \leq x_2 \leq x_3)$ thì $x_1 + x_2 + x_3 = x_1x_2x_3 = p$; $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = q$ suy ra tồn tại ΔABC sao cho $x_1 = \text{tg}A$, $x_2 = \text{tg}B$, $x_3 = \text{tg}C$ $\left(\frac{\pi}{4} \leq A, B, C < \frac{\pi}{2}\right)$ và (4) có dạng :

$$\text{tg}A\text{tg}B\text{tg}C \geq$$
$$\geq \left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{2}}{8}\right)(\text{tg}A\text{tg}B + \text{tg}B\text{tg}C + \text{tg}C\text{tg}A + 3)$$
$$\Leftrightarrow 8 - 4\sqrt{2} \geq \text{cotg}A + \text{cotg}B + \text{cotg}C + 3\text{cotg}A\text{cotg}B\text{cotg}C \qquad (5)$$

Gọi vế phải của (5) là T. Khi đó :

$$T = \text{cotg}A + \frac{2\sin A}{\cos(B-C) + \cos A} + 3\text{cotg}A\,\frac{\cos(B-C) - \cos A}{\cos(B-C) + \cos A} \leq$$
$$\leq \text{cotg}A + \frac{2\sin A}{\cos(B-C) + \cos A} + 3\text{cotg}A\,\frac{1 - \cos A}{1 + \cos A}$$

Hay $T \leq \dfrac{1}{2\text{tg}\frac{A}{2}} + 3\text{tg}\frac{A}{2} - \frac{3}{2}\text{tg}^3\frac{A}{2}$

Đặt $\text{tg}\frac{A}{2} = t$ thì $\sqrt{2} - 1 \leq t \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$ (do $\frac{\pi}{4} \leq A \leq B \leq C$).

Xét hàm số : $f(t) = \frac{1}{2t} + 3t - \frac{3}{2}t^3$.

Ta thấy $f'(t) \leq 0$ trong đoạn $\left[\sqrt{2} - 1, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$. Từ đó, $f(t)$ nghịch biến và ta có ngay đpcm.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T8/251. *Tìm tất cả các hàm f liên tục trên đoạn $\left[-\frac{1}{12}; \frac{1}{6}\right]$ và thỏa mãn điều kiện :*

$$1996f(x) - \frac{1997}{1998}f\left(\frac{x}{1999}\right) = 1996x^{2000} \quad \forall x \in \left[-\frac{1}{12}; \frac{1}{6}\right]$$

Lời giải.

Đặt $a = \dfrac{1996 \times 1998 \times 1999^{2000}}{1996 \times 1998 \times 1999^{2000} - 1997}$ (*)

Xét hàm số : $g(x) = f(x) - ax^{2000}$ $\forall x \in \left[-\frac{1}{12}; \frac{1}{6}\right]$.

Từ đẳng thức của đề bài ta có :

$$1996g(x) - \frac{1997}{1998}g\left(\frac{x}{1999}\right) = 0 \quad \forall x \in \left[-\frac{1}{12}; \frac{1}{6}\right]$$

$$\Leftrightarrow g(x) = \frac{1997}{1996 \times 1998}g\left(\frac{x}{1999}\right) \quad \forall x \in \left[-\frac{1}{12}; \frac{1}{6}\right]$$

Vì $\forall x \in \left[-\frac{1}{12}; \frac{1}{6}\right]$ ta luôn có $\frac{x}{1999^n} \in \left[-\frac{1}{12}; \frac{1}{6}\right]$ $\forall n \in \mathbf{N}$ nên từ (1) dễ dàng suy ra :

$$g(x) = \left(\frac{1997}{1996 \times 1998}\right)^n g\left(\frac{x}{1999^n}\right) \quad \forall x \in \left[-\frac{1}{12}; \frac{1}{6}\right] \ \forall n \in \mathbf{N} \qquad (2).$$

Vì hàm f liên tục trên $\left[-\frac{1}{12}; \frac{1}{6}\right]$ nên hàm g cũng liên tục trên $\left[-\frac{1}{12}; \frac{1}{6}\right]$. Suy ra, với mỗi $x \in \left[-\frac{1}{12}; \frac{1}{6}\right]$ ta có :

$$\lim_{n\to\infty} g\left(\frac{x}{1999^n}\right) = g\left(\lim_{n\to\infty}\frac{x}{1999^n}\right) = g(0) \qquad (3)$$

Cho $x = 0$ từ (1) ta được $g(0) = 0$ (4).

Từ (2), (3), (4), với lưu ý rằng $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1997}{1996 \times 1998}\right)^n = 0$ ta được :

$$g(x) \equiv 0 \ \forall x \in \left[-\frac{1}{12}; \frac{1}{6}\right].$$

Suy ra : $f(x) = ax^{2000} \ \forall x \in \left[-\frac{1}{12}; \frac{1}{6}\right]$ (5).

Thử lại, dễ thấy hàm $f(x)$ được xác định như trên thỏa mãn các điều kiện của đề bài.

Vậy có duy nhất hàm f cần tìm, đó là hàm được xác định theo (5), trong đó a được xác định theo (*).

Nhận xét. 1) Nhiều bạn cho lời giải sai vì không hiểu đúng khái niệm hàm tuần hoàn và hàm tuần hoàn nhân tính.

2) Không ít bạn quên thử lại hàm tìm được !

3) Các bạn sau đây có lời giải đúng : **Hà Giang:** *Vũ Anh Hải*, 11A PTTH Lê Hồng Phong. **Hà Nội:** *Nguyễn Đức Mạnh*, 12A PTTH Cổ Loa - Đông Anh; *Lê Hải Bình*, 10 Tin PTTH Amsterdam. **Hải Dương:** *Phạm Hoàng Hiệp*, $10A_1$ THCB Hồng Quang; *Vũ Văn Tâm, Bùi Duy Cường, Trần Đại Nghĩa, Trịnh Ngọc Liên, Lê Văn Hiệp*, PTTH Nguyễn Trãi. **Hòa Bình:** *Đỗ Quang Dương*, PTTH Hoàng Văn Thụ. **Quảng Bình:** *Trần Chí Hòa*, PTTH NK thị xã Đồng Hới. **Thanh Hóa:** *Nguyễn Trường Sinh*, THCB Đào Duy Từ; *Lê Xuân Trung*, PTTH Lam Sơn. **Thừa Thiên - Huế:** *Đinh Trung Hiếu*, 9A THCS Phú Bài, Hương Thủy. **Vĩnh Phúc:** *Đỗ Trung Kiên*, PTTH chuyên.

NGUYỄN KHẮC MINH

Bài T9/251. *Bên trong đường tròn ($\mathscr{C}$) bán kính 1 người ta đặt một số hữu hạn các hình tròn nhỏ mà tổng độ dài các đường kính của chúng bằng 3995. Cho MN là một dây cung bất kì của ($\mathscr{C}$). Chứng minh rằng, ta có thể dựng được một đường thẳng song song với MN và cắt ít nhất 1998 hình tròn nhỏ.*

Lời giải. Dựng đường kính AB của ($\mathscr{C}$) mà $AB \perp MN$. Chiếu vuông góc các hình tròn nhỏ lên AB ta được hình chiếu của mỗi hình tròn nhỏ là một đoạn thẳng có độ dài bằng đường kính của hình tròn đó. Do tất cả các hình tròn nhỏ đều nằm trong ($\mathscr{C}$) nên tất cả các đoạn thẳng - hình chiếu đều bị chứa trong đoạn thẳng AB. Vì số hình tròn nhỏ là hữu hạn nên ta có hữu hạn đoạn thẳng - hình chiếu. Lần lượt, theo chiều từ A đến B, kí hiệu các đầu mút của các đoạn thẳng - hình chiếu bởi $A_1, A_2, ..., A_n$ (một điểm A_i, $i = \overline{1,n}$, có thể là đầu mút chung của nhiều đoạn thẳng - hình chiếu). Với mỗi $i = \overline{1, n-1}$, gọi l_i là số đoạn thẳng - hình chiếu chứa đoạn thẳng A_iA_{i+1}. Từ giả thiết của bài ra ta có :

$$\sum_{i=1}^{n-1} A_iA_{i+1} \le AB = 2$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} l_iA_iA_{i+1} = 3995$$

Từ đó suy ra $\exists i \in \{1, 2, ..., n\}$ mà $l_i \ge 1998$, vì nếu, ngược lại, $l_i \le 1997$ $\forall i \in \{1, 2, ..., n\}$ thì :

$$\sum_{i=1}^{n-1} l_iA_iA_{i+1} \le 1997 \sum_{i=1}^{n-1} A_iA_{i+1} \le$$
$$\le 1997 \times 2 < 3995$$

Như vậy, tồn tại đoạn thẳng A_iA_{i+1} mà nó bị chứa trong ít nhất 1998 đoạn thẳng - hình chiếu. Lấy một điểm P bất kì nằm trong đoạn thẳng A_iA_{i+1} ($P \equiv A_i$, $P \equiv A_{i+1}$), qua P dựng đường thẳng $d \perp AB$ thì hiển nhiên $d // MN$ và d cắt ít nhất 1998 hình tròn nhỏ (đpcm).

Nhận xét. 1) "Chìa khóa" để giải quyết bài đã ra là kết quả sau :

Mệnh đề: Nếu bên trong đoạn thẳng AB độ dài a ta đặt một số hữu hạn đoạn thẳng có tổng độ dài bằng l mà $\frac{l}{a} \notin \mathbf{Z}$ thì sẽ tồn tại ít nhất $\left[\frac{l}{a}\right] + 1$ đoạn thẳng có điểm chung trong.

Hầu hết các bạn gửi lời giải tới đã cho lời giải không hoàn chỉnh do đã hoặc không chứng minh, hoặc chứng minh sai, hoặc chứng minh quá vắn tắt kết quả nêu trên.

2) Có 2 bạn cho lời giải sai do đã đưa ra những khẳng định không đúng về hệ thống các đường tròn nhỏ. Cụ thể, một số bạn cho rằng phải có 1997 đường tròn nhỏ đường kính 2 và

một đường tròn nhỏ đường kính 1; bạn còn lại cho rằng tâm của ($\mathscr{E}$) phải nằm trong mỗi đường tròn nhỏ ?!

3) Chỉ có 3 bạn cho lời giải hoàn chỉnh. Đó là : *Hà Minh Ngọc*, 11CT PTTH Lương Thế Vinh, Biên Hòa, **Đồng Nai**; *Nguyễn Hoàng Thạch*, 9C THCS Ngọc Lâm, Gia Lâm, **Hà Nội**. *Nguyễn Phong Thiên*, 10 Toán - khối PTCT-Tin - ĐHKHTN - **ĐHQG Hà Nội.**

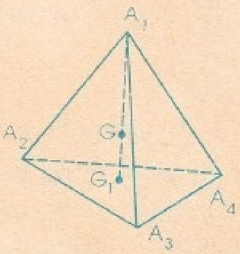
NGUYỄN KHẮC MINH

Bài T10/251. *Gọi G_i là trọng tâm mặt đối diện đỉnh A_i của tứ diện $A_1A_2A_3A_4$ ($i = \overline{1,4}$). Chứng minh rằng: nếu các đường thẳng qua G_i và vuông góc với mặt chứa G_i của tứ diện $A_1A_2A_3A_4$ đồng quy thì tứ diện $A_1A_2A_3A_4$ là tứ diện trực tâm.*

Lời giải. ***Cách 1.*** (của bạn *Lê Ngọc Cương*, 12A PTTH chuyên **Gia Lai**).

Gọi d_i ($i = \overline{1,4}$ là đường thẳng qua G_i, vuông góc với mặt chứa G_i của tứ diện $A_1A_2A_3A_4$.

Gọi G là trọng tâm của tứ diện $A_1A_2A_3A_4$. Dễ thấy : $V_G^{3}(G_i) = A_i$ ($i = \overline{1,4} \Rightarrow (A_2A_3A_4) \,//\, (G_2G_3B_4)$



Theo giả thiết : $d_1 \perp A_2A_3A_4)$

Vậy: $d_1 \perp (G_2G_3G_4)$.

Tương tự như vậy ta có : $d_2 \perp (G_3G_4G_1)$; $d_3 \perp (G_4G_1G_2)$; $d_4 \perp \ (G_1G_2G_3)$.

Suy ra $G_1G_2G_3G_4$ là tứ diện trực tâm $\Rightarrow$ $A_1A_2A_3A_4$ cũng là tứ diện trực tâm.

$V_G^{-3}(G_1G_2G_3G_4) = A_1A_2A_3A_4)$

Cách 2. (của bạn *Nguyễn Đức Thọ*, PTTH **Lào Cai.**)

Gọi I là điểm đồng quy của bốn đường thẳng nói trong đề bài. Ta có :

$$\overrightarrow{G_1G_2} = \overrightarrow{IG_2} - \overrightarrow{IG_1} =$$
$$= \frac{1}{3}(\overrightarrow{IA_3} + \overrightarrow{IA_4} + \overrightarrow{IA_1}) - \frac{1}{3}(\overrightarrow{IA_2} + \overrightarrow{IA_3} + \overrightarrow{IA_4})$$
$$= \frac{1}{3}(\overrightarrow{IA_1} - \overrightarrow{IA_2}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{A_2A_1} \qquad (1)$$

Theo giả thiết :

$$\begin{cases} IG_1 \perp (A_2A_3A_4) \\ IG_2 \perp (A_3A_4A_1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{IG_1}\,.\,\overrightarrow{A_3A_4} = 0 \\ \overrightarrow{IG_2}\,.\,\overrightarrow{A_3A_4} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (\overrightarrow{IG_2} - \overrightarrow{IG_1})\,\overrightarrow{A_3A_4} = 0$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{G_1G_2}\,.\,\overrightarrow{A_3A_4} = 0 \ (2)$$

Từ (1); (2) suy ra : $\overrightarrow{A_1A_2}\,.\,\overrightarrow{A_3A_4} = 0$ $\Rightarrow A_1A_2 \perp A_3A_4$.

Tương tự như vậy ta có : $A_1A_3 \perp A_4A_2$; $A_1A_4 \perp A_1A_2$. Vậy : $A_1A_2A_3A_4$ là tứ diện trực tâm.

Nhận xét. 1) Có 97 bạn giải bài này. Trừ một số bạn còn tất cả đều giải đúng.

2) Ngoài hai lời giải trên một số bạn còn cho lời giải trực tiếp thông qua các khái niệm vuông góc, song song của phần đầu trong chương trình hình học không gian lớp 11. Tất nhiên giải theo hướng đó thì cần phải vẽ hình chi tiết hơn.

3) Hoan nghênh hai bạn : *Phạm Gia Vĩnh Anh*, *Vũ Hoàng Hiệp*, 8T PTTH NK Trần Phú, **Hải Phòng** cũng tham gia giải. Tuy nhiên nên chú ý hơn trong việc vẽ hình biểu diễn (nét khuất, nét hiện...)

4) Hoan nghênh bạn đọc *Nguyễn Văn Thích*, 44 tuổi, Ngũ Kiên, Vĩnh Tường, **Vĩnh Phúc** cũng tham gia giải.

5) Các bạn sau đây có lời giải tốt: *Tô Minh Hoàng*, 9T PTTH NK **Hải Dương;** *Trần Nam Dũng*, 12T Phan Bội Châu, Vinh, **Nghệ An;** *Nguyễn Văn Thường*, 11B PTTH Vĩnh Bảo, **Hải Phòng;** *Nguyễn Tấn Phong*, 12A$_1$ PTTH Hoàng Hoa Thám, **Đà Nẵng;** *Bùi Thu Cúc*, 11A PTCT - ĐHSPI; *Nguyễn Minh Công*, 11T PTTH Hà Nội - Amsterdam; *Nguyễn Phong Thiên*, 10B PTCT, ĐHKHTN-ĐHQG **Hà Nội;** *Phạm Hoàng Hà*, 11A PTTH chuyên **Vĩnh Phúc;** *Hoàng Minh Hiếu*, 12A PTTH chuyên **Thái Bình;** *Nguyễn Sơn Hà*, PTTH Yên Mô, **Ninh Bình.**

NGUYỄN MINH HÀ

Bài L1/251. *Một vật nặng m=1kg được treo bằng một sợi dây không giãn l=1m. Ở vị trí cân bằng vật nhận vận tốc ban đầu v theo phương ngang rồi chuyển động theo quỹ đạo tròn vượt qua điểm treo một góc α = 30° so với phương ngang thì bắt đầu rời khỏi quỹ đạo tròn.*

1) Tính vận tốc v và vận tốc khi vật bắt đầu rời khỏi cung tròn ;

2) Lập phương trình quỹ đạo của vật sau khi rời khỏi cung tròn.

3) Suy luận cho quá trình tiếp theo. Bỏ qua ma sát trong quá trình chuyển động.

Hướng dẫn giải.

1) Tại I, vật bắt đầu rời khỏi quỹ đạo tròn $(T = 0)$ $\frac{mv_o^2}{l} = mg\cos(90^o - \alpha) \rightarrow v_o = \sqrt{5}$m/s

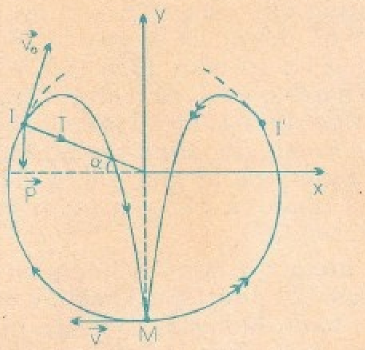
(lấy $g = 10m/s^2$).

Áp dụng định luật bảo toàn cơ năng (xét vị trí M và I):

$$\frac{mv_o^2}{2} + mgh = \frac{mv^2}{2}, \text{ với } h = \frac{3l}{2}.$$

Suy ra $v = \sqrt{35}\,m/s$.

2) Chọn hệ trục tọa độ như trên hình vẽ (gốc O), tìm được :



$x = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}t$; $y = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{15}}{2}t - 5t^2$. Suy ra phương trình quỹ đạo :

$$y = -4x^2 - 3\sqrt{3}x - 1 \qquad (1)$$

(quỹ đạo là đường parabol).

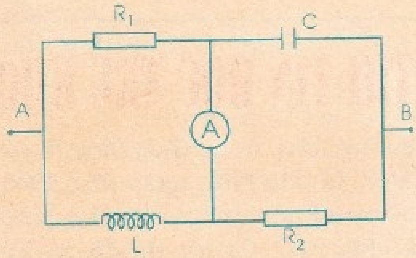
3) Từ (1) nhận xét rằng khi $x = 0$, $y = -1$, nghĩa là quỹ đạo đi qua điểm M : vật trở về vị trí cân bằng ban đầu. Hơn nữa khi đó (áp dụng định luật bảo toàn cơ năng) vật có vận tốc có độ lớn bằng v và có chiều hướng theo phương ngang bên phải (ngược hướng $\vec{v}$ ban đầu). Và lập luận tương tự như trên, ta thấy : vật chuyển động theo cung tròn (bên phải) và bắt đầu rời quỹ đạo tròn tại I' (đối xứng với I qua Oy), sau đó vạch quỹ đạo parabol (đối xứng với parabol đầu qua Oy), rồi lại trở về M. Và sau đó quá trình lặp lại (xem hình vẽ)

(Lưu ý rằng trị số của khối lượng m không ảnh hưởng đến kết quả của bài toán).

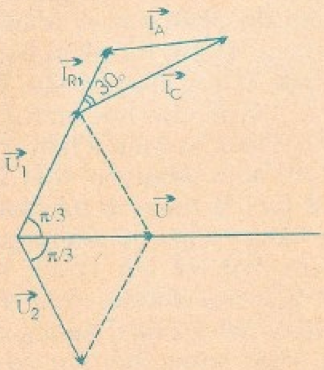
Nhận xét. Các em có lời giải đúng : *Nguyễn Anh Tuấn*, 11A$_1$ PTTH Lê Quý Đôn, **Long An;** *Chu Mạnh Hùng*, 12A PTTH Nghĩa Đàn, **Nghệ An.**

MAI ANH

Bài L2/251. *Cho một đoạn mạch xoay chiều như hình vẽ $R_1 = R_2 = 100\sqrt{3}\,\Omega$; $L = \frac{1}{\pi}H$; $C = \frac{10^{-4}}{\pi}F$; $u_{AB} = 100\sqrt{2}\sin 100\pi t$ (von). Điện trở ampe kế vô cùng nhỏ. Tính số chỉ ampe kế.*



Hướng dẫn giải. Dùng phương pháp giản đồ véctơ (xem hình)



$z_L = 100\Omega$; $z_C = 100\Omega$; $\text{tg}\varphi_1 = \frac{R_1}{z_L} = \sqrt{3} \rightarrow \varphi_2 = \frac{\pi}{3}$; $\text{tg}\varphi_2 = \frac{R_2}{z_C} = \sqrt{3} \rightarrow \varphi_2 = \frac{\pi}{3}$.

Từ $I^2 = I_L^2 + I_{R_1}^2$, suy ra $\frac{1}{z_1^2} = \frac{1}{z_L^2} + \frac{1}{R_1^2} \rightarrow z_1 = 50\sqrt{3}\Omega$; tương tự $z_2 = 50\sqrt{3}\Omega$.

Suy ra $V_1 = U_2 = U = 100V$.

$I_{R_1} = \dfrac{U_1}{R_1} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}A$; $I_C = 1A$. Số chỉ ampe kế : $\vec{I_A} = \vec{I_{R_1}} - \vec{I_C}$

$\to I_A^2 = I_{R_1}^2 + I_C^2 - 2I_{R_1}I_C \cos 30^\circ$

$\to I_A = \dfrac{1}{\sqrt{3}}A$.

Nhận xét. Các em có lời giải đúng : *Trương Quang Trí*, $12A_1$ THCB Sơn Tịnh I, **Quảng Ngãi;** *Lưu Văn Mạnh*, $11A_2$, THCB Ba Đình, Nga Sơn, **Thanh Hóa;** *Nguyễn Văn Sinh*, 11a PTTH Xuân Trường A, **Nam Định;** *Phạm Văn Tập*, $12A_1$ PTTH Vĩnh Bảo, **Hải Phòng;** *Lê Thanh Bình*, 11 Lí PTTH Lương Văn Tụy, Thị xã Ninh Bình, **Ninh Bình;** *Lương Minh Đức*, 10 Lí PTTH Phan Bội Châu, Vinh, **Nghệ An;** *Lê Công Trung*, PTTH chuyên Hùng Vương, **Phú Thọ;** *Đỗ Hải Đăng*, $11A_1$, PTTH Xuân mai, **Hà Tây;** *Nguyễn Trung Kiên*, 12CL2 THCB Lệ Thủy, **Quảng Bình;** *Lê Đức Dũng*, 12L PTTH NK **Quảng Bình;** *Vũ Như Phương*, 12TT, chuyên Lê Quý Đôn, **Quảng Trị;** *Đặng Trần Trí*, 10 CL, PTTH Lê Hồng Phong, Tp Hồ Chí Minh; *Nguyễn Anh Tuấn*, $11A_1$, PTTH Lê Quý Đôn, **Long An;** *Nguyễn Văn Hòa*, $12A_2$, PTTH chuyên Trần Hưng Đạo, Phan Thiết, **Bình Thuận;** *Đào Quý Phúc*, 11A, PTTH Bạc Liêu, thị xã Bạc Liêu, **Bạc Liêu;** *Nguyễn Chí Mai*, 12TA, PTTH Hà Nội - Amsterdam; *Nguyễn Phúc Hải*, $12B_1$, THCB Uông Bí, **Quảng Ninh;** *Đàm Hữu Thu*, 12 Lí, chuyên Lương Văn Chánh, Tuy Hòa, **Phú Yên.**

MAI ANH

HỘI THI TIN HỌC TRẺ KHÔNG CHUYÊN TOÀN QUỐC LẦN THỨ IV

TẠI trường Đại học Khoa học Tự nhiên (thuộc ĐHQG) Hà Nội, ngày 27.8.1998, Hội thi tin học trẻ không chuyên toàn quốc năm 1998 đã khai mạc. Trước đó đã có 56 tỉnh, thành và ngành tổ chức thi vòng 1 ở địa phương.

Về dự Hội thi là 120 thí sinh của 44 đội tuyển thuộc 41 tỉnh, thành, ngành. Trong số đó có 38 em thi phân ban A (dành cho học sinh Tiểu học), 42 em thi phân ban B (dành cho học sinh Trung học cơ sở), 40 em thi phân ban C (dành cho học sinh Phổ thông trung học). Tham dự thi Phần mềm sáng tạo có 22 thí sinh. Nguyễn Anh Quân (Hà Tây) mới 8 tuổi là thí sinh trẻ nhất Hội thi. Đoàn Cao Bằng có hai thí sinh người Tày là Vũ Thị Kim Anh và Hà Trung Kiên. Giải nhất khối tiểu học thuộc về Lê Hoài Anh (Khánh Hòa), Vũ Hồng Phương (Hà Nội). Giải nhất khối trung học cơ sở trao cho Huỳnh Anh Huy (Đà Nẵng) và Phạm Hoài Việt (Tiền Giang). Giải nhất khối trung học phổ thông là Nguyễn Châu Tuấn (Nghệ An) và Tô Hoài Việt (TP Hồ Chí Minh). Ba giải nhất sáng tạo cho thí sinh có sản phẩm phần mềm sáng tạo được trao cho Lê Đình Thuận (học sinh tiểu học Bình Định), Ngô Phan Quang Vũ (học sinh THCS TP Hồ Chí Minh) và Vũ Ngọc Dương (Thái Nguyên).

Huỳnh Lê Lưu Phú (Long An) 8 tuổi là thí sinh trẻ nhất đoạt giải.

Ban tổ chức đã trao giải cho đoàn có điểm trung bình cao nhất Hội thi là Khánh Hòa (75,67 điểm) và 4 đơn vị tổ chức tốt Hội thi ở cơ sở năm 1998 là Cà Mau, Hà Tĩnh, Thái Nguyên và Tổng Công ty Bưu chính Viễn thông Việt Nam. Tổng số giải đã trao là 91 giải thưởng các loại (6 giải nhất, 12 giải nhì, 27 giải ba, 39 giải khuyến khích cá nhân và các giải phần mềm sáng tạo, giải tập thể).

Nội dung thi đối với học sinh tiểu học (thời gian 120 phút) là : Thao tác máy trong hệ điều hành MS.DOS và phần mềm tiếng Việt tự chọn theo mã chuẩn tiếng Việt TCVN 5712 trên môi trường WINDOWS 3.X. Thao tác đồ họa trong phần mềm do Ban đề thi quy định. Trò chơi trên máy. Đối với học sinh trung học cơ sở (thời gian 180 phút) là : Thao tác máy trong hệ điều hành MS.DOS. Thi lập trình trên ngôn ngữ lập trình PASCAL. Đối với học sinh phổ thông trung học (thời gian 180 phút) là : Thi lập trình ngôn ngữ PASCAL ở mức cao hơn.

Từ cuộc thi lần thứ nhất năm 1995 đến cuộc thi lần này đã thấy sự tiến bộ rõ rệt của các thí sinh ở các địa phương. Cuộc thi còn cho thấy sự phát triển Tin học ở các địa phương đã khá đồng đều. Tuy vậy, các giải thưởng chính vẫn rơi vào các học sinh ở các thành phố.

Ban tổ chức cũng quyết định cuộc thi lần thứ V sẽ được tổ chức vào cuối tháng 8 năm 1999.

VŨ KIM THỦY

ĐỀ RA KÌ NÀY

CÁC LỚP THCS

Bài T1/255. Tìm các chữ số a, b, c, d biết rằng số $\overline{abcd1998}$ chia hết cho 1997.

PHẠM HÙNG
(*Hà Nội*)

Bài T2/255. Giải phương trình :

$$(\sqrt{x^2+1}-x)^5+(\sqrt{x^2+1}+x)^5=123$$

NGUYỄN KHẮC MINH
(*Hà Nội*)

Bài T3/255. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{5b^3-a^3}{ab+3b^2}+\frac{5c^3-b^3}{bc+3c^2}+\frac{5a^3-c^3}{ca+3a^2}\le a+b+c$$

PHẠM THỊ THANH QUỲNH
(*Hải Phòng*)

Bài T4/255. Kí hiệu S_A, S_B, S_C, tương ứng là diện tích của các thất giác đều $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$, $B_1B_2B_3B_4B_5B_6B_7$, $C_1C_2C_3C_4C_5C_6C_7$. Giả sử $A_1A_2 = B_1B_3 = C_1C_4$. Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{2}S_A < S_B + S_C < S_A$$

ĐOÀN QUANG MẠNH
(*Hải Phòng*)

Bài T5/255. Trên mặt phẳng, cho hai hình bình hành $A_1A_3A_5A_7$ và $A_2A_4A_6A_8$ có chung tâm O. Các tia OA_1, OA_3, OA_5, OA_7 cắt các cạnh của hình bình hành $A_2A_4A_6A_8$ lần lượt tại F_1, F_3, F_5, F_7. Các tia OA_2, OA_4, OA_6, OA_8 cắt các cạnh của hình bình hành $A_1A_3A_5A_7$ lần lượt tại F_2, F_4, F_6, F_8. Với mỗi $k=\overline{1,8}$ đặt $\lambda_k=\frac{OF_k}{OA_k}$. Chứng minh rằng, tồn tại $k\in\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ để $\lambda_k\ge\frac{1}{\sqrt{2}}$.

(Tâm của hình bình hành là giao điểm của hai đường chéo).

THÁI VIẾT THẢO
(*Nghệ An*)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/255. Dãy số $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ được xác định như sau :

$$a_1=1964,\ a_2=96,$$
$$a_{n+2}=30a_{n+1}^2-75a_{n+1}a_n-1944a_n\ (n\ge 1)$$

Chứng minh rằng không có số hạng nào của dãy $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ là tổng các lũy thừa bậc bảy của ba số nguyên.

TRẦN XUÂN ĐÁNG
(*Nam Định*)

T7/255. Cho các số nguyên dương l, m và đa thức :

$$P(x)=a_0x^{m+1}+a_1x^m+\ldots+a_mx,\quad a_0\ne 0.$$

Lập dãy số $\{v_n=\sum_{k=0}^{ln}P\left(\frac{1}{n+k}\right);\ n=1, 2, \ldots\}$.

Hãy tìm $\lim_{n\to\infty}v_n$.

ĐÀM VĂN NHỈ
(*Thái Bình*)

Bài T8/255. Cho đa thức $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ thỏa mãn điều kiện $|f(x)|\le 1$ khi $|x|\le 1$. Chứng minh rằng với mọi $M>1$ thì :

$$|f(x)|\le\frac{32}{3}M^4-\frac{32}{3}M^2+1 \text{ khi } |x|\le M$$

TRẦN DUY HINH
(*Bình Định*)

Bài T9/255. Trong hệ tọa độ trực chuẩn Oxy, cho hai điểm cố định A, B trên Ox với các hoành độ tương ứng a, b sao cho $0<a<b$. Một điểm P di động trên đường thẳng Oy. Đường thẳng vuông góc với Ox tại A cắt đường thẳng BP tại điểm M. Gọi Q, Q' là các tiếp điểm của các tiếp tuyến kẻ từ B tới đường tròn $(P;\ PM)$. Tìm tập hợp các điểm Q, Q'.

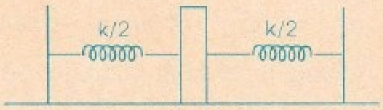
ĐÀO TRƯỜNG GIANG
(*Phú Thọ*)

Bài T10/255. Cho tứ diện đều $ABCD$. Hãy tìm trên các mặt phẳng : (BCD), (CDA), (DAB), (ABC) các điểm X, Y, Z, T sao cho : tổng các độ dài các cạnh của tứ diện $XYZT$ nhỏ nhất.

NGUYỄN MINH HÀ
(*Hà Nội*)

CÁC ĐỀ VẬT LÝ

Bài L1/255. Vật khối lượng m gắn vào hai lò xo nằm có độ cứng như nhau $\frac{k}{2}$, trượt theo mặt bàn. Giả thiết hệ số ma sát μ giữa vật và mặt bàn không đổi. Kéo vật ra khỏi vị trí cân bằng một khoảng A rồi buông ra.

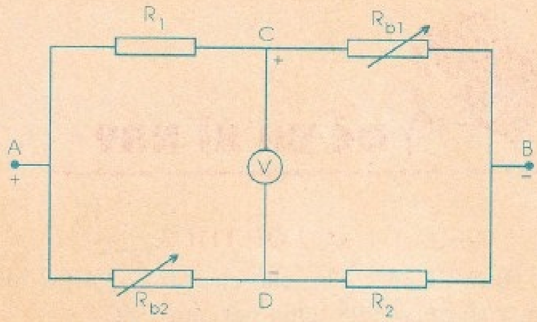


1) Xác lập phương trình chuyển động của vật và tìm nghiệm của nó trong khoảng thời gian $0 < t < \dfrac{\pi\sqrt{m}}{k}$.

2) Xác định A để sau n lần vật đi qua vị trí cân bằng biên độ dao động của nó không nhỏ thua B ?

NGUYỄN CKÔNG MỸ
(*Hà Tĩnh*)

Bài L2/255. Cho mạch điện như hình vẽ U_{AB} không đổi $R_1 = 5\Omega$; $R_2 = 10\Omega$; $R_V = \infty$; $R_A \approx 0$. Ban đầu giá trị của $R_{b1} = 8\Omega$; $R_{b2} = 20\Omega$



Điều chỉnh R_{b1} tăng dần. Hỏi phải điều chỉnh R_{b2} như thế nào để số chỉ V (cực dương tại C) luôn luôn không đổi.

LẠI THẾ HIỀN
(*Hà Nội*)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/255. Find the digits a, b, c, d such that the number $\overline{abcd1998}$ is divisible by 1997.

T2/255. Solve the equation :

$$(\sqrt{x^2+1}-x)^5 + (\sqrt{x^2+1}+x)^5 = 123.$$

T3/255. Let $a, b, c > 0$. Prove that

$$\frac{5b^3-a^3}{ab+3b^2} + \frac{5c^3-b^3}{bc+3c^2} + \frac{5a^3-c^3}{ca+3a^2} \le a+b+c.$$

T4/255. Let S_A, S_B, S_C be respectively the areas of the regular heptagons $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$, $B_1B_2B_3B_4B_5B_6B_7$, $C_1C_2C_3C_4C_5C_6C_7$ and suppose that $A_1A_2 = B_1B_3 = C_1C_4$. Prove that

$$\frac{1}{2}S_A < S_B + S_C < S_A.$$

T5/255. On the plane, let be given two parallelograms $A_1A_3A_5A_7$ and $A_2A_4A_6A_8$ with same center O. The rays OA_1, OA_3, OA_5, OA_7 cut the sides of the parallelogram $A_2A_4A_6A_8$ respectively at F_1, F_3, F_5, F_7. The rays OA_2, OA_4, OA_6, OA_8 cut the sides of the parallelogram $A_1A_3A_5A_7$ respectively at F_2, F_4, F_6, F_8. Let $\lambda_k = \dfrac{OF_k}{OA_k}$ ($k = \overline{1,8}$. Prove that there exists $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ such that $\lambda_k \ge \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

(The center of a parallelogram is the point of intersection of its diagonals).

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/255. The sequence of numbers $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ is defined by : $a_1 = 1964$, $a_2 = 96$, $a_{n+2} = 30a_{n+1}^2 - 75a_{n+1}a_n - 1944a_n$ $(n \ge 1)$

Prove that every term of the sequence $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ is not the sum of the seventh powers of three integers.

T7/255. Let be given positive integers l, m and a polynomial

$$P(x) = a_0x^{m+1} + a_1x^m + \dots + a_mx,\ a_0 \ne 0.$$

Consider the sequence $\left\{ v_n = \sum_{k=0}^{ln} P\left(\frac{1}{n+k}\right) \right\}_{n=1}^{\infty}$.

Find $\lim\limits_{n\to\infty} v_n$.

T8/255. Let the polynomial $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ satisfy the condition $|f(x)| \le 1$ for $|x| \le 1$. Prove that for every $M > 1$,

$$|f(x)| \le \frac{32}{3}M^4 - \frac{32}{3}M^2 + 1 \text{ for } |x| < M.$$

T9/255. In a Cartesian orthogonal system of coordinates Oxy in the plane, let be given two fixed points A, B on Ox with abscisses respectively a, b such that $0 < a < b$. A point P moves on the line Oy. The perpendicular to Ox at A cuts the line BP at M. The tangents issued from B to the circle $(P; PM)$ touch the circle at Q, Q'. Find the locus of Q, Q'.

T10/255. Let be given a regular tetrahedron $ABCD$. Find on the planes (BCD), (CDA), (DAB), (ABC) the points X, Y, Z, T such that the sum of the lengths of the sides of the tetrahedron $XYZT$ attains its least value.

CUỘC THI OLYMPIC TOÁN CHÂU Á - THÁI BÌNH DƯƠNG NĂM 1998

NGUYỄN VIỆT HẢI

Cuộc thi Olympic Toán châu Á - Thái Bình Dương (APMO) lần thứ 10 được tổ chức ở Việt Nam vào ngày 10-3-1998. Đây là lần thứ 3 Việt Nam tham gia cuộc thi có 54 thí sinh của 27 tỉnh, thành phố (đã đăng kí thi học sinh giỏi quốc gia bảng A) và các khối chuyên toán thuộc các trường đại học. Các thí sinh đến thi tại 5 Hội đồng đặt ở Hà Tây, Hải Phòng, Nghệ An, Thừa Thiên - Huế và Đồng Nai. Thí sinh phải làm 5 bài toán trong 4 giờ. Số điểm tối đa là 7 điểm × 5 bài = 35 điểm. Mỗi nước được gửi cho Ban tổ chức APMO quốc tế không quá 10 bài làm và được nhận tối đa là 10 giải theo quy tắc : số huy chương vàng không quá 1, số huy chương bạc không quá 3, số huy chương vàng, bạc và đồng không quá 7. Thí sinh không được huy chương nhưng có số điểm đạt huy chương đồng hoặc làm trọn vẹn ít nhất 1 bài được tặng bằng khen (BK). Thể lệ thi chi tiết hơn của cuộc thi APMO bạn đọc có thể xem trong tạp chí Toán học và Tuổi trẻ số 4 (214) năm 1995 và số 10 (244) năm 1997.

Kết quả cuộc thi APMO lần thứ 10 năm 1998 như sau :

- Số nước hoặc lãnh thổ dự thi : 22
- Số học sinh được gửi bài cho Ban tổ chức APMO quốc tế là N = 208
- Điểm trung bình : M = 16,96
- Điểm tối thiểu đạt huy chương vàng (V) : 27,76
- Điểm tối thiểu đạt huy chương bạc (B) : 20,56
- Điểm tối thiểu đạt huy chương đồng (Đ) : 13,39

TT	Tên nước	N	M	V	B	Đ	BK
1	Achentina	10	15,9	0	2	5	3
2	Ôxtraylia	10	27,4	1	2	4	3
3	Bôlivia	1	11,0	0	0	0	1
4	Canada	10	23,6	1	2	4	3
5	Chilê	10	9,9	0	1	1	2
6	Côlômbia	10	13,3	1	1	2	4
7	Côxta Rica	10	4,0	0	0	1	2
8	Hồng Công	10	23,0	1	2	4	3
9	Inđônêxia	7	6,1	0	0	0	4
10	Malaysia	10	6,8	0	0	2	0
11	Mêhicô	10	10,0	0	1	1	6
12	Niu Dilân	10	12,4	1	1	2	1
13	Pêru	10	13,4	0	3	0	5
14	Philippin	10	4,9	0	0	1	1
15	Đài Loan	10	30,9	1	2	4	3
16	Hàn Quốc	10	33,4	1	2	4	3
17	Singapo	10	18,8	1	2	4	3
18	Nam Phi	10	14,2	1	0	3	6
19	Thái Lan	10	14,8	1	2	2	4
20	Triniđat Tôbagô	10	8,8	0	1	1	3
21	Hoa Kì	10	29,8	1	2	4	3
22	Việt Nam	10	32,1	1	2	4	3

Việt Nam gửi cho Ban tổ chức APMO 10 bài thi tốt nhất của mình và đã giành được số giải tối đa cho mỗi nước, trong đó có 1 thí sinh đạt điểm tuyệt đối.

TT	Họ và tên	Lớp	Đơn vị	Điểm	Giải
1	Đoàn Nhật Dương	12	Thái Bình	35	HC Vàng
2	Bùi Mạnh Hùng	11	ĐH KHTN HN	33	HC Bạc
3	Đặng Anh Tuấn	12	Hải Phòng	33	HC Bạc
4	Nguyễn Lưu Sơn	12	ĐHKHTN HN	33	HC Đồng
5	Vũ Việt Anh	12	ĐHSP HN	32	HC Đồng
6	Trần Văn Hoàng	12	Thái Bình	32	HC Đồng
7	Hoàng Sĩ Nguyên	12	Thái Nguyên	32	HC Đồng
8	Ngô Văn Sáng	12	Hà Nội	31	BK
9	Nguyễn Hữu Hội	12	Quảng Ngãi	30	BK
10	Phan Linh	12	Hà Nội	30	BK

Dưới đây là đề thi của cuộc thi Olympic Toán châu Á - TBD lần thứ 10 :

Bài 1. Giả sử F là tập tất cả các bộ gồm n tập $(A_1, A_2, ..., A_n)$, trong đó mỗi A_i $(i = 1, 2, ..., n)$ là một tập con của tập $\{1, 2, ..., 1998\}$ Kí hiệu $|A|$ là số phần tử của tập A. Hãy tính

$$\sum_{(A_1, A_2, ..., A_n) \in F} |A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n|$$

Bài 2. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương a và b, số $(36a + b)(a + 36b)$ không thể là một lũy thừa của 2.

Bài 3. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng :

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right) \geq 2\left(1+\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\right).$$

Bài 4. Cho tam giác ABC. Gọi D là chân đường cao hạ từ A. Gọi E và F là hai điểm khác D nằm trên một đường thẳng đi qua D sao cho AE vuông góc với BE, AF vuông góc với CF. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng BC và EF. Chứng minh rằng AN vuông góc với NM.

Bài 5. Tìm số nguyên n lớn nhất có tính chất : n chia hết cho mọi số nguyên dương bé hơn $\sqrt[3]{n}$.

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN VÀ LỜI GIẢI

BÀI SỐ 9

Problem. Let m be a number such that if a number n is divisible by m then every number obtained from n by any permutation of its digits is also divisible by m. Prove that m can only be equal, 1, 3, and 9.

Solution. Let m have k digits. Among the numbers of the form $10a_1...a_n$ there always exists at least one number divisible by m. Let $10b_1...b_n$ be such a number. By the assumption, both numbers $b_1...b_n10$ and $b_1...b_n01$ are diviseble by m. Their difference is 9. Therefore, m must be a divisor of 9 which can be only 1, 3, 9.

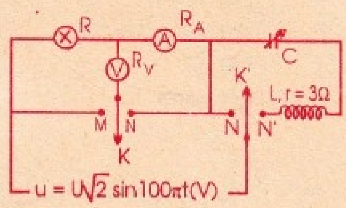
Từ mới :

let = giả sử
such that = sao cho
permutation = phép hoán vị
among = trong, giữa
form = dạng
always = luôn luôn
exist = tồn tại (động từ)
at least = ít nhất
such = như thế
assumption = giả thiết
both = cả hai
difference = hiệu
divisor = ước

NGÔ VIỆT TRUNG

ĐÍNH CHÍNH

Xin các bạn sửa lại sơ đồ mạch điện của bài L2/254 như hình bên.



Cám ơn .

TÌM HIỂU SÂU THÊM TOÁN HỌC PHỔ THÔNG

Một số vấn đề về NGHIỆM BỘI của PHƯƠNG TRÌNH

PHẠM NGỌC BỘI
(ĐHSP Vinh)

Trong sách giáo khoa phổ thông, ta mới chỉ đề cập đến khái niệm nghiệm kép của một đa thức, tuy vậy các bài toán lại đòi hỏi các kiến thức liên quan đến khái niệm nghiệm bội (nói riêng: nghiệm kép) của một phương trình. Ví dụ : (Đề 143, 1.2) Chứng minh rằng đồ thị hàm số

$$y = \frac{-m(x+1)+x+2}{m(x+1)-1} \quad (m \neq 0)$$

luôn tiếp xúc với đường thẳng cố định.

Phần đầu lời giải là : Gọi $y = a(x+1) + b$ là đường thẳng cần tìm thì phương trình :

$$\frac{-m(x+1)+x+2}{m(x+1)-1} = a(x+1) + b \qquad (1)$$

có nghiệm kép với mọi $m \neq 0$, hay phương trình bậc hai

$$am(x+1)^2 + [m(1+b) - (1+a)](x+1) - (1+b) = 0 \quad (2)$$

có nghiệm kép, $\forall m \neq 0$. Vì vậy cần phải hiểu thế nào là nghiệm kép của phương trình và các phép biến đổi nào giữ nguyên nghiệm kép của nó ?

Định nghĩa: u được gọi là nghiệm bội n (n là số tự nhiên, $n \geq 2$) của phương trình $f(x) = g(x)$ nếu các hàm số $f(x)$ và $g(x)$ có đạo hàm đến cấp n-1 tại u và u là nghiệm của hệ phương trình :

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \\ \dots\dots\dots\dots \\ f^{(n-1)}(x) = g^{(n-1)}(x) \end{cases} \qquad (3)$$

và đạo hàm cấp n của u tại $f(x)$, $g(x)$ hoặc không xác định, hoặc xác định nhưng :

$$f^{(n)}(u) \neq g^{(n)}(u) \qquad (4)$$

Khi $n = 2$ ta gọi là nghiệm kép. Từ định nghĩa ta thấy ngay : nếu u thỏa mãn hệ (3) thì u là nghiệm bội $k \geq n$ của phương trình $f(x) = g(x)$ Ta có một số tính chất sau :

Tính chất 1. *Giả sử $y = f(x)$ và $y = g(x)$ là hai hàm số xác định trên D, khi đó đồ thị của chúng tiếp xúc với nhau tại điểm có hoành độ bằng u $\in$ D khi và chỉ khi u là nghiệm bội n của phương trình $f(x) = g(x)$* (5)

Thật vậy nếu hai đồ thị tiếp xúc nhau tại $M(u, v)$ thì u là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f'(x) = g'(x) \end{cases} \qquad (6)$$

Vậy u là nghiệm bội n của (5).

Ngược lại nếu u là nghiệm bội n của (5) thì u là nghiệm của hệ (3) nhưng n-1 $\geq$ 1 nên hệ (3) có ít nhất 2 phương trình (6). Từ đó hai đồ thị phải tiếp xúc nhau tại điểm có hoành độ u.

Khi tìm nghiệm bội của phương trình bất kì ta thường quy về tìm nghiệm bội của đa thức vì vậy các tính chất sau có ích cho việc đó.

Tính chất 2. u là nghiệm bội n của đa thức $F(x)$ khi và chỉ khi $F(x) = (x-u)^n.P(x)$ với $P(x)$ là đa thức khác 0, không nhận u là nghiệm. Vậy khi đó u là nghiệm bội của đa thức $F(x)$ theo nghĩa đã biết (đa thức có đúng n nghiệm bằng u).

Chứng minh: Bằng quy nạp ta có thể chứng minh công thức sau (dành cho bạn đọc) :

Nếu $Q(x)$ và $R(x)$ là các hàm số của x thì

$$[Q(x)R(x)]^{(k)} = Q^{(k)}(x)R(x) + C_k^1 Q^{(k-1)}(x).R'(x) + C_k^2 Q^{(k-2)}(x)\,R''(x) + \dots + Q(x)R^{(k)}(x). \quad (7)$$

a) Nếu $F(x) = (x-u)^n P(x)$, dùng công thức (7) ta có :

$$[F(x)]^{(k)} = n(n-1)\dots(n-k+1)(x-u)^{n-k}P(x) + kn(n-1)\dots(n-k+2)(x-u)^{n-k+1}P'(x) + \dots + \dots + (x-u)^k P^{(k)}(x).$$

Nên $F^{(k)}(u) = 0 \ \forall k \leq n-1$,

$F^{(n)}(u) = u!P(u) \neq 0$.

b) Ngược lại nếu u là nghiệm bội của n thì $F(x) = (x-u)^n P(x)$ với $P(x)$ là đa thức khác 0 và $P(u) \neq 0$. Thật vậy giả sử $F(x) = (x-u)^m P(x)$, $m \in N$, $P(x)$ là đa thức khác 0, không nhận u là nghiệm.

+) Nếu $m < n$ áp dụng công thức (7) ta có $F^{(m)}(u) \neq 0$, nhưng $m \leq n$-1 tức là u không thỏa mãn phương trình thứ m+1 trong hệ (3)

+) Nếu $m > n$ áp dụng (7) ta có $F^{(o)}(u) = 0$, $\forall k \leq m-1 \leq n$, tức là $F^{(n)}(u) = 0$, nên điều kiện (4) không thỏa mãn.

Vậy $m = n$.

Sử dụng tính chất 2 ta có :

Tính chất 3: *Giả sử b là số thực tùy ý, thì u là nghiệm bội n của đa thức*

$$a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

khi và chỉ khi u-b là nghiệm bội n của đa thức

$$a_m(x+b)^m + a_{m-1}(x+b)^{m-1} + \dots + a_1(x+b) + a_0.$$

Tính chất 4: *Giả sử $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$, $r(x)$ là các đa thức thì u là nghiệm bội n của phương trình* $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{h(x)}{r(x)}$ *(8) khi và chỉ khi u là nghiệm bội n của phương trình* $f(x)r(x) = g(x)h(x)$ (9) thỏa mãn : $g(u) \neq 0$, $r(u) \neq 0$

Cách chứng minh: Giả sử u là nghiệm bội n của (9) thì $f(x)r(x) - g(x)h(x) = (x-u)^n P(x)$, trong đó $P(x)$ là đa thức khác 0, không nhận u là nghiệm do đó nếu đặt :

$$q(x) = \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{h(x)}{r(x)} = \frac{f(x)r(x) - g(x)h(x)}{g(x)r(x)} =$$
$$= (x-u)^n \frac{P(x)}{g(x)r(x)}$$

Áp dụng (7) cho $Q(x) = (x-m)^n$, $R(x) = \dfrac{P(x)}{g(x)r(x)}$ ta có $q^{(k)}(x) = n(n-1)\dots(n-k+1)$.

$$(x-u)^{(n-k)}\frac{P(x)}{g(x)r(x)} +$$
$$+ kn(n-1)\dots(n-k+2)(x-u)^{(n-k-1)}\frac{P(x)}{g(x)r(x)} + \dots +$$
$$+ (x-u)^{(n)} \times \frac{P(x)}{g(x)r(x)}.$$

Vì vậy dễ dàng tính được $q^{(k)}(u) = 0$ $\forall k < n$ và $q^{(n)}(u) = n!\dfrac{P(u)}{g(u)r(u)} \neq 0$. Tức là u là nghiệm bội n của (8).

Ngược lại giả sử u là nghiệm bội n của (8), hoàn toàn tương tự chứng minh phần b của tính chất 2 ta có u cũng là nghiệm bội n của (9).

Do có các tính chất đã nêu ta yên tâm khi thực hiện một số phép biến đổi tương đương mà không làm thay đổi nghiệm bội của phương trình :

Ví dụ 1: Ta lấy lại ví dụ [đề 143] đã nêu trên. Ở đây ta sử dụng lời giải của đáp án bộ đề thi mà các bạn sẵn có trong tay, mặc dù có nhiều cách giải khác. Ta bổ sung một vài chỗ để lời giải chính xác, nếu không muốn nói đây là sự minh họa cho cách giải này bởi cơ sở lí thuyết đã nêu trên. Giả sử đường thẳng $y = a(x+1) + b$ tiếp xúc với đồ thị hàm số nói trên với mọi $m \neq 0$, khi đó hoành độ u của tiếp điểm là nghiệm bội n của phương trình (1), $\forall m \neq 0$. Tức là u là nghiệm bội n ($u \neq \dfrac{1}{m-1}$) của phương trình :

$am(x+1)^2+[m(1+b)-(1+a)](x+1)-(1+b) = 0$ (2), $\forall m \neq 0$

Do tính chất 3, (2) có nghiệm bội n khi và chỉ khi $amx^2 + [m(1+b) - (1+a)]x - (1+b)] = 0$ (10) có nghiệm bội n. Vì (10) là phương trình bậc hai nên nghiệm bội là nghiệm kép, sau đó ta giải hệ điều kiện tương ứng. Cũng cần lưu ý rằng khi giải ra $a = b = -1$ ta phải thử lại để chứng tỏ, $\forall m \neq 0$ nghiệm kép u của (2) thỏa mãn điều kiện $u \neq \dfrac{1}{m-1}$ (Tương ứng với $g(u) \neq 0$ trong tính chất 4 nói trên).

Ví dụ 2. Với giá trị nào của m thì đồ thị của các hàm số :

$$y = \frac{x^3 + (2m-1)x^2 - (3m-1)x - (m^2+3m)}{x-m} \text{ và}$$

$y = x+m+1$ tiếp xúc nhau ?

Lời giải. Đồ thị của hai hàm số nói trên tiếp xúc nhau tại điểm có hoành độ u là nghiệm bội n của phương trình :

$$\frac{x^3 + (2m-1)x^2 - (3m-1)x - (m^2+3m)}{x-m} = x+m+1.$$

Hay u là nghiệm bội n của phương trình $x^3 + 2(m-1)x^2 - 3mx - 2m = 0$ (11) và $u \neq m$.

Vì $x^3 + 2(m-1)x^2 - 3mx - 2m =$
$= (x-2)(x^2+2mx+m)$.

Suy ra u là nghiệm bội của (11) khi :

a) Nếu $u = 2$ là nghiệm bội của (11) thì 2 phải là nghiệm của $x^2 + 2mx + m = 0$ (12) nên $m = -\dfrac{4}{5}$, khi đó $u = 2 \neq m$ nên giá trị này của m được lấy.

b) Nếu u là nghiệm bội của (12) thì đó là nghiệm kép, nên $m = 0$ hoặc $m = 1$, với $m = 0$ thì $u = 0 = m$ nên giá trị này của m không lấy được ; với $m = 1$, $u = -1 \neq m$ nên giá trị này được lấy.

Vậy $m = 0$ hoặc $m = -\dfrac{4}{5}$ là các giá trị cần tìm.

Diễn đàn DẠY VÀ HỌC TOÁN

Dạy cho học sinh MÒ MẪM, DỰ ĐOÁN

NGUYỄN CẢNH TOÀN

LTS : *Nghị quyết Trung ương 2 ghi rõ :"Đổi mới mạnh mẽ phương pháp giáo dục - đào tạo, khắc phục lối truyền thụ một chiều, rèn luyện thành nếp tư duy sáng tạo của người học..., phát triển mạnh phong trào tự học, tự đào tạo thường xuyên và rộng khắp trong toàn dân, nhất là thanh niên...". Trong báo cáo về nhiệm vụ năm học 1998-1999 của Bộ Giáo dục và Đào tạo có viết : "Chỉ đạo mạnh mẽ việc đổi mới phương pháp dạy học và phong trào tự học, tự đào tạo", "coi trọng giáo dục chính trị tư tưởng, nhân cách, khả năng tư duy sáng tạo và năng lực thực hành của học sinh".Để hưởng ứng chủ trương nêu trên,* ***Diễn đàn dạy và học toán*** *của Tạp chí TH&TT mong nhận được nhiều ý kiến của các nhà giáo, các nhà nghiên cứu giáo dục và của các em học sinh về việc* ***đổi mới cách dạy, cách học toán.***

Xin lấy ngay một ví dụ cụ thể và đơn giản : dạy định lí về tổng các góc trong tam giác. Theo lối truyền thụ một chiều thì thầy nêu định lí rồi chứng minh, trò theo dõi chứng minh, cố gắng hiểu, về nhà củng cố lại rồi ứng dụng làm bài tập. Nếu học tốt, trò nắm chắc được một kiến thức mới, vận dụng được vào làm bài tập và năng lực suy diễn cũng được rèn luyện. Còn theo phương pháp mới nên dạy như thế nào ? Nên chăng, trước khi dạy đến định lí này, giáo viên giao cho mỗi học sinh về nhà chuẩn bị : mỗi em vẽ ra trong vở 5 tam giác tùy ý, đo các góc rồi cộng lại. Đến lớp, thầy gọi một em lên bảng trình bày kết quả và bảo các em khác, mỗi em đối chiếu với kết quả của mình : một sự tương phản đập ngay vào sự chú ý của các em : 200 tam giác (giả sử lớp có 40 em) hình dạng, kích thước rất khác nhau, ấy thế mà tổng các góc của chúng lại suýt soát như nhau. Định lí ở đây không từ trên trời rơi xuống mà do các em tự tìm ra bằng quy nạp (rất ít dùng trong cách dạy "truyền thụ một chiều"), mò mẫm, dự đoán (trong trường hợp đơn giản này không phải mò mẫm nhiều). Đó là dạy theo phương châm "trao cho người khác kiến thức thì không bằng trao cho họ cách tìm ra kiến thức". Đừng nghĩ rằng "mò mẫm" thì có gì là "sáng tạo". Nhiều nhà khoa học lớn vẫn phải dùng đến nó. Không dạy "mò mẫm" thì người thông minh nhiều khi phải chịu bó tay chỉ vì không nghĩ đến hoặc không biết "mò mẫm". Tôi đã có một thời gian ra đề thi và chấm thi vào Đại học. Tôi thấy rằng nhiều học sinh có tổng số điểm cao nhưng lại phải bó tay trước một câu về quỹ tích : bài ra đòi hỏi tìm quỹ tích của một điểm M mà không cho biết quỹ tích đó là hình gì ; mà không biết nó là hình gì thì khó tìm ra phương hướng lời giải. Trong trường hợp này, có thể tìm xem quỹ tích là hình gì bằng quy nạp rất đơn giản : Vẽ thật chính xác vài vị trí của M; nếu thấy các vị trí đó thẳng hàng thì đoán được quỹ tích là đường thẳng, (hay đoạn thẳng), còn nếu không thì nó có thể là vòng tròn (hay cung tròn) vì ở phổ thông hồi đó, trong hình học phẳng, học sinh không học được gì khác ngoài đường thẳng và vòng tròn.

Nhưng lợi ích của cách dạy trên không chỉ có thế. Nó làm nổi rõ tương phản giữa "vạn biến" (được cụ thể hóa ra ở đây bằng 200 tam giác cụ thể khác nhau) và "bất biến" (tổng số góc). Theo cách dạy cũ thì "vạn biến" ẩn vào trong hai chữ "bất kì" (thầy nói : cho một tam giác bất kì *ABC* nhưng rồi thầy vẽ chỉ một - chứ không phải 200 - tam giác cụ thể *ABC* và lướt nhanh qua hai chữ "bất kì", còn trò thì ở trạng thái tâm lí chờ để theo dõi chứng minh của thầy trên bảng, có chú ý gì đến hai chữ "bất kì"). Nhiều lần như thế, sự tương phản giữa "vạn biến" và "bất biến" sẽ in sâu vào tâm trí học sinh. Tôi đã thử làm như sau : nhân dạy cho cao học mà người học là giáo viên toán phổ thông trung học, buổi giáp mặt đầu tiên, tôi ra bài : "Hãy dùng thực tiễn dạy toán của mình để bình luận câu: dĩ bất biến ứng vạn biến". Không ai làm được không phải vì bài khó, mà vì kiểu bài lạ hiếm thấy trong việc học toán và dạy toán của mỗi người. Chuyện "dễ" mà không rèn luyện sẽ hóa "khó" là như vậy.

Đi xa hơn, sẽ dẫn đến thế giới quan về sự thống nhất biện chứng giữa "biến đổi" và "không biến đổi" hay, nói một cách triết học hơn, giữa "vận động" và "đứng im": thế giới luôn luôn vận động, nhưng là vận động trong trật tự, nghĩa là có quy luật. Cái "vạn biến" là hiện tượng, cái "bất biến" là quy luật. Người có thế giới quan này thì nhìn vào cái "vạn biến" nào cũng tin rằng trong đó có cái bất biến và mong muốn tìm ra cái bất biến đó rồi ứng dụng nó để xử lí vạn vạn biến: từ khi loài người phát hiện ra sự bất biến của tổng số góc của một tam giác thì đã có hàng tỉ người (trong đó có học sinh) dùng cái bất biến đó để giải hàng tỉ tỉ vấn đề thực tiễn cũng như lí luận (học sinh chủ yếu là giải bài tập). Thế giới quan này là một nội lực rất mạnh làm nền cho sự phát triển tư duy sáng tạo.

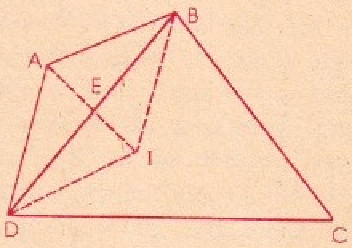
Nếu ta ví "thế giới quan" này như một bãi phù sa thì từng bài dạy kiểu như trên là một hạt cát. Phải tích lũy thường xuyên, liên tục, lâu dài thì bãi phù sa mới hình thành. Từ một bài dạy đến nhiều bài dạy về môn toán, về tất cả các môn khác, đâu đâu cũng khắc sâu cái "bất biến" trong cái "vạn biến" thì hiệu quả theo hướng nêu trên mới chóng thành hiện thực.

CÁC BÀI TOÁN VỀ ... *(Tiếp trang 18)*

$$x_E = \frac{x_B + x_D}{2} \Rightarrow x_D = 2x_E - x_B$$

Thay $x_E = \dfrac{x_A + x_C}{2} \Rightarrow x_D = x_A + x_C - x_B \in \mathbf{Z}$

Tương tự ta có $y_D = y_A - y_C - y_B \in \mathbf{Z} \Rightarrow D$ là điểm nguyên. Mặt khác nếu miền ΔACD có chứa một điểm nguyên M nà đó thì M' là điểm đối xứng với M qua E cũng là điểm nguyên (theo chứng minh tương tự ở trên), điều này mâu thuẫn với giả thiết ΔABC đẹp. Vậy hình bình hành $ABCD$ là đẹp.



Hình 3

Áp dụng : Nếu tứ giác $ABCD$ là đẹp (xem hình 3) thì mỗi đường chéo của tứ giác chia tứ giác thành hai tam giác đẹp. Khi đó lấy đối xứng của mỗi đỉnh qua trung điểm của một đường chéo ta được một hình bình hành đẹp. Có thể chọn được đỉnh thích hợp để điểm đối xứng với nó nằm ở miền trong tứ giác nếu $ABCD$ không phải là hình bình hành. Điều này mâu thuẫn với giả thiết $ABCD$ là tứ giác đẹp $\Rightarrow ABCD$ là hình bình hành.

Nhận xét. * Sử dụng b) ta có thể chứng minh a) một cách dễ dàng.

* Ta có thể chứng minh được kết quả "mạnh" hơn sau :

Một tam giác là đẹp khi và chỉ khi nó là tam giác nguyên và có diện tích bằng 0,5.

Một tứ giác đẹp khi và chỉ khi tứ giác đó là một hình bình hành nguyên có diện tích bằng 1.

Kết quả này cho phép ta "hình dung" được toàn bộ các tam giác và tứ giác đẹp. Bây giờ xin các bạn hãy thử sức với mấy bài tập cơ bản sau đây :

1. Nếu ΔABC là đẹp thì khi tịnh tiến đỉnh C theo vectơ $n\vec{AB}$ ($n \in \mathbf{Z}$) tới C' ta cũng có $\Delta ABC'$ là đẹp.

2. Các đỉnh của một đa giác (không nhất thiết phải lồi) nằm ở các điểm nguyên. Bên trong nó có n điểm nguyên, còn trên biên có m điểm nguyên. Chứng minh rằng diện tích của nó bằng : $n + \dfrac{m}{2} - 1$ (Công thức Píc).

3. Các đỉnh của ΔABC nằm ở các điểm nguyên sao cho trên biên của nó không có điểm nguyên nào khác còn bên trong nó có đúng một điểm nguyên O. Chứng minh rằng: O là trọng tâm của ΔABC.

DÀNH CHO CÁC BẠN CHUẨN BỊ THI VÀO ĐẠI HỌC

SỬ DỤNG TÍNH CHẤT GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI GIẢI PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH CHỨA DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

MAI THẮNG
(*Nha Trang, Khánh Hòa*)

Trong các kì thi vào Đại học, các bài toán chứa dấu giá trị tuyệt đối, hoặc các bài toán đưa về dạng này đã làm cho không ít bạn phải lúng túng. Để giúp các bạn tháo gỡ phần nào, trong bài viết này chúng tôi trình bày việc vận dụng một số tính chất giá trị tuyệt đối, mà nhờ chúng trong một bài toán việc khử dấu giá trị tuyệt đối đã trở nên hết sức thuận tiện, mà nhờ vậy cách giải cũng trở nên ngắn gọn và đẹp.

I. HỆ THỐNG LÍ THUYẾT

Xét một số tính chất của $|A|$:

$$|A| = \begin{cases} A \text{ nếu } A \geq 0 \\ -A \text{ nếu } A < 0, \ \forall A \in R \end{cases}$$

1) $|a+b| \leq |a| + |b|$.

Chứng minh. 1) $\Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 \leq$
$\leq a^2 + 2|ab| + b^2 \Leftrightarrow ab \leq |ab|$.

Bất đẳng thức này đúng. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow ab \geq 0$.

Từ 1) $\Rightarrow$: **1-1)** $|a+b| < |a| + |b| \Leftrightarrow ab < 0$

1-2) $|a+b| = |a| + |b| \Leftrightarrow ab \geq 0$.

Từ (**1-2**) $\Rightarrow$:

1-3) $|a| + |b| = a + b \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ b \geq 0. \end{cases}$

Thay b bằng $-b$ ta có

1-4) $|a| + |b| = a - b \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ b \leq 0. \end{cases}$

2) $|a-b| \geq |a| - |b|$.

Chứng minh: Lợi dụng 1), ta có :
$|a| = |(a-b) + b| \leq |a-b| + |b|$
$\Leftrightarrow |a| - |b| \leq |a-b|$ (đpcm).

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow b(a-b) \geq 0$.

Từ 2) $\Rightarrow$ **2-1)** $|a-b| = |a| - |b| \Leftrightarrow b(a-b) \geq 0$

2-2) $|a-b| > |a| - |b| \Leftrightarrow b(a-b) < 0$

II. CÁC BÀI TOÁN VẬN DỤNG

Bài toán 1. (Sử dụng **1-2**). Đề thi ĐH Thủy Sản - 1997).

Giải phương trình :

$$\sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x + 3 - 4\sqrt{x-1}} = 1 \quad (1)$$

Bài giải :

(1) $\Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{x-1} - 1)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-1} - 2)^2} = 1$ (2)

$\Leftrightarrow |\sqrt{x-1} - 1| + |2 - \sqrt{x-1}| = |(\sqrt{x-1} - 1) + (2 - \sqrt{x-1})|$

$\Leftrightarrow (\sqrt{x-1} - 1)(2 - \sqrt{x-1}) \geq 0$

$\Leftrightarrow 1 \leq \sqrt{x-1} \leq 2$

$\Leftrightarrow 1 \leq x - 1 \leq 4 \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 5$

Kết luận : Nghiệm của phương trình là $2 \leq x \leq 5$.

Nhận xét. 1) Rất nhiều thí sinh giải bài này chỉ thu được nghiệm $x = 2$ và $x = 5$.

2) Bài toán trên có thể giải nhờ **1-3** như sau :

(2) $\Leftrightarrow |\sqrt{x-1} - 1| + |2 - \sqrt{x-1}| =$
$= (\sqrt{x-1} - 1) + (2 - \sqrt{x-1})$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1} - 1 \geq 0 \\ 2 - \sqrt{x-1} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1} \geq 1 \\ \sqrt{x-1} \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 5.$$

Bài toán 2. *Giải bất phương trình :*

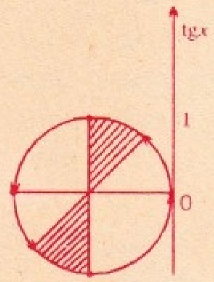
$$\left|\frac{\text{tg}x}{\text{tg}x - 1}\right| + |\text{tg}x| > \frac{\text{tg}^2 x}{|\text{tg}x - 1|} \quad (1)$$

Bài giải. (Sử dụng **1-1**)

Khi đó (1) $\Leftrightarrow$

$$\left|\frac{\text{tg}x}{\text{tg}x - 1}\right| + |\text{tg}x| > \left|\frac{\text{tg}x}{\text{tg}x - 1} + \text{tg}x\right|$$

$$\Leftrightarrow \frac{\text{tg}^2 x}{\text{tg}x - 1} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \text{tg}x \neq 0 \\ \text{tg}x < 1 \end{cases}$$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq k\pi \\ \dfrac{-\pi}{2} + k\pi < x < \dfrac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{-\pi}{2} + k\pi < x < k\pi \\ k\pi < x < \dfrac{\pi}{4} + k\pi \end{array} \right.$$

Kết luận : Nghiệm của bất phương trình là :

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{-\pi}{2} + k\pi < x < k\pi \\ k\pi < x < \dfrac{\pi}{4} + k\pi \end{array}\right. \qquad (k \in Z)$$

Nhận xét. Bài này có thể giải dựa vào **2-2** như sau :

$$(1) \Leftrightarrow \left| \left(\frac{\text{tg}x}{\text{tg}x - 1} + \text{tg}x \right) - \text{tg}x \right| >$$

$$> \left| \frac{\text{tg}x}{\text{tg}x - 1} + \text{tg}x \right| - |\text{tg}x|$$

$$\Leftrightarrow \frac{\text{tg}^2 x}{\text{tg}x - 1} < 0$$

Bài toán 3. *Giải và biện luận theo tham số m bất phương trình :*

$$|\text{cotg}^2 x - \text{cotg}x| < |\text{cotg}^2 x - m| \qquad (1)$$

Bài giải : (Sử dụng **2-2**). Khi đó :

$(1) \Leftrightarrow |(\text{cotg}^2 x - \text{cotg}x) - (m - \text{cotg}x)| >$

$> |\text{cotg}^2 x - \text{cotg}x| - |m - \text{cotg}x|$

$\Leftrightarrow (m - \text{cotg}x)(\text{cotg}^2 x - m) < 0$

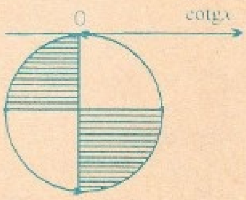
$\Leftrightarrow (\text{cotg}x - m)(\text{cotg}^2 x - m) > 0 \qquad (2)$

*) Khi $m = 0$: (3) $\Leftrightarrow$ cotg$x > 0$ (H.1)

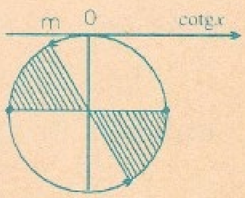
$\Leftrightarrow k\pi < x < \pi/2 + k\pi$ ($k \in Z$ (3) (H..1)

*) Khi $m < 0$: (3) $\Leftrightarrow$ cotg$x > m$

$\Leftrightarrow$ k$\pi < x <$ arccotg$m + k\pi$ ($k \in Z$) (4) (H.2)



H.1

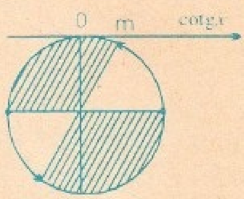


H.2

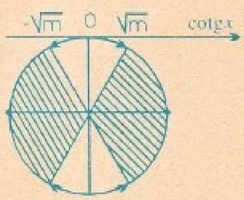
*) Khi $m > 0$: (3) $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\text{cotg}x + \sqrt{m})(\text{cotg}x - \sqrt{m})(\text{cotg}x - m) > 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \text{cotg}x > m \ (H.3) \\ -\sqrt{m} < \text{cotg}x < \sqrt{m} \ (H.4) \end{array}\right.$$



H.3



H.4

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k\pi < x < \text{arccotg}m + k\pi \\ \text{arccotg}\sqrt{m} + k\pi < x < \text{arccotg}(-\sqrt{m}) + k\pi \end{array}\right.$$

Kết luận : 1) Khi $m = 0$ bất phương trình có nghiệm (3).

2) Khi $m < 0$ bất phương trình có nghiệm (4).

3) Khi $m > 0$ bất phương trình có nghiệm (5)

Nhận xét : Bài toán trên có thể giải nhờ **1-1** như sau :

$(1) \Leftrightarrow |(\text{cotg}^2 x - m) + (m - \text{cotg}x)| <$

$< |\text{cotg}^2 x - m| + |m - \text{cotg}x| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (m - \text{cotg}x)(\text{cotg}^2 x - m) < 0 \Leftrightarrow \qquad (3)$

Bài toán 4. *Với giá trị nào của tham số a thì phương trình sau có nghiệm. Tính nghiệm đó.*

$$\sqrt{x - 4a + 16} = 2\sqrt{x - 2a + 4} - \sqrt{x} \qquad (1)$$

Bài giải: (Sử dụng **2-1**)

$(1) \Leftrightarrow \sqrt{x - 4a + 16} + \sqrt{x} = 2\sqrt{x - 2a + 4}$, bình phương 2 vế cho $\sqrt{x}\sqrt{x - 4a + 16} =$ $= x - 2a$, bình phương tiếp 2 vế ta thu được $x = \dfrac{a^2}{4}$ (2) - là nghiệm duy nhất có thể có của (1). Thay (2) vào (1) ta có :

$$\sqrt{a^2 - 16a + 64} = 2\sqrt{a^2 - 8a + 16} - \sqrt{a^2}$$

$\Leftrightarrow |a - 8| = 2|a - 4| - |a|$

$\Leftrightarrow |(2a - 8) - a| = |2a - 8| - |a|$

$\Leftrightarrow a(a - 8) \geq 0$

$\Leftrightarrow a \leq 0$ hoặc $a \geq 8$

Kết luận: Khi $a \leq 0$ hoặc $a \geq 8$ thì (1) có nghiệm và chỉ có nghiệm duy nhất $x = \dfrac{a^2}{4}$

Nhận xét : Bài toán có thể giải nhờ **1-2** như sau :

$(3) \Leftrightarrow |a - 8| + |a| = |2a - 8| = |(a - 8) + a| \Leftrightarrow a(a - 8) \geq 0$

Bài toán 5. *Giải và biện luận phương trình sau theo tham số a*

$$\sqrt{\log_a \sqrt[4]{ax} + \log_x \sqrt[4]{ax}} +$$

$$+ \sqrt{\log_a \sqrt[4]{\frac{x}{a}} + \log_x \sqrt[4]{\frac{x}{a}}} = \sqrt{\log_a x} \qquad (1)$$

Bài giải: (Sử dụng **1-3**). Điều kiện $0 < a$; $x \neq 1$ và $\log_a x > 0$ (2). Khi đó (1) $\Leftrightarrow$

$$\sqrt{\log_a x + \log_x a + 2} + \sqrt{\log_a x + \log_x a - 2} =$$

$$= 2\sqrt{\log_a x}$$

$\Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{(\log_a x+1)^2}{\log_a x}} + \sqrt{\dfrac{(\log_a x-1)^2}{\log_a x}} =$

$= 2\sqrt{\log_a x}$ (3)

$\Leftrightarrow |\log_a x + 1| + |\log_a x - 1| = 2\log_a x =$

$= (\log_a + 1) + (\log_a x - 1)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_a x + 1 \geq 0 \\ \log_a x - 1 \geq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \log_a x \geq 1 = \log_a a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x \geq a & \text{nếu } a > 1 \\ 0 < x \leq a & \text{nếu } 0 < a < 1 \end{array}\right.$

Kết luận: 1) Nếu $a > 1$ thì nghiệm của (1) là $x \geq a$.

2) Nếu $0 < a < 1$ thì nghiệm của (1) là $0 \leq x \leq a$.

3) Nếu $a < 0$ hoặc $a = 1$ thì (1) vô nghiệm.

Nhận xét: Bài này có thể sử dụng **1-2**, khi viết

(3) $\Leftrightarrow |\log_a x + 1| + |\log_a x - 1| =$

$= |2\log_a x| = |(\log_a x + 1) + (\log_a - 1)|$

$\Leftrightarrow (\log_a x + 1)(\log_a x - 1) \geq 0 \Leftrightarrow \log_a x \geq 1.$

Hoặc có thể sử dụng **1-4** (cho cả bài toán 1), khi viết

(3) $\Leftrightarrow |\log_a x + 1| + |1 - \log_a x| = 2\log_a x =$

$= (\log_a x + 1) - (1 - \log_a x)$

Ngoài ra, do điều kiện (2) : $\log_a x > 0$, nên ta có thể sử dụng định nghĩa trị tuyệt đối khi viết

(3) $\Leftrightarrow \log_a x + 1 + |\log_a x - 1| = 2\log_a x$

$\Leftrightarrow |\log_a x - 1| = \log_a x - 1$

$\Leftrightarrow \log_a x - 1 \geq 0$

Bài toán 6. *Giải và biện luận theo tham số a, b phương trình:*

$\sqrt{2(x^2 - x\sqrt{x^2-a^2}) - a^2} + \sqrt{2(x^2 + x\sqrt{x^2-a^2}) - a^2}$
$= |x-b| + |x+b|$

Bài giải. (Sử dụng 2 chiều tính chất **1-2**)

(1) $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \geq a^2 \\ \sqrt{(x-\sqrt{x^2-a^2})^2} + \sqrt{(x+\sqrt{x^2-a^2})^2} = |x-b| + |x+b| \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \geq a^2 \\ |x - \sqrt{x^2-a^2}| + |x + \sqrt{x^2-a^2}| = |x-b| + |x+b| \end{cases}$

Chú ý : $(x - \sqrt{x^2-a^2})(x + \sqrt{x^2-a^2}) = x^2 - (x^2-a^2) = a^2 \geq 0$, với mọi $a^2 \leq x^2$, nên hệ trên

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \geq a^2 \\ |(x - \sqrt{x^2-a^2}) + (x + \sqrt{x^2-a^2})| = |x-b| + |x+b| \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \geq a^2 \\ |2x| = |x-b| + |x+b| \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \geq a^2 \\ |(x-b) + (x+b)| = |x-b| + |(x+b)| \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \geq a^2 \\ (x-b)(x+b) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \geq a^2 \\ x^2 \geq b^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = b = 0 \\ x^2 \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a^2 \geq b^2 \\ x^2 \geq a^2 \end{cases} \\ \begin{cases} a^2 \leq b^2 \\ x^2 \geq b^2 \end{cases} \end{array}\right.$

Kết luận : 1) Khi $a = b = 0$ thì $\forall x \in R$ là nghiệm của (1)

2) Khi $|a| \geq |b|$ thì (1) có nghiệm là $x \notin (-|a|; |a|)$.

3) Khi $|a| \leq |b|$ thì (1) có nghiệm là $x \notin (-|b|; |b|)$.

III. CÁC BÀI TOÁN TỰ LUYỆN

1) Giải các phương trình và bất phương trình :

a) $\sqrt{x + 2 + 2\sqrt{x+1}} + \sqrt{x + 10 - 6\sqrt{x+1}} = 2\sqrt{x + 2 - 2\sqrt{x+1}}$

b) $\dfrac{\cot g^2 x}{|\cot g x - 1|} = \left|\dfrac{\cot g x}{\cot g x - 1}\right| + \cot g x;$

c) $\dfrac{tg^2 x}{|tg x - 1|} < |tg x + 1| + \dfrac{1}{|tg x - 1|};$

d) $\sqrt{x + 3 - 4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x + 8 - 6\sqrt{x-1}} > 1$

2) Tìm tất cả các nghiệm của hệ :

$\begin{cases} \left|y + \dfrac{1}{x}\right| + \left|\dfrac{13}{6} + x - y\right| = \dfrac{13}{6} + x + \dfrac{1}{x} \\ x^2 + y^2 = \dfrac{97}{36} \end{cases}$

thỏa mãn điều kiện $x < 0$, $y < 0$.

3) Giải và biện luận theo tham số m các phương trình và bất phương trình :

a) $|tg x(tg x - 1)| + |tg^2 x - m| = |tg x - m|$

b) $\sqrt{\log_m x^2} < \sqrt{\log_m \sqrt{mx} + \log_x \sqrt{mx}} + \sqrt{\log_m \sqrt{\dfrac{x}{m}} + \log_x \dfrac{\sqrt{m}}{x}}$

c) $\dfrac{\cot g^2 x}{|\cot g x - m|} < |\cot g x + m| + \dfrac{m}{|\cot g x - m|}$

d) $|tg^2 x - 1|.|tg^2 x - 3| + |tg^2 x - m| > |tg^4 x - 3tg^2 x + 3 - m|$

4) Tìm tất cả giá trị của tham số a sao cho phương trình : $a^3 + a^2|a+x| + |a^2x+1| = 1$, có không ít hơn 4 nghiệm khác nhau là các số nguyên (có thể dử dụng **1-4**).

XUNG QUANH BÀI TOÁN ECĐÔS TRONG TAM GIÁC

NGUYỄN VĂN HIẾN
(*Thái Bình*)

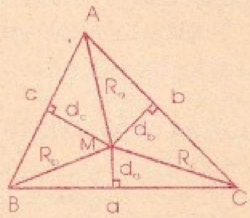
Bất đẳng thức trong tam giác luôn là đề tài rất hay. Trong bài báo nhỏ này, chúng ta cùng trao đổi về một bất đẳng thức quen thuộc. Bất đẳng thức Ecđôs :

Bài toán 1: *Cho một điểm M trong tam giác ABC. Gọi R_a; R_b; R_c là khoảng cách từ M đến A; B; C và d_a; d_b; d_c là khoảng cách từ M đến BC; AC; AB thì :*

$$R_a + R_b + R_c \geq 2(d_a + d_b + d_c) \quad (E)$$

Giải. Ta có :

$$R_a \geq h_a - d_a = \frac{2S_{ABC} - 2S_{BMC}}{a} = \frac{2S_{AMB} + 2S_{AMC}}{a} = \frac{cd_c + bd_b}{a}$$



Bằng cách lấy đối xứng M qua phân giác

$$\left.\begin{array}{ll}\text{góc } A \Rightarrow & R_a \geq \dfrac{bd_c + cd_b}{a} \\ \text{tương tự} & R_b \geq \dfrac{ad_c + cd_a}{b} \\ & R_c \geq \dfrac{ad_b + bd_a}{c}\end{array}\right\} (1)$$

$$\Rightarrow R_a + R_b + R_c \geq$$

$$\geq d_a\left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + d_b\left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) + d_c\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)$$

$$\geq 2(d_a + d_b + d_c) \text{ (đpcm).}$$

Thực ra (E) chỉ là trường hợp riêng của tổng quát sau :

Bài toán 2 : *Chứng minh rằng*

$$R_a^{\alpha} + R_b^{\alpha} + R_c^{\alpha} \geq 2^{\alpha}(d_a^{\alpha} + d_b^{\alpha} + d_c^{\alpha}) \qquad (2)$$

với $1 \geq \alpha > 0$

Giải. Trước hết ta chứng minh :

Bổ đề I. $\forall x,\ y > 0$ và $1 \geq \alpha > 0$ thì :

$$(x+y)^{\alpha} \geq 2^{\alpha-1}(x^{\alpha} + y^{\alpha}) \qquad (\text{I})$$

Chứng minh. $(\text{I}) \Leftrightarrow \left(\dfrac{x}{y} + 1\right)^{\alpha} \geq 2^{\alpha-1}\left(\dfrac{x^{\alpha}}{y^{\alpha}} + 1\right)$

$\Leftrightarrow f(a) = (a+1)^{\alpha} - 2^{\alpha-1}(a^{\alpha} + 1) \geq 0$ (đặt $\dfrac{x}{y} = a > 0$)

Vì $f'(a) = \alpha[(a+1)^{\alpha-1} - (2a)^{\alpha-1}] = 0$

$\Leftrightarrow a = 1$ hoặc $\alpha = 1$. Với $\alpha = 1$ thì (I) là đẳng thức đúng.

Do $a > 0$ và $1 > \alpha > 0$ thì ta có bảng :

a	0		1		$+\infty$
$f'(a)$	‖	-	0	+	
$f(a)$	‖	↘	0	↗	

$\Rightarrow f(a) \geq 0\ \forall a > 0$ và $1 > \alpha > 0$.

$\Rightarrow$ (I) được chứng minh.

Trở lại bài toán 2 :

Từ hệ (1) ta có :

$$R_a^{\alpha} \geq \left(\frac{bd_c}{a} + \frac{cd_b}{a}\right)^{\alpha} \geq 2^{\alpha-1}\cdot\left[\left(\frac{bd_c}{a}\right)^{\alpha} + \left(\frac{cd_b}{a}\right)^{\alpha}\right]$$

(Áp dụng bổ đề (I) với $x = \dfrac{bd_c}{a}$; $y = \dfrac{cd_b}{a}$)

tương tự : $R_b \geq 2^{\alpha-1}\cdot\left[\left(\dfrac{a.d_c}{b}\right)^{\alpha} + \left(\dfrac{cd_a}{n}\right)^{\alpha}\right]$

$$R_c \geq 2^{\alpha-1}\cdot\left[\left(\frac{ad_b}{c}\right)^{\alpha} + \left(\frac{bd_a}{c}\right)^{\alpha}\right]$$

$$\Rightarrow R_a^{\alpha} + R_b^{\alpha} + R_c^{\alpha} \geq$$

$$\geq 2^{\alpha-1}\cdot d_a^{\alpha}\left[\left(\frac{b}{c}\right)^{\alpha} + \left(\frac{c}{b}\right)^{\alpha}\right] +$$

$$+ 2^{\alpha-1}\cdot d_b^{\alpha}\left[\left(\frac{a}{c}\right)^{\alpha} + \left(\frac{c}{a}\right)^{\alpha}\right] +$$

$$+ 2^{\alpha-1}\cdot d_c^{\alpha}\left[\left(\frac{a}{b}\right)^{\alpha} + \left(\frac{b}{a}\right)^{\alpha}\right] \geq$$

$$\geq 2^{\alpha}\left(d_a^{\alpha} + d_b^{\alpha} + d_c^{\alpha}\right) \text{ (đpcm).}$$

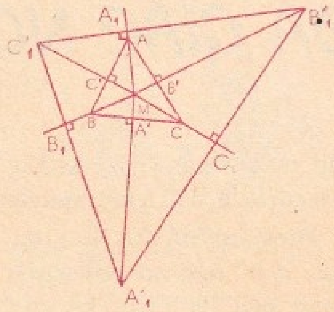
Đẳng thức xảy ra khi ΔABC đều và M là tâm tam giác. Áp dụng (E) ta chứng minh được bài toán sau :

Bài toán 3: *Chứng minh rằng :*

$$\frac{1}{d_a} + \frac{1}{d_b} + \frac{1}{d_c} \geq 2\left(\frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_b} + \frac{1}{R_c}\right) \qquad (3)$$

Giải. Thực hiện phép nghịch đảo tâm M, phương tích đơn vị ta được : $\begin{cases} MA_1 = \dfrac{1}{R_4} \\ MB_1 = \dfrac{1}{R_b} \\ MC_1 = \dfrac{1}{R_c} \end{cases}$

và $\begin{cases} MA'_1 = \dfrac{1}{d_a} \\ MB'_1 = \dfrac{1}{d_b} \\ MC'_1 = \dfrac{1}{d_c} \end{cases}$



Áp dụng (E) trong $\Delta A'_1B'_1C'_1$:

$MA'_1 + MB'_1 + MC'_1 \geq$

$\geq 2\,(MA_1 + MB_1 + MC_1)$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{d_a} + \dfrac{1}{d_b} + \dfrac{1}{d_c} \geq 2\left(\dfrac{1}{R_a} + \dfrac{1}{R_b} + \dfrac{1}{R_c}\right)$ (đpcm)

Mở rộng kết quả này ta có bài toán sau :

Bài toán 4. *Chứng minh rằng*

$$2^{\alpha}(d_a^{\alpha} + d_b^{\alpha} + d_c^{\alpha}) \geq R_a^{\alpha} + R_b^{\alpha} + R_c^{\alpha} \qquad (4)$$

với $0 > \alpha \geq -1$.

Hướng dẫn cách giải : Ta thấy (4) được chứng minh dễ dàng nhờ áp dụng (2) trong phép biến hình nghịch đảo tâm M, phương tích đơn vị. Đẳng thức xảy ra khi ΔABC đều và M là tâm tam giác.

Bây giờ, với $\alpha > 1$ thì từ hệ (1) ta thu được ngay :

Bài toán 5. *Chứng minh rằng*

$$R_a^2 + R_b + R_c^2 > 2(d_a^2 + d_b^2 + d_c^2) \qquad (5)$$

Xuất phát từ bài toán này, ta thu được những kết quả tổng quát sau :

Bài toán 6. *Chứng minh rằng*

$$R_a^{\alpha} + R_b^{\alpha} + R_c^{\alpha} > 2\,(d_a^{\alpha} + d_b^{\alpha} + d_b^{\alpha}) \qquad (6)$$

với $\alpha > 1$

Giải. Chúng ta cũng chứng minh một bổ đề :

Bổ đề 2. $\forall x;\ y > 0$ và $\alpha > 1$ thì :

$$(x + y)^{\alpha} > x^{\alpha} + y^{\alpha} \qquad \text{(II)}$$

Chứng minh. (II) $\Leftrightarrow \left(\dfrac{x}{y} + 1\right)^{\alpha} > \dfrac{x^{\alpha}}{y^{\alpha}} + 1$

$\Leftrightarrow g(a) = (a+1)^{\alpha} - a^{\alpha} - 1 > 0$ (đặt $\dfrac{x}{y} = a > 0$)

Vì $g'(a) = \alpha[(a+1)^{\alpha-1} - a^{\alpha-1}] > 0\ \forall a > 0;$ $\alpha > 1$ và ta có bảng :

a		0	$+\infty$
$g'(a)$			$+$
$g(a)$		0	$\nearrow$

$\Rightarrow g(a) > 0\ \forall a > 0;\ \alpha > 1$

$\Rightarrow$ (II) được chứng minh.

Sử dụng bổ đề (II) vào bài toán (6) :

Từ hệ (1) :

$$R_a^{\alpha} \geq \left(\frac{bd_c}{a} + \frac{cd_b}{a}\right)^{\alpha} > \left(\frac{bd_c}{a}\right)^{\alpha} + \left(\frac{cd_b}{a}\right)^{\alpha}$$

(Đặt $x = \dfrac{bd_c}{a};\ y = \dfrac{cd_b}{a}$)

tương tự : $R_b^{\alpha} > \left(\dfrac{ad_c}{b}\right)^{\alpha} + \left(\dfrac{cd_a}{b}\right)^{\alpha}$

$R_c^{\alpha} > \left(\dfrac{ad_b}{c}\right)^{\alpha} + \left(\dfrac{bd_a}{c}\right)^{\alpha}$

$\Rightarrow R_a^{\alpha} + R_b^{\alpha} + R_c^{\alpha} >$

$> d_a^{\alpha}\left[\left(\dfrac{b}{c}\right)^{\alpha} + \left(\dfrac{c}{b}\right)^{\alpha}\right] + d_b^{\alpha}\left[\left(\dfrac{a}{c}\right)^{\alpha} + \left(\dfrac{c}{a}\right)^{\alpha}\right] +$

$+ d_c^{\alpha}\left[\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\alpha} + \left(\dfrac{b}{a}\right)^{\alpha}\right] \geq 2(d_a^{\alpha} + d_b^{\alpha} + d_c^{\alpha})$

$\Rightarrow$ (đpcm).

Bài toán 7. *Chứng minh rằng*

$$d_a^{\alpha} + d_b^{\alpha} + d_c^{\alpha} > 2(R_a^{\alpha} + R_b^{\alpha} + R_c^{\alpha}) \qquad (7)$$

với $\alpha < -1$.

Hướng dẫn cách giải : Ta thấy (7) cũng được chứng minh dễ dàng nhờ áp dụng (6) trong phép biến hình nghịch đảo tâm M; phương tích đơn vị. Đẳng thức không thể xảy ra trong (6) và (7).

Xét về quan hệ giữa $(R_a;\ R_b;\ R_c)$ với $(d_a;\ d_b;\ d_c)$ ngoài bất đẳng thức (E) và những mở rộng của nó, chúng ta còn gặp một số bất đẳng thức rất hay sau đây. Việc chứng minh chúng xin dành cho bạn đọc :

1) $R_aR_bR_c \geq 8d_ad_bd_c$

2) $\dfrac{d_b + d_c}{R_a} + \dfrac{d_a + d_c}{R_b} + \dfrac{d_a + d_b}{R_c} \leq 3$

3) $R_aR_bR_c \geq (d_a + d_b)(d_a + d_c)(d_b + d_c)$

4) $R_a^2R_b^2R_c^2 \geq$

$\geq (R_ad_a + R_bd_b)(R_ad_a + R_cd_c)(R_bd_b + R_cd_c)$

CÁC BÀI TOÁN VỀ "ĐA GIÁC NGUYÊN"

VŨ QUỐC LƯƠNG
(*Hà Nội*)

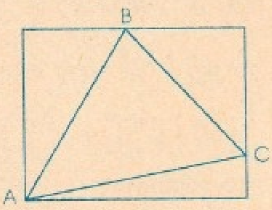
Các bài toán về "đa giác nguyên" có lời giải hết sức hấp dẫn, súc tích vì nó kết hợp cả 3 loại kiến thức về hình học, đại số, số học. Bài viết này nhằm cung cấp cho bạn đọc một số kiến thức cơ bản và "kiểu giải" loại toán này, một loại toán còn ít được đề cập đến.

Định nghĩa 1: Xét trên mặt phẳng tọa độ, một đa giác lồi gọi là *đa giác nguyên* nếu mỗi đỉnh của nó có tọa độ là số nguyên (hay mỗi đỉnh của đa giác là một điểm nguyên).

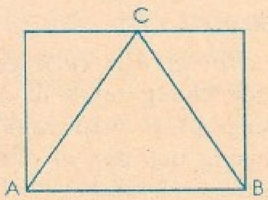
Bài toán 1. *Tồn tại hay không một tam giác nguyên là tam giác đều ?*

Lời giải. (Xem hình 1) :

Giả sử tồn tại một tam giác đều ABC là tam giác nguyên. Kẻ qua đỉnh A, B, C các đường thẳng song song với các trục tọa độ, tạo thành một hình chữ nhật bao tam giác ABC. Chú ý rằng ΔABC có các góc 60^0 nên các đỉnh của nó được phân bố trên các cạnh của hình chữ nhật theo 2 dạng (xem hình). Xét các tam giác vuông có cạnh huyền là cạnh của ΔABC còn 2 cạnh kia nằm trên cạnh của hình chữ nhật thì diện tích các tam giác vuông này là một số tự nhiên hoặc một nửa của số tự nhiên tức là một số hữu tỉ. Mặt khác diện tích hình chữ nhật là một số nguyên nên $S_{\Delta ABC}$ là một số hữu tỉ. Nhưng $S_{ABC} = \dfrac{a^2 . \sqrt{3}}{4}$, trong đó a là cạnh của ΔABC đều. Theo định lí Pitago thì $a^2 \in \mathbf{N}$ nên S_{ABC} là một số vô tỉ. Ta gặp mâu thuẫn. Vậy không tồn tại một tam giác đều là tam giác nguyên.



a)



b)

Hình 1

Định nghĩa 2. Một đa giác gọi là "*đa giác đẹp*" nếu nó là đa giác nguyên và miền trong của đa giác, kể cả biên không chứa một điểm nguyên nào nữa.

Bài toán 2. *a) Đa giác đẹp có nhiều nhất là mấy đỉnh ?*

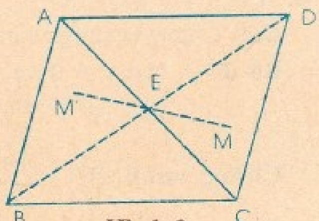
b) Tìm dạng của tứ giác đẹp.

Lời giải. a) *Ta chứng minh một đa giác đẹp thì số đỉnh không quá 4* một cách "số học" như sau :

Giả sử đa giác đẹp $A_1A_2 .. A_n$ có số đỉnh $n \geq 5$. Khi đó $\exists$ ít nhất hai đỉnh $A_i(x_i, y_i)$; $A_k(x_k, y_k)$ có các tọa độ đồng tính chẵn, lẻ. Xét M là trung điểm của $A_iA_k \Rightarrow$ $x_M = \dfrac{x_i + x_k}{2} \in \mathbf{Z}$; $y_M = \dfrac{y_i + y_k}{2} \in \mathbf{Z} \Rightarrow M$ là một điểm nguyên, rõ ràng M hoặc thuộc miền trong của đa giác hoặc thuộc biên của đa giác. Điều này mâu thuẫn với định nghĩa $\Rightarrow n \leq 4$. Rõ ràng có vô số tam giác đẹp, chẳng hạn ΔABC với A (0, 0); B (1, 0); C (k, 1) với k tùy ý $\in \mathbf{Z}$. Cũng tồn tại vô số tứ giác đẹp, chẳng hạn các hình bình hành $ABCD$ có : $AD // BC // Ox$; $AD = BC = 1$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng song song AD, BC *là 1.*

b) *Ta chứng minh mọi tứ giác đẹp đều là hình bình hành.*

Bổ đề. Nếu ΔABC đẹp thì khi lấy đối xứng một đỉnh tam giác qua trung điểm cạnh đối diện ta được một hình bình hành đẹp (xem hình 2).



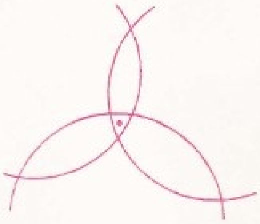
Hình 2

Xét ΔABC là tam giác đẹp. Lấy D đối xứng với B qua trung điểm E của AC. Ta chứng minh D là điểm nguyên. Thật vậy có :

(*Xem tiếp trang 18*)

KHÉO TAY NÀO

Câu lạc bộ chờ mãi mới được "phương án tối ưu" để vẽ 3 con cá bởi các cung tròn và những dấu chấm. Đây là "phương án" của bạn *Tiêu Đức Cường*, 9C, PTTHCS Kỳ Lâm, Sơn Dương, **Tuyên Quang.** Các bạn *Trần Thị Kim Oanh*, Khoa Toán, **ĐHSP Vinh;** *Nguyễn Quốc Hiển*, 8C, PTTHCS Việt Trì, **Phú Thọ;** *Phạm Hồng Việt*, 3K, Chu Văn An, **Hải Phòng;** cũng cho những phương án tốt nhưng còn "lãng phí" đôi chút. Cám ơn các bạn.



N.M

****

GIẢI TOÁN NHANH

Các bạn hãy thử sức với 7 bài toán "dễ" sau đây, dành cho học sinh từ lớp 4 đến lớp 11. Mỗi bài phải giải trong không quá 30 giây.

Examples of 'half-minut Questions'

1. How many digits are there in the smallest number with a sum of digits 100 ?

2. If we divide X by 4 we obtain a remainder 3. If we divide X by 2 we obtain a remainder of ...

3. Is the number with 111 ones prime ?

4. The product of two prime numbers is even. One of them is ...

5. Is the follwing statement correct ?

From $a > b$ we can conclude that $a^2 > b^2$.

6. A is the biggest angle in the ΔABC. What is the smallest value of A ?

7. Replace one of the digits in the equation 12 - 12 = 11 to make it correct.

TRẦN VĂN NHUNG
Sưu tầm

****

LTS: *Để nói được trọn vẹn ý của tác giả, xin đăng tiếp phần cuối của bài* ***Thơ với người làm toán.***

THƠ VỚI NGƯỜI LÀM TOÁN

BÀI HAI

Thơ với đời
Đừng như *hai đường thẳng song song*
Dù *khoảng cách đủ gần*
Có gì buồn *hơn* thế
Luôn *phản ánh* buồn tẻ
Những *biến thiên* của cuộc đời
Bằng một *hằng số* không thôi
Mà chẳng *gặp* được lòng người

Cũng đừng là *đường sin*
Bám vào *trục hoành* cuộc sống
Cứ sau mỗi *đỉnh* cao đều đặn
Lại tụt xuống vực sâu
Vực *âm* đầy bóng tối

Dù rất đẹp là *đường tròn*
Thơ cũng đừng làm loại *compa*
Vẽ mãi *đường tròn bán kính* ngày xưa

Đã qua rồi thời *Ơcolit* mấy *ngàn* năm
Không gian chỉ là trang giấy.
Cảm ơn *Lôbasepski* cho ta hiểu
nhiều hơn thế giới
Đến *Anhstanh* thời gian với vật chất
gắn liền
Vũ trụ chúng ta có cả bốn *chiều*.

*
* *

Thơ hãy là *không gian đa chiều*
Hạnh phúc, nụ cười, gió mưa, bão tố
Ngòi bút lên đường
con tim thành lửa
Mỗi một bài thơ hoa ngọc lá vàng
Cho cây đời *ngàn* năm quyến rũ.

Cảm ơn thơ vì trong *vô tận* của người
Tôi nhìn ra từng *điểm*
Tôi nhìn ra từng *mặt* vấn đề
Nhìn đủ mọi *hình* mọi *khối*
Thêm yêu cuộc sống vô bờ
Cuộc sống *đồng nhất* với thơ.

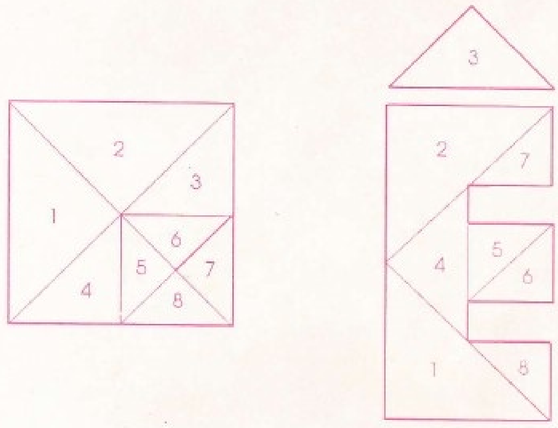
1983-1985
VKT

Giải trí TOÁN HỌC

Giải đáp bài

CẮT CHỮ KĨ THUẬT

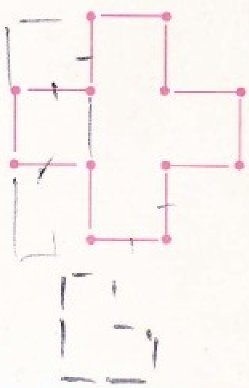
Ta cắt mảnh giấy vuông và dán thành chữ Ê thỏa mãn yêu cầu của cô giáo như sau :



(theo *Lê Khánh Hưng*, 9A, PTCS Hoàng Xuân Hãn, Đức Thọ, **Hà Tĩnh**)

BÌNH PHƯƠNG

NHANH TRÍ, NHANH TAY



Có 12 que diêm xếp thành hình chữ thập có diện tích bằng 5 ô vuông có cạnh là một que diêm. Bạn hãy thay đổi vị trí các que diêm để được một hình có diện tích bằng 4 diện tích ô vuông.

ĐÀO XUÂN SINH

Trả lời bạn đọc

Hỏi: Trong "Tuyển tập 30 năm tạp chí Toán học và Tuổi trẻ" có chứng minh $2^{3^{100}} > 3^{2^{100}}$. Nhưng em lại thấy rằng : $2^{3^{100}} = 8^{100}$; $3^{2^{100}} = 9^{100} \Rightarrow 2^{3^{100}} < 3^{2^{100}}$ vì $8^{100} < 9^{100}$. Em mong tòa soạn cho một ý kiến đúng.

NGUYỄN THỊ THANH HIẾU
(*7A, PTTHCS Đại Nghĩa, Mỹ Đức*, **Hà Tây**).

Đáp : Em đã hiểu sai cách viết lũy thừa. Em lưu ý rằng : $2^{3^{100}}$ là lũy thừa của 2 với số mũ 3^{100} chứ không phải $2^{3^{100}} = \left(2^3\right)^{100}$. Rất nhiều anh chị học "cao" hơn em vẫn nhầm như em đấy. Chào em.

Hỏi: Thầy giáo em có "đố" chúng em giải phương trình $\sqrt{x} + \sqrt{x-5} + \sqrt{x+7} = 9$. Chúng em đã đi theo nhiều "con đường" nhưng đều đến "ngõ cụt". Các thầy có thể "gỡ" hộ chúng em được không ? Cám ơn các thầy.

NGUYỄN CHÍ CÔNG
(12G1, PTTH Trương Định, Hà Nội)

Đáp: Cám ơn các em đã "đố" lại Tòa soạn. Tại sao các em không nghĩ đến tính đơn điệu của hàm số $y = \sqrt{x} + \sqrt{x-5} + \sqrt{x+7}$ và không "nhìn kỹ" để thấy $x = 9$ là nghiệm. Thôi... các em làm tiếp đi !

Hỏi: Có một tài liệu chứng minh $f(x) = mx(x+3) + (x+2)(x-5)$ luôn có hai nghiệm bằng cách xét $f(0).f(-3) = -80 < 0$. Kết luận này thiếu chính xác, chẳng hạn lấy $m = -1$ thì $f(x) = -6x - 10$ chỉ có một nghiệm $x = -\frac{5}{3}$ mà thôi. Ý kiến Tòa soạn thế nào ?

NGUYỄN ĐÌNH QUÝ
(*Cụm 8, HTX Phú An, Hương Chữ, Hương Trà*, **Thừa Thiên - Huế**)

Đáp: Nhất trí với phát hiện của bạn. Khi xét $f(x) = ax^2 + bx + c$ mà sử dụng các định lí về tam thức bậc hai thì cần lưu ý tới giả thiết $a \neq 0$ kẻo mắc những sai lầm "kiểu" trên. Cám ơn bạn.

L.T.N

ISSN : 0866-0853
Chỉ số : 12884
Mã số : 8BT57M8
Chế bản tại Tòa soạn.
In tại Nhà máy in Diên Hồng, 57 Giảng Võ
In xong và nộp lưu chiểu tháng 9 năm 1998
Giá : 3.000đ
Ba nghìn đồng