

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ★ HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

6 (240)
1997
NĂM THỨ 34

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG

- ★ **ĐA THỨC ĐỐI XỨNG VÀ ỨNG DỤNG**
- ★ **GIẢI THƯỞNG CORA RATTO DÀNH CHO NỮ SINH GIỎI TOÁN**
- ★ **ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC ĐẠI CƯƠNG ĐHQG TP HCM**
- ★ **ĐỀ THI TUYỂN SINH CHUYÊN TOÁN - TIN ĐHSPT**
- ★ **TỪ MỘT BÀI TOÁN THI VÔ ĐỊCH QUỐC TẾ**



Các thầy giáo và đội tuyển học sinh giỏi trường Lê Hồng Phong, Nam Định

TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

MATHEMATICS AND YOUTH

MỤC LỤC

	Trang
● Dành cho các bạn Trung học cơ sở <i>For Lower Secondary School Level Friends</i> <i>Lê Quang Trung – Đa thức đối xứng và ứng dụng</i>	1
● Giải bài kì trước <i>Solutions of Problems in Previous Issue</i> Các bài của số 236	3
● Giải thưởng Cora Ratto dành cho các bạn nữ sinh giỏi toán	10
● Đề ra kì này <i>Problems in This Issue</i> T1/240, ..., ..., T10/240, L1/240, L2/240	11
● Thông báo chuyển trụ sở	11
● <i>Nguyễn Văn Minh – Đề thi tuyển sinh Đại học đại cương, ĐHQG TP HCM</i>	13
● <i>Doãn Minh Cường – Đề thi tuyển sinh chuyên toán – tin ĐHSP</i>	15
● <i>Trần Xuân Đáng – Từ một bài toán thi vô địch quốc tế</i>	Bìa 3
● Giải trí toán học <i>Fun with Mathematics</i> <i>Bình Phương – Giải đáp bài Anh đây tớ và ông chủ</i>	Bìa 4
<i>Nguyễn Huy Doan – Nhận được bao nhiêu quà</i>	Bìa 4

Tổng biên tập :
NGUYỄN CẢNH TOÀN

Phó tổng biên tập :
NGÔ ĐẠT TỬ
HOÀNG CHÚNG

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP :

Nguyễn Cảnh Toàn, Hoàng Chúng, Ngô Đạt Tử, Lê Khắc Bảo, Nguyễn Huy Doan, Nguyễn Việt Hải, Đinh Quang Hào, Nguyễn Xuân Huy, Phan Huy Khải, Vũ Thanh Khiết, Lê Hải Khôi, Nguyễn Văn Mậu, Hoàng Lê Minh, Nguyễn Khắc Minh, Trần Văn Nhung, Nguyễn Đăng Phát, Phan Thanh Quang, Tạ Hồng Quảng, Đặng Hùng Thắng, Vũ Dương Thụy, Trần Thành Trai, Lê Bá Khánh Trình, Ngô Việt Trung, Đặng Quan Viễn.

Trụ sở tòa soạn :

81 Trần Hưng Đạo, Hà Nội

231 Nguyễn Văn Cừ, TP Hồ Chí Minh

ĐT : 8220073

ĐT : 8356111

Biên tập và trị sự : VŨ KIM THỦY

LÊ THỐNG NHẤT

Trình bày : TRỌNG THIỆP

ĐA THỨC ĐỐI XỨNG VÀ ỨNG DỤNG

LÊ QUANG TRUNG - CĐSP (Minh Hải)

Trong chương trình toán ở THCS, khái niệm đa thức đã được trình bày song còn rất sơ lược, chưa được vận dụng nhiều vào giải quyết các bài toán. Trong bài này tôi xin giới thiệu vài nét về đa thức đối xứng và các ứng dụng của nó, chủ yếu là các đa thức 2 ẩn và 3 ẩn.

I - Tóm lược lý thuyết

1. **Định nghĩa** : Một đa thức 3 ẩn x, y, z được gọi là **đa thức đối xứng** nếu nó không thay đổi giá trị khi ta thay thế một cách tùy ý các ẩn x, y, z cho nhau.

Ví dụ 1 : - Các đa thức sau là các đa thức đối xứng :

$$x + y, x.y, x^2y + xy^2, x^2 + y^2, x^3 + y^3, \dots, x^2 + y^2 + z^2, x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$$

- Các đa thức sau không phải là đa thức đối xứng :

$$x - y, x^2 - y^2, x^3 - 3y^2 + 2xy, \dots$$

2. **Đa thức đối xứng cơ bản**

a) Đa thức 2 ẩn có 2 đa thức đối xứng cơ bản : $\delta_1 = x + y, \delta_2 = xy$

b) Đa thức 3 ẩn có 3 đa thức đối xứng cơ bản :

$$\delta_1 = x + y + z, \delta_2 = xy + xz + yz, \delta_3 = xyz$$

3. **Biểu diễn đa thức đối xứng qua các đa thức đối xứng cơ bản**

a) Đối với đa thức 2 ẩn việc biểu diễn không khó khăn lắm chẳng hạn :

$$x^2y + xy^2 = xy(x + y) = \delta_1\delta_2, x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = \delta_1^2 - 2\delta_2$$

$$x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) = \delta_1^3 - 3\delta_1\delta_2, \dots$$

b) Đối với đa thức 3 ẩn việc biểu diễn khó khăn hơn, nhưng ta có thể dùng phương pháp hệ số bất định như sau :

- Trước hết ta coi một đa thức 3 ẩn viết dưới dạng đầy đủ là :

$$f(x, y, z) = t_1x^a y^b z^c + t_2x^a y^b z^c + \dots + t_mx^a y^b z^c$$

Hạng tử $t_1x^a y^b z^c$ có bộ số mũ là (a, b, c)

$$\text{Ví dụ 1 : } f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = x^3y^0z^0 + x^0y^3z^0 + x^0y^0z^3 - 3xyz$$

- Phương pháp biểu diễn :

+ Chọn hạng tử cao nhất giả sử là $t_1x^a y^b z^c$ có bộ số mũ là (a, b, c)

+ Viết tất cả các bộ số mũ (d, m, n) thỏa mãn $d + m + n = a + b + c$ và $d \geq m \geq n$.

$$+ \text{ Giả sử } f(x, y, z) = k_1\delta_1^{d_1-m_1-n_1}\delta_2^{m_1-n_1}\delta_3^{n_1} + k_2\delta_1^{d_2-m_2-n_2}\delta_2^{m_2-n_2}\delta_3^{n_2} + \dots + k_t\delta_1^{d_t-m_t-n_t}\delta_2^{m_t-n_t}\delta_3^{n_t}$$

Cho x, y, z những giá trị tùy ý ta tìm được $k_1, k_2, \dots, k_t$.

Ví dụ 2. Biểu diễn đa thức $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3$ qua các đa thức đối xứng cơ bản.

- Hạng tử cao nhất là x^3 có bộ số mũ $(3, 0, 0)$.

- Viết tất cả các bộ số mũ : $(3, 0, 0), (2, 1, 0), (1, 1, 1)$.

$$\begin{aligned} - \text{Giả sử : } f(x, y, z) &= k_1\delta_1^{3-0-0}\delta_2^{0-0}\delta_3^0 + k_2\delta_1^{2-1-0}\delta_2^{1-0}\delta_3^0 + k_3\delta_1^{1-1-1}\delta_2^{1-1}\delta_3^1 = \\ &= k_1\delta_1^3 + k_2\delta_1\delta_2 + k_3\delta_3 \end{aligned}$$

Cho $x = 1, y = -2, z = 1$ ta được $\delta_1 = 0, \delta_2 = -3, \delta_3 = -2$ suy ra $k_3 = 3$

$x = 1, y = 1, z = 0$ ta được $\delta_1 = 2, \delta_2 = 1, \delta_3 = 0$ suy ra : $8k_1 + 2k_2 = 2$

$x = 1, y = 1, z = 1$ ta được $\delta_1 = 3, \delta_2 = 3, \delta_3 = 1$ suy ra : $27k_1 + 9k_2 + 3 = 3$ từ đó suy ra $k_1 = 1, k_2 = -3$

$$\text{Vậy : } f(x, y, z) = \delta_1^3 - 3\delta_1\delta_2 + 3\delta_3$$

II - Ứng dụng

1. **Phân tích đa thức thành nhân tử** :

Ví dụ 3. Phân tích đa thức $f(x, y) = x^3 + 3x^2y + 2x^2y + 3x^2y^2 + 2xy^2 + 3xy^3 + y^3$ thành nhân tử.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } f(x, y) &= (x^3 + y^3) + 3xy(x^2 + y^2) + 2xy(x + y) + 3x^2y^2 = \\ &= \delta_1^3 - 3\delta_1\delta_2 + 3\delta_2(\delta_1^2 - 2\delta_2) + 2\delta_1\delta_2 + 3\delta_2^2 = \delta_1^3 - \delta_1\delta_2 + 3\delta_2^2\delta_1 - 3\delta_2^2 = \\ &= (\delta_1 + 3\delta_2)(\delta_1^2 - \delta_2) = (x + y + 3xy)(x^2 + y^2 + xy) \end{aligned}$$

2. **Giải hệ phương trình.**

$$\text{Ví dụ 4. Giải hệ phương trình } \begin{cases} x^3 + y^3 + 2xy = 12 \\ x + y = 2 \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} x + y = \delta_1 \\ xy = \delta_2 \end{cases} \text{ thì } (1) \Leftrightarrow \begin{cases} \delta_1^3 - 3\delta_1\delta_2 + 2\delta_2 = 12 \\ \delta_1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \delta_1 = 2 \\ \delta_2 = -1 \end{cases}$$

Vậy ta có hệ $\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = -1 \end{cases}$ có các nghiệm là $\begin{cases} x_1 = 1 + \sqrt{2} \\ y_1 = 1 - \sqrt{2} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x_2 = 1 - \sqrt{2} \\ y_2 = 1 + \sqrt{2} \end{cases}$

3. Giải phương trình căn thức

Ví dụ 5. Giải phương trình: $\sqrt[4]{x-2} + \sqrt[4]{3-x} = 1$

Đặt $\sqrt[4]{x-2} = u, \sqrt[4]{3-x} = v$, ta có $u, v \geq 0$

Khi đó ta có hệ $\begin{cases} u + v = 1 \\ u^4 + v^4 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \delta_1 = 1 \\ (\delta_1^2 - 2\delta_2)^2 - 2\delta_2^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \delta_1 = 1 \\ \delta_2 = 0 \\ \delta_1 = 1 \\ \delta_2 = 2 \text{ (loại)} \end{cases} \text{ từ}$$

$$\begin{cases} \delta_1 = 1 \\ \delta_2 = 0 \end{cases} \text{ ta có } \begin{cases} u = 1 \\ v = 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} u = 0 \\ v = 1 \end{cases}$$

Nếu $\begin{cases} u = 1 \\ v = 0 \end{cases}$ thì phương trình có nghiệm $x = 3$.

Nếu $\begin{cases} u = 0 \\ v = 1 \end{cases}$ thì phương trình có nghiệm $x = 2$.

4. Lập phương trình bậc 2.

Ví dụ 6. Lập phương trình bậc 2: $x^2 + px + q = 0$ có 2 nghiệm: $x_1 = y_1^4 + 2y_2^2, x_2 = y_2^4 + 2y_1^2$ trong đó y_1, y_2 là nghiệm của phương trình: $y^2 + 3y + 1 = 0$.

Theo Viét: $\begin{cases} \delta_1 = y_1 + y_2 = -3 \\ \delta_2 = y_1 y_2 = 1 \end{cases}$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } x_1 + x_2 &= (y_1^4 + y_2^4) + 2(y_1^2 + y_2^2) = \\ &= (\delta_1^2 - 2\delta_2)^2 - 2\delta_2^2 + 2(\delta_1^2 - \delta_2) = 63 \\ &= x_1 x_2 = y_1^4 y_2^4 + 4y_1^2 y_2^2 + 2(y_1^6 + y_2^6) = \\ &= \delta_1^4 + 4\delta_2^2 + 2(\delta_1^6 - 6\delta_1^4 \delta_2 + 9\delta_1^2 \delta_2^2 - 2\delta_2^3) = 649 \end{aligned}$$

Vậy phương trình bậc 2 cần tìm là: $x^2 - 63x + 649 = 0$

5. Chứng minh các hằng đẳng thức

Ví dụ 7. Cho $x + y = 1, x^3 + y^3 = a, x^5 + y^5 = b$. Chứng minh rằng: $5a(a + 1) = 9b + 1$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } x^3 + y^3 &= (x + y)^3 - 3xy(x + y) = \\ &= \delta_1^3 - 3\delta_1 \delta_2 \text{ suy ra } \delta_2 = \frac{1 - a}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Mặt khác } b &= x^5 + y^5 = x^5 + y^5 + x^2 y^3 + x^3 y^2 - x^2 y^3 - x^3 y^2 \\ &= x^2(x^3 + y^3) + y^2(x^3 + y^3) - x^2 y^2(x + y) = \\ &= (x^2 + y^2)(x^3 + y^3) - x^2 y^2(x + y) = \\ &= (\delta_1^2 - 2\delta_2)(\delta_1^3 - 3\delta_1 \delta_2) - \delta_1 \delta_2^2 = \\ &= (1 - 2\delta_2)(1 - 3\delta_2) - \delta_2^2 = \end{aligned}$$

$$= 1 + 5\delta_2^2 - 5\delta_2 = \frac{5a^2 + 5a - 1}{9}$$

$$\text{Vậy } 9b = 5a^2 + 5a - 1 \text{ hay } 9b + 1 = 5a(a + 1)$$

6. Tìm nghiệm nguyên của các phương trình đối xứng.

Ví dụ 8. Tìm các số nguyên dương thỏa mãn phương trình: $x^3 + y^3 + 1 = 3xy$ Đặt $\delta_1 = x + y, \delta_2 = xy$ ta có: $\delta_1^3 - 3\delta_1 \delta_2 + 1 = 3\delta_2 \Leftrightarrow (\delta_1 + 1)(\delta_1^2 - \delta_1 + 1 - 3\delta_2) = 0$ Vì $x, y > 0$ nên $\delta_1 = x + y > 0$ do đó $\delta_1 + 1 \neq 0$ vậy $\delta_1^2 - \delta_1 + 1 - 3\delta_2 = 0$ suy ra $\delta_2 = \frac{1}{3}(\delta_1^2 - \delta_1 + 1)$.

Như vậy ta phải tìm x, y nguyên dương sao cho $\begin{cases} x + y = \delta_1 \\ xy = \frac{1}{3}(\delta_1^2 - \delta_1 + 1) \end{cases}$ phương trình bậc 2:

$$z^2 - \delta_1 z + \frac{1}{3}(\delta_1^2 - \delta_1 + 1) = 0$$

$$\text{Có } \Delta = -\frac{1}{3}(\delta_1 - 2)^2. \Delta < 0 \text{ nếu } \delta_1 \neq 2.$$

Vậy ta phải có $\delta_1 = x + y = 2$

$$\text{Khi đó } x = y = \frac{2}{2} = 1.$$

7. Chứng minh các bất đẳng thức

Ta luôn có $(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \geq 0 \Leftrightarrow 2(x^2 + y^2 + z^2) - 2(xy + yz + zx) \geq 0 \Leftrightarrow 2(\delta_1^2 - 2\delta_2) - 2\delta_2 \geq 0 \Leftrightarrow \delta_1^2 \geq 3\delta_2$ từ bất đẳng thức này ta chứng minh được các bất đẳng thức khác.

Ví dụ 9. Chứng minh các bất đẳng thức:

a) $(ab + ac + bc)^2 \geq 3abc(a + b + c) \forall a, b, c \in \mathbf{R}$.

b) $(a + b + c)(ab + ac + bc) \geq 9abc \forall a, b, c \in \mathbf{R}^+$

a) Từ $\delta_1^2 \geq 3\delta_2$ hay $(x + y + z)^2 \geq 3(xy + yz + zx)$ đặt $x = ab, y = ac, z = bc$ ta được: $(ab + ac + bc)^2 \geq 3(a^2 bc + ab^2 c + abc^2) = 3abc(a + b + c)$

b) Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với: $\delta_1 \delta_2 \geq 9\delta_3$. Vì a, b, c dương nên $\delta_1, \delta_2, \delta_3 > 0$. Từ các bất: $\delta_1^2 \geq 3\delta_2$ và $\delta_2^2 \geq 3\delta_1 \delta_3$ ta có $\delta_1^2 \delta_2^2 \geq 9\delta_1 \delta_2 \delta_3$ suy ra $\delta_1^2 \geq 9\delta_2 \delta_3$

III - Một số bài tập:

1. Phân tích đa thức $2x^4 - x^3 y + 3x^2 y^2 - xy^3 + 2y^4$ thành nhân tử:

2. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 5 \\ xy^2 + x^2 y = 1 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x^3 + y^3 + x^2 y + xy^2 = 13 \\ x^4 y^2 + x^2 y^4 = 468 \end{cases}$$

3. Giải phương trình: $\sqrt{\frac{1}{2} + x} + \sqrt{\frac{1}{2} - x} = 1$;

$$\sqrt[4]{629 - x} + \sqrt[4]{77 + x} = 8$$

4. Lập phương trình bậc 2: $x^2 + px + q = 0$ có các nghiệm $x_1 = y_1^6 - 2y_2^2, x_2 = y_2^6 - 2y_1^2$ Trong

đó y_1, y_2 là nghiệm của pt: $y^2 + 2y - 4 = 0$

5. Chứng minh hằng đẳng thức:

$$(x + y)^4 + x^4 + y^4 = 2(x^2 + xy + y^2)^2$$

6. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình:

$$x + y = x^2 - xy + y^2$$

7. Chứng minh các bất đẳng thức:

a) $a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b \forall a, b \in \mathbf{R}$

b) $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^8 \geq 64ab(a + b)^2 \forall a \geq 0, b \geq 0$



Bài T1/236. Tìm ước số chung lớn nhất của $2^{1964} - 1$ và $2^{1996} - 1$.

Lời giải (Dựa theo Đoàn Hải Giang, 7^A Năng Khiếu Quỳnh Lưu, Nghệ An). Trước hết, ta xét bài toán sau đây :

"Với $a, m, n \in \mathbb{N}^+$ thì $a^{mn} - 1$ chia hết cho $a^m - 1$; $a^n - 1$ " (*) (Vì phép chia đa thức $a^{mn} - 1$ cho các đa thức $a^m - 1$; $a^n - 1$ là không có dư). Bây giờ ta phát biểu và chứng minh bài toán tổng quát sau đây :

"Với $a, m, n \in \mathbb{N}$ và $a > 1$ thì $(a^m - 1 ; a^n - 1) = a^{(m,n)} - 1$ ". Thật vậy, đặt $d_1 = (a^m - 1 ; a^n - 1)$ và $d_2 = (m ; n)$, ta phải chứng minh $d_1 = a^{d_2} - 1$. Từ (*), ta có $a^{d_2} - 1$ là ước của $a^m - 1$; $a^n - 1$, suy ra $a^{d_2} - 1$ là ước của d_1 (**). Đảo lại, do $d_2 > 0$ và là ước số của m, n nên dễ dàng tìm được hai số nguyên dương x, y thỏa mãn : $mx - ny = d_2$. Mặt khác, do d_1 là ước của $a^m - 1$; $a^n - 1$ nên từ (*), ta có d_1 là ước của $a^{mx} - 1$; $a^{ny} - 1$. Do đó d_1 là ước của $(a^{mx} - 1) - (a^{ny} - 1) = a^{mx} - a^{ny} = a^{ny}(a^{mx-ny} - 1) = a^{ny}(a^{d_2} - 1)$. Mà $(d_1 ; a) = 1$ nên d_1 là ước của $a^{d_2} - 1$ (***). Kết hợp (**) với (***), ta có $d_1 = a^{d_2} - 1$. Và, bài toán tổng quát đã được giải xong. Áp dụng vào bài toán đang giải, ta có số cần tìm là $2^4 - 1 (= 15)$, vì $(1964 ; 1996) = 4$.

Nhận xét. Có 175 bài giải, tất cả đều giải đúng, trong đó có một số bạn cũng dùng lời giải tổng quát như trên. Ngoài bạn Đoàn Hải Giang ra, còn có các bạn sau đây có lời giải tốt : **Thanh Hóa** : Lê Kim Phương (8C THCS Năng Khiếu Tp Thanh Hóa), Lê Trọng Sơn (7A, NK Hoàng Hóa) **Hà Nội** : Nguyễn Thành Trung (8M, Marie Curie), Trần Lưu Văn (9C THCS Ngọc Lâm), Trần Minh Quân (8H PTCS Trưng Vương) **Vĩnh Phúc** : Kiều Việt Cường (9B PTCS Chuyên Yên Lạc). **Phú Thọ** : Nguyễn Kim Sớ (11A PTTH Thanh Ba) **Hải Phòng** : Lê Minh Anh (8A1 Hồng Bàng) **Nam Định** : Phùng Văn Huân (8 Năng Khiếu, huyện Giao Thủy) **Bạc Liêu** : Lương Thế Nhân (8A PTTH Chuyên)

DẶNG VIỄN

Bài T2/236 : Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^4 + y^4 + z^4 = 8(x + y + z) & (1) \\ xyz = 8 & (2) \end{cases}$$

Lời giải : (của nhiều bạn)

Ta có $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0$

$\forall a, b, c$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca \quad \forall a, b, c.$$

Bất đẳng thức trở thành đẳng thức $\Leftrightarrow$

$$a = b = c.$$

Áp dụng vào bài toán này ta có

$$x^4 + y^4 + z^4 \geq x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 \geq$$

$$(xy)(yz) + (yz)(zx) + (zx)(xy)$$

$$= xyz(x + y + z)$$

$$\text{Kết hợp với (2) thì } x^4 + y^4 + z^4 \geq$$

$$\geq 8(x + y + z)$$

Theo (1) thì bất đẳng thức trở thành đẳng thức. Do đó hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x^2 = y^2 = z^2 \\ xy = yz = zx \Leftrightarrow x = y = z = 2. \\ xyz = 8 \end{cases}$$

Nhận xét :

1) Trong 267 bài giải gửi về có hai bạn giải sai tìm ra 4 nghiệm và một số bạn lí luận sai : " $x^4 + y^4 + z^4 \geq 3 \sqrt[3]{x^4y^4z^4} = 48$

$\Rightarrow 8(x + y + z) \geq 48 \Rightarrow x + y + z \geq 6$. Dấu đẳng thức xảy ra (tại sao lại xảy ra ?) $\Leftrightarrow x = y = z = 2$ ".

2) Nhiều bạn sử dụng bất đẳng thức theo những hướng khác phức tạp hơn (tuy vẫn đúng!).

3) Hai bạn Phan Việt Bắc, 9T Phan Bội Châu, Nghệ An và Lại Thành Nam, 8A Chuyên Quỳnh Phụ, Thái Bình có nhận xét đúng : "thay 8 bởi $a \neq 0$ thì hệ vẫn có

nghiệm duy nhất $x = y = z = \sqrt[3]{a}$ (yêu cầu $a \neq 0$ để đỡ tầm thường ?).

4) Các bạn có lời giải tốt hơn là : **Thanh**

hóa : Lê Trọng Sơn, 7A, NK Hoàng Hóa ;

Mai Văn Hà, 7 TN, NK Bim Sơn, **Nam**

Định : Nguyễn Trung Quân, 9T, NK Ý Yên ;

Nguyễn Tiến Dũng, 7T, Trần Đăng Ninh.

Quảng Ngãi : Nguyễn Tiến Khải, Hà

Quang Đạt, 7T, Chuyên Lê Khiết ; **Nguyễn**

Thị Phương Uyên, 7 Chuyên Nghĩa Hành.

Đà Nẵng : Hoàng Thế Long, 8B, Lê Lợi.

Hà Tĩnh : Phan Công Đức, 9T, Chuyên Hà

Tĩnh. Đăclac : Tạ Quốc Hưng, Dương

Thành An, 8T Chuyên Nguyễn Du. **Nghệ**

An : Nguyễn Hoàng Sào, 8 Toán Tin, NK

Vinh ; **Chu Việt Tuấn**, 9T, Phan Bội Châu.

Hà Nội : Phạm Mỹ Dung, 8A, Chu Văn An ;

Trần Minh Quân, 8H, Trưng Vương ; **Khúc**

Quang Ngọc, 8A, Giảng Võ. **Thừa Thiên -**

Huế : Nguyễn Quang Vũ, Lê Trung Kiên,

9/1, Nguyễn Tri Phương. **TP Hồ Chí Minh** :

Khúc Ngọc Vinh, 8/1, Hồng Bàng. **Bắc**

Ninh : Phạm Việt Khoa, 9T, Tiên Sơn.

Khánh Hòa : Trần Tuấn Anh, 9T, Lê Quý

Đôn. Phú Thọ : Nín Tuấn, 9A2, Chuyên

Việt Trì, Hà Quang Chiến, 9A, trường dân

tộc và nội trú. **Hà Tây** : Chu Thùy Dương,

9, Thường Tín ; **Nguyễn Hải Hà**, 9B,

Chuyên Ung Hòa. Bạc Liêu : Lương Tri

Nhân, Trương Yến Nhi 8A, Chuyên Bạc

Liêu. Hải Dương : Đỗ Công Hưng, Lê

Trung Dũng, 8T, NK Hải Dương, **Thái**

Bình : Lê Thành Công, 8T, Đông Hưng. **Cà**

Mau : Trần Ngọc Đức, 9A, Thới Bình.

Quảng Ninh : Hà Tiến Sĩ, 8A ; Trọng điểm

Uông Bí. Vĩnh Phú : Trần Thị Thu Hương,

9A, Chuyên Vĩnh Tường. **Ninh Bình** : Lê

Hồng Linh, 9T, Chuyên thị xã. **Hà Nam** :

Lê Thành Nam, 9T, NK Duy Tiên. **An**

Giang : Hoàng Thanh Lâm, 9T, Chuyên

Thoại Ngọc Hầu, Long Xuyên.

LÊ THỐNG NHẤT

Bài T3/236 : Cho $2n$ số $a_1, a_2, \dots, a_n ; b_1, b_2, \dots, b_n$ thỏa mãn :

$$1) a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$$

$$2) b_i \geq 0 \quad \forall i = 1, n$$

$$\text{Đặt } m = \min(a_j - a_1, a_1), M = \max\{b_i\}$$

$$1 \leq j \leq n$$

$$1 \leq i \leq n$$

Chứng minh rằng

$$M(a_1b_1) + a_2b_2 + \dots + a_nb_n \geq \frac{m}{2} (b_1 + b_2 + \dots + b_n)^2.$$

Lời giải : của Phan Thanh Tùng, 9TA, Phan Bội Châu, Nghệ An. Điều kiện : $a_1 \geq 0$. Vì nếu $a_1 < 0$ thì khi cho $a_2 = a_3 = \dots = a_n = 0$; $b_1 = 1, b_2 = b_3 = \dots = b_n = 0$. Ta có : $M(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n) \geq \frac{m}{2} (b_1 + b_2 + \dots + b_n)^2$ trở thành $a_1 \geq \frac{a_1}{2}$ (vô lí vì $a_1 < 0$)

với $a_1 \geq 0$ ta suy ra $m \geq 0$.

Tại lại có $a_1 \geq m$; $a_2 - a_1 \geq m \Rightarrow a_2 \geq 2m$ và từ đó suy ra $a_3 \geq \dots$; $a_n \geq n.m$

$$\begin{aligned} \text{Vậy có } M(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n) &\geq M(mb_1 + 2mb_2 + \dots + nmb_n) \\ &= mM(b_1 + 2b_2 + \dots + nb_n) \\ &= m[M(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) + M(b_2 + b_3 + \dots + b_n)^2] \neq Mb_1^2 \\ &\geq m[b_1(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) + b_2(b_2^2 + b_3^2 + \dots + b_n^2) + \dots + b_{n-1}(b_{n-1}^2 + b_n^2) + b_n^2] \\ &= \frac{m}{2} [(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) + (b_1 + b_2 + \dots + b_n)^2] \\ &\geq \frac{m}{2} (b_1 + b_2 + \dots + b_n)^2 \text{ (đpcm)} \end{aligned}$$

Dấu "=" xảy ra khi $b_1 = b_2 = \dots = b_n = 0$ hoặc khi $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$.

Nhận xét. 1. Để tiếng Việt của bài này in thiếu. Thành thật xin lỗi bạn đọc và tác giả để ra.

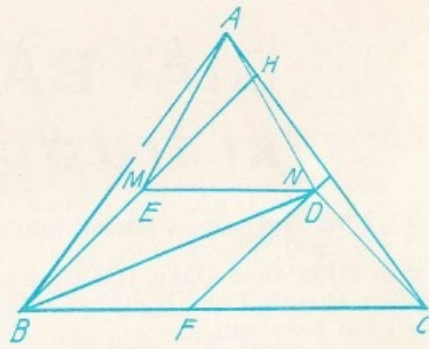
2. Các bạn sau đây có lời giải tốt : **Phú Thọ :** Hà Quang Chiến, 9A₁, Dân tộc nội trú huyện Sông Thao. **Hòa Bình :** Đỗ Thu Hà, 9A, THCS Hữu Nghị. **Hà Tây :** Lưu Tiến Đức ; 8B, Chuyên V-T Ứng Hòa. **Nghệ An :** Phan Việt Bắc, 9A, Phan Bội Châu. **Khánh Hòa :** Trần Tuấn Anh 9T, Lê Quý Đôn, Nha Trang.

TỔ NGUYÊN

Bài T4/236. Cho tam giác ABC với điểm D ở bên trong sao cho $AB = AC$; $BAC = 80^\circ$; $DBC = 20^\circ$. Gọi F là giao điểm của đường vuông góc với AC kẻ qua D và E là điểm đối xứng với F qua BD. Tam giác ADE là tam giác gì, tại sao ?

Lời giải. (Dựa theo Lê Anh Vinh 8A₁ THCS Giảng Võ Hà Nội)

Lấy các điểm M và N ở bên trong $\triangle ABC$ sao cho các tam giác MAB, NAC cân đỉnh M, N với các góc đáy đều bằng 10° . Suy ra $\triangle MAB = \triangle NAC$ (g.c.g.), và ta có $BM = MA = AN = NC$. Hơn nữa, $MAN = 80^\circ - 10^\circ - 10^\circ = 60^\circ$ nên $\triangle AMN$ đều, và ta có $MN = MA = MB$. Kẻ phân giác Ax của góc BAC, ta có Ax cũng là phân giác góc MAN (vì $BAM = 10^\circ = CAN$). Mà các tam giác ABC, AMN cân đỉnh A nên các đáy BC, MN cũng vuông góc với Ax và song song với nhau. Do $MN = MB$ nên $\triangle MBN$ cân đỉnh M và ta có $MBN = MNB$. Hơn nữa, $MNB = NBC$ (so le trong) nên $NBM = NBC = (ABC - ABM) : 2 = (50^\circ - 10^\circ) : 2 = 20^\circ$. Suy ra tia BN trùng với tia BD (1). Ta lại có $BCN = BCA - NCA = 50^\circ - 10^\circ = 40^\circ$ nên tia CN trùng với tia CD (2). Kết hợp (2) với (1), ta có N trùng với D (3).



Kéo dài BM cho tới cắt AC tại H, ta có $AHB = 180^\circ - MBA - BAH = 180^\circ - 10^\circ - 80^\circ = 90^\circ$, suy ra $BM \parallel DF$ (vì cùng vuông góc với AC), và kết hợp với $MN \parallel BF$, ta có $BMDF$ là hình bình hành. Mà $BM = MN = MD$ nên $BMDF$ là hình thoi, suy ra M đối xứng với F qua BD và trùng với E. Kết hợp với (3) ta có $\triangle ADE$ trùng với $\triangle AMN$ và là tam giác đều.

Nhận xét. Có 60 bài giải trong đó có 1 bài trả lời là tam giác thường, 3 bài trả lời là tam giác cân, còn lại đều trả lời đúng. Lời giải tốt gồm có :

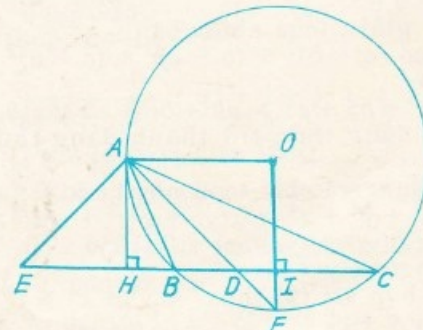
Hà Nội : Lê Anh Vinh (8A₁, PTCS Giảng Võ). **Nam Định :** Chu Thế Sơn (Lí 9 Năng khiếu Hải Hậu), Vũ Tiến Tài (9 Toán Năng khiếu Hải Hậu), Trần Đức Hiệu (8 toán Hàn Thuyên). **Tp Hồ Chí Minh :** Chung Nhân Phú (9T1 Nguyễn An Khương Học Môn). **Bắc Ninh :** Hoàng Tùng (9 Chuyên Toán Năng khiếu Tiên Sơn). **Nghệ An :** Phan Thanh Trung (9 Toán A PTTH Phan Bội Châu Tp Vinh), Hồ Nghĩa Chấn (7A Năng khiếu Quỳnh Lưu). **Vĩnh Phúc :** Vũ Văn Phong (9a THCS Chuyên Vĩnh Tường), Nguyễn Trung Lập (9B Chuyên Yên Lạc). **Hà Tây :** Phan Lạc Linh (8A Chuyên Thạch Thất). **Khánh Hòa :** Trần Tuấn Anh (9 Toán Lê Quý Đôn, Nha Trang).

DẶNG VIỄN

Bài T5/236. Cho $\triangle ABC$. Kẻ AD và AE là hai phân giác trong và ngoài tại đỉnh A. Đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ có bán kính bằng 1. Biết rằng $AD = AE$. Tính AD khi $\triangle ABC$ có diện tích lớn nhất.

Lời giải : Để dễ dàng chứng minh $\triangle ADE$ vuông cân tại A $\Rightarrow ADE = 45^\circ$

Kẻ $AH \perp DE$ (1). Ta có $AD = AH \cdot \sqrt{2}$. (*)



Gọi F là giao của AD với (O) . Ta có
sđ $BF =$ sđ CF và $OF \perp BC$ tại I . (2)

$$\text{Mặt khác sđ } \widehat{ADB} = \frac{1}{2} (\text{sđ } \widehat{AB} + \text{sđ } \widehat{FC}) \\ = \frac{1}{2} (\text{sđ } \widehat{AB} + \text{sđ } \widehat{BF}) = \frac{1}{2} \text{sđ } \widehat{AF}$$

$$\Rightarrow \widehat{AF} = 90^\circ. \text{ Vậy } \widehat{AOF} = 90^\circ \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) ta có : $AOIH$ là hình chữ nhật.
Từ đó $\frac{AH}{BC} = \frac{OI}{CI}$ (**)

$$\text{Ta có } S_{\triangle ABC} = \frac{AH \cdot BC}{2} = OI \cdot CI = \sqrt{R^2 - CI^2} \cdot IC$$

Mà $1 - IC^2 + IC^2 = 1$ không đổi, nên
 $S_{\triangle ABC}$ đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi

$$1 - IC^2 = IC^2 \Leftrightarrow IC = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow BC = \\ = \sqrt{2} = \sqrt{1+1} \Leftrightarrow \triangle OBC \text{ vuông cân tại } O \Leftrightarrow \\ OI = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (***)$$

Từ (*), (**) và (***) ta có $AD = 1$ khi
 $\triangle ABC$ có diện tích lớn nhất.

Nhận xét :

1. Nhiều bạn giải không đúng bài này

2. Các bạn có lời giải tốt :

Thái Nguyên : Vũ Thái Hòa, 9T THCS
năng khiếu, **Phú Thọ :** Hà Quang Chiến
9A, **Lê Trung Đoàn 9A I THCS** chuyên và
DTNT Sông Thao ; **Vĩnh Phúc :** Nguyễn
Thanh Tú, 9B Chuyên Yên Lạc, Trần
Phương Anh 8A, Chuyên cấp II Mê Linh,
Phúc Yên, Trần Thị Thu Hương, 9A Chuyên
Vĩnh Tường ; **Bắc Ninh :** Hoàng Tùng,
Nguyễn Xuân Cường, 9NK, Tiên Sơn ; **Hà
Tây :** Nguyễn Hải Hà, 9B Chuyên Ứng
Hòa ; Tô Ngọc Phan, 9K Lê Lợi, Hà Đông ;
Hải Phòng : Trần Văn Hà, 9D2 cấp 2 Lạc
Viên ; **Hà Nội :** Đoàn Thanh Tùng 8A2,
Nguyễn Trường Tộ, Bùi Lê Na, 8C Hà Nội
- Amsterdam, Trần Minh Quân, 8H Trưng
Vương, **Thái Bình :** Trần Thế Hoàng 9T
Đông Hưng ; **Nam Định :** Đỗ Minh Tiến,
8T, Trần Đăng Ninh, Hoàng Tiến, Lí 9, Vũ
Việt Tài 9 Toán, năng khiếu Hải Hậu, Vũ
Xuân Dũng, 9 THCS Giao Tiến, Giao Thủy ;
Thanh Hóa : Lê Kim Phương, 8C THCS
Năng khiếu Tp, **Nghệ An :** Phạm Công
Phiệt, Xóm 19 Nghi Trung, Nghi Lộc, Phan
Việt Bắc, 9TA PTTH Phan Bội Châu, **Hà
Tĩnh :** Trần Nguyễn Thọ 9T1 NK Hà Tĩnh,
Quảng Nam : Sử Duy Bin, 9A Chuyên
Nguyễn Hiến, Điện Phương, Điện Bàn ;
Khánh Hòa : Trần Tuấn Anh, 9T Lê Quý
Đôn, **Nha Trang :** HCM : Chung Nhân
Phú, 9T1, Nguyễn An Khương, Hóc Môn,
Trà Vinh : Bùi Minh Khoa, 9₄ Lý Tự
Trọng ; **An Giang :** Hoàng Thanh Lâm, 9T
Chuyên Thoại Ngọc Hầu, Long Xuyên.

VŨ KIM THÙY

Bài T6/236 : Cho dãy $\{a_n\}$ thỏa mãn :

$$a_1 = a; a_{n+1} = \frac{2a_n^3 - 2a_n^2 - 2}{3a_n^2 - 4a_n - 1} \text{ với mọi } n \in \mathbb{Z}^+.$$

Chứng minh rằng, nếu $|a| \geq 2$ thì dãy
 $\{a_n\}$ hội tụ. Tính giới hạn của dãy trong
trường hợp đó.

Lời giải : Ta có :

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2a_n^3 - 2a_n^2 - 2}{3a_n^2 - 4a_n - 1} - a_n = \\ = \frac{(1 - a_n^2)(a_n - 2)}{3a_n^2 - 4a_n - 1} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$a_{n+1} - 2 = \frac{2a_n^3 - 2a_n^2 - 2}{3a_n^2 - 4a_n - 1} - 2 = \\ = \frac{2a_n(a_n - 2)^2}{3a_n^2 - 4a_n - 1} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$a_{n+1} + 1 = \frac{2a_n^3 - 2a_n^2 - 2}{3a_n^2 - 4a_n - 1} + 1 = \\ = \frac{(a_n + 1)^2(2a_n - 3)}{3a_n^2 - 4a_n - 1} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Dựa vào các đẳng thức trên, với lưu ý rằng

$$3a_n^2 - 4a_n - 1 = (a_n - 2)^2 + 2 \left(a_n^2 - \frac{3}{2} \right),$$

bằng phương pháp quy nạp theo n dễ dàng
chứng minh được rằng :

+ Nếu $a_1 = a \geq 2$ thì $a_n \geq 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$
và $a_{n+1} \leq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$. Nếu $a_1 = a \leq -2$
thì $a_{n+1} < -1 \quad \forall n \geq 2$ và $a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$
Từ đó : + Nếu $a \geq 2$ thì dãy $\{a_n\}$ là dãy
không tăng và bị chặn dưới bởi 2. (1)

+ Nếu $a \leq -2$ thì dãy $\{a_n\}$ là dãy không
giảm và bị chặn trên bởi -1. (2) Suy ra :
Với $|a| \geq 2$ thì dãy $\{a_n\}$ là dãy hội tụ. Đặt
 $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. Từ công thức xác định dãy $\{a_n\}$

$$\text{và (1), (2) ta có : } \alpha = \frac{2\alpha^3 - 2\alpha^2 - 2}{3\alpha^2 - 4\alpha - 1} \\ \alpha \geq 2 \text{ nếu } a \geq 2 \\ \alpha \leq -1 \text{ nếu } a \leq -2$$

Từ đó suy ra :

+ Nếu $a \geq 2$ thì $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$.

+ Nếu $a \leq -2$ thì $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -1$.

Nhận xét : 1) Do sơ suất nên công thức
xác định dãy $\{a_n\}$ trong đề bài đã bị in
nhầm. Tuy nhiên hầu hết các bạn gửi lời giải
tới Tòa soạn đã giải bài toán được in đúng
ở phần đề bài bằng tiếng Anh. Các bạn giải
đúng bài toán đã được in ở phần đề bài bằng
tiếng Việt vẫn được điểm tối đa của bài toán.

2) Các bạn sau đây có lời giải hoàn chỉnh :
Đaklak : Lê Thế Tân (11 Toán Trường
Chuyên Nguyễn Du - Buôn Ma Thuột) ; **Trà
Vinh :** Trần Huỳnh Thế Khanh (12A,
PTTH Phạm Thái Bường) ; **Quảng Ngãi :**
Nguyễn Xuân Hà (12H PTTHCB số 1 - Đức
Phổ) ; **Thừa Thiên - Huế :** Đinh Trung
Hoàng (11CT ĐHTH Huế) ; **Quảng Bình :**
Trần Đức Thuận (11CT PTNK Quảng
Bình) ; **Nghệ An :** Ngô Anh Tuấn, Nguyễn
Trung Thành, Hồ Sỹ Ngọc (Khối PTCT
ĐHSP Vinh) ; Trần Nam Dũng, Đặng Đức
Hạnh, Nguyễn Thịnh (PTTH Phan Bội Châu
- Vinh) ; **Thanh Hóa :** Hoàng Trung

Tuyển (12A PTTH Hà Trung), Lê Duy Diễm (11T PTTH Lam Sơn); Hà Nội: Nguyễn Đức Mạnh (11A PTTH Cổ Loa - Đông Anh), Văn Sỹ Thủy (11A PTTH Yên Hòa); Bắc Giang: Nguyễn Tiến Mạnh (PTTHNK Ngô Sỹ Liên); ĐHQG Hà Nội: Phạm Hải Trung (khối PTCT - Tin ĐHKHTN).

3) Nhiều bạn cho lời giải sai do đã vội vàng làm phép tương tự khi xét dãy $\{a_n\}$ trong trường hợp $a \leq -2$.

NGUYỄN KHẮC MINH

Bài T7/236. a) Giải phương trình $\cos 3x = \frac{1}{2}$

b) Áp dụng kết quả của câu trên để tính các tổng sau đây:

$$S_1 = \cos \frac{\pi}{9} + \cos \frac{7\pi}{9} + \cos \frac{13\pi}{9}$$

$$S_2 = \cos \frac{\pi}{9} \cos \frac{7\pi}{9} + \cos \frac{7\pi}{9} \cos \frac{13\pi}{9} + \cos \frac{13\pi}{9} \cos \frac{\pi}{9}$$

$$S_3 = \cos \frac{\pi}{9} \cos \frac{7\pi}{9} \cos \frac{13\pi}{9}$$

Lời giải (của đa số các bạn)

a) Viết phương trình dưới dạng $\cos 3x = \cos \frac{\pi}{3}$ (*)

Từ đó, ta được: $x = \pm \frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}; k \in \mathbb{Z}$.

b) Sử dụng hệ thức

$$\cos 3t = \cos^3 t - 3\cos t$$

viết phương trình (*) dưới dạng:

$$4\cos^3 x - 3\cos x = \cos \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \cos^3 x - \frac{3}{4}\cos x - \frac{1}{8} = 0$$

Từ đó, theo a) ta được phương trình bậc 3 theo $\cos x$ có các nghiệm:

$$\cos \frac{\pi}{9}; \cos \left(\frac{\pi}{9} + \frac{2\pi}{3} \right) = \cos \frac{7\pi}{9};$$

$$\cos \left(\frac{\pi}{9} + \frac{4\pi}{3} \right) = \cos \frac{13\pi}{9}.$$

Vậy (*) $\Leftrightarrow$

$$\left(\cos x - \cos \frac{\pi}{9} \right) \left(\cos x - \cos \frac{7\pi}{9} \right) \left(\cos x - \cos \frac{13\pi}{9} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos^3 x - S_1 \cos^2 x + S_2 \cos x - S_3 = 0$$

$$\text{Hay: } S_1 = 0; S_2 = -\frac{3}{4}; S_3 = \frac{1}{8}.$$

Nhận xét: Tòa soạn nhận được rất nhiều lời giải của các bạn, đa số các lời giải gửi đến đều đúng. Một số bạn còn cho cách tổng quát hóa bài toán bằng cách thay $\frac{1}{2}$ bởi $\cos \alpha$ (α - tùy ý).

Sau đây là danh sách các bạn đã gửi lời giải:

Lâm Đồng: Trương Anh Tuấn, Trần Hải Yến. Trà Vinh: Phạm Thế Nhật Trường, Trần Huỳnh Thế Khánh. Khánh Hòa: Nguyễn Hoàng Khâm, Trần Tuấn Anh. Lào Cai: Nguyễn Đức Thọ, Nguyễn Hồng Quang. Phú Yên: Nguyễn Long Khánh, Nguyễn Quốc Dân. Hà Tây: Nguyễn Hà Duy, Nguyễn Trung Phương. Quảng Bình: Trần Thanh Bình, Nguyễn Thành Trung, Trần Mai Sơn Hà, Lê Mạnh Hà, Dương Lê Nam, Trần Đức Thuận, Nguyễn Trung Kiên. Quảng Trị: Nguyễn Việt Tiến, Phạm Đức

Phong. Vĩnh Phúc: Tạ Nguyễn Hồng Phương, Phan Huy Đông, Trần Thị Bích Phương, Bùi Minh Đức, Lê Hồng Phương, Trần Nhật Tân, Trần Minh Phương. Bắc Giang: Phạm Văn Thịnh, Phạm Anh Thu, Đặng Hoàng Việt Hà, Phạm Việt Ngọc, Nguyễn Tiến Mạnh, Nguyễn Ngọc Sơn, Nguyễn Minh Hoàng. TP HCM: Nguyễn Lê Lục, Nguyễn Tuấn Anh, Lê Quang Năm, Bì Minh Huy. Thái Nguyên: Lê Quang Huy, Đặng Văn Thành, Đinh Đức Hoàng, Vũ Tuấn Anh. Yên Bái: Trần Quang Sán, Đinh Quang Mạnh, Trần Mạnh Tuấn, Vũ Ngũ Bình. Hà Nội: Đặng Minh Thắng, Lê Cường, Bùi Mạnh Hùng, Lê Tuấn Anh, Trương Thiên Đại, Nguyễn Quang Lộc, Văn Sỹ Thủy, Nguyễn Mạnh Hà, Đào Phương Lân, Dương Việt Hùng, Nguyễn Đức Mạnh, Phạm Công Đình, Phạm Thanh Long. Hải Dương: Nguyễn Hồng Phong, Hoàng Xuân Quý, Lê Văn Hải, Đinh Phú Minh, Vũ Văn Tâm, Ngô Đức Tuấn. Đà Nẵng: Hồ Văn Ngọc, Nguyễn Quốc Việt, Lê Thị Duy Phong, Vũ Như Phong, Nguyễn Tấn Phong, Huyền Trần Quốc, Nguyễn Ngọc Hải, Ngô Phong, Hoàng Kim Tuyển, Nguyễn Anh Tuấn, Trình Huy Long. Nghệ An: Vũ Xuân Quỳnh, Đậu Thúy Mai, Hoàng Danh Tuấn, Trần Nam Dũng, Đặng Đức Hạnh, Lê Hồng Hà, Nguyễn Thịnh, Nguyễn Văn Tăng, Hồ Sỹ Ngọc, Ngô Anh Tuấn, Phạm Công Phiệt, Hoàng Minh Phúc, Nguyễn Trung Hòa. Thái Bình: Phạm Văn Minh; Nguyễn Nam Hà, Hà Đức Trinh, Phạm Thành Luật, Nguyễn Thị Thoa, Phan Khánh Toán, Nguyễn Ngọc Phú, Nguyễn Ngọc Minh, Vương Anh Tuấn. Thanh Hóa: Hán Văn Thắng, Lê Quang Tuấn, Nguyễn Văn Minh, Phạm Văn Du, Nguyễn Mạnh Hùng, Nguyễn Đức Khiêm, Trình Quang Hòa, Lê Thanh Tuyết, Hoàng Trung Tuyển, Nguyễn Văn Quang, Lê Duy Diễm, Phạm Hùng Vương, Trần Văn Tùng, Lê Ngọc Thái, Mai Văn Hùng, Ngô Quang Tuấn, Lê Đức Thịnh, Lê Văn Phương, Lê Tiến Vinh, Lê Cát Vượng. Bến Tre: Huỳnh Trác Siêu. Đắk Lắk: Lê Trọng Vĩnh, Lê Thế Tân. Phú Thọ: Mai Minh Tuấn, Trần Anh Tuấn, Nguyễn Kim Sô, Nguyễn Minh Phương, Triệu Văn Sơn. Quảng Ngãi: Phó Quốc Hò, Huỳnh Trung Nghĩa, Võ Quế Sơn, Phùng Minh Tuấn, Nguyễn Xuân Hà, Phạm Bảo Chiến, Trần Quang Nguyên, Lê Hoàng Đức Khánh. Đồng Tháp: Nguyễn Đăng Triển, Hồ Lộc Thuận, Võ Thị Hồng Thảo, Lê Công Danh. Nam Định: Phạm Tuấn Minh, Vũ Việt Tài, Nguyễn Trọng Kiên, Lê Mai, Hoàng Tiến. Quảng Ninh: Nguyễn Mạnh Hùng. Hòa Bình: Trần Minh Đức. Đồng Nai: Lê Khắc Huỳnh. Bình Định: Lê Hồng Dung. Đắk Lắk: Mai Thị tuyết Anh. Hưng Yên: Đào Hoàng Tùng. Long An: Thi Hồng Hạnh. Vĩnh Long: Cao Minh Quang. Phú Yên: Lê Xuân Quỳên. Tuyên Quang: Cao Minh Đức. Hải Phòng: Đồng Thạch Tùng, Đoàn Mạnh Hà. Thừa Thiên - Huế: Đặng Nguyễn Nhật Nam, Phạm Tiến Đạt, Đinh Trung Hoàng

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T8/236 : Cho $a > 0$ và f là hàm số liên tục trên $[a, +\infty)$. Giả sử rằng :

$$\int_a^t f^2(x) dx \leq \int_a^t x^2 dx \text{ với mọi } t \geq a. \quad (1)$$

Chúng ta chứng tỏ rằng : $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b x dx$ với mọi $b \geq a$.

Lời giải : Với t bất kỳ $t > a$ ta có :

$$\int_a^t (mx - f(x))^2 dx = m^2 \int_a^t x^2 dx - 2m \int_a^t x f(x) dx + \int_a^t f^2(x) dx \geq 0 \quad \forall m \in \mathbb{R}$$

Do $\int_a^t x^2 dx > 0 \quad \forall t > a$ nên, khi coi về trái của bất đẳng thức trên là tam thức bậc hai đối với m , ta được :

$$\left(\int_a^t x f(x) dx \right)^2 \leq \int_a^t x^2 dx \cdot \int_a^t f^2(x) dx \quad \forall t > a.$$

Kết hợp với (1) suy ra :

$$\left(\int_a^t x f(x) dx \right)^2 \leq \left(\int_a^t x^2 dx \right)^2 \quad \forall t > a.$$

Dẫn tới :

$$\int_a^t x f(x) dx \leq \int_a^t x^2 dx \quad \forall t > a.$$

hay : $\int_a^t x[x - f(x)] dx \geq 0 \quad \forall t > a$. Với mỗi

$t > a$, đặt $F(t) = \int_a^t x[x - f(x)] dx$. Ta có $F(t) \geq 0$ $\forall t > a$ và $F'(t) = t[t - f(t)]$. Do đó, với

$b > a$ ta có : $\int_a^b (x - f(x)) dx =$

$$= \int_a^b \frac{1}{x} [x(x - f(x))] dx = \frac{1}{x} F(x) \Big|_a^b + \int_a^b \frac{1}{x^2} F(x) dx = \frac{F(b)}{b} + \int_a^b \frac{F(x)}{x^2} dx \geq 0.$$

Với $b = a$ thì $\int_a^b (x - f(x)) dx = 0$. Vậy :

$$\int_a^b (x - f(x)) dx \geq 0 \quad \forall b \geq a,$$

hay $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b x dx \quad \forall b \geq a$.

Nhận xét : 1- Có rất ít bạn gửi lời giải cho bài toán và hầu hết các bạn cho lời giải sai vì đã mắc phải những sai lầm. Chẳng hạn một số bạn đã cho rằng :

$$\text{"từ"} \quad \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

suy ra $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a, b]$ (? !), hay có

bạn lại cho rằng : $\int_a^b 1 dx = 1$

$\forall b \geq a$ (? !) và "nếu $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$

thì $\left(\int_a^b f(x) dx \right)^{1/2} = \int_a^b \sqrt{f(x)} dx$ (? !), v. v. ...

2. Có duy nhất bạn Nguyễn Đức Mạnh (11A PTTH Cổ Loa - Đông Anh - Hà Nội) giải đúng bài toán, tuy nhiên cách giải của bạn hơi dài.

NGUYỄN KHẮC MINH

Bài T9/236. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . Gọi (O_1, R_1) , (O_2, R_2) , (O_3, R_3) lần lượt là tâm và bán kính các đường tròn tiếp xúc ngoài với (O) , đồng thời tiếp xúc với các cặp tia AB, AC ; BC, BA ; CA, CB và r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác. Chứng minh rằng :

$$R_1 + R_2 + R_3 \geq 12r.$$

Lời giải 1. (Dựa theo Nguyễn Thịnh và Trần Nam Dũng, 11CT, PTTH Phan Bội Châu, Nghệ An).

Giả sử đường tròn (O_1, R_1) tiếp xúc ngoài với đường tròn (O, R) ở D và tiếp xúc với hai tia AB, AC ở M và N . Kéo dài AD , cắt (O_1) ở E , thế thì ta có : $OO_1 = OD + DO_1 = R + R_1$, $OA \parallel O_1E$ và :

$AM^2 = AN^2 = AD \cdot AE$. Do đó ta được :

$$\frac{AD^2}{AM^2} = \frac{AD}{AE} = \frac{OD}{OO_1}, \text{ hay là : } \frac{AD^2}{AM^2} = \frac{R}{R + R_1}$$

Chứng minh tương tự, ta được :

$$\frac{BD^2}{BM^2} = \frac{CD^2}{CN^2} = \frac{R}{R + R_1} \left(= \frac{AD^2}{AM^2} \right)$$

Từ đó suy ra :

$$\frac{AD}{AM} = \frac{BD}{BM} = \frac{CD}{CN}; \quad (1)$$

Mặt khác, tứ giác lồi $ABDC$ nội tiếp (O, R) nên ta có (định lý Ptolémé) :

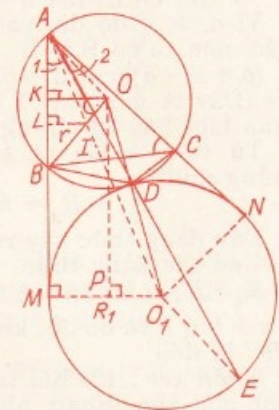
$$AB \cdot CD + CA \cdot BD = BC \cdot AD \quad (2)$$

Từ (2) và (1) ta thu được hệ thức :

$$AB \cdot CN + CA \cdot BM = BC \cdot AM \quad (3)$$

Ký hiệu độ dài các cạnh của tam giác ABC là : $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, rồi thay $BM = AM - c$ và $CN = AN - b = AM - b$ vào (3), ta được :

$$AM = AN = \frac{2bc}{b + c - a} \quad (4)$$



Gọi L , là tiếp điểm của AB với đường tròn (I, r) nội tiếp tam giác ABC , ta được

$$\frac{O_1M}{IL} = \frac{AM}{AL}, \text{ hay là: } \frac{R_1}{r} = \frac{AM}{AL}$$

Thay $AL = p - a = \frac{1}{2}(b + c - a)$ và AM bởi (4), ta được:

$$\frac{R_1}{r} = \frac{4bc}{(b + c - a)^2}$$

Chứng minh tương tự, ta được:

$$\frac{R_2}{r} = \frac{4ca}{(c + a - b)^2} \text{ và } \frac{R_3}{r} = \frac{4ab}{(a + b - c)^2} \quad (5)$$

Từ các hệ thức (5) này, và theo B.D.T.Côsi, ta được:

$$\begin{aligned} \frac{R_1 + R_2 + R_3}{4r} &= \frac{bc}{(b + c - a)^2} + \frac{ca}{(c + a - b)^2} + \frac{ab}{(a + b - c)^2} \\ &\geq \sqrt[3]{\frac{(b + c - a)^2(c + a - b)^2(a + b - c)^2}{a^2b^2c^2}} \quad (6) \end{aligned}$$

Vì a, b, c độ dài các cạnh của một tam giác, nên ta có B.D.T

(7) (Đây là một B.D.T quen thuộc, bạn nào chưa biết hãy tự chứng minh)

Từ (6) và (7) ta thu được B.D.T cần chứng minh:

$$R_1 + R_2 + R_3 \geq 12r$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi đồng thời có các đẳng thức.

$R_1 = R_2 = R_3$ và $b + c - a = c + a - b = a + b - c$ và do đó, khi và chỉ khi tam giác ABC là đều.

Nhận xét: 1^o) Bài toán này có rất nhiều cách giải khác nhau, nhưng tựu trung lại, là cần biểu thị R_i theo a, b, c và r hoặc theo r và các góc A, B, C của tam giác. Sau đây là hai lời giải khác của bài toán.

2^o) Lời giải 2 (của Đoàn Mạnh Hà, 11CT, PTTH Trần Phú, Hải Phòng)

Hạ $OK \perp AM$ và $OP \perp O_1M$, rồi đặt

$$AM = t, \text{ ta được: } OP = KM = t - \frac{c}{2},$$

$$O_1P = O_1M - OK = R_1 - R \cos C$$

$$\text{và } tg \frac{A}{2} = \frac{O_1M}{AM} = \frac{IL}{AL}, \text{ hay là:}$$

$$tg \frac{A}{2} = \frac{R_1}{t} = \frac{r}{p - a} \quad (\text{trong đó } 2p = a + b + c); (i)$$

Lại từ tam giác OO_1P vuông ở P , ta được:

$$(R + R_1)^2 = \left(t - \frac{c}{2}\right)^2 + (R_1 - R \cos C)^2,$$

$$\text{hay là: } 2RR_1(1 + \cos C) = t(t - c) \quad (ii)$$

Từ (ii) và (i), ta được:

$$2R \frac{r}{p - a} (1 + \cos C) = (t - c), \text{ hay là:}$$

$$\frac{2Rr}{p - a} \cdot \frac{2p \cdot 2(p - c)}{2ab} = t - c; \quad (iii)$$

$$\text{Mặt khác, lại có } S = pr = \frac{abc}{4R}, \text{ nên từ (iii)}$$

$$\text{suy ra: } t = c + \left(\frac{p - c}{p - a}\right)c = \frac{bc}{p - a} \quad (iv)$$

Do đó, từ (i) và (iv) ta được:

$$\frac{R_1}{r} = \frac{t}{p - a} = \frac{bc}{(p - a)^2}, \text{ hay là:}$$

$$\frac{R_1}{4r} = \frac{bc}{(b + c - a)^2} \text{ và hai hệ thức nữa}$$

tương tự. (v)

Ta được kết quả như lời giải 1.

3^o) Lời giải 3. Đại đa số các bạn cho lời giải lượng giác của bài toán, nhưng cách giải này thường dài và tính toán công kênh hơn hai lời giải hình học như đã trình bày ở trên. Bỏ qua các phép toán trung gian, sau đây chỉ nêu kết quả cuối cùng, biểu thị được R_i theo p và các góc của tam giác:

$$R_1 = p \operatorname{tg} \frac{A}{2} \left(1 + \operatorname{tg} \frac{A}{2}\right) \text{ và hai hệ thức}$$

tương tự.

Phần cuối, có sử dụng B.D.T.Côsi và các B.D.T sau đây:

$$tg \frac{A}{2} + tg \frac{B}{2} + tg \frac{C}{2} \geq \sqrt{3}, \quad p \geq 3\sqrt{3}r \text{ thì}$$

được B.D.T cần tìm

4^o) Cần lưu ý thêm rằng hầu hết lời giải đều bỏ qua việc chứng minh chặt chẽ khi nào và chỉ khi nào xảy ra đẳng thức, hoặc không kiểm tra đầy đủ tất cả các điều kiện để xảy ra đẳng thức, kể cả các bạn Nguyễn Thịnh, Trần Nam Dũng và Đoàn Mạnh Hà đã cho hai lời giải hình học như đã trình bày ở trên. Vì khuôn khổ có hạn, bài viết này không chứng minh đầy đủ phần cuối của lời giải 1 và 2; đề nghị các bạn hãy tự chứng minh: $R_1 = R_2 = R_3 \Leftrightarrow a = b = c$.

NGUYỄN ĐĂNG PHÁT

Bài T10/ 236. Giả sử O là một điểm nằm trong tứ diện $ABCD$ sao cho: $BOC = DOA$, $COA = DOB$ và $AOB = DOC$. Chứng minh rằng, với mọi điểm M trong không gian ta có:

$$MA + MB + MC + MD \geq OA + OB + OC + OD.$$

Lời giải: (Dựa theo Trần Huỳnh Thế Khanh, 12A₁ PTTH Phạm Thái Bường Trà Vinh, Đặng Đức Hạnh, 11 Toán, PTTH Phan Bội Châu, Nghệ An và một số bạn khác) - Trên các tia OA, OB, OC và OD ta lấy lần lượt các vectơ đơn vị: $\vec{OA'}, \vec{OB'}, \vec{OC'}$ và $\vec{OD'}$. Khi đó với giả thiết đã cho ta được: $B'C' = D'A', C'A' = D'B', A'B' = D'C'$ và do đó, $A'B'C'D'$ là một tứ diện gần đều nhận O làm tâm mặt cầu ngoại tiếp, đồng thời O cũng là trọng tâm của tứ diện gần đều $A'B'C'D'$ này.

$$\vec{OA'} + \vec{OB'} + \vec{OC'} + \vec{OD'} = \vec{O}$$

Suy ra:

$$\vec{p} = \frac{\vec{OA}}{OA} + \frac{\vec{OB}}{OB} + \frac{\vec{OC}}{OC} + \frac{\vec{OD}}{OD} = \vec{O}$$

- Với mọi điểm M trong không gian, ta có:

$$\begin{aligned} MA &= \frac{\vec{MA} \cdot \vec{OA}}{OA} = \frac{\vec{MA} \cdot \vec{OA}}{OA} \\ &= \frac{(\vec{MO} + \vec{OA}) \cdot \vec{OA}}{OA} = OA + \vec{MO} \left(\frac{\vec{OA}}{OA} \right) \end{aligned}$$

Dấu đẳng thức đạt được khi và chỉ khi $MA \parallel OA$, cũng tức là:

$$MA = OA + \vec{MO} \left(\frac{\vec{OA}}{OA} \right) \Leftrightarrow M \in \text{tia } [AO)$$

Chứng minh tương tự, ta được:

$$\begin{aligned} MA + MB + MC + MD &\geq \\ &\geq OA + OB + OC + OD + \vec{MO} \cdot \vec{P} = \\ &= OA + OB + OC + OD. \end{aligned}$$

Dấu đẳng thức đạt được khi và chỉ khi, đồng thời $M \in$ cả bốn tia $[AO)$, $[BO)$, $[CO)$ và $[DO)$, nghĩa là M trùng O .

Nhận xét: 1^o) Hầu hết các bạn không chỉ rõ khi nào và chỉ khi nào thì xảy ra $MA = \frac{MA \cdot OA}{OA} = OA + \vec{MO} \frac{\vec{OA}}{OA}$ (như trên đã chỉ ra).

Và do đó, không có chứng minh chặt chẽ khi kết luận $MA + MB + MC + MD$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $OA + OB + OC + OD$ khi và chỉ khi $M = O$.

2^o) Các bạn sau đây có lời giải tốt hơn cả: **Đặng Đức Hạnh** (Nghệ An), **Nguyễn Trung Thành**, 11A, CT, DHSP Vinh, **Hoàng Trung Tuấn**, 12A PTTH Hà Trung, **Thanh Hóa**, **Nguyễn Kim Sơn**, 11A, PTTH Thanh Ba **Phú Thọ**.

3^o) Tuy nhiên, không có bạn nào chỉ rõ (một cách chính xác) $MA \cdot OA = \vec{MA} \cdot \vec{OA} \Leftrightarrow \vec{MA} \parallel \vec{OA} \Leftrightarrow M \in \text{tia } [AO)$ mà thường chỉ nói chung chung: M thuộc OA hay M, O, A thẳng hàng, đánh rằng kết quả cuối cùng vẫn đúng (do M thuộc OA, OB, OC và OD nên $M = O$).

4^o) Điểm O thỏa mãn điều kiện của bài toán (nhìn hai cạnh đối diện của tứ diện $ABCD$ dưới cùng một góc) cũng là điểm nhìn các mặt của tứ diện $ABCD$ dưới những góc tam diện bằng nhau và cùng hướng:

$$O(BCD) = O(ADC) = O(DAB) = O(CBA).$$

5^o) Bài toán trên đây chỉ ra điều kiện đủ để một điểm O nằm trong một tứ diện $ABCD$ là "điểm cực tiểu" (điểm mà tổng khoảng cách từ đó đến các đỉnh của tứ diện $ABCD$ là nhỏ nhất). Điểm này còn được gọi là "điểm To-ri-xe-li" hay "điểm Phécma" (của hệ 4 điểm không đồng phẳng).

6^o) Có thể chứng minh rằng: Điểm Phécma (Fermat) P của một hệ bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng là tồn tại và duy nhất. Điểm này không thuộc một cạnh nào, cũng như một mặt nào của tứ diện, nhưng có thể trùng với một trong các đỉnh của tứ diện $ABCD$. Nếu $P \neq A, \neq B, \neq C \neq D$ thì P là một điểm nằm trong tứ diện $ABCD$ và đặc trưng bởi: tổng các vectơ đơn vị hướng từ P đến các đỉnh của tứ diện bằng vectơ không $\Leftrightarrow P$ nhìn các mặt của tứ diện $ABCD$ dưới những góc tam diện bằng nhau và cùng hướng $\Leftrightarrow P$ nhìn các cặp cạnh đối diện của tứ diện $ABCD$ dưới những góc (tương ứng) bằng nhau.

Đó cũng chính là những tính chất đặc trưng (có ý nghĩa định tính) (điều kiện cần và đủ) của "điểm Phécma" P của một hệ 4 điểm không đồng phẳng.

7^o) Bạn **Nguyễn Văn Tăng**, 11ACT, DHSP Vinh đề xuất bài toán tổng quát hơn: Tìm "điểm Phécma" P của hệ bốn điểm $\{A, B, C, D\}$ không đồng phẳng sao cho:

$$\alpha PA + \beta OB + \gamma PC + \delta PD \leq$$

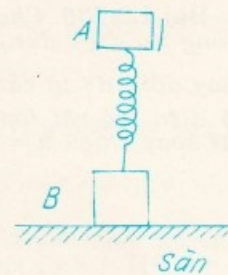
$\leq \alpha MA + \beta MB + \gamma MC + \delta MD$; ($\forall M$) trong đó α, β, γ và δ là 4 số dương cho trước.

Mong bạn Tăng và các bạn hãy quan tâm tìm lời giải cho bài toán khái quát này, cũng như hoàn chỉnh lời giải của bài toán trên (chứng minh điều kiện cần).

NGUYỄN ĐĂNG PHÁT

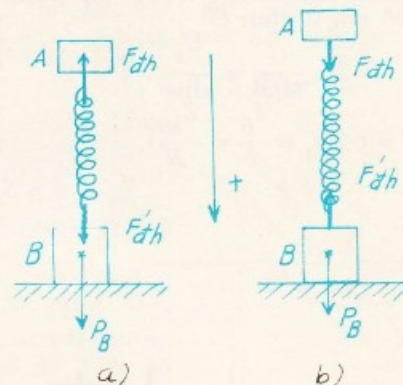
Bài L1/236. Một vật A có khối lượng $m_1 = 1,00 \text{ kg}$ và một vật B có khối lượng $m_2 = 4,10 \text{ kg}$ được nối với nhau bằng lò xo có khối lượng không đáng kể. Vật A thực

hiện dao động điều hòa theo phương thẳng đứng với biên độ $a = 1,6 \text{ m}$ và với tần số góc $\omega = 25 \text{ rad/s}$. Hãy tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của áp lực của hệ này lên mặt sàn (hình vẽ). Lấy $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.



Hướng dẫn giải. Chọn trục tọa độ hướng thẳng đứng xuống dưới; chọn gốc tọa độ tại vị trí cân bằng của vật A .

Khi vật A dao động điều hòa ta có $F_{hl} = P_A + F_{dh} = -hx = -m_2 \omega^2 A \sin(\omega t + \varphi)$



trong đó F_{dh} là lực của lò xo tác dụng lên vật A , lực này thay đổi cả về độ lớn lẫn chiều

$$F_{dh} = -m_1 g - m_1 \omega^2 A \sin(\omega t + \varphi) \quad (1)$$

Áp lực N của hệ lên sàn được thực hiện bởi vật B , ta có $N = P_B + F'_{dh}$ (2)

trong đó F'_{dh} là lực của lò xo tác dụng lên vật B , cũng tức là tác dụng lên sàn theo (1) ta có $F'_{dh} = -F_{dh} = m_1 g + m_1 \omega^2 A \sin(\omega t + \varphi)$ (3)

Thay vào (2) ta được

$$N = (m_1 + m_2)g + m_1 \omega^2 a \sin(\omega t + \varphi) \quad (4)$$

Từ đó, ta thấy

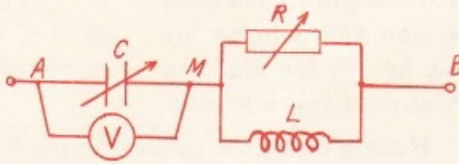
$$N_{\max} = (m_1 + m_2)g + m_1 \omega^2 a = 60 \text{ N}$$

$$\text{và } N_{\min} = (m_1 + m_2)g - m_1 \omega^2 a = 40 \text{ N}.$$

Nhận xét. Các em có lời giải gọn và đúng: **Lê Thanh Minh**, 12CL, Quốc học Huế **Thừa Thiên - Huế**; **Hoàng Trường Sơn** 11A2 PTTH Lê Quý Đôn, **Đà Nẵng**; **Nguyễn Văn Đoàn** 11A3, THPT Nguyễn Duy Hiệu, Điện Bàn, **Quảng Nam**; **Nguyễn Việt Tiến** 11A1, PTTH Vĩnh Linh, **Quảng Trị**; **Nguyễn Quang Tường** 12CL, chuyên Phan Bội Châu, Vinh, **Nghệ An**; **Nguyễn Văn Thuận** 12B, PTTH Năng khiếu, Ngô Sĩ Liên, **Bắc Giang**; **Nguyễn Thị Kim Phương** 11 Li, PTTH Nguyễn Du, Buon Mê Thuột **Đắk Lắk**; **Hoàng Văn Ấp**, 12A PTTH Nguyễn Du, Nghi Xuân, **Hà Tĩnh**; **Nguyễn Phương Nam**, 11A3, PTTH Huỳnh Thúc Kháng, Vinh, **Nghệ An**; **Nguyễn Trung Thành**, 11A, KPTCT, Đại học Vinh; **Cao Tấn Thiết**, 11A3, THPT số 1, Đức Phổ, **Quảng Ngãi**; **Trần Ngọc Thành**, 11CL, chuyên Lê Khiết, **Quảng Ngãi**; **Trần Huỳnh Thế Khanh**, 12a, PTTH Phạm Thái Bường, **Trà Vinh**; **Lê Duy Diễm**, 11T, PTTH Lam Sơn, **Thanh Hóa**; **Hoàng Nữ Hiền Ninh**, 11C PTNK **Quảng Bình**; **Trần Ngọc Quang**, 11A, PTTH Long Châu Sa, **Phú Thọ**; **Nguyễn Đình Sang**, 11H1, chuyên Hùng Vương, **Phú Thọ**; **Đoàn Hữu Thu**, 11 Li, chuyên Lương Văn Chánh, Tuy Hòa, **Phú Yên**.

MAI ANH

Bài L2/236. Cho mạch điện như hình vẽ, trong đó điện dung C và điện trở R có thể thay đổi; độ tự cảm $L = \frac{1}{\pi} H$; vôn kế nhiệt có điện trở rất lớn. Đặt vào AB hiệu điện thế xoay chiều $u = 220\sqrt{2} \sin 100\pi t$ (V)

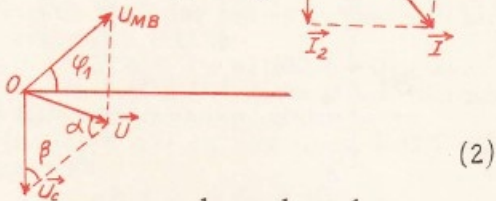


- Với $R = 100\sqrt{3} \Omega$, chọn C bằng bao nhiêu để vôn kế có số chỉ lớn nhất. Tìm số chỉ này.
- Với giá trị nào của C thì số chỉ của vôn kế không đổi khi R biến đổi.

Hướng dẫn giải. 1) Vẽ hai giản đồ véc tơ cho đoạn mạch MB và AB . Áp dụng định lý hàm số sin ở giản đồ

$$2 : \frac{U}{\sin \beta} = \frac{U_c}{\sin \alpha} = \frac{I_R}{\sin \varphi_1} = \frac{I}{\sin \varphi_2}$$

với $\sin \beta = \cos \varphi_1 = \frac{I}{I_R} = \frac{Z_{MB}}{R}$ (1)



Biết (vì $R \parallel L$) $\frac{1}{Z_{MB}^2} = \frac{1}{R^2} + \frac{1}{Z_L^2}$,
 $Z_L = \omega L = 100 \Omega$. Từ đó suy ra

$$\sin \beta = \cos \varphi_1 = \frac{1}{2} \rightarrow \varphi_1 = \frac{\pi}{3}$$

và, từ (1) $U_c = 2U \sin \alpha$

Suy ra $U_{cmax} = 2U = 440V$, ứng với

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \text{ (2), khi đó}$$

$$U_c^2 = U^2 + U_{MB}^2 \rightarrow Z_c^2 = Z^2 + Z_{MB}^2 \text{ (3),}$$

trong đó

$$Z^2 = Z_c^2 + Z_{MB}^2 - 2Z_c Z_{MB} \sin \varphi_1 \text{ (4). Từ (2),}$$

(3) và (4) rút ra

$$Z_c = Z_{MB} \frac{2}{\sqrt{3}} = 100 \Omega \text{ và } C = \frac{10^{-4}}{\pi} F \approx 31,8 \mu F$$

a) Áp dụng định lý cosin ở giản đồ (2)

$$U^2 = U_c^2 + U_{MB}^2 \left(1 - 2 \frac{Z_c}{Z_L}\right) \text{ (5). Vì } U \text{ cố}$$

định, nên muốn cho U_c không đổi khi R biến tải thì trong (5) không được chứa U_{MB} ,

muốn vậy $1 - 2 \frac{Z_c}{Z_L} = 0$, rút ra $Z_c = \frac{Z_L}{2}$ hay

$$C = \frac{2}{\omega^2 L} = \frac{2 \cdot 10^{-4}}{\pi} F \approx 63,7 \mu F.$$

Nhận xét. Các em có lời giải đúng và gọn: Lê Hoài An, 11L Trường Lương Văn Chánh, Phú Yên; Trần Hoàng Quân, 11A, Trường Lê Quý Đôn, Đà Nẵng; Phạm Văn Thành, 11T, PTTH Lam Sơn, Thanh Hóa; Nguyễn Hiệp Đồng, 11A, PTTH Quỳnh Thọ, Quỳnh Phú, Thái Bình; Nguyễn Thị Kim Phương 11L, Trường Nguyễn Du, Buôn Mê Thuột, Đắk Lắk; Nguyễn Trung Phương 12A, PTTH Hoài Đức A, Hà Tây; Nguyễn Mậu Phú Liêm 12T, chuyên Lê Khiết, Quảng Ngãi; Nguyễn Văn Thuận, 12B, PTTH Năng khiếu Ngô Sĩ Liên, Bắc Giang; Nguyễn Xuân Hà, 12H, THPT số 1, Đức Phổ, Quảng Ngãi; Trần Thái Bình, 11A PTTH Quảng Xương 2, Thanh Hóa; Nguyễn Quang Tường, 12C2 chuyên Phan Bội Châu, Vinh, Nghệ An; Lê Duy Diễm 11T, PTTH Lam Sơn, Thanh Hóa; Phạm Anh Tuấn, 12A6, PTTH Huỳnh Thúc Kháng, Vinh, Nghệ An; Nguyễn Thị Thủy, 12E, PTTH chuyên ban Sơn Tây, Hà Tây; Trần Mai Sơn Hà, 11CL Năng khiếu, Quảng Bình; Phạm Ngọc Trường, số 6 Ngõ 7 đường Thống Nhất, Thị xã Hải Dương; Hoàng Trường Sơn 11A, trường Lê Quý Đôn, Đà Nẵng; Lê Anh Long, 12A1 PTTH Dương Minh Châu, Tây Ninh.

MAI ANH

GIẢI THƯỞNG CORA RATTO DÀNH CHO CÁC BẠN NỮ SINH GIỎI TOÁN

Bà Cora Ratto (1912 - 1981) là Phó giáo sư khoa Toán Trường DHTH Buenos Aires Acentina. Bà là người tích cực tham gia các hoạt động xã hội: sáng lập "Hội Chiến thắng" của phụ nữ Châu Mỹ La tinh chống chủ nghĩa phát xít, "Quỹ Albert Einstein" giúp đỡ tài chính cho các sinh viên có tài năng về Toán và khoa học tự nhiên, tạp chí "Columbia 10", qua tạp chí này làm cho công luận Acentina hiểu rõ hơn sự thật cuộc chiến tranh ở Việt Nam trước đây.

Nguyễn vọng từ lâu của bà là: trao giải thưởng hàng năm cho các nữ sinh giỏi toán của Việt Nam. Đến nay nguyện vọng ấy của bà đã được thực hiện.

Chiều 17 - 5 - 1997, Bộ Giáo dục và Đào tạo đã tổ chức lễ trao giải thưởng CORA RATTO cho 4 học sinh nữ đạt giải cao trong kì thi học sinh giỏi toán Quốc gia năm nay. Mỗi giải gồm một giấy chứng nhận, một huy chương và tiền mặt từ 100 đến 150 USD.

Bốn bạn nữ được nhận giải thưởng vinh dự này là:

1. Trịnh Thị Kim Chi, học sinh lớp 11 trường Năng khiếu Hà Tĩnh, giải Nhì Quốc gia (33,5 điểm).

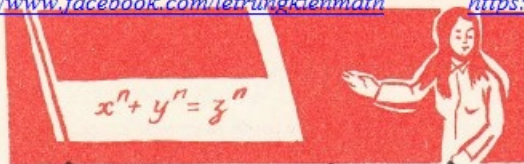
2. Hà Minh Lam, học sinh lớp 12, khối phổ thông chuyên toán trường DHSPHN thuộc Đại học Quốc gia Hà Nội, giải Ba Quốc gia (26 điểm).

3. Đào Thị Thu Hà, học sinh lớp 11, khối phổ thông chuyên toán - tin trường ĐHKHTNHN thuộc Đại học Quốc gia Hà Nội, giải Ba Quốc gia (24,5 điểm).

4. Võ Thị Như Quỳnh, học sinh lớp 12, trường chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An, giải Ba Quốc gia (24,0 điểm).

Giải thưởng CORA RATTO sẽ trao thưởng hàng năm và chỉ dành cho các bạn nữ. Toán học và Tuổi trẻ xin chúc mừng bốn bạn đầu tiên được nhận phần thưởng và mong nhiều bạn nữ sinh có ước mơ, phấn đấu học giỏi toán để sẽ nhận được giải thưởng Cora Ratto.

THVTT



ĐỀ RA KÌ NÀY

CÁC LỚP THCS

Bài T1/240 : Cho ba số a, b, c thuộc đoạn $[n-1; n+1]$ sao cho $a+b+c=3n$. Chứng minh rằng : $a^2+b^2+c^2 \leq 3n^2+2$. Khi nào thì xảy ra dấu bằng ?

PHẠM VĂN HÙNG
(Nam Định)

Bài T2/240 : Giải phương trình nghiệm nguyên : $x^2y^2 - x^2 - 8y^2 = 2xy$

NGUYỄN ĐỨC TẤN
(TP. Hồ Chí Minh)

Bài T3/240 : Chứng minh bất đẳng thức : $(1+2^2)(1+2^2^2)(1+2^2^3) \dots (1+2^2^n) < \frac{1}{3} \cdot 2^{2^{n+1}}$

Với mọi n là số nguyên dương.

TRẦN VĂN HẠNH
(Quảng Ngãi)

Bài T4/240 : Cho tam giác ABC vuông góc tại A , có $\widehat{B} = 20^\circ$. Kẻ phân giác trong BI và vẽ góc $ACH = 30^\circ$ về phía trong tam giác (I thuộc AC , H thuộc AB). Tính $\widehat{CHI}$.

ĐOÀN VĂN TRÚC
(Quảng Ngãi)

Bài T5/240 : Cho tam giác ABC có BC là cạnh lớn nhất. Một đường tròn (O) tiếp xúc với AB, AC tại các điểm tương ứng M, N và tâm O nằm giữa B, C . Hạ đường cao AH . Chứng minh rằng : trong các tam giác có hai đỉnh là M, N và đỉnh thứ 3 thuộc BC thì tam giác HMN có chu vi bé nhất.

VŨ NHẬT KIỂU
(Thái Bình)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/240 : Cho số nguyên n . Chứng minh rằng :

$$\frac{1}{C_{1997}^1} + \frac{1}{C_{1998}^2} + \dots + \frac{1}{C_{1997+n}^{n+1}} < \frac{1}{1995}$$

ĐÀM VĂN NHÌ
(Thái Bình)

Bài T7/240 : Dãy số thực $\{a_n\}$ thỏa mãn

$$a_{n+1} = 3a_n^2 - 2 \quad \forall n \geq 1.$$

Tìm tất cả các số hữu tỉ a_1 mà tồn tại $m \neq n$ sao cho $a_m = a_n$

NGUYỄN MINH ĐỨC
(Hà Nội)

Bài T8/240 : Cho hàm số

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{với } 0 < x \leq 1 \\ 1 & \text{với } x = 0 \end{cases}$$

Chứng minh bất đẳng thức :

$$\frac{17}{18} < \int_0^1 f(x) dx < \frac{1703}{1800}$$

NGUYỄN LÊ DŨNG
(TP. Hồ Chí Minh)

Bài T9/240 : Gọi r, R lần lượt là bán kính các vòng tròn nội tiếp, ngoại tiếp tam giác ABC với $BC = a, CA = b, AB = c$.

Chứng minh rằng :

$$a^2 + b^2 + c^2 \leq 8R^2 + 4r^2.$$

PHẠM HIẾN BÀNG
(Thái Nguyên)

Bài T10/240 : Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho elíp có phương trình :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b > 0)$$

Một dây cung MN của elíp thay đổi sao cho $\widehat{MON} = 90^\circ$.

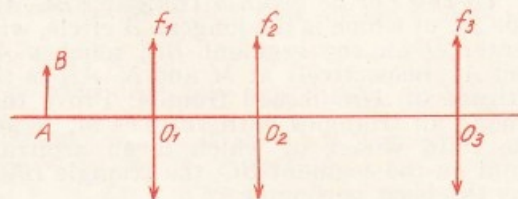
1) Tìm các giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của diện tích tam giác OMN .

2) Tìm quỹ tích hình chiếu vuông góc H của điểm O trên dây cung MN .

LÊ QUỐC HÂN
(Nghệ An)

CÁC ĐỀ VẬT LÝ

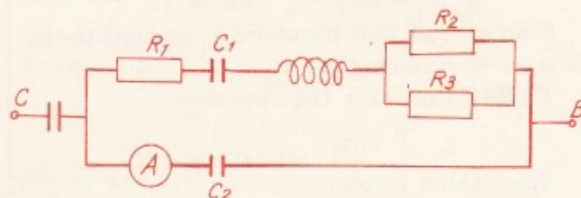
Bài L1/240 : Vật AB đặt trước một hệ ba thấu kính mỏng O_1, O_2, O_3 đồng trục (xem hình vẽ). Số phóng đại K của ảnh của AB qua hệ không phụ thuộc vị trí AB ở trước kính O_1 .



Cho biết tiêu cự của các kính O_1, O_2 và O_3 lần lượt là $f_1 = 30\text{cm}$; $f_2 = 20\text{cm}$ và $f_3 = 40\text{cm}$, khoảng cách $O_1O_3 = 60\text{cm}$. Hãy xác định khoảng cách O_1O_2 và giá trị của K .

PHAN TUẤN KHANH
(Hà Nội)

Bài L2/240 : Xét một mạch điện như hình vẽ.



Trong đó $C = C_1 = 2C_2 = \frac{100}{\pi} (\mu F)$, $L = \frac{2}{\pi} (H)$, $R_1 = R_2 = 2R_3$. Bỏ qua điện trở của ampe kế, dây nối và cuộn dây. Đặt vào hai đầu AB một hiệu điện thế $U = U_0 \sin 100\pi t (V)$ thì ampe kế chỉ $0,5 (A)$ và độ lệch pha giữa U và dòng điện qua tụ C là $\frac{\pi}{3}$. Viết biểu thức của cường độ dòng điện qua tụ C và hiệu điện thế hai đầu AB theo thời gian.

NGUYỄN ĐỨC PHI
(Quảng Ngãi)

THÔNG BÁO

Từ tháng 6 - 1997 trụ sở tòa soạn tạp chí TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ chuyển địa điểm. Từ nay thư từ và bài vở xin gửi về : Tòa soạn TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ 81 Trần Hưng Đạo - Hà Nội.

Problems in this issue



FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/240. Let be given three numbers a, b, c in the segment $[n-1, n+1]$ so that $a+b+c = 3n$. Prove that $a^2+b^2+c^2 \leq 3n^2+2$. When does equality occur?

T2/240 Find all integer solutions of the equation

$$x^2y^2 - x^2 - 8y^2 = 2xy.$$

T3/240 Prove that for every positive integer n , $(1+2^1)(1+2^2)(1+2^3)\dots(1+2^n) < \frac{1}{3} 2^{n+1}$.

T4/240 Let be given a triangle ABC with $\hat{A} = 90^\circ$, $\hat{B} = 20^\circ$. Consider the angled-bisector BI (I on the segment AC) of ABC and the point H on the segment AB such that $\hat{ACH} = 30^\circ$. Calculate $\hat{CHI}$.

T5/240 Let be given a triangle ABC , the side BC of which is the longest. A circle, with center O on the segment BC , touches AB and AC respectively at M and N . AH is the altitude of ABC issued from A . Prove that among all triangles with vertices M, N and the third vertex of which is an arbitrary point on the segment BC , the triangle HMN has the least perimeter.

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/240 Let be given a positive integer n . Prove that :

$$\frac{1}{C_{1997}^1} + \frac{1}{C_{1998}^2} + \dots + \frac{1}{C_{1997+n}^{n+1}} < \frac{1}{1995}.$$

T7/240 The sequence of real numbers $\{a_n\}$ satisfies the relation

$$a_{n+1} = 3a_n^2 - 2, \forall n \geq 1.$$

Find all rational numbers a_1 so that there exist $m \neq n$ such that $a_m = a_n$.

T8/240 Consider the function :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{if } 0 < x \leq 1 \\ 1 & \text{if } x=0 \end{cases}$$

Prove the inequalities

$$\frac{17}{18} < \int_0^1 f(x) dx < \frac{1703}{1800}.$$

T9/240 Let r and R be respectively the radii of the incircle and circumcircle of a triangle ABC with $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$.

Prove that : $a^2 + b^2 + c^2 \leq 8R^2 + 4r^2$.

T10/240 Consider the ellipse with equation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b > 0)$$

in the coordinate plane Oxy . A chord MN of the ellipse varies so that $\hat{MON} = 90^\circ$.

1) Find the greatest value and the least value of the areas of triangles OMN .

2) Find the locus of the orthogonal projections H of O on the chords MN .

TỪ MỘT BÀI TOÁN...

(tiếp theo bài 3)

và $y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_n$. Chứng minh rằng nếu $z_1, z_2, \dots, z_n$ là một hoán vị bất kì của các số $y_1, y_2, \dots, y_n$ thì

$$\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \leq \sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2$$

(Đề thi Toán Quốc tế lần thứ 17)

Giải : Theo bất đẳng thức (5) ta có $\sum_{i=1}^n x_i y_i \geq \sum_{i=1}^n x_i z_i$

$$\text{Mặt khác } \sum_{i=1}^n y_i^2 = \sum_{i=1}^n z_i^2$$

$$\text{Suy ra } \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2 \sum_{i=1}^n x_i y_i + \sum_{i=1}^n y_i^2 \leq \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2 \sum_{i=1}^n x_i z_i + \sum_{i=1}^n z_i^2$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \leq \sum_{i=1}^n (x_i - z_i)^2$$

Định nghĩa 2 : Cho hai dãy số : $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ và $(y_1, y_2, \dots, y_n)$. 1) Hai dãy số trên được gọi là có cùng thứ tự nếu điều kiện sau được thỏa mãn :

$$x_i \geq x_j \Leftrightarrow y_i \geq y_j, \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

2) Hai dãy số trên được gọi là có thứ tự ngược nhau nếu điều kiện sau được thỏa mãn :

$$x_i \geq x_j \Leftrightarrow y_i \leq y_j, \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

Từ đó để 2 suy ra rằng :

1) Nếu $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ và $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ là hai dãy có cùng thứ

$$\text{tự thì } \sum_{k=1}^n x_k y_k \geq \sum_{k=1}^n x_k y_{i_k} \quad (7)$$

trong đó $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ là một hoán vị bất kì của $(1, 2, \dots, n)$ 2) Nếu $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ và $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ là hai dãy có thứ tự ngược nhau thì

$$\sum_{k=1}^n x_k y_k \leq \sum_{k=1}^n x_k y_{i_k} \quad (8)$$

trong đó $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ là một hoán vị bất kì của $(1, 2, \dots, n)$

Bài toán 4 : Cho $\{a_k\}$ là một dãy số nguyên dương phân biệt ($k = 1, 2, 3, \dots$). Chứng minh rằng với mọi $n \geq 1$:

$$\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k^2} \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

(Đề thi Toán Quốc tế lần thứ 20)

Giải : Giả sử $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ là một hoán vị của $(1, 2, \dots, n)$ sao cho $a_{i_1} < a_{i_2} < \dots < a_{i_n}$

$$\text{Vi } \frac{1}{1^2} > \frac{1}{2^2} > \dots > \frac{1}{n^2}$$

nên theo (8) ta có : $\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k^2} \geq \sum_{k=1}^n \frac{a_{i_k}}{k^2}$ ((1, 2, ..., n) là một hoán vị của $(i_1, i_2, \dots, i_n)$)

Mặt khác, bằng phương pháp quy nạp toán học, dễ dàng chứng minh được $a_{i_k} \geq k \forall k = 1, n$.

$$\text{Vậy } \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k^2} \geq \sum_{k=1}^n \frac{k}{k^2} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

$$\text{Từ đó suy ra } \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k^2} \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_k = k \forall k = 1, n$

Sau đây là một lời giải khác của bài toán 1 : Các dãy số (bc, ac, ab) và $(a^2 + bc, b^2 + ac, c^2 + ab)$ có thứ tự ngược nhau (bạn đọc tự chứng minh).

$$\text{Khi đó } bc(a^2 + bc) + ac(b^2 + ac) + ab(c^2 + ab) \leq bc(b^2 + ac) + ac(c^2 + ab) + ab(a^2 + bc)$$

$$\Rightarrow bc(b^2 + ac) + ac(c^2 + ab) + ab(a^2 + bc) \leq bc(b^2 + ac) + ac(c^2 + ab) + ab(a^2 + bc)$$

Từ đó suy ra bất đẳng thức (1').

Cuối cùng là một số bài tập dành cho bạn đọc

Bài 1 : Cho a, b, c là độ dài các cạnh của một tam giác bất kì. Chứng minh rằng

$$2 \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \right) \geq \frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a} + 3$$

Bài 2 : Giả sử a, b, c là các số dương. Chứng minh bất

$$\text{đẳng thức : } \frac{a^3}{b^2 - bc + c^2} + \frac{b^3}{c^2 - ca + a^2} + \frac{c^3}{a^2 - ab + b^2} \geq \frac{ab + bc + ca}{a + b + c}$$

Bài 3 : Giả sử a, b, c là ba số dương. Chứng minh rằng

$$a^3b + b^3c + c^3a \geq a^2bc + b^2ca + c^2ab.$$

ĐỀ THI TUYỂN SINH MÔN TOÁN KHỐI A NĂM 1996

TRƯỜNG ĐẠI HỌC ĐẠI CƯƠNG - ĐẠI HỌC QUỐC GIA TP. HỒ CHÍ MINH

(Thời gian : 180 phút)

A. PHẦN BẮT BUỘC

Câu I

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số : $y = x^3 - 6x^2 + 9x$.
2. Tìm tất cả các đường thẳng đi qua điểm A(4,4) và cắt (C) tại ba điểm phân biệt.

Câu II

Cho phương trình

$$\sqrt{x^2 - 2x + m^2} = |x - 1| - m \quad (1)$$

1. Giải phương trình (1) với $m = 2$.
2. Giải và biện luận phương trình (1) theo m .

Câu III

Cho hàm số $y_k = \frac{2k \cos x + k + 1}{\cos x + \sin x + 2}$

1. Tìm các giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của hàm số y_k ứng với $k = 1$.
2. Xác định tham số k sao cho giá trị lớn nhất của hàm số y_k là nhỏ nhất.

Câu IV

1. Tính tích phân $I = \int_1^t \frac{\ln x}{x^2} dx$.
2. Đặt $J(t) = \int_1^t \left(\frac{\ln x}{x} \right)^2 dx$ với $t > 1$.

Tính $J(t)$ theo t , từ đó suy ra rằng :
 $J(t) < 2, \forall t > 1$.

B. PHẦN TỰ CHỌN

(Thí sinh chọn một trong hai câu V.A hoặc V.B)

Câu V.A.

Cho Parabol (P) : $y = x^2 - 2x + 3$ và (D) là đường thẳng cùng phương với đường thẳng $y = 2x$ sao cho (D) cắt (P) tại điểm A và B.

1. Viết phương trình của (D) khi hai tiếp tuyến với (P) tại A và B vuông góc với nhau.
2. Viết phương trình của (D) khi độ dài của đoạn AB = 10.

Câu V.B.

Cho tứ diện ABCD có $AB = CD = 2x$ và 4 cạnh còn lại đều có độ dài bằng 1.

1. Tính diện tích toàn phần (tổng diện tích của 4 mặt) của tứ diện theo x .
2. Xác định x để diện tích toàn phần đạt giá trị lớn nhất.

DÁP ÁN

(Đáp án này tòa soạn đã sắp xếp và trình bày lại trên cơ sở lời giải của ban Nguyễn Văn Minh, Khối 4 - Thị trấn Đức Phổ - Quảng Ngãi gửi tới Tòa soạn)

Câu I :

1. Tập xác định : R

$$y' = 3x^2 - 12x + 9 \text{ nên } y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên :

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$		
y'		+	0	-	0	+
y	$-\infty$	4		0		$+\infty$

Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$ và đạt cực tiểu tại $x = 3$.

Vì $y'' = 6x - 12$ nên đồ thị có điểm uốn (2; 2).

Đồ thị tiếp xúc với Ox tại (3; 0) và cắt Ox tại O.

Đường thẳng $x = 4$ đi qua A (4; 4) chỉ cắt đồ thị tại 1 điểm chính là A nên không thỏa mãn.

Xét các đường thẳng còn lại đi qua A là các đường thẳng có phương trình

$$y = k(x - 4) + 4.$$

Đường thẳng này cắt (C) tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình $x^3 - 6x^2 + 9x = k(x - 4) + 4$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow (x - 4)(x^2 - 2x + 1 - k) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow t(x) = x^2 - 2x + 1 - k$ có 2 nghiệm phân biệt khác 4 $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ t(4) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k > 0 \\ 9 - k \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < k \neq 9.$

Các đường thẳng thỏa mãn bài toán có phương trình :

$$y = k(x - 4) + 4 \text{ với } 0 < k \neq 9.$$

Câu II :

1. Với $m = 2$ thì (1) trở thành : $\sqrt{x^2 - 2x + 4} = |x - 1| - 2$ Ta thấy với mọi x thì :

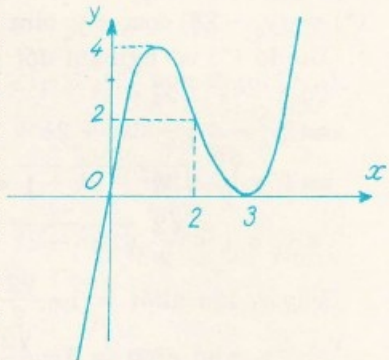
$$\sqrt{x^2 - 2x + 4} = \sqrt{(x - 1)^2 + 3} > \sqrt{(x - 1)^2} = |x - 1| > |x - 1| - 2 \text{ nên phương trình vô nghiệm}$$

2. Đặt $t = |x - 1| \geq 0$ thì phương trình trở thành (2) $\sqrt{t^2 + m^2 - 1} = t - m \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq m \\ t^2 + m^2 - 1 = (t - m)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq m \\ 2mt = 1 \end{cases} \quad (3)$

* Nếu $m = 0$ thì (3) vô nghiệm $\Rightarrow$ (2) vô nghiệm $\Rightarrow$ (1) vô nghiệm

$$* \text{ Nếu } m \neq 0 \text{ thì } (3) \Leftrightarrow t = \frac{1}{2m} \begin{cases} \frac{1}{2m} \geq m \\ \frac{1}{2m} \geq 0 \end{cases} \quad 13$$

Phương trình (1) có nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2m} \geq m \\ \frac{1}{2m} \geq 0 \end{cases} \quad 13$



$$\Leftrightarrow 0 < m \leq \frac{\sqrt{2}}{2}. \text{ Khi đó : } (|x - 1|) = \frac{1}{2m}$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \pm \frac{1}{2m} = \frac{2m \pm 1}{2m}$$

Tóm lại : Với $m \leq 0$ hoặc $m > \frac{\sqrt{2}}{2}$ thì (1)

vô nghiệm. Với $0 < m \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ thì (1) có 2 nghiệm $x = \frac{2m \pm 1}{2m}$.

Câu III : Trước hết ta tìm tập giá trị của y_k tức là tìm y_k để phương trình

$$y_k = \frac{2k \cos x + k + 1}{\cos x + \sin x + 2} \quad (*)$$

có nghiệm đối với ẩn x .

Nhận xét : $\cos x + \sin x + 2 = 2 + \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4}) > 0$ với mọi x nên :

$$(*) \Leftrightarrow (y_k - 2k) \cos x + y_k \sin x = k + 1 - 2y_k$$

Do đó (*) có nghiệm đối với ẩn $x \Leftrightarrow$

$$(y_k - 2k)^2 + y_k^2 \geq (k + 1 - 2y_k)^2$$

$$\Leftrightarrow 2y_k^2 - 4y_k - 3k^2 + 2k + 1 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{3k^2 - 2k + 1} \leq$$

$$\leq y_k \leq 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{3k^2 - 2k + 1}$$

$$\text{Vậy } y_k \text{ lớn nhất} = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{3k^2 - 2k + 1}$$

$$y_k \text{ nhỏ nhất} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{3k^2 - 2k + 1}$$

1. Với $k = 1$ thì y_1 lớn nhất = 2 và y_1 nhỏ nhất = 0

2. Gọi y_k lớn nhất là $F(k)$ thì

$$F(k) = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{3(k - \frac{1}{3})^2 + \frac{2}{3}} \geq 1 + \frac{\sqrt{3}}{3} \forall k$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow k = \frac{1}{3}$, vậy $F(k)$ nhỏ nhất = $1 + \frac{\sqrt{3}}{3}$ khi và chỉ khi $k = \frac{1}{3}$.

Câu IV :

$$1. \text{ Đặt } u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x}; dv = \frac{dx}{x^2} \Leftrightarrow v = -\frac{1}{x}.$$

$$\text{Do đó : } I = \int u dv = u.v \Big|_1^2 - \int v du = \frac{-\ln x}{x} \Big|_1^2 + \int_1^2 x^{-2} dx = \frac{-\ln 2}{2} - \frac{1}{x} \Big|_1^2 = \frac{1 - \ln 2}{2}.$$

$$2. \text{ Đặt } u = \ln^2 x \Rightarrow du = \frac{2 \ln x dx}{x}; dv = \frac{dx}{x^2} \Leftrightarrow v = -\frac{1}{x}. \text{ Ta có : với } t > 1 \text{ thì}$$

$$J(t) = \int u dv = uv \Big|_1^t - \int v du = \frac{-\ln^2 x}{x} \Big|_1^t + 2 \int_1^t \frac{\ln x dx}{x^2} = \frac{-\ln^2 t}{t} + 2 \cdot I(t).$$

$$\text{Xét } I(t) = \int_1^t \frac{\ln x dx}{x^2}, \text{ làm tương tự 1, ta có}$$

$$I(t) = \frac{t - 1 - \ln t}{t}.$$

$$\text{Suy ra : } J(t) = \frac{-\ln^2 t}{t} + 2 \frac{t - 1 - \ln t}{t} = 2 - \frac{\ln^2 t + 2 \ln t + 2}{t} = 2 - \frac{(\ln t + 1)^2 + 1}{t} < 2$$

với $t > 1$.

Câu V.A :

1. Phương trình của (D) là $y = 2x + k$. (D) cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B $\Leftrightarrow$ phương trình $x^2 - 2x + 3 = 2x + k$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình

$x^2 - 4x + 3 - k = 0$ (*) có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow k > -1$. Ta có các hoành độ x_A, x_B của A, B là các nghiệm của (**). Theo định lý Viet thì $x_A + x_B = 4$ và $x_A \cdot x_B = 3 - k$.

Xét $y = x^2 - 2x + 3$ có $y' = 2x - 2$, nên các tiếp tuyến của (P) tại A, B có hệ số góc lần lượt là $2x_A - 2, 2x_B - 2$.

Hai tiếp tuyến này vuông góc với nhau

$$\Leftrightarrow (2x_A - 2)(2x_B - 2) = -1$$

$$\Leftrightarrow 4x_A x_B - 4(x_A + x_B) + 4 = -1$$

$$\Leftrightarrow 4(3 - k) - 16 + 4 = -1 \Leftrightarrow -4k = -1$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{1}{4} > -1$$

Khi đó phương trình của (D) là $y = 2x + \frac{1}{4}$.

$$2. AB = 10 \Leftrightarrow \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = 10$$

Vì $y_A = 2x_A + k; y_B = 2x_B + k$ nên điều

$$\text{kiện trên trở thành : } \sqrt{5(x_A - x_B)^2} = 10$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{5[(x_A + x_B)^2 - 4x_A x_B]} = 10$$

$$\Leftrightarrow 5[16 - 4(3 - k)] = 100$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(4k + 4)5} = 10$$

$$\Leftrightarrow (k + 1) \cdot 20 = 100 \Leftrightarrow k + 1 = 5$$

$$\Leftrightarrow k = 4 > -1$$

Khi đó, phương trình của (D) là $y = 2x + 4$.

Câu V.B

1. Gọi H là trung điểm của DC thì $AH \perp CD$.

$$\Rightarrow S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} CD \cdot AH = x \sqrt{1 - x^2}$$

Nhưng các mặt của tứ diện là các tam giác bằng nhau nên :

$$S_{tp} = 4x \sqrt{1 - x^2}.$$

2. Vì $x > 0$

$$\text{nên : } S_{tp} = 4\sqrt{x^2(1 - x^2)}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có :

$$\sqrt{x^2(1 - x^2)} \leq \frac{x^2 + 1 - x^2}{2} = \frac{1}{2}$$

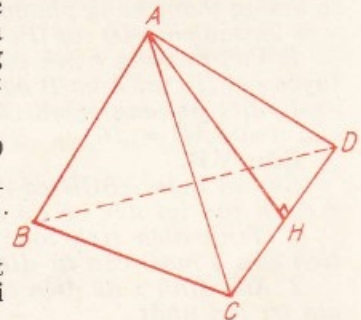
$$\Rightarrow S_{tp} \leq 2 \text{ (đơn vị diện tích).}$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra } \Leftrightarrow x^2 = 1 - x^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (vì $x > 0$). Giá trị này của x đảm bảo tồn tại tứ diện ($0 < x < 1$).

$$\text{Vậy } S_{tp} \text{ đạt giá trị lớn nhất là } 2 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

NGUYỄN VĂN MINH



ĐỀ THI TUYỂN SINH CHUYÊN TOÁN - TIN ĐHSPT

(ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI)

NGÀY THỨ NHẤT

Câu 1 : Xét phương trình $x^3 + ax^2 + bx + 1 = 0$ trong đó a và b là hai số hữu tỉ

1. Chứng minh rằng $a = -5, b = 3$ là cặp số hữu tỉ duy nhất làm cho phương trình đã cho có ba nghiệm trong đó có một nghiệm là $x = 2 + \sqrt{5}$. Kí hiệu x_1, x_2, x_3 là ba nghiệm đó.

2. Với mỗi số tự nhiên n đặt $S_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n$. Tính S_1, S_2, S_3 . Chứng minh rằng S_n luôn luôn là số nguyên.

3. Tìm số dư trong phép chia S_{1996} cho 4.

Câu 2 : Cho ba số nguyên x, y, z thỏa mãn điều kiện $x + y + z$ chia hết cho 6. Chứng minh rằng biểu thức $M = (x + y)(y + z)(z + x) - 2xyz$ cũng chia hết cho 6.

Câu 3 : Tìm giá trị của tham số a để hệ sau có nghiệm duy nhất

$$\begin{cases} x^2 + |a + 1|x \leq x^5 - 7x^2 + x + 2 \\ x^4 + x^3 + (a^2 - 3)x^2 - 4x - 4 - 4a^2 = 0 \end{cases}$$

Câu 4 : Cho tam giác vuông cân ABC (vuông ở A). AD là trung tuyến thuộc cạnh huyền. M là một điểm thay đổi trên đoạn AD . Gọi N và P theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của M xuống AB và AC . H là hình chiếu vuông góc của N xuống đường thẳng PD .

1) Xác định vị trí của M để tam giác AHB có diện tích lớn nhất

2) Chứng minh rằng khi M thay đổi, đường thẳng HN luôn đi qua một điểm cố định.

Câu 5 : 1/ Trên một mảnh giấy có ghi 1996 câu khẳng định như sau :

+ Câu thứ 1 : "Trên mảnh giấy này có đúng 1 câu khẳng định sai".

+ Câu thứ 2 : "Trên mảnh giấy này có đúng 2 câu khẳng định sai".

+ Câu thứ 3 : "Trên mảnh giấy này có đúng 3 câu khẳng định sai".

.....
+ Câu thứ 1996 : "Trên mảnh giấy này có đúng 1996 câu khẳng định sai".

Hỏi trong số 1996 câu khẳng định đó có câu nào đúng hay không. Hãy trình bày rõ lập luận và chỉ ra tất cả các câu đúng nếu có.

2/ Cũng câu hỏi trên nhưng trong các câu khẳng định đã cho chữ "đúng" được thay bằng "không quá". Ví dụ : Câu thứ 1 : "Trên mảnh giấy này có không quá 1 câu khẳng định sai".

NGÀY THỨ HAI

Câu 6 : Cho biểu thức

$$P(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + (x^2 - 4)\sqrt{x^2 - 1} - 4}{x^3 - 3x^2 + (x^2 - 4)\sqrt{x^2 - 1} + 4}$$

với $x \geq 1$.

1) Rút gọn $P(x)$.

2) Giải phương trình $P(x) = 1$

Câu 7 : 1/ Phân tích đa thức ra thừa số $(a - b)^3 + (b - c)^2 + (c - a)^3$

2/ Với n là một số tự nhiên đã cho, xét xem khẳng định sau đúng hay sai : đa thức $(a - b)^n + (b - c)^n + (c - a)^n$ chia hết cho đa thức $n(a - b)(b - c)(c - a)$

Câu 8 : Cho ba số nguyên dương x, y, z thỏa mãn điều kiện

$$\begin{cases} 2^x - 1 = y^2 \\ x > 1 \end{cases}$$

Chứng minh rằng $z = 1$.

Câu 9 : Gọi M và N lần lượt là trung điểm các cạnh BC và CD của tứ giác lồi $ABCD$.

Chứng minh rằng $S_{ABCD} \leq \frac{1}{2}(AM + AN)^2$, (Kí hiệu S_{ABCD} chỉ diện tích miền tứ giác $ABCD$).

Câu 10 : Trên bờ một biển hồ hình tròn có $2n$ thành phố ($n \geq 2$). Giữa hai thành phố tùy ý có thể có hoặc không có đường thủy nối trực tiếp với nhau. Người ta nhận thấy rằng đối với hai thành phố A và B bất kì thì giữa chúng có đường thủy nối trực tiếp với nhau khi và chỉ khi giữa các thành phố A' và B' không có đường thủy nối trực tiếp với nhau, trong đó A' và B' theo thứ tự là hai thành phố gần với A và B nhất nếu đi từ A đến A' và B đến B' trên bờ hồ dọc theo cùng một chiều (cùng chiều kim đồng hồ hoặc ngược chiều kim đồng hồ). Chứng tỏ rằng từ mỗi thành phố đều có thể đi bằng đường thủy đến một thành phố tùy ý khác theo một lộ trình qua không quá hai thành phố trung gian.

ĐÁP ÁN

Câu 1. 1/ $x = 2 + \sqrt{5}$ là nghiệm của phương trình đã cho khi và chỉ khi.

$$(2 + \sqrt{5})^3 + a(2 + \sqrt{5})^2 + b(2 + \sqrt{5}) + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (4a + b + 17)\sqrt{5} + (9a + 2b + 39) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4a + b + 17 = 9a + 2b + 39 = 0 \Leftrightarrow a = -5 \text{ và } b = 3.$$

2) Với $a = -5, b = 3$, phương trình trở thành $x^3 - 5x^2 + 3x + 1 = 0$, hay $(x^2 - 4x - 1)(x - 1) = 0$, có 3 nghiệm là $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{5}$ và $x_3 = 1$.

Vậy $S_n = x_1^n + x_2^n + 1$. Ta dễ tính được

$$S_1 = 5, S_2 = 19, S_3 = 77$$

Đặt $S'_n = S_n - 1 = x_1^n + x_2^n$, ta dễ chứng

minh được $S'_{n+2} - 4S'_{n+1} - S'_n = 0$ (1) với mọi $n \geq 1$. Từ đó, bằng phép quy nạp, suy ra $S'_n \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}$, do đó $S_n \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}$.

3/ Cũng từ (1) suy ra $S_{n+2} \equiv S_n \pmod{4}$
 $\Rightarrow S_{1996} \equiv S_{1994} \equiv \dots \equiv S_2 \pmod{4}$
 Mặt khác $S_2 = 18 \equiv 2 \pmod{4}$. Vậy
 $S_{1996} = 1 + S_{1996} \equiv 3 \pmod{4}$

Câu 2. Để chứng minh rằng $(x+y)/(y+z)(z+x) + xyz = (x+y+z)/(xy+yz+zx)$
 Từ đó có $M = (x+y+z)/(xy+yz+zx) - 3xyz$ (2)

Từ điều kiện $x+y+z \leq 6$, ta suy ra trong 3 số x, y, z có ít nhất một số chẵn. Vậy $3xyz \leq 6$. Sử dụng kết quả này và giả thiết $x+y+z \leq 6$ vào (2), ta có $M \leq 6$.

Câu 3. Phương trình thứ hai trong hệ có thể phân tích thành $(x^2-4)(x^2+x+1+a^2) = 0$, có đúng 2 nghiệm là $x_1 = -2, x_2 = +2$.

Bằng phép thử trực tiếp vào bất phương trình thứ nhất, ta thấy $x_1 = -2$ luôn thỏa mãn $\forall a$. Vậy hệ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $x_2 = 2$ không thỏa mãn bất phương trình, nghĩa là:

$$4 + 2|a+1| > 6 + 2 \Leftrightarrow |a+1| > 2 \Leftrightarrow a < -3 \text{ hoặc } a > 1.$$

Câu 4. 1) Dựng $BE \perp AB$, cắt PD tại E .
 Để thấy $BE = PC = BN$
 $\Rightarrow \angle NEB = \angle NHB = 45^\circ$.

Mặt khác $\angle AHN = \angle APN = 45^\circ$. Vậy $\angle AHB = 90^\circ$ và HN là đường phân giác của $\angle AHB$. Suy ra

$$S_{AHB}^2 = \frac{1}{4} AH^2 \cdot BH^2 \leq \frac{1}{4} \left(\frac{AH^2 + BH^2}{2} \right)^2 = \frac{AB^2}{16} \Rightarrow S_{AHB} \leq \frac{AB^2}{4}$$

Dẳng thức xảy ra khi $AH = BH$, tức là khi $H \equiv D \equiv M$. Vậy khi $M \equiv D$ thì S_{AHB} lớn nhất.

2) Vì HN là phân giác $\angle AHB$ nên $4M$ luôn đi qua điểm giữa của nửa đường tròn đường kính AB . Hiển nhiên điểm này cố định.

Câu 5. 1) Nếu 1 câu là đúng thì các câu khác đều sai. Vậy có không quá 1 câu đúng. Mặt khác, nếu tất cả đều sai thì câu thứ 1996 đúng, vô lý. Vậy phải có câu đúng và chỉ 1 câu đúng. Điều đó cũng có nghĩa là câu thứ 1995 là câu duy nhất đúng.

2) Nếu có k câu là sai ($0 < k < 1996$) thì các câu $k, k+1, \dots, 1996$ đều đúng. Suy ra chỉ có các câu 1, 2, ..., $k-1$ là sai trái giả thiết có k câu sai. Vậy không có câu nào sai, nghĩa là cả 1996 câu đều đúng.

Câu 6. 1) Phân tích tử và mẫu thành nhân tử được:

$$P(x) = \frac{(x+2)\sqrt{x-1}[\sqrt{x-1}(x+2) + (x-2)\sqrt{x+1}]}{(x-2)\sqrt{x+1}[\sqrt{x+1}(x-2) + (x+2)\sqrt{x-1}]}$$

Suy ra điều kiện xác định của $P(x)$ là

$$x \geq 1, x \neq 2 \text{ và } x \neq \sqrt{3}.$$

Với các điều kiện ấy:

$$P(x) = \frac{(x+2)\sqrt{x-1}}{(x-2)\sqrt{x+1}}$$

2) Giải $P(x) = 1$ ta được $x = \pm \sqrt{3}$. Cả hai đều không thỏa mãn điều kiện. Vậy phương trình vô nghiệm.

Câu 7. 1) $(a-b)^5 + (b-c)^5 + (c-a)^5 = 3(a-b)(b-c)(c-a)$

2) Sử dụng nhị thức Newton, có thể chứng minh khẳng định đúng và mọi n là số nguyên tố lẻ. Chẳng hạn với $n = 5$. Ta có:

$$(x+y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$$

$$\Rightarrow x^5 + y^5 - (x+y)^5 = -5xy(x+y)(x^2 + y^2 + xy)$$

16 Thế $x = a-b, y = b-c$ ta được:

$$(a-b)^5 + (b-c)^5 + (c-a)^5 = 5(a-b)(b-c)(c-a)$$

$$(c-a)(x^2 + y^2 + xy) : 5(a-b)(b-c)(c-a).$$

Để thấy khẳng định sai khi n chẵn.

Câu 8. Do $x > 1$ nên $2^x \leq 4$. Từ đẳng thức đầu suy ra $y^2 + 1 = 2^x \leq 4$. Vậy $y \leq 2$.

Xét 2 trường hợp:

a) z chẵn. Đặt $z = 2t$ ($t \geq 1$). Khi đó

$y^2 = (y^2)^t \equiv 1 \pmod{4}$. Suy ra $y^2 + 1 \not\equiv 4$, vô lý.

b) z lẻ: Đặt $z = 2t+1$ ($t \geq 0$). Khi đó

$$y^2 + 1 = (y+1)(y^2 - y^2 + 1 + \dots - y + 1)$$

M là tổng đại số của $2t+1$ số lẻ $\Rightarrow M$ lẻ

$\Rightarrow M$ là ước lẻ của $2^x \Rightarrow M = 1$.

Vậy $y^2 + 1 = y + 1 \Rightarrow z = 1$ (đpcm).

Câu 9. Giả sử MA cắt BD tại I . Từ giả thiết M, N là trung điểm của BC và CD , ta có:

$$S_{ABCD} = 2S_{AMCN} = 2(S_{AMN} + S_{CMN}) = 2(S_{AMN} + S_{IMN}) = 4S_{AMN}$$

$$\leq 4 \cdot \frac{1}{2} AM \cdot AN \leq 2 \left(\frac{AM + AN}{2} \right)^2 = \frac{1}{2} (AM + AN)^2 \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Câu 10. Với 3 thành phố liên tiếp X, Y, Z , kể theo 1 chiều nào đó ta có $Y = X'$ và $Z = Y'$. Do đó theo giả thiết:

$$(X, Y) = 1 \Rightarrow (X', Y') = (Y, Z) = 0$$

$$(X, Y) = 0 \Rightarrow (X', Y') = (Y, Z) = 1$$

trong đó kí hiệu $(X, Y) = 1$ (hay 0) chỉ rằng giữa 2 thành phố X và Y có (không có) đường thủy nối trực tiếp.

Từ đó suy ra rằng có thể biểu diễn $2n$ thành phố đã cho bởi sơ đồ sau (hình 1): trong đó mỗi tên chỉ rõ cặp thành phố kế nhau có đường thủy nối trực tiếp.

(hình vẽ với $n = 4$).

Xét 2 thành phố A, B tùy ý. Nếu $(A, B) = 1$ thì ta có đpcm. Nếu $(A, B) = 0$, ta có 3 trường hợp:

1) $(A, A') = (B, B') = 1$ (hình 1). Lúc này vì $(A, B) = 0$ nên $(A', B') = 1$. Ta có đường đi: $A \rightarrow A' \rightarrow B' \rightarrow B$.

2) $(A, A') = 1, (B, B') = 0$ (hình 2). Nếu $B = B_1$ thì 3 thành phố B_1, B, B' liên tiếp, mà $(B, B') = 0$ nên $(B_1, B) = 1$. Nên $(A, B_1) = 1$ thì đường đi là $A \rightarrow B_1 \rightarrow B$.

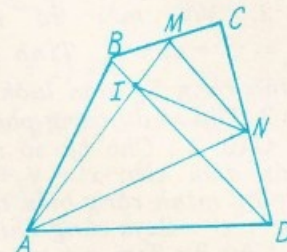
Nên $(A, B_1) = 0$ thì $(A', B) = 1$ và đường đi là $A \rightarrow A' \rightarrow B$.

3) $(A, A') = (B, B') = 0$ (hình 3). Giả sử $A = A_1$ và $B = B_1$. Tương tự trên ta phải có $(A, A_1) = (B, B_1) = 1$. Vì $(A, B) = 0$ nên $(A_1, B_1) = 1$.

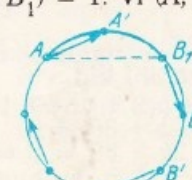
Ta có đường đi là $A \rightarrow A_1 \rightarrow B_1 \rightarrow B$.

Tóm lại trong mọi trường hợp đều có đường đi từ A đến B và qua không quá 2 thành phố khác.

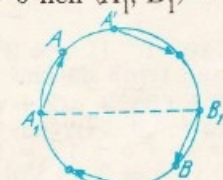
DOẢN MINH CƯỜNG



Hình 1



Hình 2



Hình 3

TỪ MỘT BÀI TOÁN THI VÔ ĐỊCH QUỐC TẾ

TRẦN XUÂN ĐÁNG

(Nam Định)

Trong kì thi Olympic toán Quốc tế lần thứ 24 (năm 1983) được tổ chức tại Pháp có bài toán sau do Mỹ đề nghị :

Bài toán 1 : Giả sử a, b, c là độ dài các cạnh của một tam giác bất kì. Chứng minh rằng :

$$a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) \geq 0 \quad (1)$$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

Để giải bài toán 1, trước hết ta xét

Bổ đề 1 : Giả sử $x_1 \geq x_2$ và $y_1 \geq y_2$. Khi đó

$$x_1y_1 + x_2y_2 \geq x_1y_2 + x_2y_1 \quad (2)$$

Đẳng thức ở (2) xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2$ hoặc $y_1 = y_2$. Bổ đề này được chứng minh một cách dễ dàng.

Định nghĩa 1 : Các cặp số (x_1, x_2) và (y_1, y_2) được gọi là có cùng thứ tự nếu điều kiện sau được thỏa mãn $x_1 \geq x_2$ khi và chỉ khi $y_1 \geq y_2$. Từ bổ đề 1 suy ra :

Bổ đề 2 : Cho các cặp số (x_1, x_2) và (y_1, y_2) có cùng thứ tự. Khi đó $x_1y_1 + x_2y_2 \geq x_1y_2 + x_2y_1$ (3) Đẳng thức ở (3) xảy ra khi và chỉ khi $x_1 = x_2$ hoặc $y_1 = y_2$.

Sử dụng bổ đề 1 ta có thể giải được bài toán sau :

Bài toán 2 : Giả sử a, b, c là ba số dương. Chứng minh rằng

$$a^2(b+c-a) + b^2(c+a-b) + c^2(a+b-c) \leq 3abc \quad (4) \quad (\text{Thi vô địch Áo})$$

Giải : Vai trò của a, b, c như nhau nên không mất tính tổng quát có thể giả sử $a \geq b \geq c$.

$$(4) \Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2 \quad (4')$$

Ta có

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc = a(a^2 + bc) + b(b^2 + ca) + c(c^2 + ab) \quad \text{Sử dụng bổ đề 1 (để ý rằng } a^2 + bc \geq b^2 + ca) \text{ ta có}$$

$$a(a^2 + bc) + b(b^2 + ca) \geq a(b^2 + ca) + b(a^2 + bc) \text{ và } c^2 + ab = ab + cc \geq ac + bc$$

Từ đó suy ra bất đẳng thức (4').

Dấu "=" ở (4) xảy ra khi và chỉ khi

$$a = b = c.$$

Bây giờ ta chuyển sang giải bài toán 1.

$$\text{Bất đẳng thức (1)} \Leftrightarrow a^3b + b^3c + c^3a \geq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \quad (1')$$

Vì bất đẳng thức (1') không thay đổi qua phép hoán vị vòng quanh (a, b, c) nên không mất tính tổng quát có thể giả sử $a = \max\{a, b, c\}$.

Xét biểu thức $E = bc(bc + a^2) + ca(ca + b^2) + ab(ab + c^2)$ Vì các cặp số (ac, ab) và $(ab + c^2, ac + b^2)$ có cùng thứ tự (bạn đọc hãy thử lại !) nên theo bổ đề (2) ta có

$$E \leq bc(bc + a^2) + ab(ca + b^2) + ac(ab + c^2)$$

Lại vì các cặp số (bc, ab) và $(ac + b^2, bc + a^2)$ có cùng thứ tự nên $E \leq ab(bc + a^2) + bc(ca + b^2) + ac(ab + c^2)$

Từ đó suy ra bất đẳng thức (1').

Vậy bất đẳng thức (1) đã được chứng minh.

Đẳng thức ở (1) xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$ (tam giác đã cho là đều).

Bổ đề 3 : Cho $n \in \mathbb{N}$ ($n \geq 2$). Xét các dãy hữu hạn gồm n số hạng $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ và $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ thỏa mãn $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_{n-1} \geq x_n$ và $y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_{n-1} \geq y_n$. Khi đó

$$\sum_{k=1}^n x_k y_k \geq \sum_{k=1}^n x_k y_{i_k} \geq \sum_{k=1}^n x_k y_{n-k+1}$$

trong đó $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ là một hoán vị của $(1, 2, \dots, n)$ Trước hết ta chứng minh

$$\sum_{k=1}^n x_k y_k \geq \sum_{k=1}^n x_k y_{i_k} \quad (5)$$

Thật vậy với mỗi $k = 1, 2, \dots, n$ đặt $y_{i_k} = z_k$ (5) $\Leftrightarrow x_1(y_1 - z_1) + x_2(y_2 - z_2) + \dots + x_n(y_n - z_n) \geq 0$ (5')

Vì $x_1 \geq x_2$ và $y_1 \geq z_1$ nên $x_1(y_1 - z_1) \geq x_2(y_1 - z_1) \Rightarrow x_1(y_1 - z_1) + x_2(y_2 - z_2) \geq x_2[(y_1 + y_2) - (z_1 + z_2)]$

$$\text{Vậy } x_1(y_1 - z_1) + x_2(y_2 - z_2) + \dots + x_n(y_n - z_n) \geq x_2[(y_1 + y_2) - (z_1 + z_2)] + x_3(y_3 - z_3) + \dots + x_n(y_n - z_n) \geq x_3[(y_1 + y_2 + y_3) - (z_1 + z_2 + z_3)] + x_4(y_4 - z_4) + \dots + x_n(y_n - z_n) \geq \dots \geq x_{n-1}[(y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1}) - (z_1 + z_2 + \dots + z_{n-1})] + x_n(y_n - z_n) \geq x_n[(y_1 + y_2 + \dots + y_n) - (z_1 + z_2 + \dots + z_n)] = 0 \quad (\text{vì } x_i \geq x_j \text{ và } y_i + y_j + \dots + y_k \geq z_i + z_j + \dots + z_k \quad \forall k = 1, n-1)$$

Vậy bất đẳng thức (5') đúng. Nếu $x_i \neq x_j$ $\forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ thì đẳng thức ở (5) xảy ra khi và chỉ khi

$$y_{i_k} = y_k \quad \forall k = \overline{1, n}$$

Tiếp theo ta chứng minh $\sum_{k=1}^n x_k y_{i_k} \geq \sum_{k=1}^n x_k y_{n-k+1}$ (6) Thật vậy, đặt $y'_k = -y_{n+1-k}$

$$\forall k = \overline{1, n} \text{ thì } y'_1 \geq y'_2 \geq \dots \geq y'_n$$

Theo (5) ta có

$$\sum_{k=1}^n x_k y_{n+1-k} = -\sum_{k=1}^n x_k y'_k \leq -\sum_{k=1}^n x_k y'_{n+1-k} = \sum_{k=1}^n x_k y_{i_k} \Rightarrow \sum_{k=1}^n x_k y_{i_k} \geq \sum_{k=1}^n x_k y_{n+1-k}$$

Nếu $x_i \neq x_j \quad \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ ($i \neq j$) thì đẳng thức ở (6) xảy ra khi và chỉ khi $y_{i_k} = y_{n+1-k} \quad \forall k = \overline{1, n}$

Bài toán 3 : Giả sử x_i, y_i ($i = 1, 2, \dots, n$) là các số thực sao cho $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$ (Xem tiếp trang 12)



Giải trí TOÁN HỌC

Giải đáp bài

ANH ĐẦY TỐ VÀ ÔNG CHỦ

Sau 3 lần lấy, mỗi lần 4 chai, anh đầy tố đã sắp xếp lại các chai rượu trong thùng như sau

1	7	1
7		7
1	7	1

Ban đầu
32 chai

a	b	c
d		e
f	g	h

⇒

2	5	2
5		5
2	5	2

Lấy lần đầu
còn 28 chai

⇒

3	3	3
3		3
3	3	3

Lấy lần hai
còn 24 chai

⇒

4	1	4
1		1
4	1	4

Lấy lần ba
còn 20 chai

Ta thấy anh đầy tố không thể lấy lần bốn một chai nào nữa mà ông chủ kiểm tra vẫn thấy đảm bảo yêu cầu. Thật vậy. Giả sử anh đầy tố sắp xếp các chai rượu như bảng trên :

Thế thì ta phải có : $a + b + c = f + g + h = 9$, $d = e = 1$. Như vậy tổng số chai có trong thùng ít nhất phải bằng $9 + 9 + 2 = 20$.

Vì vậy ta dự đoán câu nói của ông chủ có thể như sau : "Ta khen người rất thông minh và xứng đáng được thưởng 12 chai rượu quý, nhưng người không thể lấy thêm của ta được chai nào nữa !"

Nhận xét 1. Có 55 bạn đã đưa ra cách sắp xếp các chai rượu như trên.

2. Bạn **Lý Quốc Vinh**, 6, trường Chuyên Hồng Bàng đã đưa ra 7 cách sắp xếp cho 28 chai rượu, 15 cách cho 24 chai và 4 cách cho 20 chai. Bạn **Phan Thanh Minh**, 8T, NK Vinh, Nghệ An đưa ra 8 cách sắp xếp cho 28 chai rượu, 17 cách cho 24 chai và 4 cách cho 20 chai. Bạn **Lê Hồng Việt**, 7T2, NK Vinh, Nghệ An đưa ra 11 cách sắp xếp cho 28 chai rượu, 8 cách cho 24 chai và 4 cách cho 20 chai.

3. Tất cả các giải đáp gửi đến đều đúng.

BÌNH PHƯƠNG

NHẬN ĐƯỢC BAO NHIÊU QUÀ ?

Trường Lan có 12 lớp. Trong một buổi liên hoan, mỗi lớp cử hai đại biểu. Lớp Lan đã cử Lan và Mai đi dự. Sau buổi liên hoan, một số đại biểu đã trao đổi quà kỉ niệm cho nhau (nếu A tặng quà cho B thì B cũng tặng quà cho A), nhưng không có hai bạn nào cùng lớp tặng quà cho nhau. Lan tò mò hỏi tất cả các đại biểu về số quà mà họ nhận được. Tất cả các câu trả lời đều khác nhau. Bạn có thể biết bạn Mai lớp Lan nhận được bao nhiêu quà không ? À quên ! Bạn hãy gọi lớp Lan là lớp chuyên toán nhé !

NGUYỄN HUY DOAN

QUẢNG CÁO : Để chuẩn bị tốt cho các kì thi tốt nghiệp PTTH và tuyển sinh Đại học các bạn hãy tìm đọc bộ sách "Tuyển chọn các bài toán PTTH..." ở các cửa hàng sách.

Tổng phát hành : 3A Đinh Tiên Hoàng Quận 1, TP. Hồ Chí Minh. ĐT: 8242685.



ISSN : 0866 - 8035

Chỉ số : 12884

Mã số : 8BT34M7

Sắp chữ tại TTVT Nhà xuất bản Giáo dục

In tại nhà máy in Diên Hồng, 57 Giảng Võ

In xong và nộp lưu chiểu tháng 6/1997

Giá : 2.000đ
Hai nghìn đồng