

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ★ HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

# TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

8 (242)  
1997

NĂM THỨ 34

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG

- ☐ VỀ MỘT BÀI TOÁN CỰC TRỊ HÌNH HỌC
- ☐ VẬN DỤNG ĐIỀU KIỆN ĐỒNG PHẪNG CỦA BỐN ĐIỂM ĐỂ GIẢI BÀI TOÁN HÌNH KHÔNG GIAN
- ☐ KẾT QUẢ CUỘC THI OLYMPIC TOÁN PTTH
- ☐ TRÊN ĐƯỜNG ĐI TÌM BẤT ĐẲNG THỨC TRONG TAM GIÁC
- ☐ VỀ BÀI TOÁN QUY HOẠCH TUYẾN TÍNH TRONG ĐẠI SỐ 10
- ☐ MỞ RỘNG BÀI TOÁN CON BƯỚM CHO CÁC ĐƯỜNG CONIC



Thầy trò trường Phổ thông năng khiếu Lai Châu

Ảnh : Châu Sơn



# TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

## MATHEMATICS AND YOUTH

### MỤC LỤC

|                                                                                                                                                                                                                         | Trang |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| ● <b>Dành cho các bạn Trung học cơ sở</b><br>For lower secondary school level friends<br><i>Nguyễn Đức Tấn</i> – Về một bài toán cực trị<br>hình học                                                                    | 1     |
| ● <b>Giải bài kì trước</b><br>Solutions of problems in previous issue<br>Các bài của số 238                                                                                                                             | 2     |
| ● <b>Đề ra kì này</b><br>Problems in this issue<br>T1/242, T2/242, ..., T10/242, L1/242, L2/242.                                                                                                                        | 9     |
| ● <b>Dành cho các bạn chuẩn bị thi vào đại học</b><br>For college and university entrance exam<br>preparers<br><i>Chủ Xuân Dũng</i> – Vận dụng điều kiện đồng<br>phẳng của bốn điểm để giải bài toán hình<br>không gian | 10    |
| ● <i>Nguyễn Việt Hải</i> – Kết quả cuộc thi Olympic<br>toán PTTH toàn quốc, năm học 1996–1997                                                                                                                           | 13    |
| ● <i>Trần Việt Kính</i> – Trên đường đi tìm "Bất đẳng<br>thức trong tam giác"                                                                                                                                           | 14    |
| ● <b>Tìm hiểu sâu thêm toán học phổ thông</b><br>To help young friends gain better understanding<br>in school maths<br><i>Nguyễn Đình Nguyên</i> – Về bài toán quy hoạch<br>tuyến tính trong đại số 10                  | 15    |
| ● <i>Lê Hào</i> – Mở rộng bài toán con bướm cho các<br>đường conic                                                                                                                                                      | 16    |
| ● <b>Giải trí toán học</b><br>Fun with Mathematics<br><i>Bình Phương</i> – Giải đáp bài : Nhận được bao nhiêu<br>quà ?<br><i>HC</i> – Hỏi ai, câu gì để được tự do ?                                                    |       |

**Tổng biên tập :**  
NGUYỄN CẢNH TOÀN

**Phó tổng biên tập :**  
NGÔ ĐẠT TỬ  
HOÀNG CHỨNG

#### HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP

Nguyễn Cảnh Toàn, Hoàng  
Chứng, Ngô Đạt Tử, Lê Khắc  
Bảo, Nguyễn Huy Doan,  
Nguyễn Việt Hải, Đinh Quang  
Hào, Nguyễn Xuân Huy, Phan  
Huy Khải, Vũ Thanh Khiết, Lê  
Hải Khôi, Nguyễn Văn Mậu,  
Hoàng Lê Minh, Nguyễn Khắc  
Minh, Trần Văn Nhung,  
Nguyễn Đăng Phát, Phan  
Thanh Quang, Tạ Hồng Quảng,  
Đặng Hùng Thắng, Vũ Dương  
Thụy, Trần Thành Trai, Lê Bá  
Khánh Trinh, Ngô Việt Trung,  
Đặng Quan Viễn.

*Trụ sở tòa soạn :*

81 Trần Hưng Đạo, Hà Nội

231 Nguyễn Văn Cừ, TP Hồ Chí Minh

ĐT : 8.220073

ĐT : 8.356111

*Biên tập và trị sự :* VŨ KIM THÙY

LÊ THỐNG NHẤT

*Trình bày :* HOÀNG LÊ BÁCH



# VỀ MỘT BÀI TOÁN CỰC TRỊ HÌNH HỌC

NGUYỄN ĐỨC TẤN  
(T.P Hồ Chí Minh)

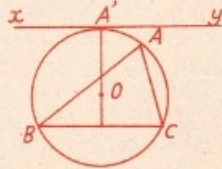
CỰC TRỊ HÌNH HỌC là một đề tài luôn hấp dẫn những người yêu toán.

Bài viết này nhằm trao đổi cùng bạn đọc chung quanh một bài toán đơn giản về CỰC TRỊ HÌNH HỌC, giúp ta giải một số bài toán khác khá hay

## Bài toán S

Cho đường tròn  $(O, R)$  dây cung  $BC$  và  $A$  là điểm chuyển động trên cung lớn (cung nhỏ)  $BC$ . Xác định vị trí của điểm  $A$  để diện tích tam giác  $ABC$  lớn nhất.

Bài toán có viết nhiều cách giải. Sau đây là một cách giải điển hình. Gọi  $A'$  là điểm chính giữa của cung lớn (cung nhỏ)  $BC$ . Vẽ  $xy$  là tiếp tuyến của đường tròn  $(O, R)$  tại  $A'$ .



Suy ra mọi điểm  $A$  thuộc cung lớn (cung nhỏ)  $BC$  đều nằm giữa hai đường thẳng song song  $xy$  và  $BC$ ,  $A \neq A'$  thì khoảng cách từ  $A$  đến  $BC$  nhỏ hơn khoảng cách từ  $A'$  đến  $BC$ , do đó  $S_{(ABC)} < S_{(A'BC)}$ . Dùng kí hiệu  $S_{(ABC)}^{\max}$  thay cho "diện tích tam giác  $ABC$  đạt giá trị lớn nhất", ta có  $S_{(ABC)}^{\max} \Leftrightarrow A \equiv A'$ .

Bài toán S có thể phát biểu dưới dạng khác. Bài toán 1: Trong tất cả các tam giác  $ABC$  có độ dài cạnh  $BC$  và góc  $A$  không đổi, tìm tam giác có diện tích lớn nhất.

Và hơn nữa nếu hai điểm  $D, E$  cố định ( $D \in BC, E \in BC$ ) thì  $S_{(ADE)}^{\max} \Leftrightarrow A \equiv A'$ .

Ta có bài toán 2.

Bài toán 2: Cho  $BC$  là dây cung cố định của đường tròn  $(O, R)$ ;  $D$  và  $E$  là hai điểm cố định thuộc đường thẳng  $BC$ ,  $A$  là điểm chuyển động trên cung lớn (cung nhỏ)  $BC$ . Xác định vị trí của điểm  $A$  để  $S_{(ADE)}$  đạt giá trị lớn nhất và như vậy chúng ta cũng có bài toán 3 sau.

Bài toán 3: Cho đường tròn  $(O, R)$  và đoạn thẳng  $BC$  cố định,  $A$  là điểm chuyển động trên đường tròn. Xác định vị trí của điểm  $A$  để  $S_{(ABC)}$  đạt giá trị lớn nhất.

Ta lại biết khi  $A$  chuyển động trên cung lớn (cung nhỏ)  $BC$  thì tâm  $I$  của đường tròn nội tiếp tam giác  $ABC$  chuyển động trên cung chứa góc  $\alpha = 90^\circ + \frac{A}{2}$  dựng trên đoạn  $BC$ .

Do đó  $S_{(IBC)}^{\max} \Leftrightarrow I \equiv I' \Leftrightarrow A \equiv A'$  ( $I'$  là điểm chính giữa của cung chứa góc  $\alpha$ )

Ta có bài toán 4.

Bài toán 4: Cho  $BC$  là dây cung cố định của đường tròn  $(O, R)$ ,  $A$  là điểm chuyển động trên cung lớn (cung nhỏ)  $BC$ ,  $I$  là tâm đường tròn nội tiếp tam giác  $ABC$ . Xác định vị trí của điểm  $A$  để diện tích tam giác  $IBC$  đạt giá trị lớn nhất.

Và nếu chú ý rằng khi  $A$  chuyển động trên cung lớn  $BC$  sao cho tam giác  $ABC$  nhọn thì trực tâm  $H$  thuộc cung chứa góc  $\beta = 180^\circ - A$  dựng trên đoạn  $BC$ .

Do đó  $S_{(HBC)}^{\max} \Leftrightarrow H \equiv H' \Leftrightarrow A \equiv A'$ .

( $H$  là điểm chính giữa của cung chứa góc  $\beta$ ). Ta có bài toán 5.

Bài toán 5: Cho  $BC$  là dây cung cố định của đường tròn  $(O, R)$ ,  $A$  là điểm chuyển động trên cung lớn  $BC$  sao cho tam giác  $ABC$  nhọn. Gọi  $H$  là trực tâm của tam giác  $ABC$ . Xác định vị trí của điểm  $A$  để diện tích tam giác  $HBC$  đạt giá trị lớn nhất.

Và nếu gọi  $K$  là trung điểm của  $BC$  thì dễ dàng chứng minh được  $AH = 2 \times OK$  (không đổi),  $AD$  là đường cao của tam giác  $ABC$  thì  $AD \Leftrightarrow HD^{\max}$ . Ta lại có bài toán mới.

Bài toán 6: Cho  $BC$  là dây cung cố định của đường tròn  $(O, R)$ ,  $A$  là điểm chuyển động trên cung lớn  $BC$ . Gọi  $H$  là trực tâm và  $AD$  là đường cao của tam giác nhọn  $ABC$ . Xác định vị trí của điểm  $A$  để đoạn thẳng  $HD$  có độ dài lớn nhất.

Mặt khác, vẽ  $AD, BF, CG$  lần lượt là các đường cao của tam giác  $ABC$ . Dựa vào kiến thức về tam giác đồng dạng, ta chứng minh

$$\text{được } S_{(ABC)} = \frac{R}{2} (DE \cdot EG + GD) = \frac{R}{2} P_{(DEG)}$$

với  $P_{(DEG)}$  là chu vi tam giác  $DEG$ .

Ta có  $P_{(DEG)}^{\max} \Leftrightarrow S_{(ABC)}^{\max} \Leftrightarrow A \equiv A'$ . Ta đến với bài toán.

Bài toán 7: Cho  $BC$  là dây cung cố định của đường tròn  $(O, R)$ ,  $A$  là điểm chuyển động trên cung lớn  $BC$ ,  $AD, BE, CG$  là các đường cao của tam giác  $ABC$ . Xác định vị trí của điểm  $A$  để tam giác  $DEG$  có chu vi lớn nhất. Bài toán sau đây (bài 4, thi học sinh giỏi toán quốc gia lớp 9, 1995 - 1996) Có thể dựa về bài 3 ở trên.

Bài toán 8: Cho đường tròn  $(C)$  nằm trong góc  $xOy$ . (đường tròn  $(C)$  không có điểm chung với các cạnh của góc  $xOy$ ). Hãy tìm trên đường tròn  $(C)$  một điểm  $M$  sao cho tổng các khoảng cách từ  $M$  đến hai đường thẳng chứa các cạnh của góc  $xOy$  là nhỏ nhất.

Dùng  $A \in Ox, B \in Oy$  sao cho  $OA = OB$ ,  $AB$  tiếp xúc với  $(C)$  tại  $M_1$  và  $(C)$  nằm trong tam giác  $OAB$ .

Gọi  $h_1, h_2$  là khoảng cách từ điểm  $M$  đến  $Ox, Oy$ . Ta có  $OA, OB, AB, S(OAB)$  không đổi. Do đó  $(h_1 + h_2)_{\min} \Leftrightarrow S_{(MAB)}^{\min} \Leftrightarrow M \equiv M_1$ . Để thấy  $CM' \parallel Oz$  ( $Oz$  là tia phân giác của góc  $xOy$ )

Liệu thay "nhỏ nhất" ở bài toán này bởi "lớn nhất", có thể sử dụng cách giải trên giải được bài toán chăng?

"Giả công" bài toán S, ta có bài toán hay sau.

Bài toán 9: Trong tất cả các tứ giác nội tiếp trong đường tròn  $(O, R)$ , tìm tứ giác có diện tích lớn nhất.

"Họ hàng" với bài toán S là bài toán.

Bài toán P: Cho đường tròn  $(O, R)$ , dây cung  $BC$  và  $A$  là điểm chuyển động trên cung lớn (cung nhỏ)  $BC$ . Xác định vị trí của điểm  $A$  để chu vi tam giác  $ABC$  lớn nhất.

Các bạn hãy tìm nhiều lời giải cho bài toán P và tìm các bài toán mà khi sử dụng kết quả bài toán P có thể cho lời giải đẹp.





## GIẢI BÀI kì trước

**Bài T1/238.** A và B là hai số có bảy chữ số khác nhau từ 1 đến 7. Giả sử  $A > B$ , hỏi có thể xảy ra trường hợp A chia hết cho B hay không, tại sao?

**Lời giải.** Tổng các chữ số của A cũng như B đều bằng  $1 + 2 + 3 + \dots + 7 = 28$ , hay là A, B đều đồng dư 1 (mod 9) (1). Giả sử A chia hết cho B, ta có A, ta có  $A = B \cdot n$  với n nguyên. Mà  $A > B$  nên  $n > 1$ . Hơn nữa, A, B đều có 7 chữ số và trong các chữ số A, B, chữ số lớn nhất là 7, bé nhất là 1 nên  $A < 8 \cdot 10^6$  và  $B > 10^6$ , do đó  $n = A : B < 8$ , suy ra  $1 < n < 8$  (2). Từ (1), ta có thể đặt  $B = 9m + 1$  với m nguyên, suy ra  $A = B \cdot n = 9mn + n \equiv n \pmod{9}$ ; nên  $n \equiv 1 \pmod{9}$ , mâu thuẫn với (2). Vậy, không thể xảy ra A chia hết cho B.

**Nhận xét.** Có 235 bài giải, tất cả đều giải đúng, tuy nhiên cách trình bày thường dài dòng hoặc quá vắn tắt. Lời giải tốt gồm có: **Ninh Bình:** Lê Hồng Linh (9TNK thị xã Ninh Bình); **Thái Bình:** Đinh Thị Thu (6 Toán PTCS Chuyên Tx Thái Bình); **Đặng Ngọc Tuấn** (9TPTCS NK Tiên Hải); **Hải Dương:** Vũ Thanh Long (7 Toán NK Nam Sách); **Trần Quang Đại** (9TTL PTNK Tx Hải Dương); **Tô Minh Hoàng** (8T PTCSNK Tx Hải Dương); **Đặt lăk:** Phạm Đình Bách (7 Toán chuyên Nguyễn Du); **Ngô Quốc Anh** (8 Toán chuyên Nguyễn Du); **Nam Định:** Bùi Hoàng Hiệp (9A PTHCS Xuân Bắc, Xuân Trường); **Hoàng Đình Tuấn** (8 Toán NK Ý Yên); **Thanh Hóa:** Đỗ Mạnh Cường (7T NK Bình Sơn); **Lê Minh Hải** (9A THCS Cù Chính Lan - Tp Thanh Hóa); **Lưu Đức Chi, Lương Ngọc Giáp** (7A NK Hoàng Hóa); **Lê Hải Bằng** (7A PTCSNK Hoàng Hóa); **Vĩnh Long:** Nguyễn Hoàng Quân (9<sup>12</sup> PTCS Tx Vĩnh Long); **Vĩnh Phúc:** Trần Nhật Tân (9CT chuyên C2 Tam Đảo); **Trần Hương Xuân** (A<sup>1</sup> Chuyên Mê Linh); **Nguyễn Hoàng Gia** (7B Chuyên Văn - Toán Vĩnh Tường); **Bắc Ninh:** Trương Thị Thảo (9 NK Tiên Sơn); **Hoàng Tùng** (9 Chuyên Toán NK Tiên Sơn); **Nghệ An:** Phan Thanh Minh (8 Toán NK Tp Vinh); **Nguyễn Như Phong** (6A PTCS Đông Vinh); **Nguyễn Xuân Giáo** (9B NK Nghĩa Đàn); **Phan Thanh Trùng** (9 Toán A PTH Phan Bội Châu); **Tp Hồ Chí Minh:** Lưu Bọan Vinh (9A<sup>1</sup> THCS Chánh Hưng); **Hà Nội:** Lê Anh Vinh (8<sup>11</sup> PTCS Giảng Võ); **Nguyễn Hoài Anh** (7 Toán Chuyên Từ Liêm); **Nguyễn Đức Tiến** (9<sup>1</sup> PTCS Chu Văn An); **Quảng Ninh:** Đặng Thị Tố Như (9T THCS NK Hải Linh); **Bạc Liêu:** Trần Anh Khoa, Lương Thế Nhân (8A Chuyên Bạc Liêu); **Quảng Ngãi:** Trần Phú Khanh (8T Chuyên Lê Khiết); **Nguyễn Văn Khải** (9 Toán Chuyên Nghĩa Hải); **Trần Thị Bích Thủy** (6 Toán Chuyên Lê Khiết); **An Giang:** Hoàng Thanh Lâm (9T Chuyên Thoại Ngọc Hầu Long Xuyên).

DẶNG VIỄN

**Bài T2/138:** Giả sử a, b, c và d là các số nguyên dương thỏa mãn hai hệ thức  $b^2 + 1 = ac$  và  $c^2 + 1 = bd$ .

Chứng minh rằng:  $a + c = 3b$  và  $b + d = 3c$

**Lời giải:** Giả sử phương trình  $x^2 + y^2 + 1 = pxy$  (1) với  $p \in \mathbb{N}^*$  có nghiệm  $(x, y)$  với  $x, y \in \mathbb{N}^*$ .

Gọi tập hợp tất cả các nghiệm này là M. Giả sử  $(x_0, y_0) \in M$  thỏa mãn  $x_0 + y_0 \leq \bar{x} + \bar{y}$  với mọi  $(x, y) \in M$ .

\* Nếu  $x_0 = y_0$  thì thay vào (1) ta có

$$2x_0^2 + 1 = px_0^2 \Rightarrow 1 = (p - 2)x_0^2 \Rightarrow p = 3$$

\* Nếu  $x_0 \neq y_0$  thì do vai trò bình đẳng của x và y ở (1) nên có thể giả sử  $x_0 < y_0$ .

Xét phương trình:  $y^2 - px_0y + x_0^2 + 1 = 0$  (2) với ẩn y thì  $y_0$  là một nghiệm của (2).

Gọi  $y_1$  là nghiệm còn lại của (2) thì theo định lý Vi-et ta có:

$y_0 + y_1 = px_0$  và  $y_0y_1 = x_0^2 + 1$ . Ta có  $(x_0, y_1) \in M \Rightarrow y_0 \leq y_1$ . Từ hai hệ thức trên lại có:

$$\begin{aligned} x_0^2 + 1 - px_0 &= y_0y_1 - y_0 - y_1 = \\ &= (y_1 - 1)(y_0 - 1) - 1 \geq x_0^2 - 1 \end{aligned}$$

(Vì  $y_1 \geq y_0 > x_0$ )  $\Rightarrow px_0 \leq 2 \Rightarrow p = 1$  hoặc  $p = 2$ . Nhưng  $x^2 + y^2 + 1 > 2xy > xy$  với  $x, y \in \mathbb{N}^*$  nên (1) không có nghiệm nguyên dương khi  $p = 1$  hoặc  $p = 2$ .

Chứng tỏ: Nếu (1) có nghiệm nguyên dương với  $p \in \mathbb{N}^*$  thì  $p = 3$ .

Áp dụng kết quả trên vào bài toán ta thấy:

$$\text{Từ } b^2 + 1 = ac \Rightarrow b^2 + 1 : c \Rightarrow b^2 + c^2 + 1 : c$$

$$(3). \text{ Tương tự thì cũng có } c^2 + b^2 + 1 : b \quad (4).$$

$$\text{Vi } b^2 + 1 : c \Rightarrow (b, c) = 1$$

Do đó từ (3), (4) dẫn đến  $b^2 + c^2 + 1 : bc \Rightarrow b^2 + c^2 + 1 = pbc$  với  $p \in \mathbb{N}^*$ . Do  $b, c \in \mathbb{N}^*$  và kết quả đã chứng minh ở trên thì  $p = 3 \Rightarrow b^2 + c^2 + 1 = 3abc \Rightarrow ac + c^2 = 3abc \Rightarrow a + c = 3b$  (vì  $c \in \mathbb{N}^*$ ). Tương tự như trên cũng có  $b + d = 3c$ .

**Nhận xét:**

1. Bài toán trên có thể giải theo những cách khác, nhưng nói chung đều đi đến chứng minh: "Nếu (1) có nghiệm nguyên dương thì  $p = 3$  (với  $p \in \mathbb{N}^*$ )". Chẳng hạn có thể dựa vào  $(x_0, y_0) \in M$ , nhưng  $x_0 \leq \bar{x}$ ;  $\forall (x, y) \in M$  (chứ không xét  $x_0 + y_0 \leq \bar{x} + \bar{y}$  như lời giải trên). Khi đó (2) có các nghiệm  $y_0, y_1 \geq x_0 \Rightarrow 2x_0^2 + 1 - px_0^2 = 0 \Rightarrow px_0^2 \leq 2x_0^2 + 1 \leq 3x_0^2 \Rightarrow p \leq 3$ . Nhưng  $px_0y = x_0^2 + y_0^2 + 1 > 2x_0y_0 \Rightarrow p > 2$ . Từ đó  $p = 3$ .

2. Một số bạn làm quá gọn nhưng lại mắc sai lầm. Chẳng hạn, trừ từng vế của hai hệ thức ở giả thiết dẫn đến

$$3b(b + d) = 3c(a + c). \text{ Sau đó "đễ thấy" } b \neq c \text{ nên } 3b = a + c \text{ và } b + d = 3c \quad (2).$$

$$\text{Hoặc là xét phương trình } X^2 - 3bX + b^2 + 1 = 0$$

có 2 nghiệm phân biệt  $X_1, X_2$  thỏa mãn:  $X_1 + X_2 = 3b$  và  $X_1X_2 = b^2 + 1$ , mà  $a, c = b^2 + 1$  "nên"  $a + c = 3b$  (2)

3. Các bạn có lời giải đúng và trình bày mạch lạc hơn là: **Nguyễn Sơn Hải**, 9T, Lam Sơn; **Thanh Hóa:** **Hoàng Tùng**, 9T Tiên Sơn; **Bắc Ninh:** **Lưu Tiến Đức**, 8B; **Chuyên ứng Hòa, Hà Tây:** **Phạm Ngọc Huy**, 9T; **Nguyễn Bình Khiêm**, **Đồng Nai:** **Nguyễn Thị Minh Thoa**, 9C; **Ngọc Lâm, Hà Nội:** **Nguyễn Ngọc An Phương**, 8T; **Cai Lậy, Tiền Giang:** **Trần Quốc Hùng**, 9TA; **Phan Bội Châu, Vinh, Nghệ An:** **Trần Vĩnh Trung**, 9s; **Lý Tử Trọng, Trà Vinh:** **Trần Nguyễn Thọ**, 9T1; **Hà Tĩnh:** **Trần Tuấn Anh**, 9T; **Lê Quý Đôn, Khánh Hòa:** **Đặng Ngọc Tuấn**, 9T; **Tiên Hải, Thái Bình**.

LÊ THỐNG NHẤT



**Bài T3/238 : Giải phương trình**

$$x^3 + 2\sqrt{7}x^2 + 7x + \sqrt{7} - 1 = 0$$

**Lời giải :**  $x^3 + 2\sqrt{7}x^2 + 7x + \sqrt{7} - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow x(x + \sqrt{7})^2 + \sqrt{7} - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x + \sqrt{7})^2 - 1 + x + \sqrt{7} - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x[(x + \sqrt{7} + 1)(x + \sqrt{7} - 1)] + x + \sqrt{7} - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + \sqrt{7} - 1)[x^2 + (\sqrt{7} + 1)x + 1] = 0$$

- Nếu  $x + \sqrt{7} - 1 = 0$  thì ta có  $x_1 = 1 - \sqrt{7}$  (1)

- Nếu  $x^2 + (\sqrt{7} + 1)x + 1 = 0$  thì ta có :

$$\Delta = (\sqrt{7} + 1)^2 - 4 = 4 + 2\sqrt{7} > 0$$

$$\text{Vậy có } x_2 = \frac{-(\sqrt{7} + 1) + \sqrt{4 + 2\sqrt{7}}}{2} \quad (2)$$

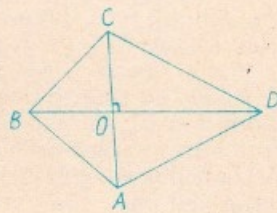
$$x_3 = \frac{-(\sqrt{7} + 1) - \sqrt{4 + 2\sqrt{7}}}{2} \quad (3)$$

Tóm lại phương trình có 3 nghiệm (1), (2), (3) như trên.

**Nhận xét :** Có rất nhiều bạn gửi lời giải. Hầu hết các lời giải đều giải đúng như lời giải trên.

TỔ NGUYÊN

**Bài T4/238 :** Cho tứ giác ABCD với hai đường chéo vuông góc và  $AB > CD$ . Chứng minh rằng ABCD không phải là tứ giác ngoại tiếp.



**Lời giải :**

Điều kiện  $AB > CD$  phải thay bằng  $AB < BC < CD$  thì đề bài mới đúng (hoặc  $AB \neq BC \neq CD$ ).

Theo định lý Pytago ta có :

$$BC^2 - AB^2 = (CO^2 + BO^2) - (BO^2 + OA^2) = (CO^2 + DO^2) - (OA^2 + DO^2) = CD^2 - AD^2$$

$$\text{Dẫn đến } (BC + AB)(BC - AB) = (CD + AD)(CD - AD) \quad (1)$$

Nhưng do  $BC < CD$  nên  $BO < OD$ . Do đó :

$$AB < AD \text{ và từ đó ta có } BC + AB < CD + AD \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra :  $BC + AD > CD + AB$ . (đpcm)

**Nhận xét :**

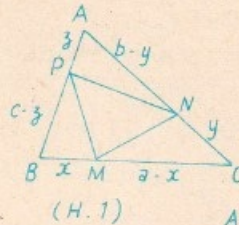
Các bạn sau đây đã nhận xét đúng về sơ xuất của đề bài và đã giải sau khi thay đổi lại giả thiết :

**Bắc Ninh :** Trương Thị Thảo, 9NK Tiên Sơn, Hoàng Tùng, 9CT Tiên Sơn, Nguyễn Thạc Hiếu, 7A NK Tiên Sơn. **Hải Dương :** Trần Quang Đại, 9T1.PTNK tỉnh, Nguyễn Thị Hương, 9B NK Thanh Hà ; **Hà Nội :** Nguyễn Trung Kiên 8CT Từ Liêm, Nguyễn Đình Hà, 8A1 Nguyễn Trường Tộ, Nguyễn Thị Minh Thoa, 9C Ngọc Lâm, Gia Lâm, Lê Cường, 9M Mari Quyri ; Lê Anh Vinh, 8A1 Giảng Võ ; **Nam Định :** Trần Quang Vinh, 8T NK Ý Yên, Phùng Văn Huân 8 NK Giao Thủy, Nguyễn Công Tuấn, 8T Trần Đăng Ninh ; **Thanh Hóa :** Đàm Mạnh Tuấn, Lê Tiến Trung, 9T Lam Sơn, Tống Thành Vũ, 9B, NK Tĩnh Gia, Mai Việt Hưng, 9TN NK Bim Sơn, Hoàng Trung Phương, 9B Hà Châu, Hà Trung, Đàm Thị Hà, 8T Triệu Sơn, Lê Ngọc Giang 9T NK Hoằng Hóa ; **Nghệ An :** Nguyễn Văn Vinh, 9A, Hưng Lộc, Vinh, Phan Việt Bắc, 9TA Phan Bội Châu ; **Hà Tĩnh :** Phan Công Đức, 9T1, NK Hà Tĩnh ; **Quảng Bình :** Lê Quang Trung, 8 T.Y. Phạm Xuân Tiến, 8T, NK Hải Định, Đồng Hới ; **Thừa Thiên - Huế :** Huỳnh Công Phước, 9, Nguyễn Tri Phương ; **Khánh Hòa :** Trần Tuấn Anh, 9T, Lê Quý Đôn ; **Đồng Nai :** Võ Hữu Danh, 8T Nguyễn Bình Khiêm, **Biên Hòa :** HCM ; Chung Nhân Phú, 9T1 Nguyễn An Khương, Hóc Môn ; **An Giang :** Hoàng

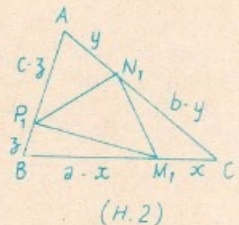
Thanh Lâm, 9T Thoại Ngọc Hầu, Long Xuyên ; **Bạc Liêu :** Trương Yến Nhi, 8A Chuyên Bạc Liêu, Trần Anh Khoa, 8A, Chuyên Bạc Liêu ; Trần Thế Minh, 8A Chuyên Bạc Liêu.

VU KIM THIÊN

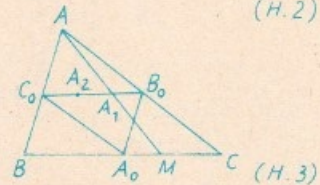
**Bài T5/238.** Cho tam giác ABC với các điểm M (nằm giữa B, C) ; N (nằm giữa C, A) ; P (nằm giữa A, B). Gọi  $A_1, B_1, C_1$  là các trung điểm tương ứng của AM, BN, CP. Chứng minh rằng tỉ số diện tích các tam giác  $A_1B_1C_1$ , MNP không phụ thuộc vào vị trí của các điểm M, N, P.



(H.1)



(H.2)



(H.3)

**Lời giải.** Trước hết ta phát biểu và chứng minh bổ đề sau đây : "Nếu lấy trên các cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC các điểm tương ứng M, N, P và các điểm  $M_1, N_1, P_1$  lần lượt đối xứng với M, N, P qua các trung điểm tương ứng của BC, CA, AB thì diện tích các tam giác  $M_1N_1P_1$  và MNP bằng nhau". Đặt a, b, c và x, y, z là các độ dài của BC, CA, AB và BM, CN, AP, ta có các số đo ghi trong hình 1 và hình 2. Coi  $S(ABC)$  là đơn vị, ta có chẳng hạn trong h.1 :  $S(BMP) = x(c - z) : ac, \dots$  Do đó, từ  $\triangle ABC$ , ta có thể so sánh hai tam giác đang xét bằng các so sánh tổng diện tích của ba tam giác còn lại trong hai trường hợp tương ứng như sau :

$A_2, B_2, C_2$  cũng tương ứng thuộc  $B_0C_0, C_0A_0, A_0B_0$ . Áp dụng bổ đề trên, ta có  $S(A_2B_2C_2) = S(A_1B_1C_1)$ . Ta có  $\triangle ABC \sim A_0B_0C_0$  (cạnh tương ứng song song). Trên hai cạnh tương ứng BC và  $B_0C_0$  ta có  $A_2B_0 : A_2C_0 = A_1C_0 : A_1B_0 = MB : MC$  (vì  $A_1B_0 \parallel MC$ ), suy ra  $A_2$  và M là hai phần tử tương ứng trong hai tam giác đồng dạng đó. Tương tự, ta cũng có các phần tử tương ứng :  $B_2$  với N,  $C_2$  với P. Vậy  $\triangle A_2B_2C_2$  tương ứng với  $\triangle MNP$  và do đó chúng đồng dạng, và ta có  $S(A_2B_2C_2) : S(MNP) = 0,5^2 = 0,25 = kd$ . Mà  $S(A_1B_1C_1) = S(A_2B_2C_2)$  nên ta có đpcm.

**Nhận xét.** Có 74 bài giải, tất cả đều giải đúng với các cách giải khác nhau. Trong số đó, có thể nêu cách giải đặc sắc sau đây (tiếc rằng người giải không ghi tên và địa chỉ) : Gọi I, J, K là các trung điểm tương ứng của MN, NP, PM, ta có chẳng hạn  $B_1J \parallel A_1K$  (vì cùng  $\parallel AB$ ), suy ra  $S(B_1A_1K) = S(JA_1K)$ , ... sau đó dựa vào lúc giác lối  $A_1KB_1KJ$  để chứng minh  $S(A_1B_1C_1) = S(IJK) = 0,5S(MNP)$  bằng cách so sánh tổng diện tích ba tam giác còn lại tương ứng. Lời giải tốt gồm có : **Hải Dương :** Tô Minh Hoàng (8T PINK Tĩnh) ; **Mai Huy Kiên** (9T1.PINK Tĩnh). **Thanh Hóa :** Lê Ngọc Giang (9T NK Hoằng Hóa). **Nam Định :** Trần Quang Vinh, Hoàng Đình Tuấn (8 Toán NK Ý Yên). **Nghệ An :** Nguyễn Hồng



Đức (9A1 NK Yên Thành); Hoàng Minh Phúc (9B Nghi Liên, Nghi Lộc). **Vinh Phúc**: Nguyễn Thanh Tú (9B Chuyên Toán Yên Lạc). **Hà Tĩnh**: Nguyễn Anh Tú (9T1 PTTHNK Tĩnh). **Thái Bình**: Đặng Ngọc Tuấn (9T PTCSNK Tiên Hải).

DẶNG VIỄN

**Bài T6/238**: Cho dãy số thực  $\{x_n\}$  thỏa mãn các điều kiện:  $x_1 = 2$ ;  $x_{n+1} = \frac{x_n^4 + 1}{5x_n}$   $\forall n \geq 1$ .

Chứng minh các bất đẳng thức sau:

$$\frac{1}{5} < x_{n+1} < 2 \quad \forall n \geq 1.$$

**Lời giải** (của Trần Tuấn Anh - 9 Toán Trường Lê Quý Đôn, Nha Trang): Vì  $x_1 = 2 > 0$  nên từ công thức xác định dãy  $\{x_n\}$  suy ra  $x_n > 0 \quad \forall n \geq 1$ . Do đó,  $\forall n \geq 1$  ta có:

$$x_{n+1} = \frac{1}{5x_n} \left( x_n^4 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right) \geq \frac{4}{5x_n} \sqrt[4]{x_n^4 \cdot \frac{1}{27}} = \frac{4\sqrt[4]{3}}{15}$$

Hơn nữa, dễ thấy,  $x_n$  là số hữu tỉ  $\forall n \geq 1$ .

Vì thế,  $x_n \neq \sqrt[4]{\frac{1}{3}} \quad \forall n \geq 1$ . Suy ra, dấu "=" trong bất đẳng thức trên không thể xảy ra, nghĩa là ta có:

$$x_{n+1} > \frac{4\sqrt[4]{3}}{15} \quad \forall n \geq 1 \quad (1)$$

Tiếp theo, bằng phương pháp quy nạp theo  $n$ , ta sẽ chứng minh:

$$x_{n+1} \leq 1,7 \quad \forall n \geq 1.$$

$$\text{Với } n = 1 \text{ ta có: } x_2 = \frac{2^4 + 1}{10} = 1,7$$

Giả sử, đã có (2) với  $n = k$  ( $k \geq 1$ ). Khi đó:

$$x_{k+1}^3 \leq (1,7)^3 = 4,913 < 5 \Rightarrow x_{k+1}^4 < 5x_{k+1} \quad (\text{do } x_{k+1} > 0) \quad (3)$$

Hơn thế, từ (1) ta còn có:

$$x_{k+1} > \frac{2}{7} \left( \text{do } \frac{4\sqrt[4]{3}}{15} > \frac{2}{7} \right) \Rightarrow 3,5x_{k+1} > 1 \quad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra:

$$x_{k+1}^4 + 1 < 8,5x_{k+1} \Leftrightarrow \frac{x_{k+1}^4 + 1}{5x_{k+1}} < 1,7, \quad \text{hay}$$

$x_{k+2} < 1,7$ . Điều này cho thấy, ta cũng có (2) với  $n = k + 1$ .

Theo nguyên lý quy nạp, (2) được chứng minh  $\forall n \geq 1$ .

Vậy, tóm lại:

$$\frac{4\sqrt[4]{3}}{15} < x_{n+1} \leq 1,7 \quad \forall n \geq 1 \quad (*)$$

Do  $\frac{4\sqrt[4]{3}}{15} > \frac{1}{5}$  và  $1,7 < 2$  nên từ các bất đẳng thức trên ta có các bất đẳng thức cần chứng minh trong đề bài.

**Nhận xét**: 1<sup>o</sup>/ Bằng phương pháp khảo sát hàm số, các bạn Trần Nam Dũng (11T PTTH Phan Bội Châu, Vinh) và Phùng Đức

Tuấn (11CT PTNK Hải Hưng) cũng đã chứng minh được các bất (\*)

2<sup>o</sup>/ Bằng phương pháp của Lời giải nêu trên, các bạn Hoàng Tùng (lớp 9 Trường NK Tiên Sơn, Bắc Ninh) và Lê Hồng Hà (11A PTCT DHSP Vinh) đã chứng minh được rằng:

$$\frac{4\sqrt[4]{3}}{15} < x_n < \frac{3}{2} \quad \forall n \geq 3.$$

Tuy nhiên, cũng bằng phương pháp đó, ta còn có thể chứng minh được bất chặt hơn:

$$\frac{4\sqrt[4]{3}}{15} < x_n < \frac{5}{4} \quad \forall n \geq 3.$$

3<sup>o</sup>/ Đại đa số các bạn gửi Lời giải tới Tòa soạn đều chứng minh bài toán bằng phương pháp khảo sát hàm số. Nhiều bạn đã cố gắng chứng minh rằng dãy  $\{x_n\}$  là dãy giảm thực sự. Tuy nhiên, tất cả các chứng minh của các bạn đều sai, do các bạn đã mắc phải một trong các sai lầm sau:

- Nhầm lẫn trong so sánh các số.
- Không thuộc các tính chất cơ bản của bất đẳng thức.

• Không nắm vững các suy luận logic cơ bản. Chẳng hạn, không ít bạn đã cho rằng: "Nếu không có  $x_{n+1} > x_n \quad \forall n \geq 1$  thì phải có  $x_n < x_{n+1} \quad \forall n \geq 1$  (?!)".

4<sup>o</sup>/ Do sơ suất, đề bài đã được in ra không chính xác ( $x_n$  đã thế chỗ  $x_{n+1}$  trong dãy bất cần chứng minh). Sơ suất này đã được tất cả các bạn gửi lời giải mở lòng khoan dung mà lượng thứ cho.

NGUYỄN KHẮC MINH

**Bài T7/238**: Hãy xác định tất cả các bộ ba số thực  $(a, b, c)$  sao cho hàm:

$$f(x) = ax^3 + 6x^2 + cx + 1$$

có tính chất:  $|f(x)| \leq 1$  với mọi  $x \in [-1; 1]$ .

**Lời giải**: Từ  $f(x) \leq 1 \quad \forall x \in [-1; 1]$  suy ra:

$$x(ax^2 + bx + c) \leq 0 \quad \forall x \in [-1; 1].$$

Từ đó ta còn có:  $-x(ax^2 - bx + c) \leq 0 \quad \forall x \in [-1; 1]$

Suy ra:  $-x^2[(ax^2 + c)^2 - b^2x^2] \geq 0 \quad \forall x \in [-1; 1]$  Dẫn tới:  $(ax^2 + c)^2 \leq b^2x^2 \quad \forall x \in [-1; 1]$  (\*)

Cho  $x = 0$ , từ (\*) ta được  $c = 0$ . Khi đó  $f(x)$  là hàm:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + 1$$

Do  $-1 \leq f(x) \leq 1 \quad \forall x \in [-1; 1]$  nên  $-1 \leq f(1) \leq 1$  và  $-1 \leq f(-1) \leq 1$ , hay:

$$\begin{cases} -1 \leq a + b + 1 \leq 1 \\ -1 \leq -a + b + 1 \leq 1 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra: } \begin{cases} -2 \leq b \leq 0 \quad (1) \text{ và} \\ -(b+2) \leq a \leq -b \end{cases}$$

$$\begin{cases} -(b+2) \leq -a \leq -b \\ -(b+2) \leq -a \leq -b \end{cases}$$

$$\Rightarrow |a| \leq \min\{-b, b+2\} \quad (2).$$

Ngược lại, với  $c = 0$  và  $a, b$  thỏa (1), (2) ta có: với  $x \in [-1; 1]$  thì:  $ax \leq |ax| \leq |a| \leq -b \Rightarrow ax + b \leq 0$

$ax \geq -|ax| \geq -|a| \geq -(b+2) \Rightarrow ax + b \geq -2$

Như vậy:  $-2 \leq ax + b \leq 0 \quad \forall x \in [-1; 1]$ .

Suy ra:  $-2 \leq -2x^2 \leq ax^3 + bx^2 \leq 0 \quad \forall x \in [-1; 1]$

hay:



$$|f(x)| \leq 1 \quad \forall x \in [-1; 1]$$

Vậy, tất cả các bộ ba số cần tìm là tất cả các bộ  $(a, b, 0)$  với  $a, b$  thỏa (1) và (2).

**Nhận xét:** Có rất nhiều bạn gửi lời giải tới Tòa soạn. Tuy nhiên, trong số các lời giải mà chúng tôi nhận được có rất ít lời giải đúng. Các bạn sau đây có lời giải đúng:

Vũ Duy Tuấn (12A PTTH Ngô Sĩ Liên, Bắc Giang); Lê Xuân Thành (PTTH Hạ Long, Quảng Ninh); Lê Tuấn Anh (12B PTCT ĐHKHTN ĐHQG Hà Nội); Trần Nam Dũng (11CT PTTH Phan Bội Châu, Vĩnh); Hồ Sỹ Ngọc (10A PTCT ĐHSP Vinh Nghệ An); Trần Chí Hòa (PTTHNK Quảng Bình); Trần Thanh Tùng (12A6 PTTH Lê Hồng Phong TP HCM) và Mai Thanh Dũng (11T Trường Nguyễn Du, ĐakLak).

NGUYỄN KHẮC MINH

**Bài T8/238. Xác định các góc của tam giác ABC biết rằng**

$$A + C = 120^\circ \text{ và } \frac{b+c}{b+a} = 2\cos C - 1$$

**Lời giải.** Các bài giải gửi đến được chia thành ba nhóm. Nhóm 1 giải theo phương pháp chủ yếu dựa vào biến đổi lượng giác. Nhóm 2 giải theo phương pháp chủ yếu dựa vào biến đổi đại số và nhóm 3, kết hợp giữa hình học, lượng giác và đại số.

**Cách 1:** Từ giả thiết, suy ra ngay  $B = 60^\circ$  và:

$$\begin{aligned} \frac{\sin B + \sin C}{\sin B + \sin A} &= 2\cos C - 1 \\ (\text{dùng định lý hàm số sin}) \\ \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + \sin(120^\circ - A)}{\frac{\sqrt{3}}{2} + \sin A} &= 2\cos(120^\circ - A) - 1 \\ \Leftrightarrow \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + \sin A}{\frac{\sqrt{3}}{2} + \sin A} &= 2\cos(120^\circ - A) - 1 \\ \Leftrightarrow \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos A - \frac{1}{2}\sin A}{\frac{\sqrt{3}}{2} + \sin A} &= \\ &= 2\left(-\frac{1}{2}\cos A + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin A\right) - 1 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{3}\cos^2 A + 2\sqrt{3}\cos A = -2\sin A\cos A$$

$$\Leftrightarrow \cos A[\sqrt{3}(1 + \cos A) + \sin A] = 0 (*)$$

Do  $0 < A < 180^\circ$  nên

$$\sqrt{3}(1 + \cos A) + \sin A > 0.$$

$$\text{Vì vậy } (*) \Leftrightarrow \cos A = 0 \Leftrightarrow A = 90^\circ.$$

$$\text{Kết luận: } A = 90^\circ; B = 60^\circ; C = 30^\circ.$$

**Cách 2.** Ta có  $B = 60^\circ$ . Sử dụng định lý hàm số cos, ta có:

$$\begin{aligned} \frac{b+c}{b+a} &= 2\cos C - 1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{b+c}{b+a} &= \frac{a^2 + b^2 - c^2 - ab}{ab} \\ \frac{1}{2} &= \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \Leftrightarrow a^2 + c^2 - b^2 = \\ ac &\Leftrightarrow b^2 - c^2 = a^2 - ac \quad (2.) \text{ Thế (2) vào (1),} \\ \text{ta được:} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \frac{b+c}{b+a} &= \frac{a^2 + a^2 - ac - ab}{ab} \\ \Leftrightarrow \frac{b+c}{b+a} &= \frac{2a - b - c}{b} \Leftrightarrow (a - 2c)(b + c) = \\ 0 &\Leftrightarrow a = 2c. \end{aligned}$$

Do vậy  $\cos A = 0$ , hay  $A = 90^\circ$  và  $C = 30^\circ$ .

**Cách 3.** Từ điều kiện  $A + C = 120^\circ$  suy ra  $B = 60^\circ$ . Hạ  $AH \perp BC$ . Ta có:  $HAB = 30^\circ$ ,  $HB = \frac{c}{2}$ ;  $HC = a - \frac{c}{2}$ . Trong tam giác

$$\text{vuông } AHC: \cos C = \frac{HC}{AC} = \frac{2a - c}{2b}.$$

$$\text{Suy ra: } \frac{b+c}{b+a} = 2\cos C - 1 \Leftrightarrow \frac{b+c}{b+a} = 2\frac{2a-c}{2b} - 1$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow b^2 &= a^2 - bc + \frac{1}{2}ab - \frac{1}{2}ac \Leftrightarrow a^2 + c^2 - ac \\ &= a^2 - bc + \frac{1}{2}ab - \frac{1}{2}ac \Leftrightarrow (b+c)(a-2c) = \\ 0 &\Leftrightarrow a = 2c. \end{aligned}$$

$$\text{Do đó: } b = c\sqrt{3} \Leftrightarrow \cos C = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow C = 30^\circ.$$

$$\text{Suy ra } A = 90^\circ.$$

**Nhận xét:** Các bạn sau đây có lời giải tốt:

**Trà Vĩnh:** Trần Huỳnh Thế Khanh, Trần Quang Khải, Phạm Thế Nhị Trường, Lâm Đồng: Trương Anh Tuấn, Nguyễn Quốc Duy, Bến Tre: Nguyễn Phương Như, Nguyễn Nhật Nam, Bạc Liêu: Lương Thế Nhân, Quảng Bình: Nguyễn Trung Kiên, Nguyễn Văn Bình, Đỗ Hải Phú, Dương Lê Nam, Nguyễn Việt Đức, Trần Hữu Lục, Trương Vĩnh Lâm, Trần Chí Hòa. **Thái Bình:** Nguyễn Văn Thanh, Nguyễn Nam Hà, Bùi Thanh Hùng, Ninh Bình: Vũ Hải Châu, Mỹ Tho: Châu Công Điền, Tiền Giang: Nguyễn Phan Thành, Hà Tây: Nguyễn Trung Phương, Nguyễn Mạnh Thắng, Lưu Tiến Đức, Nguyễn Quang Huy, Nguyễn Hà Duy, Phan Thanh Hồng, Nguyễn Trung Thành, Tô Ngọc Phong, Lê Thành Nam, Thái Nguyên: Vũ Tuấn Anh, Đàm Công Dũng, Lê Quang Huy, Bình Định: Nguyễn Đình Tuấn, Trần Hoàng Đạo, Vĩnh Long: Nguyễn Thị Hào, Ngô Quang Hiến, Hoàng Tùng, Nguyễn Xuân Sang, Trương Thị Thao, Trần Việt Phương, Phạm Huy Đức. **TP HCM:** Lê Anh Minh, Nguyễn Lê Lục, Nguyễn Duy Kiệt, Trịnh Lê Tuấn, Lê Quang Năm, Nghệ An: Nguyễn Văn Tăng, Ngô Anh Tuấn, Hồ Sỹ Ngọc, Nguyễn Ngọc Hà, Đặng Đức Hạnh, Trần Nam Dũng, Phan Huy Hoàng, Trần Thanh Hùng, Nguyễn Quang Minh, Phan Văn Anh, Nguyễn Thanh Hải, Nguyễn Tài Tuấn, Phan Thế Anh, Nguyễn Cảnh Khánh, Hoàng Minh Phúc, Nguyễn Đình Quân, Nguyễn Khải Lâm, Nguyễn Trung Hòa, Lê Hồng Hà, Phạm Ngọc Huy, Nguyễn Văn Đức, Dương Thông Sắc, Đặng Xuân Thành, Huy Ngọc, Phan Việt Tiến, Lê Văn Dũng, Nguyễn Thịnh, Tôn Bích Hoài, Nguyễn Xuân Khoa, Nguyễn Huy Vũ. **Thừa Thiên - Huế:** Lê Văn Hóa, Đinh Trung Hoàng, Hoàng Trung Hiếu, Trần Như Quang, Phạm Tiến Đạt, Lê Chí Thành, Đặng Nguyễn Nhật Nam, Huỳnh Công Phước, Đinh Trung Hiếu. **Hà Tĩnh:** Nguyễn Thành Trung, Dương Tuấn Anh, Nguyễn Viết Tú, Đặng Văn Cảnh. **Bắc Giang:** Lương Hùng Quang, Phạm Việt Ngọc, Nguyễn Tiến Mạnh, Đặng Hoàng Việt Hà, Vũ Duy Tuấn. **Hưng Yên:** Nguyễn Việt Anh, Vũ Tuấn Long. **Phú Thọ:** Đào Mạnh Thắng, Nguyễn Ngọc Thắng, Nguyễn Kim Sơn, Hà Hoàng Vương, Nguyễn Minh Phương, Trần Thị Hoa Mai, Trần Anh Tuấn, Tạ Đức Dũng, Hoàng Kim Dung. **Nam Định:** Ngô Mạnh Cường, Phùng Văn Huân, Nguyễn Thu Thủy, Nguyễn Công Tuấn, Vũ Thùy Như, Nguyễn Văn Quang, Hoàng Kim. **Hải Phòng:** Đặng Anh Tuấn: Vũ Trọng Nghĩa, Phạm Văn Tập, Phạm Dương Hiếu, Nguyễn Bắc Hải, Hà Duy Hưng, Đoàn Mạnh Hà. **Đắk Lắk:** Lê Đình Bình, Lê Mạnh Quý, Nguyễn Thiên Bình, Hoàng Phương, Lê Thế Tân, Trương Xuân Nghiên, Trần Nguyễn Ny, Mai Thanh Dũng, Lê Trọng Vĩnh, Nguyễn Hiếu Thảo. **Yên Bái:** Hoàng Tiến Thông, Lê Minh Đức, Nguyễn Trọng Tuấn, Trần Anh Quang, Bùi Văn Sỹ, Lê Hồng Hải, Nguyễn Tiến Dũng, Nguyễn Xuân Kiên, Tạ Xuân Hưng, Nguyễn Hùng Cường, Nguyễn Trường Phái, Lê Minh Đức, Hoàng Tiến Thông. **Vĩnh Phúc:** Nguyễn Tiến Tân, Nguyễn Duy Tân, Nguyễn Trung Lập, Hoàng Minh Tuấn, Lê Thế Thành, Lê Hồng Phương, Nguyễn Thanh Tú, Đào Xuân Thân, Cao Thế Thu, Nguyễn Đức Toàn, Lưu Tiến Dũng, Lê Hoàng Linh. **Hải Dương:** Nguyễn Đình Sơn, Hoàng Xuân Quý, Đào Thu Mai, Lê Văn, Bùi Thu Thái, Nguyễn Văn Luật, Phùng Đức Tuấn, Vũ Xuân Vinh, Trần Đại Nghĩa, Nguyễn Hồng Thái. **Đà Nẵng:** Nguyễn Thế Dung, Nguyễn Anh Tuấn, Lê Tự Duy Phong, Nguyễn Tấn Phong, Nguyễn Chí Cường, Huỳnh Trần Quốc, Nguyễn Văn Dấu, Đinh Thành Trung, Nguyễn



Ngọc Hải, Nguyễn Tùng Lâm, Trần Việt Dũng, Nguyễn Tấn Hải, Huỳnh Quốc Việt, Nguyễn Hoàng Thành, Phú Yên : Nguyễn Thanh Tuấn, Đặng Thế Mi, Trần Đình Lâm, Quảng Trị : Nguyễn Việt Tiến, Quảng Ninh : Lê Xuân Thành, Hòa Bình : Phạm Phi Long, Nguyễn Quang Hưng, Long An : Nguyễn Thanh Nhân, Khánh Hòa : Trần Tuấn Anh, Gia Lai : Nguyễn Hoàng Lương, Quảng Ngãi : Lê Hoàng Đức Khánh, Tây Ninh : Nguyễn Tấn Duy Nhã, Đồng Tháp : Nguyễn Đăng Triển, Đồng Nai : Võ Hữu Danh, Lê Khắc Huỳnh, Phan Anh Tuấn, Hà Nội : Hoàng Tùng, Mai Xuân Trường, Dương Việt Hùng, Nguyễn Đức Mạnh, Nguyễn Văn Hân, Lê Anh Vinh, Nguyễn Xuân Long, Lê Tuấn Anh, Đỗ Anh Tuấn, Ngô Thanh Tùng, Hoàng Văn, Nguyễn Đức Thọ, Nguyễn Quang Lộc, Nguyễn Đình Vinh, Nguyễn Mạnh Hà, Phạm Hải Trung, Lê Trọng Tuấn, Phạm Công Đình, Nguyễn Sĩ Phong, Vũ Nhật Linh, Thanh Hóa : Lê Xuân Dũng, Nguyễn Hải Sơn, Lưu Văn Mạnh, Nguyễn Thanh Hải, Lưu Thạch Lâm, Cao Thị Phương Loan, Đàm Mạnh Tuấn, Lê Xuân Quyền, Hoàng Trung Tuấn, Đỗ Duy Phong, Lê Hoàng Anh, Cao Xuân Sinh, Vũ Đức Nghĩa, Mai Thị Thu, Nguyễn Duy Hà, Mai Anh Thắng, Mai Đỗ Thị Loan, Nguyễn Trung Phong, Nguyễn Văn Quang, Lê Việt Hùng, Lê Đình Tâm, Trương Minh Tuấn, Lê Ngọc Tình, Đỗ Văn Chiến, Lê Cát Vương, Trương Ngọc Tuyền, Tấn Thành Vũ, Lê Xuân Lâm, Trần Hùng Việt.

NGUYỄN VĂN MẬU

**Bài T9/238.** Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta luôn có :

$$\sqrt{3}\cos A + 2\cos B + 2\sqrt{3}\cos C \leq 4.$$

Khi nào xảy ra dấu "=" ?

**Lời giải**

**Lời giải 1.** Có rất nhiều cách giải bài toán này, sau đây xin giới thiệu lời giải của tác giả để toán. B.D.T cần chứng minh tương đương

$$\text{với } \cos A + \frac{2}{\sqrt{3}}\cos B + 2\cos C < \frac{4}{\sqrt{3}},$$

hay là

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2}\cos A + 1 \cdot \frac{1}{2}\cos B + 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\cos C \leq 1; \quad (1)$$

Gọi  $\vec{a} = \frac{\vec{BC}}{BC}$ ,  $\vec{b} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\vec{CA}}{CA}$  và  $\vec{c} = \frac{1}{2} \frac{\vec{AB}}{AB}$ ; thế thì dễ thấy : (1)  $\Leftrightarrow -(\vec{b}\vec{c} + \vec{c}\vec{a} + \vec{a}\vec{b}) \leq 1$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}[\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 - (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2] \leq 1$$

B.D.T này đúng. Thật vậy, vì

$$(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2 \geq 0 \text{ nên}$$

$$\frac{1}{2}[\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 - (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2] \leq \frac{1}{2}(\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right) = 1.$$

Dấu "=" xảy ra khi  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ , nghĩa là :  $\vec{a} = \vec{B'C'}$ ,  $\vec{b} = \vec{C'A'}$ ,  $\vec{c} = \vec{A'B'}$ , trong

đó  $B'C' = 1$ ,  $C'A' = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $A'B' = \frac{1}{2}$  và tam

giác  $A'B'C'$  vuông ở  $A'$  có cạnh huyền  $B'C' = 1$ . Dễ thấy rằng  $A'B'C'$  là một nửa tam giác đều, có :  $\hat{A}' = 90^\circ$ ,  $\hat{B}' = 60^\circ$ ,  $\hat{C}' = 30^\circ$ .

Vậy, dấu "đẳng thức" xảy ra khi và chỉ khi tam giác ABC vuông ở A và là một nửa tam giác đều có  $B = 60^\circ$ ,  $C = 30^\circ$ .

Sau đây là mấy lời giải nữa.

**Lời giải 2.** (của Trần Hùng Việt, 11A, TH chuyên ban Ba Đình, Nga Sơn, Thanh Hóa và Vũ Hải Châu, trường Lương Văn Tụy, Ninh Bình).

B.D.T cần chứng minh tương đương với :

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{2} + 2 + \sqrt{3}\cos(B + C) - 2\cos B -$$

$$\begin{aligned} & - 2\sqrt{3}\cos C \geq 0, \\ \text{hay là } & \left( \frac{1}{2}\sin^2 B + \frac{3}{2}\sin^2 C - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin B \sin C \right) + \\ & + \left( \frac{1}{2}\cos^2 B + \frac{3}{2}\cos^2 C + 2 + \sqrt{3}\cos B \cos C - \right. \\ & \left. - 2\cos B - 2\cos C - 2\sqrt{3}\cos C \right) \geq 0, \\ \Leftrightarrow & \left( \frac{1}{\sqrt{2}}\sin B - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\sin C \right) + \\ & + \left( \frac{1}{\sqrt{2}}\cos B + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\cos C - \sqrt{2} \right)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

B.D.T. luôn đúng và đó là đ.p.c.m.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\sin B - \sqrt{3}\sin C = 0, \quad (i)$$

$$\cos B + \sqrt{3}\cos C = 2; \quad (ii)$$

Bình phương hai vế (i) và (ii) rồi cộng vế đối vế, ta được :

$$\begin{aligned} & (\sin^2 B + \cos^2 B) + 3(\sin^2 C + \cos^2 C) + \\ & + 2\sqrt{3}\cos(B + C) = 4; \end{aligned}$$

Từ đó suy ra :  $-\cos A = 0$  hay  $A = 90^\circ$ .

Từ (i) ta được :

$$\frac{\sin B}{\sin C} = \frac{\sin(C + A)}{\sin C} = \frac{\cos C}{\sin C} = \sqrt{3}$$

hay  $\cot C = \sqrt{3}$ . Suy ra :  $\hat{C} = 30^\circ$  và do đó :  $B = 60^\circ$

Tóm lại, dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi :  $\hat{A} = 90^\circ$ ,  $\hat{B} = 60^\circ$ ,  $\hat{C} = 30^\circ$ .

**Lời giải 2** (Lời giải vectơ của Trần Nam Dũng, 11T, P1 TH Phan Bội Châu Nghệ An và một số bạn khác). Gọi  $\vec{e}_1$ ,  $\vec{e}_2$ ,  $\vec{e}_3$  lần lượt là các vectơ đơn vị của các cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC, nghĩa là :

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{BC}}{BC}, \quad \vec{e}_2 = \frac{\vec{CA}}{CA}, \quad \vec{e}_3 = \frac{\vec{AB}}{AB}.$$

Thế thì ta có :

$$\begin{aligned} 0 & \leq (2\vec{e}_1 + \sqrt{3}\vec{e}_2 + \vec{e}_3)^2 = \\ & = 4 + 3 + 1 - 2(\sqrt{3}\cos A + 2\cos B + 2\sqrt{3}\cos C). \end{aligned}$$

Từ đó ta được :

$$\sqrt{3}\cos A + 2\cos B + 2\sqrt{3}\cos C \leq 4, \text{ đ.p.c.m.}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi :

$$\begin{aligned} & 2\vec{e}_1 + \sqrt{3}\vec{e}_2 + \vec{e}_3 = \vec{0} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} (\sqrt{3}\vec{e}_2 + \vec{e}_3)^2 = (2\vec{e}_1)^2 \\ (2\vec{e}_1 + \vec{e}_3)^2 = (\sqrt{3}\vec{e}_2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{e}_2\vec{e}_3 = 0 \\ \vec{e}_1\vec{e}_3 = -\frac{1}{2} \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \hat{A} = 90^\circ \\ \hat{B} = 60^\circ \end{cases} \end{aligned}$$

Như vậy, dấu đẳng thức xảy ra khi ABC vuông ở A và có  $B = 60^\circ$ ,  $C = 30^\circ$ .

**Nhận xét :** 1<sup>o</sup>) Rất đông các bạn tham gia giải bài toán trên đây và đa số cho lời giải vectơ, có đến 278 bạn gửi lời giải đến tòa soạn.

2<sup>o</sup>) Một số bạn có nhận xét rằng bài toán T9/238 này là một trường hợp đặc biệt của B.D.T :

$$2yz\cos A + 2xz\cos B + 2xy\cos C \leq x^2 + y^2 + z^2 \quad (1)$$

mà các tác giả Trần Tuấn Diệp và Đỗ Mạnh Môn đã đưa ra trong "Toán học và tuổi trẻ" số 238, tháng 4/1997. Nhiều bạn chứng minh lại B.D.T này bằng phương pháp vectơ hoặc



bằng những phương pháp khác, đưa đến chẳng hạn :

$$(1) \Leftrightarrow (x \sin B - y \sin A)^2 + (x \cos B + y \cos A - z)^2 \geq 0. \quad (1')$$

Thay  $x = 2$ ,  $y = \sqrt{3}$  và  $z = 1$  thì được B.D.T. cần tìm. Để ý rằng B.D.T. (1') đúng với mọi bộ ba số thực  $x, y, z$  và  $A, B, C$  là các góc của một tam giác.

3<sup>o</sup>) Các bạn sau đây có lời giải tốt hơn cả : Hà Nội : Nguyễn Hoàng Minh, 10A, ĐHKHTN ; Nguyễn Quang Lộc và Nguyễn Đức Thọ, 10A ĐHSP - ĐHQG Hà Nội ; Yên Bái : Nguyễn Trọng Tuấn, 11A PTTH chuyên Yên Bái ; Hải Dương : Trần Đại Nghĩa, 11T và Đào Thu Mai, 10T PTTH nâng cao Hải Dương ; Hải Phòng : Nguyễn Bắc Hải, 11 chuyên Tin, PTTH nâng cao Trần Phú ; Ninh Bình : Vũ Hải Châu, trường Lương Văn Tụy, Trần Hùng Việt, 11A1 Ba Đình, Nga Sơn ; Lê Xuân Lâm, trường Lương Đức Bằng, Nghệ An ; Phạm Trung Thành, 101, Trần Nam Dũng 11T, PTTH Phan Bội Châu ; Nguyễn Cảnh Khánh, 11A1, PTTH chuyên ban Huân Thúc Kháng ; Quảng Bình : Nguyễn Trung Kiên, 11A2 TTH chuyên ban Lê Thủy ; Quảng Nam : Nguyễn Văn Đoàn, 12A3, TTH chuyên ban Nguyễn Duy Hiệu, Điện Bàn ; Đắk Lắk : Lê Trọng Vinh, 11T, PTTH chuyên Nguyễn Du, Buôn Ma Thuột.

NGUYỄN DẰNG PHÁT

**Bài T10/238.** Hai tứ diện  $ABCD$  và  $A'B'C'D'$  sắp đặt ở trong không gian sao cho :  $BC \perp D'A'$ ,  $CA \perp D'B'$ ,  $AB \perp D'C'$ ,  $DA \perp B'C'$ ,  $DB \perp C'A'$ . Chứng minh rằng có một điểm  $O$  duy nhất sao cho các đường thẳng  $OA, OB, OC$  và  $OD$  theo thứ tự vuông góc với các mặt phẳng  $(B'C'D')$ ,  $(C'D'A')$ ,  $(D'A'B')$  và  $(A'B'C')$ .

**Lời giải**

Lời giải. a) Chứng minh tồn tại điểm  $O$ . Nếu có điểm  $O$  như vậy thì  $O$  là điểm chung (điểm đồng quy) của bốn đường thẳng  $Ax, By, Cz$  và  $Dt$  lần lượt vuông góc với các mặt phẳng  $(B'C'D')$ ,  $(C'D'A')$ ,  $(D'A'B')$  và  $(A'B'C')$ . Ta chứng minh điều đó.

Vì  $Ax \perp (B'C'D')$  nên  $Ax \perp C'D'$ ,  $By \perp (C'D'A')$  nên  $By \perp C'D'$ . Lại theo giả thiết,  $AB \perp C'D'$ , bởi vậy suy ra  $Ax$  và  $By$  đồng phẳng (vì cùng thuộc mặt phẳng  $\alpha$  đi qua  $AB$  và vuông góc với  $C'D'$ ). Nhưng trong  $\alpha$ ,  $Ax \parallel By$ . Thật vậy, giả sử  $Ax \parallel By$  thì mp  $(B'C'D')$  trùng với mp  $(C'D'A')$  và do đó  $A', B', C'$  và  $D'$  đồng phẳng, trái với giả thiết. Vậy  $Ax$  phải cắt  $By$ , gọi  $Ax \cap By = O$ .

Chứng minh tương tự, ta được :  $Ax$  cắt  $Cz$ ,  $Ax$  cắt  $Dt$ ,  $By$  cắt  $Cz$ ,  $By$  cắt  $Dt$ . Nhưng  $Ax, By$  và  $Cz$  không đồng phẳng. Thật vậy, nếu chúng đồng phẳng, giả sử cùng thuộc mặt phẳng  $\alpha$  thì  $A', B', C'$  và  $D'$  thẳng hàng vì cùng nằm trên một đường thẳng  $\Delta = (C'D') = (D'A') = (D'B')$  vuông góc với  $\alpha$ , mâu thuẫn với giả thiết. Ba đường thẳng  $Ax, By, Cz$  không đồng phẳng mà đôi một cắt nhau, vậy chúng đồng quy ở một điểm  $O$ .

$$Ax \cap By = O \in Cz$$

Chứng minh tương tự :

$$Ax \cap By = O \in Dt$$

suy ra :  $Ax, By, Cz$  và  $Dt$  đồng quy ở một điểm  $O$ .

b) Chứng minh duy nhất. Giả sử ngoài  $O$  còn có  $O'$  cũng thỏa mãn điều kiện nêu trên. Thế thì đường thẳng  $OO'$  vuông góc với cả

bốn mặt phẳng  $(B'C'D')$ ,  $(C'D'A')$ ,  $(D'A'B')$  và  $(A'B'C')$ , nên bốn điểm  $A', B', C'$  và  $D'$  đồng phẳng, mâu thuẫn với giả thiết. Ta được đ.p.c.m.

**Nhận xét :** 1<sup>o</sup>) Số bạn tham gia giải bài toán này không nhiều và nói chung, lời giải còn dài dòng, không sáng sủa, đặc biệt là thiếu chính xác. Chẳng hạn, hai đường thẳng mới đồng phẳng đã vội vàng kết luận chúng cắt nhau, hoặc ba đường thẳng cắt nhau đôi một đã kết luận chúng đồng quy !

2<sup>o</sup>) Nhìn chung, đa số các bạn còn khá lúng túng trong việc giải toán hình học không gian khi sử dụng phương pháp tổng hợp, phương pháp thông thường như đối với bài toán này chẳng hạn.

3<sup>o</sup>) Tuy nhiên, có bạn đã chỉ ra rằng, thực chất đây là một bài toán dựng hình, song không chỉ rõ thực chất dựng hình là ở chỗ nào. Cũng có bạn bàn khoăn về sự tồn tại của hai tứ diện thỏa mãn các điều kiện nêu ra, nhưng lại yên tâm ngay vì sau đã chỉ ra hai tứ diện nối tiếp một hình hộp thoi (hay đặc biệt là hình lập phương) thỏa mãn các điều kiện của bài toán đặt ra. Mặc dầu có những nhận xét như trên, song các bạn này cũng như hầu hết các bạn tham gia giải bài toán trên, không thấy rằng sự tồn tại của hai tứ diện thỏa mãn các điều kiện đặt ra nằm ngay trong phần kết luận của bài toán. Chính phần này hướng dẫn cách phân tích, đồng thời phát biểu kết quả phần biện luận của bài toán dựng hình. Thật vậy, có thể phát biểu bài toán "chứng minh" trên đây dưới dạng một bài toán "dựng hình" như sau :

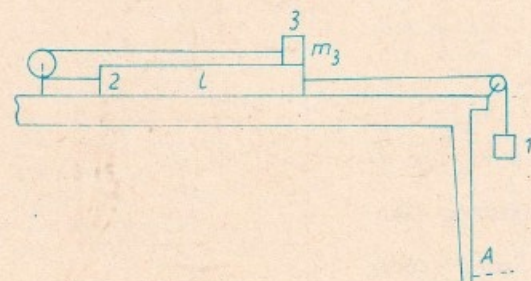
Cho một tứ diện  $ABCD$ . Hỏi có thể tồn tại (cũng tức là có thể dựng được) một tứ diện  $A'B'C'D'$  sao cho :  $BC \perp D'A'$ ,  $CA \perp D'B'$ ,  $AB \perp D'C'$ ,  $DA \perp B'C'$  và  $DB \perp C'A'$  hay không ?

4<sup>o</sup>) Các bạn sau đây có lời giải tốt hơn cả : Nguyễn Sĩ Phong, 11A PTCT, ĐHSP - ĐHQG Hà Nội ; Mai Thanh Dũng, 11T, trường Nguyễn Du, Đắk Lắk ; Nguyễn Minh Phương và Trần Anh Tuấn, 11A PTTH chuyên Hùng Vương, Phú Thọ.

NGUYỄN DẰNG PHÁT

### Bài L1/238

Hệ vật được bố trí như hình vẽ. Ba vật 1, 2, 3 khối lượng đều bằng 1 kg. Dây nối các vật không giãn. Hệ số ma sát ở mọi mặt tiếp xúc đều bằng  $k$ . (Ma sát ở các ròng rọc không đáng kể). Thả tay cho hệ vật chuyển động thì sau  $\sqrt{0,75}$  s vật 3 trượt hết chiều dài 0,5m của vật 2. Tính  $k$ .





**Hướng dẫn giải.** Có thể giải bằng 2 cách : phương pháp động lực học và phương pháp định luật bảo toàn. Dưới đây là cách giải bằng phương pháp định luật bảo toàn.

Vì các vật nối với nhau bằng sợi dây không giãn nên gia tốc các vật đối với mặt đất bằng nhau và bằng  $a$  ; vật 2 và vật 3 chuyển động ngược chiều nhau với cùng gia tốc  $a$ , từ đó quãng đường thực tế mà vật 2, vật 3 đi được là  $s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{0,5}{2} = 0,25m$  (1). Mặt khác

$s = \frac{at^2}{2}$ , suy ra  $a = \frac{2s}{t^2} = 2/3 m/s^2$  (2). Khi

vật 3 trượt hết trên vật 2, thế năng của hệ giảm  $\Delta W_t = m_3gs$  (3). Vận tốc các vật khi đó  $v = at$ . Động năng của hệ

$$W_d = \frac{(m_1 + m_2 + m_3)v^2}{2} \quad (4)$$

Công của lực ma sát

$$A = F_{ms3} \cdot l + F_{ms2} \cdot s = km_3g \cdot l + k(m_3 + m_1)g \cdot s \quad (5)$$

Áp dụng định luật bảo toàn năng lượng  $\Delta W_t = W_d + A$  từ (1) - (5) rút ra  $k = 0,2$ .

**Nhận xét.** Hai em có lời giải xuất sắc : Nguyễn Đức Hải, (11CL, PTTH Lê Hồng Phong, Nam Định) và Vũ Xuân Hoàng Trí (10A1, PTTH Tân Phú, Đình quán, Đồng Nai). Các em có lời giải đúng và gọn : Vũ Tiến Tình, 10A2, THPT Ung Văn Khiêu, Quảng Ninh ; Trần Thiên Giang, 10A chuyên Toán, THPT Vĩnh ; Lương Thu Ngân, 10A2, PTTH Ngô Quyền, Hải Phòng ; Ngô Đức Việt, 11CL Quốc học, Thừa Thiên Huế ; Lê Thành Công, 10A, THPT Mỹ Đức A, Hà Tây ; Lê Hoài An, 11L, trường Lương Văn Chánh, Phú Yên ; Nguyễn Văn Sơn, 9 Li NK Hà Tĩnh ; Trần Anh Tuấn, 10 PTTH chuyên Hùng Vương Phú Thọ ; Lê Hải Thành, 10 Li, THPT năng khiếu Quảng Bình ; Trương Quang Ngọc, 10A1, THPT Đào Duy Từ, Thanh Hóa ; Nguyễn Quốc Khánh, 10A4, trường Lê Quý Đôn, Đà Nẵng ; Nguyễn Hùng Cường 10A1, THPT Trần Cao Vân, Tam Kỳ, Quảng Nam ; Lê Đình Sơn, 10A2, PTNK Hải Dương ; Bùi Văn Thành 11A2, PTTH chuyên Yên Bái ; Dương Minh Ngọc 11A2, PTTH Nguyễn Trần, Hoài Nhơn, Bình Định ; Thi Trần Anh Tuấn, 11A2, PTTH chuyên Trà Vinh ; Lê Trần Thế Duy, 11L, chuyên Lê Khiết, Quảng Ngãi ; Dương Thị Mộng Thảo, 12A4, PTTH Nguyễn Thông, Long An.

MAI ANH

### Bài L2/238

Cho mạch điện xoay chiều như hình vẽ.

$$U_{AB} = 200\sin 100\pi t \text{ (V)} ;$$

$$R_1 = R_2 = R ;$$

$$R^2 + Z_L^2 \leq 625 \cdot 10^6 \quad (1)$$

$$Z_L Z_C = \frac{3R^2 + Z_L^2}{2} \quad (2)$$

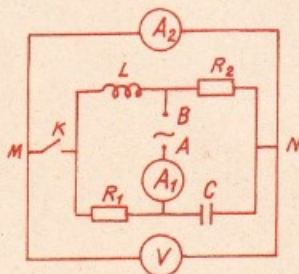
1) Khi K mở, ampe kế  $A_1$  chỉ 2 A.

Tính C.

2) Khi K đóng hãy tìm số chỉ  $A_2$ .

**Hướng dẫn giải.**

Trong từng trường hợp vẽ lại mạch điện và



dùng phương pháp giản đồ vectơ để giải.

1) Khi K mở, ta có đoạn mạch song song AB gồm 2 nhánh : nhánh 1 gồm  $R_1$  và  $L$  mắc nối tiếp ; nhánh 2 gồm  $R_2$  và  $C$  mắc nối tiếp. Ta có

$$Z = \frac{U_{AB}}{I} = 50\sqrt{2} \Omega \quad (3)$$

Xét nhánh 1 :

$$I_1 = \frac{U_{AB}}{\sqrt{R^2 + Z_L^2}} \quad (4)$$

$$\cos \varphi_1 = \frac{R}{\sqrt{R^2 + Z_L^2}} \quad (5)$$

Với nhánh 2 :

$$I_2 = \frac{U_{AB}}{\sqrt{R^2 + Z_C^2}} \quad (6)$$

$$\cos \varphi_2 = \frac{R}{\sqrt{R^2 + Z_C^2}} \quad (7)$$

Vẽ giản đồ vectơ với  $\vec{U}_{AB}$  trên trục gốc (pha), vẽ  $\vec{I}_1, \vec{I}_2$ , suy ra

$$\vec{I} = \vec{I}_1 + \vec{I}_2 \text{ hay } I^2 = I_1^2 + I_2^2 + 2I_1I_2\cos(\varphi_1 + \varphi_2) \quad (8)$$

Từ (1) - (8), rút ra

$$R^2 + Z_L^2 = 625 \cdot 10^6, R = Z_L$$

và  $R = Z_L = 50 \Omega, Z_C = 100 \Omega$

hay  $C = 31,8 \mu F$ .

2) Khi K đóng, ta có sơ đồ

$[R_1 // C] \text{ nt } [R_2 // L]$ .

Dùng phương pháp giản đồ vectơ cho các đoạn mạch AM, MB rồi AB.

$$\vec{I} = \vec{I}_C + \vec{I}_{R_1} = \vec{I}_L + \vec{I}_{R_2} ; \vec{I}_{A_2} = \vec{I}_C - \vec{I}_{R_2} ; \vec{U}_{AB} = \vec{U}_{AM} + \vec{U}_{MB}$$

$$I_{A_2}^2 = I_C^2 + I_{R_2}^2 - 2I_C I_{R_2} \sin(\varphi_1 + \varphi_2)$$

$$U_{AB}^2 = U_{AM}^2 + U_{MB}^2 + 2U_{AM}U_{MB}\cos(\varphi_1 + \varphi_2)$$

$$\text{với } \cos \varphi_1 = \frac{Z_C}{\sqrt{Z_C^2 + R^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}} ;$$

$$\cos \varphi_2 = \frac{Z_L}{\sqrt{Z_L^2 + R^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} ;$$

$$U_{AB} = 100\sqrt{2} \text{ V. Xét tỉ số}$$

$$\frac{U_{AM}}{U_{MB}} = \frac{Z_{AB}}{Z_{MB}} = \frac{4}{\sqrt{10}}$$

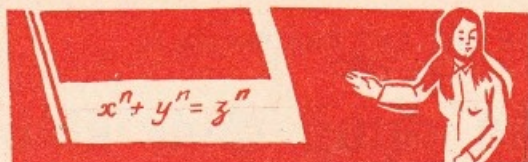
Từ đó suy ra  $U_{AM} \approx 97 \text{ V} ; U_{MB} \approx 77 \text{ V} ; I_{R_2} \approx 1,54 \text{ A} ;$

$I_C = 0,97 \text{ A}$ . Và cuối cùng  $I_{A_2} \approx 0,69 \text{ A}$ .

**Nhận xét.** Em Nguyễn Văn Thuận, 12B, PTTH Năng khiếu Ngô Sĩ Liên, Bắc Giang đã có lời giải gọn và đúng.

MAI ANH





## ĐỀ RA KÌ NÀY

### CÁC LỚP THCS

**Bài T1/242 :** Cho dãy số : 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, ... (liên tiếp một số 1, hai số 2, ba số 3, ...). Hỏi số hạng thứ 500000 là số nào ?

NGUYỄN ĐẾ  
(Hải Phòng)

**Bài T2/242 :**

Cho  $a, b, c$  là 3 số tùy ý thuộc đoạn  $[\alpha; \beta]$  ( $\alpha < \beta$ ) và thỏa mãn điều kiện  $a + b + c = \alpha + \beta + \gamma$  với  $\alpha \leq \gamma \leq \beta$ . Chứng minh rằng :  $a^2 + b^2 + c^2 \leq \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$

PHẠM HỮU HOÀI  
(T.P. Hồ Chí Minh)

**Bài T3/242 :** Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{1}{2} \\ 4x(x^3 - x^2 + x - 1) = y^2 + 2xy - 2 \end{cases}$$

ĐỖ THANH HÂN  
(Mình Hải)

**Bài T4/242 :** Cho hình chữ nhật có chu vi là  $P$  và diện tích  $S$ . Hãy chứng minh :

$$P \geq \frac{32S}{2S + P + 2}$$

LÊ VĂN BẢO  
(Hà Tĩnh)

**Bài T5/242 :** Trong một phẳng cho đường tròn  $(O; R)$  và điểm  $P$  cố định không nằm trên đường tròn ( $OP = d \neq R$ ). Một dây cung  $MN$  thay đổi của đường tròn sao cho luôn được nhìn từ  $P$  dưới một góc vuông :  $\angle MPN = 90^\circ$ .

Tìm quỹ tích điểm  $Q$ , đối xứng với  $P$  qua  $MN$ . Biện luận.

NGUYỄN DẰNG PHÁT  
(Hà Nội)

### CÁC LỚP PTTH

**Bài T6/242 :** Giả sử  $x$  và  $y$  là các số nguyên dương sao cho  $x^2 + y^2 + 6$  chia hết cho  $xy$ .

Chứng minh rằng :  $\frac{x^2 + y^2 + 6}{xy}$  là lập phương của một số tự nhiên.

TRẦN XUÂN DẮNG  
(Nam Định)

**Bài T7/242 :** Chứng minh rằng với đa thức tùy ý  $P(x)$  bậc  $n \geq 1$  có  $n$  nghiệm thực khác nhau  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ta có đẳng thức :

$$\frac{P''(x_1)}{[P'(x_1)]^3} + \frac{P''(x_2)}{[P'(x_2)]^3} + \dots + \frac{P''(x_n)}{[P'(x_n)]^3} = 0$$

TRẦN NAM DŨNG  
(T.P. Hồ Chí Minh)

**Bài T8/242 :** Tam giác  $ABC$  có một góc không nhỏ hơn  $\frac{2\pi}{3}$ . Chứng minh rằng :

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2} \geq 4 - \sqrt{3}.$$

TÔ XUÂN HẢI  
(Hải Dương)

**Bài T9/242 :** Giả sử  $M$  là một điểm thuộc miền tam giác  $ABC$ . Chứng minh rằng :

$$MA + MB + MC \geq 6r$$

với  $r$  là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác  $ABC$ .

NGUYỄN NGỌC BÌNH PHƯƠNG  
(Tiền Giang)

**Bài T10/242 :** Giả sử  $M$  là một điểm chuyển động trong miền tam giác  $ABC$ , là đáy của tứ diện đều  $ABCD$ . Gọi  $A', B'$  và  $C'$  lần lượt là hình chiếu vuông góc của  $M$  trên các mặt  $BCD, CDA$  và  $DAB$ . Chứng minh rằng trọng tâm  $G$  của tam giác  $A'B'C'$  chuyển động trong một miền tam giác  $A_1B_1C_1$  nằm trong tứ diện và song song với đáy  $ABC$ .

HỒ QUANG VINH  
(Nghệ An)

### CÁC ĐỀ VẬT LÝ

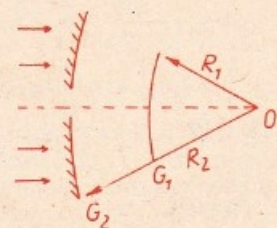
**Bài L1/242 :** Khi quả bóng tennis rơi từ độ cao  $H$  xuống và chạm vào chiếc vợt tennis đứng yên thì nó nảy lên đến độ cao nhỏ hơn, chỉ bằng  $0,9H$ . Hỏi phải cho chiếc vợt tennis chuyển động lên phía trên với vận tốc lúc sắp va chạm bằng bao nhiêu để quả bóng lại nảy lên đến độ cao  $H$  như trước ?

TÔ GIANG  
(Hà Nội)

**Bài L2/242 :**

Nhờ hệ gương cầu đồng tâm, người ta nhận được ảnh của mặt trời trên màn (xem hình vẽ). Có thể thay hệ bằng một thấu kính hội tụ mỏng có tiêu cự  $f$  bằng bao nhiêu để cũng cho ảnh cùng kích thước ? Biết rằng bán kính của các gương

$$R_1 = 12\text{cm}, R_2 = 30\text{cm}.$$



ĐỖ VĂN TOÀN  
(Nghệ An)



## problems in this issue

### FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

**T2/242.** Consider the sequence

1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, ...

(one number 1, then two consecutive numbers 2, then three consecutive numbers 3, ...).

What number is the 500,000<sup>th</sup> term of this sequence?

**T2/242.**  $a, b, c$  are three arbitrary numbers belonging to the segment  $[\alpha; \beta]$  and satisfying the condition  $a + b + c = \alpha + \beta + \gamma$  where  $\alpha \leq \gamma \leq \beta$ . Prove that

$$a^2 + b^2 + c^2 \leq \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2.$$

**T3/242.** Solve the system of equations:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{1}{2} \\ 4x(x^3 - x^2 + x - 1) = y^2 + 2xy - 2 \end{cases}$$

**T4/242.** Let be given a rectangle with perimeter  $P$  and with area  $S$ . Prove that

$$P \geq \frac{32S}{2S + P + 2}.$$

**T5/242.** In the plane, let be given a circle  $(O; R)$  and a fixed point  $P$ ,  $OP = d \neq R$ . A chord  $MN$  of the circle moves so that the angle  $MPN = 90^\circ$ . Find the locus of the point  $Q$ , symmetric of  $P$  about the line  $MN$ . Discuss the problem.

### FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

**T6/242.**  $x, y$  are two positive integers such that  $x^2 + y^2 + 6$  is divisible by  $xy$ . Prove that  $\frac{x^2 + y^2 + 6}{xy}$  is a cube of a whole number.

**T7/242:** Prove that for every polynomial of degree  $n \geq 1$ , having  $n$  real distinct roots  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , holds the following equality:

$$\frac{P''(x_1)}{(P'(x_1))^3} + \frac{P''(x_2)}{(P'(x_2))^3} + \dots + \frac{P''(x_n)}{(P'(x_n))^3} = 0.$$

**T8/242:** The triangle  $ABC$  has an angle not exceeding  $\frac{2\pi}{3}$ . Prove that

$$\lg \frac{A}{2} + \lg \frac{B}{2} + \lg \frac{C}{2} \geq 4 - \sqrt{3}.$$

**T9/242:**  $M$  is a point in the interior of a triangle  $ABC$ . Prove that  $MA + MB + MC \geq 6r$ , where  $r$  is the radius of the incircle of  $ABC$ .

**T10/242:** A point moves in the interior of a triangle  $ABC$ , which is the base of a regular tetrahedron  $ABCD$ . Let  $A', B'$  and  $C'$  be respectively the orthogonal projections of  $M$  on the faces  $BCD$ ,  $CDA$  and  $DAB$ . Prove that the center of gravity  $G$  of the triangle  $A'B'C'$  moves in the interior of a fixed triangle  $A_1B_1C_1$  which lies in the interior of the tetrahedron and in a plane parallel to the base  $ABC$ .

### DÀNH CHO CÁC BAN CHUẨN BỊ THI VÀO ĐẠI HỌC

## Vận dụng điều kiện đồng phẳng của bốn điểm để giải bài toán HÌNH KHÔNG GIAN

CHỮ XUÂN DUNG  
(Hà Nội)

Vận dụng vectơ để giải quyết một bài toán hình học không gian là một vấn đề không đơn giản với học sinh lớp 12 PTTH. Để làm tốt các bài tập loại này thì học sinh phải biết chuyển những yếu tố hình học sang một dạng ngôn ngữ của vectơ. Trong bài viết nhỏ này tôi chỉ xin đưa ra một vấn đề: "Vận dụng điều kiện đồng phẳng của bốn điểm để giải một bài toán hình không gian".

Để chuẩn bị, chúng ta cùng nhau nhắc lại các vấn đề lý thuyết sau:

a) Một bộ gồm 3 vectơ khác vectơ không, không đồng phẳng gọi là một cơ sở của không gian.

b) Một vectơ  $\vec{x}$  bất kì của không gian luôn biểu diễn được một cách duy nhất qua 1 cơ sở là  $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ .

c) Với  $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$  là một cơ sở của không gian, ta có:

$$m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c} = \vec{0} \Leftrightarrow m = n = p = 0.$$

d) Cho 4 điểm  $A, B, C, D$  trong không gian. Bốn điểm này là đồng phẳng  $\Leftrightarrow$

$$\vec{DA} = \alpha\vec{DB} + \beta\vec{DC} \Leftrightarrow \vec{OA} - \vec{OD} = \alpha(\vec{OB} - \vec{OD}) + \beta(\vec{OC} - \vec{OD})$$

$$\Leftrightarrow \vec{OA} = \alpha\vec{OB} + \beta\vec{OC} + (1 - \alpha - \beta)\vec{OD}$$

$$\Leftrightarrow \vec{OA} = \alpha\vec{OB} + \beta\vec{OC} + \gamma\vec{OD} \text{ (với } \alpha + \beta + \gamma = 1)$$

e) Tùy thuộc yêu cầu của bài toán chúng ta phải biết chuyển những yếu tố cấu đó sang ngôn ngữ vectơ; biết cách chọn 1 cơ sở hợp lí, biết cách biểu diễn một vectơ qua 1 cơ sở.

Sau đây là 1 số ví dụ minh họa (lấy trong Bộ đề thi trước đây)

**Ví dụ 1:**

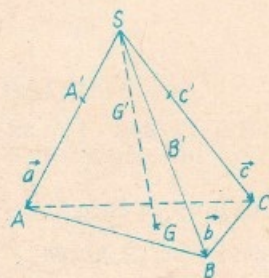
Cho chóp tứ giác  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình bình hành. Gọi  $B', D'$  là điểm chính giữa các cạnh  $SB, SD$ . Mặt phẳng  $(AB'D')$  cắt  $SC$  tại  $C'$ . Chứng minh rằng:

$$SC = 3SC'.$$

**Lời giải:**

Một cơ sở  $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$  với  $\vec{a} = \vec{SA}; \vec{b} = \vec{SB}; \vec{c} = \vec{SD}$  (H. 1)

Đặt:  $\frac{SC'}{SC} = m$ . Ta cần chứng minh:



H.1



$$m = \frac{1}{3}. \text{ Ta có: } \vec{SB} = \frac{1}{2}\vec{b}; \vec{SD} = \frac{1}{2}\vec{c}$$

$$\vec{SC} = m\vec{SC} = m(\vec{SB} + \vec{BC}) = m(\vec{b} - \vec{a} + \vec{c})$$

Theo giả thiết A, B', C', D' đồng phẳng  $\Leftrightarrow \exists(\alpha, \beta, \gamma)$  với  $\alpha + \beta + \gamma = 1$  thỏa mãn

$$\vec{SC} = \alpha\vec{SA} + \beta\vec{SB} + \gamma\vec{SD}$$

$$\Leftrightarrow -m\vec{a} + m\vec{b} + m\vec{c} = \alpha\vec{a} + \frac{\beta}{2}\vec{b} + \frac{\gamma}{2}\vec{c}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -m \\ \frac{\beta}{2} = m \\ \frac{\gamma}{2} = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -m \\ \beta = 2m \\ \gamma = 2m \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -m + 2m + 2m = 1$$

$$(\text{vì } \alpha + \beta + \gamma = 1) \Rightarrow m = \frac{1}{3} \text{ (đpcm)}$$

**Ví dụ 2 :**

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi K là điểm chính giữa của cạnh SC. Một mặt phẳng qua AK cắt các cạnh SB, SD lần lượt tại M và N.

Chúng minh rằng :

$$\frac{SB}{SM} + \frac{SD}{SN} = 3.$$

**Lời giải :** (H. 2)

Chọn cơ sở  $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$  với

$$\vec{SA} = \vec{a}; \vec{SB} = \vec{b} \text{ và } \vec{SD} = \vec{c}.$$

Đặt :

$$\frac{SB}{SM} = m; \frac{SD}{SN} = n$$

Ta cần chứng minh :  $m + n = 3$

Ta có :

$$\vec{SM} = \frac{1}{m}\vec{SB} = \frac{1}{m}\vec{b}; \vec{SN} = \frac{1}{n}\vec{SD} = \frac{1}{n}\vec{c};$$

$$\vec{SK} = \frac{1}{2}\vec{SC} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{SK} = \frac{1}{2}(\vec{SD} + \vec{DC}) = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{b} - \vec{a})$$

Theo giả thiết có : A, M, K, N đồng phẳng  $\Leftrightarrow \exists(\alpha, \beta, \gamma)$  với  $\alpha + \beta + \gamma = 1$  thỏa mãn :

$$\vec{SK} = \alpha\vec{SA} + \beta\vec{SM} + \gamma\vec{SN} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} = \alpha\vec{a} + \frac{\beta}{m}\vec{b} + \frac{\gamma}{n}\vec{c}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -1/2 \\ \frac{\beta}{m} = \frac{1}{2} \\ \frac{\gamma}{n} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -1/2 \\ \beta = m/2 \\ \gamma = n/2 \end{cases}$$

$$\text{Vì } \alpha + \beta + \gamma = 1 \Rightarrow \frac{m}{2} + \frac{n}{2} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow m + n = 3 \text{ (đpcm)}$$

**Ví dụ 3 :**

Hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là một hình bình hành. Một mặt phẳng (P) cắt SA,

SB, SC, SD theo thứ tự tại K, L, M, N. Chứng minh rằng :

$$\frac{SA}{SK} + \frac{SC}{SM} = \frac{SB}{SL} + \frac{SD}{SN}$$

**Lời giải :** (H. 3)

Chọn một cơ sở

$$\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\} \text{ với } \vec{a} = \vec{SA}, \vec{b} = \vec{SB}, \vec{c} = \vec{SD}$$

Đặt :

$$\frac{SA}{SK} = x; \frac{SC}{SM} = y$$

$$\frac{SB}{SL} = m; \frac{SD}{SN} = n$$

Ta cần chứng

minh :  $x + y = m + n$ . Thật vậy, ta có :

$$\vec{SK} = \frac{1}{x}\vec{a};$$

$$\vec{SL} = \frac{1}{m}\vec{b};$$

$$\vec{SN} = \frac{1}{n}\vec{c}.$$

$$\vec{SM} = \frac{1}{y}\vec{SC} = \frac{1}{y}(-\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}).$$

Theo giả thiết thì : K, L, M, N đồng phẳng

$\Leftrightarrow \exists(\alpha, \beta, \gamma)$  với  $\alpha + \beta + \gamma = 1$  và thỏa mãn :

$$\vec{SM} = \alpha\vec{SK} + \beta\vec{SL} + \gamma\vec{SN}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{y}\vec{a} + \frac{1}{y}\vec{b} + \frac{1}{y}\vec{c} = \frac{\alpha}{x}\vec{a} + \frac{\beta}{m}\vec{b} + \frac{\gamma}{n}\vec{c}$$

$$\begin{cases} \frac{\alpha}{x} = -\frac{1}{y} \\ \frac{\beta}{m} = \frac{1}{y} \\ \frac{\gamma}{n} = \frac{1}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -\frac{x}{y} \\ \beta = \frac{m}{y} \\ \gamma = \frac{n}{y} \end{cases} \text{ Vì } \alpha + \beta + \gamma = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{x}{y} + \frac{m}{y} + \frac{n}{y} = 1$$

$$\Leftrightarrow -x + m + n = y \Leftrightarrow x + y = m + n \text{ (đpcm)}$$

**Ví dụ 4 :**

Cho hình chóp S.ABC ; G là trọng tâm tam giác ABC. Một mặt phẳng (P) cắt SA, SB, SC, SG theo thứ tự tại A', B', C', G'. Chứng minh rằng :

$$\frac{SA}{SA'} + \frac{SB}{SB'} + \frac{SC}{SC'} = 3 \frac{SG}{SG'}$$

**Giải :** (H. 4)

Chọn một cơ sở :

$$\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\} \text{ với } \vec{a} = \vec{SA}, \vec{b} = \vec{SB}, \vec{c} = \vec{SC}.$$

$$\text{Đặt : } \frac{SA}{SA'} = x; \frac{SB}{SB'} = y; \frac{SC}{SC'} = z; \frac{SG}{SG'} = m$$

Ta cần phải

chứng minh :

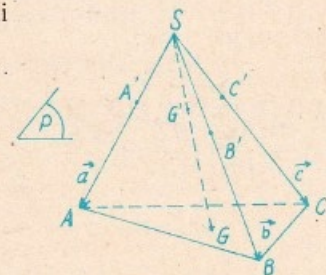
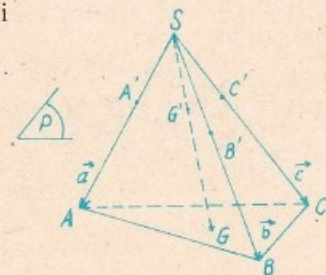
$$x + y + z = 3m.$$

Ta có :

$$\vec{SA'} = \frac{1}{x}\vec{a};$$

$$\vec{SB'} = \frac{1}{y}\vec{b};$$

$$\vec{SC'} = \frac{1}{z}\vec{c}$$





$$\vec{SG}' = \frac{1}{m} \vec{SG} = \frac{1}{m} \left[ \frac{1}{3} (\vec{SA} + \vec{SB} + \vec{SC}) \right] = \frac{1}{3m} (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$$

(Vì  $G$  là trọng tâm  $\triangle ABC$  nên ta có :

$$3\vec{SG} = \vec{SA} + \vec{SB} + \vec{SC}$$

Theo giả thiết thì ta có :  $A', B', C', G'$  đồng phẳng  $\Leftrightarrow \exists(\alpha, \beta, \gamma)$  với  $\alpha + \beta + \gamma = 1$  và  $\vec{SG}' = \alpha\vec{SA}' + \beta\vec{SB}' + \gamma\vec{SC}'$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3m} (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = \frac{\alpha}{x} \vec{a} + \frac{\beta}{y} \vec{b} + \frac{\gamma}{z} \vec{c}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\alpha}{x} = \frac{1}{3m} \\ \frac{\beta}{y} = \frac{1}{3m} \\ \frac{\gamma}{z} = \frac{1}{3m} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{x}{3m} \\ \beta = \frac{y}{3m} \\ \gamma = \frac{z}{3m} \end{cases}$$

$$\text{Vì } \alpha + \beta + \gamma = 1 \Rightarrow \frac{x}{3m} + \frac{y}{3m} + \frac{z}{3m} = 1 \Leftrightarrow$$

$$x + y + z = 3m \text{ (dpcm)}$$

**Nhận xét :**

+) Trong 4 ví dụ này chúng ta đã sử dụng một điều kiện đồng phẳng của 4 điểm  $A, B, C, D$  là :

$A, B, C, D$  đồng phẳng  $\Leftrightarrow \exists(\alpha, \beta, \gamma)$  với  $\beta + \alpha + \gamma = 1$  và

$\vec{OA} = \alpha\vec{OB} + \beta\vec{OC} + \gamma\vec{OD}$  ( $O$  bất kì). Ở đây ta sử dụng điều kiện  $\alpha + \beta + \gamma = 1$  rồi từ đó suy ra một điều cần chứng minh mà không cần chỉ rõ  $\alpha, \beta, \gamma$  bằng bao nhiêu, các bạn hãy tự giải thích điều này !

+) Phải chăng những bài toán này có cùng phương pháp giải chung. Xin đề nghị các bạn hãy tự rút ra phương pháp giải cho bài toán nhỏ này. Sau đây là một số bài tập đề nghị để các bạn áp dụng :

**Bài 1 :**

Cho hình tứ diện  $ABCD$ . Gọi  $A', B', C', D'$  là các điểm lần lượt chia các đoạn thẳng  $AB, BC, CD, DA$  theo tỉ số  $k$ , tức là :

$$\frac{A'A}{A'B} = \frac{B'B}{B'C} = \frac{C'C}{C'D} = \frac{D'D}{D'A} = k$$

Với giá trị nào của  $k$  thì 4 điểm  $A', B', C', D'$  là đồng phẳng ?

**Bài 2 :**

Cho hình chóp tam giác  $D.ABC$ ,  $M$  là một điểm nằm trong tam giác  $ABC$ . Các đường thẳng qua  $M$ , song song với  $AD, BD, CD$ , theo thứ tự cắt các mặt  $(BCD), (ACD), (ABD)$  tại  $A', B', C'$ . Chứng minh rằng tổng :

$\frac{MA'}{AD} + \frac{MB'}{BD} + \frac{MC'}{CD}$  không phụ thuộc vào vị trí của  $M$  trong tam giác  $ABC$ . (Gợi ý : Hãy chứng minh  $\frac{MA'}{AD} + \frac{MB'}{BD} + \frac{MC'}{CD} = 1$ ).

**K**ì thi chọn học sinh giỏi Toán toàn quốc năm học 1996 - 1997 cấp phổ thông trung học được tiến hành trong hai ngày 14 và 15 tháng 3 năm 1997. Các đơn vị dự thi được chia thành hai bảng A và B với mức độ đề toán của bảng A khó hơn bảng B. Tham dự cuộc thi có 61 đơn vị với tổng số 441 thí sinh, trong đó bảng A gồm 34 đội với 263 thí sinh, bảng B gồm 27 đội với 178 thí sinh. Điểm tối đa là : 20 điểm  $\times$  2 ngày = 40 điểm.

Kết quả như sau : Ở bảng A có 2 giải nhất (từ 35 đến 36 điểm), 16 giải nhì (từ 29 đến 34 điểm), 30 giải ba (từ 23 đến 27 điểm) và 28 giải khuyến khích (từ 20 đến 21 điểm) ; tổng cộng là 76 giải, chiếm tỉ lệ 28,9% so với số thí sinh.

Ở bảng B có 1 giải nhất (34 điểm), 3 giải nhì (từ 28 đến 28,5 điểm), 16 giải ba (từ 23 đến 26 điểm) và 14 giải khuyến khích (từ 20 đến 21,5 điểm) ; tổng cộng là 34 giải, đạt tỉ lệ 19,1% so với số thí sinh.

Dưới đây là danh sách các học sinh đạt giải :

### BẢNG A

**Giải Nhất :** Hoàng Minh Đức (Thanh Hóa), Nguyễn Cảnh Hào (Nghệ An).

**Giải Nhì :** Đỗ Quốc Anh, Phạm Lê Hùng, Nguyễn Anh Tú, Vũ Quang Đông (ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội), Nguyễn Hữu Quỳnh (ĐHSP - ĐHQG Hà Nội), Lê Quốc, Trần Tiến Dũng (Hà Nội), Trịnh Thị Kim Chi (Hà Tĩnh) Vũ Hải Sâm (Nam Định), Phạm Hồng Linh (Nghệ An), Trịnh Hữu Trung, Nguyễn Ngọc Hưng, Đỗ Quang Thọ (Thanh Hóa), Hà Anh Tuấn (Phú Thọ), Tô Trần Tùng (Hải Phòng), Đoàn Nhật Dương (Thái Bình).

**Giải Ba :** Trần Minh Anh, Vũ Tất Tăng, Ngô Văn Sáng (Hà Nội), Phạm Thái Hà, Trần Văn Hoàng, Đinh Tiến Hoàng, Đinh Thị Thủy Nga (Thái Bình), Phạm Văn Quốc, Đặng Việt Cường, Đỗ Ngọc Anh (Nam Định) Hà Minh Lam, Hà Huy Thái, Vũ Việt Anh, Trần Trung Thành (ĐHSP - ĐHQG Hà Nội) Vũ Đình Phương, Phạm Minh Đức (Thanh Hóa) Đặng Anh Tuấn (Hải Phòng), Mai Tùng Long, Đặng Thị Hồng Minh, Phạm Văn Hùng (Hà Tĩnh), Đào Thị Thu Hà, Tạ Duy Thắng, Ngô Đức Thành, Nguyễn Bá Hùng, Phạm Huy Tùng, Nguyễn Lưu Sơn (ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội), Võ Thị Nhu Quỳnh (Nghệ An), Nguyễn Tiến Dũng (Đà Nẵng), Nguyễn Ngọc Tân (Phú Thọ), Thái Thanh Hải (TP Hồ Chí Minh).

**Giải khuyến khích :** Phạm Đức Tùng, Lưu Văn Thành (Hải Phòng), Trương Thanh Chương (Hà Tây), Phạm Thị Thanh Hải, Dương Thu Phương (Hà Tĩnh), Đinh Thị Nhung, Đoàn Tiến Dũng (Thanh Hóa), Lê Anh Tuấn, Vũ Xuân Dũng, Nguyễn Quang Nghĩa (ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội), Trần Nam Dũng, Lê Văn An, Dương Văn Yên (Nghệ An), Nguyễn Hoài Nam (ĐHSP - ĐHQG Hà Nội), Nguyễn Xuân Tương (ĐHSP Vinh) Lê Long Triều (ĐHQG TP Hồ Chí Minh) Phan Linh (Hà Nội), Trần Thanh Phương (TP Hồ Chí Minh), Nguyễn Minh Phương (Phú Thọ), Hoàng Hữu Hiệp (Vĩnh Phúc), Hoàng Sĩ Nguyên (Thái Nguyên), Vũ Thu Hương (Hải Dương), Trần Đức Quyền, Nguyễn Anh Hoa (Nam Định), Trịnh Hồng Mai, Nguyễn Trường Thanh (Thái Bình), Võ Hoàng Hải, Võ Thanh Tùng (Thừa Thiên - Huế).



# KẾT QUẢ CUỘC THI OLYMPIC TOÁN PHỔ THÔNG TRUNG HỌC TOÀN QUỐC

Năm học 1996 - 1997

## BẢNG B

**Giải Nhất :** Đào Duy Chung (Gia Lai)  
**Giải Nhì :** Phan Thanh Hải (Lâm Đồng),  
Hồ Tấn Thua (Kon Tum) Trương Vĩnh Lân (Quảng Bình)

**Giải Ba :** Phạm Khánh Toàn, Nguyễn Quốc Hưng, Nguyễn Thị Minh Tâm (Hòa Bình), Lê Minh Hào (Cà Mau), Nguyễn Đặng Hoàng Tuấn (Lang Sơn), Lương Vũ Nam (Yên Bái), Hồ Thiên Sơn (Gia Lai), Đặng Hoàng Khải (Bến Tre), Tô Hiền Sỹ, Hoàng Công Chúc (Lâm Đồng), Nguyễn Ngọc Phụng (Vĩnh Long), Tô Anh Dũng, Mai Đức Thanh, Lê Hoàng Sử (Đắc Lắc), Phạm Thị Minh Nguyệt (Quảng Bình) Bùi Đặng Hoàn (Đồng Tháp).

### Giải khuyến khích :

Trần Thị Huyền Thảo (Bạc Liêu), Nguyễn Đình Vũ (Gia Lai), Nguyễn Tiến Hằng, Lương Thanh Huy, Trần Nguyễn Trung (Lâm Đồng), Trần Minh Quân (Sơn La), Võ Trung Dũng, Nguyễn Đăng Triễn (Đồng Tháp), Trần Anh Tuấn (Hòa Bình), Hoàng Mạnh Cường (Quảng Bình), Hoàng Tùng (Đắc Lắc), Phạm Hồng Hòa (Tây Ninh), Bùi Minh Thiệu (Trà Vinh), Lê Chí Nguyễn (Cà Mau)

Sau đây là các đề thi (14, 15/3/1997) mỗi ngày làm 3 bài trong 180 phút.

## BẢNG A

### Bài 1 :

Trong mặt phẳng cho đường tròn tâm  $O$  bán kính  $R$  là một điểm  $P$  nằm trong đường tròn ( $OP = d < R$ ). Trong các tứ giác lồi  $ABCD$  nội tiếp đường tròn nói trên sao cho các đường chéo  $AC$  và  $BD$  vuông góc với nhau tại  $P$ , hãy xác định tứ giác có chu vi lớn nhất và tứ giác có chu vi nhỏ nhất. Tính các chu vi đó theo  $R$  và  $d$ .

### Bài 2 :

Cho số tự nhiên  $n > 1$  không chia hết cho 1997. Xét hai dãy số  $(a_i)$  và  $(b_j)$  được xác định như sau :

$$a_i = i + \frac{ni}{1997} \text{ với } i = 1, 2, 3, \dots, 1996,$$

$$b_j = j + \frac{1997j}{n} \text{ với } j = 1, 2, 3, \dots, n-1. \text{ Xét}$$

tất cả các số của hai dãy trên và sắp thứ tự không giảm ta được  $c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_{1995+n}$ .

Chứng minh rằng  $c_{k+1} - c_k < 2$  với mọi  $k = 1, 2, \dots, 1994 + n$ .

### Bài 3 :

Hỏi có bao nhiêu hàm số  $f: N^* \rightarrow N^*$  thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau :

$$1) f(1) = 1$$

2)  $f(n).f(n+2) = (f(n+1))^2 + 1997$  với mọi  $n \in N^*$  ? (Kí hiệu  $N^*$  là tập hợp số nguyên dương).

### Bài 4 :

a) Tìm tất cả các đa thức  $f(x)$  với hệ số hữu tỉ có bậc nhỏ nhất mà  $f(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9}) = 3 + \sqrt[3]{3}$ .

b) Tồn tại hay không đa thức  $f(x)$  với hệ số nguyên mà

$$f(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9}) = 3 + \sqrt[3]{3} ?$$

### Bài 5 :

Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương  $n$  đều chọn được số nguyên dương  $k$  để  $19^k - 97$  chia hết cho  $2^n$ .

### Bài 6 :

Cho 75 điểm thuộc khối lập phương với cạnh dài 1 đơn vị, trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng tồn tại tam giác với diện tích không lớn hơn  $\frac{7}{72}$  mà ba đỉnh là ba trong số 75 điểm đã cho.

## BẢNG B

### Bài 1 :

Cho hàm số  $f(x) = a \sin ux + b \cos vx$  xác định trên tập số thực, trong đó  $a, b, u, v$  là các hằng số thực khác không.

Chứng minh rằng  $f(x)$  là hàm số tuần hoàn

khi và chỉ khi  $\frac{u}{v}$  là số hữu tỉ.

### Bài 2 :

Trong mặt phẳng cho đường tròn tâm  $O$  bán kính  $R$  và một điểm  $P$  nằm trong đường tròn ( $OP = d < R$ ).

Xét các tứ giác lồi  $ABCD$  nội tiếp đường tròn nói trên sao cho các đường chéo  $AC$  và  $BD$  vuông góc với nhau tại  $P$ .

a) Chứng minh rằng  $AB.CD + BC.AD = AC.BD$ .

b) Trong các tứ giác  $ABCD$  như trên hãy xác định tứ giác có chu vi lớn nhất và tính chu vi đó theo  $R$  và  $d$ .

### Bài 3 :

Cho dãy số nguyên  $(a_n)$  ( $n \in N$ ) được xác định như sau :  $a_0 = 1, a_1 = 45$

$$a_{n+2} = 45a_n - 7a_{n+1} \text{ với mọi } n = 0, 1, 2, \dots$$

a) Tính số các ước dương của  $a_{n+1} - a_n a_{n+2}$  theo  $n$ .

b) Chứng minh rằng  $1997 a_n^2 + 7^{n+1} \cdot 4$  là số chính phương với mỗi  $n$ .

### Bài 4 :

Tìm tất cả các đa thức  $f(x)$  với hệ số hữu tỉ có bậc nhỏ nhất mà

$$f(\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{9}) = 3 + \sqrt[3]{9}.$$

### Bài 5 :

Cho  $n$  và  $k$  là các số nguyên dương với  $n \geq 7$  và  $2 \leq k < n$ . Chứng minh rằng  $k^n > 2n^k$ .

### Bài 6 :

Cho hình hộp chữ nhật có ba kích thước là  $a, b, c$ . Xét diện tích các tam giác có ba đỉnh nằm bên trong hoặc trên mặt của hình hộp đã cho, tìm giá trị lớn nhất của các diện tích đó theo  $a, b, c$ .

NGUYỄN VIỆT HẢI  
(Vũ THPT)



## TRÊN ĐƯỜNG ĐI TÌM

# "BẤT ĐẲNG THỨC TRONG TAM GIÁC"

TRẦN VIỆT KINH  
(DHSP Vinh)

Trong quá trình học môn lượng giác lớp 11, cũng như trong thời gian ôn thi đại học, chắc hẳn không ai có thể quên hàng loạt bất đẳng thức trong tam giác mà ta đã chứng minh được. Chẳng hạn : với mọi tam giác thì

$$\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$2 < \cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$1 < \sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} \leq \frac{3}{2}$$

$$1 < \cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$$

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \leq \frac{9}{4}$$

$$\sin A \sin B \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

$$\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

Vấn đề đặt ra là : Trong tam giác còn có những bất đẳng thức lượng giác nào nữa ?

Một trong nhiều hướng để tìm đó là : Trong các bất đẳng thức đã gặp, gọi về chứa các biến  $A, B, C$  là :

$f_i(A, B, C) \quad i = \overline{1, n}$ . Khi đó xảy ra trường hợp : với  $i \neq j$ ,  $f_i$  và  $f_j$  có cùng giá trị lớn nhất hoặc cùng giá trị bé nhất, xảy ra khi  $A = B = C = \frac{\pi}{3}$ . Từ đây nảy ra suy nghĩ : hãy

so sánh  $f_i$  và  $f_j$ .

Ví dụ :  $\sin A + \sin B + \sin C$  với  $\cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2}$

$\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2}$  với  $\cos A + \cos B + \cos C$   
 $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C$  với  $(\cos A + \cos B + \cos C)^2$

Việc so sánh  $f_i$  và  $f_j$  trong những điều kiện nhất định xảy ra của  $\Delta ABC$  sẽ dẫn đến các bất đẳng thức mới.

Công việc đặt ra ở đây là : sẽ đặt vào ô vuông trong kí hiệu  $f_i \square f_j$  dấu quan hệ thứ tự " $\leq$ " hay " $\geq$ " ? ?

Để làm được điều đó, ta xét một điều kiện "cần" để có dấu quan hệ " $\leq$ " hay " $\geq$ " như sau :  
Đặt  $C = x \quad (0 < x < \pi)$ , xét

$A = B = \frac{\pi - x}{2}$ , khi đó  $f_i = f_i(x)$ ,  $f_j = f_j(x)$ .

Xét hàm  $y = f_i(x) - f_j(x)$ , ở đây  $y = 0$  khi  $x = \frac{\pi}{3}$ . Bằng quy tắc khảo sát hàm số, hoặc bằng việc chứng minh bất đẳng thức, ta tìm được  $y \leq 0$  hoặc  $y \geq 0$ . Khi đó ta sẽ cho được dấu bất đẳng thức thích hợp. Tất nhiên, việc

tìm ra dấu " $\leq$ " hoặc " $\geq$ " cũng mới chỉ là dự đoán, để khẳng định, ta phải tìm ra chứng minh tính đúng đắn của bất đẳng thức, đòi hỏi khi xảy ra bất đẳng thức, còn phải bổ sung thêm một số điều kiện cần thiết (chẳng hạn : tam giác không tù, tam giác nhọn).

Ví dụ : so sánh  $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C$  với  $(\cos A + \cos B + \cos C)^2$ , gọi biểu thức thứ nhất, thứ hai là  $f_1$  và  $f_2$ . Chúng ta đã có kết quả  $f_1$ ,

$f_2$  đều có giá trị lớn nhất bằng  $\frac{9}{4}$  đạt được khi

$$A = B = C = \frac{\pi}{3}$$

Khi đó :

$$f_1 = 2\sin^2 \frac{\pi - x}{2} + \sin^2 x,$$

$$f_2 = \left( 2\cos \frac{\pi - x}{2} + \cos x \right)^2$$

$$y = f_1 - f_2 = 2\sin^2 \frac{\pi - x}{2} + \sin^2 x -$$

$$- \left( 2\cos \frac{\pi - x}{2} + \cos x \right)^2$$

$$y' = -3\sin x + 2\sin 2x + \cos \frac{x}{2} - 3\cos \frac{3x}{2}$$

$$y'' = -3\cos x + 4\cos 2x - \frac{1}{2}\sin \frac{x}{2} + \frac{9}{2}\sin \frac{3x}{2}$$

$$\text{với } x = \frac{\pi}{3} : y' = 0, y'' = \frac{3}{4} > 0, y = 0 \Rightarrow \text{dự}$$

đoán  $y \geq 0$

Tức là :  $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \geq (\cos A + \cos B + \cos C)^2$  (\*)

$$\text{Vì } 0 < \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2} < \pi$$

$$\text{Khi } x \rightarrow 0 : y' \rightarrow -2 < 0, y \rightarrow 1 > 0.$$

$$x \rightarrow \frac{\pi}{2} : y' \rightarrow 2\sqrt{2} - 3 < 0, y \rightarrow 2 - \sqrt{2} > 0$$

$$x \rightarrow \pi : y' \rightarrow 0, y \rightarrow -1 < 0$$

nên bất đẳng thức (\*) chỉ xét với các tam giác không tù

Thật vậy : (\*)  $\Leftrightarrow \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \geq (\cos A + \cos B + \cos C)^2 \Leftrightarrow -(\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C) - 2\cos A \cos B - 2\cos B \cos C - 2\cos C \cos A \geq 0 \Leftrightarrow 1 + 4\cos A \cos B \cos C + \cos C - \cos(A - B) - 2\cos B \cos C - 2\cos C \cos A \geq 0$

Trong  $\Delta ABC$  bao giờ cũng chọn được 2 góc cùng lớn hơn, hoặc cùng bé hơn  $60^\circ$ , giả sử là  $A, B$ , biến đổi :

(\*)  $\Leftrightarrow [1 - \cos(A - B)] + \cos C(1 - 2\cos A)(1 - 2\cos B) \geq 0$  vì  $\Delta ABC$  không tù, bất đẳng thức trên hiển nhiên đúng.

Vậy ta có :  $\forall \Delta ABC$  không tù thì :

$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \geq (\cos A + \cos B + \cos C)^2$  dấu (=) xảy ra khi và chỉ khi  $\Delta ABC$  vuông cân hoặc là tam giác đều. Bằng con đường đó, chúng ta sẽ tìm ra được một loạt bất đẳng thức lượng giác trong tam giác :

(Xem tiếp trang 15)



# Về bài toán quy hoạch tuyến tính trong đại số lớp 10

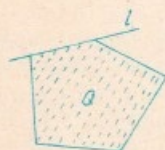
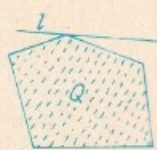
NGUYỄN DINH NGUYỄN  
(Đà Nẵng)

Trong hai cuốn sách Đại số 10 của NXBGD 1990 có đề cập đến bài toán "Quy hoạch tuyến tính" (Ngô Thúc Lan, tr. 118; Trần Văn Hào, tr. 64). Trong cả hai cuốn đều chỉ ra thuật toán để tìm lời giải tối ưu mà không có phần lý giải.

Mục đích của bài báo này là nêu ra một cách lý giải ngắn, gọn dễ hiểu đối với đại đa số học sinh. Chúng ta bắt đầu.

## 1. ĐƯỜNG TỰA

**Định nghĩa:** Cho  $Q$  là một đa giác lồi, đường thẳng  $l$  được gọi là đường tủa nếu nó chứa ít nhất một điểm biên của đa giác này mà không chứa một điểm trong nào của đa giác ấy.



H. 1 H. 2  
Giao  $l \cap Q$  hoặc là một đỉnh hoặc là một cạnh của đa giác  $Q$ . Trong mọi trường hợp,  $Q$  chứa trong một nửa mặt phẳng có bờ là  $l$ .

**Định lý 1.** Gọi  $Q$  là một đa giác lồi,  $\vec{n}$  là một vectơ khác  $\vec{0}$ . Khi đó tồn tại một và chỉ một đường tủa  $l$  của  $Q$  có tính chất là: nửa mặt phẳng bờ  $l$  chứa  $Q$  có  $\vec{n}$  là pháp vectơ hướng ra ngoài.

**Chứng minh.**

Gọi  $m$  là đường thẳng có  $\vec{n}$  là vectơ chỉ phương. Chiếu đa giác  $Q$  lên  $m$ , thì hình chiếu là một đoạn thẳng. Các đường thẳng  $l_1, l_2$  vuông góc với  $m$  và đi qua hai đầu mút của đoạn này là đường tủa của đa giác  $Q$ , và mỗi đường thẳng ấy có  $\vec{n}$  là pháp vectơ. Có một trong hai đường thẳng ấy mà nửa mặt phẳng chứa  $Q$  có  $\vec{n}$  là pháp vectơ hướng ra ngoài. Đpcm.

## 2. CỰC TRỊ HÀM TUYẾN TÍNH TRÊN ĐA GIÁC LỒI

**Định lý 2:** Cho đa giác lồi  $Q$ . Một hàm tuyến tính  $f(M) = Ax + By$  xác định trên  $Q$ , đạt giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) hoặc tại một đỉnh, hoặc trên một đỉnh, hoặc trên một cạnh của  $Q$ , tức là, tồn tại một đỉnh của  $Q$  tại đó hàm  $f(M)$  đạt giá trị lớn nhất (nhỏ nhất).

**Chứng minh.** Xét vectơ  $\vec{n} = (A, B)$ . Theo định lý 1, tồn tại một đường tủa  $l$  của đa giác  $Q$ , để nửa mặt phẳng  $P$ , có bờ  $l$  chứa  $Q$ , và, có  $\vec{n}$  là pháp vectơ hướng ra ngoài.

Gọi  $M_0(x_0, y_0)$  là điểm chung của  $Q$  và  $l$ . Vì  $\vec{n}$  là pháp vectơ hướng ra ngoài của nửa mặt phẳng  $P$ , nên

$$\forall M(x, y) \in P : \vec{n} \cdot \vec{M_0M} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (A, B)(x - x_0, y - y_0) \leq 0 \Leftrightarrow A(x - x_0) + B(y - y_0) \leq 0 \Leftrightarrow f(M) = Ax + By \leq Ax_0 + By_0 = f(M_0)$$

Tức là  $f(M)$  đạt giá trị lớn nhất tại  $M_0$ .

Sau cùng để ý rằng  $Q \cap l$  hoặc là một đỉnh hoặc là một cạnh của  $Q$  thì suy ra đpcm. Lập luận tương tự cho trường hợp nhỏ nhất.

Như vậy ta đã lý giải được thuật toán đã trình bày trong hai cuốn sách đã nêu.

## TRÊN ĐƯỜNG ĐI TÌM ...

(Tiếp theo trang 14)

Chứng minh rằng:

$$1) \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \geq 2\sqrt{3} \sin A \sin B \sin C \quad \forall \Delta ABC$$

$$2) \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \geq 2\sqrt{3} \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \quad \forall \Delta ABC$$

$$3) \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} \geq \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C \quad \forall \Delta ABC$$

$$4) 8 \sin^2 \frac{A}{2} \sin^2 \frac{B}{2} \sin^2 \frac{C}{2} \geq \cos A \cos B \cos C \quad \forall \Delta ABC$$

$$5) \cos^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{B}{2} + \cos^2 \frac{C}{2} \geq \left( \sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} \right)^2 \quad \forall \Delta ABC$$

$$6) \cos \frac{A}{2} + \cos \frac{B}{2} + \cos \frac{C}{2} \geq \sqrt{3} \left( \sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} \right) \quad \forall \Delta ABC$$

$$7) \cotg A + \cotg B + \cotg C \geq \tg \frac{A}{2} + \tg \frac{B}{2} + \tg \frac{C}{2} \quad \forall \Delta ABC \text{ nhọn}$$

$$8) \cotg \frac{A}{2} + \cotg \frac{B}{2} + \cotg \frac{C}{2} \geq 3 \left( \tg \frac{A}{2} + \tg \frac{B}{2} + \tg \frac{C}{2} \right) \quad \forall \Delta ABC$$

$$9) \tg A + \tg B + \tg C \geq 3 \left( \tg \frac{A}{2} + \tg \frac{B}{2} + \tg \frac{C}{2} \right) \quad \forall \Delta ABC \text{ nhọn}$$

$$10) \tg A + \tg B + \tg C \geq \cotg \frac{A}{2} + \cotg \frac{B}{2} + \cotg \frac{C}{2} \quad \forall \Delta ABC \text{ nhọn}$$

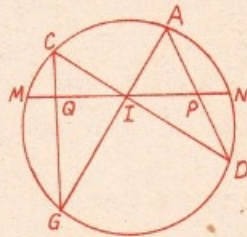


# MỞ RỘNG BÀI TOÁN "con bướm" CHO CÁC ĐƯỜNG CÔN IC

LÊ HẠO  
(Phủ Yên)

Có lẽ các bạn trẻ yêu toán đều biết đến bài toán "con bướm". Bài toán đó như sau :

**Bài toán 1 :** Cho một đường tròn và dây cung  $MN$  ; gọi  $I$  là trung điểm của dây đó. Qua  $I$  ta kẻ hai dây cung khác nhau  $AB$  và  $CD$ .  $AD$  và  $BC$  lần lượt cắt  $MN$  tại  $P$  và  $Q$ . Chứng minh :  $IP = IQ$  (Hình H1)



H.1

Trong bài báo : "Một số dạng khác của bài toán con bướm (THTT- 06 - 1995) bạn Phan Nam Hùng cũng đã có một số tìm tòi mở rộng bài toán "con bướm". Trong bài báo này tôi xin bàn đến vấn đề sau : Nếu thay cho đường tròn trong bài toán "con bướm", ta xét một đường Côn ic thì ta sẽ có kết quả gì tương tự kết quả của bài toán "con bướm" ? Những kết quả đó có thể mở rộng ra như thế nào ?

Để cho tiện tôi xin nêu một số qui ước như sau :

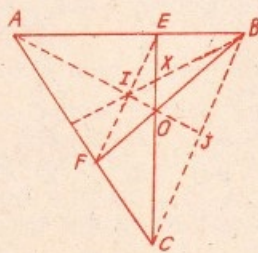
- Hai đường thẳng song song xem như chúng cắt nhau tại một điểm gọi là điểm vô tận
- Hai đường thẳng phân biệt cùng đi qua điểm vô tận thì song song.

Như vậy trong bài viết này ta luôn có thể nói đến "giao" của hai đường thẳng phân biệt.

Trước tiên tôi xin giới thiệu một số kiến thức về tứ giác toàn phần.

## I. THẾ NÀO LÀ TỨ GIÁC TOÀN PHẦN ?

Trong mặt phẳng tập hợp gồm bốn đường thẳng trong đó không có ba đường nào cùng đi qua một điểm gọi là tứ giác toàn phần. Mỗi một đường thẳng đó gọi là một cạnh. Giao điểm của hai cạnh gọi là đỉnh. Hai đỉnh không cùng nằm trên một cạnh gọi là hai đỉnh đối diện. Mỗi đường thẳng nối hai đỉnh đối diện gọi là đường chéo. Ta có :



H.2

**Mệnh đề 1 :** Trong hình tứ giác toàn phần, cặp đỉnh đối diện nằm trên một đường chéo và cặp giao điểm của đường chéo đó với hai đường chéo còn lại liên hiệp điều hòa với nhau (Hình H2)

Trong hình vẽ H.2 tứ giác toàn phần tạo bởi các đường thẳng  $BA, BF, CA, CB$  có các đường chéo  $EF, BC$  cắt đường chéo  $AD$  tại  $I, J$ . Mệnh đề 1 nói trên khẳng định rằng :  $(ADJJ) = -1$  ; vậy chùm  $BA, BF, BI, BC$  là chùm điều hòa do đó : nếu gọi  $X, Y$  lần lượt là giao điểm của  $BI$  với  $EC, AC$  thì  $(EDCX) = (AFCY) = -1$ .

Để chứng minh mệnh đề 1 ta có thể sử dụng kiến thức về chùm đường thẳng hoặc dùng phương pháp tọa độ. Xin dành việc chứng minh cho các bạn.

## II. MỞ RỘNG BÀI TOÁN CON BƯỚM CHO ĐƯỜNG ELLIP

Trong bài báo của mình bạn Phan Nam Hùng đã nêu bài toán tổng quát hơn bài toán "con bướm". Nếu trong bài toán đó ta thay đường tròn bằng một Ellip thì ta có :

**Bài toán 2 :** Cho Ellip  $(E)$  và một đường thẳng  $(d)$  tùy ý. Một tiếp tuyến song song với  $(d)$  tiếp xúc với  $(E)$  tại  $J$ . Đường thẳng nối  $J$  với tâm đối xứng của  $(E)$  cắt  $(d)$  tại  $I$ . Qua  $I$  kẻ 2 đường thẳng phân biệt cắt  $(E)$  lần lượt tại  $A, B$  và  $C, D$ .  $AD$  và  $BC$  cắt  $(d)$  lần lượt tại  $P, Q$ . Chứng minh rằng :  $I$  là trung điểm của  $PQ$  (Hình H 3)

Trước khi trình bày lời giải bài toán này ta có :

**Định nghĩa :** Cho  $(S)$  là một đường conic, đường thẳng qua 2 điểm phân biệt  $M, N$  cắt  $(S)$  tại  $X, Y$ . Ta nói  $M, N$  liên hiệp với nhau đối với conic  $(S)$  nếu :  $(MNXY) = -1$ .

**Bổ đề :** Cho Ellip  $(E) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  và điểm  $M(x_0, y_0)$  ; khi đó mọi điểm liên hiệp với  $M$  đối với  $(E)$  đều thuộc đường thẳng  $\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$ .

**Chứng minh**

Gọi  $N(x, y)$  là điểm liên hiệp với  $M$  đối với  $(E)$ .  $MN$  cắt  $(E)$  tại hai điểm phân biệt  $X, Y$

$$X(x_0 + t_1(x - x_0), x_0 + t_1(y - y_0)) ;$$

$$Y(x_0 + t_2(x - x_0), x_0 + t_2(y - y_0)).$$

Với  $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ .

$$\frac{MX}{MY} = \frac{t_1}{t_2}$$

$$\frac{NX}{NY} = \frac{t_1 - 1}{t_2 - 1}$$

$$\frac{MX}{MY} : \frac{NX}{NY} = -1$$

$$(MNXY) = -1 \Leftrightarrow \frac{MX}{MY} : \frac{NX}{NY} = -1$$



$$\frac{t_1}{t_2} : \frac{t_1 - 1}{t_2 - 1} = -1 \Leftrightarrow t_1 + t_2 = 2t_1 t_2$$

$X, Y \in (E)$  nên  $t_1, t_2$  nghiệm của phương

$$\text{trình : } \frac{[x_o + t(x - x_o)]^2}{a^2} + \frac{[y_o + t(y - y_o)]^2}{b^2} = 1$$

Phương trình này viết lại

$$\left[ \frac{(x - x_o)^2}{a^2} + \frac{(y - y_o)^2}{b^2} \right] t^2 + 2 \left( \frac{x_o x}{a^2} + \frac{y_o y}{b^2} - \frac{x_o^2}{a^2} - \frac{y_o^2}{b^2} \right) t + \frac{x_o^2}{a^2} + \frac{y_o^2}{b^2} - 1 = 0$$

Áp dụng định lý

Viết ta có :

$$\frac{x_o x}{a^2} + \frac{y_o y}{b^2} = 1$$

(đpcm)

Dựa vào bổ đề trên ta có thể giải bài toán 2 như sau :

Lời giải bài

toán 2 : Chọn hệ

trục tọa độ để  $(E)$  có phương trình :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \text{ Xét } K \text{ là giao điểm } AD \text{ và } BC. L$$

là giao điểm  $BD$  và  $AC$ . Gọi  $X, Y$  lần lượt là giao điểm của  $KL$  với  $AB, CD$ . Xét tứ giác toàn phần tạo bởi  $IA, IC, LD, LC$  ; từ mệnh đề 1 suy ra  $\angle IXAB = \angle IYCD = -1$ . Vậy  $I$  liên hợp với  $X$  và  $Y$  đối với  $(E)$ . Giả sử  $I(x_o, y_o)$  do

$$\text{bổ đề } KL \text{ có phương trình } \frac{x_o x}{a^2} + \frac{y_o y}{b^2} = 1(1).$$

Vì  $J$  thuộc  $OI$  nên  $J(kx_o, ky_o)$  với  $k \neq 0$ . Gọi  $(d')$  là tiếp tuyến với  $(E)$  tại  $J$  ;  $(d')$  có phương trình :

$$\frac{kx_o x}{a^2} + \frac{ky_o y}{b^2} = 1(2). \text{ Từ (1) và (2) suy ra}$$

$KL \parallel d'$  do đó  $KL \parallel d$ .

Vì  $\angle IXAB = -1$  nên chùm xác định bởi  $KI, KA, KB$  là chùm điều hòa.  $d \parallel KL$  nên  $d$  bị  $KA, KB, KI$  chắn thành 2 đoạn bằng nhau :  $IP = IQ$  (đpcm).

**Mệnh đề 2 :** cho  $(E)$  là một Ellip và  $(d)$  là đường thẳng cố định. Giả sử  $(m)$  là đường thẳng thay đổi cùng phương với  $(d)$  cắt  $(P)$  tại  $M, N$ . Khi đó trung điểm  $I$  của  $MN$  luôn thuộc một đường thẳng  $(\Delta)$  cố định, đi qua tâm đối xứng của  $(E)$ . (Hình H4)

**Chứng minh :** Chọn hệ trục tọa độ để  $(E)$

$$\text{có phương trình : } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Giả sử  $(d)$  có phương trình  $kx + ly = c$ , suy ra  $(m)$  có phương trình  $kx + ly = d$ .

Nếu  $l = 0$  thì  $I$  thuộc đường thẳng  $y = 0$ .

Nếu  $l \neq 0$  : Phương trình xác định hoành độ giao điểm của  $(m)$  và  $(E)$  là :

$$l^2 b^2 x^2 + a^2 (d - kx)^2 = l^2 a^2 b^2$$

$$\text{hay : } (l^2 b^2 + a^2 k^2) x^2 - 2a^2 dkx + a^2 d^2 - l^2 a^2 b^2 = 0$$

$$x_I = \frac{x_M + x_N}{2} = \frac{a^2 dk}{l^2 b^2 + a^2 k^2} =$$

$$\frac{a^2 (ky_I + ly_I) k}{l^2 b^2 + a^2 k^2} \Rightarrow lb^2 x_I - a^2 ky_I = 0$$

vậy  $I$  thuộc đường thẳng  $(\Delta) : lb^2 x - a^2 ky = 0 \Rightarrow$  đpcm.

**Nhận xét :** Nếu tiếp tuyến song song với  $(d)$  tiếp xúc với  $(E)$  tại  $J$  thì  $J$  thuộc  $(\Delta)$ .

Từ nhận xét trên ta có bài toán 3 tương tự với bài toán "con bướm". Đây là trường hợp riêng của bài toán 2 :

**Bài toán 3 :** (Bài

toán con bướm

Ellip) Cho một

đường Ellip  $(E)$  và

hai điểm phân biệt

$M, N$  thuộc  $(E)$ .

Qua trung điểm  $I$

của  $MN$  kẻ 2 đường

thẳng phân biệt

cắt  $(E)$  tại lần lượt

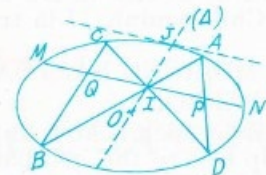
tại  $A, B$  và  $C, D$ .  $AD$

và  $BC$  cắt  $MN$  lần

lượt tại  $P, Q$ .

Chứng minh rằng :  $I$  là trung điểm của  $PQ$ .

(Hình H4)



H.4

### III. MỞ RỘNG BÀI TOÁN CON BƯỚM CHO PARABOL

Tương tự

Mệnh đề 2 bạn

đã dùng kiểm

tra mệnh đề

sau :

**Mệnh đề 3 :**

Cho  $(P)$  là một

parabol và  $(d)$  là

đường thẳng cố

định. Giả sử  $(m)$

là đường thẳng

thay đổi cùng

phương với  $(d)$

cắt  $(P)$  tại  $M, N$ .

Khi đó trung

điểm  $I$  của  $MN$  luôn thuộc một đường thẳng

$(\Delta)$  cố định, cùng phương với trục đối xứng

của  $(P)$ .

Đường thẳng  $(\Delta)$  trong mệnh đề 3 gọi là

đường kính của Parabol  $(P)$  liên hợp với phương

$(d)$ .

**Bài toán 4 :** cho

$(P)$  là Parabol và  $(d)$

là đường thẳng cố

định.  $(\Delta)$  là đường

kính của Parabol  $(P)$

liên hợp với phương

$(d)$  ;  $(\Delta)$  cắt  $(d)$  tại

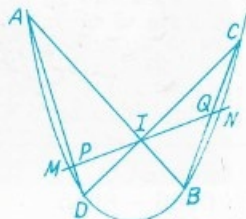
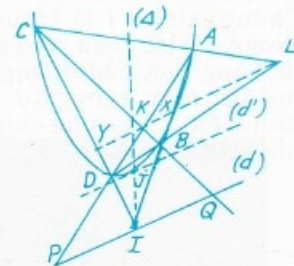
$I$ . Qua  $I$  kẻ 2 đường

thẳng phân biệt lần

lượt cắt  $(P)$  tại  $A, B$

và  $C, D$ .  $AD$  và  $BC$

cắt  $(d)$  lần lượt tại





$P, Q$ . Chứng minh rằng :  $I$  là trung điểm của  $PQ$  (Hình H5)

Tương tự như bố đề của bài toán 2 bạn dễ dàng kiểm tra bố đề sau :

**Bố đề :** Cho Parabol  $(P) : y^2 = 2px$  và điểm  $I(x_0, y_0)$  ; khi đó mọi điểm liên hợp với  $I$  đối với  $(P)$  đều thuộc đường thẳng :

$$y_0 y = p(x + x_0).$$

Áp dụng mệnh đề 3 và bố đề trên bạn có thể giải bài toán 4 bằng cách lập luận hoàn toàn tương tự như lời giải bài toán 2. Khi  $(d)$  cắt  $(P)$  ta có bài toán tương tự bài toán "con bướm" là trường hợp riêng của bài toán 4 :

**Bài toán 5 :** (bài toán con bướm Parabol) Cho Parabol  $(P)$  và hai điểm phân biệt  $M, N$  thuộc  $(P)$ . Qua trung điểm  $I$  của  $MN$  kẻ 2 đường thẳng phân biệt cắt  $(P)$  lần lượt tại  $A, B$  và  $C, D$ .  $AD$  và  $BC$  cắt  $MN$  lần lượt tại  $P, Q$ . Chứng minh :  $I$  là trung điểm của  $PQ$ .

#### IV. MỞ RỘNG BÀI TOÁN CON BƯỚM CHO HYPERBOL

Bằng cách hoàn toàn tương tự như đối với Ellip bạn có thể giải bài toán sau :

**Bài toán 6 :** Cho Hyperbol  $(H)$  và đường thẳng  $(d)$  tùy ý. Một tiếp tuyến song song với  $(d)$  tiếp xúc với  $(H)$  tại  $J$ . Đường thẳng nối  $J$  với tâm đối xứng của  $(H)$  cắt  $d$  tại  $I$ . Qua  $I$  kẻ 2 đường thẳng phân biệt cắt  $(H)$  lần lượt tại  $A, B$  và  $C, D$ .  $AD$  và  $BC$  cắt  $d$  lần lượt tại  $P, Q$ . Chứng minh :  $I$  là trung điểm của  $PQ$ .

**Bài toán 7 :** (bài toán con bướm Hyperbol) Cho Hyperbol  $(H)$  và hai điểm phân biệt  $M, N$  thuộc  $(H)$ . Qua trung điểm  $I$  của  $MN$  kẻ 2 đường thẳng phân biệt cắt  $(H)$  lần lượt tại  $A, B$  và  $C, D$ .  $AD$  và  $BC$  cắt  $MN$  lần lượt tại  $P, Q$ . Chứng minh :  $I$  là trung điểm của  $PQ$ .

Trong các bài toán trên nếu thay các đường Conic bằng một cặp đường thẳng ta cũng có những bài toán tương tự. Mời các bạn tiếp tục tìm hiểu. Cuối cùng chúc các bạn có nhiều thành công trong học tập.



#### Giải đáp bài

##### Nhận được bao nhiêu quà ?

Số đại biểu của 12 lớp là 24. Lan đã hỏi 23 đại biểu khác và tất cả các câu trả lời đều khác nhau nên số quà tương ứng cho từng người là 0, 1, 2, ..., 20, 21, 22. Ta kí hiệu  $a_i$  là đại biểu nhận được  $i$  quà ( $i = 0, 1, \dots, 22$ ) (và tất nhiên  $a_i$  sẽ tặng quà cho  $i$  đại biểu khác.)

Xét  $a_0$  và  $a_{22}$ . Vì  $a_{22}$  tặng quà cho 22 người, trừ ra hai người là  $a_0$  và chính  $a_{22}$ . Vậy  $a_0$  phải là đại biểu cùng lớp với  $a_{22}$  và tất nhiên lớp đó không phải là lớp của Lan và Mai.

Xét  $a_1$  và  $a_{21}$ . Vì  $a_{21}$  tặng quà cho 21 người và không tặng quà cho  $a_0$ , chính  $a_{21}$  và đại biểu cùng lớp với  $a_{21}$ . Nhưng  $a_1$  đã tặng và nhận quà của  $a_{22}$  rồi vậy  $a_1$  là người đại biểu cùng lớp với  $a_{21}$ . Và lớp này cũng không thể là lớp của Lan và Mai được.

Cứ lập luận tương tự như vậy ta sẽ thấy các đại biểu  $a_i$  và  $a_{22-i}$  là các đại biểu của cùng một lớp và lớp đó không phải là lớp của Lan và Mai :

$a_0$  cùng lớp với  $a_{22}$

$a_1$  cùng lớp với  $a_{21}$

.....

$a_{10}$  cùng lớp với  $a_{12}$

Còn lại  $a_{11}$  phải là đại biểu cùng lớp chuyên toán với Lan. Đó chính là Mai. Vậy Mai nhận được 11 quà tặng (Theo Vương Gia Vũ, 7H, THCS Trung Vương, Hà Nội)

Các bạn sau đây cũng có đáp án tốt : Phan Vũ Toàn, 7I, Từ Liêm, Hà Nội ; Đào Đức Cường, 8A, THCS Đoàn Lập, Tiên Lãng, Hải Phòng. Nguyễn Tuấn Thiện, Thị trấn Nghĩa Tân, Từ Liêm, Hà Nội.

BÌNH PHƯƠNG

#### HỎI AI, CÂU GÌ ĐỂ ĐƯỢC TỰ DO ?

Câu chuyện sau đây được kể trong nhiều cuốn sách giải trí và không ít bạn đã biết :

Ngày xưa, trong cuộc giao tranh giữa hai xứ THÔNG và MINH, hoàng tử xứ THÔNG không may bị bắt. Thấy chàng trai trẻ khôi ngô, công chúa xứ MINH, ban cho hoàng tử một ân huệ là được chọn cái chết : "Người được nói một câu, nếu là câu đúng thì người bị chặt đầu, còn nếu là câu sai thì người bị treo cổ."

Suy nghĩ trong giây lát, hoàng tử nói một câu và công chúa phải tha cho chàng, vì không thể treo cổ mà cũng chẳng thể chặt đầu chàng được. Câu chuyện này còn có phần kế tiếp mà có thể nhiều bạn chưa biết.

Một thời gian sau đó, rui ro thế nào mà công chúa xứ MINH bị bắt, và hoàng tử xứ THÔNG có cơ hội trả thù. Hoàng tử dẫn hai tên lính vào nhà giam công chúa và bảo : "Nhà giam này có hai cửa thoát ra ngoài, một cửa tự do (bước ra được cửa này thì nàng được tự do), và một cửa chết (bước ra cửa này thì nàng bị giết ngay lập tức). Hai tên lính này mỗi tên gác một cửa, một tên luôn nói thật và vui khi nàng được tự do, buồn nếu nàng bị giết ; còn tên kia thì ngược lại, luôn nói dối và buồn khi nàng được tự do, vui nếu nàng bị giết. Nàng được hỏi một tên lính gác chỉ một câu để chọn cửa ra khỏi nhà giam này."

Công chúa mỉm cười, từ từ bước đến trước mặt một tên lính gác, hỏi anh ta một câu, và vừa nghe xong câu trả lời thì nàng ung dung bước ra... đúng cửa tự do !

Bạn hãy thử sức mình : bước từ từ hết mười bước bạn có tìm ra câu hỏi của công chúa không ?

H.C

ISSN : 0866 - 8035  
Chi số : 12884  
Mã số : 8BT43M7

Sắp chữ tại TTCBDH NXBGD  
In tại Nhà máy in Diên Hồng, 57 Giảng Võ  
In xong và nộp lưu chiểu tháng 8/1997

Giá 2.000đ  
Hai nghìn đồng