BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ★ HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

TOÁN HỌC & TUỔI TRẺ

NĂM THỨ 35 - RA HÀNG THÁNG
Số 5 (251)
1998

Sì gòn

- Một chút suy nghĩ về một bài toán diện tích đa giác

- Kết quả thi chọn học sinh giỏi Toán Quốc gia lớp 9 năm học 1997-1998
- Đề thi tuyển sinh Đại học Quốc gia Hà Nội năm 1997

TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ
MATHEMATICS AND YOUTH

MỤC LỤC

Trụ sở tòa soạn :
25 Hàn Thuyên, Hà Nội ĐT : 8.262477
9714359
Đại diện tại miền Nam :
Trần Chí Hiếu, 231 Nguyễn Văn Cừ, Q.5, TP Hồ Chí Minh ĐT : 8.323044

Biên tập : VŨ KIM THỦY
LÊ THỐNG NHẤT
Trị sự : VŨ ANH THƯ
Trình bày : NGUYỄN THỊ OANH

Dành cho các bạn
TRUNG HỌC CƠ SỞ

MỘT CHÚT SUY NGHĨ VỀ MỘT BÀI TOÁN DIỆN TÍCH ĐA GIÁC

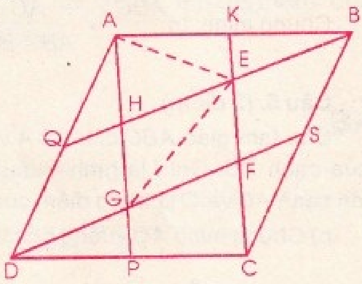
NGUYỄN ĐỨC TẤN
(*TP. Hồ Chí Minh*)

Qua bài viết này, tôi xin trao đổi cùng bạn đọc một chút suy nghĩ về một bài toán diện tích đa giác (bài số 16 - Bài tập ôn chương I sách giáo khoa Hình học 8. - NXB Giáo dục 1997).

BÀI TOÁN (*)

Cho hình bình hành ABCD. Vẽ bốn đường thẳng nối lần lượt các đỉnh A, B, C, D với các trung điểm P, Q, R, S của các cạnh CD, AD, AB, BC. Chứng minh rằng tứ giác tạo bởi các đường thẳng này có diện tích bằng $\frac{1}{5}$ diện tích hình bình hành ABCD.

Hướng dẫn giải



Chứng minh $HE = EB$, $EF = FC$, $FG = GD$, $GH = HA$

Ta có : $S_{ABH} = 2S_{AHE} = 2S_{HEG}$

Tương tự $S_{DFC} = 2S_{EGF}$

Do đó $S_{ABH} + S_{DFC} = 2S_{EFGH}$

Tương tự : $S_{ADG} + S_{BCE} = 2S_{EFGH}$

Suy ra $S_{ABCD} = 5S_{EFGH}$

Do đó $S_{EFGH} = \frac{1}{5}S_{ABCD}$

Ta nhận thấy rằng tứ giác EFGH cũng là hình bình hành. Bài toán trên có thể sửa lại thành:

Bài 1. *Cho hình bình hành EFGH. Trên các tia đối của các tia FE, GF, HG, EH lần lượt lấy các điểm C, D, A, B sao cho E, F, G, H lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng HB, EC, FD, GA.*

Chứng minh rằng diện tích tứ giác EFGH bằng $\frac{1}{5}$ diện tích tứ giác ABCD.

Lời giải của bài toán (*) là lời giải của bài toán 1 và cũng thấy rằng lời giải không cần đến ABCD là hình bình hành, EFGH là hình bình hành. Như vậy ta có bài toán tổng quát hơn.

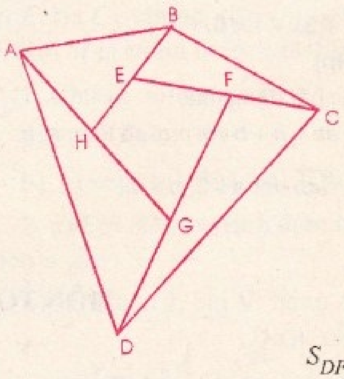
Bài 2. *Cho tứ giác EFGH. Trên các tia đối của các tia FE; GF; HG; EH lần lượt lấy các điểm C, D, A, B sao cho E, F, G, H lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng HB, EC, FD, GA.*

Chứng minh rằng diện tích tứ giác EFGH bằng $\frac{1}{5}$ diện tích tứ giác ABCD

Và ... từ bài toán 2 ta cũng nhận ra rằng $\frac{EB}{HE} = \frac{FC}{EF} = \frac{GD}{FD} = \frac{HA}{GH} = 1$ thì $\frac{S_{ABCD}}{S_{EFGH}} = 5$.

Thay "1" bởi "m" thì "5" được thay bởi số nào ? Ta đi tìm câu trả lời..

Nếu $\frac{EB}{HE} = \frac{FE}{EF} = \frac{GD}{FD} = \frac{HA}{GH} = m$ ($m > 0$, m cho trước)



thì $EB = mHE$, $FC = m.EF$; $GD = m.FD$; $HA = m.GH$.

Do đó

$S_{ABH} = (m+1)S_{AHE} = (m+1)(mS_{HEG}) = m(m+1)S_{HEG}$.

Tương tự $S_{DFC} = m(m+1)S_{EGF}$.

Do đó $S_{ABH} + S_{DFC} = m(m+1)S_{EFGH}$

Tương tự

$S_{ADG} + S_{BCE} = m(m+1)S_{EFGH}$

Suy ra $S_{ABCD} = [2m(m+1) + 1] . S_{EFGH}$.

Như vậy "5" được thay bởi "$2m(m+1)+1$".

Như vậy, chúng ta đã tìm được và giải được bài toán tổng quát hơn :

Bài 3. *Cho tứ giác EFGH. Trên các tia đối của các tia FE, GF, HG, EH lần lượt lấy các điểm C, D, A, B sao cho* $\frac{EB}{HE} = \frac{FC}{EF} = \frac{GD}{FG} = \frac{HA}{GH} = m$ (m, m cho trước). *Tính tỉ số* $S_{ABCD} : S_{EFGH}$ theo m.

Đặt $2m(m+1) + 1 = p > 1$, ta có thể đề ra bài toán sau.

Bài 4. *Cho tứ giác EFGH. Trên các tia đối của các tia FE, GF, HG, EH lần lượt hãy xác định các điểm C, D, A, B sao cho thỏa mãn hai điều kiện sau :*

a) $\frac{EB}{HE} = \frac{FC}{EF} = \frac{GD}{FG} = \frac{HA}{GH}$

b) $\frac{S_{ABCD}}{S_{EFGH}} = p$ (p cho trước, > 1).

Ta có : $2m(m+1) + 1 = p \Leftrightarrow 2m^2 + 2m + 1 - p = 0$.

Phương trình bậc hai ẩn m có $a.c = 2(1-p) < 10$ (vì $p > 1$), nên có hai nghiệm m_1, m_2 trái dấu nhau tức là luôn tìm được giá trị $m > 0$

Ví dụ: Cho $p = 61$, phương trình $2m(m+1) + 1 = 61$ cho nghiệm $m = 5 > 0$, và các điểm C, D, A, B được xác định bởi $\frac{FC}{EF} = \frac{GD}{FG} = \frac{HA}{GH} = \frac{EB}{HE} = 5$.

ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10
TRƯỜNG PTTH CHUYÊN LÊ HỒNG PHONG TP.HCM

NĂM HỌC 1997-1998

MÔN TOÁN (BAN A, B)

Câu 1 (1,5 điểm) Cho phương trình:

$$(m-1)x^2 + 2(m-1)x - m = 0$$

(có ẩn số là x)

a) Định m để phương trình có nghiệm kép, tính nghiệm kép này.

b) Định m để phương trình có hai nghiệm phân biệt đều âm.

Câu 2. (2 điểm)

Giải các phương trình

a) $3x^2 + 2x = 2\sqrt{x^2 + x} + 1 - x$

b) $x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 3x + 1 = 0$

Câu 3. (1,5 điểm)

Chứng minh các bất đẳng thức:

a) $a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b$ với mọi số thực a, b.

b) $\frac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \leq \sqrt[4]{ab}$ với $a > 0$, $b > 0$.

Câu 4. (1 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A.

Chứng minh: $\text{tg}\frac{ABC}{2} = \frac{AC}{AB + BC}$

Câu 5. (2 điểm)

Cho tam giác ABC cân tại A và H là trung điểm của cạnh BC. Gọi I là hình chiếu vuông góc của H lên cạnh AC và O là trung điểm của HI.

b) Chứng minh AO vuông góc với BI.

Câu 6. (2 điểm)

Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn (O). Lấy điểm E trên đường chéo AC sao cho $ABE = DAC$.

a) Chứng minh $AB.DC = DB.AE$.

b) Chứng minh $AB.DC + AD.BC = DB.AC$.

MÔN TOÁN (BAN C, D)

Câu 1. (2 điểm) : xem câu 1 ban A, B.

Câu 2. (2 điểm)

a) Xem câu 2*a* ban A, B.

b) Giải phương trình : $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$

Câu 3. (1 điểm): xem câu 3*a* ban A, B.

Câu 4. (3 điểm)

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, nội tiếp trong đường tròn (O) có tâm là O. Hai đường AD và BE cắt nhau tại H. Đường thẳng AD cắt đường tròn (O) tại điểm A' (khác A).

a) Chứng minh H và A' đối xứng nhau qua BC.

b) Gọi K là điểm đối xứng của A qua tâm O. Chứng minh B, H, C, K là bốn đỉnh của một hình bình hành.

c) Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Chứng minh H, G, O thẳng hàng.

Câu 5. (2 điểm). Xem câu 5, ban A, B.

Bài T1/247. *Tìm số có 4 chữ số $\overline{abcd}$ sao cho:*

1) $\overline{ab}$, $\overline{ad}$ là hai số nguyên tố.

2) $\overline{db} + c = b^2 + d$

Lời giải. Do $\overline{ab}$, $\overline{ad}$ là các số nguyên tố nên b và d là các số lẻ khác 5 (1). Mặt khác, từ điều kiện (2) ta có $9d + c = b(b - 1)$. Vế trái lớn hơn hoặc bằng 9 nên từ vế phải suy ra $b > 3$. Mà b lẻ khác 5 nên chỉ có thể bằng 7 hoặc bằng 9. Với $b = 7$ thì $9d + c = 42$ suy ra $3 < d < 5$, trái với (1). Với $b = 9$ thì $9d + c = 72$ suy ra $7 \le d \le 8$, mà d lẻ nên $d = 7$. Thay vào điều kiện 2), được $c = 9$. Do $\overline{a9}$, $\overline{a7}$ cùng nguyên tố nên a chỉ có thể nhận các giá trị tương ứng 1, 2, 5, 7, 8 hoặc 1, 3, 4, 6, 9. Suy ra $a = 1$, và $\overline{abcd} = 1997$. Thử lại, ta có đó là số cần tìm.

Nhận xét. Có 356 bài giải, trừ một vài bạn giải thừa nghiệm, còn lại đều giải đúng, còn lại đều giải đúng. Lời giải tốt gồm có: **Hải Phòng**: *Đoàn Thu Trang*, 6T, THCS Chu Văn An. **Vĩnh Yên:** *Nguyễn Quỳnh Trâm*, 9A, PTCS Tx Vĩnh Yên. **Phú Thọ:** *Nguyễn Bích Hà*, 8A, THCS Tx Phú Thọ; *Lương Thu Ninh*, 9A$_1$ PTCS Phong Châu. **Vĩnh Phúc:** *Trần Gia Khánh*, 8B chuyên Yên Lạc. **Thanh Hóa:** *Nguyễn Thùy Linh*, 98A năng khiếu Hoằng Hóa. **Hải Dương:** *Nguyễn Cao Cường*, 9B THCS Chu Văn An, Thanh Hà. **Nghệ An:** *Nguyễn Thanh Mơ*, 9A THCS Thanh Chương; *Đặng Văn Cường*, 9A, THCS Đô Lương; *Hồ Thế Anh*, 8A Trung tâm Chuyên Quỳnh Lưu). **Bạc Liêu:** *Lương Thế Nhân*, 9A PTTH chuyên Bạc Liêu. **Tây Ninh:** *Đào Duy Bình*, 7A$_1$ PTTH Dương Minh Châu. **Đồng Nai:** *Vương Nguyên Tấn Hợi*, 8G THCS Tam Phước, Long Thành. **Tp. Hồ Chí Minh:** *Phạm Hoàng Hà*, 8^1 PTCS Hồng Bàng. **Bình Định:** *Bùi Thị Thu Ngân*, 9A, Quốc học Quy Nhơn.

ĐẶNG VIỄN

Bài T2/247. *Giải phương trình*

$$\frac{x^2}{5} + \frac{6125}{x^2} + \frac{210}{x} - \frac{12x}{5} = 0$$

Lời giải. của *Trần Đoàn Việt*, 8A$_1$, THCS Nguyễn Trường Tộ, Hà Nội. Điều kiện : $x \neq 0$.

Khi đó phương trình

$$\frac{x^2}{5} + \frac{6125}{x^2} + \frac{210}{x} - \frac{12x}{5} = 0 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow x^4 - 12x^3 + 1050x + \frac{122500}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^4 + 36x^2 + \frac{2025}{4} - 12x^3 + 270x - 45x^2) + \left(9x^2 + \frac{67600}{4} + 780x\right) + \frac{52875}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2 - 6x - \frac{45}{2}\right)^2 + (3x+13)^2 + \frac{52875}{4} = 0 \ (2)$$

Ta thấy vế trái của (2) có $\left(x^2 - 6x - \frac{45}{2}\right)^2 \ge 0$; $(3x+13)^2 \ge 0$; $\frac{52875}{4} > 0$ với mọi giá trị của x.

Vậy (2) vô nghiệm, từ đó suy ra (1) vô nghiệm.

Tóm lại phương trình

$$\frac{x^2}{5} + \frac{6125}{x^2} + \frac{210}{x} - \frac{12x}{5} = 0 \text{ vô nghiệm.}$$

Nhận xét. Các bạn sau đây cũng có lời giải tốt: *Mai Nguyên Dũng*, 9A$_1$, THCS Chu Văn An, TP Thái Nguyên, **Thái Nguyên.** *Phùng Ngọc Sơn*, 9B, CLC Việt Trì, **Phú Thọ.** *Tạ Nguyễn Phương Dũng*, 8C, *Đào Duy Vũ*, 9B, THCS Yên Lạc; *Nguyễn Thị Hồng Phượng*, 8A, THCS Vĩnh Tường, **Vĩnh Phúc.** *Đặng Thanh Tuấn*, 8A THCS Thường Tín, *Lê Quyết Thắng*, 8B, Nguyễn Thượng Hiền, Ứng Hòa, **Hà Tây**. *Vương Gia Vũ*, 8H, Trưng Vương; *Đỗ Việt Mạnh*, 9I, Tô Hoàng; *Lương Đình Hiếu*, 9A$_1$, DL Lương Thế Vinh, **Hà Nội.** *Vũ Bá Toản*, 9A$_1$, PTNK Cẩm Giàng, *Trần Quang Khải*, 9A, THCS Phú Thứ, Kinh Môn; *Lê Thị Thu Trang*, 9A, PTTH Nguyễn Trãi, **Hải Dương**. *Đỗ Trọng Linh*, *Nguyễn Văn Hải*, 9A, THCS Phạm Huy Thông, Ân Thi *Nguyễn Văn Dương*, 9TL, PTTH NK **Hưng Yên**. *Bùi Hữu Trường*, 9A, THCS Giao Thủy; *Trần Quang Vinh*, 9A$_1$, THCS Lê Quý Đôn, Ý Yên; *Tần Đức Hiệu*, 9I, Hàn Thuyên; *Nguyễn Tuấn Anh*, 9A$_1$ THCS Lê Quý Đôn, **Nam Định**. *Nguyễn Văn Giáp*, 8A, Nhữ Bá Sỹ, Hoằng Hóa; *Phùng Thanh Cường*, 8C, K TP Thanh Hóa, **Thanh Hóa**. *Nguyễn Hoàng Anh Vũ*, 9A, Nguyễn Hiền, Điện Bàn, **Quảng Nam**. *hạm Tuấn Anh*, 9A, Lê Khiết, **Quảng Ngãi**. *Trần Giang*, 8A$_1$, Nguyễn An Ninh, Vũng Tàu, **Bà Rịa - Vũng Tàu**. *Trần Thế Minh*, 9A, chuyên Bạc Liêu, **Bạc Liêu**.

TỐ NGUYÊN

Bài T3/247. *Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình :*

$$1998x^2 - (20a - 11)x - 1998 = 0$$

Tìm giá trị bé nhất của :

$$F=\frac{3}{2}(x_1-x_2)^2+2\left(\frac{x_1-x_2}{2}+\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right)^2$$

Lời giải. (của bạn *Huỳnh Thị Thanh Như*, 9A, PTTH Thoại Ngọc Hầu, Long Xuyên, **An Giang** và nhiều bạn).

Thấy ngay phương trình luôn có 2 nghiệm trái dấu. Theo định lí Vi-et thì các nghiệm x_1, x_2 của phương trình thỏa mãn : $x_1+x_2=\frac{20a-11}{1998}$ và $x_1x_2=-1$.

Ta có $F=\frac{3}{2}(x_1-x_2)^2+$

$$+2\left[\frac{x_1x_2(x_1-x_2)+2(x_2-x_1)}{2x_1x_2}\right]^2$$

$$=6(x_2-x_1)^2=6[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]$$

$$=\frac{6(20a-11)^2}{1998^2}+24\geq 24 \text{ với mọi } a.$$

$$F=24 \Leftrightarrow a=\frac{11}{20}.$$

Do đó F đạt giá trị bé nhất là 24 khi và chỉ khi $a=\frac{11}{20}$.

Nhận xét. 1) Một số bạn giả sử $x_1<0<x_2$ dẫn đến $F=6(x_2-x_1)^2=6\left(x_2+\frac{1}{x_2}\right)^2\geq 6.4=24$ cũng được kết quả tương tự.

2) Có bạn vội vàng : "$F=6(x_2-x_1)^2\geq 0$ nên F nhỏ nhất bằng 0 khi $x_1=x_2$" (?).

Điều này không thể xảy ra vì x_1 và x_2 trái dấu.

3) Một số bạn tính sai F nên dẫn đến các kết luận sai.

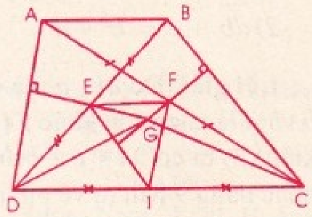
4) Các bạn có lời giải tốt hơn là : *Vũ Ngọc Minh*, 8T, THCS Chu Văn An, **Hải Phòng**; *Đỗ Quang Khánh*, 7A2, Trọng điểm Uông bí, **Quảng Ninh**; *Trần Nhật Sinh*, 8A, Phan Huy Chú, Thạch Hà, **Hà Tĩnh**; *Trần Thái An Nghĩa*, 8J, Trần Hưng Đạo, **Quảng Ngãi**. *Hà Nguyên Vũ*, 8[14], Thái Nguyên, Nha Trang, **Khánh Hòa**. *Lê Minh Châu*, 8A1, THCS Nguyễn Trường Tộ, **Hà Nội**. *Ngô Quốc Anh*, 9C, chuyên Nguyễn Du, Buôn Ma Thuột, **Đắc Lắc**. *Phan Diệu Linh*, 9 Trọng điểm Lục Ngạn, **Bắc Giang**. *Hà Thế Hùng*, 9E, Yên Thịnh, Yên Bái, **Yên Bái**. *Dương Mai Hương*, 9I, Hàn Thuyên, **Nam Định**. *Đặng Minh Tân*, 95, Lê Đại Đường, Tân Trụ, **Long An**. *Nguyễn Thanh Mơ*, 9A, Thanh Dương, Thanh Chương, **Nghệ An**. *Phan Đình Ngọc*, 9A Phú Lộc, **Thừa Thiên-Huế**; *Đàm Văn Thành*, 8C, Hoàng Hoa Thám, Tuy Hòa, **Phú Yên**. *Phan Quý Long*, 9, Nguyễn Hàm Ninh, Quảng Trạch, **Quảng Bình**....

LÊ THỐNG NHẤT

Bài T4/247. *Cho hình thang ABCD (AB//CD, AD//BC), trung điểm E của BD và trung điểm F của AC. Gọi G là giao điểm của đường thẳng qua E vông góc với AD với đường thẳng qua F vuông góc với BC. So sánh các đoạn thẳng GD, GC.*

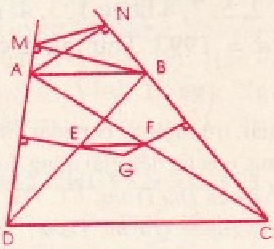
Lời giải.

Cách 1. Gọi I là trung điểm của DC. Dễ thấy G là trực tâm của ΔIEF. Mặt khác $EF//DC$. Từ đó suy ra IG là trung trực của DC.



Vậy $GD = GD$.

Cách 2. Vẽ $BM \perp AD$, $AN \perp BC$.



Tứ giác $AMNB$ là nội tiếp. Suy ra $\widehat{AMN}+\widehat{ABN}=\widehat{AMN}+\widehat{DCN}=180^\circ$.

Suy ra $MNCD$ là tứ giác nội tiếp. Dễ thấy GE là trung trực MD, GF là trung trực NC nên G là tâm dường tròn ngoại tiếp tứ giác $MNCD$.

Vậy $GD = GC$.

Nhận xét. Giải tốt bài này có các bạn:

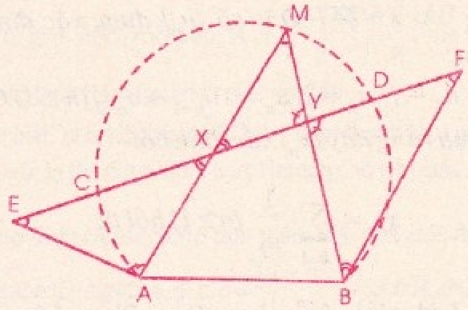
Lào Cai: *Nguyễn Đức Cường*, 9, THCS Lê Quý Đôn. **Yên Bái:** *Lê Minh Huệ*, 9D, PTCS Quang Trung, *Nguyễn Việt Hằng*, 9C PTCS DT nội trú Yên Bình. **Thái Nguyên:** *Nguyễn Ngọc Anh, Mai Nguyên Dũng, Lê Đức Nguyên*, 9A1 THCS Chu Văn An. **Bắc Giang:** *Vũ Chí Minh, Dương Mạnh Hồng*, 9A THCS TT Hiệp Hòa; **Bắc Ninh:** *Phùng Văn Thủy, Lê Văn Thịnh*, Gia Lương. **Hải Dương:** *Trần Quang Khải*, 9A, THCS Phú Thư, Kinh Môn, *Hoàng Thị Nguyệt ánh*, 9A, *Nguyễn Tuấn Dương*, 8A, PT Nguyễn Trãi, *Nguyễn Cao Cường*, 9B, Chu Văn An, Thanh Hà, *Vũ Bá Toản*, 9A1, PTNK Cẩm Giàng. **Vĩnh Phúc:** *Trần Trung Hiếu*, 9B THCS thị trấn Lập Thạch, *Nguyễn Vũ Sơn*, 9B PTCS Yên Lạc, *Nguyễn Quỳnh Trâm*, 9A THCS Vĩnh Yên, *Lăng Thị Phương*, 8B PTCS Lập Thạch, Vĩnh Phúc. **Bắc Ninh:** *Lê Sơn Tùng*, 9A, THCS Lê Văn Thịnh, Gia Lương. **Hải Phòng:** *Vũ Ngọc Minh*, 8T, THCS Chu Văn An. **Hưng Yên:** *Nguyễn Văn Dương, Nguyễn Hồng Tươi*, 9TC PTTH NK Hưng Yên. **Thái Bình:** *Nguyễn Tấn Thủy*, 6A, Đông Hưng. **Hà Tây:** *Nguyễn Thu Hằng*, 9B Lê Lợi, Hà Đông. **Hà Nội:** *Trần Anh Dũng*, 8A THCLC Cầu Giấy. *Trịnh Hoàng Nam*, 7C Hà Nội - Amsterdam, *Đỗ Hải Minh*, 7T3 Giảng Võ, *Phan Đa Phúc*, 7A, THCS Lê Quý Đôn, Cầu Giấy. **Nam Định:** *Trần Đức Thịnh, Doãn Quý Hiếu*, 9A6, *Trần Thanh Tùng, Nguyễn Công Thành*, 8A6, Trần Đăng Ninh, *Cao Lê Duẩn*, TTCLC Giao Thủy, *Phùng Văn Thắng*, 8A, *Nguyễn Xuân Trường, Trần Quốc Việt*, 8A THCS Giao Thủy, *Trần Quang Ninh*, 9A1, THCS Lê Quý Đôn, ý Yên, *Tống Anh Quân*, 9I THCS Hàn Thuyên, *Nguyễn Đức Chính*, 9B THCS Hải Hậu, *Vũ Thị Hiền*, 9A1, Phùng Chí Kiên, NĐ. **Thanh Hóa:** *Lê Ngọc Phú*, 9C, *Trịnh Hữu Trang, Phạm Tuấn Anh*, 8C, NKTP, *Hà Xuân Giáp*, 8C Lê Quý Đôn, Bỉm Sơn. *Mai Thị Thu Sánh*, 9A Nga hải, Nga Sơn. **Nghệ An:** *Trịnh Tuấn Ngọc*, 9A CLC Đô Lương, *Vũ Ngọc Dũng*, 9B Đặng Thai Mai, *Nguyễn Thị Hiền*, 8A, CII Bến Thủy. **Hà Tĩnh:** *Dương Tuấn Anh*; 9/2, Lê Văn Thiêm. **Quảng Bình:** *Hoàng Kim*, 8B, Hải Đình, TX. *Hà Nhật Sang* 8B, Hải Đình. **Thừa Thiên - Huế:** *Trần Đình Khiêm*, 9^1, Nguyễn Tri Phương, *Nguyễn Trung Hòa*, 9I, Nguyễn Chí Diểu, *Đinh Trung Hiếu*, 9A, Phú Bài, Hương Thủy. **Quảng Ngãi:** *Hà Quang Đạt* 8J, Trần Hưng Đại, *Hồ Tứ Thuần*, 8 CII Nguyễn Nghiêm, *Trần Khải Hoàng*, 9A chuyên Lê Khiết, *Trần Thái An Nghĩa*, 8J, Trần Hưng Đạo. **Gia Lai:** *Nguyễn Thị Tường Vân*, 9A PT chuyên. **Đắc Lắc:** *Tạ Quốc Hưng* 9C chuyên Nguyễn Du, *Võ Nhân Văn*, 9A Krông pac, *Ngô Tuấn Anh*, 9C chuyên Nguyễn Du. **Phú Yên:** *Phạm Thái Bình*, 9A, Lương Văn Chánh. **Khánh Hòa:** *Nguyễn Hoa Cương*, 8^{14}, Thái Nguyên, Nha Trang. **Bà Rịa - Vũng Tàu :** *Ngô Quốc Tường*, 8^1 Nguyễn An Ninh. **TP.Hồ Chí Minh:** *Khúc Ngọc Vinh*, 9/19 Hồng Bàng, Q5, *Huỳnh Công Thành*, 91, Nguyễn Du, Q1, *Trần Thị Mai Linh*, 8^1, Hồng Bàng. **Bạc Liêu:** *Trương Yến Nhi*, 9A, chuyên Bạc Liêu. **Cà Mau:** *Phạm Chí Thanh*, $9A^1$, THCS TT Đầm Dơi.

VŨ KIM THỦY

Bài T5/247. *Cho cung chứa góc α, vẽ trên đoạn AB, C, D là hai điểm thuộc cung chứa góc đó. M là một điểm thay đổi trên cung CD. X, Y theo thứ tự là giao của AM, BM với đoạn CD. Tìm vị trí của M sao cho XY có độ dài lớn nhất.*

Lời giải. (của tác giả)

Phân tích. Giả sử M là điểm bất kì trên cung CD. Trên tia đối của các tia CD, DC lấy các điểm E, F sao cho: $AEC = BFD = \alpha$ (h.1)



Dễ thấy: $\Delta EAX \sim \Delta FYB$

$$\Rightarrow \frac{EX}{EA} = \frac{FB}{FY} \Rightarrow EX.FY = EA.FB.$$

Suy ra: $XY = EF - (EX + FY)$

$\leq EF - 2\sqrt{EX.FY}$ (Côsi)

Vậy: $XY \leq EF - 2\sqrt{EA.FB}$.

Từ đó ta có cách dựng M như sau:

Dựng: Dựng các điểm E, F như trong phần phân tích. Trên đoạn EF ta lấy các điểm X, Y sao cho $EX = FY = \sqrt{EA.FB}$. Dễ thấy các điểm X, Y được sắp xếp trên đoạn EF như trong hình 1.

Gọi M là giao điểm của AX, BY. Ta thấy M thỏa mãn điều kiện đề bài.

Chứng minh: Vì $EX = FY = \sqrt{EA.FB}$ nên : $\frac{EX}{EA} = \frac{FB}{FY} \Rightarrow \Delta EAX \sim \Delta FYB \Rightarrow$ Giao điểm M của AX, BY thuộc hai tia AX, BY và ΔMYX đồng dạng với các tam giác: EAX, $FYB \Rightarrow \widehat{AMB} = \alpha$ $\Rightarrow M$ thuộc cung $\overset{\frown}{CD}$. Cũng vì $EX = FY = \sqrt{EA.FB}$ nên $XY = EF - 2\sqrt{EA.FB} \Rightarrow XY$ đạt giá trị lớn nhất.

Biện luận: Bài toán có duy nhất nghiệm.

Nhận xét. 1) Thực chất, đây là bài dựng hình nhưng nhiều bạn không quan niệm đúng về chuyện này nên chỉ dựng mà không chứng minh, không biện luận. Thậm chí có bạn chỉ phân tích chứ không dựng. Giải tốt bài này có các bạn : *Nguyễn Thành Phương*, 9A, Lê Văn Thịnh, Gia Lương, **Bắc Ninh**. *Trần Đức Thịnh*, 9A, Trần Đăng Ninh, **Nam Định**. *Vũ Ngọc Minh*, 8T, Chu Văn An, **Hải Phòng**.

2) Bài toán này là sự mở rộng một bài toán quen thuộc bằng cách thay "nửa đường tròn" bằng "cung chứa góc". Nhiều bạn có ý định sử dụng lời giải bài toán quen thuộc trên vào giải bài toán này. Nhưng không thành công !

3) Dễ dàng chứng minh rằng: $EX = FY \Rightarrow CX = DY$.

4) Không nên nhắc lại các phép dựng hình cơ bản.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài T6/247. *Dãy số $\{u_n\}$ được xác định như sau:*

$u_1 = 1; u_2 = 2, u_n = u_{n-1} + u_{n-2} (n \geq 3)$ *Chứng minh rằng dãy (x_n) xác định bởi*

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{u_k} \ (n \geq 1) \text{ hội tụ.}$$

Lời giải. (của bạn *Đào Phúc Lâm* 11A$_2$, PTTH chuyên **Yên Bái**)

Ta chứng minh rằng $u_n \geq (\sqrt{2})^{n-1}\ \forall n \geq 1$ (1)

Thật vậy với $n = 1, 2$ bất đẳng thức (1) đúng. Giả sử (1) đúng với $n = 1, 2..., k + 1$. Ta chứng minh nó đúng với $n = k + 2$. Ta có

$$u_{k+2} = u_{k+1} + u_k \geq (\sqrt{2})^k + (\sqrt{2})^{k-1}$$

$$= (\sqrt{2})^{k-1} (\sqrt{2} + 1) \geq (\sqrt{2})^{k-1} . 2 = (\sqrt{2})^{k+1}$$

Vậy $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{u_k} <$

$$< 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + ... + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}$$

$$= \frac{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} < \frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} \text{ với mọi } n.$$

Dãy $\{x_n\}$ tăng và bị chặn trên do đó hội tụ.

Nhận xét. 1) Thực chất của bài toán là chứng minh tồn tại hằng số C để $x_n < C$. Với các phương pháp ước lượng khác nhau các bạn đã cho các hằng số C khác nhau.

Trong các bài giải gửi đến cho thấy $C \in \left\{\frac{5}{2}, \frac{8}{3}, 3, 3\sqrt{5}, \frac{3 + 3\sqrt{5}}{2}, ...\right\}$

Rõ ràng nếu $L = \lim x_n$ thì L là hằng số "tốt nhất". Tuy nhiên khó lòng tìm được L. Có bạn cho rằng $L = \frac{5}{2}$.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt: *Nguyễn Minh Công* (11T, Hà Nội - Amsterdam), *Tạ Xuân Hưng*, 11A$_2$, chuyên **Yên Bái**. *Trần Đại Nghĩa*, 11T, Nguyễn Trãi, **Hải Dương**. *Phạm Văn Khoa*, 11A Lê Quý Đôn, **Đà Nẵng**. *Nguyễn Hồng Quang*, 11A **Lào Cai**. *Đào Thị Mỹ Châu*, 10 Toán, Lê Quý Đôn, **Quảng Trị**. *Trần Hữu Lực*, 12CT Đồng Hới, **Quảng Bình**. *Mai Xuân Hiếu*, 11A$_1$, quốc học Quy Nhơn, **Bình Định**. *Phạm Việt Ngọc*, 12A Ngô Sỹ Liên, **Bắc Giang**. *Lê Ngọc Quang*, 10A Hoằng Hóa, **Thanh Hóa.** *Trần Chí Hòa*, 11 toán, **Quảng Bình.** *Nguyễn Thanh Nhàn*, 12A$_1$, Lê Quý Đôn, **Long An.** *Vũ Văn Hải*, 10A, **ĐHSP Hà Nội I**. *Nguyễn Duy Tân*, 11A chuyên **Vĩnh Phúc**, *Bùi Xuân Hảo*, 12A, PTTH Nguyễn Huệ, **Hà Tây.** *Nguyễn Thái Sơn*, 10A chuyên Toán, **ĐHSPHN**. *Trần Nam Dũng*, 12CT, Phan Bội Châu, *Lưu Minh Ngọc*, 10T, **ĐHKHTN**. *Vũ Duy Tuấn*, 12A Ngô Sỹ Liên, **Bắc Giang.** *Hoàng Tùng*, 10A, **ĐHKHTN Hà Nội**.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T7/247. *Cho hai hàm số liên tục f, g: [0, 1] → [0, 1] thỏa mãn điều kiện f(g(x)) = g(f(x)) với mọi x ∈ [0, 1]. Biết rằng f là hàm tăng. Chứng minh rằng, tồn tại a ∈ [0, 1] sao cho f(a) = g(a) = a.*

Lời giải. (của nhiều bạn):

Đặt $h(x) = g(x) - x\ \forall x \in [0, 1]$. Ta có $h(x)$ là hàm liên tục trên $[0, 1]$ và $h(0) = g(0) \geq 0$, $h(1) = g(1) - 1 \leq 0$. Suy ra $\exists x_o \in [0, 1]$ sao cho $h(x_o) = 0$, hay $g(x_o) = x_o$.

- Nếu $f(x_o) = x_o$ thì ta có đpcm.
- Xét $f(x_o) \neq x_o$. Xét dãy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ được xác định bởi: $x_1 = f(x_o)$, $x_{n+1} = f(x_n)\ \forall n \geq 1$. Ta có $x_n \in [0, 1]\ \forall n \geq 1$. Hơn nữa, vì f là hàm tăng trên $[0, 1]$ nên $\{x_n\}$ là dãy đơn điệu $\{x_n\}$ là dãy tăng nếu $x_o < f(x_o)$ và $\{x_n\}$ là dãy giảm nếu $x_o > f(x_o)$). Suy ra, dãy $\{x_n\}$ hội tụ khi $n \to \infty$ và $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \in [0, 1]$. (1)

Bằng quy nạp theo n, ta sẽ chứng minh rằng $g(x_n) = x_n\ \forall n \geq 1$. (2)

Thật vậy, với $n = 1$ ta có : $x_1 = f(x_o) \Rightarrow g(x_1) = g(f(x_o)) = f(g(x_o)) = f(x_o) = x_1$.

Giả sử ta đã có $x_k = g(x_k)$ với $k \geq 1$. Khi đó: $x_{k+1} = f(x_k) = f(g(x_k)) = g(f(x_k)) = g(x_{k+1})$. Từ đây, theo nguyên lí quy nạp, ta có (2).

Từ (1), (2) và giả thiết của bài toán ta có:

$$f(a) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = a$$

$$g(a) = g(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

Vậy $\exists a \in [0, 1]$ sao cho $f(a) = g(a) = a$ (đpcm).

Nhận xét. 1) Số bạn gửi lời giải cho bài toán không nhiều. Các bạn sau đây có lời giải đúng. **Tây Ninh:** *Đoàn Hồng Anh* (11A4, PTTH Hoàng Lê Kha. **Thừa Thiên - Huế:** *Nguyễn Trần Mạnh Quân, Trần Như Quang*, 11CT Quốc học Huế.. **Quảng Trị:** *Đào Thị Mỹ Châu, Võ Như Phượng*, 10T, 12T, PTTH Lê Quý Đôn. **Quảng Bình:** *Trần Chí Hòa*, 11T, PTTH NK. **Nghệ An:** *Trần Nam Dũng*, 12CT, PTTH Phan Bội Châu. **Thanh Hóa:** *Nguyễn Trường Sinh*, 11A5, THCB Đào Duy Từ, *Trần Bại Khê, Lê Xuân Trung, Lê Duy Diễn*, 11T, 12T, PTTH Lam Sơn. **Ninh Bình:** *Lê Văn Cường, Nguyễn Thanh Sơn*, 11CT PTTH Lương Văn Tụy). **Thái Bình:** *Vũ Thị Thúy Nga*, 10 Anh, PTTH chuyên. **Hà Tây:** *Nguyễn Đức Mạnh Hà*, 11A PTTH Nguyễn Huệ. **Hà Nội:** *Nguyễn Đức Mạnh*, 12A PTTH Cổ Loa, Đông Anh. **Hải Dương:** *Trần Đại Nghĩa, Vũ Văn Tâm, Phạm Văn Hải, Nguyễn Văn Luật*, 11T, 12T PTTH Nguyễn Trãi. **Hải Phòng:** *Nguyễn Kim Thắng*, 10T, PTTH Trần Phú. **Vĩnh Phúc:** *Nguyễn Duy Tân*, 11A PTTH chuyên. **Thái Nguyên:** *Vũ Tuấn Anh*, 11T, PTTHNK. **Bắc Giang:** *Nguyễn Minh Hoàng, Nguyễn Tiến Mạnh, Phạm Việt Nhiều Ngọc, Vũ Duy Tuấn*, 11A, 12A PTTH Ngô Sĩ Liên. **Yên Bái:** *Nguyễn Công Chinh, Nguyễn Ngọc Chiến*, 11A1, 12A1 PTTH chuyên. **ĐHQG TPHCM:** *Lê Quang Nẫm*, 12CT PTNK. **ĐHQG Hà Nội:** *Phan Anh Mi Nhon, Lê Thị Tuyên*, 12A PT chuyên ngữ - ĐHSPNN).

2) Có 6 bạn cho lời giải sai do các bạn đã *ngộ nhận hàm số phải là đa thức* hoặc do ngộ nhận [0, 1] là tập giá trị của f, g; hoặc do hiểu chưa đúng về hàm đơn điệu, hàm liên tục...

NGUYỄN KHẮC MINH

Bài T8/247. *Với A, B, C là ba góc của tam giác ABC. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{\sin^2 A}+\frac{1}{\sin^2 B}+\frac{1}{\sin^2 C}\geq\frac{1}{2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}$$

Lời giải. (của đa số các bạn)

Cách 1: Sử dụng hệ thức

$$\Leftrightarrow \sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

Ta viết

$$\frac{1}{\sin^2 A}+\frac{1}{\sin^2 B}+\frac{1}{\sin^2 C}\geq\frac{1}{2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 A\sin^2 B+\sin^2 B\sin^2 C+\sin^2 C\sin^2 A\geq$$
$$\geq \sin A\sin B\sin C\,4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 A\sin^2 B+\sin^2 B\sin^2 C+\sin^2 C\sin^2 A\geq$$
$$\geq \sin A\sin B\sin C(\sin A+\sin B+\sin C)$$

$$\Leftrightarrow (\sin A\sin B-\sin B\sin C)^2+(\sin B\sin C-\sin C\sin A)^2+(\sin C\sin A-\sin A\sin B)^2\geq 0$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi ΔABC đều.

Cách 2.

$$\frac{1}{\sin^2 A}+\frac{1}{\sin^2 B}+\frac{1}{\sin^2 C}\geq\frac{1}{2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin B\sin C}{\sin A}+\frac{\sin C\sin A}{\sin B}+\frac{\sin A\sin B}{\sin C}\geq$$
$$\geq 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin B\sin C}{\sin A}+\frac{\sin C\sin A}{\sin B}+\frac{\sin A\sin B}{\sin C}\geq$$
$$\geq \sin A+\sin B+\sin C\ (1)$$

Áp dụng định lí hàm số sin, ta có (1)

$$\Leftrightarrow \frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}\geq a+b+c$$

$$\Leftrightarrow (ab-bc)^2+(bc-ca)^2+(ca-ab)^2\geq 0.$$

Đpcm.

Nhận xét. 1. Có hơn 250 lời giải gửi đến tòa soạn. Tất cả đều đúng.

2. Hai bạn: *Vũ Văn Hải*, 10A, chuyên Toán - Tin, **ĐHSPHN** và *Trần Đại Nghĩa*, 11 Toán - Tin, PTTH Nguyễn Trãi, **Hải Dương** có nhận xét đúng rằng: đây là bài toán phát biểu dưới dạng khác của bài T3/208 ra trên số 10(1994).

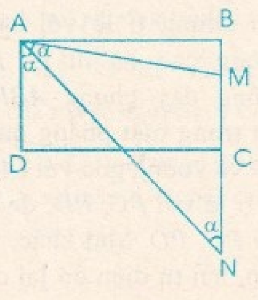
NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T9/247. *Cho hình chữ nhật ABCD và một điểm M chuyển động trên cạnh BC. Phân giác của DAM cắt cạnh BC tại N. Xác định vị trí M để tỉ số $\frac{AN}{NM}$ đạt giá trị nhỏ nhất.*

Lời giải. (của bạn *Hoàng Thế Hưng* 11A - PTTHC - **Vĩnh Phúc**)

Đặt $\widehat{DAN}=\widehat{NAM}=\alpha$ $(0<\alpha\leq\frac{\pi}{4})$

Dễ thấy : $ANM=\alpha$ (h.1) $\Rightarrow \Delta AMN$ cân tại M



$\Rightarrow \frac{AN}{MN}=2\cos\alpha$

$\Rightarrow \frac{AN}{MN}\geq 2\cos\frac{\pi}{4}.$

(vì hàm số cosin nghịch biến trong đoạn $[0, \frac{\pi}{2}]$)

Vậy : $\frac{AN}{MN} \geq \sqrt{2}$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow M \equiv B$

Tóm lại: $\frac{AN}{MN}$ nhỏ nhất khi $M \equiv B$ và giá trị nhỏ nhất đó bằng $\sqrt{2}$.

Nhận xét. 1) Bài này có nhiều bạn tham gia giải (450 bạn). Đa số giải đúng, tuy nhiên có không dưới 10 bạn giải sai. Các bạn sau đây có lời giải tốt: *Lương Thế Hùng*, $11A_1$, chuyên ban Vũng Tàu, **Bà Rịa - Vũng Tàu.** *Nguyễn Hoa*, 11T1, PTTH NK **Quảng Bình**. *Phạm Thành Công*, 10TT, PTTH Nguyễn Trãi, **Hải Dương**. *Lưu Minh Ngọc*, 10A toán - **ĐHKHTN-ĐHQGHN**. *Trần Thái An Nghĩa*, 8J, Trần Hưng Đạo, **Quảng Ngãi**. *Bùi Bá Hưng*, $10A_6$, chuyên ban Uông Bí, **Quảng Ninh**...

2) Nhiều bạn dùng các biến đổi lượng giác quá dài. Một số bạn phải dùng phương pháp đạo hàm để tìm giá trị nhỏ nhất. Đặc biệt có ba bạn phải dùng đến mặt phẳng tọa độ để giải.

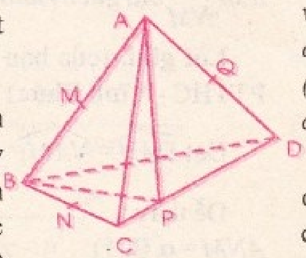
3) Một vài bạn quá cẩn thận đã chứng minh lại sự nghịch biến của hàm số cosin trong đoạn $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

NGUYỄN MINH HÀ

Bài T10/247. *Cho tứ diện ABCD. Mặt phẳng phân giác của các nhị diện cạnh CD, DA, AB và BC lần lượt cắt các cạnh AB, BC, CD và DA ở M, N, P và Q. Chứng minh rằng:*

$$\frac{MA}{MB} + \frac{NB}{NC} + \frac{PC}{PD} + \frac{QD}{QA} \geq 4.$$

Lời giải. Trước tiên, ta chứng minh rằng : $\frac{PC}{PD} = \frac{S(ABC)}{S(ABD)}$ (1). Thật vậy, dựa vào công thức $V = 1/3Bh$, các tứ diện $CABP$ và $DABP$ có đáy chung ABP nên thể tích của chúng tỉ lệ với các đường cao hạ từ C, D xuống đáy chung ABP. Mà trong mặt phẳng qua CD và vuông góc với (ABP) các đường cao này lại tỉ lệ với PC, PD, do đó các thể tích đó tỉ lệ với PC, PD. Mặt khác, vẫn dựa vào công thức trên, hai tứ diện đó lại có các đường cao hạ từ đỉnh P bằng nhau (do P thuộc mặt phẳng phân giác của nhị diện cạnh AB) nên các thể tích đó cũng tỉ lệ với diện tích các đáy tương ứng. Từ đó, ta dễ dàng suy ra (1). Một cách tương tự, ta cũng có (2), (3), (4), như dưới đây:



$$\frac{QD}{QA} = \frac{S(BCD)}{S(BCA)} \quad (2)$$

$$\frac{MA}{MB} = \frac{S(CDA)}{S(CDB)} \quad (3)$$

$$\frac{NB}{NC} = \frac{S(DAB)}{S(DAC)} \quad (4)$$

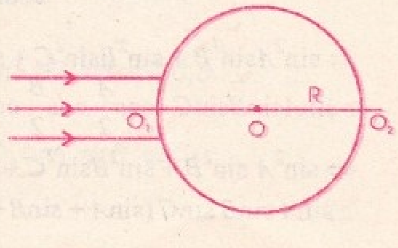
Nhân (1), (2), (3), (4) tương ứng theo vế được vế trái là tích các số hạng trong vế trái của bất đẳng thức cần chứng minh và vế phải bằng 1. Áp dụng định lí Cauchy, suy ra đpcm.

Nhận xét. Có 152 bài giải, trừ một bài giải sai do ngộ nhận DM là phân giác của góc ADB, còn lại tất cả đều giải đúng. Phần lớn các bạn đều giải tương tự như trên, một số bạn dựa vào tính chất của mặt phẳng phân giác và định lí Céva hoặc Ménélaus để chứng minh. Chẳng hạn như bạn *Hoàng Anh Thư*, 11A, Quốc học Quy Nhơn, **Bình Định** đã chứng minh bốn điểm M, N, P, Q nằm trên cùng một mặt phẳng, rồi đưa vào định lí Ménélaus trong không gian và sau đó là định lí Cauchy để suy ra đpcm. Lời giải tốt gồm có: **Thanh Hóa:** *Đỗ Văn Hưng*, 11A, PTTH Vĩnh Lộc. **Bà Rịa - Vũng Tàu:** *Lê Huyền Đức*, $11A_1$, PTTH Vũng Tàu. **Bình Dương:** *Lê Khánh Thái*, $11T_1$ chuyên Hùng Vương. **Yên Bái:** *Tưởng Thanh Tùng*, $11A_2$, chuyên Yên Bái. **Thái Bình:** *Đặng Hoàng Minh Hiếu*, 11A PTTH chuyên Thái Bình. **Hà Nội:** Nguyễn Thanh Tùng, 11A toán, ĐHQG Hà Nội. **Phú Yên:** *Nguyễn Ngọc Minh*, 11T chuyên Phú Yên.

ĐẶNG VIỄN

Bài L1/247. *Chiếu một chùm sáng song song vào một quả cầu bằng thủy tinh. Kích thước của chùm sáng rất nhỏ so với kích thước quả cầu (xem hình vẽ). Hỏi chùm tia ló sau quả cầu là chùm hội tụ hay phân kì.*

Lời giải. Cần lưu ý là đề bài không nói rõ là quả cầu đặt trong môi trường nào, cũng không cho biết chiết suất thủy tinh bằng bao nhiêu. Do đó ta gọi n là chiết suất của thủy tinh



đối với môi trường bên ngoài, R là bán kính quả cầu. Rõ ràng là với thủy tinh thông thường thì $0 < n \leq 2$. Vì khi coi quả cầu như một hệ quang học gồm thấu kính hội tụ O_1 đặt sát với bản mặt song song (có bề dày $d \simeq 2R$), bản mặt song song song lại đặt sát với thấu kính hội tụ O_2. Hai thấu kính O_1 và O_2 đều có tiêu cự là $f = \frac{R}{n-1}$. Coi chùm sáng song song chiếu tới quả cầu được xuất phát từ một điểm sáng S ở a vô cùng. Sơ đồ tạo ảnh:

$$S \xrightarrow[d_1 \quad d'_1]{O_1} S_1 \xrightarrow{BMSS} S_2 \xrightarrow[d_2 \quad d'_2]{O_2} S'.$$

Ta có $d_1 = \infty \rightarrow d'_1 = f = \frac{R}{n-1}$. Độ dịch chuyển ảnh qua bản mặt song song:

$$\overline{S_1S_2} = d\left(1 - \frac{1}{n}\right) = 2R\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

Suy ra $d_2 = 2R - (d'_1 + \overline{S_1S_2}) = \frac{R(n-2)}{n(n-1)}$ và

$$d'_2 = \frac{d_2 f}{d_2 - f} = \frac{R(2-n)}{2(n-1)} \qquad (1).$$

d'_2 xác định điểm hội tụ của chùm tia ló (loại các đường kéo dài của tia ló). Nếu $d'_2 > 0$: chùm tia ló hội tụ, còn nếu $d'_2 < 0$ thì chùm tia ló là phân kì. Theo (1) ta thấy :

a) Nếu $1 < n < 2$ (quả cầu đặt trong không khí hoặc trong muối chẳng hạn) thì $d'_2 > 0$: chùm tia ló hội tụ.

b) Nếu $n < 1$ (quả cầu đặt trong môi trường có chiết suất lớn hơn chiết suất của thủy tinh dùng làm quả cầu) thì $d_2 < 0$: chùm tia ló phân kì.

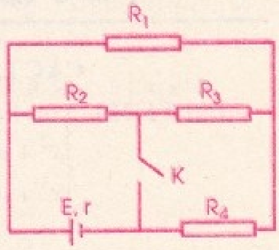
Nhận xét. Các em có lời giải tương đối đầy đủ: *Đàm Hữu Thu*, 12L, PTTH Lương Văn Chánh, **Phú Yên**. *Trịnh Trọng Kiên*, Ba010C, ĐHKHTN, ĐHQG **Hà Nội**. *Đỗ Văn Bảo*, 11A, PTTH chuyên Vĩnh Phúc; *Trương Quang Trí*, 12A1, THCS Sơn Tịnh I, **Quảng Ngãi**. Nguyễn Ngọc Tuấn, 11F chuyên Lí, PTTH chuyên Hùng Vương, **Phú Thọ**.

MAI ANH

Bài L2/247. *Cho mạch điện như hình vẽ $R_1 = 9r$; $R_2 = 10r$, $R_3 = 8r$; $R_4 = 32r$. Bỏ qua điện trở của dây nối và khóa K. Khi K mở công suất tiêu thụ trên R_1 là 15W. Xác định công suất tiêu thụ trên R_1 khi K đóng.*

Lời giải. Khi K mở, ta có

$R_n = [R_1 // (R_2 \text{ nt } R_3)] + R_4 \rightarrow R_n = 32r$ và $I_c = \frac{E}{39r}$.



Từ đó

$$I_1 = I_c \frac{R_{123}}{R_1} = \frac{2E}{117r}$$

$$\rightarrow P_1 = I_1^2 R_1 = \frac{4E^2}{1521r} = 15(\text{W}).$$

$$\rightarrow \frac{E^2}{r} = \frac{22815}{4} \qquad (1).$$

Khi K đóng, ta có $R'_n = [(R_3//R_4) \text{ nt } R_1]//R_2$

$$\rightarrow R'_n = \frac{770r}{127} \rightarrow I'_c = \frac{127E}{897}$$

$$\rightarrow I'_1 = I'_c \frac{R_{1234}}{R_{134}} = \frac{0{,}0557E}{r} \text{ và}$$

$P' = I_1'^2 R_1 = 159{,}3\text{W}$ (chú ý đến (1)).

Nhận xét. Các em có lời giải đúng và gọn: *Trần Danh Lâm*, 10 Lí, PTTHNK Hàn Thuyên. **Bắc Ninh**. *Nguyễn Thanh Tùng*, 10C chuyên. *Nguyễn Việt Bách*, 9B, PTCS Yên Lạc, **Vĩnh Phúc**. *Phạm Tuân*, 9A, THCS chất lượng cao thị xã **Phú Thọ**. *Phạm Đình Thắng*, 10A, PTTH chuyên **Yên Bái**. *Đào Thanh Tùng*, 10D1, PTTH Chu Văn An, **Hà Nội**. *Ngô Hà Thanh*, 11A, CT ĐHSP Vinh, **Nghệ An**. *Phạm Ngọc Thịnh*, 10D, PTTH Bắc Kiến Xương, **Thái Bình**. *Nguyễn Thị Hải*, 12A1, PTTH Hồng Thái, Đan Phượng, **Hà Tây**. *Phạm Văn Tập*, 11B1, PTTH Vĩnh Bảo, **Hải Phòng**; *Hồ Khánh Nam*, 10 Lí, Phan Bội Châu, Vinh, **Nghệ An**. *Nguyễn Công Chúc*, 11THCS, PTTH NK **Quảng Bình**. *Lưu Văn Mạnh*, 11A2, PTTH Ba Đình, Nga Sơn, **Thanh Hóa**. *Phạm Ngọc Điệp*, 11 Lí, Lương Văn Tụy, **Ninh Bình**. *Trần Thị Ngọc Bích*, 11A3, PTTH Phan Châu Trinh, **Đà Nẵng**. *Trương Hữu Cát*, 10 Lí, THCB NK **Hà Tĩnh**. *My Thu Hiền*, 10F, PTTH Lam Sơn, **Thanh Hóa**. *Trương Ngọc Sơn*, 11A, PTTH Lương Đắc Bằng, Hoằng Hóa, **Thanh Hóa**. *Phan Thị Thu Hằng*, 11C Toán, PTTH Lương Thế Vinh, **Đồng Nai**. *Trương Quang Trí*, 12A1, THCB Sơn Tịnh I, **Quảng Ngãi**; *Lê Văn Dung*, 11A, PTTH chuyên Lê Quý Đôn, **Đà Nẵng**. *Đàm Hữu Thu*, 12 Lí, PTTH Lương Văn Chánh, Tuy Hòa, **Phú Yên**. *Thi Trần Anh Tuấn*, PTTH chuyên Trà Vinh, 12A2, *Lâm Thiên Phụng*, 10A2 CL, PTTH Lê Quý Đôn, **Long An**; *Vũ Quốc Huy* (B), 9B, trường Bán công chất lượng cao Việt Trì, **Phú Thọ**, *Ninh Hồng Phúc*, 12T, TH chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, **Vĩnh Long**

MAI ANH

ĐỀ RA KÌ NÀY

CÁC LỚP THCS

Bài T1/251. Tìm tích xyz biết

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 1 \end{cases}$$

NGUYỄN ĐỄ
(Hải Phòng)

Bài T2/251. Tìm giá trị bé nhất của $n \in N$ sao cho số $n^2 + n + 1$ phân tích được thành tích 4 số nguyên tố.

NGUYỄN DUY LIÊN
(Vĩnh Phúc)

Bài T3/251. Giải phương trình :

$$6x^4 + 8x^2 + 6 = (x^4 + 2x^2 + 1)(1 + 4y - y^2)$$

ĐOÀN NGỌC THẾ
(Đồng Nai)

Bài T4/251. Gọi (O, r) là đường tròn nội tiếp ΔABC; M là trung điểm BC. MO cắt đường cao AH của ΔABC tại I. Chứng minh rằng $AI = r$.

NGUYỄN NGỌC BÌNH PHƯƠNG
(Tiền Giang)

Bài T5/251. Cho đường tròn (O, R) và một điểm M ở bên ngoài (O). Kẻ cát tuyến MAB của đường tròn (O). Gọi P, Q là các giao điểm của trung trực của MB với đường tròn (O) và H là trung điểm của PQ. Tìm quỹ tích điểm H khi cát tuyến MAB quay xung quanh M..

TRẦN XUÂN UY
(Nam Định)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/251. Cho dãy $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ xác định như sau :

$$x_1 = 7, x_2 = 50, x_{n+1} = 4x_n + 5x_{n-1} - 1975$$

$\forall n \geq 2$. Chứng minh rằng $x_{1996} \vdots 1997$.

ĐỖ THANH HÂN
(Bạc Liêu)

Bài T7/251. Cho phương trình bậc ba

$$x^3 - px^2 + qx - p = 0 \qquad (1)$$

với $p, q \in \mathbf{R}$; $p > 0$, $q > 0$.

Chứng minh rằng : Nếu (1) có ba nghiệm thực thì ta có: $p \geq \left(\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{2}}{8}\right)(q + 3)$

NGUYỄN THANH HẢI
(Hà Nội)

Bài T8/251. Tìm tất cả các hàm f liên tục trên đoạn $[-\frac{1}{12}; \frac{1}{6}]$ và thỏa mãn điều kiện

$$1996f(x) \frac{1997}{1998} f\left(\frac{x}{1999}\right) = 1996x^{2000}$$

$$\forall x \in [-\frac{1}{12}; \frac{1}{6}].$$

NGUYỄN QUANG HẢI
(Vĩnh Phúc)

Bài T9/251. Bên trong đường tròn $(\mathcal{C})$ bán kính 1 người ta đặt một số hữu hạn các hình tròn nhỏ mà tổng độ dài các đường kính của chúng bằng 3995. Cho MN là một dây cung bất kì của $(\mathcal{C})$. Chứng minh rằng, ta có thể dựng được một đường thẳng song song với MN và cắt ít nhất 1998 hình tròn nhỏ.

ĐỖ THANH SƠN
(Hà Nội)

Bài T10/251. Gọi G_i là trọng tâm mặt đối diện đỉnh A_i của tứ diện $A_1A_2A_3A_4$ $(i = \overline{1, 4})$. Chứng minh rằng nếu các đường thẳng dựng qua G_i và vuông góc với mặt chứa G_i của tứ diện $A_1A_2A_3A_4$ đồng quy thì tứ diện $A_1A_2A_3A_4$ là tứ diện trực tâm.

TRẦN DUY HINH
(Bình Định)

CÁC ĐỀ VẬT LÝ

Bài L1/251. Một vật nặng $m = 1$kg được treo bằng một sợi dây không giãn $l = 1$m. Ở vị trí cân bằng, vật nhận vận tốc ban đầu v theo phương ngang rồi chuyển động theo quỹ đạo tròn vượt qua điểm treo một góc $\alpha = 30^\circ$ so với phương ngang thì bắt đầu rời khỏi quỹ đạo tròn.

1) Tính vận tốc v và vận tốc v_0 khi vật bắt đầu rời khỏi cung tròn.

2) Lập phương trình quỹ đạo của vật sau khi rời khỏi cung tròn.

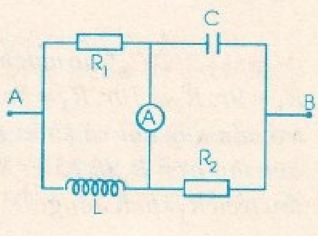
3) Suy luận cho quá trình tiếp theo. Bỏ qua ma sát trong quá trình chuyển động.

LẠI THẾ HIỀN
(Hà Nội)

Bài L2/251. Cho một đoạn mạch xoay chiều như hình vẽ $R_1 = R_2 = 100\sqrt{3}\,\Omega$, $L = \frac{1}{\pi}H$, $C = \frac{10^{-4}}{\pi}F$.,

$U_{AB} = 100\sqrt{2}\sin 100\pi t$ von. Điện trở ampe kế vô cùng nhỏ.

Tính số chỉ ampe kế.



NGUYỄN DUY TRUY
(Thái Bình)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/251. Find the product xyz, knowing that

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x^3+y^3+z^3=1 \end{cases}$$

T2/251. Find the least value of $n \in \mathbf{N}$ such that n^2+n+1 can be written as a product of four prime numbers.

T3/251. Solve the equation :

$$6x^4+8x^2+6=(x^4+2x^2+1)(1+4y-y^2).$$

T4/251. Let (O, r) be the incircle of a triangle ABC, M be the midpoint of BC. The line MO cuts the altitude AH of ΔABC at I. Prove that $AI=r$.

T5/251. Let be given a circle (O, R) and a point M outside (O). Consider a secant MAB of (O); Let P, Q be the points of intersection of (O) with the perpendicular bisector of MB and H be the midpoint of PQ. Find the locus of H when the secant MAB moves around M.

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/251. The sequence $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ is defined by: $x_1=7$, $x_2=50$, $x_{n+1}=4x_n+5x_{n-1}-1975$, $\forall n \geq 2$. Prove that $x_{1996} \vdots 1997$.

T7/251. Prove that if the equation of third degree

$$x^3-px^2+qx-p=0$$

where $p, q \in \mathbf{R}$, $p>0$, $q>0$, has three real roots, then $p \geq \left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{2}}{8}\right)(q+3)$

T8/251. Find all continuous functions f, defined on the segment $[-\frac{1}{12}; \frac{1}{6}]$, satisfying the condition:

$$1996 f(x) \frac{1997}{1998} f\left(\frac{x}{1999}\right)=1996x^{2000} \quad \forall x \in \left[\frac{1}{12}; \frac{1}{6}\right].$$

T9/251. Inside a circle $(\mathcal{C})$ with radius 1, has been placed a finite number of small circles, the sum of the lengths of the radii of which is equal to 3995. MN is and arbitrary given chord of $(\mathcal{C})$. Prove that we can construct a line parallel to MN, cutting at least 1998 of these small circles.

T10/251. Let G_i be the center of gravity of the face opposite to the vertex A_i of the tetrahedron $A_1A_2A_3A_4$ ($i=\overline{1,4}$. Prove that if the lines passing through G_i, perpendicular to the face of $A_1A_2A_3A_4$ containtug G_i ($i=\overline{1,4}$) are concurrent, then the tetrahedron is an orthocentric one (t.e. its altitudes are concurrent).

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN VÀ LỜI GIẢI

BÀI SỐ 5

Problem. Prove the inequalities

$$\frac{1}{10\sqrt{2}} < \frac{1}{2}\,\frac{3}{4}\,\frac{5}{6} \cdots \frac{99}{100} < \frac{1}{10}$$

Solution. Set

$$A=\frac{1}{2}\,\frac{3}{4}\,\frac{5}{6} \cdots \frac{99}{100}\ ; \quad B=\frac{2}{3}\,\frac{4}{5}\,\frac{6}{7} \cdots \frac{98}{99}.$$

Since $\frac{1}{2} < \frac{2}{3}, \frac{3}{4} < \frac{4}{5}, \ldots, \frac{97}{98} < \frac{98}{99}, \frac{99}{100} < 1.$

we have $A < B$. It follows that $A^2 < AB = \frac{1}{100}$.

Therefore, $A < \frac{1}{10}$. On the otherhand, since

$$\frac{2}{3} < \frac{3}{4}, \frac{4}{5} < \frac{5}{6}, \ldots, \frac{98}{99} < \frac{99}{100},$$

we have $B < 2A$. Hence $\frac{1}{100} = AB < 2A^2$.

Therefore, $\frac{1}{10\sqrt{2}} < A$.

Từ mới:

inequality = *bất đẳng thức*

set = *đặt*

since = *do*

it follows = *suy ra*

follow = *theo, nối (động từ)*

on the otherhand = *mặt khác*

hence = *vậy, do đó*

NGÔ VIỆT TRUNG

LỊCH SỬ TOÁN HỌC

Câu chuyện về NHỊ THỨC NIUTƠN

NGUYỄN CÔNG SỨ
(Trường Đại học Kĩ thuật mật mã)

Để ghi nhớ công lao của I.Niutơn (1642-1727) trong việc tìm ra công thức khai triển nhị thức:

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^2 + \dots$$

$$\dots + \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-k+1)}{k!}x^k + \dots$$

$$\dots + \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-k+1)(m-k)}{(k+1)!}x^{k+1} + \dots$$

$$\dots + \frac{m(m-1)(m-2)\dots 3.2}{(m-1)!}x^{m-1} + \dots$$

$$\dots + \frac{m(m-1)(m-2)\dots 3.2.1}{m!}x^m \qquad (1)$$

người ta gọi đó là nhị thức Niutơn.

Trên bia mộ của Niutơn tại tu viện Véc-min-trơ người ta còn khắc họa hình Niutơn cùng với cả nhị thức Niutơn.

Vậy phải chăng loài người đã không hề biết gì về công thức khai triển nhị thức trước khi có phát minh của nhà Bác học vĩ đại này.

Theo các văn bản còn lưu giữ được thì từ rất lâu trước Niutơn, ngay từ 200 năm trước công nguyên các nhà Toán học Ấn Độ đã rất quen biết với một bảng "Tam giác số học". Trong trước tác của nhà Toán học Trung Quốc Chu Sinh viết từ năm 1303 người ta tìm thấy bảng số.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1

Rõ ràng đó là các hệ số của công thức khai triển nhị thức Niutơn từ cấp 0 đến cấp 8. Dù nhà toán học này đã không nói gì cho các hệ số tiếp theo cùng công thức tổng quát của chúng, nhưng cũng theo cung cách lập bảng của ông có thể dễ dàng tìm ra được quy luật cho phép viết tiếp được các hàng mới.

Vào nửa đầu thế kỉ 15 trong tác phẩm "Chìa khóa số học" viết bằng tiếng Ảrập của nhà toán học, thiên văn học Xamacan có tên là Giêm Xit-Giaxêđin Casi người ta lại gặp tam giác số học mà tác giả đã gọi tên rõ hơn là các hệ số nhị thức cũng với những chỉ dẫn về cách thành lập các hàng kế tiếp nhau của bảng ứng với các cấp liên tiếp của nhị thức. Với lối chỉ dẫn (không chứng minh) đó Casi đã cho ta khả năng khai triển nhị thức ở một cấp bất kì. Có thể coi đó là phát biểu bằng văn đầu tiên trong lịch sử của định lí về nhị thức Niutơn.

Ở châu Âu, "tam giác số học" được tìm thấy đầu tiên trong công trình của nhà toán học người Đức Mikhaiin Stêpherô công bố vào năm 1544. Trong công trình này cũng chỉ dẫn ra các hệ số của nhị thức cho đến cấp 17.

Gần một trăm năm sau, hoàn toàn độc lập với nhau nhà toán học người Anh Bôritgơn (1624), nhà toán học Pháp Fecma (1636) rồi nhà Toán học, triết học Pháp Pascan (1654) đã đưa công thức hoàn hảo về hệ số của nhị thức Niutơn. Đặt biệt trong công trình mang tên "Luận văn về tam giác Số học" công bố vào năm 1665, B.Pascan đã trình bày khá chi tiết về tính chất của các hệ số trong "tam giác số học" và từ đó "tam giác số học" được sử dụng một cách rộng rãi và có tên "tam giác Pascan" ra đời thay cho "tam giác số học".

Rõ ràng về mặt lịch sử mà nói thì "tam giác số học" ("tam giác Pascan") đã được các nhà toán học Á đông xét đến trước Pascan rất nhiều.

Vậy vai trò Niutơn ở đâu trong tiến trình hình thành công thức Niutơn ?

Năm 1676 trong bức thư thứ nhất gửi Ôđen Hiarô - Chủ tịch Viện Hàn lâm Hoàng gia Anh, I. Niutơn đã đưa ra công thức (1) mà không dẫn giải cách chứng minh. Sau đó ít lâu trong bức thư thứ hai gửi đến Viện Hàn lâm Niutơn đã trình bày rõ bằng cách nào ông đi đến công thức đó. Thì ra bằng cách này Niutơn đã tìm ra công thức Niutơn từ năm 1665 khi mà ông chỉ mới 22 tuổi. Nhưng dù vậy thì việc đưa trình công thức của mình Niutơn cũng không nói được điều gì mới cho các nhà toán học đương thời.

Vậy tại sao cái công thức không mới đó lại mang tên Niutơn ?

Vấn đề là ở chỗ ý tưởng của Niutơn không dừng lại ở việc áp dụng công thức này cho trường hợp các số mũ (m) là *nguyên dương* mà cho số mũ bất kì : *dương, âm, nguyên và phân số.*

Chính ý tưởng mới đó đã có một ý nghĩa lớn lao với việc phát triển của toán học. Các nhà toán học đương thời thấy ngay được tầm quan trọng của công thức và công thức được áp dụng rộng rãi trong nhiều công trình nghiên cứu toán học, đặc biệt trong đại số và giải tích.

Nhân đây, cũng cần phải nói thêm rằng công thức nhị Niutơn không phải là đóng góp lớn nhất của Niutơn cho toán học. Niutơn đã đóng góp rất nhiều cho việc mở đầu những khuynh hướng toán học cao cấp. Các phép tính đối với các đại lượng vô cùng nhỏ bé. Và do vậy Niutơn được coi là người sáng lập ra Giải tích toán học.

ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI NĂM 1997

MÔN THI : TOÁN (KHỐI A)

Thời gian làm bài : 180 phút

A. PHẦN DÀNH CHO TẤT CẢ THÍ SINH

Câu I. Xét hàm số với tham số a :

$$y = \frac{x^2+3x+a}{x+1}$$

1) Với những giá trị nào của tham số a thì đồ thị của hàm số trên có tiếp tuyến vuông góc với đường phân giác của góc thứ nhất của hệ trục tọa độ ? Chứng minh rằng khi đó, đồ thị của hàm số có điểm cực đại và điểm cực tiểu.

2) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số ứng với $a = 3$.

Câu II. 1) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - 3y = 4\dfrac{y}{x} \\ y - 3x = 4\dfrac{x}{y} \end{cases}$$

2) Giải và biện luật bất phương trình sau theo tham số a:

$$x^{\log_a(ax)} \geq (ax)^4$$

Câu III. Giải phương trình lượng giác:

$\cos x \sin x + |\cos x + \sin x| = 1.$

Câu IV. Tính giới hạn sau:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{8-x}}{x}$$

Câu V. AB là đường vuông góc chung của hai đường thẳng x, y chéo nhau, A thuộc x, B thuộc y. Đặt độ dài $AB = d$. M là một điểm thay đổi thuộc x, N là một điểm thay đổi thuộc y. Đặt $AM = m$, $BN = n$ $(m \geq 0, n \geq 0)$. Giả sử ta luôn có $m^2 + n^2 = k > 0$, k không đổi.

1) Xác định m, n để độ dài đoạn thẳng MN đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất.

2) Trong trường hợp hai đường thẳng x, y vuông góc với nhau và $nm \neq 0$, hãy xác định m, n (theo k và d) để thể tích tứ diện $ABMN$ đạt giá trị lớn nhất và tính giá trị đó.

B. PHẦN DÀNH CHO TỪNG LOẠI ĐỐI TƯỢNG THÍ SINH

Câu VIa. *Cho thí sinh thi theo chương trình chưa phân ban.*

Tính tích phân sau : $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x}\,dx$

Câu VIb. *Cho thí sinh thi theo chương trình Ban khoa học tự nhiên (ban A):* Tìm diện tích của miền trong mặt phẳng tọa độ xOy giới hạn bởi parabôn có phương trình $y = x^2 + x + 2$ và đường thẳng có phương trình $y = 2x + 4$.

Câu VIc. *Cho thí sinh thi theo chương trình Ban khoa học tự nhiên và kĩ thuật (Ban B)*

Tìm diện tích của miền trong mặt phẳng tọa độ xOy giới hạn bởi đồ thị của các hàm số $y = x^3$ và $y = -x^2$

ĐÁP ÁN

Câu I. (2,5 đ = 1,5+1)

$$y = \frac{x^2+3x+a}{x+1}$$

$$y' = 1 - \frac{a-2}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2-(a-2)}{(x+1)^2}$$

* Tiếp tuyến của đồ thị tại điểm có hoành độ $(x \neq -1)$ vuông góc với đường thẳng $y = x$ khi và chỉ khi $1 - \dfrac{a-2}{(x+1)^2} = -1$. Vậy có tiếp tuyến như thế khi và chỉ khi phương trình (đối với x) $2(x+1)^2 =$

a - 2 có nghiệm khác -1; điều đó xảy ra khi và chỉ khi $a > 2$.

* Đồ thị có điểm cực đại, cực tiểu khi phương trình $(x+1)^2 - (a-2) = 0$ có hai nghiệm phân biệt (điều kiện đạo hàm triệt tiêu đổi dấu khi x thay đổi qua các nghiệm đó): Khi $a > 2$ rõ ràng có điều đó.

2) y xác định với mọi $x \neq -1$.

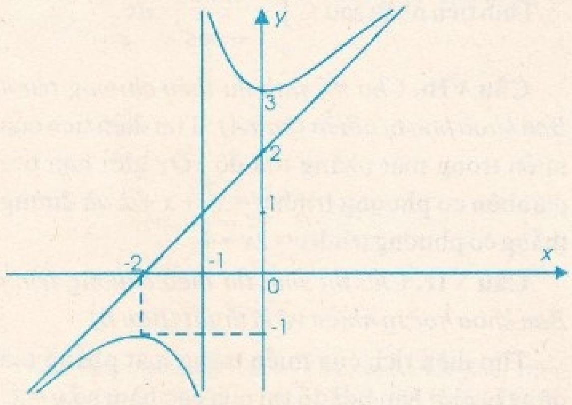
Đường tiệm cận đứng: $x = -1$: đường tiệm cận xiên $y = x + 2$.

$y' = \dfrac{(x+1)^2 - 1}{(x+1)^2} = \dfrac{x(x+2)}{(x+1)^2}$ triệt tiêu đổi dấu khi x qua $x = -2$ và $x = 0$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
y'		+	0	-	‖	-	0	+	
y	$-\infty$	↗	-1 cực đại	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	cực tiểu 3	↗	$+\infty$

Giao với trục tung: (0, 3) chính là điểm đạt cực tiểu của hàm số.



Câu II. (2,5đ = 1+1,5) 1) Hệ phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} xy \neq 0 \\ x^2 - 3xy = 4y \\ y^2 - 3xy = 4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy \neq 0 \\ x^2 - 3xy = 4y \\ x^2 - y^2 = 4(y-x) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy \neq 0 \\ x^2 - 3xy = 4y \\ \left[\begin{array}{l} x = y \\ y = -(x+4) \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\text{a)} \begin{cases} xy \neq 0 \\ x^2 - 3xy = 4y \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 0 \\ y = x \\ x^2 - 3x^2 = 4x \end{cases} \Leftrightarrow x = y = -2.$$

$$\text{b)} \begin{cases} xy \neq 0 \\ x^2 - 3xy = 4y \\ y = -(x+4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy \neq 0 \\ y = -(x+4) \\ x^2 - 4x + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = -2.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $x = y = -2$.

2) Với $a \leq 0$ hoặc $a = 1$ thì $\log_a(ax)$ vô nghĩa nên bất phương trình vô nghiệm.

Với $0 < a \neq 1$ thì ta xét:

a) $0 < a < 1$: Lấy lôga cơ số a cả 2 vế, bất phương trình đã cho tương đương với $\log_a(ax)\log_a x \leq 4\log_a(ax) \Leftrightarrow (1+\log_a x)\log_a x \leq 4(1+\log_a x) \Leftrightarrow -1 \leq \log_a(x) \leq 4 \Leftrightarrow \log_a \dfrac{1}{a} \leq \log_a(a^4) \Leftrightarrow a^4 \leq x \leq \dfrac{1}{a}$.

b) $a > 1$: Tiến hành tương tự như trên (chú ý do $a > 1$), $\log_a x$ là hàm số đồng biến, ta được bất phương trình tương đương với

$$(\log_a x + 1)(\log_a x - 4) \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < x \leq \dfrac{1}{a}. \\ x \geq a^4 \end{array}\right.$$

Câu III. (1đ) Phương trình đã cho tương đương với

$\dfrac{1}{2}[(\cos x + \sin x)^2 - 1] + |\cos x + \sin x| - 1 = 0 \Leftrightarrow$ $y^2 - 1 + 2y - 2 = 0 \Leftrightarrow (y-1)(y+3) = 0$ trong đó $y = |\cos x + \sin x|$. Để ý rằng $y = |\cos x + \sin x| = \sqrt{2}\left|\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)\right| \in [0; \sqrt{2}]$ suy ra phương trình đã cho tương đương với $\left|\sqrt{2}\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)\right| = 1 \Leftrightarrow$ $2\cos^2\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos\left(2x - \dfrac{\pi}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow$ $\sin 2x = 0 \Leftrightarrow x = k\dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$.

Câu IV. (1đ).

$$\lim_{x \to 0} \frac{2\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{8-x}}{x} =$$

$= \lim\limits_{x\to 0}\left[2\left(\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}\right)+\dfrac{2-\sqrt[3]{8-x}}{x}\right]$

mà $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x(\sqrt{1+x}+1)} =$

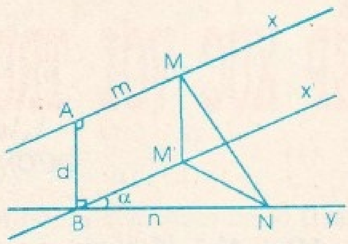
$= \dfrac{1}{2}$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{8}-\sqrt[3]{8-x}}{x} =$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{8-(8-x)}{x[\sqrt[3]{8^2}+\sqrt[3]{8(8-x)}+\sqrt[3]{(8-x)^2}]} = \dfrac{1}{12}$

nên giới hạn đã cho bằng $2\left(\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{1}{12}=\dfrac{13}{12}$.

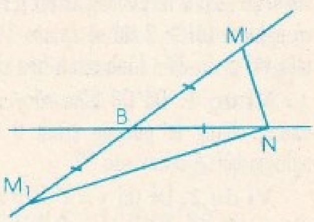
Câu V. (2đ = 1+1). 1) Qua B vạch $x' // x$, lấy M' để $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$ thì $M' \in x'$ và $BM' = m$, $MN^2 = MM'^2 + M'N^2 = d^2 + M'N^2$ nên MN đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất khi và chỉ khi $M'N$ đạt giá trị lớn nhất, nhỏ nhất. Có $M'N^2 = BM'^2 + BN^2 - 2BM.BN.\cos\alpha = m^2 + n^2 - 2mn\cos\alpha$, α góc giữa hai tia $BM'.BN$ (khi M' và N khác B).

Vậy: khi $\cos\alpha = 0$, tức x, y vuông góc thì độ dài $M'N$ (do đó độ dài MN) không đổi.



Khi $\cos\alpha \neq 0$: $M'N$ đạt cực trị (giá trị lớn nhất hay nhỏ nhất) khi và chỉ khi $mn\cos\alpha$ đạt cực trị nhưng để ý rằng ứng với mỗi cặp (M, N) còn có cặp (M_1, N), $AM = AM_1 = m$ $(\overrightarrow{AM_1} = -\overrightarrow{AM}$ ứng với $mn\cos(\pi-\alpha) = -mn\cos\alpha$ nên MN đạt cực trị khi và chỉ khi mn đạt giá trị lớn nhất do $mn = \dfrac{k-(m-n)^2}{2}$ nên mn đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $m = n = \sqrt{\dfrac{k}{2}}$.

Hình vẽ bên mô tả $M'N$ bé nhất, M'_1N lớn nhất.



(Chú ý: Có thể thí sinh xét từng trường hợp góc giữa các tia AM, BN là vuông, nhọn, tù).

2) $mn \neq 0$ thì $ABMN$ là tứ diện và thể tích $V_{ABMN} = \dfrac{1}{3}$ (diện tích ABM) $\times NB = \dfrac{1}{3}.\dfrac{d.m}{2}.n$ *(do dễ thấy NB là một đường cao của tứ diện, vì x, y vuông góc với nhau)* nên từ đó V_{ABMN} lớn nhất khi và chỉ khi mn lớn nhất tức khi và chỉ khi $m = n = \sqrt{\dfrac{k}{2}}$.

Khi đó $V_{ABMN} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{d}{2}.\dfrac{k}{2} = \dfrac{dk}{12}$.

Câu VIa. (1đ) Cho thí sinh thi theo chương trình chưa phân ban

$\displaystyle\int\frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x} = \int\frac{1-\cos^2 x}{1+\cos^2 x}\sin dx =$

$= -\displaystyle\int\frac{(1+\cos^2 x)-2}{1+\cos^2 x}\sin x dx = -\int\sin x dx - 2\int\frac{d(\cos)}{1+\cos^2 x} =$

$= \cos x - 2\text{arc tg}(\cos x) + C$ nên

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x}dx\} = -1 + 2.\frac{\pi}{4} = \boxed{\frac{\pi}{2}-1}$

Câu VIb. (1đ) *Cho thí sinh thi theo chương trình Ban khoa học tự nhiên (ban A).*

Parabon $y = x^2 + x + 2$ cắt đường thẳng $y = 2x + 4$ tại các điểm có hoành độ mà $x^2 + x + 2 = 2x + 4$ nên có 2 giao điểm là (-1, 2), (2, 8) và trên đoạn $-1 \leq x \leq 2$, đường thẳng ở phía trên parabon nên diện tích cần tìm là :

$\displaystyle\int_{-1}^{2}(2x+4-x^2-x-2)dx = \int_{-1}^{2}(-x^2+x+2)dx =$

$\left(-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}+2x\right)\Big|_{-1}^{2} = \boxed{\dfrac{27}{6}}$

Câu VIc. (1đ). *Cho thí sinh thi theo chương trình Ban khoa học tự nhiên (ban B):*

Đồ thị hai hàm số $y = x^3$ và $y = -x^2$ cắt nhau tại các điểm có hoành độ x thỏa mãn $x^3 = x^2$, từ đó có hai giao điểm (-1, 1), (0, 0) và trên đoạn $-1 \leq x \leq 0$, đồ thị $y = x^3$ ở phía trên đồ thị $y = x^2$ nên diện tích cần tìm là

$\displaystyle\int_{-1}^{0}(x^3+x^2)dx = \left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{0} = -\frac{1}{4}+\frac{1}{3} = \boxed{\frac{1}{12}}$

Diễn đàn DẠY VÀ HỌC TOÁN

NHÌN LẠI KHÁI NIỆM NGHIỆM KÉP CỦA PHƯƠNG TRÌNH VÀ VẤN ĐỀ ĐƯỜNG CONG TIẾP XÚC VỚI TRỤC HOÀNH

DƯƠNG QUỐC VIỆT
(Hà Nội)

Chúng ta biết rằng điều kiện để parabol $y = ax^2 + bx + c$ tiếp xúc với trục hoành là phương trình $y = ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm kép và do đó tương đương với biệt thức $\Delta = b^2 - 4ac = 0$. Đây là kết quả mà bạn đã quen biết từ khi học lớp 10. Tuy ở thời điểm đó Sách Giáo Khoa không định nghĩa chính xác thế nào là parabol tiếp xúc với trục hoành, nhưng nhiều bạn đã trực giác đúng đắn rằng parabol tiếp xúc với trục hoành khi đỉnh của nó nằm trên trục hoành. Từ kết quả này của đa thức bậc 2, người ta đã sử dụng thành công trong việc giải một số bài toán về các đường conic. Nhưng thật đáng tiếc bởi từ đó không ít người đã sử dụng một cách tùy tiện kết quả trên sang cả các đường cong khác. Hơn thế nữa trong một số cuốn sách các tác giả của nó đã khẳng định không một chút do dự rằng :"*Điều kiện cần và đủ để đồ thị hàm số $y = f(x)$ tiếp xúc với trục hoành là phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm kép*". Để thấy rõ cái sai trong lập luận trên, bạn hãy bình tĩnh cùng chúng tôi trở lại hai khái niệm rất cơ bản là *nghiệm bội của đa thức* và *đường cong $y = f(x)$ tiếp xúc với trục hoành*.

NGHIỆM BỘI CỦA ĐA THỨC LÀ GÌ?

Từ *Kép* nếu theo nghĩa chỉ số lượng thì nó tương đương với 2. Đối với phương trình bậc 2 số nghiệm tối đa của nó là 2, vì vậy hai nghiệm trùng nhau được gọi là nghiệm kép. Với đa thức bậc cao hơn 2 có thể xuất hiện nhiều nghiệm trùng nhau và người ta đã đưa ra khái niệm nghiệm bội để chỉ số lượng các nghiệm giống nhau của đa thức. Ưu thế đặc biệt của đa thức là ở chỗ: Nếu đa thức $P(x)$ nhận α làm nghiệm thì $P(x) = (x - \alpha)\, q(x)$ trong đó $q(x)$ cũng là đa thức. Nhờ kết quả này người ta có thể định nghĩa nghiệm bội của đa thức trên tập số thực như sau: *Đa thức bậc ≥ 1; $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ nhận số thực α làm nghiệm bội k (k - nguyên dương) nếu như $P(x) = (x - \alpha)^k q(x)$* trong đó $Q(x)$ cũng là một đa thức với $Q(\alpha) \neq 0$. Trong trường hợp đặc biệt nghiệm bội 2 được gọi là nghiệm kép còn nghiệm bội 1 được gọi là nghiệm đơn. Nếu kí hiệu $P^{(i)}_{(x)}$ là đạo hàm cấp i của đa thức $P(x)$ thì bạn có thể chứng minh một cách không khó khăn lắm cho kết quả dưới đây.

Mệnh đề 1. *Điều kiện ắt có và đủ để đa thức $P(x)$ nhận α làm nghiệm bội k là $P(\alpha) = 0$, $P^{(1)}_{(\alpha)} = 0, \ldots, P^{(k-1)}_{(\alpha)} = 0$ và $P^{(k)}_{(\alpha)} \neq 0$.*

KHI NÀO ĐƯỜNG CONG TIẾP XÚC VỚI TRỤC HOÀNH?

Nếu dựa vào định nghĩa tiếp tuyến của đường cong $y = f(x)$ tại một điểm trong các sách Giải tích thì đồ thị hàm số $y = f(x)$ tiếp xúc với trục hoành nếu nó nhận trục hoành làm tiếp tuyến. Nhớ lại rằng, phương trình của trục hoành là $y = 0$ cho nên đồ thị $y = f(x)$ tiếp xúc với trục hoành tại điểm có hoành độ x_0 khi và chỉ khi $f(x_0) = f'(x_0) = 0$. Và ta có mệnh đề sau :

Mệnh đề 2. *Đồ thị hàm số $y = f(x)$ tiếp xúc với trục hoành khi và chỉ khi hệ phương trình $f(x) = f'(x) = 0$ có nghiệm.*

Nếu kết hợp mệnh đề 1 và mệnh đề 2, ta sẽ nhận được kết quả về mối quan hệ giữa tính tiếp xúc với trục hoành của một đa thức và nghiệm bội .

Mệnh đề 3. *Đồ thị hàm đa thức bậc cao hơn 1 $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ tiếp xúc với trục hoành khi và chỉ khi $P(x)$ có nghiệm bội ≥ 2 (hay có ít nhất hai nghiệm trùng nhau).*

NHÌN LẠI NHỮNG SAI LẦM

Nếu cho rằng điều kiện để đồ thị hàm số $y = f(x)$ tiếp xúc với trục hoành là phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm kép hoặc là có nghiệm bội ≥ 2 thì sẽ ra sao ? Sau đây chúng tôi sẽ dẫn ra một vài ví dụ điển hình minh họa cho sai lầm đó.

Ví dụ 1. Đồ thị hàm số $y = 0$ tiếp xúc với trục hoành, nhưng chẳng lẽ phương trình $0 = 0$ có nghiệm kép hay có nghiệm bội ≥ 2 hay sao ???

Ví dụ 2. Đồ thị $y = x^3$ tiếp xúc với trục hoành tại $x = 0$, nhưng phương trình $x^3 = 0$ lại có nghiệm bội 3 chứ đâu là nghiệm kép !.

Ví dụ 3. Đồ thị hàm số $y = \sin x - x$ tiếp xúc với trục hoành tại $x = 0$ vì $y(0) = y'(0) = 0$, nhưng có lẽ nào ta lại nói phương trình $\sin x - x = 0$ có nghiệm kép hay nghiệm bội ! vân vân và vân vân... !

Một sai lầm tinh tế hơn mà chúng ta có thể tìm thấy trong không ít tài liệu có liên quan đến những bài toán dành cho các bạn ôn thi vào các trường Đại học là lập luận sau đây : "Hàm bậc 3 $f(x) = (x - x_0)(ax^2 + bx + c)$ tiếp xúc với trục hoành khi và chỉ khi phương trình $f(x)$=0 có nghiệm kép và điều đó tương đương với tam thức $ax^2 + bx + c$ nhận x_0 làm nghiệm hoặc có nghiệm kép, tức là $\left[\begin{array}{l} ax_0^2 + bx_0 + c = 0 \\ \Delta = b^2 - 4ac = 0 \end{array}\right.$".

Tế nhị là ở chỗ cả hai bước của lập luận trên đều sai nhưng kết quả cuối cùng lại đúng. Thật vậy, bạn hãy cùng chúng tôi xem xét lại từng bước của lập luận này.

Đồ thị của hàm $f(x) = (x - x_0)(ax^2 + bx + c)$ tiếp xúc với trục hoành khi và chỉ khi phương trình $(x - x_0)(ax^2 + bx + c) = 0$ có ít nhất hai nghiệm trùng nhau (Mệnh đề 3) điều đó tương đương với

$$\left[\begin{array}{l} ax_o^2 + bx_0 + c = 0 \\ \Delta = b^2 - 4ac = 0 \end{array}\right. \qquad (1)$$

Bạn cũng có thể dùng Mệnh đề 2 để chứng minh kết quả này. Bây giờ ta chuyển qua xem xét bước 2.

Phương trình bậc 3 : $(x - x_0)(ax^2 + bx + c) = 0$ có nghiệm kép thì nghiệm kép đó là x_0 hoặc khác x_0. Nếu nghiệm kép là x_0 thì phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ phải có một nghiệm x_0 và một nghiệm khác x_0. Nếu $(x - x_0)(ax^2 + bx + c) = 0$ có nghiệm kép khác x_0 thì nó chính là nghiệm kép của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$. Vậy $(x - x_0)(ax^2 + bx + c) = 0$ có nghiệm kép khi và chỉ khi

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} ax_o^2 + bx_o + c = 0 \\ \Delta = b^2 - 4ac > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} ax_o^2 + bx_o + c \neq 0 \\ \Delta = b^2 - 4ac = 0 \end{cases} \end{array}\right. \qquad (2)$$

Bạn có thể dùng Mệnh đề 1 để kiểm tra kết quả này.

Ví dụ 4. Cho hàm số $f(n) = (x - 1)(x^2 - 2mx + m)$

(i) Tìm m để phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm kép. Đáp số $m = 0$.

(ii) Tìm m để đồ thị hàm số tiếp xúc với trục hoành.

Đáp số $\left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 1 \end{array}\right.$

Điều kiện (1) và điều kiện (2) có lẽ nào lại tương đương !

Các bạn thân mến !

Hóa ra là lập luận :"Điều kiện để đường cong $y = f(x)$ tiếp xúc với trục hoành tương đương với phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm kép" chỉ có thể tin cậy được trên các hàm bậc 2, còn đối với các đường cong khác cần phải được xem xét lại cho chuẩn mực.

LTS. Bài viết này làm sáng tỏ một vấn đề hiện nay đang nhầm lẫn ở nhiều trường PTTH. Tuy nhiên, ở chương trình toán PTTH không có khái niệm nghiệm bội, nên nhiều người đã lạm dụng hai chữ "nghiệm kép" sang cả những trường hợp nghiệm bội lớn hơn 2. Mong các bạn tiếp tục trao đổi giải pháp cho vấn đề này.

TRẢ LỜI BẠN ĐỌC *(Tiếp trang 24)*

Hỏi: Chúng em... ngày xưa được học là : 1 + 1 = 2; 2 + 2 = 4, ... nhưng chưa được một lần... nghe chứng minh. Tòa soạn có thể chứng minh giúp để chúng em hiểu rõ hơn không?

NGUYỄN NGỌC ANH
(PTTH Đông Triều, Quảng Ninh)

Đáp: Thật đáng khen tinh thần học hỏi đến cùng của em. Tuy nhiên để chứng minh điều em nêu ra lại vượt quá kiến thức phổ thông. Ngày xưa... anh cũng không được học chứng minh... như bây giờ.

Hỏi: Thầy bảo giải phương trình $\sqrt[x]{3\sqrt{3}} = \left(\sqrt{3\sqrt{3}}\right)^x$ và em giải được nghiệm là $x = \pm\sqrt{2}$. Thầy bảo phương trình này vô nghiệm và nếu có nghiệm thì x phải là số nguyên dương. Nhưng đọc cuốn sách "Toán nâng cao cho học sinh lớp 11" của P.H.K, khi giải phương trình

$$\sqrt[x]{4} - \sqrt[x]{2^{3x+3}}50 + 12 = 0.$$

lại lấy hai nghiệm $x_1 = 3$ và $x_2 = \dfrac{3}{log_2 6}$

Nghiệm x_2 đâu phải số nguyên dương ? Hiểu thế nào về $\sqrt[x]{a}$?

P.T.T
(11A4, THCB Thi Khoa Nghĩa, Châu Đốc, An Giang)

Đáp: Thầy giáo của em nói phương trình ấy vô nghiệm là đúng. Phải nhớ rằng $\sqrt[x]{a}$ đâu luôn là $a^{\frac{1}{x}}$. Khi viết $\sqrt[x]{a}$ thì điều kiện của x là số nguyên và $x \geq 2$, còn khi viết $a^{\frac{1}{x}}$ thì chỉ cần $x \neq 0$. Lời giải trong sách đã "lỡ" nhận x_2 là nghiệm. Cái sai này đâu phải chỉ ... riêng em !

L.T.N

TÌM HIỂU SÂU THÊM
TOÁN HỌC PHỔ THÔNG

ĐỊNH LÍ hàm số SIN ĐỊNH LÍ hàm số COSIN và ứng dụng

TRẦN NAM DŨNG
(TP Hồ Chí Minh)

Các định lí hình học phẳng có thể chia làm hai nhóm chính: nhóm "aphin", tức là các định lí chỉ liên quan đến tỉ lệ giữa các đoạn thẳng như các định lí Thales, định lí Xeva, định lí Menelaus, định lí Pascal... và nhóm thứ hai liên quan đến các đại lượng metric, tức là đến số đo của các đoạn thẳng cũng như góc giữa hai đường thẳng, chẳng hạn định lí Pythagore, định lí hàm số sin, định lí hàm số cosin...

Trong bài này, chúng ta tìm hiểu thêm một số ứng dụng của hai định lí định lượng quan trọng là định lí hàm số sin và định lí hàm số cosin.

1. Mối quan hệ của hai định lí

** Từ định lí hàm số sin suy ra định lí hàm số cosin*

Từ định lí hàm số sin, để chứng minh định lí hàm số cos, ta chỉ cần chứng minh rằng :

$\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C - 2\sin B\sin C\cos A.$

$$\sin^2 B + \sin^2 C - \sin^2 A = \frac{(1 - \cos 2B + 1 - \cos 2C)}{2 - (1 - \cos^2 A)} =$$

$$= -\cos(B + C) . \cos(B - C) + \cos^2 A =$$

$$= \cos A\,(\cos(B - C) + \cos A) = 2\cos A\sin B\sin C.$$

** Từ định lí hàm số cos suy ra định lí hàm số sin*

Ta có : $\cos A = \dfrac{(b^2 + c^2 - a^2)}{2bc}$

Do đó :

$$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \left[1 - \frac{(b^2 + c^2 - a^2)}{2bc}\right]^2}$$

$$= \sqrt{\frac{(2bc + b^2 + c^2 - a^2)(2bc - b^2 - c^2 + a^2)}{4b^2c^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{4p(p-a)(p-b)(p-c)}}{bc} = \frac{2S}{bc}$$

Từ đó $\dfrac{\sin A}{a} = \dfrac{2S}{abc} = \dfrac{1}{2R}$ (đpcm).

Từ định lí hàm số cos có thể suy ra định lí sau:

Định lí các chiếu :

$$a = b\cos C + c\cos B$$
$$b = c\cos A + a\cos C$$
$$c = a + \cos B + b\cos A$$

Chứng minh: Theo định lí hàm số cos, ta có:

$$b\cos C + c\cos B = \frac{b(a^2 + b - c^2)}{2ab} + \frac{c(a^2 + c^2 - b^2)}{2ac} =$$

$$= \frac{2a^2}{2a} = a \text{ (đpcm)}.$$

2. Định lí Euler

Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn tâm O bán kính R. M là một điểm bất kì trong mặt phẳng của tam giác. Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là hình chiếu của M lên các cạnh BC, CA, AB tương ứng. Thế thì diện tích của tam giác $A_1B_1C_1$ có thể tính theo công thức:

$$S_1 = S(A_1B_1C_1) = \left(\frac{1}{4}\right) S[1 - \frac{d^2}{R^2}]$$

trong đó S là diện tích tam giác ABC, d là khoảng cách từ M đến O.

Chứng minh: Để đơn giản, ta chỉ xét trường hợp *M* nằm trong tam giác *ABC*, các trường hợp khác xét tương tự.

Nối *AM*, cắt đường tròn tại điểm thứ hai *D*. Dễ thấy $\widehat{B_1C_1A_1} = \widehat{MBD}$. Và theo định lí hàm số sin thì:

$$\frac{MB}{\sin ADB} = \frac{MD}{\sin MBD}$$

$$S_1 = \left(\frac{1}{2}\right)B_1C_1 . C_1A_1 . \sin A_1C_1B_1 =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)MA . \sin A.MB.\sin B.\sin A_1C_1B_1$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)MA.MD . \sin A . \sin B . \sin C$$

$$=\left(\frac{1}{4}\right)|R^2 - OM^2|\frac{S}{R^2} = \left(\frac{1}{4}\right)S\left[1-\frac{d^2}{R^2}\right]$$

(Vì $MA.MD = |R^2 - OM^2|$, phương tích của điểm M đối với O và $\sin A \sin B \sin C = \frac{abc}{8R^3} = \frac{S}{2R^2}$).

Định lí Euler là một trong những viên ngọc của hình học phẳng. Có nhiều cách chứng minh định lí này, nhưng trong bài này chúng ta chỉ giới hạn ở cách chứng minh trên. Ta cũng nhận xét rằng kết quả của bài toán về đường thẳng Simson : "Cho tam giác ABC, M là một điểm bất kì trên đường tròn ngoại tiếp tam giác; thế thì hình chiếu của M lên BC, CA và AB nằm trên một đường thẳng", suy ra trực tiếp từ định lí này.

3. Công thức Herong

Công thức Herong cho tứ giác nội tiếp

Cho tứ giác ABCD nội tiếp trong đường tròn có các cạnh lần lượt là a, b, c, d, $p = \frac{(a+b+c+d)}{2}$ là nửa chu vi. Thế thì diện tích của tứ giác được tính theo công thức:

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

Ta *chứng minh một công thức mạnh hơn*: Trong một tứ giác bất kì với các cạnh *a, b, c* thì:

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - \frac{abcd\cos(A+C)}{2}}$$

Thật vậy, theo định lí hàm số cos, trong tam giác ABD ta có:

$$BD^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos C.$$

Từ đó suy ra:

$$(a^2 + d^2 - c^2 - b^2)^2 = 4(ad\cos A - bc\cos C)^2 \quad (1)$$

Ta có:

$$S(ABCD) = \left(\frac{1}{2}\right)(ad\sin A + bc\sin C), \text{ do đó}$$

$$16S^2 = 4(ad\sin A + bc\sin C)^2 \quad (2)$$

Cộng (1) và (2) vế theo vế, ta được:

$$16S^2 + (a^2 + {}^2 - c^2 - b^2)^2 =$$

$$= 4(ad\cos A - bc\cos C)^2 + 4(ad\sin A + bc\sin C)^2$$

$$= 4(a^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd(\cos A\cos C - \sin A\sin C))$$

$$= 4(a^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd.\cos(A+C))$$

$$= 4(ad+bc)^2 - 4abcd.\cos^2\left(\frac{(A+C)}{2}\right) 16S^2 =$$

$$= 4(ad+bc)^2 - (a^2 + d^2 - c^2 - b^2)^2 - 16abcd.\cos^2\left(\frac{(A+C)}{2}\right)$$

$$= 16(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - 16abcd.\cos^2\left(\frac{(A+C)}{2}\right)$$

từ đó suy ra đpcm.

Khi tứ giác $ABCD$ nội tiếp, ta có $\frac{(A+C)}{2} = \frac{\pi}{2}$ và ta thu được công thức Herong cho tứ giác nội tiếp.

Đặc biệt, cho tứ giác $ABCD$ suy biến thành tam giác ABC ($d = 0$) ta thu được công thức Herong cho tam giác.

Công thức Herong cho tam giác*: Cho tam giác ABC có các cạnh lần lượt là a, b, c, $p = \frac{(a+b+c)}{2}$ là nửa chu vi. Thế thì diện tích của tam giác được tính theo công thức*

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$$

4. Định lí Stewart và hệ quả

Định lí Stewart

Cho tam giác ABC có các cạnh tương ứng là a, b, c. M là một điểm nằm trên cạnh BC sao cho : $\frac{MB}{MC} = \frac{m}{n}$. Thế thì ta có: $(m+n)AM^2 = mb^2 + nc^2 - \frac{mna^2}{(m+n)}$

Chứng minh. áp dụng định lí hàm số cos cho tam giác ABM và ACM ta được

$$AB^2 = MB^2 + MA^2 - 2AM.MB.\cos AMB \quad (3)$$

$$AC^2 = MC^2 + MA^2 - AM.MC.\cos AMC \quad (4)$$

Nhân (3) với n và (4) với m rồi cộng lại, chú ý là $\cos AMB = -\cos AMC$ và $n.MB = m.BC$ ta được

$$mb^2 + nc^2 = n.MB^2 + m.MC^2 + (m+n)MA^2.$$

Lại chú ý là

$$MB = \frac{na}{(m+n)},\ MC = \frac{ma}{(m+n)}.$$

Từ đẳng thức cuối cùng ta suy ra đpcm. Từ định lí Stewart có thể rút ra các hệ quả quan trọng sau:

Công thức tính độ dài đường trung tuyến

Giả sử M là trung điểm của BC, khi đó $\frac{MB}{MC} = \frac{1}{1}$ và ta có công thức:

$$m_a^2 = \frac{(2b^2 + 2c^2 - a^2)}{4}$$

Công thức tính độ dài đường phân giác

Giả sử AD là phân giác góc A. Ta có theo tính chất đường phân giác: $\frac{DB}{DC} = \frac{c}{b}$

Do đó từ định lí Stewart ta rút ra công thức:

$$k^2 = bc\left(1 - \frac{a^2}{(b+c)^2}\right)$$

5. Một số ví dụ áp dụng

Bài toán 1: *Cho tam giác ABC. Gọi AM và AD lần lượt là các đường trung tuyến và phân giác trong của góc A. Đường thẳng đối xứng với AM qua phân giác AD cắt BC tại N. Chứng minh rằng:*

$$\frac{BN}{CN} = \frac{AB^2}{AC^2}$$

(Đề thi vô địch toán Tây Ban Nha 1990)

Lời giải. Vì hai tam giác ABN có cùng đường cao nên ta có:

$$\frac{BN}{CN} = \frac{S(ABN)}{S(ACN)}$$

Mặt khác $\dfrac{S(ABN)}{S(ACN)} = \dfrac{AB.AN.\sin BAN}{AC.AN.\sin NAC}$

$$= \left(\frac{c}{b}\right)\left(\frac{\sin BAN}{\sin NAC}\right)$$

$$= \left(\frac{c}{b}\right)\left(\frac{\sin MAC}{\sin MAB}\right) \quad (5)$$

Cuối cùng, áp dụng định lí hàm số sin và các tam giác AC và MAB ta được:

$$\sin MAC = \frac{MC\sin AMC}{b}$$

$$\sin MAB = MB\frac{\sin AMB}{c}$$

Kết hợp với (5), chú ý là $MB = MC$ và ($\sin AMC = \sin AMB$), ta suy ra điều phải chứng minh.

Bài toán 2: *Cho tam giác ABC không cân tại A. Gọi* A_1, B_1, C_1 lần lượt là các điểm đối xứng với A, B, C qua BC, CA, AB tương ứng. Chứng minh rằng tam giác $A_1B_1C_1$ cân tại A_1 khi và chỉ khi $\sin B.\sin C.\cos A = \frac{1}{8}$ (Đề thi chọn đội tuyển ĐHTH TP Hồ Chí Minh 1/1996).

Lời giải. Ta có theo định lí hàm số cos trong tam giác A_1B_1C:

$$A_1B_1^2 = b^2 + a^2 - 2ab\cos(3C) =$$

$$= b^2 + a^2 - 2ab\cos C(4\cos^2 C - 3)$$

$$= b^2 + a^2 - (b^2 + a^2 - c^2)(1 - 4\sin^2 C)$$

$$= b^2 + a^2 - (b^2 + a^2 - c^2)\left(1 - \frac{c^2}{R^2}\right)$$

$$= c^2 + \left(\frac{c^2}{R^2}\right)(b^2 + a^2 - c^2)$$

Vì vậy $A_1B_1 = A_1C_1 \Leftrightarrow$

$$c^2 + \left(\frac{c^2}{R^2}\right)(b^2 + a^2 - a^2) =$$

$$= c^2 + \left(\frac{c^2}{R^2}\right)(b^2 + a^2 - c^2)$$

$$\Leftrightarrow (b^2 - c^2)\left(1 + \frac{a^2}{R^2}\right) = \frac{(b^4 - c^4)}{R^2}$$

$\Leftrightarrow R^2 + a^2 = b^2 + c^2$ (vì $b \neq c$)

$\Leftrightarrow R^2 = 2bc.\cos A$

$\Leftrightarrow R^2 = 8R^2\sin B.\sin C.\cos A$

$\Leftrightarrow \sin B.\sin C.\cos A = \frac{1}{8}$ (đđpcm).

Qua các định lí và các ví dụ trên đây, chúng ta thấy hai định lí hàm số sin và hàm số cos có những ứng dụng rất quan trọng trong việc giải các bài toán định lượng. Để hiểu sâu thêm về điều này, chúng ta hãy làm các bài tập sau:

1. (Định lí hàm số cos mở rộng). Trong tam giác ABC ta có:

$$\cot gA = \frac{(b^2 + c^2 - a^2)}{4S}$$

2. Cho tam giác đều ABC. M là một điểm bất kì trong mặt phẳng tam giác. Gọi P, Q, R lần lượt là hình chiếu của M lên các cạnh BC, CA, AB. Chứng minh rằng đại lượng $MA^2 + MB^2 + MC^2 - 2(MP^2 + MQ^2 + MR^2)$ không phụ thuộc vào vị trí của M.

3. Cho ba đường tròn (O_1, r_1), (O_2, r_2), (O_3, r_3) đôi một tiếp xúc ngoài với nhau. Chứng minh rằng tồn tại đúng hai đường tròn bán kính r và R ($r < R$) tiếp xúc với cả ba đường tròn. (Ta coi rằng đường thẳng là đường tròn bán kính ∞) và ta có hệ thức:

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{R} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}$$

4. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a. Lấy M, N, P, Q lần lượt trên AB, BC, CA, AD tương ứng. Chứng minh rằng chu vi tứ giác ghềnh $MNPQ$ không nhỏ hơn $2a$. Dấu bằng xảy ra khi nào?

KẾT QUẢ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN QUỐC GIA LỚP 9 NĂM HỌC 1997 - 1998

Kì thi chọn học sinh giỏi toán lớp 9 Quốc gia năm học 1997-1998 được tiến hành vào 14 tháng 3 năm 1998.

Thời gian làm bài trong năm học này được rút xuống chỉ còn 150 phút (các năm học trước, thời gian làm bài thi là 180 phút).

Nội dung đề thi, theo yêu cầu của Bộ Giáo dục và Đào tạo, được soạn thảo theo nội dung chương trình môn toán của cấp trung học cơ sở đang hiện hành và học đến đâu thi đến đó, tức là không vượt quá chương trình mà học sinh lớp 9 đang học.

Cả nước có 570 em học sinh lớp 9 của các tỉnh, thành phố tham dự và được chia thành hai bảng A, B theo quy định của Bộ Giáo dục và Đào tạo (Trong năm học này, có một số tỉnh ở đồng bằng sông Cửu Long, trước đây thi ở bảng A, chuyển sang thi ở bảng B).

Ở bảng A có 284 học sinh lớp 9 của 29 đơn vị (các tỉnh đồng bằng Bắc Bộ, Trung bộ và các thành phố) tham dự.

Ở bảng B có 286 học sinh lớp 9 của các đơn còn lại (các tỉnh miền núi và đồng bằng sông Cửu Long) tham dự.

Dưới đây là danh sách các em đạt giải ở trong từng đơn vị dự thi

BẢNG A

GIẢI NHẤT (12 giải)

Nguyễn Đình Lợi, Nguyễn Đắc Trung (**Bắc Ninh**); Lê Sỹ Quốc (**Hà Nội**); Lưu Tiến Đức (**Hà Tây**); Nguyễn Ngọc Tuấn, Nguyễn Thị Tươi (**Hưng Yên**); Nguyễn Xuân Bình, Lê Thị Khánh Hiền (**Khánh Hòa**) ;Thái Quang Hưng (**Nghệ An**); Lê Thị Minh Hạnh (**Ninh Bình**); Nguyễn Xuân Lâm (**Phú Thọ**); Hà Minh Thế (**Vĩnh Phúc**).

GIẢI NHÌ (29 giải)

Chu Mạnh Dũng, Dương Mạnh Hồng (**Bắc Giang**); Nguyễn Như Thắng (**Bắc Ninh**); Nguyễn Hữu Hạnh, Nguyễn Đức Hiệp (**Hà Nam**); Nguyễn Hồng Anh, Nguyễn Tiến Anh, Đinh Trọng Quang, Phan Thị Hồng Thu, Đỗ Mai Vân, Lê Anh Vinh (**Hà Nội**); Nguyễn Tiến Đạt (**Hà Tây**); Phạm Minh Đức (**Hải Phòng**); Trịnh Văn Trọng (**Hưng Yên**); Nguyễn Khánh An, Trần Viết Cường (**Nam Định**); Nguyễn Thái Hà, (**Nghệ An**); Nguyễn Mai Linh (**Ninh Bình**); Lê Mạnh Cường (**Phú Thọ**); Trần Khải Hoàng (**Quảng Ngãi**); Bế Văn Dương (**Quảng Ninh**); Lê Thành Công, Phạm Thị Thu Hòa, Nguyễn Thị Thúy Liễu, Lưu Thị Linh Nhâm (**Thái Bình**); Nguyễn Đức Hạnh (**Thái Nguyên**); Đỗ Văn Huyền (**Thanh Hóa**); Trần Đình Khiêm (**Thừa Thiên - Huế**); Phạm Hồng Sơn (**Vĩnh Phúc**);

GIẢI BA (44 giải)

Lương Mỹ Hạnh, Trần Đình Hảo, Phan Vân Hằng (**Bắc Giang**); Phùng Văn Thủy (**Bắc Ninh**); Lại Đức Phượng (**Hà Nam**), Lê Việt Cường (**Hà Nội**); Lê Thị Hòa (**Hà Tây**); Trần Huy Đức, Phan Đăng Khoa, Thiều Đình Phong, Nguyễn Nhật Tân (**Hà Tĩnh**); Nguyễn Quỳnh Hoa, Nguyễn Phương Thảo (**Hải Dương**); Đinh Thành Đồng, Nguyễn Minh Hiếu, Nguyễn Anh Quân (**Hải Phòng**); Đỗ Xuân Hà, Đỗ Thị Hường, Vũ Quang Long, Nguyễn Thu Thủy (**Hưng Yên**); Đặng Anh Vũ (**Khánh Hòa**); Trần Trung Hiếu, Nguyễn Khang Ninh, Trần Đức Thịnh (**Nam Định**); Tăng Anh Quý (**Nghệ An**); Lê Thị Giang, Phạm Đình Hoàng, Đặng Quang Tuấn, Lã Thị Hải Yến (**Ninh Bình**); Nguyễn Thị Quỳnh Lý, Lê Thị Tuyết Nhung, Nguyễn Hà Phương, Hoàng Quốc Việt (**Phú Thọ**); Phạm Thái Bình (**Phú Yên**); Phùng Thanh Hòa (**TP Hồ Chí Minh**); Nguyễn Thanh Bình, Vũ Thị Đức Hạnh (**Thái Bình**); Đỗ Thị Hoa, Mai Đức Phương (**Thanh Hóa**); Hà Thúc Việt (**Thừa Thiên - Huế**); Trương Thị Hải Duyên, Lê Mạnh Hùng, Lê Thành Công, Nguyễn Tiến Thịnh (**Vĩnh Phúc**);

GIẢI KHUYẾN KHÍCH (59 giải)

Ngô Hòa Lan Phương (**Bắc Giang**); Lê Minh Đức, Lê Quang Vinh (**Bắc Ninh**); Nguyễn Lương Hoàng, Lương Đăng Kỳ (**Bình Định**); Trần Quang Ngọc, Nguyễn Bảo Nguyên, Ngô Sĩ Việt Phú, Nguyễn Thanh Trà, Đặng Thùy Trâm (**Đà Nẵng**); Phan Thị Mai Hòa (**Đồng Nai**); Trần Việt Anh (**Hà Nam**); Vũ Nhật Linh, Đặng Ngọc Minh (**Hà Nội**); Đặng Thị Thanh, Nguyễn Đức Thành (**Hà Tây**); Nguyễn Đình Dũng, Hoàng Lê Lợi (**Hà Tĩnh**); Hoàng Thị Ánh Nguyệt, Nguyễn Phi Hùng, Đào Văn Huy, Phạm Quang Tuân, Hàn Ngọc Tuấn, Lê Thị La (**Hải Dương**); Phạm Việt Anh, Nguyễn Thị Hoài Anh, Nguyễn Tưởng Lâm (**Hải Phòng**); Thái Yên Khánh (**Khánh Hòa**); Doãn Quý Hiếu, Phạm Đình Quốc Hưng, Trần Lâm, Nguyễn Mạnh Quý, Vũ Thanh Tùng (**Nam Định**); Ngụy Lê Giang, Thái Thị Thanh Hoa, Nguyễn Công Thành (**Nghệ An**); Lưu Tuấn Linh (**Ninh Bình**); Vũ Quốc Huy (**Phú Thọ**); Nguyễn Hữu Tuất (**Quảng Bình**); Hoàng Minh Việt (**Quảng Nam**); Phạm Tuấn Anh, Tiêu Minh Dũng, Đặng Thị Thu Hiền, Trần Phú Khánh, Trần Lê Quốc Sơn, Nguyễn Huy Tuấn (**Quảng Ngãi**); Trịnh Quang Hòa, Lê Minh Tuấn (**Quảng Ninh**); Trần Việt Anh (**Quảng Trị**); Ngô Trung Hiếu, Nguyễn Minh Tuấn (**TP Hồ Chí Minh**); Bùi Việt Hà, Trần Thế Hùng (**Thái Bình**); La Quang Hổ (**Thanh Hóa**); Hoàng Đình Trí Huân (**Thừa Thiên - Huế**); Nguyễn Hoài Vũ, Phan Thị Lê Tuyến, Tạ Việt Tôn, Nguyễn Quang Minh (**Vĩnh Phúc**).

* * *

BẢNG B

GIẢI NHẤT (10 giải)

Trần Ái Nhi (**Bạc Liêu**); Võ Quốc Việt (**Bến Tre**); Tạ Quốc Hưng, Hoàng Hải Thủy (**Đắc Lắc**); Lê Thị Ngọc Hưng, Nguyễn Anh Phương (**Gia Lai**); Kim Ngọc Hùng (**Hòa Bình**); Nguyễn Đức Cường, Nguyễn Tiến Quang (**Lào Cai**); Nguyễn Trí Trung Kiên (**Vĩnh Long**).

GIẢI NHÌ (33 giải)

Nguyễn Bình Tây, Võ Thị Mai Thanh, Phan Thị Anh Thư (**An Giang**); Trần Quang Vinh, Trần Anh Vũ, Khương Hữu Tâm (**Bà Rịa - Vũng Tàu**); Trần Quốc Tuấn, Trần Thế Minh, Lương Thế Nhân (**Bạc Liêu**); Thiều Quang Trung, Nguyễn Lê Duy (**Bình Thuận**); Lê Nam Chi, Lương Ngọc Lễ (**Bến Tre**); Trần Thái Diệu Hằng, Phạm Lan Hương (**Đắc Lắc**); Ngô Minh Trí (**Đồng Tháp**); Huỳnh Vi Quang, Nguyễn Hữu Khánh, Nguyễn Bá Tân (**Gia Lai**); Đặng Thu Hiền, Dương Thị Hương, Nguyễn Thu Phương (**Hòa Bình**); Nguyễn Thị Liên Chi, Nguyễn Trung Hiền, Nguyễn Khánh Minh, Phạm Đình Hải Sơn, Bảo-Thuận, Phan Thị Thanh Vân (**Lâm Đồng**); Đào Ngọc Mạnh, Nguyễn Thanh Tùng (**Lào Cai**); Trần Thị Vân Anh (**Lai Châu**); Bùi Việt Hải (**Sơn La**); Nguyễn Việt Hằng (**Yên Bái**)

GIẢI BA (52 giải)

Liễu Thái Chương, Giang Quốc Minh, Huỳnh Chí Phương Quyên, Trịnh Thanh Tâm, Hoàng Tùng (**An Giang**); Phạm Thanh Tú, Phạm Hữu Đạt (**Bà Rịa - Vũng Tàu**); Dương Thị Hải Điệp, Trần Văn Thành (**Bạc Liêu**); Lê Khánh Hưng, Phạm Thị Ngọc Anh, Nguyễn Anh Tuấn (**Bình Dương**); Phạm Lê Phương Duy, Trần Hiếu Nam, Nguyễn Hồng Hiếu, Bạch Thị Xuân Mai (**Bình Thuận**); Phan Anh Thái, Bùi Tiến Đạt (**Cần Thơ**); Ngô Quốc Anh, Tăng Thị Hà Yên (**Đắc Lắc**); Đàm Quang Phục, Nguyễn Võ Vĩnh Phúc, Phạm Lý Minh Thư (**Đồng Tháp**); Trần Khoa Nguyên (**Gia Lai**); Phạm Thanh Hảo (**Hòa Bình**); Nguyễn Việt Dũng, Đỗ Lư Công Minh, Lưu Thị Thanh Hà (**Kiên Giang**); Vũ Thị Thanh (**Công Tum**); Hoàng Hải Huy (**Lâm Đồng**); Trần Thị Yến, Ngô Anh Hùng (**Lào Cai**); Trần Thị Bảo Châu, Hồng Phương Trúc (**Long An**); Nguyễn Ngọc Nam, Lâm Hoàng Nguyên, Nguyễn Duy Quốc, Phạm Văn Tiên (**Ninh Thuận**); Lục Bích Phượng, Hoàng Ngọc Minh (**Sơn La**); Nguyễn Hoài Bảo Anh, Trần Nhật Tuấn (**Tây Ninh**); Đinh Nguyễn Anh Trung (**Tiền Giang**); Nguyễn Thị Mỹ Hạnh (**Trà Vinh**); Lê Thị Ngọc Anh, Nguyễn Trọng Chiến, Võ Thị Lê Vân (**Tuyên Quang**); Nguyễn Thị Ngọc Lan, Nguyễn Xuân Trường, Bùi Hải Phúc Nguyên, Võ Thuấn Phong (**Vĩnh Long**); Nguyễn Thành Nam (**Yên Bái**);

GIẢI KHUYẾN KHÍCH (45 giải)

Nguyễn Thiện Lan Anh (**An Giang**); Nguyễn Văn Thành, Trần Hoàng Lộc, Nguyễn Đình Nghĩa (**Bà Rịa - Vũng Tàu**); Huỳnh Thanh Vạn, Nguyễn Minh Trí, Trần Thị Thu Hằng (**Bạc Liêu**); Nguyễn Ngọc Ái Vân (**Bến Tre**); Trần Hữu Quốc Thư, Nguyễn Lan Phương (**Cà Mau**); Nguyễn Cao Hồng Ngọc (**Cần Thơ**); Hồ Thị Thúy Linh (**Gia Lai**);; Nguyễn Kim Cương, Hoàng Đức Nguyên (**Hà Giang**); Mai Khắc Hùng, Nguyễn Trung Kiên, Lê Trung Thành (**Hòa Bình**); Lâm Vĩnh Tuyên (**Kiên Giang**); Lê Nguyễn Bá Duy, Nguyễn Hữu Trung (**Kon Tum**); Trần Phương Duy, Trần Anh Tuấn (**Lâm Đồng**); Nguyễn Việt Hà (**Lào Cai**); Nguyễn Mạnh Linh, Mông Thanh Thủy (**Lạng Sơn**);; Phạm Kỳ Hưng (**Lai Châu**); Lê Xuân Khánh (**Ninh Thuận**); Nguyễn Việt Bình (**Sơn La**); Bùi Huy Hoàng (**Sóc Trăng**); Hồ Thiên Chương, Hà Đại Định, Võ Lâm Phi Yến (**Tây Ninh**); Nguyễn Minh Phương, Phạm Trường Huy (**Tiền Giang**); Lê Thành Dương, Trần Thị Minh Hà, Hầu Minh Hải, Nguyễn Trung Kiên, Nguyễn Thùy Linh, Hoàng Thị Lan Phương, Nguyễn Văn Quảng (**Tuyên Quang**); Võ Huy Minh (**Vĩnh Long**); Phạm Thị Thùy Linh, Lương Thị Thạch Loan, Lục Chí Tuyên (**Yên Bái**).

ĐỀ THI

BẢNG A

Bài I. Tính giá trị của biểu thức

$$A = 3x^3 + 8x^2 + 2)^{1998},$$

với $x = \dfrac{\sqrt[3]{17\sqrt{5} - 38}}{\sqrt{5} + \sqrt{14 - 6\sqrt{5}}}\ (\sqrt{5} + 2)$

Bài II. Cho hàm số

$$y = mx^2 + m+3)x + 1 - 6m \qquad (1)$$

Chứng minh rằng, trên mặt phẳng tọa độ xOy, đồ thị của hàm số (1) đã cho luôn luôn đi qua hai điểm cố định với mọi giá trị của m.

Bài III. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{1}{1998+1} + \frac{1}{1998+2} + \frac{1}{1998+3} + \dots +$$

$$\dots + \frac{1}{3.1998} + \frac{1}{3.1998+1} > 1$$

Bài IV. Gọi x_1 và x_2 là hai nghiệm của phương trình bậc hai

$$x^2 + (m^2+5)x - 1 = 0, \text{ với } m \in \mathbb{Z}.$$

a) Tính tổng $x_1^6 + x_2^6$ theo m.

b) Tìm các giá trị của m để sao cho $x_1^6 + x_2^6$ chia hết cho 3.

Bài V. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a và điểm N trên cạnh AB. Cho biết tia CN cắt tia DA tại E, taia Cx vuông góc với tia CE cắt tia AB tại F. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng EF.

1. Chứng minh rằng:

a) $\widehat{ACE} = \widehat{BCM}$ và $\Delta EAC \sim \Delta MBC$;

b) Khi điểm N chạy trên cạnh AB nhưng không trùng với A, B thì trung điểm M của đoạn thẳng EF luôn luôn chạy trên một đường thẳng cố định.

2. Xác định vị trí của điểm N trên cạnh AB sao cho tứ giác $ACEF$ có diện tích gấp 3 lần diện tích hình vuông $ABCD$.

BẢNG B

Bài I. Rút gọn biểu thức

$$A = \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \dots +$$

$$\dots + \frac{1}{\sqrt{1997}+\sqrt{1998}}$$

Bài II. Giải phương trình

$$x^4 - 8x\sqrt{2} + 12 = 0.$$

Bài III. Chứng minh bất đẳng thức sau luôn luôn đúng với mọi giá trị nguyên dương của n:

$$\left(1 + \frac{1997}{1998}\right)^n + \left(1 - \frac{1997}{1998}\right)^n \le 2^n$$

Bài IV. Xem bài IV bảng A.

Bài V. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a và điểm N trên cạnh AB. Cho biết tia CN cắt tia DA tại E, tia Cx vuông góc với tia CE cắt tia AB tại F. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng EF.

1. Chứng minh rằng:

a) $CE = CF$

b), c) xem 1a), 1b), bài V, bảng A.

2. a) Đặt $BN = x$, tính diện tích tứ giác $ACFE$ theo a và x.

b) Xem câu 2, bài V, bảng A.

NGUYỄN HỮU THẢO

ĐÍNH CHÍNH

■ Mục "Trả lời bạn đọc" số 250 xin đọc lại là:"Khi định nghĩa $a^0 = 1$ thì phải có giả thiết $a \neq 0$ và khi nói đến $0^\alpha = 0$ thì phải có giả thiết $\alpha > 0$."

■ Bài "Một số định lí của hình học phẳng" trang 14, số 249 bị thiếu kết luận của định lí Stiva, toàn bộ nội dung định lí là : "Nếu D là một điểm tùy ý nằm trên cạnh BC của ΔABC thì

$AD^2.BC = AB^2.CD + AC^2.BD - BC.BD.CD$".

Xin lỗi bạn đọc và tác giả.

ĐẾN VỚI BẠN ĐỌC

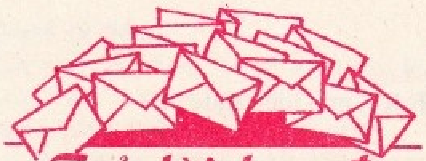
Nằm trong kế hoạch đến với mọi vùng đất để lắng nghe ý kiến bạn đọc, sáng 31.3.1998 chúng tôi đến tỉnh Vĩnh Phúc. Sở Giáo dục và Đào tạo Vĩnh Phúc nằm trên vị trí rất đẹp ngay bên Đầm Vạc, chỉ có lối vào còn hơi quanh co. Thầy Lê Tốn, phó Giám đốc Sở cùng đại diện Công ty sách và thiết bị, đại diện các trường Trần Phú, trường Chuyên, và trưởng phòng phổ thông của Sở tiếp chúng tôi trên tầng 2 gió lộng. Mỗi tháng hiện nay Vĩnh Phúc có khoảng 350 tờ **Toán học và Tuổi trẻ.** Riêng trường Chuyên mới thành lập của tỉnh có gần 90 tờ trong đó 80 là của các em học sinh đặt mua. Mỗi lần các em được nêu tên trên báo đều được nhà trường khen và thưởng. Thầy Khương trưởng phòng đề nghị ngoài việc có nhiều bài viết của các thầy giáo thì tạp chí (TC) cần có thêm nhiều hơn bài của các chuyên gia giỏi. Thầy Tuệ trường Trần Phú cho rằng TC nên quan tâm hơn đến mảng ôn thi cuối cấp và thi vào đại học cũng những thông tin về thi cử. Sở Giáo dục Vĩnh Phúc hẹn sẽ đặt thêm 200 cuốn mỗi tháng để mở rộng phong trào giải toán và đọc báo THTT ở địa phương mình.

15 giờ 30 cùng ngày chúng tôi đã tới Yên Bái. Yên Bái là một tỉnh giàu trong số các tỉnh miền núi Bắc Bộ. Sở Giáo dục và Đào tạo có một cơ ngơi khang trang, bề thế. Nhiều học sinh Yên Bái đã đỗ đại học trong những năm gần đây và hiện có 17 em đang học ở nước ngoài. Đến trường PTTH chuyên Yên Bái chúng tôi đã được đọc báo Bảng. Thầy Thái, thầy Sang và các thầy cô giáo khác phụ trách phần Toán trên "tờ" báo này. Số báo chúng tôi xem là số 13. Đã có 39 lượt học sinh của trường có tên ở mục Giải bài kì trước ở *Toán học và Tuổi trẻ*. Trường đề nghị TC nên có mục cho học sinh các tỉnh miền núi tham gia rộng rãi.

Trường THCS Lê Hồng Phong là một trường lớn của Yên Bái với hơn 1500 học sinh. Trường còn gặp nhiều khó khăn về cơ sở vật chất. Từ năm học 1994-1995 lại đây trường liên tục có học sinh giỏi tham gia đội tuyển thi toàn quốc. Năm học 1997-1998 có 2 học sinh được vào đội tuyển toàn quốc. TC THTT đến với trường còn ít, lác đác mỗi lớp 3,4 tờ. Riêng lớp cô Oanh năm trước 20 em thường xuyên có báo, trong đó Nguyễn Thị Ngọc Anh đã được giải ba về giải báo THTT. Thầy Trung cho chúng tôi biết THTT còn khó với thầy trò ở đây. Chiều hôm đó trong buổi làm việc với Sở chúng tôi cũng được nghe lại ý kiến này. Chúng tôi vẫn hy vọng có một ngày THTT đến được với Trạm Tấu, Mù Cang Chải là những địa bàn khó khăn nhất của Yên Bái.

Rời Yên Bái chúng tôi tới Lào Cai trưa 2.4.1998 sau 180 km đường đèo dốc và quanh co liên tục. Lào Cai là ngã tư giao lưu giữa vùng Đông Bắc và Tây Bắc Bắc Bộ, giữa Việt Nam và nước bạn. Đây cũng là nơi nhà văn Nguyễn Công Hoan từng dạy học. Thầy Cao Văn Tư trong buổi họp chiều hôm đó đã phác họa gọn và rõ những mảng sáng, tối về bức tranh toàn cảnh giáo dục Lào Cai nơi thầy làm giám đốc. Từ năm 1992 lại đây Lào Cai đã khá hơn về mọi mặt. Năm học 1995-1996 Lào Cai đã có 20 giải học sinh giỏi toàn quốc trong bảng thi các đội miền núi và vùng sâu, vùng xa. Đó thực sự là bước tiến lớn nếu nhìn lại năm 1991-1992 tỉnh không lập nổi đội tuyển lớp 5 đi thi toàn quốc. Số học sinh dân tộc của tỉnh đã lên tới 600 em tức gấp hơn 10 lần năm 1991. Chúng tôi đã có các cuộc nói chuyện với hơn 600 thầy trò trường Trung học sư phạm 10+2, với hơn 800 thầy trò trường PTTH chuyên ban, với thầy trò trường THCS Lê Quý Đôn, THCS Cốc Lếu. Đáng nhớ hơn cả là chuyến đi thăm trường PTCS Sa Pa nằm trên độ cao 1600m. Những nắng gắt, gió xoáay chúng tôi không bị gặp nhưng khó khăn ở ngôi trường thuận lợi nhất Sa Pa này chúng tôi vẫn thấy ở mọi chỗ ở gương mặt mỗi người thầy khi kể chuyện cho chúng tôi nghe. Mới chỉ có gần 100 tờ THTT đến với Lào Cai. Nhưng nhất định Giáo dục Lào Cai sẽ sớm bứt lên. Chúng tôi tin như vậy khi tiếp xúc với thầy, trò tỉnh biên giới xa xôi này./.

VŨ KIM THỦY



Trả lời bạn đọc

Hỏi: Chả lẽ nào, Tòa soạn cho bọn em ngóng chờ cả tháng trời mà chỉ được một cuốn báo quá mỏng? Phần THCS lại quá ít ! Tòa soạn hãy ra thêm một số loại báo về Ngoại ngữ và Tuổi trẻ, Lịch sử và Tuổi trẻ, ... Nhiều khi bọn em quên mua là báo hết sạch! Làm thế nào giúp bạn em với !

NGUYỄN ĐỨC THU DUNG
(137, QLI, Thị xã T.A, Long An)

Đáp: Rất cảm động với đòi hỏi "cháy bỏng" của "bọn em". Năm ngoái, báo chỉ có 16 trang, nay đã lên 24 trang và nếu có điều kiện sẽ còn lên ... chút nữa. Đọc báo này phải đọc từ từ và có khi vài năm nữa mới đọc hết. Nhớ "để dành", "bọn em" nhé ! Tuy ít trang nhưng "nặng" chất lắm đó! Tòa soạn cũng mơ có thêm vài... Tòa soạn nữa mới ra được nhiều loại báo mà "bọn em" gợi ý. Để khỏi quên mua thì "bọn em" nên nhớ đặt cả năm ở Bưu điện cho "chắc ăn". Vừa qua, một số em đặt quý I, nhưng lại quên... không nhớ tháng 4 là quý khác nên khá vất vả tìm mua báo đấy ! Chào nhé ! Cám ơn.

(Xem tiếp trang 17)

HOÀN CHỈNH "BÀI THƠ LƯU BÚT"

Càng ngày càng chứng tỏ bạn đọc của THTT "mê" Thơ và "máu" làm thơ. Thú vui nho nhỏ sau những giờ làm toán đã được đông đảo các thầy giáo, cô giáo và các bạn học sinh hưởng ứng sôi nổi. Thậm chí cả "dân"chuyên Pháp cũng "nhào dô" với "dân" Toán. Yêu cầu của "đề ra" là theo "cảm" của con nhà toán nên ở đây cũng tổng kết theo "cảm"... ấy. Để tất cả các bạn thấy được "hương sắc muôn nơi" và tự mình "chơi" một lần nữa, chúng tôi đã tổng kết tất cả mọi "ý tưởng" bởi bảng sau đây:

Câu	Từ điền
1	Cộng, nhân, bình phương, chọn, tìm, thêm, lũy thừa, tăng, lấy, nhận
2	Trừ, giảm, bớt, quên, loại, bỏ, căn
3	Chia
4	Nhân, cộng, tăng, vun
5	Đường thẳng, vô hạn, vô tận, vô cùng, dài hạn, phép cộng, đồng biến, đẳng thức, phép toán
6	Giới hạn, một phương, tập hợp, hội tụ, hướng chảy, giao hoán, xác định, luôn hướng, không ngừng, tịnh tiến, di động, vòng vèo, đồng quy, căn số, ấp ủ, đảo ngược, hướng thẳng, được nối, có hướng, tiến thẳng, định lí, tìm ẩn, tiệm cận, quy nạp, tuần hoàn, chuyển động, quay tròn, chảy mãi, đồng biến, ánh xạ, nội tiếp, nhẩm tính, quy chiếu, có nghiệm, liên tục.
7	Liên tục, song song, tự nhiên, đồng biến, tồn tại, bình phương, thời gian, lõm lồi, tuần hoàn, toán học, cùng chiều, chảy ngoài, chứng minh, tương đương, dấu uốn, đi qua, quy nạp, cứ dài, biến thiên, chảy dài, quay tròn, thẳng đều, tịnh tiến, đi dọc, lũy thừa, đạo hàm, tăng dần, tiệm cận, giới hạn, không căn, độ dài, biến đổi, nhân lên, bắc cầu, phân kì, phân li, tiến dần, cộng trừ, đồ thị, kéo dài.
8	Mọi, tròn, nguyên, đạo, chữ, phép, những, toàn, trọn, tập, mãi, một, cả, hợp, nghiệm, khoảng, đầy, cốt (cos), chung, vuông, thỏa

Từ đó các bạn sẽ có được bao nhiêu bài thơ lưu bút? Bài thơ nào mà bạn thích nhất? Hãy gửi ý kiến của các bạn về gấp (trước 15.06.1998)! Chúng tôi sẽ thông báo kết quả cuối cùng của cuộc thi vui ở số tạp chí số 253 (7.1998).

L.T.N

BÀN TRÒN ĐỌC THƠ

Từ khi mở "Bàn tròn đọc thơ". Câu lạc bộ nhận được nhiều bài thơ của bạn đọc gửi về. Có bạn đọc còn hỏi một cách như thách thức :"Các vị" ở Tòa soạn có biết làm thơ không?". Anh em Tòa soạn đành trả lời... bằng một bài thơ :

THƠ VỚI NGƯỜI LÀM TOÁN

BÀI MỘT

Là *hữu hạn* nói những cái *vô cùng*
Thơ là *đường thẳng*
Nối quá khứ với tương lai
Hôm nay chỉ là *một điểm*

Thơ là *hợp* của mọi ước mơ
Ngàn, triệu bài thơ
Câu *ngắn*, câu *dài*
Viết bằng ngọn lửa cuộc đời
Nên *ngàn* năm còn *tồn tại*
Đời càng *thêm* thi hứng
Thơ là *hợp* buồn vui

Thơ lại là *giao* của những tâm hồn
Dù tiếng nói khác nhau, màu da đen trắng
Nhưng hồn thơ làm *đường* liên hệ dài lâu

Thơ là *tập hợp những vòng tròn*
Nhiều *vô tận*, nhưng *đồng tâm*
Tâm là cái Thiện, Cái Chân, cái Đẹp
Home, Đantê, Coocnây, Raxin đã viết
Tình yêu, chiến tranh, khát vọng hòa bình
Gớt, Haino, Petôphi, Tagor, đã viết
Ái tình, máu lửa, cánh trắng bồ câu.
Có người dùng cả cuộc đời
Cho thơ được sống ngày một *lớn hơn*

Thơ là *hàm* cuộc sống theo thời gian
Mỗi *cực đại* một thi hào đánh dấu
Trang thơ là *đồ thị* đất trời.
Ta đọc nắng hạn
bão dông
Đọc *ngàn* mùa xuân
Từng qua trên trái đất *hình cầu*.
Tất cả nếu là thơ chân chính
Đều là *véc tơ cộng tuyến*
Cùng hướng tới tương lai

Thơ là tập *bài giải* của cuộc đời
Vốn từng nhiều *nghịch lí*.
Những *lời giải* hay và ngắn gọn.
Ít từ nhưng rất khôn ngoan
Là con đường giản đơn
Đi tìm hạnh phúc

VŨ KIM THỦY

(Đã đăng *Khoa học và Đời sống* số Tết Nhâm Tý ra ngày 1.2.1996)

KHÉO TAY NÀO

Bạn hãy vẽ 3 con cá bằng các cung tròn và các dấu chấm ! (Nhớ là phải "tiết kiệm" đấy nhé!).

NGỌC MAI

Giải trí TOÁN HỌC

Giải đáp bài
GẮN DẤU VÀO CÁC SỐ

Nhận xét thấy tổng hai số hai đầu của mỗi hàng ngang hay của mỗi cột dọc đều bằng tổng của hai số ở giữa của mỗi hàng hay mỗi cột. Từ đó ta đưa ra các cách gắn dấu vào các số như sau:

+1	-2	-3	+4
-5	+6	+7	-8
-9	+10	+11	-12
+13	-14	-15	+16

Cách 1.

-1	+2	+3	-4
+5	-6	-7	+8
+9	-10	-11	+12
-13	+14	+15	-16

Cách 2.

1. Theo cách 1 ta thấy tổng các số của mỗi hàng ngang và của mỗi cột dọc đều bằng không và tổng các số của hai đường chéo đều bằng 34.

2. Theo cách 2 ta thấy tổng các số của mỗi hàng ngang và của mỗi cột dọc đều bằng không và tổng các số của hai đường chéo đều bằng -34.

(Dựa theo giải đáp của bạn *Phí Anh Dũng*, 8A, PTCS Thạch Thất, **Hà Tây**).

Nhận xét. Có rất nhiều giải đáp tốt gửi đến tòa soạn. Xin hoan nghênh và cảm ơn.

BÌNH PHƯƠNG

ĐOÁN BÀI

Hòa rủ Bình chơi đoán bài như sau:

Hòa lấy 25 quân bài Tú-lơ-khơ lần lượt bày ngửa, ở trên bàn theo tứ tự 1, 2, 3, ..., 25 xếp đúng vị trí của các số được ghi ở hình 1.

1	3	6	10	15
2	5	9	14	19
4	8	13	18	22
7	12	17	21	24
11	16	20	23	25

Hình 1

Hòa bảo Bình hãy chọn bằng mắt một quân bài nào đó, không được cầm lên tay và không cho Hòa biết là quân gì mà chỉ nói quân đó nằm ở hàng thứ mấy của hình 1.

Sau đó Hòa thu các quân bài lại theo đúng thứ tự các quân bài đã bày ra trước đây và bày ngửa trên bàn vẫn theo thứ tự ấy nhưng được đặt ở vị trí của các số được cho ở hình 2.

11	7	4	2	1
16	12	8	5	3
20	17	13	9	6
23	21	18	14	10
25	24	22	19	15

Hình 2

Bây giờ, Bình chỉ cần nói cho Hòa biết quân bài Bình đã chọn trước đây hiện đang nằm ở hàng thứ mấy của hình 2. Khi đó Hòa sẽ đoán được quân bài mà Bình đã chọn.

Các bạn hãy tìm xem làm thế nào mà Hòa đã đoán đúng như vậy.

NGÔ HÂN

ISSN : 0866-0853
Chỉ số : 12884
Mã số : 8BT53M8

Chế bản tại Tòa soạn.
In tại Nhà máy in Diên Hồng, 57 Giảng Võ
In xong và nộp lưu chiểu tháng 5 năm 1998

Giá : 3.000đ
Ba nghìn đồng