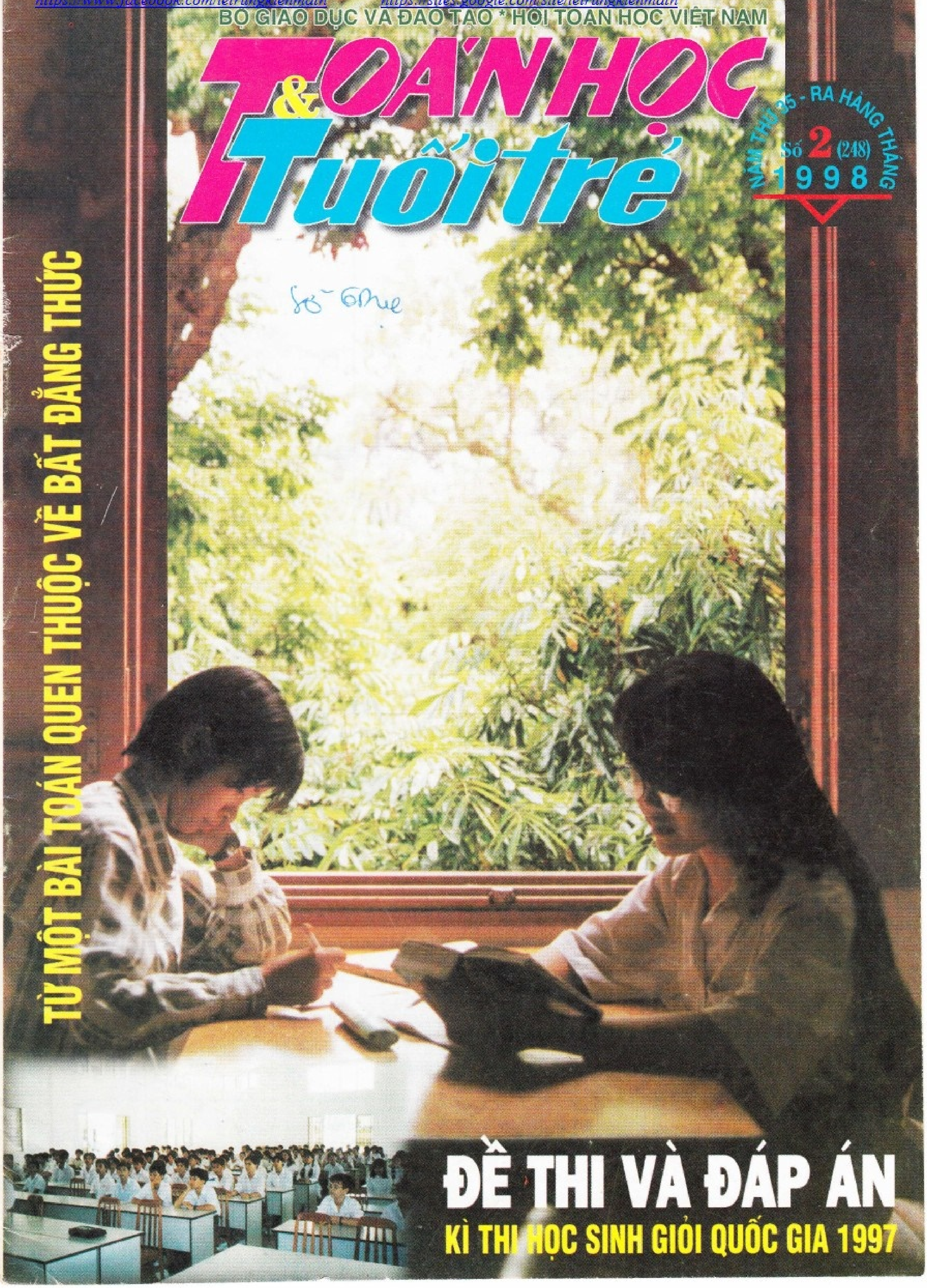
BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO * HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

TOÁN HỌC & TUỔI TRẺ

NĂM THỨ 35 - RA HÀNG THÁNG
Số 2 (248)
1998



TỪ MỘT BÀI TOÁN QUEN THUỘC VỀ BẤT ĐẲNG THỨC

ĐỀ THI VÀ ĐÁP ÁN

KÌ THI HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA 1997

TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ
MATHEMATICS AND YOUTH

MỤC LỤC

Bìa 1 : *Học thi* - Huy chương bạc Liên hoan báo chí ASEAN-1997(Ảnh : Trần Lựu Quang)
Học sinh chuyên Toán - Lý trường chuyên Lương Thế Vinh - Đồng Nai (Ảnh : LTN)

Trụ sở tòa soạn :
81 Trần Hưng Đạo, Hà Nội ĐT : 8.220073
231 Nguyễn Văn Cừ, TP Hồ Chí Minh ĐT: 8.356111

Biên tập và trị sự : VŨ KIM THỦY
LÊ THỐNG NHẤT
Trình bày : NGUYỄN THỊ OANH

Từ một bài toán quen thuộc VỀ BẤT ĐẲNG THỨC

Dành cho các bạn TRUNG HỌC CƠ SỞ

NGUYỄN ĐỄ
(Sở Giáo dục và đào tạo Hải Phòng)

Bài viết này chúng tôi muốn đề cập đến một bất đẳng thức quen thuộc làm cầu nối cho việc chứng minh các bất đẳng thức khác phức tạp hơn. Đó chính là Bất đẳng thức Na-sơ-bít :

Với a, b, c là các số dương thì :

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2} \qquad (*)$$

(xem thêm Tạp chí TH & TT số 66 và số 106).

Giải Ta kí hiệu vế trái của (*) là A và biến đổi như sau :

$$A+3=(a+b+c)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}\right)$$

Đặt $u=a+b$, $v=a+c$, $t=b+c$, ta có :

$$A+3=\frac{1}{2}(u+v+t)\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{v}+\frac{1}{t}\right)$$

Ta có :

$$B=(u+v+t)\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{v}+\frac{1}{t}\right)$$

$$=3+\left(\frac{v}{u}+\frac{u}{v}\right)+\left(\frac{t}{u}+\frac{u}{t}\right)+\left(\frac{t}{v}+\frac{v}{t}\right)$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta được $B\geq 9$. Từ đó suy ra $A\geq\frac{3}{2}$.

Dễ thấy đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$

Ta hãy tìm cách khai thác bài toán trên.

Để ý thấy rằng nếu ta nhân cả hai vế của (*) với $a+b+c$ ta có bất đẳng thức

$$(a+b+c)\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\right)\geq$$

$$\geq\frac{3}{2}(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{a+c}+\frac{c^2}{a+b}\geq\frac{a+b+c}{2}$$

Kết quả trên dẫn đến các phép biến bài toán sau :

Bài toán 1. Giả sử a, b, c là các số dương. Chứng minh rằng :

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{a+c}+\frac{c^2}{a+b}\geq\frac{a+b+c}{2} \quad (1)$$

Ta thấy rằng từ vế phải của (1) nếu thêm điều kiện $abc=1$ thì theo bất đẳng thức côsi ta có : $a+b+c\geq 3\sqrt[3]{abc}=3$. Khi đó vế phải của (1) biến đổi và từ tính chất bắc cầu của bất đẳng thức ta có bài toán 2 :

Bài toán 2. Giả sử a, b, c là các số dương thỏa mãn điều kiện $abc=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{a+c}+\frac{c^2}{a+b}\geq\frac{3}{2} \quad (2)$$

Như vậy muốn chứng minh bất đẳng thức (2) ta phải xuất phát từ bất đẳng thức (*), sau đó thực hiện hai bước sau ta sẽ có khẳng định :

- Bước 1 : Nhân 2 vế của (*) với $a+b+c$ và biến đổi
- Bước 2 : Chứng minh bất đẳng thức $\frac{a+b+c}{2}\geq\frac{3}{2}$

Đến đây, nếu từ (2) và từ giả thiết ta biến đổi theo các bước :

- Bước 1 : Bình phương hai vế của (2)
- Bước 2 : Nhân 2 vế của bất đẳng thức thu được sau bước 1 với $\frac{1}{2}$
- Bước 3 : Thay thế các biểu thức a^2b^2, a^2c^2, b^2c^2 bằng các biểu thức tương ứng

$$\frac{1}{c^2}, \frac{1}{b^2}, \frac{1}{a^2}$$

Từ ba bước biến đổi trên dẫn đến bài toán 3 :

Bài toán 3. Giả sử a, b, c là các số dương thỏa mãn điều kiện $abc=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^4}{2(b+c)^2}+\frac{b^4}{2(a+c)^2}+\frac{c^4}{2(a+b)^2}+$$
$$+\frac{1}{c^2(a+c)(b+c)}+\frac{1}{b^2(a+b)(b+c)}=$$
$$+\frac{1}{a^2(a+c)(a+b)}\ge\frac{1}{8}$$

Bây giờ ta xét tiếp :

Bài toán 4. Giả sử a, b, c là các số dương thỏa mãn điều kiện $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{2}{a^3(b+c)}+\frac{2}{b^3(a+c)}+\frac{2}{c^3(a+b)}\ge 3 (4)$$

Dễ thấy bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với bất đẳng thức

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(a+c)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\ge\frac{3}{2}$$

Để chứng minh (4) ta đặt :

$$x=\frac{1}{a}, y=\frac{1}{b}, z=\frac{1}{c}.$$

Khi đó bất đẳng thức (4) có dạng :

$$\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{x+z}+\frac{z^2}{x+y}\ge\frac{3}{2}$$

Bất đẳng thức trên chính là bất đẳng thức (2).

*

* *

Con đường đi từ (*) đến (1), (2), (3), (4) phải chăng là con đường sáng tạo ra các bất đẳng thức mới từ một bất đẳng thức đã biết.

TIẾNG ANH QUA CÁC BÀI TOÁN VÀ LỜI GIẢI

BÀI SỐ 2

Problem. *Prove that* $11^{10} - 1$ *is divisible by 100.*

Solution. We have

$11^{10} - 1 = (11 - 1)(11^9 + 11^8 + 11^7 + 11^6 + 11^5 + 11^4 + 11^3 + 11^2 + 11 + 1)$.

The second factor on the right-hand side is the sum of 10 numbers which ends with 1. Therefore, $11^{10} - 1$ is the product of 10 with a number divisible by 10.

Từ mới :

prove : chứng minh (động từ)

prove that = chứng minh rằng (mệnh lệnh thức)

divisible by = chia hết cho

second = thứ hai

right-hand = tay phải

side = bên, phía, cạnh (hình học)

sum = tổng

number = số

end = kết thúc (động từ), chỗ kết thúc, điểm cuối (danh từ)

there fore = vì vậy, do đó

product = tích

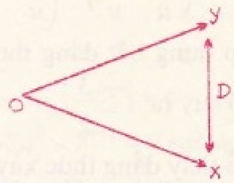
NGÔ VIỆT TRUNG

CHỨNG MINH TIÊN ĐỀ ƠCLIT...

(Tiếp theo trang 21)

qua một điểm nằm trong một góc nhọn, bao giờ cũng dựng được một đường thẳng không qua đỉnh góc mà cắt cả hai cạnh của góc.

Thời xưa mà nhận ra sự tương đương của tiên đề này với tiên đề Ơclit là rất khó. Nhưng, này nay, bất cứ ai có hiểu biết sơ đẳng về hình học Lôbasepki thì thấy ngay: quả vậy, trong một góc nhọn xOy (h.3), dù góc đó nhỏ đến đâu, thì trong mặt phẳng Lôbasepki xOy, bao giờ cũng tồn tại một đường thẳng D song song với Ox về phía này và song song với Oy về phía kia (h.3). D chia miền trong của góc $\widehat{xOy}$ ra làm hai phần; phần không chứa đỉnh góc gồm toàn những điểm mà qua đó không có đường thẳng nào (không đi qua O) mà cắt cả tia Ox và cả tia Oy. Cho nên, trong học tập, muốn hiểu thật sâu cái gì mà chỉ đi sâu vào cái đó là chưa đủ mà phải đi vào cả cái đối lập với cái đó. Chính vì vậy mà trong việc học toán nên tìm phản ví dụ cho *các khái niệm và định lí đó*.



Hình 3

Legendre không thành công trong việc chứng minh tiên đề Ơclit. Việc phát hiện ra sự "không thành công" này đáng giá nghìn vàng vì nếu không thì mọi người sẽ cho là tiên đề Ơclit đã được chứng minh và thế là hết chuyện, còn làm gì có hình học Lôbasepki, cái con chim én báo hiệu mùa xuân "toán học hiện đại" với cái cảnh trăm hoa đua nở trong những mảnh vườn đầy hoa thơm cỏ lạ.

Bài T1/244: *Xét dãy số* $x_1; x_2 = \dfrac{1+x_1}{1-x_1}; x_3 = \dfrac{1+x_2}{1-x_2}; \ldots; x_n = \dfrac{1+x_{n-1}}{1-x_{n-1}}$ *trong đó* $x_1 \neq 0$ *và* $x_1 \neq \pm 1$. *Chứng minh* $x_{1997} = x_1$

Lời giải. Ta chứng minh $x_1 = x_{4n+1}$ với mọi $n \in N^*$ bằng phương pháp quy nạp toán học.

* Với $n = 1$, ta chứng minh $x_5 = x_1$.

Thật vậy, vì $x_1 \neq 0$ và $x_1 \neq 1$ nên:

$$x_3 = \frac{1+x_2}{1-x_2} = \frac{1+\dfrac{1+x_1}{1-x_1}}{1-\dfrac{1+x_1}{1-x_1}} = \frac{-1}{x_1} \Rightarrow x_1 = \frac{-1}{x_3} (1)$$

Từ đó $x_3 \neq 0$ và $x_3 \neq \pm 1$. Suy ra

$$x_5 = \frac{1+x_4}{1-x_4} = \frac{1+\dfrac{1+x_3}{1-x_3}}{1-\dfrac{1+x_3}{1-x_3}} = \frac{-1}{x_3} (2)$$

Kết hợp (1), (2) ta có $x_5 = x_1$.

* Giả sử kết quả đúng với $n = k$, tức là $x_{4k+1} = x_1$. Vì $x_1 \neq 0; x_1 \neq \pm 1$ nên $x_{4k+1} \neq 0$; $x_{4k+1} \neq \pm 1$. Do đó:

$$x_{4k+3} = \frac{1+\dfrac{1+x_{4k+1}}{1-x_{4k+1}}}{1-\dfrac{1+x_{4k+1}}{1-x_{4k+1}}} = \frac{-1}{x_{4k+1}} \Rightarrow x_{4k+3} = \frac{-1}{x_{4k+3}}$$

và $x_{4k+3} \neq 0; x_{4k+3} \neq \pm 1$.

Lại có: $$x_{4k+5} = \frac{1+\dfrac{1+x_{4k+3}}{1-x_{4k+3}}}{1-\dfrac{x_{4k+3}}{1-x_{4k+3}}} = -\frac{1}{x_{4k+3}}$$

Suy ra $x_{4(k+1)+1} = x_{4k+5} = x_{4k+1} = x_1$

Tức là kết quả đúng với $n = k + 1$.

Tóm lại: $x_1 = x_{4n+1}$ với $\forall n \in N^*$.

Thay $n = 499$ ta có $x_1 = x_{1997}$.

Nhận xét. *Rất nhiều bạn tham gia giải bài này nhưng rất khó tìm ra được lời giải thật chặt chẽ. Chỉ có 7 bạn không nhìn ra quy luật $x_1 = x_{4n+1}$ $(n \in N^*)$. Những kiểu thiếu sót chủ yếu:

1) Sau khi chứng minh $x_5 = x_1$ và đầu ..., các bạn đã nói tương tự ta có $x_{1997} = x_{1993} = \ldots = x_1$.

2) Không sử dụng giả thiết $x_1 \neq 0$; $x_1 \neq \pm 1$. Nếu không có giả thiết này thì liệu có x_{1997} ?

* Một bạn ở chuyên Toán Nghĩa Hưng, **Nam Định** giải bằng phương pháp lượng giác, nhưng cũng chưa chặt chẽ.

* Các bạn có lời giải khá hơn là: *Nguyễn Mạnh Thắng*, 9A, chuyên Thạch Thất, *Nguyễn Đình Hưng*, 9A$_1$, chuyên Thanh Oai, **Hà Tây**; *Nguyễn Đăng Bảo*, 9A, Quốc học Quy Nhơn, **Bình Định**; *Ngô Trung Hiếu*, 9 Toán, chuyên Nguyễn Du, **Tp Hồ Chí Minh**; *Đào Duy Bình*, 7A$_1$, Dương Minh Châu, **Tây Ninh**; *Phạm Kim Anh*, 8A, Tư Nghĩa 2, **Quảng Ngãi**; *Lương Thế Nhân*, 9A, chuyên **Bạc Liêu**; *Đinh Thị Thái Mai*, 9B, Hải Đình, Đồng Hới, **Quảng Bình**; *Ngô Quốc Anh*, 9C, chuyên Nguyễn Du, **Đắc Lắc**; *Phan Vũ Toàn*, 8A, Lê Quý Đôn, *Đỗ Trường Giang*, 9A, Đông Anh, *Nguyễn Đức Nhật*, 8A$_2$, Nguyễn Trường Tộ, **Hà Nội**; *Võ Thanh Sơn*, 9$_2$, Lê Văn Thiêm, **Hà Tĩnh**; *Trần Quang Vinh*, *Hoàng Tuấn*, 9A$_1$, Lê Quý Đôn, ý Yên, **Nam Định**; *Mai Nguyên Dũng*, 9A$_1$, Chu Văn An, **Thái Nguyên**; *Nguyễn Việt Dũng*, Yên Khê, Thanh Ba, **Phú Thọ**; *Lê Thành Công*, 9B, Đông Hưng, **Thái Bình**; *Nguyễn Thảo Lan*, 7A và *Nguyễn Xuân Hòa*, 8A, trường Nhữ Bá Sĩ, Hoằng Hóa, **Thanh Hóa**; *Võ Tuấn Bình*, 9B, Hà Huy Tập, Vinh, *Trần Hồng Yến*, 9A, NK Nam Đàn, **Nghệ An**; *Đinh Trung Hiếu*, 9A, Phú Bài, Hương Thủy, **Thừa Thiên - Huế**; *Phan Phương Mai*, 8CT, Trần Phú, **Hải Phòng**.

LÊ THỐNG NHẤT

Bài T2/244: *Cho 3 số dương tùy ý không lớn hơn 1. Chứng minh:*

$$\frac{1}{a+b+c} \geq \frac{1}{3} + (1-a)(1-b)(1-c)$$

Lời giải. (của *Đặng Ngọc Trang*, 8B, PTCS Nguyễn Công Trứ II, Tiền Hải, Thái Bình)

Vai trò của a, b, c là bình đẳng nên không giảm tính tổng quát, ta có thể giả sử $a \geq b \geq c$. áp dụng Bất đẳng thức Côsi cho 3 số không âm 1-b, 1-c, 1+b+c ta có:

$$1 = \frac{(1-b)+(1-c)+(1+b+c)}{3} \geq \sqrt[3]{(1-b)(1-c)(1+b+c)}$$

$\Leftrightarrow (1-b)(1-c)(1+b+c) \leq 1$

$\Leftrightarrow (1-a)(1-b)(1-c)(1+b+c) \leq 1-a$

$\Leftrightarrow (1-a)(1-b)(1-c) \leq \dfrac{1-a}{1+b+c} \leq \dfrac{1-a}{a+b+c}$ (do $a \leq 1$)

Từ đó ta có:

$$(1-a)(1-b)(1-c) \leq \frac{1}{a+b+c} - \frac{a}{a+b+c} \leq \frac{1}{a+b+c} - \frac{1}{3}$$

Vậy ta có:

$$\frac{1}{a+b+c} \geq \frac{1}{3} + (1-a)(1-b)(1-c)$$

dấu "=" xảy ra khi $a = b = c = 1$. (đpcm).

Nhận xét. 1. Các bạn sau đây cũng có lời giải tốt: *Nguyễn Đăng Quý*, 9A, Trọng điểm Thuận Thành, **Bắc Ninh**; *Vương Gia Vũ*, 8H Trưng Vương, **Hà Nội**; *Vũ Thanh Bình*, 8T, Chu Văn An, **Hải Phòng**; *Nguyễn Cao Cường, Lê Trung Dũng*, 9B, Chu Văn An, Thanh Hà, **Hải Dương**; *Lê Thành Công*, 9B, Đông Hưng, **Thái Bình**; *Nguyễn Trung Quân*, 9A$_1$, Lê Quý Đôn, Ý Yên, **Nam Định**; *Hoàng Lan Anh, Lê Ngọc Khoa, Lê Thị Thúy, Lê Mạnh Thủy*, 8A, NK Hoằng Hóa, *lê Kim Phượng, Lê Anh Sơn*, 9C, NL Tp Thanh Hóa, **Thanh Hóa**; *Nguyễn Xuân Toản*, 9A, Diễn Châu, *Nguyễn Đức Trường*, 9A Trung Đô, Vinh, **Nghệ An**; *Dương Tuấn Anh*, 9/2 Lê Văn Thiêm, TX **Hà Tĩnh**; *Huỳnh Minh Việt*, 9A Nguyễn Hiền, Điện Bàn, **Quảng Nam**; *Đào Duy Bình*, 7A$_1$, Dương Minh Châu, **Tây Ninh**; *Nguyễn Lương Hoàng*, 9A, QH Quy Nhơn, **Bình Định**; *Vũ Xuân Ngọc Tín*, 6 Quang Trung, Tân Phú, **Đồng Nai**.

2. Các bạn sau đây đã phát biểu và chứng minh bài toán mở rộng cho n số như sau:

Cho n số dương $a_i \in (0, 1]$, $i = 1, 2, ..., n$. Chứng minh:

$$\frac{1}{a_1+a_2+...+a_n} \geq \frac{1}{n} + (1-a_1)(1-a_2)...(1-a_n)$$

Đặng Thị Hiên, 9B, TĐ Thuận Thành, **Bắc Ninh**; *Mai Nguyên Dũng*, 9A$_1$, Chu Văn An, Tp **Thái Nguyên**; *Tạ Ngọc Thạch*, 9B, CLC Tp Việt Trì, **Phú Thọ**; *Nguyễn Đức Giang*, 8A, Lê Quý Đôn, Từ Liêm, *Nguyễn Hoàng Anh*, 9A, Quang Trung, **Hà Nội**; *Lại Đức Phương*, 9A, Nguyễn Khuyến, Bình Lục, **Hà Nam**; *Hoàng Văn Long*, 9, Chu Văn An, Thanh Hà, **Hải Dương**. *Đỗ Trọng Giang*, 10A$_1$, Phụ Dực, Quỳnh Phụ, **Thái Bình**; *Lê Khả ân, Nguyễn Văn Giáp, Trương Thanh Giáp, Nguyễn Xuân Hòa*, 8A, NK Hoằng Hóa, *Nguyễn Việt Hà*, 8B NK Thành phố, *Phan Văn Tiến*, 9C, Quang Trung, Tp Thanh Hóa, **Thanh Hóa**; *Dương Tuấn Anh, Võ Thanh Sơn*, 9$_2$, Lê Văn Thiêm, TX, **Hà Tĩnh**.

3. Các bạn sau đây đã phát biểu và chứng minh bài toán mở rộng cho n số dương như sau:

Cho n số dương $a_1, a_2, ... a_n$ tùy ý không lớn hơn α ($\alpha > 0$, $n \in N^*$). Chứng minh:

$$\frac{\alpha^{n+1}}{a_1+a_2+...+a_n} \geq \frac{\alpha^n}{n} + (\alpha-a_1)(\alpha-a_2)...(\alpha-a_n)$$

Lê Minh Đức, 8A, CLC **Hải Dương**; *Hoàng Tuấn*, 9A, Lê Quý Đôn, Ý Yên, **Nam Định**; *Lê Hoàng*, 9C, NK Thành phố, **Thanh Hóa**.

TỐ NGUYÊN

Bài T3/244. *Giải hệ phương trình sau:*

$$\begin{cases} 4xy + 4(x^2+y^2) + \dfrac{3}{(x+y)^2} = \dfrac{85}{3} \\ 2x + \dfrac{1}{x+y} = \dfrac{13}{3} \end{cases}$$

Lời giải. Phương trình thứ nhất có thể viết lại thành :

$$3\left[(x+y)^2 + \frac{1}{(x+y)^2}\right] + (x-y)^2 = \frac{85}{3}$$

Do đó, đặt $a = x + y$ và $b = x - y$, ta có $2x = a + b$, và hệ đã cho trở thành :

$$\begin{cases} 3\left(a^2 + \dfrac{1}{a^2}\right) + b^2 = \dfrac{85}{3} & (1) \\ a + b + \dfrac{1}{a} = \dfrac{13}{3} & (2) \end{cases}$$

Rút b từ (2) thế vào (1) rồi đặt $t = a + \dfrac{1}{a}$, được phương trình bậc 2 đối với t:

$$18t^2 - 39t - 70 = 0.$$

Giải ra được $t_1 = 3$; $t_2 = \dfrac{1}{3}$ (loại vì $\left|a + \dfrac{1}{a}\right| \geq 2$).

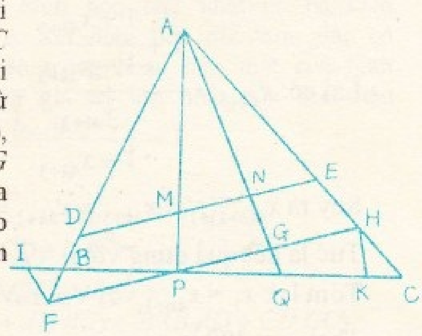
Tính ra được hai nghiệm là $(2; 1)$ và $\left(\dfrac{2}{3}; -\dfrac{1}{3}\right)$.

Nhận xét. Có 89 bài giải trong đó có 4 bài giải sai. Lời giải tốt gồm có: **TP. Hồ Chí Minh:** *Huỳnh Công Thành*, 9T Nguyễn Du, Q.1; **Hà Nội:** *Đỗ Trường Giang*, 9A - THCS Đông Anh, *Nguyễn Hoàng Anh*, 9A THCS Quang Trung; **Thanh Hóa:** *Nguyễn Anh Tuấn*, 9B - THCS Lê Quý Đôn, Bỉm Sơn; **Nam Định:** *Nguyễn Đức Chính*, 9B - PTCS Hải Hậu; **Bạc Liêu:** *Trương Yến Nhi*, 9A PTTH chuyên); **Bắc Ninh:** *Nguyễn Đăng Quý*, 9A Trọng điểm, Thuận Thành; **Nghệ An:** *Võ Tuấn Bình*, 9B THCS Hà Huy Tập, TP Vinh; **Hải Phòng:** *Phạm Đức Hiệp, Vũ Ngọc Minh* (8T Chu Văn An); **Quảng Ngãi:** *Phạm Anh Tuấn*, 9A chuyên Lê Khiết;

ĐẶNG VIỄN

Bài T4/244. *Cho tam giác ABC, điểm D trên cạnh AB, điểm E trên cạnh AC. Trên đoạn DE lấy các điểm M, N sao cho DM = MN = NE. Gọi P, Q là các giao điểm tương ứng của các tia AM, AN với cạnh BC. Chứng minh rằng nếu BP < PQ thì PQ < QC.*

Lời giải. (dựa theo *Nguyễn Hoài Anh*, 8A THCS Lê Quý Đôn, Q. Cầu Giấy, **Hà Nội**). Qua P kẻ đường thẳng song song với DE, cắt AB, AQ, AC tương ứng tại các điểm F, G, H. Áp dụng định lí Ta-lét, dễ dàng chứng minh $FP = PG = GH$ (1). Qua F, H kẻ các đường thẳng song song với AQ; cắt BC tương ứng tại I, K (2). Từ (1) và (2), $\Delta IPF = \Delta QPG$ (g.c.g), suy ra $IP = PQ$. Do $IF \parallel AQ$ nên $\dfrac{AB}{AF} = \dfrac{BQ}{QI} =$



$\frac{BP+PQ}{2PQ}$. Mà $BP < PQ$ nên $\frac{AB}{AF}<1$ hay $AB<AF$, vậy là F nằm ngoài cạnh AB. Suy ra A, B nằm cùng phía đối với đường thẳng FP. Do P nằm giữa B, C nên C, B nằm khác phía đối với đường thẳng FP. Vậy C, A nằm khác phía đối với đường thẳng FP, hay H nằm giữa A, C. Mà $HK//AQ$ nên K nằm giữa Q, C hay là $QK<QC$. Hơn nữa, do HQ là đường trung bình trong tam giác PHK nên $PQ=QK$. Vậy: $PQ<QC$ (đpcm).

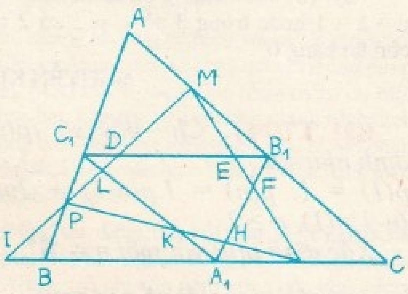
Nhận xét. Có 90 bạn gửi bài giải, tất cả đều giải đúng, tuy nhiên còn nhiều bạn mắc phải thiếu sót sau đây: hoặc là trình bày quá dài (có bài dài tới ba trang giấy học sinh), hoặc là trình bày ngắn gọn nhưng thiếu chặt chẽ. Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Hà Nội: *Đỗ Trường Giang*, 9A THCS Đông Anh, *Nguyễn Hoài Anh*, 8A THCS Lê Quý Đôn, Q. Cầu Giấy; **Hải Phòng:** *Triệu Tuấn Đạt*, 8T THCS Chu Văn An; **Đồng Nai:** *Vũ Xuân Ngọc Tín*, lớp 6 THCS Quang Trung - Tân Phú; **Bạc Liêu:** *Trương Yến Nhi*, *Trần Lê Minh*, 9A PTTH chuyên; **Nghệ An:** *Nguyễn Nghĩa Tài*, 9A THCS Đô Lương, H. Đô Lương, *Nguyễn Như Phong*, 7C THCS Đông Vĩnh; **Nam Định:** *Cao Lê Duẩn*, Trung tâm CLC Giao Thủy; **Hải Dương:** *Nguyễn Cao Cường*, 9B THCS Chu Văn An, H. Thanh Hà; **Bắc Ninh:** *Phùng Văn Thủy*, 9A THCS Lê Văn Thịnh, Gia Lương; **Đắk Lắc:** *Ngô Quốc Anh*, 9C chuyên Nguyễn Du, Buôn Ma Thuột.

ĐẶNG VIỄN

Bài T5/244. *Cho tam giác ABC với các trung tuyến AA_1, BB_1, CC_1. Lấy các điểm M (nằm giữa A, B_1), N (nằm giữa C, A_1), P (nằm giữa B, C_1). Tìm giá trị bé nhất của diện tích phần chung của hai tam giác $A_1B_1C_1$ và MNP biết rằng diện tích tam giác ABC bằng 1.*

Lời giải. (của *Chu Diệp Anh*, 8B, chuyên Ứng Hòa, Hà Tây).



Gọi diện tích *DEFHKL* bằng S.

Do $DB_1//IC$ và $NC \le IN$ nên $EB_1 \le DE$.

Suy ra $S_{EB_1F} \le S_{DEF}$

Tương tự $S_{DC_1L} \le S_{DLK}$

$S_{KA_1H} \le S_{KHF}$

Từ đó $S_{A_1B_1C_1} - S \le S - S_{DFK}$ hay $S_{A_1B_1C_1} \le 2S$.

Vậy $S \ge \frac{1}{2} S_{A_1B_1C_1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$.

Dấu = xảy ra khi 1 đỉnh của ΔMNP trùng với 1 đỉnh của ΔABC và 1 đỉnh trùng trung điểm cạnh đối diện. Do đó giá trị bé nhất của phần chung là $\frac{1}{8}$.

Nhận xét. Giải tốt bài toán này có các bạn:

Thái Nguyên: *Nguyễn Văn Thắng*, 9A_1, THCS Độc Lập; **Phú Thọ:** *Lê Tuyết Nhung*, 9A, THCS Phú Thọ; **Bắc Giang:** *Vũ Chí Minh*, 9A, THCS Hiệp Hòa; **Bắc Ninh:** *Nguyễn Đăng Quý*, 9A TĐ Thuận Thành; **Vĩnh Phúc:** *Đào Duy Vũ*, 9B THCS Yên Lạc, *Trịnh Minh Đức*, 9A, THCS Vĩnh Yên; **Hải Phòng:** *Lê Văn Thanh*, 9A_1 THCS Ngô Quyền, *Triệu Tuấn Đạt*, 8T, THCS Chu Văn An; **Hải Dương:** *Nguyễn Huy Sơn*, 8 Lí, THCS Nguyễn Trãi; **Hà Tây:** *Nguyễn Mạnh Thắng*, 9A chuyên Thạch Thất, *Vũ Cao Cường*, 9A chuyên Thanh Oai; **Hà Nội:** *Ngô Thế Hùng*, 8C Hà Nội - Amsterdam, *Nguyễn Đức Giang*, 8A Lê Quý Đôn, Từ Liêm, *Nguyễn Viết Tùng*, 9I Tô Hoàng; **Nam Định:** *Đặng Phương Thảo*, 8A_2 Lương Thế Vinh, *Trần Thanh Tùng*, 8A_6, *Đỗ Minh Tiến*, 9A_6 Trần Đăng Ninh, *Trần Đức Hiệu*, 9I Hàn Thuyên; **Hà Nam:** *Lại Đức Phương*, 9A Nguyễn Khuyến, Bình Lục; **Thanh Hóa:** *Phạm Tuấn Anh*, 8C NK thành phố, *Nguyễn Thùy Linh*, 8A NK Hoằng Hóa, *Nguyễn Anh Tuấn*, 9B Lê Quý Đôn, Bỉm Sơn; **Nghệ An:** *Nguyễn Tiến Tài*, 9A THCS Đô Lương, *Nguyễn Như Phong*, 7C Đông Vĩnh, *Vũ Ngọc Dũng*, 9B Đặng Thai Mai, Vinh; **Hà Tĩnh:** *Dương Tuấn Anh*, 9/2 Lê Văn Thiêm; **Quảng Bình:** *Phạm Lê Hạnh Dung*, 9^2 THCS Võ Ninh; Quảng Ninh; **Quảng Ngãi:** *Trần Thái An Nghĩa*, 8I, *Hà Quang Đạt*, 8J Trần Hưng Đạo; **Bình Định:** *Nguyễn Lương Hoàng*, 9A Quốc học Quy Nhơn; **Đắc Lắc:** *Nguyễn Thành Nam*, 8T, Nguyễn Du; **Đồng Tháp:** *Lê Trọng Duy*, 8T, THCB Sa Đéc; **Bạc Liêu:** *Lương Thế Nhân*, 9A chuyên.

VŨ KIM THỦY

Bài T6/244. *Cho số dương a. Xét các số dương x, y, z thỏa mãn điều kiện:*

$$xy + yz + zx + \frac{2}{a}xyz = a^2,$$

Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{x+y+z}{xy+yz+zx}$$

Lời giải. Ta đã biết:

Bài toán 1. Cho các số không âm x, y, z thỏa mãn điều kiện: $xy + yz + xyz = 4$(*).

Chứng minh rằng: $x + y + z \ge xy + yz + zx$ (1). Hỏi dấu bằng xảy ra khi nào?

(*Bài 6 - Đề thi chọn HSG Toán THPT Toàn quốc năm học 95-96. Bảng B*).

Lời giải của *bài toán 1* đã được công bố trên Tạp chí THTT số 12 (234) năm 1996. Theo đó, dấu "=" ở (1) xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 1$ hoặc trong 3 số x, y, z có 2 số bằng 2 và số còn lại bằng 0.

Lấy $t > 0$ tùy ý. Đặt $x = t\alpha$, $y = t\beta$, $z = t\gamma$. Khi đó, *Bài toán 1* sẽ được phát biểu dưới dạng *tương đương* sau:

Bài toán 1'. Cho $t > 0$ và cho các số không âm α, β, γ thỏa mãn điều kiện: $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha + t\alpha\beta\gamma = \frac{4}{t^2}$. Chứng minh rằng: $\alpha + \beta + \gamma \geq \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$). Hỏi dấu "=" xảy ra khi nào ?

Đặt $t = \frac{2}{a}$, $a > 0$, *từ Bài toán 1' ta có Bài T6/244.* Và, theo những điều đã trình bày ở trên thì: $\min P = \frac{2}{a}$, đạt được khi $x = y = z = \frac{a}{2}$.

Nhận xét. 1. Trong tổng số 114 bạn gửi lời giải tới T.S. có 15 bạn cho lời giải sai, do đã mắc phải một trong các sai lầm sau:

• Không nắm vững các tính chất của BĐT. Có nhiều bạn cho rằng: Từ $a > b > 0$ và $c > d > 0$ suy ra $\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$" (?!).

• Không thuộc BĐT Trêbưsep.

• Nhầm lẫn trong các biến đổi đại số.

2. Hầu hết các bạn có lời giải đúng đều cho lời giải tương tự lời giải bài toán 1 (như đã công bố). Dưới đây là danh sách các bạn có lời giải tốt hơn cả:

Tây Ninh: *Đoàn Hồng Anh*, $11A_4$ PTTH Hoàng Lê Kha; **Vĩnh Long:** *Nguyễn Minh* Trường, không rõ trường lớp; **Đắclắc:** *Lê Đình Bình, Lê Anh Dũng, Lê Thế Tân*, 12CT PTTH Nguyễn Du - Buôn Ma Thuột; **Đồng Nai:** *Phan Thị Thu Hằng, Nguyễn Văn Thạnh Sang*, 11CT PTTH Lương Thế Vinh - Biên Hòa; **Bà Rịa - Vũng Tàu:** *Lương Anh Hùng*, $11A_1$ PTTHCB Vũng Tàu; **TP.Hồ Chí Minh:** *Vũ Đức Phú*, 12CT PTTH Lê Hồng Phong; **Đà Nẵng:** *Lê Đại Dương, Vũ Quý Lộc*, $10A_1$, $11A_4$ PTTH Lê Quý Đôn; *Nguyễn Tấn Phong* $12A_1$ PTTH Hoàng Hoa Thám; **Thừa Thiên - Huế:** *Huỳnh Công Phước*, 10CT Quốc học Huế; **Quảng Trị:** *Đào Thị Mỹ Châu*, 10T PTTH Lê Quý Đôn, *Hoàng Văn ấu*, không rõ trường lớp; **Quảng Bình:** *Lê Trung Hiếu, Nguyễn Hoa, Nguyễn Viết Thanh, Trần Hữu Lực* (PTTHNK); **Nghệ An:** *Hoàng Minh Sơn*, $10G_1$ PTTH Nghi Lộc 1, *Trần Nam Dũng*, 12CT PTTH Phan Bội Châu - Vinh); **Thanh Hóa:** *Lưu Văn Hiệu, Cao Xuân Sinh*, $10A_6$, 11A PTTH Ba Đình - Nga Sơn, *Lê Xuân Trung*, 11T PTTH Lam Sơn; **Ninh Bình:** *Vũ Hồng Việt*, 11T PTTH Lương Văn Tụy; **Nam Định:** *Trần Quang Vinh*, $9A_1$ THCS Lê Quý Đôn - Ý Yên, *Vũ Trần Cương, Phạm Ngọc Hưng, Nguyễn Trọng Kiên, Vũ Việt Tài, Nguyễn Trường Giang*, 10T, 12T-L PTTH Lê Hồng Phong; **Hòa Bình:** *Đỗ Quang Dương, Phùng Minh Đức* 11T, 12CT PTTH Hoàng Văn Thụ; **Hà Tây:** *Lưu Tiến Đức*, 9B Trường chuyên ứng Hòa, *Ngô Đình Trung*, 12T THCB Sơn Tây, *Nguyễn Mạnh Hà*, 11A CT PTTH Nguyễn Huệ; **Hà Nội:** *Nguyễn Đức Mạnh*, 12A PTTH Cổ Loa - Đông Anh, *Lê Hải Bình*, 10 Tin PTTH Hà Nội - Amsterdam; **Bắc Ninh:** *Phùng Văn Thủy*, 9A THCS Lê Văn Thịch - Gia Lương; **Bắc Giang:** *Đặng Hoàng Việt Hà, Nguyễn Tiến Mạnh, Phạm Việt ngọc*, 12A PTTH Ngô Sĩ Liên; **Hải Dương:** *Nguyễn Huy Khương, Đào Thu Mai, Trần Đại Nghĩa, Vũ Văn Tâm, Nguyễn Văn Luật*, 11CT, 12CT PTTH Nguyễn Trãi; **Hưng Yên:** *Dương Mạnh Hùng, Nguyễn Thành Sơn*, 12PTNK Hưng Yên; **Hải Phòng:** *Phạm Đức Hiệp* 8T THCS Chu Văn An, *Trần Văn Hà, Nguyễn Mai Hưng, Trần Trung Hiếu, Đoàn Mạnh Hà, Phạm Dương Hiếu*, 10T, 12T PTTH Trần Phú; **Thái Bình:** *Vũ Tiến Đạt*, 11A PTTH Chuyên; **Quảng Ninh:** *Lê Xuân Thành*, $12A_1$ PTTH Hạ Long; **Vĩnh Phúc:** *Vũ Văn Phong, Nguyễn Thanh Tú, Cao Thế Thu*, 10A, 11A PTTH chuyên; **Phú Thọ:** *Nguyễn Kim Sổ*, 12A PTTH Thanh Ba, *Đào Mạnh Thắng*, 12A PTTH chuyên Hùng Vương; **Lao Cai:** *Nguyễn Hồng Quang*, $11A_1$ PTTH Lao Cai; **ĐHQG TP Hồ Chí Minh:** *Phạm Ngọc Huy, Lê Quang Nẫm*, 10T, 12T Trường PTNK; **ĐHSP Vinh:** *Lê Hồng Hà*, 12A khối PTCT; **ĐHQG Hà Nội:** *Nguyễn Phong Thiên, Hoàng Tùng, Nguyễn Tùng, Đoàn Huy Hiên, Nguyễn Minh Hoài*, 10 khối PTCT Tin ĐHKHTN).

3. *Có 4 bạn cho nhận xét rằng, bài đã ra là một dạng phát biểu khác của bài toán 1. Tuy nhiên, một số bạn khác lại cho rằng, bài đã ra là bài toán khái quát của bài toán 1. Ai đúng, ai sai?* Thiết nghĩ, *Lời giải đã trình bày ở trên là lời giải đáp cho câu hỏi đó. Và hi vọng, qua đây, các bạn sẽ có cách nhìn nhận đúng hơn đối với bản chất toán học của các vấn đề đã được đặt ra.*

4. Nhân đây, xin trình bày thêm một cách giải (ngoài cách giải đã công bố trên Tạp chí THTT) cho bài toán 1:

"Không mất tổng quát, giả sử $x \geq y \geq z \geq 0$. Khi đó, từ (*) dễ thấy $x \geq 1$ và $z \geq 1$. Hơn nữa, ta còn có:

$$(*) \Leftrightarrow y = \frac{4 - xz}{x + z + xz} \text{ và } (*) \Leftrightarrow xy + yz + zx = 4 - xyz.$$

Do đó: $(1) \Leftrightarrow x + z + \frac{4 - xz}{x + z + xz} \geq 4 - xz. \frac{4 - xz}{x + z + xz}$.

$$\Leftrightarrow (x + z)^2 + xz(x + z) + 4 - xz \geq 4(x + z + xz) - xz(4 - xz)$$

$$\Leftrightarrow (x + z)^2 - 4(x + z) + 4 + xz(x + z - xz - 1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x + z - 2)^2 + xz(x - 1)(1 - z) \geq 0 \quad (2)$$

Do $x \geq 1 \geq x \geq 0$ nên (2) là BĐT đúng và vì thế (1) là BĐT đúng. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x + z = 2 \\ xz(x - 1)(1 - z) = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y = z = 1 \\ x = y = 2, z = 0 \end{cases} \text{(do (*))}$$

Vậy, (2) được chứng minh và dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 1$ hoặc trong 3 số x, y, z có 2 số bằng 2 và số còn lại bằng 0".

NGUYỄN KHẮC MINH

Bài T7/244. *Cho dãy số $\{p(n)\}$ được xác định như sau:*

$p(1) = 1;\ p(n) = 1.p(n-1) + 2p(n-2) + \ldots + (n-1)p(1),\ n \geq 2.$

Xác định $p(n)$ với mỗi $n \in \mathbf{N}^*$.

Lời giải. (của đa số các bạn)

Với $n \geq 3$ ta có:

$$p(n) = [p(n-1)+p(n-2)+\ldots+p(1)]+$$
$$+ [1.p(n-2)+2.p(n-3)+\ldots+(n-2)p(1)]$$
$$= p(n-1) + p(n-2) + \ldots + p(1) + p(n-1)$$
$$\Leftrightarrow p(n) - p(n-1) =$$
$$= p(n-1) + p(n-2) + \ldots + p(1) \quad (*)$$

Thay n bởi $(n + 1)$ trong (*) ta được:

$$p(n+1) - p(n) = p(n) + p(n-1) + \ldots + p(1) (**)$$

Từ (*) và (**) ta thu được:

$p(n+1) = 3p(n) - p(n-1); p(1) = 1,\ p(2) = 1$

Hay: $p(n+2) - 3p(n+1) + p(n) = 0;\ n \geq 1 (1)$

$p(1) = 1, p(2) = 1, p(3) = 3$

Xét phương trình đặc trưng của (1):

$$t^2 - 3t + 1 = 0$$

Phương trình đặc trưng này có 2 nghiệm

$t_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$. Vậy nên:

$$p(n) = a\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + b\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$$

Kết hợp với điều kiện $p(1) = 1, p(2) = 1$, ta thu được hệ: $a = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$; $b = -\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ và:

$$p(n) = \frac{\sqrt{5}}{5}\left[\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right], n \geq 2.$$

$p(1) = 1$.

Nhận xét. Hầu hết các bạn gửi đến đều có lời giải đúng và thường theo cách trình bày ở trên. Các bạn sau đây có lời giải đúng:

Khánh Hòa: *Trần Tuấn Anh*, 10A Toán Lê Quý Đôn; **Tây Ninh:** *Đoàn Hồng Anh*, 11 chuyên Hoàng Lê Kha; **Trà Vinh:** *Bùi Trinh Khoa*, $10A_1$ trung học chuyên; **Hà Giang:** *Vũ Anh Hải*, 11A PTTH Lê Hồng Phong; **Thái Bình:** *Vũ Tiến Đạt*, 11A PTTH chuyên; **Hòa Bình:** *Phùng Minh Đức*, 12CT, *Hà Khánh Toàn*, 12CT, PTTH NK Hoàng Văn Thụ; **Đà Nẵng:** *Nguyễn Tấn Phong*, $12A_1$ PTTH Hoàng Hoa Thám, *Lê Văn Duy*, 11, *Phan Văn Thảo*, 11A, Lê Quý Đôn; **Cà Mau:** *Phan Quốc Bảo*, $12A_1$ - PTTH Hồ Thị Ký; **Quảng Ninh:** *Phan Thanh Nam*, $11A_1$ TH chuyên Hạ Long; **Lào Cao:** *Nguyễn Hồng Quang:*, $11A_1$ - PTTH Lào Cai; **Hưng Yên:** *Dương Mạnh Hùng*, 12 T-L-H, trường thống thông năng khiếu; **Phú Thọ:** *Nguyễn Kim Sổ*, 12A PTTH Thanh Ba, *Đào Mạnh Thắng*, 12A, *Vũ Đoàn Hưng*, $10A_1$, PTTH chuyên Hùng Vương; **Bình Định:** *Ngô Lê Quốc Kha*, $11A_1$ - Quốc học Quy Nhơn; **Ninh Bình:** *Lương Ngọc Anh*, 10T - PTTH Lương Văn Tụy; **Yên Bái:** *Lê Hồng Hải*, $11A_2$, *Nguyễn Đăng Trung*, $11A_2$, *Nguyễn Công Chính*, $11A_1$, PTTH chuyên Yên Bái; **Vĩnh Phúc:** *Phạm Hoàng Hà*, 11A chuyên; **Đăk Lắc:** *Lê Đình Bình*, 12T, *Lê Thế Tân*, 12T, *Lê Anh Dũng*, 12CT, PTTH chuyên Nguyễn Du; **Quảng Trị:** *Đào Thị Mĩ Châu*, 10AT, *Lê Thọ Kha*, 10T, chuyên lê Quý Đôn, *Hoàng Văn Ấu*, khu phố 5, phường 1, *Nguyễn Công Thành*, 11 chuyên toán trường chuyên PTTH Lê Quý Đôn; **Quảng Bình:** *Nguyễn Hoa*, 11 PTTH năng khiếu; **Hải Dương:** *Đào Thu Mai*, 11T, *Nguyễn Huy Khương*, 11T, *Phạm Văn Hải*, 11T, *Trần Đại Nghĩa*, 11T, *Hoàng Xuân Quý*, 12T, PTTH Nguyễn Trãi, *Phạm Ngọc Hưng*, 10 chuyên Toán, *Vũ Việt Tài*, 10 Toán , PTTH Lê Hồng Phong; **Hải Phòng:** *Phạm Dương Hiếu*, 12T, *Đoàn Trung Cường*, $11A_1$, *Nguyễn Mai Hưng*, 10T, *Trần Trung Hiếu*, 10AT, *Đoàn Mạnh Hà*, 12T, *Nguyễn Bắc Hải*, 12 tin, *Vũ Huy Toàn*, 11T, *Trần Văn Hà*, 10T, *Đặng Anh Tuấn*, 12T, *Nguyễn Quang Minh*, 10T, PTTH năng khiếu Trần Phú; **Bắc Giang:** *Phạm Việt Ngọc*, 12A, *Vũ Duy Tuấn*, 12A, *Đặng Hoàng Việt Hà*, 12A, *Nguyễn Tiến Mạnh*, 12A, PTTH năng khiếu Ngô Sĩ Liên; **Hà Tây:** *Đặng Trần Dũng*, 10A, *Bùi Xuân Hảo*, 12A, *Nguyễn Mạnh Hà*, 11A chuyên toán, PTTH năng khiếu Nguyễn Huệ, *Ngô Đình Trung*, 12T, trường THCB Sơn Tây; **TP Hồ Chí Minh:** *Lê Quang Nẫm*, 12CT-PTNK-ĐHQG, *Vũ Đức Phú*, 12CT, Lê Hồng Phong, *Nguyễn Lê Lực*, 12T-PTNK-ĐHQG; **Hà Nội:** *Bùi Thu Cúc*, 11A - khối PTCT - ĐHSPI, *Lưu Minh Ngọc*, 10AT - ĐHKHTN - ĐHQG, *Nguyễn Minh Hoài*, 10BT - khối chuyên toán tin ĐHKHTN-ĐHQG, *Nguyễn Huy Dương*, 10A toán- ĐHKHTN-ĐHQG, *Đỗ Minh Châu*, $11T_1$, PTTH Hà Nội-Amsterdam, *Vũ Văn Hải*, 10A chuyên toán ĐHSPHN I - ĐHQGHN, *Nguyễn Phong Thiên*, 10B toán - ĐHKHTN, *Nguyễn Minh Công*, 11 toán, PTTH Hà Nội-Amsterdam, *Dương Việt Hùng*, 12A PTTH Vân Nội; **Thanh Hóa:** *Lê Xuân Trung*,11T, *Lê Văn Phương*, 11T, *Lê Huy Bình*, 11T, *Hoàng Yên Thế*, 11T, PTTH Lam Sơn, *Nguyễn Anh Tuấn*, 9B - THCS Lê Quý Đôn, *Lê Đức Hân*, 11T - PTTH Lam Sơn; **Nghệ An:** *Lê Quang Đạo*, $10A_2$, *Hoàng Trường Giang*, 12CT, Phan Bội Châu, *Đặng Duy Điền Hải*, 10T - ĐHSP Vinh, *Trần Nam Dũng*, 12CT, *Hà Văn Đạt*, $10A_3$, *Nguyễn Phan Nhân*, 11A, PTTH Phan Bội Châu, *Hồ Sĩ Ngọc*, 11A - KPTCT-ĐHSP Vinh.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T8/244. *Cho hệ phương trình hai ẩn x, y*

$$\begin{cases} k(x^2 + \sqrt[3]{x^4} + \sqrt[3]{x^2} + 1) = xy \\ k(\sqrt[3]{x^8} + x^2 + \sqrt[3]{x^2} + 1) + (k-1)\sqrt[3]{x^4} = 2y\sqrt[3]{x^4} \end{cases}$$

1) Xác định k để hệ phương trình có nghiệm.

2) Giải hệ phương trình với k = 16.

Lời giải. Nếu $k = 0$ hệ có dạng

$$\begin{cases} yx = 0 \\ 2y\sqrt[3]{x^4} = -\sqrt[3]{x^4} \end{cases}$$

hệ có nghiệm $(x, y) = (0, c)$, $c \in R$ tùy ý.

Xét $k \neq 0$. Đặt $t = \sqrt[3]{x}$ ta được hệ

$$\begin{cases} k(t^6 + t^4 + t^2 + 1) = yt^3 \\ k(t^8 + t^8 + t^4 + t^2 + 1) = (2y+1)t^4 \end{cases} \text{(I)}$$

Ta có $t = 0$ không là nghiệm của hệ.

Đặt $u = t + \dfrac{1}{t}$ $(|u \geq z)$ ta có (I) tương đương với

$$\begin{cases} k(u^3 - 2u) = y \\ k(u^4 - 3^2 + 1) = 2y + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k(u^3 - 2u) = y \quad (II) \\ k(u^4 - 3u^4 + 1) = 2k(u^3 - 2u) + 1 \quad (2) \end{cases}$$

Rõ ràng (II) có nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có nghiệm.

Phương trình (2) $\Leftrightarrow u^4 - 2u^3 - 3u^2 + 4u + 1 = \frac{1}{k}$.

Xét bảng biến thiên của hàm $f(u) = u^4 - 2u^3 - 3u^2 + 4u + 1$ Ta thấy với $|u| \geq 2$ thì

$$f(u) \in [-3, \infty].$$

Vậy phương trình (2) có nghiệm $\Leftrightarrow \frac{1}{k} \geq -3$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k > 0 \\ k \leq -\frac{1}{3} \end{array}\right.$$

Kết luận: Hệ có nghiệm $\Leftrightarrow k \geq 0$ hoặc $k \leq -\frac{1}{3}$

2) Với $k = 16$ phương trình (2) trở thành

$$u^4 - 2u^3 - 3u^2 + 4u + \frac{15}{16} = 0$$

$$\Leftrightarrow (2u-1)^4 - 18(2u-1)^2 + 32 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (2u-1)^2 = 2 \\ (2u-1)^2 = 16 \end{array}\right. \Leftrightarrow u = \frac{5}{2}$$

(loại nghiệm $|u| < 2$)

Từ đó $y = 170$ và $x = 8$ hoặc $x = \frac{1}{8}$.

Đáp số : $(8, 170)$, $(\frac{1}{8}, 170)$.

Nhận xét. Nhiều bạn giải tốt bài này như các bạn sau đây: *Nguyễn Thanh Hà*, 12A PTTH Kiến Xương, **Thái Bình**; *Trần Đại Nghĩa*, 11T, Nguyễn Trãi, **Hải Dương**; *Đào Thị Mỹ Châu*, Lê Quý Đôn, **Quảng Trị**; *Vũ Anh Hải*, 11A, PTTH Lê Hồng Phong, **Hà Giang**, *Võ Như Phương*, 12T, Lê Quý Đôn, **Quảng Trị**, *Nguyễn Quang Minh*, 10T Trần Phú, **Hải Phòng**; *Vũ Việt Tài*, 10T Lê Hồng Phong, **Nam Định**; *Nguyễn Minh Hoài*, 10T, khối chuyên **ĐHKHTN**; *Đặng Xuân Thanh*, PTTH **Yên Bái**; *Hoàng Tùng*, 10A **ĐHKHTN Hà Nội**; *Phùng Đức Tuấn*, 12CT **Hải Dương**; *Lương Anh Hùng*, 11A PTTH chuyên ban **Vũng Tàu, Bà Rịa**; *Nguyễn Lê Lực*, 12T PTNK **ĐHQG TP Hồ Chí Minh**; *Đặng Hoàng Việt Hà*, 12A Ngô Sỹ Liên, **Bắc Giang**, *Đỗ Minh Châu*, 11T Hà Nội-Amsterdam, và nhiều bạn khác. Chỉ có một số ít bạn giải sai.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T9/244. *Trong một tam giác dựng ba đường tròn, mỗi đường tròn này tiếp xúc với hai cạnh của tam giác và tiếp xúc với đường tròn nội tiếp tam giác đó. Tính bán kính đường tròn nội tiếp tam giác theo các bán kính r_1, r_2 và r_3 của ba đường tròn nói trên.*

Lời giải. (của nhiều bạn). Đặt $\alpha = \frac{\pi - A}{4}$, $\beta = \frac{\pi - B}{4}$, $\gamma = \frac{\pi - C}{4}$; thế thì $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$ và từ đó ta được:

$$\text{tg}\alpha\text{tg}\beta + \text{tg}\beta\text{tg}\gamma + \text{tg}\gamma\text{tg}\alpha = 1$$

Gọi A', B' và C' là tiếp điểm của đường tròn (I, r) nội tiếp tam giác ABC lần lượt trên các cạnh BC, CA và AB. Thế thì ba đường tròn nhỏ (I_i, r_i), $i = 1, 2, 3$ nói trong bài toán có thể gọi là ba đường tròn nội tiếp ba tam giác cong lõm $AB'C'$, $BC'A'$ và $CA'B'$. Đường tròn nội tiếp (I, r) và ba đường tròn (I_r, r_i) này chúng ta đã gặp trong bài toán T9/209 (1994). Từ tâm I_3 của đường tròn nội tiếp tam giác cong lõm CA'B', hạ $I_3\Gamma_3 \perp IA' = \Gamma'_3$, ta được: $I\Gamma_3 = II_3 \sin\frac{C}{2}$ hay: $r - r_3 = (r + r_3)\sin\frac{C}{2}$. Từ đó suy ra:

$$\frac{r_3}{r} = \frac{1 - \sin\frac{C}{2}}{1 + \sin\frac{C}{2}} = tg^2\left(\frac{\pi - C}{4}\right) = \text{tg}^2\gamma$$

$$\Rightarrow \sqrt{r_3} = \sqrt{r}\,tg\gamma,$$

và hai hệ thức tương tự:

$$\sqrt{r_1} = \sqrt{r}\,tg\alpha, \quad \sqrt{r_2} = \sqrt{r}\,tg\beta;$$

Từ (1) và (2) ta thu được hệ thức sau, liên hệ giữa r và r_i ($i = 1, 2, 3$):

$$r = \sqrt{r_1 r_2} + \sqrt{r_2 r_3} + \sqrt{r_3 r_1}$$

Đó là hệ thức cần tìm.

Nhận xét. 1) Hệ thức (3) đã được thiết lập trong lời giải của bài toán T9/209 (1994), đăng trong THVTT số 213 (1995). Bạn *Nguyễn Tiến Mạnh*, 12A PTTHNK Ngô Sĩ Liên, **Bắc Giang**; đã chỉ ra điều này, cho Tòa soạn biết: bạn viết như sau: Đây là một bài toán nhỏ của bài T9/209. Bạn không trình bày lời giải và viết ngay hệ thức (3) ở trên. Bạn *Đoàn Mạnh Hà*, 12CT PTTHNK Trần Phú, **Hải Phòng** cũng có nhận xét như thế. Tòa soạn rất hoan nghênh nhận xét trên của bạn Mạnh và Hà, nhận xét đó còn chứng tỏ hai bạn Mạnh và Hà rất quan tâm và yêu thích tạp chí THVTT của chúng ta, thường xuyên theo dõi và giải toán đều đặn.

2) Sau đây, người viết nhận xét lời giải bài toán này đề xuất hai bài toán tương tự, mong các bạn hưởng ứng bằng cách tự giải các bài toán đó

Bài toán 1. Thay đường tròn nội tiếp (I, r) tam giác ABC bằng đường tròn (J, r_a) bàng tiếp góc A của tam giác ABC, tiếp xúc với cạnh BC ở A' với hai cạnh AC và AB kéo dài lần lượt ở B' và C'. Tìm hệ thức liên hệ giữa r_a và các bán kính r'_1, r'_2, r'_3 của các đường tròn nội tiếp các tam giác cong $AB'C'$, $BC'A'$ và $CA'B'$. Hệ thức liên hệ này thay đổi như thế nào so với hệ thức (3) đã tìm được ở trên.

Bài toán 2. Nghiên cứu bài toán tương tự trong HHKG của bài toán trên bằng cách : thay tam giác bởi tứ diện, thay đường tròn nội tiếp tam giác bởi mặt cầu nội tiếp tứ diện, thay tam giác cong bởi tứ diện "cong" và đường tròn nội tiếp tam giác cong (I_r, r_i) bởi mặt cầu nội tiếp tứ diện "con" mặt cầu nằm trong tứ diện, tiếp xúc với ba mặt của một góc tam diện và tiếp xúc với mặt cầu nội tiếp tứ diện.

3) Hi vọng trong số gần 300 bạn tham gia giải bài toán này, có không dưới 50% các bạn hưởng ứng giải thêm hai bài toán mới đề xuất ở trên. Chúc các bạn thành công

NGUYỄN ĐĂNG PHÁT

Bài T10/244. *Gọi l và R lần lượt là tổng độ dài các cạnh và bán kính mặt cầu ngoại tiếp một tứ diện. Hỏi trong số các tứ diện, tứ diện nào đạt giá trị lớn nhất của tỉ số $\frac{l}{R}$? Và tính giá trị lớn nhất đó.*

Lời giải. (của *Lê Đình Bình*, 12T, PTTH chuyên Nguyễn Du, Buôn Ma Thuột, **Đăk Lắc** và nhiều bạn khác).

Gọi G và O lần lượt là trọng tâm và tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$. Theo bất đẳng thức Bunhiacốpxki, ta có:

$$l^2 = (BC + CA + AB + DA + DB + DC)^2 \leq$$
$$\leq 6(BC^2 + CA^2 + AB^2 + DA^2 + DB^2 + DC^2);(1)$$

Mặt khác, ta lại có:

$$BC^2 + CA^2 + AB^2 + DA^2 + DB^2 + DC^2 =$$
$$= (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB})^2 + (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC})^2 + (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})^2 +$$
$$+ (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OD})^2 + (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OD})^2 + (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD})^2$$
$$= 16R^2 - (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})^2 =$$
$$= 16R^2 - 16OG^2 \leq 16R^2.(2)$$

Từ (1) và (2), ta được: $l^2 \leq 6.16R^2$

hay là: $\frac{l}{R} \leq 4\sqrt{6}$;(3)

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} BC = CA = AB = DA = DB = DC \\ G \equiv O \end{cases}$$

$\Leftrightarrow ABCD$ là một tứ diện đều.

Kết luận. Trong số các tứ diện thì, tỉ số $\frac{l}{R}$ (giữa tổng độ dài các cạnh và bán kính mặt cầu ngoại tiếp) đạt giá trị lớn nhất ở tứ diện đều, và giá trị đó bằng $4\sqrt{6}$.

Nhận xét. 1) Nhìn chung, hầu hết các bạn đã biết sử dụng phương pháp véctơ để giải bài toán này, (chọn tâm O mặt cầu ngoại tiếp tứ diện làm gốc các véctơ).

2) Để đánh giá, ước lượng các đại lượng hình học, mà cụ thể trong bài toán này là độ dài đoạn thẳng, các bạn đã biết sử dụng một B.Đ.T. đại số quen thuộc là B.Đ.T Bunhiacốpxki:

$$(a+b+c+a'+b'+c')^2 \leq$$
$$\leq (1^2+1^2+1^2+1^2+1^2+1^2)(a^2+b^2+c^2+a'^2+b'^2+c'^2)$$

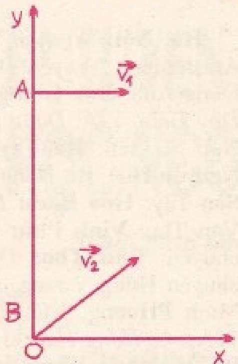
3) Tuy nhiên, về mặt trình bày lời giải thì lời giải nêu trên là ngắn gọn, sáng sủa và theo đúng phong cách của phương pháp tổng hợp hơn cả. Ngoài bạn *Lê Đình Bình*, các bạn sau đây có lời giải tốt.

Hà Nội: *Nguyễn Minh Công*, 11T, Hà Nội - Amsterdam, *Nguyễn Đức Mạnh*, 12A PTTH Cổ Loa, Đông Anh; **Bắc Giang:** *Nguyễn Tiến Mạnh*, 12A, *Vũ Duy Tuấn*, 12A, *Đặng Hoàng Việt Hà*, 12A, PTTHNK Ngô Sĩ Liên; **Hà Tây:** *Bùi Xuân Hảo*, 12A, PTTH Nguyễn Huệ, Hà Đông, *Ngô Đình Trung*, 12T, THCB Sơn Tây; **Hòa Bình:** *Đỗ Quang Dương*, 11T, Hoàng Văn Thụ; **Vĩnh Phú:** *Phạm Hoàng Hà*, 11A, THPT chuyên; **Phú Thọ:** *Đào Mạnh Thắng*, 12A PTTH chuyên Hùng Vương, *Nguyễn Ngọc Kiên*, 9A, THCS Minh PHương, Việt Trì; **Yên Bái:** *Tạ Xuân Hưng*, $11A_2$, *Lê Hồng Hải*, $11A_2$, *Nguyễn Đăng Trung*, $11A_2$, PTTH chuyên Yên Bái; **Hải Dương:** *Nguyễn Dũng*, 11 toán tin, *Đào Chu Mai*, 11Ct, *Nguyễn Quỳnh Điệp*, 11T, *Vũ Văn Tâm*, 11T, *Trần Đại Nghĩa*, 11T, *Phùng Đức Tuấn*, 12T, *Hoàng Xuân Quý*, 12T, PTTH Nguyễn Trãi, *Vũ Đặng Huyền*, 12G, PTTH Tứ Kỳ; **Hải Phòng:** *Nguyễn Bắc Hải*, 12 Tin, *Trịnh Việt Anh*, 11 toán, *Đặng Anh Tuấn*, 12 toán, PTTHNK Trần Phú; **Thái Bình:** *Trịnh Thị Thu Hiền*, 11D PTTH Bắc Kiến Xương; **Ninh Bình:** *Lê Hồng Linh*, 10T, *Vũ Hải Châu*, 12T, *Vũ Hồng Việt*, *Lương Ngọc Anh*, 10T, PTTH Lương Văn Tụy; **Thanh Hóa:** *Lê Ngọc Giang*, 10A, *Lê Huy Bình*,, 11, PTTH Lam Sơn; **Nghệ An:** *Võ Văn Vinh*, $10A_4$, *Trần Nam Dũng*, 12T Phan Bội Châu, *Hồ Sỹ Ngọc*, 11A PTCT ĐHSP Vinh; **Quảng Bình:** *Đỗ Hải Phú*, $12A_1$, *Nguyễn Trung Kiên*, $12A_2$, THCB Lệ Thủy; **Quảng Trị:** *Đào Thị Mỹ Châu*, 10T, *Trần Nhật Hóa*, 11T, *Nguyễn Công Thành*, 11T PTTH Lê Quý Đôn; **Thừa Thiên - Huế:** *Trần Bá ôn*, 11CT, ĐHKH; **Quảng Nam:** *Nguyễn Hùng Đại*, $12A_2$ PTTH Huỳnh Ngọc Huệ, Đại Lộc; **Phú Yên:** *Nguyễn Ngọc Minh*, 11T, LVC; **Khánh Hòa:** *Trần Tuấn Anh*, 10T Lê Quý Đôn, Nha Trang; **Đắc Lắc:** *Lê Thế Tân*, 12T, Nguyễn Du, Buôn Ma Thuột; **TP Hồ Chí Minh:** *Lê Quang Nẫm*, 12T, PTNK ĐHKHTN, *Vũ Đức Phú*, 12Ct PTTH Lê Hồng Phong; **Bà Rịa - Vũng Tàu:** *Lương Anh Hùng*, $11A_1$, THCB Vũng Tầu; **Vĩnh Long:** *Ninh Hồng Phú*, *Cao Minh Quang*, 12T; PTTH chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm; **Hưng Yên:** *Nguyễn Thành Sơn*, 12 tự nhiên, PTTHNK Hưng Yên.

4) Ngoài ra, bạn *Võ Văn Vinh* còn đề xuất và giải đúng bài toán tương tự: Trong số các tứ diện thì, tỉ số $\frac{S_{tp}}{R^2}$ giữa diện tích toàn phần và bình phương bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện đạt giá trị lớn nhất ở tứ diện đều. Cũng có một số bạn khác đề xuất và giải bà toán tổng quát đối với hình đa diện lồi (có n đỉnh). Đáng tiếc, các bạn này đã giải sai vì chưa nắm vững khái niệm và tính chất đặc trưng (cùng sự phân loại các đa diện đều) của các hình đa diện đều nên đã đi đến kết luận sai lầm và vội vàng (xem đường chéo cũng là cạnh !!!) Trừ bạn *Hoàng Xuân Quý* có đề xuất bài toán xét đa diện nội tiếp một hình cầu cùng tỉ số $\frac{l}{R}$ giữa tổng độ dài các cạnh và bán kính mặt cầu ngoại tiếp đa diện đó. Bạn Quý đi đến kết luận: $\frac{l}{R}$ đạt max $= n\sqrt{\frac{n(n-1)}{2}}$ ở đa diện đều (hoặc đa giác đều) trong đó n là số đỉnh, nhưng chỉ là trực giác, không có lí luận chặt chẽ và cụ thể.

NGUYỄN ĐĂNG PHÁT

Bài L1/244. *A đi về hướng Đông với vận tốc không đổi $v_1 = 15km/h$. B ở phía Nam, cách A 6km, đồng thời chuyển động đều với vận tốc $v_2 = 26km/h$, theo hướng tạo với phương ngang một góc α. Khoảng cách nhỏ nhất giữa chúng là 3km.*



1) Xác định hướng đi cụ thể của B (góc α)?

2) Tìm thời gian chuyển động khi A và B cách nhau một khoảng nhỏ nhất.

Hướng dẫn. Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ. Tọa độ của A và B ở thời điểm t: $x_1 = v_1t$; $y_1 = 6$; $x_2 = v_2t\cos\alpha$; $y_2 = v_2t\sin\alpha$. Khoảng cách giữa A và B ở thời điểm t:

$$S^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 =$$
$$= (v_1 - v_2\cos\alpha)^2t^2 + (6 - v_2t\sin\alpha)^2 \qquad (1)$$

Từ điều kiện $\dfrac{dS^2}{dt} = 0$ rút ra

$$t_{\min} = \frac{6v_2\sin\alpha}{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2\cos\alpha} \qquad (2)$$

Thay $t_{\min}$ vào (1) và đặt $S^2 = 3^2 = 9$, rút ra

$$936\cos^2\alpha - 810\cos\alpha = 0.$$

Suy ra $\alpha_1 \approx 90^o$ và $\alpha_2 \approx 30^o$.

Từ đó $t_{min1} \approx 0{,}17h \approx 10$ phút và $t_{min\alpha} \approx 0{,}35h \approx 21$ phút.

Nhận xét. Các em có lời giải đúng và gọn: *Mai Anh Tuấn*, 12A$_2$, PTTH chuyên Lê Quý Đôn, **TP Đà Nẵng**; *Đào Anh Đức* 10A$_3$, PTTH Phan Bội Châu, **Nghệ An**; *Nguyễn Việt Tiến* 12A$_1$, PTTH Vĩnh Linh, **Quảng Trị**; *Đặng Trần Trí*, 10CL, PTTH Lê Hồng Phong, **TP Hồ Chí Minh**; *Trần Mai Sơn Hà*, 12CL, PTTH Năng khiếu **Quảng Bình**; *Lê Thị Như Bích*, 10CT, Quốc học **Huế**; *Phùng Đức Tuấn*, 12CT, PTTH Nguyễn Trãi, **Hải Dương**; *Nguyễn Quang Tùng*, 12 chuyên Hóa, ĐHKHTN, **Đại học Quốc gia Hà Nội**; *Nguyễn Thái Hà*, 12A$_1$, PTTH chuyên Yên Bái, **Yên Bái**; *Nguyễn Minh Vũ*, 11L, PTTHNK Hàn Thuyên, **Bắc Ninh**; *Nguyễn Văn Thôi*, 12A, PTTH Lê Quý Đôn, **Long An**; *Nguyễn Trung Dũng*, 10L, PTTH Lê Hồng Phong, **Nam Định**; *Nguyễn Quang Hưng*, 11CL, PTTHNK Hoàng Văn Thụ, *Trương Quang Trí*, 12A$_1$, THCB Sơn Tịnh 1, **Quảng Ngãi**; *Nguyễn Thanh Tùng*, 10A$_2$, chuyên Hùng Vương, **Phú Thọ**; *Đào Xuân Thân*, 12B, PTTH dân lập Châu Phong, Mê Linh, **Vĩnh Phúc**; *Nguyễn Thanh Tùng*, 10C chuyên **Vĩnh Phúc**; *Trương Hữu Cát*, 10L, THCB Năng khiếu, **Hà Tĩnh**.

MAI ANH

Bài L2/244. *Có một nguồn điện U dao động trong khoảng (240V ÷ 120V), một ngắt K và 5 đèn: 2 đèn R_1 R_2 ghi (120V - 120W); 2 đèn R_3 R_4 ghi (120V - 60W); một đèn R_5. Yêu cầu không đèn nào được sáng quá định mức, hãy:*

1) Mắc một mạch sao cho:

- Khi U = 240V và mở K, chỉ có R_1R_2 sáng đúng mức.

- Khi U = 220V, đóng K, chỉ có R_1 sáng đúng mức. Từ đó tính R_5.

2) Mắc lại mạch sao cho:

- Khi U = 210V, đóng K, chỉ có $R_3R_4R_5$ sáng đúng mức;

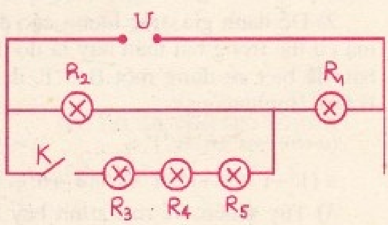
- Khi U = 180V, mở K, chỉ có R_3R_4 sáng đúng mức.

Từ đó tính hiệu điện thế định mức và công suất định mức của R_5.

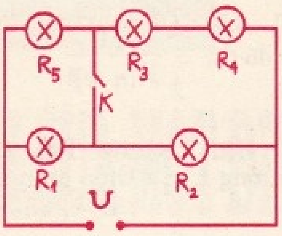
3) Mắc lại mạch, có thêm một biến trở R, sa cho như U thay đổi từ 240V đến 120V, sử dụng R vẫn luôn luôn có r_1, R_2, R_3, R_4 sáng đúng mức. Tính giá trị lớn nhất của R. Tìm điều kiện để cả R_5 cũng sáng đúng mức.

Hướng dẫn giải. Trước hết tính các điện trở R_1, R_2, R_3, R_4 của các đèn (coi như không thay đổi): $R_1 = R_2 = 120\ \Omega$ và $R_3 = R_4 = 240\ \Omega$. Sau đó tìm cách mắc sao cho thỏa mãn được yêu cầu của đề bài, với lưu ý rằng đèn sáng đúng mức khi hiệu điện thế đặt vào nó đúng bằng hiệu điện thế định mức. Chẳng hạn với trường hợp 1, vì hai đền R_1R_2 giống nhau và có hiệu điện thế định mức là 120V, cho nên muốn mắc vào nguồn 220V sao cho R_1R_2 sáng đúng mức thì phải mắc R_1 và R_2 nối tiếp với nhau vào nguồn. Còn 3 bóng R_3, R_4, R_5 còn lại thì mắc thành 1 nhánh thứ hai, nhánh này nối với nhánh R_1R_2 nói trên qua một cái ngắt điện K. Phương án mắc $R_3R_4R_5$ tùy thuộc vào yêu cầu thứ hai : khi U -= 220V và đóng K chỉ có R_1 sáng đúng mức, nghĩa là hiệu điện thế trên R_1 bằng 120V, và do đó phần còn lại (sau khi đóng K) phải có hiệu điện thế bằng 220-120 = 100V, dựa vào đó tính được R_5. Sơ đồ đơn giản nhất là như sau (hình 1).

Khi đó $R_5 = 120\Omega$. Còn sơ đồ khác gần tương tựnhau, chẳng hạn



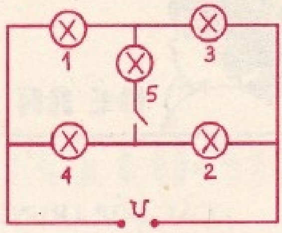
Khi đó $R_5 = 2880\ \Omega$. Nếu mắc R_5 ở đoạn BC còn R_3R_4 ở đoạn AB thì $R_5 = 240\Omega$. Nếu mắc R_3 // R_4 vào hai đầu B, C thì $R_5 = 180\Omega$. Cũng có thể mắc R_3R_5 vào đoạn AB còn R_4 ở đoạn BC thì $R_5 = 240\Omega$. Cuối cùng, ở hình 1 nếu mắc R_5 nối tiếp (R_3 // R_4) thì $R_5 = 480\Omega$. Đó là tất cả các sơ đồ khả dĩ. Sử dụng các giá trị khả dĩ đó của R_5 để xét tiếp trương hợp 2 và 3 và sẽ thấy giá trị nào của R_5 phù hợp với yêu cầu của đề bài, từ đó tính được đáp số cần thiết. Kết quả là:



Trường hợp 2: + Với $R_5 = 120\Omega$, mắc sơ đồ (R_1 // R_2) nt (R_3 // R_4, R_5), tìm được đèn 5 ghi 120V - 60W; Với $R_5 = 120\Omega$, mắc 5 đèn thành mạch cầu (hình 3), tìm được đèn R_5 ghi (30V - 7,5W); đổi chỗ đèn 1 và đèn 5, tìm được đèn R_5 ghi (90V - 67,5W):

+ Với $R_5 = 240\Omega$, mắc sơ đồ (R_1 // R_2) nt (R_3 // R_4 // R_5), tìm được đèn R_5 ghi (120V - 60W).

Trường hợp 3. Sử dụng 3 đèn R_5 vừa tìm được ở trên.



+ Với đèn R_5 (120V - 60W): Mắc (R_1 // R_2 // R_3 // R_4) nt (R // R_5) tìm được $R_{max} = 48\Omega$; U phải bằng 240V.

+ Với đèn R_5 (30V - 7,5W): Mắc như trên. $R_{max} = 40\Omega$ khi K mở. Khi K mở $R_{max} \approx 11\Omega$; U phải bằng 150V.

+ Với đèn R_5 (90V - 67,5W): $R_{max} = 40\Omega$; $U = 210$V.

Nhận xét. Các em có lời giải đúng: *Đào Anh Đức*, 10A3, trường PTTH Phan Bội Châu, **Nghệ An**; *Đặng Trần Trí*, 10CL, PTTH Lê Hồng Phong, **TP Hồ Chí Minh**; *Nguyễn Ngọc Tuấn, 11F chuyên lí, PTTH chuyên Hùng Vương, Việt Trì*, **Phú Thọ**.

MAI ANH

PROBLEMS IN THIS ISSUE

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS.

T1/248. Prove that if $a \geq 4$, $b \geq 5$, $c \geq 6$ and $a^2 + b^2 + c^2 = 90$ then $a + b + c \geq 16$

T2/248. Solve the system of equations:

$$\begin{cases} y^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 0 \\ z^3 - 6y^2 + 12y - 8 = 0 \\ x^3 - 6z^2 + 12z - 8 = 0 \end{cases}$$

T3/248. In the plane, let be given 6 points, no three of them are collinear and the distances between them are distinct numbers. Consider the triangles formed by the segments joining these points. Prove that there exists a segment which is the shortest side of one such triangle and simultaneously the longest side of another such triangle.

T4/248. The altitudes AH, BE and CF of an acuteangled triangle ABC cut again the circumcircle of ABC respectively at M, N and K. Calculate $\dfrac{AM}{AH} + \dfrac{BN}{BE} + \dfrac{CK}{CF}$

T5/248. The incircle of an equilateral triangle ABC touches the sides BC, CA, AB respectively at A', B', C'. Let M be an arbitrary point on the minor arc $B'C'$ and H, K, L be its orthogonal projections respectively on the sides BC, CA, AB. Prove that

$$\sqrt{MH} = \sqrt{MK} + \sqrt{ML}$$

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/248. For each $n \in \mathbf{N}$, let $T(n)$ be the sum of the digits of n, written in decimal system.

1) Prove that

$\alpha T(\beta) + \beta T(\alpha) - 2T(\alpha.\beta) \vdots 9$ (for $\alpha, \beta \in \mathbf{N}$)

2) Calculate $Q = \sum\limits_{k=1}^{1998} T(k)$

T7/248. Prove the equality:

$$(1 - C_n^2 + C_n^4 - ...)^2 + (C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - ...)^2 = 2^n$$

T8/248. Find all positive integers x, y, z satisfying the equation $\sqrt{x + 2\sqrt{3}} = \sqrt{y} + \sqrt{z}$

T9/248. Let M be the point inside a given triangle ABC such that $AMC = 90^\circ$, $AMB = 150^\circ$ and $BMC = 120^\circ$. Let P, Q, R be respectively the circumcenters of the triangles AMC, AMB and BMC. Compare the areas of the triangles PQR and ABC.

T10/248. Let be given a triangle ABC ($BC = a$, $CA = b$, $AB = c$) and let A_1, B_1, C_1 be respectively the points of intersection of the inbisectors of the angles A, B, C with the opposite sides. The lines passing through A, B, C parallel respectively to B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1, by cutting each other, form a triangle $A_2B_2C_2$. Prove that

$$S_{A_2B_2C_2} = \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8R}$$

where R is the radius of the circumcircle of ABC.

ĐỀ RA KÌ NÀY

CÁC LỚP TRUNG HỌC CƠ SỞ

Bài T1/248: Chứng minh rằng nếu $a \geq 4, b \geq 5, c \geq 6$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 90$ thì $a + b + c \geq 16$

TRẦN VĂN VUÔNG
(Hà Nội)

Bài T2/248: Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} y^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 0 \\ z^3 - 6y^2 + 12y - 8 = 0 \\ x^3 - 6z^2 + 12z - 8 = 0 \end{cases}$$

ĐỖ THANH HÂN
(Bạc Liêu)

Bài T3/248: Trên mặt phẳng cho 6 điểm mà khoảng cách của chúng khác nhau từng đôi một và không có 3 điểm nào thẳng hàng. Nối các điểm đó với nhau bằng những đoạn thẳng ta thu được một số tam giác. Chứng minh rằng tồn tại một đoạn thẳng là cạnh nhỏ nhất của tam giác đồng thời là cạnh lớn nhất của một tam giác khác.

TRỊNH TUẤN
(Thanh Hóa)

Bài T4/248: Các đường cao AH, BE và CF của tam giác nhọn ABC cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác đó tại các điểm thứ hai tương ứng M, N, K.

Tính $\dfrac{AM}{AH} + \dfrac{BN}{BE} + \dfrac{CK}{CF}$

NGUYỄN ĐỄ
(Hải Phòng)

Bài T5/248: Cho tam giác đều ABC, đường tròn nội tiếp của tam giác tiếp xúc với 3 cạnh BC, CA, AB lần lượt tại A', B', C'. Gọi M là một điểm bất kì trên cung nhỏ $B'C'$ và H, K, L lần lượt là hình chiếu của M lên các cạnh BC, AC, AB. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{MH} = \sqrt{MK} + \sqrt{ML}$$

PHƯƠNG TỐ TỬ
(Tp Hồ Chí Minh)

CÁC LỚP PHỔ THÔNG TRUNG HỌC

Bài T6/248: Với mỗi $n \in N$, kí hiệu $T(n)$ là tổng các chữ số của n viết trong hệ ghi thập phân.

a) Chứng minh rằng:

$\alpha T(\beta) + \beta T(\alpha) - 2T(\alpha.\beta) \vdots 9$; $(\alpha, \beta \in N)$

b) Tính : $Q = \sum_{k=1}^{1998} T(k)$

ĐOÀN KIM SANG
(Yên Bái)

Bài T7/248: Chứng minh đẳng thức

$$(1 - C_n^2 + C_n^4 - ...)^2 + (C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - ...)^2 = 2^n$$

ở đó $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

ĐOÀN NHƯ TRIỆU
(Hải Dương)

Bài T8/248: Tìm tất cả các số nguyên dương x, y, z thỏa mãn phương trình :

$$\sqrt{x + 2\sqrt{3}} = \sqrt{y} + \sqrt{z}$$

TRẦN DUY HINH
(Quy Nhơn)

Bài T9/248: Giả sử M là điểm nằm trong tam giác ABC sao cho $AMC = 90^o$, $AMB = 150^o$ và $BMC = 120^o$. Gọi P, Q, R là tâm của các đường tròn ngoại tiếp các tam giác AMC, AMB và BMC. Hãy so sánh diện tích của hai tam giác PQR và ABC.

PHẠM NGỌC QUANG
(Thanh Hóa)

Bài T10/248: Cho tam giác ABC ($BC = a$; $CA = b$; $AB = c$). Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là giao điểm của các đường phân giác trong của các góc A, B, C với các cạnh đối diện. Qua A, B, C kẻ các đường thẳng song song với B_1C_1; C_1A_1; A_1B_1 chúng cắt nhau tạo thành tam giác $A_2B_2C_2$. Chứng minh :

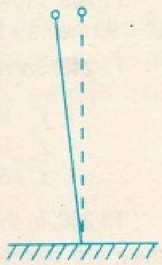
$$S_{A_2B_2C_2} = \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8R}$$

R là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

HỒ QUANG VINH
(Nghệ An)

CÁC ĐỀ VẬT LÍ

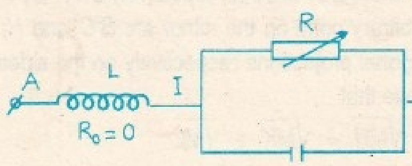
Bài L1/248: Một quả cầu có thể tích $V = 50cm^3$, có khối lượng m = 10g, được gắn vào một sợi dây. Đầu còn lại của sợi dây được gắn với đáy bể đựng chất lỏng. Khối lượng riêng của chất lỏng $D = 1500kg/m^3$. Đẩy cho dây neo quả cầu lệch khỏi phương thẳng đứng 5^o rồi thả tay cho quả cầu dao động. Chiều dài dây neo l = 1m. Trong khi dao động, quả cầu luôn luôn ở trong lòng chất lỏng. Ma sát giữa quả cầu và chất lỏng được bỏ qua. Chứng minh quả cầu dao động điều hòa và lập phương trình dao động.



PHẠM HÙNG QUYẾT
(Hà Nội)

Bài L2/248: Cho mạch điện xoay chiều như hình vẽ với $L = \dfrac{1}{\pi} H$; U_{AB} = 100V. Chứng tỏ rằng ta có thể tìm được một giá trị C để dòng điện hiệu dụng I_A qua R không phụ thuộc R. Tính I_R.

TRẦN TRỌNG HƯNG
(Quảng Ngãi)



PHƯƠNG TÍCH CỦA MỘT ĐIỂM đối với MỘT ĐƯỜNG CÔ-NIC

NGUYỄN ĐẠO PHƯƠNG

Các bạn đã được làm quen với các đường cô-níc qua sách giáo khoa.

Trong bài viết này tôi xin giới thiệu một tính chất khác của ba đường cô-nic đã được các nhà toán học nghiên cứu và ứng dụng. Đó là phương tích của một điểm đối với một đường cô-nic. Ta đã biết khi tâm sai e của ba đường cô-nic tiến tới O thì các đường này suy biến về một đường tròn. Đối với đường tròn $(\mathcal{C})$ tâm O bán kính R, một đường thẳng chuyển động Δ luôn đi qua một điểm cố định M, cắt $(\mathcal{C})$ tại hai điểm A, B, phương tích của điểm M đối với $(\mathcal{C})$ là :

$\wp_M/(\mathcal{C}) = \overline{MA}\,.\,\overline{MB} = MO^2 - R^2$ = không đổi.

$\wp_M/(\mathcal{C})$ là một đại lượng đại số, có giá trị dương, âm, bằng không tùy theo điểm M ở ngoài, trong hoặc ở trên $(\mathcal{C})$.

Vậy trong trường hợp tổng quát, liệu đối với đường cô-nic (Γ) *có phương tích của một điểm cố định* M đối với (Γ) hay không, đại lượng đó là đại lượng nào, vì sao đại lượng này là không đổi đối với M và (Γ) đã chọn.

I. Phương tích của một điểm *M* đối với một đường cô-nic (Γ)

Trên mặt phẳng cho đường cô-nic (Γ), tiêu điểm F, đường chuẩn (D) ứng với F. Δ là một đường thẳng chuyển động luôn qua một điểm cố định M, cắt (Γ) tại A và B, hợp với trục tiêu của cô-nic góc α, $0 \le \alpha \le \pi$ (trục tiêu là đường thẳng qua F vuông góc với (D)). Phương tích của điểm M đối với cô-nic (Γ) là :

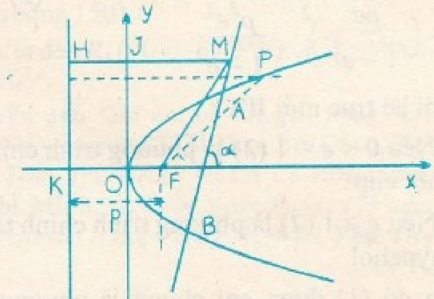
$$\wp_M/(\Gamma) = \overline{MA}\,.\,\overline{MB}\,(1 - e^2\cos^2\alpha) = $$
$$= MF^2 - e^2\overline{MH}^2 = \text{không đổi}$$

e là tâm sai của cô-nic, H là hình chiếu vuông góc của M trên (D). Trong phần tiếp theo ta sẽ chứng minh, với M và (Γ) đã cho, đại lượng $\wp_M/(\Gamma)$ không đổi và

$$\overline{MA}\,.\,\overline{MB}\,(1 - e^2\cos^2\alpha) = MF^2 - e^2\overline{MH}^2$$

II. Phương trình của cô-nic (Γ) đối với tiêu điểm *F* và đường chuẩn *(D)* ứng với *F*

Trên mặt phẳng cho điểm F cố định và đường thẳng (D) cố định không qua F, ta tìm quỹ tích các điểm P sao cho tỉ số khoảng cách từ P đến F và đến (D) bằng một số không đổi.



Gọi I là hình chiếu vuông góc của P trên (D) và e là số không đổi. Ta tìm quỹ tích của P sao cho $\frac{PF}{PI} = e$ = không đổi ($e > 0$) Gọi K là hình chiếu của F trên (D). Đặt $KF = p$. Chọn điểm O trên đường thẳng KF sao cho $\frac{\overline{OF}}{\overline{OK}} = -e$ (như vậy O là điểm quỹ tích vì $\frac{OF}{OK} = e$).

Lập hệ trục tọa độ vuông góc Đề các Oxy, trục hoành Ox chứa KF, chiều dương từ K đến F trục tung Oy vuông góc với Ox tại O.

Từ $\frac{\overline{OF}}{\overline{OK}} = -e$ ta được $\overline{OF} = \frac{pe}{1+e}$ và $\overline{OK} = \frac{-p}{1+e}$ tọa độ của F là $F\left(\frac{pe}{1+e}\,;\,0\right)$, của K là $K\left(\frac{-p}{1+e}\,;\,0\right)$. Gọi x, y là tọa độ của điểm P, ta có $\overline{PI} = -\left(x + \frac{p}{1+e}\right)$ và $PF^2 = \left(x - \frac{pe}{1+e}\right)^2 + y^2$.

Từ $\frac{PF}{PI} = e$ ta được $PF^2 = e^2PI^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{pe}{1+e}\right)^2 + y^2 = e^2\left(x + \frac{p}{1+e}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow (1 - e^2)x^2 - 2pex + y^2 = 0 \qquad (1)$$

(1) là phương trình quỹ tích của P

a) Nếu $e = 1$ (1) $\Leftrightarrow y^2 = 2px$ quỹ tích là một parabol

b) Nếu $0 < e \neq 1$

Tịnh tiến hệ trục tọa độ *Oxy*, lấy $W\left(\frac{pe}{1-e^2}; 0\right)$ làm gốc hệ trục mới *WXY*, công thức tịnh tiến hệ trục là :

$$\begin{cases} x = X + \dfrac{pe}{1-e^2} \\ y = Y \end{cases} \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{X^2}{\left(\dfrac{pe}{1-e^2}\right)^2} + \frac{Y^2}{\dfrac{p^2e^2}{1-e^2}} = 1 \quad (2)$$

Với hệ trục mới *WXY* :

+ Nếu $0 < e < 1$ (2) là phương trình chính tắc của một elip

+ Nếu $e > 1$ (2) là phương trình chính tắc của một hypebol

Do đó (1) được gọi chung là phương trình của ba đường cô-nic (Γ) (theo tâm sai e và tham số tiêu p)

III. Giá trị của $\wp_M/(\Gamma)$

Đường thẳng Δ có một vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{u_\Delta} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$. Phương trình tham số của

$$(\Delta): \begin{cases} x = x_o + t\cos\alpha \\ y = y_o + t\sin\alpha \end{cases} (x_o, y_o \text{ là tọa độ của điểm M})$$

Xét điểm M' chạy trên Δ. Giá trị của $\overline{MM'} = t$ (tham số). Khi M' ở A và ở B ta có $\overline{MA} = t_A$, $\overline{MB} = t_B$.

Tọa độ của và B là nghiệm của hệ :

$(\Gamma_{x,y}) : (1 - e^2)x^2 - 2pex + y^2 = 0$

$$(\Delta): \begin{cases} x = x_o + t\cos\alpha \\ y = y_o + t\sin\alpha \end{cases}$$

Thay giá trị của x, y từ (Δ) vào $(\Gamma_{x,y})$ ta được phương trình bậc hai (ẩn t).

$$(1 - e^2\cos^2\alpha)t^2 + 2[(1 - e^2)(x_o\cos\alpha - pe\cos\alpha) + y_o\sin\alpha]t + (1 - e^2)x_o^2 - 2pex_o + y_o^2 = 0 \quad (3)$$

Vì theo giả thiết (Δ) cắt (Γ) tại hai điểm A, B nên phương trình (3) có hai nghiệm t_A, t_B.

Theo định lí Viét ta được :

$$t_A - t_B = \frac{(1-e^2)x_o^2 - 2pex_o + y_o^2}{1 - e^2\cos^2\alpha}$$

Do đó

$$\overline{MA}.\overline{MB}(1 - e^2\cos^2\alpha) = (1-e^2)x_o^2 - 2pex_o + y_o^2$$

Vậy $\wp_M/(\Gamma) = \overline{MA}.\overline{MB}(1 - e^2\cos^2\alpha) = (1-e^2)x_o^2 - 2pex_o + y_o^2$

Bạn đọc để ý rằng kết quả này tương tự với phương tích của điểm $M(x_o, y_o)$ đối với đường tròn $(\mathscr{C})$:

$(\mathscr{C}) : x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0$ $(A^2 + B^2 - C > 0)$ là $\wp_M/(\mathscr{C}) = x_o^2 + y_o^2 + 2Ax_o + 2By_o + C$

Bây giờ ta chứng minh

$$\wp_M/(\Gamma) = MF^2 - e^2\overline{MH}^2$$

Gọi J là giao điểm của MH với trục Oy. Ta có $\overline{MH} = \overline{MJ} + \overline{JH} = -x_o + \overline{OK} = -x - \frac{p}{1+e}$

Do đó $\overline{MF}^2 - e^2\overline{MH}^2 =$

$$= \left(x_o - \frac{pe}{1+e}\right)^2 + y_o^2 - e^2\left(x + \frac{p}{1+e}\right)^2$$

$$= (1-e^2)x_o^2 - 2pex_o + y_o^2$$

Vậy $\wp_M/(\Gamma) =$

$$= \overline{MA}.\overline{MB}(1 - e^2\cos^2\alpha) = MF^2 - e^2\overline{MH}^2 =$$

$$= (1-e^2)x_o^2 - 2pex_o + y_o^2 = \textit{không đổi}$$

IV. Một vài ứng dụng

a) *Bài toán về tứ giác nội tiếp.* Cho cô-nic (Γ). Qua một điểm M có hai cát tuyến Δ_1 và Δ_2. Hai đường thẳng này cắt (Γ) theo thứ tự ở A, B và C, D. Chứng minh điều kiện cần và đủ để tứ giác $ABCD$ nội tiếp là Δ_1, Δ_2 nghiêng đều trên trục tiêu.

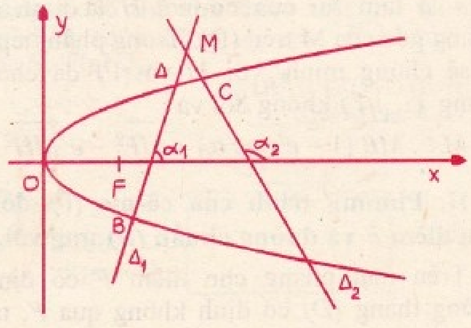
Δ_1, Δ_2 hợp với trục tiêu OF các góc α_1, α_2

Phương tích của giao điểm M đối với (Γ) là :

$$\wp_M/(\Gamma) = \overline{MA}.\overline{MB}(1 - e^2\cos^2\alpha_1) =$$
$$= \overline{MC}.\overline{MD}(q - e^2\cos^2\alpha_2) \quad (4)$$

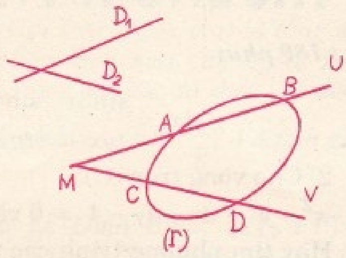
Nếu tứ giác ABCD nội tiếp thì $\overline{MA}.\overline{MB} = \overline{MC}.\overline{MD}$, do đó $\cos^2\alpha_1 = \cos^2\alpha_2$.

Từ đó ta được $\alpha_1 = \alpha_2$ hoặc $\alpha_1 = \pi - \alpha_2$. Loại bỏ trường hợp $\alpha_1 = \alpha_2$ ta được. $\alpha_1 = \pi - \alpha_2$. Điều ngược lại cũng đúng.



Vậy tứ giác $ABCD$ nội tiếp $\Leftrightarrow$ Δ_1, Δ_2 nghiêng đều trên trục tiêu.

b) *Bài toán Newton.* Cho cô-nic (Γ) và hai đường thẳng cắt nhau D_1, D_2. Một góc MUV chuyển động sao cho cạnh MU và cạnh MV cắt (Γ) và sao cho MU // D_1 ; MV // D_2. Gọi các giao điểm của MU, MV với (Γ) là A ; B và C ; D. Chứng minh $\dfrac{\overline{MA}\,.\,\overline{MB}}{\overline{MC}\,.\,\overline{MD}}$ = không đổi.



D_1 và D_2 hợp với trục tiêu các góc α_1 và α_2 không đổi.

Ta có :

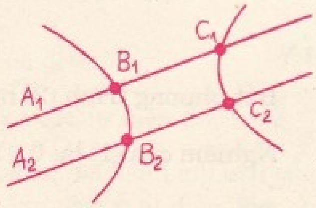
$$\wp_M/(\Gamma) = \overline{MA}\,.\,\overline{MB}(1 - e^2\cos^2\alpha_1) =$$
$$= \overline{MC}\,.\,\overline{MD}(1 - e^2\cos^2\alpha_2)$$

Do đó

$$\frac{\overline{MA}\,.\,\overline{MB}}{\overline{MC}\,.\,\overline{MD}} = \frac{1 - e^2\cos^2\alpha_2}{1 - e^2\cos^2\alpha_1} = \textit{không đổi}$$

c) *Bài toán Mac-Laurin* Cho cô-nic (Γ) và hai điểm cố định A_1, A_2 ; Δ_1 và Δ_2 là hai đường thẳng chuyển động luôn song song với nhau, Δ_1 qua A_1, Δ_2 qua A_2.

Δ_1, Δ_2 cắt (Γ) tại B_1, C_1 và B_2, C_2. Chứng minh $\dfrac{\overline{A_1B_1}\,.\,\overline{A_1C_1}}{\overline{A_2B_2}\,.\,\overline{A_2C_2}}$ = không đổi.



Δ_1, Δ_2 cùng hợp với trục tiêu góc α.

Ta có :

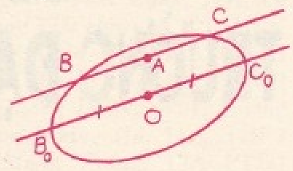
$$\wp_{A_1}/(\Gamma) = \overline{A_1B_1}\,.\,\overline{A_1C_1}(1 - e^2\cos^2\alpha)$$
$$\wp_{A_2}/(\Gamma) = \overline{A_2B_2}\,.\,\overline{A_2C_2}(1 - e^2\cos^2\alpha)$$

Vì $\wp_{A_1}/(\Gamma)$; $\wp_{A_2}/(\Gamma)$ là các số không đổi

nên $\dfrac{\overline{A_1B_1}(1 - e^2\cos^2\alpha)}{\overline{A_2B_2}\,.\,\overline{A_2C_2}(1 - e^2\cos^2\alpha)}$ = không đổi

do đó $\dfrac{\overline{A_1B_1}\,.\,\overline{A_1C_1}}{\overline{A_2B_2}\,.\,\overline{A_2C_2}}$ = không đổi.

d) *Bài toán C.Michel + Cliffort* Cho cô-nic (Γ) có tâm là O. A là một điểm cố định. Một đường thẳng Δ chuyển động luôn qua A cắt (Γ) ở B và C ; d là một đường kính của (Γ) song song với Δ cắt (Γ) ở B_o và C_o. Chứng minh $\dfrac{\overline{AB}\,.\,\overline{AC}}{\overline{OB}_o^2}$ = không đổi.

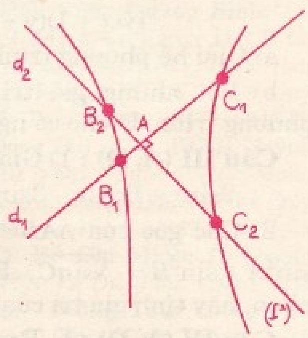


Δ và d cùng hợp với trục tiêu góc α. Ta có :

$$\wp_A/(\Gamma) = \overline{AB}\,.\,\overline{AC}(1 - e^2\cos^2\alpha)$$
và $\wp_O/(\Gamma) = \overline{OB}_o\,.\,\overline{OC}_o(1 - e^2\cos^2\alpha)$

Do đó $\dfrac{\overline{AB}\,.\,\overline{AC}}{\overline{OB}_o^2} = -\dfrac{\wp_A/(\Gamma)}{\wp_O/(\Gamma)}$ = không đổi

e) *Bài toán Michel.* Cho cô-nic (Γ), tâm O, không phải là hypebol vuông góc, A là một điểm cố định, d_1 và d_2 là hai đường thẳng chuyển động luôn qua A và luôn vuông góc với nhau cắt (Γ) theo thứ tự ở B_1 ; C_1 và B_2 ; C_2. Chứng minh



$$\frac{1}{\overline{AB}_1\,.\,\overline{AC}_1} + \frac{1}{\overline{AB}_2\,.\,\overline{AC}_2} = \text{không đổi.}$$

Ta có $\wp_A/(\Gamma) = \overline{AB}_1\,.\,\overline{AC}_1(1 - e^2\cos^2\alpha)$ (1) với α là góc hợp bởi d_1 và trục tiêu.

Do $d_1 \perp d_2$ nên d_2 hợp với trục tiêu góc $\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)$, ta có :

$$\wp A(\Gamma) = \overline{AB}_2\,.\,\overline{AC}_2(1 - e^2\sin^2\alpha) \text{ (2)}$$

Từ (1) và (2) ta được :

$$\frac{1}{\overline{AB}_1\,.\,\overline{AC}_1} + \frac{1}{\overline{AB}_2\,.\,\overline{AC}_2} =$$
$$= \frac{1 - e^2\cos^2\alpha + 1 - e^2\sin^2\alpha}{\wp A/(\Gamma)} = \frac{2 - e^2}{\wp A/(\Gamma)} =$$
= không đổi

Ta được đpcm với điều kiện $e \neq \sqrt{2}$ tức (Γ) không phải là hypebol vuông góc.

ĐỀ THI TUYỂN SINH MÔN TOÁN TRƯỜNG ĐẠI HỌC NGOẠI THƯƠNG HÀ NỘI -1997

Thời gian làm bài : 180 phút

Câu I (A, D) : Cho hàm số :

$$x^3 + 3x^2 + (m+1)x + 4m$$

1) Với những giá trị nào của m thì hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng (-1, 1).

2) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số ứng với $m = -1$.

Câu II (A, D) : 1) Với những giá trị nào của m thì hệ bất phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} x^2 - 2x + 1 - m \le 0 \\ x^2 - (2m+1)x + m^2 + m \le 0 \end{cases}$$

2) Cho hệ phương trình :

$$\begin{cases} x + y + x^2 + y^2 = 8 \\ xy(x+1)(y+1) = m \end{cases}$$

a) Giải hệ phương trình khi $m = 12$.

b) Với những giá trị nào của m thì hệ phương trình đã cho có nghiệm.

Câu III (A, D) : 1) Giải phương trình:

$$9\sin x + 6\cos x - 3\sin 2x + \cos 2x = 8$$

2) Các góc của ΔABC thỏa mãn hệ thức: $\sin^2 A + \sin^2 B = \sqrt[9]{\sin C}$. Biết rằng các góc A nhọn, hãy tính giá trị của góc C.

Câu IV (A, D) : 1) Tìm họ nguyên hàm của hàm số:

$$f(x) = \frac{\sin 3x \, . \, \sin 4x}{tgx + cotg2x}$$

2) Cho vòng tròn (C):

$x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$ và điểm $A(3, 5)$.

Hãy tìm phương trình các tiếp tuyến kẻ từ A đến vòng tròn. Giả sử các tiếp tuyến tiếp xúc với vòng tròn tại M và N; hãy tính độ dài đoạn MN.

Câu V(A). 1) Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}}$$

2) Giả sử x, y, z là những số dương thay đổi và thỏa mãn điều kiện:

$$x + y + z = 1$$

Hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{x}{x+1} + \frac{y}{y+1} + \frac{z}{z+1}$$

Câu V(D): 1) Giải phương trình :

$$(2 - \sqrt{3})^x + (2 + \sqrt{3})^x = 14.$$

2) Chứng minh rằng trong mọi ΔABC ta luôn có:

$$0 < \sin A + \sin B + \sin C - \sin A \sin B - \sin B \sin C - \sin C \sin A < 1$$

ĐÁP ÁN

Câu I (2 điểm)

$$y = x^3 + 3x^2 + (m+1)x + 4m$$

1) Ta phải có $y' = 3x^2 + 6x + m + 1 \le 0$

$$\forall x \in (-1, 1) \Leftrightarrow \begin{cases} f(1) \le 0 \\ f(-1) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \le -10 \\ m \le 2 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow m \le -10$

2) $m = -1 \Rightarrow y = x^3 + 3x^2 - 4$. (Bạn đọc tự giải)

Câu II (2 điểm)

1) Nghiệm của bất phương trình thứ nhất là

$$1 - \sqrt{m} \le x \le 1 + \sqrt{m} \quad (m \ge 0)$$

nghiệm của bất phương trình thứ hai là:

$$m \le x \le m + 1$$

Hệ phương trình có nghiệm khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} m \le 1 + \sqrt{m} & (1) \\ m + 1 \ge 1 - \sqrt{m} & (2) \\ m \ge 0 & (3) \end{cases}$$

Bất phương trình (2) hiển nhiên thỏa mãn.

Nghiệm của (1) là: $0 \le m \le \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

Vậy đáp số của bài toán là: $0 \le m \le \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

2) a) $\begin{cases} x + y + x^2 + y^2 = 8 \\ xy(x+1)(y+1) = 12 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(x+1) + y(y+1) = 8 \\ x(x+1).y(y+1) = 12 \end{cases}$$

Đặt $\begin{cases} x(x+1) = u \\ y(y+1) = v \end{cases}$ thì hệ đã cho trở thành

$$\begin{cases} u + v = 8 \\ u \, . \, v = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u = 2 \\ v = 6 \end{cases} \\ \begin{cases} u = 6 \\ v = 2 \end{cases} \end{array} \right.$$

Với $\begin{cases} x(x+1) = 2 \\ y(y+1) = 6 \end{cases} \Rightarrow$ 4 nghiệm (1, 2), (1, -3), (-2, 2), (-2, -3).

Với $\begin{cases} x(x+1) = 6 \\ y(y+1) = 2 \end{cases} \Rightarrow$ 4 nghiệm (2, 1); (2, -2); (-3, 1); (-3, -2).

Hệ có tất cả 8 nghiệm.

b) Với $u = x(x+1)$, $v = y(y+1)$

Ta có: $u \geq -\frac{1}{4}\ \forall x$, $v \geq -\frac{1}{4}\ \forall y$

$\begin{cases} u + v = 8 \\ u.v = m \end{cases} \Rightarrow u$ và v là nghiệm của phương trình bậc hai: $f(t) = t^2 - 8t + m = 0(*)$

Hệ đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow$ phương trình (*) có 2 nghiệm đều lớn hơn hoặc bằng $-\frac{1}{4}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ f(-\frac{1}{4}) \geq 0 \\ \frac{S}{2} > -\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16 - m \geq 0 \\ \frac{33}{16} + m \geq 0 \\ 4 > -\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{33}{16} \leq m \leq 16$$

Câu III (2 điểm)

1) $9\sin x + 6\cos x - 3\sin 2x + \cos 2x = 8$

$\Leftrightarrow 9\sin x + 6\cos x - 6\sin x\cos x + 1 - 2\sin^2 x = 8$

$\Leftrightarrow 9\sin x + 6\cos x - 6\sin x\cos x - 2\sin^2 x - 7 = 0$

$\Leftrightarrow 6\cos x - 6\sin x\cos x + 2\sin x - 2\sin^2 x + 7\sin x - 7 = 0$

$\Leftrightarrow 6\cos x(1 - \sin x) + 2\sin x(1 - \sin x) - 7(1 - \sin x) = 0$

$\Leftrightarrow (1 - \sin x)(6\cos x + 2\sin x - 7) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \sin x = 1 & (1) \\ 2\sin x + 6\cos x = 7 & (2) \end{array}\right.$

Hiển nhiên (2) vô nghiệm. Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x = k\pi$.

2) Ta chứng minh $C = 90^o$. Thật vậy

a) Giả sử $C < 90^o$. Khi đó:

$\sin^2 A + \sin^2 B = \frac{1 - \cos 2A}{2} + \frac{1 + \cos 2B}{2}$

$= 1 - \frac{1}{2}[\cos 2A + \cos 2B] =$

$1 - \cos(A+B).\cos(A-B)$

$= 1 + \cos C . \cos(A-B) > 1 > \sqrt[9]{\sin C}$ vô lí.

$(\cos(A - B) > 0$ do $-90^o < A - B < 90^o)$.

b) Giả sử $C > 90^o$. Khi đó:

$\cos C < 0 \Rightarrow \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} > 0 \Rightarrow a^2 + b^2 < c^2$

$\Rightarrow \sin^2 A + \sin^2 B < \sin^2 C < \sqrt[9]{\sin C}$ vô lí.

Vậy $C = 90^o$.

Câu IV (2 điểm)

1) Chú ý rằng: $\operatorname{tg}x + \operatorname{cotg}2x = \frac{1}{\sin 2x}$

Vậy $f(x) = \sin 2x . \sin 3x . \sin 4x$

$= \frac{1}{2}[\cos x - \cos 5x] . \sin 4x$

$= \frac{1}{2}\sin 3x . \cos x - \frac{1}{2}\cos 5x\sin 4x$

$= \frac{1}{4}[\sin 5x + \sin 3x] - \frac{1}{4}[\sin 9x - \sin x]$

$= \frac{1}{4}\sin x + \frac{1}{4}\sin 3x + \frac{1}{4}\sin 5x - \frac{1}{4}\sin 9x$

Vậy họ nguyên hàm của $f(x)$ là:

$$F(x) = -\frac{1}{4}\cos x - \frac{1}{12}\cos 3x - \frac{1}{20}\cos 5x + \frac{1}{36}\cos 9x + C$$

2) Phương trình đường tròn C có dạng:

$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$ là phương trình đường tròn có tâm $I(-1, 2)$ và bán kính $R = 3$

Gọi Δ là đường thẳng đi qua A (3, 5) và có hệ số góc bằng k. Phương trình Δ là

$$y = k(x - 1) + 5 \Leftrightarrow kx - y + 5 - 3k = 0$$

Đường thẳng Δ tiếp xúc với ( ) khi và chỉ khi $d(I, \Delta) = 3$. Tức là:

$$\frac{|-k - 2 + 5 - 3k|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 3$$

$\Leftrightarrow |-4k + 3| = 3\sqrt{k^2 + 1}$

$\Leftrightarrow 16k^2 - 24k + 9 = 9k^2 + 9$

$\Leftrightarrow 7k^2 - 24k = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = 0 \\ k = \frac{24}{7} \end{array}\right.$

Vậy các phương trình tiếp tuyến cần tìm là:

* $y = 5 \quad (k = 0)$
* $\frac{24}{7}x - y - \frac{37}{7} = 0 \quad (k = \frac{24}{7})$

Tính độ dài MN: Ta có $MN \perp IA$.

Gọi H là giao điểm của MN với IA

Ta có: $MN = 2.MH = 2.\frac{MI.MA}{IA} = 2 . \frac{3.4}{5} = \frac{24}{5}$

Câu V (A, 2 điểm)

1) Áp dụng: với $M, N > 0$; $\frac{M}{N} < 1$ thì

$$\frac{M}{N} < \frac{M + k}{N + k}\ \forall k > 0$$

Ta có: $\frac{a}{a+b} < \frac{a+c}{a+b+c}$; $\frac{b}{b+c} < \frac{b+a}{b+c+a}$; $\frac{c}{c+a} < \frac{c+b}{c+a+b}$

Cộng từng vế của ba bất đẳng thức trên lại, ta có :

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < 2$$

Mặt khác :

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} = \sqrt{\frac{a^2}{a(b+c)}} = \frac{a}{\sqrt{a(b+c)}} \geq$$

$$\geq \frac{a}{\frac{a+b+c}{2}} = \frac{2a}{a+b+c}$$

Tương tự: $\sqrt{\frac{b}{c+a}} \geq \frac{2b}{a+b+c}$

$$\sqrt{\frac{c}{a+b}} \geq \frac{2c}{a+b+c}$$

Từ đó $\Rightarrow \sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > 2$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ điều phải chứng minh.

2) Trước hết ta chứng minh với $a, b, c > 0$ thì $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 9$ và dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Thật vậy :

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) =$$

$$= 3 + \left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right) + \left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right) + \left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right) \geq 9$$

Từ đó: áp dụng với $a = x + 1$, $b = y + 1$, $c = z + 1$ ta có:

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} \geq \frac{9}{(x+1)+(y+1)+(z+1)} = \frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow -\left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1}\right) \leq -\frac{9}{4}$$

Ta có: $P = \frac{x}{x+1} + \frac{y}{y+1} + \frac{z}{z+1} =$

$$= \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) + \left(1 - \frac{1}{y+1}\right) + \left(1 - \frac{1}{z+1}\right)$$

$$= 3 - \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1}\right) \leq 3 - \frac{9}{4} = \frac{3}{4}$$

Ta đã chứng minh được $P \leq \frac{3}{4}$, dấu bằng xảy ra khi $x = y = z = \frac{1}{3}$. Vậy $P_{\max} = \frac{3}{4}$ đạt được khi $x = y = z = \frac{1}{3}$.

Câu V (D, 2 điểm)

1) Giải $(2-\sqrt{3})^x + (2+\sqrt{3})^x = 14$

Đặt $(2+\sqrt{3})^x = t \Rightarrow (2-\sqrt{3})^x = \frac{1}{t}$

$$\Rightarrow t^2 + \frac{1}{t} = 14 \Rightarrow t^2 - 14t + 1 = 0$$

$$\Rightarrow t_{1,2} = 7 \pm \sqrt{48} = (2 \pm \sqrt{3})^2$$

với $(2+\sqrt{3})^x = (2+\sqrt{3})^2 \Rightarrow x = 2$

với $(2+\sqrt{3})^x = (2-\sqrt{3})^2 \Rightarrow x = -2$.

2) Hiển nhiên rằng:

$$\sin A + \sin B - \sin A\sin B - \sin B\sin C - \sin C\sin A =$$

$$= \sin A(1-\sin B) + \sin B(1-\sin C) + \sin C(1-\sin A) > 0$$

Mặt khác, từ:

$$(1-\sin A)(1-\sin B)(1-\sin C) \geq 0 \Rightarrow$$

$$1 - \sin A - \sin B - \sin C + \sin A\sin B + \sin B\sin C + \sin C\sin A - \sin A\sin B\sin C \geq 0$$

$$\Rightarrow \sin A + \sin B + \sin C - \sin A\sin B - \sin B\sin C - \sin C\sin A \leq 1 - \sin A\sin B\sin C < 1$$

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI ...

(Tiếp theo trang 24)

...theo nhận xét trên. Điều này dẫn đến mâu thuẫn, do đó không tồn tại đa thức bậc nhất thỏa mãn đề bài.

Giả sử có đa thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ với $a, b, c \in Q$ thỏa mãn

$f(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9}) = 3 + \sqrt[3]{9}$ thì

$(3a+b)\sqrt[3]{3} + (a+b-1)\sqrt[3]{9} + 6a + c - 3 = 0.$

Theo nhận xét trên phải có $3a + b = 0$, $a + b - 1 = 0$ và $6a + c - 3 = 0$ suy ra $a = -\frac{1}{2}$, $b = \frac{3}{2}$, $c = 6$. Vậy tồn tại duy nhất đa thức bậc hai

$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 6$ thỏa mãn đề bài.

Bài 5. Giả thiết cho $n \geq 7$ và $2 \leq k < n$. Ta có:

$k^n > 2n^k \Leftrightarrow n\ln k > \ln 2 + k\ln n$ (1)

Xét hàm số $f(x) = n\ln x - x\ln n$ trên $(1, \infty)$.

Tính $f'(x) = \frac{n}{x} - \ln n$ nên $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{n}{\ln n}$ và $f(x)$ đồng biến trong khoảng $\left(1, \frac{n}{\ln n}\right)$, $f(x)$ nghịch biến trong khoảng $\left(\frac{n}{\ln n}, \infty\right)$. Do điều kiện $2 \leq k \leq n - 1$ nên hàm số $f(x)$ trên $[2, n - 1]$ đạt giá trị nhỏ nhất tại một trong hai đầu mút của tập xác định.

Để chứng minh (1) chỉ cần chứng minh:

$f(2) > \ln 2$ và $f(n-1) > \ln 2$.

a) $f(2) > \ln 2 \Leftrightarrow n\ln 2 - 2\ln n > \ln 2 \Leftrightarrow 2^{n-1} > n^2$ với $n \geq 7$. Điều này dễ dàng chứng minh bằng quy nạp.

b) $f(n-1) > \ln 2 \Leftrightarrow n\ln(n-1) > (n-1)\ln n + \ln 2 \Leftrightarrow (n-1)^n > 2n^{n-1}$.(3).

Đặt $n - 1 = t \geq 6$ thì (3) trở thành

$t^{t+1} > 2(t+1)^t \Leftrightarrow t > 2\left(1+\frac{1}{t}\right)^t$.

Ta đã biết $\left(1+\frac{1}{t}\right)^t < 3$ nên $2\left(1+\frac{1}{t}\right)^t < 6 \leq t$. Vậy (3) đúng. Từ (a) và (b) suy ra (1) đúng.

Bài 6. Xem bài 6 bảng A.

ĐẶNG HÙNG THẮNG - NGUYỄN VIỆT HẢI

MAPLE với TOÁN PHỔ THÔNG

PHẠM HUY ĐIỂN - TẠ DUY PHƯỢNG
(Viện toán học - Hà Nội)

CHO đến rất gần đây, việc sử dụng các công cụ toán học để giải quyết các vấn đề của thực tiễn vẫn còn bị hạn chế nhiều bởi những khó khăn về phương diện tính toán. Việc tìm các lời giải số cho các bài toán trong giải tích toán học cũng như các tính toán trong đại số và lí thuyết số hiện đại là những vấn đề nan giải ngay cả đối với những người làm toán chuyên nghiệp. Nó đòi hỏi phải biết làm việc với các máy tính lớn và phải thông thạo các ngôn ngữ lập trình. Do những thiếu thốn về phương diện tính toán, trong những năm trước đây, việc nghiên cứu và giảng dạy toán ở nước ta (cả ở bậc phổ thông lẫn đại học) chủ yếu tập trung trên phương diện lí thuyết.

Tình hình đã thực sự đổi khác trong vài năm qua. Cùng với những thành tựu tuyệt vời trong lĩnh vực công nghệ thông tin, người ta đã xây dựng được những bộ chương trình tính toán mang tính vạn năng, mà nhờ đó việc lấy tích phân, vẽ đồ thị, giải phương trình và rất nhiều công việc phức tạp khác được thực hiện một cách dễ dàng bằng những câu lệnh đơn giản theo ngôn ngữ thông thường, chứ không phải bằng những bộ chương trình nặng nề, cồng kềnh như trước đây. MAPLE là một trong những công cụ vạn năng ấy. Với khả năng tính toán và biểu diễn hoàn hảo, MAPLE hiện đang hỗ trợ đắc lực cho công tác giảng dạy toán và tính toán thực hành trong các trường đại học và trung học tiên tiến trên thế giới.

Trong bài này, chúng tôi sẽ giới thiệu với các bạn đôi nét về chương trình này và đưa ra một số gợi ý trong việc sử dụng nó trong học toán. MAPLE là sản phẩm phần mềm do một nhóm các nhà khoa học Canada và Đức làm ra với mục đích giải quyết mọi công việc liên quan đến tính toán : từ các phép tính số học, đại số (kể cả tính toán hình thức) đến các tính toán vi tích phân, thống kê, vẽ đồ thị...

Một trong những ưu điểm nổi bật của MAPLE là rất dễ sử dụng : không đòi hỏi người dùng phải biết gì nhiều về tin học và lập trình, mà chỉ cần nắm vững các khái niệm toán học. Các câu lệnh của MAPLE rất gần với ngôn ngữ toán học thông thường cho nên bạn sẽ thấy việc tính toán cao cấp cũng dễ dàng như đánh máy chữ hoặc bấm máy tính bỏ túi.

Sau khi nạp chương trình MAPLE vào máy của mình và khởi động cho chương trình làm việc, sẽ xuất hiện dấu "[>", và bạn đã có thể sử dụng MAPLE. Muốn tính gì, bạn hãy lệnh cho máy bằng cách nhập số liệu từ bàn phím (số liệu này sẽ hiện trên màn hình sau dấu "[>" với phông chữ màu đỏ) và kết thúc dòng lệnh bằng dấu chấm phẩy ";" rồi ấn phím "Enter", máy sẽ thực hiện tính toán và bạn sẽ có ngay đáp số (bằng dòng chữ màu xanh lam).

Thí dụ : Muốn tính 97 giai thừa bạn chỉ cần gõ trên bàn phím 97!, sau đó đánh dấu ";" trên màn hình sẽ hiện dòng lệnh

[> **97!** ;

Sau khi ta ấn phím "Enter", máy sẽ cho ra đáp số

961927596824821198533284259495636987123438139191729761581044773193337456124818754988058791755890726512612841896796781676470678323200000 0000000000000000

Sau đáp số của lệnh trên, máy tự động hiện tiếp dấu "[>" để bạn lại tiếp tục làm các tính toán khác. Thí dụ, ta tiếp tục tối giản phân số $\frac{224485148514851 4627}{811881188118811 8000}$ (Vô địch Anh, 1986) bằng lệnh :

[>2244851485148514627/8118811881188118000 ;

$$\frac{553}{2000}$$

I. MAPLE VÀ SỐ HỌC

1. Tính toán với các số nguyên

MAPLE giúp bạn rất đắc lực trong tính toán và giải quyết các bài toán về số tự nhiên và số nguyên, thí dụ như phân tích một số lớn ra thừa số nguyên tố, tìm USCLN, BSCNN của các số, giải phương trình trên tập số nguyên, phương trình truy hồi, tính tổng (hữu hạn và vô hạn)... Với mỗi một loại bài toán, bạn chỉ cần cho máy **một lệnh** là nó sẽ giải quyết vấn đề một cách trọn vẹn.

Ta hãy xét một vài thí dụ :

1) Muốn phân tích một số ra thừa số nguyên tố ta dùng lệnh **ifactor**.

Thí dụ : Phân tích số 1000000000000000000000000000001 ra thừa số nguyên tố :

[> **ifactor** (1000000000000000000000000000001) ;

(11)(9090909090909090909090909091)

2) Muốn tìm ước số chung lớn nhất của các số A và B ta dùng lệnh **gcd(A, B)**. *Thí dụ,* tìm ước số chung lớn nhất của 2 số $2^{1964} - 1$ và $2^{1996} - 1$: [> **gcd(2^1964 - 1, 2^1996 - 1) ;**

15

Thí dụ này hay ở chỗ : hai số $2^{1964} - 1$ và $2^{1996} - 1$ rất lớn (khoảng 600 chữ số), tuy nhiên, nhờ MAPLE, chỉ cần một giây là ta tìm được USCLN của chúng.

3) Để tìm nghiệm nguyên của phương trình bạn hãy dùng lệnh **isolve (7*x^2 + 13*y^2 = 1820) ;**

{x = 13, y = 7}, {x = 13, y = -7}, {y = -7, x = -13}, {y = 7, x = -13}

2. Tính toán với các số thập phân

Để tính giá trị của một biểu thức hoặc bằng một số M nào đó với độ chính xác n, ta chỉ cần dùng một lệnh evalf (M, n)

Thí dụ : Tính giá trị của $\sqrt{2}$ chính xác đến 50 chữ số thập phân

[> evalf (sqrt (2) , 50) ;

1.4142135623730950488016887242096980785696718753769

Thí dụ : Tính giá trị của $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ chính xác đến 20 chữ số thập phân

[> evalf (sin (Pi / 12) , 20 ;

.25881904510252076235

Năm 1946 và 1947 Feguxơn và Rensơ đã tính được số π với 808 chữ số thập phân. Dùng MAPLE, bạn có thể tính số π chính xác đến 15000 chữ số thập phân trong vòng một phút !

3. Tính toán với các biểu thức số học

Muốn tính một biểu thức số học nào đó, bạn chỉ cần nhập biểu thức đó từ bàn phím và ra lệnh cho máy tính nó bằng cách đánh dấu ";" sau biểu thức và gõ "Enter".

Thí dụ : (HS giỏi cấp 2 miền Bắc, lần thứ mười, 1970 - 1971)

Rút gọn : $\dfrac{2^{19}27^3 + 15 \cdot 4^9 9^4}{6^9 2^{10} + 12^{10}}$

[> 2^19*27^3 + 15*4^9*9^4) / (6^9*2^10 + 12^10) ;

$$\frac{1}{2}$$

Chú ý : Phép cộng (+) và phép trừ (-) và thứ tự thực hiện các phép tính giống như các quy ước thông thường ta đã học. Phép nhân được kí hiệu bởi dấu (*), phép chia được kí hiệu bởi dấu (/), phép lũy thừa được kí hiệu bởi dấu mũ (^), phép khai căn thức bậc hai được kí hiệu bằng **sqrt** (.). Số π được kí hiệu là **Pi**, nhưng số **e** không có kí hiệu riêng (như ta vẫn dùng) mà chỉ được xem là một giá trị của hàm số mũ tại điểm 1 (tức là **exp (1)**). Tính toán chính xác các phép toán số học *với các kí hiệu hình thức* là khả năng mạnh có tính nguyên tắc của MAPLE. Các phép chia và khai căn, các hằng số toán học trong tính toán không bị đổi sang các số thập phân gần đúng. Khả năng này cho phép tránh được sai số trong quá trình tính toán.

Thí dụ : Biểu thức $\dfrac{2^3(\sqrt{3}-\pi)}{(3^2+4 \cdot 5)(\log_2 3 - e)}$ không bị đổi sang số thập phân mà vẫn giữ nguyên giá trị đúng của nó (máy chỉ tính : $2^3 = 8$, $3^2 + 4.5 = 29$, $\log_2 3 = \frac{ln3}{ln2}$).

[(2^3* (sqrt(3) - Pi)) / ((3^2 + 4*5) * (log [2] (3) - exp (1))) ;

$$\frac{8(\sqrt{3}-\pi)}{29\left(\frac{ln3}{ln2} - e\right)}$$

Tuy nhiên, MAPLE có đầy đủ khả năng tính giá trị xấp xỉ của biểu thức này dưới dạng số thập phân với độ chính xác bất kì, bằng lệnh **evalf (", n)** (tính giá trị của biểu thức trên đây chính xác tới n chữ số thập phân), thí dụ, $n = 60$:

[> evalf (" , 60) ;

.343097589902511600415009700097457974322527419679610299937935 2

II. MAPLE VÀ ĐẠI SỐ

Trong đại số, bạn có thể nhờ MAPLE phân tích đa thức thành nhân tử, giải các phương trình, bất phương trình, hệ phương trình và hệ bất phương trình. .. Mặc dù MAPLE chỉ cho đáp số, nhưng nó sẽ gợi ý cho bạn cách giải hoặc kiểm tra kết quả.

1. Tính toán với các biểu thức đại số

Thí dụ : (Thi vào 10 Chuyên Toán, ĐH Tổng hợp Hà Nội, 1991 - 1992, vòng 2) Phân tích đa thức $(x-y)^5 + (y-z)^5 + (z-x)^5$ sau thành nhân tử

[> factor ((x - y)^5 + (y - z)^5 + (z -x)^5) ;

$-5(y-z)(z-x)(x-y)(x^2 - xy - zx + y^2 + z^2 - yz)$

Muốn đơn giản các biểu thức toán học cồng kềnh ta dùng lệnh **symplify** : *Thí dụ :* (HS Giỏi cấp 2 miền Bắc, vòng 1, 1961 - 1962)

Đơn giản biểu thức

$$\frac{1}{a(a-b)(a-c)} + \frac{1}{b(b-a)(b-c)} + \frac{1}{c(c-a)(c-b)}$$

[> symplify (1 / (a*(a - b)*(a - c)) + 1 / (b*(b - a) * (b - c)) + 1 / (c* (c - a) * (c - b)))

$$\frac{1}{abc}$$

2. Giải phương trình và bất phương trình

Bạn có thể dùng MAPLE để giải các phương trình, bất phương trình, hệ phương trình và hệ bất phương trình (có hệ số bằng số hoặc bằng chữ). Muốn giải phương trình ta dùng lệnh **solve (f (x) = g (x))**, trong đó $f(x) = g(x)$ là phương trình cần giải, còn x là ẩn cần tìm.

Thí dụ : (HS Giỏi toán lớp 9, Hà Nội, 1994 - 1995)

Giải phương trình :

$$(x+2)^2 + (x+3)^3 + (x+4)^4 = 2$$

[> solve ((x + 2) ^ 2 + (x + 3) ^ 3 + (x + 4) ^ 4 = 2) ;

$$\{x=-5\}, \{x=-3\}, \{x = -\frac{9}{2} + \frac{1}{5}\sqrt{5}\}, \{x = -\frac{0}{2} - \frac{1}{5}\sqrt{5}\}$$

Nếu cần giải phương trình $f(x) < g(x)$ thì bạn thay dấu "=" bởi dấu "<" : **solve (f(x) < g(x))**.

Trên đây chỉ là một số thí dụ đơn giản nhất minh họa cách sử dụng MAPLE trong việc học toán ở phổ thông. Chúng tôi hi vọng rằng qua đó các bạn cũng đã hình dung thấy ích lợi của MAPLE.

Tuy nhiên, *mọi công cụ tính toán, dù hoàn hảo tới đâu, cũng vẫn chỉ là công cụ,* nó chỉ có thể giúp làm giảm nhẹ công việc tính toán thuần túy, chứ không thể thay thế tư duy toán học. Nó giải phóng chúng ta khỏi công việc tính toán nặng nhọc là để hỗ trợ cho việc "mài sắc" tư duy, chứ không phải "làm cùn" tư duy. Chúng tôi hi vọng sẽ có dịp được đề cập đến vấn đề này trong một bài viết khác.

CHỨNG MINH TIÊN ĐỀ ƠCLIT của LEGENDRE

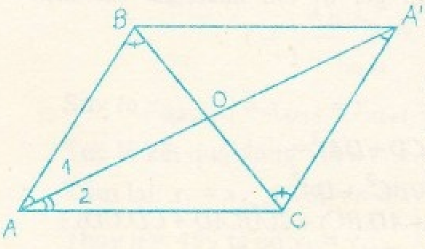
NGUYỄN CẢNH TOÀN

Trải qua trên 2000 năm, loài người đã không mệt mỏi tìm cách chứng minh tiên đề Ơclit, nhưng đều sa vào cái vòng luẩn quẩn, nhiều trường hợp tưởng rằng chỉ còn một chút xíu nữa là xong, nhưng tất cả vấn đề lại nằm trong cái chút xíu đó. Cái chút xíu lí thú nhất nằm trong chứng minh của nhà toán học Pháp nổi tiếng Legendre (1752 - 1833). Legendre tận dụng điều đã biết thời đó là tiên đề Ơclit tương đương với mệnh đề :"tổng các góc của một tam giác bằng 180^o" và tìm cách chứng minh mệnh đề này; sau đây là chứng minh của ông:

1) Tổng các góc của một tam giác không thể lớn hơn 180^o.

Chứng minh. Cho tam giác ABC (h.1) và giả sử $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C} = 180^o + p$ với $p > 0$.

Gọi O là trung điểm của BC và kéo dài đoạn AO một đoạn $OA' = OA$. Ta được hai tam giác bằng nhau $\hat{A}A'B$ và $\hat{A}A'C$ và do đó có tổng số góc bằng nhau và tổng số đó bằng $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C} = 180^o + p$ (sử dụng các tam giác bằng nhau thì thấy ngay). Vì $\hat{A}_1 + \hat{A}_2 = \hat{A}$ nên trong hai góc $\hat{A}_1$ và $\hat{A}_2$, ắt phải có một góc nhỏ hơn hoặc bằng $\frac{\hat{A}}{2}$, ví dụ $\hat{A}_2 \leq \frac{\hat{A}}{2}$ trên h.1.

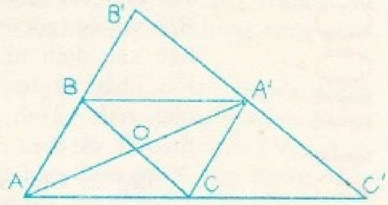


Hình 1

Như vậy là từ tam giác ABC, ta đã dựng nên được một tam giác cũng có tổng số góc bằng $180^o + p$ nhưng có một góc $\leq \frac{\hat{A}}{2}$. Ta lại dùng cách dựng đó để từ tam giác thứ hai này dựng nên một tam giác thứ ba cũng có tổng các góc bằng $180^o + p$ và có một góc $\leq \frac{\hat{A}}{4}$. Như thế, đến lần dựng thứ n thì được một tam giác có tổng các góc bằng $180^o + p$ và có một góc $\leq \frac{\hat{A}}{2^n}$. Ta có thể chọn n đủ lớn để $\frac{\hat{A}}{2^n} < p$. Vậy, ở tam giác cuối cùng này, có một góc nhỏ hơn p nên hai góc còn lại có tổng lớn hơn 180^o, điều đó trái với một định lí (không phụ thuộc gì tiên đề Ơclit) nói rằng tổng hai góc của một tam giác không thể vượt qua 180^o (có thể chứng minh điều này ngay trên h.1. Chẳng hạn, $\hat{B}+\hat{C}$ = ^$ACA' < 180^o$ vì A và A' ở hai phía khác nhau của đường thẳng BC).

2) Tổng các góc của một tam giác không thể nhỏ hơn 180^o.

Bây giờ giả sử $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C} = 180^o - p$ với $p > 0$. Ta lấy lại hình 1 và qua A' dựng một đường thẳng cắt hai cạnh của góc ^BAC theo thứ tự ở B' và C' (h.2) Tam giác BCA', vì bằng tam giác ABC nên cũng có tổng các góc bằng $180^o - p$. Giả sử tổng các góc của tam giác $BB'A$ bằng $180^o - q$ ($q > 0$), của tam giác $CC'A'$ bằng $180^o - r$ ($r > 0$). Cộng tổng các góc của bốn tam giác ABC, BCA', $BB'A'$, $CC'A'$ rồi trừ đi



Hình 2

chính góc ở B, C, A', mỗi nơi gồm ba góc mà tổng là một góc bẹt, ta được tổng các góc của tam giác $AB'C'$ là :

$$(180^o-p)+(180^o-p)+(180^o-q)+(180^o-r)-(3\times 180^o)=180^o-2p-q-r<180^o-2p$$

Như vậy, từ tam giác ABC với tổng số góc bằng $180^o - p$, ta đã dựng được tam giác $AB'C'$ có tổng các góc $< 180^o - 2p$. Lại tiếp tục với tam giác $AB'C'$ để dựng một cách tương tự tam giác $AB''C''$ thì sẽ có một tam giác có tổng các góc nhỏ hơn $180^o - 2^2p$. Tiếp tục như vậy đến lần thứ n sẽ có tam giác với tổng các góc nhỏ hơn $180^o - 2^np$. Với n đủ lớn thì sẽ có tam giác với tổng số góc âm, điều này thật vô lí.

Cái sai của Legendre là ở chỗ nào? Tất cả lập luận đều đúng, trừ chỗ nghiễm nhiên công nhận rằng qua A' có một đường thẳng cắt cả hai cạnh của góc BAC. Lúc đầu, chưa ai nhận ra điều này thì tưởng rằng việc chứng minh tiên đề Ơclit đã chấm dứt với sự thành công của Legendre. Nhưng thật đáng phục người nào đó, vào thời đó, đã phát hiện ra cái vòng luẩn quẩn của Legendre: công nhận một tiên đề tương đương với tiên đề Ơclit để chứng minh tiên đề Ơclit. Tiên đề đó là:

(Xem tiếp trang 2)

BẢNG A

Bài 1. Trong mặt phẳng cho đường tròn tâm O bán kính R và một điểm P nằm trong đường tròn ($OP = d < R$). Trong các tứ giác lồi $ABCD$ nội tiếp đường tròn nói trên sao cho các đường chéo AC và BD vuông góc với nhau tại P, hãy xác định tứ giác có chu vi lớn nhất và tứ giác có chu vi nhỏ nhất. Tính các chu vi đó theo R và d.

Bài 2. Cho số tự nhiên $n > 1$ không chia hết cho 1997. Xét hai dãy số (a_i) và (b_j) được xác định như sau:

$$a_i = i + \frac{ni}{1997} \text{ với } i = 1, 2, 3, ..., 1996.$$

$$b_j = j + \frac{1997j}{n} \text{ với } j = 1, 2, 3, ..., n-1.$$

Xét tất cả các số của hai dãy trên và sắp thứ tự không giảm ta được

$$c_1 \leq c_2 \leq ... \leq c_{1995+n}$$

Chứng minh rằng $c_{k+1} - c_k < 2$ với mọi $k = 1, 2, ..., 1994 + n$.

Bài 3. Hỏi có bao nhiêu hàm số $f: N^* \to N^*$ thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau:

1) $f(1) = 1$

2) $f(n).f(n+2) = (f(n+n))^2 + 1997$ với mọi $n \in N^*$.

(Kí hiệu N^* là tập hợp số nguyên dương).

Bài 4. a) Tìm tất cả các đa thức $f(x)$ với hệ số hữu tỉ có bậc nhỏ nhất mà

$$f(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9}) = 3 + \sqrt[3]{3}.$$

b) Tồn tại hay không đa thức $f(x)$ với hệ số nguyên mà $f(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9}) = 3 + \sqrt[3]{3}$.

Bài 5. Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương n đều chọn được số nguyên dương k để $19^k - 97$ chia hết cho 2^n

Bài 6. Cho 75 điểm thuộc khối lập phương với cạnh dài 1 đơn vị, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng tồn tại tam giác với diện tích không lớn hơn $\frac{7}{72}$ mà ba đỉnh là ba trong số 75 điểm đã cho.

BẢNG B

Bài 1. Cho hàm số $f(x) = a\sin ux + b\cos vx$ xác định trên tập số thực, trong đó a, b, u, v là các hằng số thực khác không.

Chứng minh rằng $f(x)$ là hàm số tuần hoàn khi và chỉ khi $\frac{u}{v}$ là số hữu tỉ.

Bài 2. Trong mặt phẳng cho đường tròn tâm O bán kính R và một điểm P nằm trong đường tròn ($OP = d < R$).

Xét các tứ giác lồi $ABCD$ nội tiếp đường tròn nói trên sao cho các đường chéo AC và BD vuông góc với nhau tại P.

a) Chứng minh rằng $AB.CD + BC.AD = AC.BD$.

b) Trong các tứ giác $ABCD$ như trên hãy xác định tứ giác có chu vi lớn nhất và tính chu vi đó theo R và d.

Bài 3. Cho dãy số nguyên (a_n) ($n \in N$) được xác định như sau: $a_0 = 1$, $a_1 = 45$

$a_{n+2} = 45a_{n+1} - 7a_n$ với mọi $n = 0, 1, 2, ...$

a) Tính số các ước dương của $a_{n+1}^2 - a_n a_{n+2}$ theo n.

b) Chứng minh rằng $1997a_n^2 + 7^{n+1}.4$ là số chính phương với mỗi n.

Bài 4. Tìm tất cả các đa thức $f(x)$ với hệ số hữu tỉ có bậc nhỏ nhất mà

$$f(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9}) = 3 + \sqrt[3]{9}$$

Bài 5. Cho n và k là các số nguyên dương với $n \geq 7$ và $2 \leq k < n$. Chứng minh rằng:

$$k^n > 2n^k$$

Bài 6. Cho hình hộp chữ nhật có ba kích thước là a, b, c. Xét diện tích các tam giác có ba đỉnh nằm bên trong hoặc trên mặt của hình hộp đã cho, tìm giá trị lớn nhất của các diện tích đó theo a, b, c.

ĐÁP ÁN

BẢNG A

Bài 1. Gọi chu vi tứ giác $ABCD$ là p ta có

$$p^2 = (AB + BC + CD + DA)^2 =$$
$$= AB^2 + CD^2 + BC^2 + DA^2 +$$
$$+ 2(AB.CD + AD.BC) + 2(AB.AD + CD.CD) +$$

$+ \ 2(BA.BC + DA.DC)$

Định lí Ptôlême cho ta

$$AB.CD + AD.BC = AC.BD.$$

Dễ thấy $AB.AD = 2R.PA$

$CB.CD = 2R.PC$

Từ đó $AB.AD + CB.CD = 2R.AC$

Tương tự $AB.BC + DA.DC = 2R.BD$

Lại có: $AB^2 + CD^2 = BC^2 + DA^2 = 4R^2$

Vậy $p^2 = 8R^2 + 2.AC.BD + 4RAC + BD)$

Ta có $2AC.BD = (AC + BD)^2 - 8R^2 + 4d^2 (1)$

Thành thử

$$p^2 = (AC + BD)^2 + 4R(AC + BD) + 4d^2$$

Vậy p đạt max hay min tùy theo $(AC + BD$ đạt max hay min.

a) Từ (1) ta thấy $AC + BD$ đạt max $\Leftrightarrow$ $2AC.BD$ đạt max. Vì $2AC.BD \le AC^2 + BD^2 = 8R^2 - 4d^2$ nên $AC.BD$ đạt max khi $AC = BD$ $\Leftrightarrow OM = ON \Leftrightarrow OPMN$ là hình vuông $\Leftrightarrow OP$ tạo với AC và BD góc 45°. Khi đó:

$$P^2_{\max} = 16R^2 - 4d^2 + 8R\sqrt{4R^2 - 2d^2}$$

3) $AC + BD$ đạt min $\Leftrightarrow AC.BD$ đạt min

Vì $2AC.BD = 8R^2 - 4d^2 - (AC - BD)^2$ nên (*) $\Leftrightarrow |AC - BD|$ đạt max. Điều này xảy ra khi $AC = 2R$, $BD = \sqrt{R^2 - d^2}$.

Khi đó $p^2_{\min} = 16R^2 + 16R\sqrt{R^2 - d^2}$

Bài 2. Thay 1997 bởi số m không là ước của n. Xét hai dãy $a_i = i\left(1 + \frac{n}{m}\right)$ với $i = 0, 1, \ldots, m$ và $b_j = j\left(1 + \frac{m}{n}\right)$ với $j = 0, 1, \ldots, n$.

Ta có: $a_0 = 0 < a_1 < \ldots < a_m = m + n$

$b_0 = 0 < b_1 < \ldots < b_n = m + n$

Giả sử $n < m$. Khi đó $a_{i+1} - a_i = 1 + \frac{n}{m} < 2$. Với mỗi $k = 1, 2, \ldots, m+n-2$ tồn tại duy nhất j để $a_j \le c_k \le a_{j+1}$ $(0 \le j \le n-1)$

Khi ấy $c_{k+1} = a_{j+1}$ và

$$c_{k+1} - c_k \le a_{j+1} - a_j < 2.$$

Bài 3. Gọi D là tập tất cả các hàm f có tính chất đã nêu. Để cho gọn kí hiệu $a_n = f(n)$

Ta có: $a_n a_{n+2} = a_{n+1}^2 + 1997$ (2)

$a_{n+1}a_{n+3} = a_{n+2}^2 + 1997$

Suy ra $\dfrac{a_n + a_{n+2}}{a_{n+1}} = \dfrac{a_{n+1} + a_{n+3}}{a_{n+2}}$

Vậy $a_{n+2} = ca_{n+1} - a_n$ (3)

ở đó c là hằng số $\left(c = \dfrac{a_3 + a_1}{a_2}\right)$

Ta chứng minh $c \in N^*$. Thật vậy nếu $c = \frac{p}{q}$ với $(p, q) = 1$ thì từ (3) ta có

$$q(a_{n+2} + a_n) = pa_{n+1} \Rightarrow q | a_{n+1}$$

Vì $1997 = a_n a_{n+2} - a_{n+1}^2 \vdots q^2$ nên $q = 1$ (do 1997 là số nguyên tố).

Đặt $f(2) = a$. Từ (2) và (3) ta có:

$ca_2 - a_1 = a_3 = a_1 a_3 = a_2^2 + 1997$

$\Leftrightarrow ca - 1 = a^2 + 1997 \Rightarrow a | 1998.$

Nghĩa là $f(2)$ là ước dương của 1998 nếu $f \in D$. Đảo lại với mỗi ước dương a của 1998 xây dựng hàm $f : N^* \Rightarrow R$ như sau:

$f(1) = 1, f(2) = a, f(n+2) = (a+b)f(n+1) - f(n)$;

ở đó $b = \frac{1998}{a} \in N^*$. Ta chứng minh $f \in D$.

Dễ thấy $f(n) \in N^*$ và $f(n+2)f(n) - f^2(n+1)$ không phụ thuộc n, vậy

$f(n)f(n+2) - f^2(n+1) = f(3) - f^2(2) =$

$= (a + b)a - 1 - a^2 = 1997 \Leftrightarrow f \in D$

Tương ứng $f \to f(2)$ là một song ánh giữa D và tập các ước dương của 1998. Vậy

$$|D| = (1+1)(1+3)(1+1) = 16.$$

Bài 4. Trước hết ta chứng minh nhận xét: Nếu $u, v \in Q$ mà $s = u\sqrt[3]{3} + v\sqrt[3]{9} \in Q$ thì $u = v = 0$.

Thật vậy, xét đa thức $g(x) = vx^2 + ux - s$ có $g(\sqrt[3]{3}) = 0$ và đa thức $P(x) = x^3 - 3$ (P(x) không có nghiệm hữu tỉ).

Chia $r(x)$ cho $g(x)$ ta được

$$P(x) = h(x)g(x) + r(x)$$

Nếu $r(x) = 0 \Rightarrow \deg h(x) = 1 \Rightarrow r(x)$ có nghiệm hữu tỉ. Mâu thuẫn.

Nếu $r(x) \ne 0 \Rightarrow \deg r(x) = 1 \Rightarrow r(\sqrt[3]{3}) = 0 \Rightarrow \sqrt[3]{3} \in Q$ mâu thuẫn. Nhận xét được chứng minh.

a) Nếu $\deg f = 1$; $f(x) = ax + b$ với $a, b \in Q$ thỏa mãn bài toán thì từ nhận xét trên ta có $(a - 1)\sqrt[3]{3} + a\sqrt[3]{9} = 3 - b \in Q$ nên $\begin{cases} a - 1 = 0 \\ a = 0 \end{cases}$ mâu thuẫn.

Xét $f(x)$ là đa thức bậc hai

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Khi đó nếu $f(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9}) = 3 + \sqrt[3]{3} \Leftrightarrow$

$(a+b)\sqrt[3]{9} + (3a + b)\sqrt[3]{3} + 6a + c = 3 + \sqrt[3]{3}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ 3a + b = 1 \\ 6a + c = 3 \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{1}{2},\ b = -\frac{1}{2},\ c = 0.$$

Vậy chỉ có duy nhất đa thức bậc hai thỏa mãn là $f(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}$. Đó là đa thức bậc nhỏ nhất.

b) Đặt $\alpha = \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9}$ ta có $\alpha^3 = 9\alpha + 12$. Vậy đa thức $g(x) = x^3 - 9x - 12$ nhận α là nghiệm.

Nếu $f(x)$ là đa thức hệ số nguyên thỏa mãn đầu bài thì

$$f(x) = g(x)h(x) + r(x)$$

ở đó $h(x)$, $r(x)$ là đa thức hệ số nguyên với $\deg r(x) \le 2$. Vì $g(\alpha) = 0$ nên $r(\alpha) = f(\alpha) = 3 + \sqrt[3]{3}$.

Theo câu a) điều này không xảy ra.

Bài 5. Chỉ cần xét $n \ge 3$. Ta có nhận xét sau:

$$19^{2^{n-2}} - 1 = 2^n q_n \text{ với } q_n \text{ lẻ} \quad (4)$$

Thật vậy với $n = 3$, khẳng định (4) đúng.

Giả sử khẳng định đúng với n. Khi đó

$$19^{2^{n-1}} - 1 = (19^{2^{n-2}} + 1)(19^{2^{n-2}} - 1)$$

$$= 2S_n 2^n q_n = 2^{n+1}(s_n q_n) \quad s_n, q_n \text{ lẻ}.$$

Nhận xét được chứng minh.

Ta chứng minh bài toán bằng quy nạp. Với $n = 3$ đúng. Giả sử tồn tại $k_n \in N^*$ sao cho

$$19^{k_n} - 97 = 2^n a$$

Nếu a chẵn thì $19^{k_n} - 97 \ \vdots \ 2^{n+1}$

Nếu a lẻ đặt $\quad k_{n+1} = k_n + 2^{n-2}$

Khi đó

$$19^{k_{n+1}} - 97 = 19^{2^{n-2}}(19^{k_n} - 97) + 97(19^{2^{n-2}} - 1)$$

$$= 2^n(19^{2^{n-1}} a + 97q_n) \ \vdots \ 2^{n+1} \text{ (đpcm)}.$$

Bài 6. Trước hết ta chứng minh bổ đề sau:

Nếu tam giác MNP có ba đỉnh nằm trong một hình hộp có kích thước a, b, c thì

$$S_{(MNP)} \le \frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}$$

Thật vậy gọi S_1, S_2, S_3 là diện tích hình chiếu của ΔMNP lên ba mặt phẳng $(ABCD)$, $(ABA'B')$ và $(DAD'A')$ thì $S^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$ Dễ thấy nếu một tam giác có 3 đỉnh nằm bên trong (hay trên cạnh) của hình chữ nhật kích thước a, b thì diện tích của nó không vượt quá $\frac{ab}{2}$.

Từ đó $S^2 \le \dfrac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}{4}$

Bổ đề được chứng minh.

Bây giờ ta chia khối hộp thành 36 khối có kích thước $\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$

Tồn tại một khối hộp chứa ít nhất ba điểm M, N, P trong 75 điểm đã cho. áp dụng bổ đề ta được:

$$S_{(MNP)} \le \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{1}{18}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{12}\right)^2} = \frac{7}{72}$$

BẢNG B

Bài 1. $f(x) = a\sin ux + b\cos vx \quad (1)$

trong đó, a, b, u, v là các số thực khác 0.

a) Chứng minh thuận: Giả sử $f(x)$ là hàm số tuần hoàn có chu kì $t \ne 0$, nghĩa là $f(x + t) = f(x)$ với mọi x.

Cho $x = 0$ được $f(t) = f(0)$

hay $a\sin ut + b\cos vt = b \quad (2)$

Cho $x = -t$ được $f(0) = f(-t)$

hay $-a\sin ut + b\cos vt = b \ (3)$

Cộng từng vế (2) và (3) được:

$$\cos vt = 1 \text{ hay } vt = 2k\pi \quad (4)$$

với k là số nguyên khác 0.

Trừ từng vế (2) và (3) được: $\sin ut = 0$ hay

$$ut = h\pi \quad (5)$$

với h là số nguyên khác 0.

Từ (4) và (5) có $\frac{u}{v} = \frac{h}{2k}$ là số hữu tỉ.

b) Chứng minh đảo: Giả sử $\frac{u}{v} = \frac{m}{n}$ với m, n là các số nguyên khác 0.

Chọn $t = \frac{2\pi m}{u} = \frac{2\pi n}{v} \ne 0$, ta có

$$f(x+t) = a\sin u\left(x + \frac{2\pi m}{u}\right) + b\cos v\left(x + \frac{2\pi n}{v}\right) =$$

$= a\sin ux + b\cos vx = f(x)$ với mọi x, nghĩa là $f(x)$ là hàm số tuần hoàn có chu kì $t \ne 0$.

Bài 2. Xem lời giải bài 1 bảng A.

Bài 3. a) Xét dãy số nguyên: $a_0 = 1$, $a_1 = 45$ và $a_{n+2} = 45a_{n+1} - 7a_n$ với $n = 0, 1, 2, ...$ (1)

Thử với $n = 0, 1$ để dự đoán hệ thức (2) dưới đây, rồi chứng minh quy nạp là hệ thức đó đúng với mọi n:

$$a_{n+1}^2 - a_n a_{n+2} = 7^{n+1} \quad (2)$$

Từ (2) suy ra: số các ước số dương của $a_{n+1}^2 - a_n a_{n+2}$ bằng $n + 2$.

b) Từ (2) có:

$$a_{n+1}^2 - a_n(45a_{n+1} - 7a_n) - 7^{n+1} = 0$$

hay $\quad a_{n+1}^2 - 45a_n a_{n+1} + 7a_n^2 - 7^{n+1} = 0$ với mọi n.

Điều này chứng tỏ phương trình $x^2 - 45a_n x + 7a_n^2 - 7^{n+1} = 0$ có nghiệm nguyên nên $\Delta = (45a_n)^2 - 4(7a_n^2 - 7^{n+1}) = 1997a_n^2 + 7^{n+1}.4$ phải là số chính phương.

Bài 4. Nhận xét: nếu $u, v \in Q$ mà $u\sqrt[3]{3} + v\sqrt[3]{9} \in Q$ thì $u = v = 0$ (xem chứng minh bài 4 bảng A). Nếu có đa thức bậc nhất $f(x) = ax + b$ với $a, b \in Q$ thỏa mãn $a(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9}) + b = 3 + \sqrt[3]{9}$ thì

$a\sqrt[3]{3} + (a-1)\sqrt[3]{9} + b - 3 = 0$ suy ra $a = 0 = a - 1$

(Xem tiếp trang 18)

BÀN TRÒN ĐỌC THƠ

L.T.S. Nhà thơ Thạch Quỳ (tên thật là Vương Đình Huấn) sinh năm 1941 tại Nghệ An. Năm 1960, anh học khoa Toán, trường ĐHSP Vinh. Anh đã cho ra đời 5 tập thơ. Anh là hội viên Hội nhà văn Việt Nam. Khi hỏi anh : Toán học có giúp đỡ gì cho Thơ?" anh đã khẳng định :"Chính Hình học phi O-cơ-lit đã khai sáng cho tôi cách suy nghĩ, nhìn nhận và cả cảm xúc đa chiều nữa khi tôi đối diện với cuộc sống". Bài thơ sau đây anh viết và đăng báo Văn Nghệ năm 1967, TH&TT trân trọng giới thiệu với các bạn yêu Toán và mê Thơ.

CÁI ĐƯỜNG THẲNG NẰM TRONG HÌNH HỌC

Cái đường thẳng nằm trong hình học
Theo suốt đời, âm ỉ tận trong tôi.
Là sợi tơ chẳng có chất tơ
Mà chăng được từ đây đến đấy

Lúc thò vụng sờ tay lên mặt giấy
Lại nhận ra bóng dáng cái vô hình
Lúc nghĩ về tia sáng mỏng manh
Lại thấy nó chiếu đi rất thẳng

Như tia mắt em nhìn về anh
Không bị chắn bằng cây, bằng núi
Như ý nghĩ những người đi tới
Không nghỉ, không ngừng, không dừng
điểm cuối

Từ chân trời nối với chân trời
Qua những đám mây
Từ hôm qua nối với hôm nay
Qua những bàn tay
Luống cày
và súng.

Trong sách vở tôi chỉ tìm thấy bóng
Giữa cuộc đời nó bỗng hiện hình ra
Tiếng con ve gọi nắng tự cành đa
Nối rất thẳng với mầm cây của đất,.

Nhưng đường thẳng chính là đường
ngắn nhất
Cái lối mòn trên ruộng bước tắt ngang
Vết xe lao qua trọng điểm chiến trường
Những bờ thửa, bờ vùng lên thẳng tắp

Cái đường thẳng hiền lành và chân thật
Nơi âm thanh tiếng nói biết đi về
Từ phương này nối với phương kia
Là đường thẳng của tình bè bạn...

Đường ta đi từ quá khứ đến ngày mai
Hiện đang bắc qua mỗi tấm lòng trăn trở
Trên trang sách
Dưới ngón tay lật mở
Trên luống cày gieo vãi, nghĩ suy

Từ O-co-lit đến Lôbasépky
Đường thẳng bắc qua hai trụ lớn
Là chiếc cầu của những vệ tinh đi
Đường thẳng luôn bài xích những cong queo
Và gạt bỏ những lối mòn có sẵn

Đường thẳng nói về những miền vô tận
Mà nghe như âm ỉ giữa tim mình
Đường thẳng mời bước chị, bước anh
Mà chỉ nói: Tôi là đường thẳng

1967

THẠCH QUỲ

Hỏi: *Trong bài "Phương pháp chọn phần tử lớn nhất" (Vũ Đức Cảnh) (THTT số 244) có bài toán: Cho a, b, c là 3 số tùy ý thuộc [1; 3] thỏa mãn $a + b + c = 6$. Chứng minh rằng:*

$$a^2 + b^2 + c^2 \leq 14.$$

Em giải như sau:

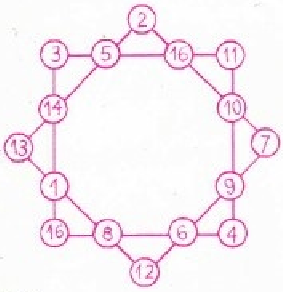
$$1 \leq a \leq 3 \Leftrightarrow a^2 - 4a + 3 \leq 0;$$

tương tự $b^2 - 4b + 3 \leq 0; c^2 - 4c + 3 \leq 0.$

Cộng từng vế của 3 bất đẳng thức trên ta có $a^2 + b^2 + c^2 - 4(a+b+c) + 9 \leq 0$ *suy ra* $a^2 + b^2 + c^2 \leq$

Giải đáp bài
ĐIỀN SỐ VÀO HÌNH VUÔNG

Ta thấy mỗi ô tròn đều có mặt trên hai cạnh của hai hình vuông hoặc trên hai cạnh của một hình vuông. Như vậy mỗi số từ 1 đến 16 sẽ được tính hai lần và tổng các số này được chia đều trên 8 cạnh của hai hình vuông.



Vậy tổng số của 4 ô tròn trên mỗi cạnh của mỗi hình vuông phải là

$$\frac{2(1+2+\ldots+15+16)}{8} = \frac{272}{8} = 34.$$

Từ đó ta có cách điền số như trên hình vẽ. Hình vẽ này có 4 trục đối xứng. Mỗi lần ta lật hình vẽ theo trục đối xứng ta được một cách điền số mới.

BÌNH PHƯƠNG

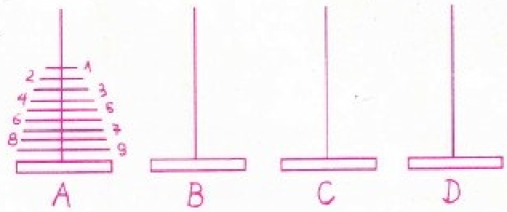
TRÒ CHƠI "THÁP BA MÀU"

Cho 9 đĩa tròn khoét lỗ ở giữa (như đĩa hát) chồng lên nhau xuyên qua cột A theo thứ tự đĩa có bán kính lớn ở dưới, đĩa có bán kính nhỏ ở trên. Giả sử bán kính các đĩa lần lượt là 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Các đĩa có bán kính 1, 4, 7 có màu đỏ; các đĩa có bán kính 2, 5, 8 có màu xanh và các đĩa có bán kính 3, 6,9 có màu vàng.

Hãy tìm cách chuyển ít lần nhất 9 đĩa ở cột A sang ba cột B, C, D chưa có đĩa nào, với yêu cầu là:

- mỗi lần chỉ di chuyển một đĩa.
- không được để đĩa nhỏ ở dưới đĩa lớn.
- được quyền sử dụng cả 4 cột A, B, C, D.

Sao cho cuối cùng cột B chỉ có 3 đĩa màu đỏ, cột C chỉ có 3 đĩa màu xanh và cột D chỉ có 3 đĩa màu vàng.



LTS: Đây là một "biến dạng" của bài toán "Tháp Hà Nội".

VÕ KIM HUỆ

$\leq 4(a+b+c) - 9 = 15$. Vậy giá trị lớn nhất của $a^2 + b^2 + c^2$ bằng 15. Tại sao 2 kết quả lại khác nhau ?

PHẠM VĂN VINH
(12D, PTTH Quang Trung, Hà Tây)

Đáp: Tại sao em đã vội vàng *kết luận sai*: giá trị lớn nhất của $a^2 + b^2 + c^2$ bằng 15? Không bao giờ em có thể chỉ ra được các giá trị của a, b, c để $a^2 + b^2 + c^2$ bằng 15! Phép chứng minh của tác giả Vũ Đức Cảnh là đúng, còn phép chứng minh của em, đến khi có được $a^2 + b^2 + c^2 \leq 15$ là không sai, nhưng... chưa được gì! Tuy nhiên việc cố gắng tìm một con đường chứng minh khác của một bài toán đã có lời giải là việc làm đáng khen. Chúc em tiếp tục yêu... Toán.

Hỏi: *Có một đề thi đầu năm (dành cho học sinh lớp 7) như sau: "Gọi O là một điểm ngoài đường thẳng BC sao cho góc $BMO = 60^0$. Vẽ góc đối đỉnh với góc BMO. Gọi tên các góc kề bù với góc BMO. Tính số đo các góc đó. "Mong THTT có ý kiến vì tổ Toán của trường đang có những ý kiến trái ngược nhau.*

NHẬT HƯƠNG
(36B, Thái Phiên, Tp Huế).

Đáp: LTN nghĩ mãi... không biết điểm M ở đâu? Hay tác giả đề thi "thử" trình độ học sinh bởi sự "bí ẩn" này? Giá như nói về M một chút, chẳng hạn: M là điểm thuộc BC hoặc M là điểm không thuộc BC hoặc M là điểm tùy ý của mặt phẳng thì... đề thi "đỡ hơn"! Nhưng nếu M không thuộc BC thì đường thẳng BC có "ý nghĩa" gì trong đề thi này nhỉ? Việc dựng góc BMO, học sinh lớp 7 hoàn toàn vẽ được khi dùng... thước đo góc! Tóm lại đề thi này làm LTN cũng gãi đầu đến rụng cả... kiến thức mà thương cho... học sinh lớp 7! Mong tổ Toán có một chuyến "thuyền Rồng sông Hương"... thật vui vẻ và cho đề toán này trôi vào... quá khứ.

Hỏi: *Có cuốn sách dành cho học sinh lớp 10, khi giải bài toán: "Tìm điều kiện của tham số để phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm và nghiệm này gấp đôi nghiệm kia" đã giả sử phương trình có nghiệm để dẫn tới hệ: $x_1 = 2x_2$; $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$; $x_1x_2 = \frac{c}{a}$. Khử x_1, x_2 từ hệ này sẽ dẫn tới phương trình xác định tham số và thử vào điều kiện $\Delta x \geq 0$ để chọn giá trị tham số thỏa mãn bài toán. Việc thử này nhiều khi rất phức tạp. Theo tôi thì không cần phải thử lại, thử lại là thừa. Mong THTT cho ý kiến.*

NGUYỄN ĐÌNH THIỆU
(PTTH Huỳnh Thúc Kháng, Vinh, Nghệ An)

Đáp: Ý kiến của Anh hoàn toàn đúng! Anh có thể tham khảo thêm bài toán : "Chứng tỏ rằng hệ thức $kb^2 = (k+1)^2ac$ $(k \neq 1)$ là điều kiện cần và **đủ** để phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ có hai nghiệm, trong đó một nghiệm bằng k lần nghiệm kia" (đề 138, Bộ Đề thi TSĐH).

LTN

ISSN : 0866 - 0835
Chỉ số : 12884
Mã số : 8BT47M8

Sắp chữ tại Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ
In tại Nhà máy in Diên Hồng, 57 Giảng Võ
In xong và nộp lưu chiểu tháng 2 năm 1998

Giá : 3.000đ
Ba nghìn đồng