BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ★ HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

3 (237)
1997
NĂM THỨ 34

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG

- ❖ TRỞ LẠI VẤN ĐỀ ĐỒNG QUY VÀ KHÔNG ĐỒNG QUY
- ❖ TỔNG QUÁT TỪ BÀI TOÁN QUEN THUỘC
- ❖ GIỚI THIỆU MỘT SỐ THẦN ĐỒNG TOÁN HỌC
- ❖ ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC XÂY DỰNG 1996
- ❖ ĐỊNH LÍ 4 ĐIỂM VÀ CÁCH CHỨNG MINH ...

Trường PTTH Hàn Thuyên, Bắc Ninh.

TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ
MATHEMATICS AND YOUTH

MỤC LỤC

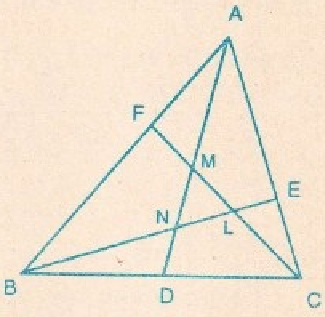
Trụ sở tòa soạn :
45B Hàng Chuối, Hà Nội ĐT: 8213786
231 Nguyễn Văn Cừ, TP Hồ Chí Minh ĐT: 8356111

Biên tập và trị sự : VŨ KIM THỦY
LÊ THỐNG NHẤT
Trình bày : QUỐC HỒNG

Trở lại vấn đề "đồng quy" và "không đồng quy"

NGUYỄN CẢNH TOÀN

Tạp chí TH&TT số 2 (212), 1995 (trang 15–16) đã đề cập đến sự thống nhất giữa "đồng quy" và "không đồng quy" : cho một tam giác ABC và ba điểm D, E, F theo thứ tự trên ba cạnh BC, CA, AB và xác định bởi các tỉ số $\frac{\overrightarrow{DB}}{\overrightarrow{DC}} = k_1$, $\frac{\overrightarrow{EC}}{\overrightarrow{EA}} = k_2$; $\frac{\overrightarrow{FA}}{\overrightarrow{FB}} = k_3$.



Hình 1

Ta gọi L, M, N là các điểm $BE \times CF$, $AD \times CF$, $AD \times BE$ (h.1).

Trong bài toán trên, ta đã tính ra :

$$\frac{\overrightarrow{MA}}{\overrightarrow{MD}} = (1-k_1)\,k_3 \qquad (1)$$

$$\frac{\overrightarrow{NA}}{\overrightarrow{ND}} = \frac{k_1 - 1}{k_1 k_2} \qquad (2)$$

và thấy rằng nếu tỉ số k giữa hai tỉ số trên : $k = \frac{\overrightarrow{MA}}{\overrightarrow{MD}} : \frac{\overrightarrow{NA}}{\overrightarrow{ND}} = -k_1 k_2 k_3$ mà bằng 1 thì M và N trùng nhau, nghĩa là AD, BE, CF đồng quy còn nếu $k \neq 1$ thì $M \neq N$ và ba đường đó không đồng quy.

Hoán vị vòng quanh trong các bộ ba (ABC), (DEF), (LMN), $(1\ 2\ 3)$, dĩ nhiên, ta cũng có :

$$\frac{\overrightarrow{NB}}{\overrightarrow{NE}} : \frac{\overrightarrow{LB}}{\overrightarrow{LE}} = \frac{\overrightarrow{LC}}{\overrightarrow{LF}} : \frac{\overrightarrow{MC}}{\overrightarrow{MF}} = -k_1 k_2 k_3 = k$$

và từ đó, ta đã đi đến định nghĩa

Định nghĩa 1. Ba đường thẳng AD, BE, CF sẽ gọi là k – cắt nhau nếu ba tỉ số kép (tỉ số giữa hai tỉ số) nói trên bằng k. Và như vậy thì "đồng quy" là "1 – cắt nhau".

Trong bài này, ta sẽ xét tỉ số m giữa diện tích hai tam giác MNL và ABC bằng m và đưa ra định nghĩa sau :

Định nghĩa 2. Ba đường thẳng AD, BE, CF sẽ gọi là "cắt nhau – m" nếu tỉ số diện tích của hai tam giác MNL và ABC bằng m và như vậy thì "đồng quy" là "cắt nhau –0".

Để làm sáng tỏ hơn định nghĩa mới này, ta hãy tính m. Để viết cho gọn, ta luôn luôn có thể coi diện tích của tam giác ABC bằng 1 (bằng cách chọn đơn vị diện tích thích hợp). Như vậy thì m bằng diện tích của tam giác MNL. Sau đây, ta sẽ xét các tam giác có định hướng, nghĩa là có tính đến thứ tự các đỉnh của chúng. Nếu ta đi trên chu vi của một tam giác (theo thứ tự đã cho của các đỉnh) ngược chiều kim đồng hồ thì diện tích tam giác (có định hướng) đã cho là dương ; nếu thuận chiều kim đồng hồ thì diện tích là âm.

Để cho tiện, ta sẽ kí hiệu diện tích đại số của một tam giác bằng các chữ chỉ các đỉnh sắp thứ tự của nó. Như vậy, áp dụng định lí về tỉ lệ diện tích của hai tam giác có chiều cao bằng nhau (tỉ lệ đó bằng tỉ lệ hai đáy) hoặc có một góc chung (tỉ lệ này bằng tỉ lệ tích các cạnh của góc chung), ta viết ngay được các đẳng thức sau đây $(ABC = 1)$:

$$ABD = \frac{\overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{BC}} \quad ; \quad \frac{AFM}{ABD} = \frac{\overrightarrow{AF}}{\overrightarrow{AB}} \cdot \frac{\overrightarrow{AM}}{\overrightarrow{AD}} ;$$

$$\frac{m}{FMA} = \frac{\overrightarrow{ML}}{\overrightarrow{MF}} \cdot \frac{\overrightarrow{MN}}{\overrightarrow{MA}}$$

Nhân vế với vế ba đẳng thức trên, ta có :

$$m = \frac{\overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{BC}} \cdot \frac{\overrightarrow{AF}}{\overrightarrow{AB}} \cdot \frac{\overrightarrow{AM}}{\overrightarrow{AD}} \cdot \frac{\overrightarrow{ML}}{\overrightarrow{MF}} \cdot \frac{\overrightarrow{MN}}{\overrightarrow{MA}} \qquad (3)$$

Ta lần lượt tính 5 tỉ số ở vế sau của (3) :

1°) $$\frac{\overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{BC}} = \frac{\overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC}} = \frac{1}{1 - \frac{\overrightarrow{DC}}{\overrightarrow{DB}}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{k_1}} = \frac{k_1}{k_1 - 1} \qquad (4)$$

2°) $$\frac{\overrightarrow{AF}}{\overrightarrow{AB}} = \frac{\overrightarrow{AF}}{\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FB}} = \frac{1}{1 - \frac{\overrightarrow{FB}}{\overrightarrow{FA}}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{k_3}} = \frac{k_3}{k_3 - 1} \qquad (5)$$

3°) $\frac{\overrightarrow{AM}}{\overrightarrow{AD}} = \frac{\overrightarrow{AM}}{\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MD}} = \frac{1}{1 - \frac{\overrightarrow{MD}}{\overrightarrow{MA}}}$; vậy, theo (1), ta có :

$$\frac{\overrightarrow{AM}}{\overrightarrow{AD}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{(1-k_1)\,k_3}} = \frac{(1-k_1)\,k_3}{(1-k_1)\,k_3 - 1} \qquad (6)$$

4°) $\frac{\overrightarrow{ML}}{\overrightarrow{MF}} = \left(\frac{\overrightarrow{ML}}{\overrightarrow{MF}} : \frac{\overrightarrow{CL}}{\overrightarrow{CF}}\right) \cdot \frac{\overrightarrow{CL}}{\overrightarrow{CF}}$. Ở đây, ta chia cho $\frac{\overrightarrow{CF}}{\overrightarrow{CL}}$ rồi lại nhân lên với $\frac{\overrightarrow{CL}}{\overrightarrow{CF}}$ nhằm mục đích tận dụng tỉ số kép $\frac{\overrightarrow{ML}}{\overrightarrow{MF}} : \frac{\overrightarrow{CL}}{\overrightarrow{CF}}$ vì tỉ số kép này có liên quan với tỉ số kép $\frac{\overrightarrow{LC}}{\overrightarrow{LF}} : \frac{\overrightarrow{MC}}{\overrightarrow{MF}} = k$; quả vậy

$$\frac{\overrightarrow{ML}}{\overrightarrow{MF}} : \frac{\overrightarrow{CL}}{\overrightarrow{CF}}$$
$$= \frac{\overrightarrow{CF}}{\overrightarrow{CL}} \cdot \frac{\overrightarrow{ME}}{\overrightarrow{MF}} = \frac{\overrightarrow{CL}+\overrightarrow{LF}}{\overrightarrow{CL}} \cdot \frac{\overrightarrow{MF}+\overrightarrow{FL}}{\overrightarrow{MF}} =$$
$$= \left(1 + \frac{\overrightarrow{LF}}{\overrightarrow{CL}}\right) \cdot \left(1 + \frac{\overrightarrow{FL}}{\overrightarrow{MF}}\right) =$$
$$= 1 + \frac{\overrightarrow{LF}}{\overrightarrow{CL}} + \frac{\overrightarrow{FL}}{\overrightarrow{MF}} + \frac{\overrightarrow{LF}}{\overrightarrow{CL}} \cdot \frac{\overrightarrow{FL}}{\overrightarrow{MF}}$$
$$= 1 + \frac{\overrightarrow{LF}}{\overrightarrow{CL}} \cdot \frac{\overrightarrow{MF}}{\overrightarrow{MF}} + \frac{\overrightarrow{FL}}{\overrightarrow{MF}} \cdot \frac{\overrightarrow{CL}}{\overrightarrow{CL}} + \frac{\overrightarrow{LF}}{\overrightarrow{CL}} \cdot \frac{\overrightarrow{FL}}{\overrightarrow{MF}} =$$
$$= 1 + \frac{\overrightarrow{LF}}{\overrightarrow{CL}} \cdot \frac{\overrightarrow{MF}+\overrightarrow{FL}+\overrightarrow{LC}}{\overrightarrow{MF}} =$$
$$= 1 + \frac{\overrightarrow{LF}}{\overrightarrow{CL}} + \frac{\overrightarrow{FL}}{\overrightarrow{MF}} = 1 = \frac{k-1}{k}$$

Còn phải tính $\frac{\overrightarrow{CL}}{\overrightarrow{CF}}$; $\frac{\overrightarrow{CL}}{\overrightarrow{CF}} = \frac{\overrightarrow{CL}}{\overrightarrow{CL}+\overrightarrow{LF}} = \frac{1}{1 - \frac{\overrightarrow{LF}}{\overrightarrow{LC}}}$; thực hiện hai lần hoán vị vòng quanh trong các bộ ba *(ABC), (DEF), (LMN)*, (1 2 3), từ (1) suy ra $\frac{\overrightarrow{LC}}{\overrightarrow{LF}} = (1-k_3)k_2$; do đó :

$$\frac{\overrightarrow{CL}}{\overrightarrow{CF}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{(1-k_3)k_2}} = \frac{(1-k_3)k_2}{(1-k_3)k_2 - 1}$$

Vậy $$\frac{\overrightarrow{MF}}{\overrightarrow{ML}} = \frac{k-1}{k} \cdot \frac{(1-k_3)k_2}{(1-k_3)k_2} \qquad (7)$$

5°) Tương tự như ở phần 4°) ta tính được

$$\frac{\overrightarrow{MN}}{\overrightarrow{MA}} = \frac{k-1}{k} \cdot \frac{(-k_1k_2)}{k_1(1-k_2)-1} \qquad (8)$$

Cuối cùng, ta được :

$$m = \frac{k_1}{k_1-1} \cdot \frac{k_3}{k_3-1} \cdot \frac{(1-k_1)k_3}{(1-k_1)k_3-1} \times$$
$$\times \frac{(1-k_3)k_2}{(1-k_3)k_2-1} \cdot \frac{(-k_1k_2)}{k_1(1-k_2)-1} \cdot \frac{(k-1)^2}{k^2}$$
$$= \frac{-(k_1k_2k_3)(k_1k_2k_3)}{(1-k_1)(1-k_3)[(1-k_1)k_3-1]} \times$$
$$\times \frac{(1-k_1)(1-k_3)(k-1)^2}{[(1-k_3)k_2-1][k_1(1-k_2)-1]k^2}$$

hay :

$$m = \frac{(1+k_1k_2k_3)^2}{[1+k_1(k_2-1)][1+k_2(k_3-1)]} \times \frac{1}{[1+k_3(k_1-1)]}$$

Ta thấy ngay : $m = 0 \leftrightarrow k = 1$

Xét mẫu số, ta thấy rằng nếu một trong ba thừa số triệt tiêu thì $m = \infty$; ta dự đoán, khi đó hai trong ba đường *AD, BE, CF* song song với nhau. Quả vậy, giả sử $k_1 + \frac{1}{(k_2-1)} = 0$ tức $k_1 = \frac{1}{1-k_2}$; để *AD* song song với *BE* thì cần và đủ là (h. 2) :

$$\frac{\overrightarrow{DB}}{\overrightarrow{DC}} = \frac{\overrightarrow{AE}}{\overrightarrow{AC}} = \frac{\overrightarrow{AE}}{\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EC}} = \frac{1}{1 - \frac{\overrightarrow{EC}}{\overrightarrow{EA}}} \text{ tức}$$

$$k_1 = \frac{1}{1-k_2} \qquad (9)$$

Tương tự như vậy, nếu *BE // CF* thì

$$k_2 = \frac{1}{1-k_3} \qquad (10)$$

Nếu (9) và (10) đều thỏa mãn thì *AD // BE // CF* tức là từ (9) và (10) rút ra $k_3 = \frac{1}{1-k_1}$ (11), điều mà ta có thể thấy ngay khi rút k_3 từ (10) rồi thay k_2 theo (9). Khi đó $k_1k_2k_3 = = k_1\left(1 - \frac{1}{k_1}\right)\left(\frac{1}{1-k_1}\right) = -1$, vậy $m = \frac{0}{0}$ tức là diện tích tam giác *MNL* vô định (*M, N, L* đều xa vô tận).

Tìm chỗ sai

Trong Bộ đề ôn tập thi vào lớp 10 Trường PHHT H – A có bài toán nhỏ sau : *Cho phương trình bậc hai $x^2 - (2k+1)x + k^2 + 2 = 0$ ($k \in R$ là tham số). Hãy xác định k để $x_1^2 + x_2^2$ nhỏ nhất. (x_1, x_2 là nghiệm của phương trình).*

Đáp án : Theo định lí Viet :

$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$

$= (2k+1)^2 - 2(k^2+2)$

$= +2k^2 + 4k - 3 = A$

Xem $A = 2(k+1)^2 - 5 \geqslant -5 \Rightarrow A$ nhỏ nhất $= -5$ khi $k = -1$.

Các bạn thử tìm xem đáp án đó sai ở đâu ? Vì sao ?

PHẠM HÙNG

GIẢI BÀI kì trước

Bài T1/233 : *Cho dãy số nguyên $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ thỏa mãn*

$$a_{a+2} + a_{n-1} = 2(a_{n+1} + a_n) \qquad (1)$$

Chứng tỏ rằng tồn tại số nguyên M không phụ thuộc vào n sao cho $M + 4a_{n+1}a_n$ là số chính phương $\forall n \geqslant 0$

Lời giải : Đặt $u_n = a_{n+2} - a_{n+1} - a_n$

Từ điều kiện (1) suy ra $u_n = u_{n-1} + 2a_n$

$$u_n^2 = (u_{n-1} + 2an)^2 = u_{n+1}^2 + 4u_{n-1}a_n + 4a_n^2$$
$$= u_{n-1}^2 + 4(a_{n+1} - a_n - a_{n-1})\,a_n + 4a_n^2$$
$$= u_{n-1}^2 + 4a_{n+1}a_n - 4a_n a_{n-1}$$
$$u_n^2 - 4a_{n+1}a_n = u_{n-1}^2 - 4a_n a_{n-1}$$

Vậy $u_n^2 - 4a_{n+1}a_n$ là hằng số (không phụ thuộc n). Gọi hằng số đó là M. Khi đó

$$M + 4a_{n+1}a_n = u_n^2\ \forall n \geqslant 0 \text{ (đpcm)}$$

Nhận xét : Các bạn sau đây có lời giải tốt : *Nguyễn Hoàng Quân* $9T_2$ **Vĩnh Long**, *Trần Khoa Văn* 9A **Nghệ An**, *Nguyễn Trọng Kiên* 9T **Nam Định**, *Nguyễn Đình Quân* 9 **Nghệ An**, *Nguyễn Huy Vũ* 9A **Ngệ An** *Hoàng Tùng* 9T **Bắc Ninh**, *Ngô Anh Viên* 9A **Bắc Giang**, *Trần Tất Đạt* $9A_1$ **Hà Nội**, *Nguyễn Kim Thắng* 9 Trần Phú **Hải Phòng.** Số bạn giải bài này không nhiều.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T2/233. *Chứng minh rằng nếu $(a+c)(a+b+c) < 0$ thì*

$$(b-c)^2 > 4a\,(a+b+c)$$

Lời giải : (của *Nguyễn Thị Xuân Nương*, 9 Anh văn, chuyên Nguyễn Nghiêm, Đức Phổ, Quảng Ngãi).

– Nếu $a = 0$ thì từ $c(b+c) < 0$ suy ra $b \neq c$ và có điều phải chứng minh.

– Nếu $a \neq 0$, xét phương trình

$$f(x) = ax^2 + (b-c)\,x + a + b + c = 0$$

Ta có $f(0) = a + b + c$

$$f(-1) = 2\,(a+c)$$

và $f(0)f(-1) = 2\,(a+c)\,(a+b+c) < 0$ (theo giả thiết)

Nên phương trình $f(x) = 0$ phải có hai nghiệm phân biệt

Do đó $\Delta = (b-c)^2 - 4a\,(a+b+c) > 0$ đpcm.

Nhận xét. 1. Đa số các bạn biện luận trực tiếp từ điều kiện

$$(a+c)\,(a+b+c) < 0$$

suy ra $(b-c)^2 > 4a\,(a+b+c)$ hơi dài dòng.

2. Các bạn sau đây cũng có lời giải tốt : **Hà Nội :** *Phạm Hải Trung* 10A, Chuyên Toán, ĐHKHTN. **Ninh Bình** : *Phạm Tuấn Ngọc* 9T, NK Trương Hán Siêu, thị xã. **Thanh Hóa :** *Trần Hoàng Thắng*, 9T, Lam Sơn. **Nghệ An :** *Phạm Tuấn Quang*, 8T, NK Vinh. **Hà Tĩnh :** *Đào Xuân Hoàng*, 9T, NK Hà Tĩnh. **Quảng Bình :** *Đặng Thị Tố Như*, 9T, NK Hải Đình. **Quảng Ngãi :** *Lê Quang Lợi, Huỳnh Minh Sơn*, 9T, Chuyên Nguyễn Nghiêm, Đức Phổ. **Quy Nhơn :** *Nguyễn Quốc Hưng*, 9B, Đống Đa, **Minh Hải :** *Trần Thế Minh*, 8A, Chuyên Bạc Liêu.

TỐ NGUYÊN

Bài T3/233 : *Các số nguyên không âm a, b, c, d thỏa mãn điều kiện :*

$$\begin{cases} a^2 + 2b^2 + 3c^2 + 4d^2 = 36 & (1) \\ 2a^2 + b^2 - 2d^2 = 6 & (2) \end{cases}$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của $p = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$

Lời giải : (của nhiều bạn) :

Cộng từng vế của (1) và (2) ta có :

$$3(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) = 42 + d^2$$

$\Rightarrow 3p \geqslant 42 \Rightarrow p \geqslant 14$. Ta thấy $p = 14 \Leftrightarrow d = 0$. Với $d = 0$ thì hệ đã cho trở thành :

$$\begin{cases} a^2 + 2b^2 + 3c^2 = 36 & (1') \\ 2a^2 + b^2 = 6 & (2') \end{cases}$$

Từ (2') $\Rightarrow \begin{cases} b \text{ chẵn} \\ b < 3 \end{cases} \Rightarrow b = 0$ hoặc $b = 2$ (vì b không âm)

Nếu $b = 0$ thì $a^2 = 3$ không cho giá trị của a

Nếu $b = 2$ thì $a^2 = 1 \Leftrightarrow a = 1$ (a không âm).

Từ đó dễ có : $c = 3$.

Vậy p nhỏ nhất bằng 14 khi $(a, b, c, d) = (1, 2, 3, 0)$.

Nhận xét. 1) Có 295 bạn gửi lời giải về, trong đó có 16 bạn giải sai vì sau khi được $p \geqslant 14$ lại kết luận ngay p nhỏ nhất là $14 \Leftrightarrow d = 0$ (mà không chỉ ra các giá trị a, b, c). (6)

2) Có 8 bạn : *Mai Thị Thu Sánh*, 8A, Nga Hải, Nga Sơn, **Thanh Hóa** ; *Nguyễn Thị Xuân Nương*, 9 Anh, Chuyên Nguyễn Nghiêm, Đức Phổ, **Quảng Ngãi :** *Hoàng Tiến*, 9 Lý, Năng khiếu Hải Hậu, **Nam Định** ; *Võ Bá Thi*, 9A, PTTH **Bến Tre** ; *Phạm Tuấn Quang*, 8 Toán, Năng khiếu Vinh, **Nghệ An** ; *Võ Thị Bạch Yến*, 9T, Lê Quý Đôn, Nha Trang, **Khánh Hòa** ; *Nguyễn Minh Kiên*, $8A_1$, Chuyên Mê Linh, **Vĩnh Phúc** (và một bạn không ghi tên) đã chứng minh : "chỉ có duy nhất một bộ số : $a =$

1 ; $b = 2$; $c = 3$; $d = 0$ thỏa mãn giả thiết nên p chỉ nhận một giá trị duy nhất là 14".

Bạn *Mai Thị Thu Sánh* còn bình luận khá hóm hỉnh : "Với điều kiện của đầu bài, p chỉ nhận một giá trị duy nhất bằng 14. Do đó ý nghĩa của việc "tìm giá trị nhỏ nhất của p trở nên không còn "mãnh liệt" ! Xin hoan nghênh ! Bạn đọc nhỏ tuổi nhất tham gia giải và giải đúng là *Trịnh Tuấn Anh*, lớp 4G, Tiểu học Lam sơn II, **Thanh Hóa.** Thật đáng khen !

LÊ THỐNG NHẤT

Bài T4/233 : *Cho ΔABC nhọn. Gọi (0,1) là đường tròn tâm), bán kính bằng 1 ngoại tiếp ΔABC.*

Chứng minh rằng $a+b+c \geqslant abc$.

Dấu "=" xảy ra khi nào ?

Lời giải :

Cách 1 : Từ $S = \dfrac{abc}{4R}$ và giả thiết suy ra $abc = 4S$(1) Mặt khác theo công thức Hêrong ta có :

$$S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c) = p\sqrt{(p-a)(p-b)} \times$$
$$\times \sqrt{(p-b)(p-c)} \cdot \sqrt{(p-a)(p-c)}$$
$$\leqslant p \cdot \frac{p-a+p-b}{2} \cdot \frac{p-b+p-c}{2} \cdot \frac{p-a+p-c}{2} =$$
$$= p \cdot \frac{abc}{8} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra :

$$S^2 \leqslant p \cdot \frac{S}{2}$$
$$\Rightarrow 4S \leqslant a+b+c$$
$$\Rightarrow abc \leqslant a+b+c$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$ tức ΔABC đều.

Cách 2 :

Gọi R, r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp ΔABC và d là khoảng cách giữa 2 tâm. Theo hệ thức Ơle :

$$R^2 - d^2 = 2Rr$$
$$\Rightarrow R^2 \geqslant 2Rr \Rightarrow r \leqslant \frac{1}{2} \text{ (vì } R = 1)$$

Mặt khác $S = \dfrac{(a+b+c)r}{2} = \dfrac{abc}{4R}$

$$\Rightarrow a+b+c = \frac{abc}{2Rr} \geqslant \frac{abc}{2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}} = abc \text{ (đpcm)}$$

Dấu "=" xảy ra $\rightleftarrows$ ΔABC đều

Cách 3 :

Sử dụng công thức $R \geqslant 2r$ mà $R = 1 \Rightarrow r \leqslant \dfrac{1}{2}$.

Mà $r = \dfrac{S}{p} \Rightarrow 2S \leqslant p$. Do $S = \dfrac{abc}{4R} = \dfrac{abc}{4}$ suy tiếp ra $abc \leqslant a+b+c$

Nhận xét. 1) Một số bạn đã giải đúng bài toán tổng quát hơn.

2) Giải tốt bài này có các bạn :

Quảng Ninh : *Nguyễn Thị Thu Hà* , 9A Trọng điểm Cẩm Phả, **Tuyên Quang :** *Nguyễn Cảnh toàn*, 9A NK Lê Quý Đôn, **Bắc Giang :** *Ngô Anh Viên*, 9A NL Lạng Giang, *Đào Ngọc Minh*, 9T NK Yên Dũng ; **Phú Thọ :** *Đỗ Thị Tuyết Minh*, 7A, *Đặng Thu Hương*, 9T Chuyên cấp II, **Vĩnh Phúc :** *Cù Quốc Thắng*, 9T chuyên Tam Đảo ; **Hòa Bình :** *Đỗ Thu Hà*, 9a, Hữu Nghị ; **Bắc Ninh :** *Nguyễn Khắc Hòa*, *Trương Thị Thao*, 9, KH Tiên Sơn ;**Hà Tây :** *Nguyễn Mạnh Thường*, 8A chuyên Thạch Thất ; **Hưng Yên :** *Vũ Trụ*, PTTH Tiên Lữ ; **Hà Nội :** *Vũ Đình Hoàng*, 9A3, Giảng Võ, *Trần Tất Đạt*, 9A$_1$ Chu Văn An, *Lê Hồng Quang* 9A$_2$ Nguyễn Trường Tộ ; **Nam Định :** *Nguyễn Công Tuấn, Trần Đức Thịnh* 8T, *Nguyễn Văn Trung, Hà Thanh Tuấn, Bùi Trọng Kiều*, 9T Trần Đăng Ninh, *Vũ Xuân Dũng*, 9 Hóa NK Xuân Thủy, *Trần Quang vinh* 8CT, Nguyễn Thế Vinh 9CT Ý Yên, *Thu Thế Sơn*, Lý 9 NK Hải Hậu ; **Thanh Hóa :** *Trần Hoàng Thắng*, 9T Lam Sơn, *Đào Thị Bích Giang*, 9T Nga Sơn, *Tạ Văn Nghiêm*, 9T NK Bỉm Sơn ; **Nghệ An :** *Lê Việt Hòa*, 9A CII Đồng Văn, Thanh Chương, *Nguyễn Đình Xuân*, 9 toán A, Phan Bội Châu, *Trần Khoa Văn*, 9A NK Quỳnh Lưu ; **Hà Tĩnh :** *Đặng Duy Điền hải* ; **Đà Nẵng :** *Nguyễn Lương Huy*, 9/1 Nguyễn Khuyến, *Nguyễn Duy Lập*, Lê Quý Đôn ; **Quảng Ngãi :** *Huỳnh Minh sơn*, 9T, *Nguyễn Thị Xuân Nương*, 9 Anh Văn, Chuyên Nguyễn Nghiêm, Đức Phổ ; **Khánh Hòa :** *Đỗ Thị Di Thiện*, 9T Lê Quý Đôn , Nha Trang ; **Đắc Lắc :** *Nguyễn Thanh Nhã*, 9T, *Hoàng Hải Thủy, Tăng Thị Hà Yên, Dương Thành An*, 8T Nguyễn Du, Buôn Ma Thuột **Bà Rịa – Vũng Tàu :** *Trần Giang*, 7A/2 Nguyễn An Ninh, **HCM :** *Nguyễn Thị Thiên Thanh, Chung Nhân Phú*, 9T1 Nguyễn anh Ninh, Hóc Môn ; **Cần Thơ :** *An Võ Đức Anh*, 9CT Lý Tự Trọng ; **An Giang :** *Hoàng Thanh Lâm*, 9T Thoại Ngọc Hầu, Long Xuyên ; **Vĩnh Long :** *Nguyễn Hoàng Quân*, 9T2 Nguyễn Bỉnh Khiêm.

VŨ KIM THỦY

Bài T5/233. *Cho tam giác vuông ABC ($\hat{A} = 90^o$), đường cao AH, trung tuyến BM và phân giác CD đồng quy tại một điểm. Chứng minh rằng :*

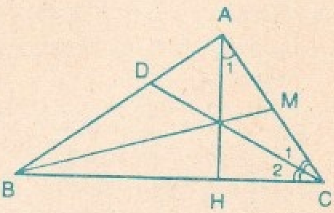
$\sin\hat{B} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$. *Từ đó suy ra cách dựng một tam giác có tính chất nêu trên.*

Lời giải. Gọi O là giao điểm AH, BM, CD, áp dụng định lí Céva ta có : $\dfrac{AD}{DB} \cdot \dfrac{BH}{HC} \cdot \dfrac{CM}{MA} = 1$

(1). Do $MA = MC$ và $\frac{AD}{DB} = \frac{AC}{CB}$ (vì $\widehat{C}_1 = \widehat{C}_2$) nên thế vào (1), ta có $\frac{AC}{CB} \cdot \frac{BH}{HC} = 1$, hay $AC.BH = CB.HC$ (2). Mặt khác, $CB.HC = AC^2$

(vì $\widehat{A} = 90^o$, $\widehat{h} = 90^o$) nên $AC^2 = AC.BH$, suy ra $AC = BH$.

Thế vào (2) rồi biến đổi đơn giản được phương trình bậc hai đối với HC: $HC^2 + BH \times HC - BH^2 = 0$ (3). Tính ra $HC = 0{,}5 \times (\sqrt{5} - 1)\, BH$. Hơn nữa, $\widehat{B} = \widehat{A}_1$ (vì cùng phụ $\widehat{C}$) nên $\sin \widehat{B} = \sin \widehat{A}_1 = HC : CA = HC : BH = 0{,}5\,(\sqrt{5} - 1)$.



Đảo lại, xét $\Delta A'B'C'$ với $\widehat{A'} = 90^o$ đồng thời $\sin B' = 0{,}5\,(\sqrt{5} - 1)$ thì $\Delta A'B'C'$ đồng dạng với ΔABC. Do đó, khi kẻ đường cao $A'H'$, trung tuyến $B'M'$, phân giác $C'D'$, ta có các tỉ số tương ứng bằng nhau : $A'D' : D'B' = AD : DB$; $B'H' : H'C' = BH : HC$; $C'M' : M'A' = CM : MA$.

Đem thế vào (1), ta có : $\frac{A'D'}{D'B'} \cdot \frac{B'H'}{H'C'} \cdot \frac{C'M'}{M'C'} = 1$.

Áp dụng định lí Céva đảo, ta có ba đường thẳng $A'H'$, $B'M'$, $C'D'$ đồng quy. Do đó, bằng phương pháp đại số, ta dễ dàng dựng tam giác ABC thỏa mãn yêu cầu của bài toán như sau : dựng đoạn $CD = a\sqrt{5}$ (cạnh huyền của Δ vuông có các cạnh góc vuông a, $2a$ với a là một đoạn tùy ý) ; điểm E nằm giữa B, D sao cho $DE = a$; trung điểm A của CE ; đường thẳng Ax vuông góc với CD ; điểm B một trong các giao điểm Ax với đường tròn $(C ; a)$.

Nhận xét. Có 51 bài giải, tất cả đều giải đúng phần chứng minh (thuận), nhưng phần dựng thì đa số có thiếu sót không nêu chứng minh. Lời giải tốt gồm có : **Hà Nội :** *Đỗ Quang Anh* 9D PTCS Quang Trung ; *Trần Tất Đạt* 9A, Chu Văn An. **Hưng Yên :** *Vũ Trụ* PTTH Tiên Lữ. **Hòa Bình :** *Đỗ Thu Hà* 9A Hữu Nghị. **Bắc Giang :** *Ngô Anh Viên* 9A Năng Khiếu Lạng Giang. **Tp Hồ Chí Minh :** *Chung Nhân Phú* 9T1 *Nguyễn An Khương*, Học Môn. **An Giang :** *Hoàng Thanh Lâm* 9' PTTH Chuyên Thoại Ngọc Hầu.

ĐẶNG VIỄN

Bài T6/233 *Cho m là số thực dương. Với mỗi n nguyên dương, dãy số thực $\{a_{n,i}\}_{i=0}^{n}$ được xác định như sau :*

$$a_{n,0} = 1 \ , \ a_{n,i+1} = a_{n,i}\left(1 + \frac{1}{m.n} - a_{n,i}\right)$$

với $i = 0, 1, \dots, n-1$.

1) Chứng minh rằng nếu $m \leq 1$ thì $a_{n,n} > \sqrt{n} + i$ với mọi $n \in Z^+$.

2) Giả sử $n > 1$. Chứng minh rằng

a) $a_{n,n} < \frac{m}{m-1}$ với mọi $n \in Z^+$

b) $\lim\limits_{n \to \infty} a_{n,n} = \frac{m}{m-1}$

Lời giải (của đa số các bạn). Nhận xét rằng

$$1 = a_{n,0} < a_{n,1} < \dots < a_{n,n} \qquad (1)$$

và $$\frac{1}{a_{n,i+1}} = \frac{1}{a_{n,i}} - \frac{1}{a_{n,i+m.n}}$$

Suy ra

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{a_{n,i+1}} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{a_{n,i}} - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{a_{n,i+m.n}},$$

hay

$$\frac{1}{a_{n,n}} = 1 - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{a_{n,i+m.n}} \qquad (2)$$

1) Với $0 < m \leq 1$, từ (1) và (2) suy ra

$$\frac{1}{a_{n,m}} < 1 - \frac{n}{a_{n,n} + n} = \frac{a_{n,n}}{a_{n,n} + n} < \frac{a_{n,n}}{n+1},$$

hay $a_{n,n} > \sqrt{n+1}$

2) Với $m > 1$, từ (1) và (2), thì

$$\frac{1}{a_{n,n}} < 1 - \frac{n}{1 + m.n} > 1 - \frac{1}{m}$$

$$\Rightarrow a_{n,n} < \frac{m}{m-1} \qquad (3)$$

Mặc khác, cũng từ (1) và (2), thì :

$$\frac{1}{a_{n,n}} < 1 - \frac{n}{\frac{m}{m-1} + m.n}.$$

Vậy $$\frac{m}{m-1} < \frac{1}{a_{n,n}} < 1 - \frac{n}{\frac{m}{m-1} + n.m}$$

Chuyển qua giới hạn ($n \to \infty$) và sử dụng công thức $$\lim_{n \to +\infty} \frac{n}{\frac{m}{m-1} + n.m} = \frac{1}{m},$$

ta được $$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{a_{n,n}} = 1 - \frac{1}{m},$$

hay $$\lim_{n \to \infty} a_{n,n} = \frac{m}{m-1}, \text{ đpcm}$$

Nhận xét. Các bạn sau đây có lời giải tốt *Nguyễn Trung Kiên* (Lệ Thủy, **Quảng Bình**), *Trần Chí Hòa, Trương Vĩnh Lâm, Phạm Hồng Thái* (NK, **Quảng Bình**), *Nguyễn Khắc Hòa* (**Bắc Ninh**), *Hoàng Xuân Tuyến, Nguyễn Hương, Nguyễn Văn Quang, Lê Văn*

Lung, Trịnh Hữu Trung (**Thanh Hóa**), *Hồ Lê Viết Trung, Nguyễn Duy Lập, Phan Anh Huy* (LQĐ, **Đà Nẵng**), *Ngô Xuân Hà* (**Quảng Ngãi**), *Đặng Đức Hạnh, Hồ Sỹ Ngọc* (**Nghệ Anh**), *Nguyễn Đức Mạnh, Phạm Quang Vinh* (**Hà Nội**), *Lê Anh Minh* (**TP HCM**), *Hoàng Sỹ Hùng* (**Bắc Thái**), *Đinh Trung Hoàng* (**Huế**), *Hà Duy Hưng* (**Hải Phòng**)

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T7/233 *Cho đa thức :*

$$f(x) = x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 1\,.$$

Hãy tính tổng $S = \sum_{i=1}^{n} \frac{2x_i^2+1}{(x_i^2-1)^2}$ *ở đó n là số nghiệm và* x_i *là nghiệm của đa thức f(x).*

Lời giải *Cách 1* (của bạn *Nguyễn Đình Trung* 12a, Bỉm Sơn **Thanh Hóa**).

Ta có $f(x) = 0 \leftrightarrow$

$\leftrightarrow (x^2+2x)^2 - 6(x^2+2x) + 9 = 8 \leftrightarrow$

$\leftrightarrow (x^2+2x-3)^2 = 8 \leftrightarrow$

$$\leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x^2+2x-3+\sqrt{8} = 0 & (1)\\ x^2+2x-3-\sqrt{8} = 0 & (2)\end{array}\right.$$

Gọi x_1, x_2 là nghiệm của (1) và x_3, x_4 là nghiệm của (2). Khi đó x_1, x_2, x_3, x_4 là nghiệm của $f(x)$.

$$\text{Ta tính } S_1 = \frac{2x_1^2+1}{(x_1^2-1)^2} + \frac{2x_2^2+1}{(x_2^1-1)^2} =$$

$$= \frac{2x_1^2+1}{(4-\sqrt{8})(x_1-1)^2} + \frac{2x_2^2+1}{(4-\sqrt{8})(x_2-1)^2}$$

(vì $(x_1+1)^2 = (x_2+1)^2 = 4-\sqrt{8}$)

$$= \frac{1}{4-\sqrt{8}}\left[\frac{(2x_1^2+1)(x_2-1)^2 + (2x_2^2+1)(x_1-1)^2}{[(x_1-1)(x_1-1)]^2}\right]$$

Dùng định lí Viet dễ tìm được giá trị của biểu thức trong móc vuông.

$$S_1 = \frac{1}{4-\sqrt{8}}\,\frac{(80-22\sqrt{8})}{8}$$

$$\text{Tương tự } S_2 = \frac{1}{4+\sqrt{8}}\,\frac{((80+22\sqrt{8})}{8}\,.$$

$$\text{Từ đó } S = S_1 + S_2 = \frac{9}{2}\,.$$

Cách 2. (Của bạn *Nguyễn Minh Phương* 11A Hùng Vương **Phú Thọ**)

Dễ thấy

$f(-4)f(-3) < 0$, $f(-3)f(-1) < 0$

$f(-1)f(1) <$ và $f(1)f(2) < 0$. Vậy $f(x)$ có 4 nghiệm x_1, x_2, x_3, x_4

$$\text{Khi đó } S = \sum_{i=1}^{4} \frac{2x_i^2+1}{(x_i^2-1)^2} = \sum_{i=1}^{4} \frac{2x_i^2+1}{12x_i - 4x_i^3}$$

$$= \sum_{i=1}^{4}\left[-\frac{7}{24}\left(\frac{1}{x_i-\sqrt{3}} + \frac{1}{x_i+\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{12x_i}\right)$$

$$= -\frac{7}{24}\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{x_i-\sqrt{3}} - \frac{7}{24}\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{x_i+\sqrt{3}} + \frac{1}{12}\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{x_i}$$

Dễ dàng chứng minh được

$$\forall a \neq x_i : \sum_{i=1}^{4}\frac{1}{x_i-a} = -\frac{f'(a)}{f(a)}$$

Do đó :

$$S = -\frac{7}{24}\frac{f'(\sqrt{3})}{f(\sqrt{3})} + \frac{7}{24}\frac{f'(-\sqrt{3})}{f(-\sqrt{3})} + \frac{1}{12}\frac{f'(0)}{f(0)} = \frac{9}{2}$$

Nhận xét : Bài này được nhiều bạn tham gia giải, có cả các bạn ở PTCS.

Đa số các bạn giải theo cách 2 (sử dụng định lí Viét). Có 8 bạn cho đáp số sai. Các bạn sau đây có lời giải tốt : *Hồ Sỹ Ngọc* 10T Vinh, *Trần Huỳnh Thế Khanh* 12A **Trà Vinh**, *Lê Trọng Vinh* 11 **Buôn Mê Thuột**, *Nguyễn Phan Thành* 12T, Tiền Giang, *Nguyễn Thu Thủy* 11 **Nam Định**. Lê Đức Thịnh 12A, **Thanh Hóa**, *Vũ Duy Tuấn* 11A **Bắc Giang**, *Phan Anh Huy* 12A, Lê Quý Đôn Đà Nẵng, *Vũ Tuấn Anh* 10T **Thái Nguyên**, *Trương Vĩnh Lân* 11CT **Quảng Bình** *Đặng Đức Hạnh* 11T **Nghệ An**.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T8/233 : *Cho ba số thực a, b, c thỏa mãn điều kiện :* $a^2+b^2+c^2 = 2$*. Chứng minh rằng :*

1) $|a+b+c-abc| \leq 2$

2) $|a^3+b^3+c^3-3abc| \leq 2\sqrt{2}$

Lời giải : 1) Ta có : $2 = a^2+b^2+c^2 \geq$ $\geq a^2+2bc \geq 2bc \Rightarrow bc \leq 1$. Vì thế :

$(a+b+c-abc)^2 = [a(1-bc)+(b+c)]^2 \leq$

$\leq [a^2+(b+c)^2][(1+(1-bc)^2] =$

$2(1+bc)[1+(1-bc)^2] = 2(1+bc) +$

$+2(1-bc)(1-b^2c^2) = 4 - 2b^2c^2(1-bc) \leq 4.$

Suy ra : $|a+b+c-abc| \leq 2$ (đpcm). Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi trong 3 số a, b, c có một số bằng 0, hai số còn lại bằng nhau và bằng 1 hay -1.

2) Ta có : $(a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2) = 6$ $\Rightarrow \frac{1}{2}(a+b+c)^2 \leq 3$. Vì thế : $(a^3+b^3+c^3-3abc)^2 =$

$= [(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)]^2$

$$= (a+b+c)^2\left[2 - \frac{(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)}{2}\right]^2 =$$

$$= (a+b+c)^2\left[3 - \frac{1}{2}(a+b+c)^2\right]^2 =$$

$$= (a+b+c)^2\left[3 - \frac{1}{2}(a+b+c)^2\right] \times$$

$\times \left[3 - \frac{1}{2}(a+b+c)^2\right] \leqslant \left(\frac{6}{3}\right)^3 = 8$. Suy ra : $|a^3 + b^3 + c^3 - 3abc| \leqslant 2\sqrt{2}$ (đpcm). Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi : $\begin{cases} |a+b+c| = \sqrt{2} \\ a^2 + b^2 + c^2 = 2 \end{cases}$

Nhận xét. Có rất nhiều bạn gửi lời giải cho bài toán và tất cả các bạn đều cho lời giải đúng. Tuy nhiên không ít bạn cho lời giải quá rườm rà.

NGUYỄN KHẮC MINH

Bài T9/233. *Gọi a, b, c là độ dài các cạnh của một tam giác có diện tích S ; các đường cao và trung tuyến tương ứng là h_a, h_b, h_c và m_a, m_b, m_c. Chứng minh rằng :*

1) $a + b + c \geqslant 2\sqrt[4]{27}\sqrt{S}$.

2) $h_a m_b^4 + h_b m_c^4 + h_c m_a^4 \geqslant 9\sqrt[4]{3}\, S\sqrt[2]{S}$.

Lời giải. (của nhiều bạn) 1) Đặt $2p = a + b + c$ Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho ba số dương, ta được :

$$(p-a)(p-b)(p-c) \leqslant \frac{p^3}{27}$$

Suy ra :

$$S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c) \leqslant \frac{p^4}{27} \Rightarrow$$

$p \geqslant \sqrt[4]{27}\sqrt{S}$, hay là :

$$a + b + c \geqslant 2\sqrt[4]{27}\sqrt{S}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $p - a = p - b = p - c \Leftrightarrow a = b = c$ (Tam giác là đều)

2) Ta có : $4m_a^2 + 2b^2 + 2c^2 - a^2 \geqslant (b+c)^2 - a^2 = 4p(p-a) \Rightarrow m_a^2 \geqslant p(p-a)$

Tương tự : $m_b^2 \geqslant p(p-b)$ và $m_c^2 \geqslant p(p-c)$

Suy ra :

$$m_a^2 m_b^2 m_c^2 \geqslant p^3(p-a)(p-b)(p-c) = p^2S^2 \quad (1)$$

Lại có :

$$h_a h_b h_c = \frac{2S}{a}\frac{2S}{b}\frac{2S}{c} = \frac{8S^3}{abc} \geqslant \frac{27S^3}{p^3} \quad (2)$$

(vì $abc \leqslant \frac{8p^3}{27}$ theo B.Đ.T. Côsi)

Từ đó ta được :

$$h_a m_b^4 + h_b m_c^4 + h_c m_a^4 \geqslant 3\sqrt[3]{h_a h_b h_c m_a^4 m_b^4 m_c^4} \geqslant$$

$$\geqslant 9\sqrt[3]{pS^7} \quad (3)$$

Lại vì $p \geqslant \sqrt[4]{27}\sqrt{S}$ theo 1°), thay vào (2) ta được $h_a m_b^4 + h_b m_c^4 + h_c m_a^4 \geqslant 9\sqrt[4]{3}\, S\sqrt[2]{S}$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi dấu đẳng thức đồng thời xảy ra ở (1), (2), (3) và (4), và do đó xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$, tam giác là đều.

Nhận xét. 1°) Khá đông các bạn tham gia giải bài toán này, trong đó nhiều bạn lớp 9, có cả một số bạn lớp 8 PTCS.

2°) Vẫn còn một số bạn không chỉ ra khi nào dấu đẳng thức đạt được.

3°) Bạn *Bùi Mạnh Hùng*, lớp 10A ĐHKHTN – ĐHQG **Hà Nội** đã phát biểu và giải đúng bài toán tổng quát hơn như sau :

Chứng minh rằng :

1°) $a^n + b^n + c^n \geqslant \frac{2^n(\sqrt{S})^n}{\sqrt[4]{3^{n-4}}} \quad (n \in N^+)$

2°) $h_a m_b^{4n} + h_b m_c^{4n} + h_c m_a^{4n} \geqslant$

$\geqslant S\sqrt[2n]{S}\, 3^{n+1}\sqrt[4]{3} \quad (n \in N^+)$

Bài toán đã cho ứng với $n = 1$

NGUYỄN DĂNG PHÁT

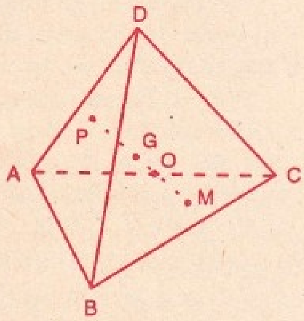
Bài T10/233. *Cho tứ diện ABCD và một điểm P sao cho :*

$$PA^2 + BC^2 + CD^2 + DB^2 = PB^2 + CD^2 +$$
$$+ DA^2 + AC^2 = PC^2 + DA^2 + AB^2 + BD^2 =$$
$$= PD^2 + AB^2 + BC^2 + CA^2 ; \quad (*)$$

Chứng minh rằng tồn tại trong không gian một điểm M thỏa mãn :

$$AG_1 = BG_2 = CG_3 = DG_4 \quad (**)$$

trong đó G_1, G_2, G_3 và G_4 lần lượt là trọng tâm của các tứ diện MBCD, MCDA, MDAB và MABC.



Lời giải 1. (Dựa theo *Ngô Anh Tuấn*, 10A, chuyên Toán ĐHSP Vinh). Vì G_1 là trọng tâm tứ diện *MBCD* nên ta có hệ thức :

$$4\overrightarrow{AG_1} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$$

Bình phương vô hướng hai vế, rồi thay $2\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}$ bởi $AB^2 + AC^2 - BC^2$ và những hệ thức tương tự, ta được :

$$16AG_1^2 = (AM^2 + AB^2 + AC^2 + AD^2) +$$
$$+(AM^2 + AB^2 - BM^2) + (AM^2 + AC^2 - CM^2) +$$
$$+(AM^2 + AD^2 - DM^2) + (AB^2 + AC^2 - BC^2) +$$
$$+(AB^2 + AD^2 - BD^2) + (AC^2 + AD^2 - CD^2).$$

Rút gọn, ta được

$$16AG_1^2 = 5(AM^2 + AB^2 + AC^2 + AD^2) -$$

$-(MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 + \sigma)$, trong đó σ là tổng bình phương các cạnh của tứ diện *ABCD* :

$$\sigma = AB^2 + AC^2 + AD^2 + BC^2 + CD^2 + DB^2. \quad (1)$$

Tương tự như trên :

$$16BG_2^2 = 5(BM^2 + BC^2 + BD^2 + BA^2) - $$
$$- (MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 + \sigma) \quad (2)$$

Đối chiếu (1) và (2), suy ra (để ý đến các hệ thức (*) nữa) :

$$AG_1 = BG_2 \Leftrightarrow MA^2 - MB^2 = BC^2 + BD^2 -$$
$$- (AC^2 + AD^2) = -(PA^2 - PB^2) ; \quad (i)$$

Tương tự, ta được :

$$BG_2 = CG_3 \Leftrightarrow MB^2 - MC^2 = CA^2 + CD^2 -$$
$$- (AB^2 + BD^2) = -(PB^2 - PC^2) ; \quad (ii)$$

$$CG_3 = DG_4 \Leftrightarrow MC^2 - MD^2 = AD^2 + BD^2 -$$
$$- (BC^2 + CA^2) = -(PC^2 - PD^2) ; \quad (iii)$$

Để ý rằng mỗi đẳng thức (i), hoặc (ii), hoặc (iii) biểu thị một quỹ tích của M là một mặt phẳng, lần lượt vuông góc với AB, BC và CD (ở một điểm xác định). Cụ thể như sau :

$\{M \mid (i)\}$ là mặt phẳng $\pi(AB) \perp (AB)$ ở M_1 xác định

$\{M \mid (ii)\}$ là mặt phẳng $\pi(BC) \perp (BC)$ ở M_2 xác định

$\{M \mid (iii)\}$ là mặt phẳng $\pi(CD) \perp (CD)$ ở M_3 xác định

Từ đó suy ra :

$(**) \Leftrightarrow M = \pi(AB) \cap \pi(BC) \cap \pi(CD)$

Điểm M phải tìm là xác định và duy nhất vì AB, BC và CD không đồng phẳng.

– Ngoài ra, ta có nhận xét thêm sau đây về mối quan hệ giữa các điểm P và M phải tìm. Cũng từ hệ thức (i), ta thấy rằng :

$\{P \mid (i)\}$ là mặt phẳng $\pi'(AB)$, đối xứng với $\pi(AB)$ qua mặt phẳng trung trực $t\,[AB]$ của cạnh AB, và do đó, đối với $\pi(AB)$ qua tâm O mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$: $P \in \pi'(AB) = Đ_O(\pi(AB))$. Cũng vậy $P \in \pi'(BC) = Đ_O(\pi(BC))$ và $P \in \pi'(CD) = Đ_O(\pi(CD))$. Từ đó suy ra : $P = Đ_O(M)$, cũng tức là $M = Đ_O(P)$; M đối xứng với điểm P qua tâm O mặt cầu $\mathcal{C}$ $(ABCD)$.

Nhận xét. 1°) Số các bạn tham gia giải bài toán này không nhiều. Tuy nhiên, rất đáng tiếc có 3 bạn giải sai và hai bạn khác đã mắc sai lầm giống nhau ; chẳng hạn : từ đẳng thức $\overrightarrow{AB}(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OM}) = 0$ suy ra : $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O}$ (! ! !). Cần lưu ý các bạn rằng từ $\vec{a}^2 - \vec{b}^2 = (\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = 0$ với $\vec{a} \neq \vec{o}$ và $\vec{b} \neq \vec{o}$ chỉ có thể kết luận được $\vec{a} + \vec{b} \perp \vec{a} - \vec{b}$ mà thôi.

2°) Số còn lại đã cho lời giải hầu như giống nhau bằng cách chứng minh rằng điểm M cần tìm đối xứng với P (thỏa mãn các điều kiện (*)) qua tâm O mặt cầu ngoại tiếp tứ diện đã cho. Chẳng hạn, bạn Ngô Anh Tuấn và nhiều bạn khác đã chứng minh điều đó như sau :

$$AG_1 = BG_2 \Leftrightarrow AM^2 - BM^2 = BP^2 - AP^2 \Leftrightarrow$$
$$AM^2 + AP^2 = BM^2 + BP^2$$
$$\Leftrightarrow 2(AM^2 + AP^2) - MP^2 = 2(BM^2 + BP^2) - MP^2$$
$$\Leftrightarrow 4OA^2 = 4OB^2$$

$\Leftrightarrow OA = OB$ (trong đó O là trung điểm của đoạn thẳng MP).

Chứng minh tương tự, ta được :

$AG_1 = BG_2 = CG_3 = DG_4 \Leftrightarrow OA = OB = OC = OD \Leftrightarrow$ Trung điểm của MP trùng với tâm O mặt cầu $\mathcal{C}$ $(ABCD) \Leftrightarrow M = Đ_O(P)$.

3°) Các bạn hãy đọc kỹ đề toán một lần nữa sẽ thấy lập luận như trên chưa ổn. Thật vậy, chứng minh trên mới chỉ nói lên một điều là : Sự tồn tại của điểm M phụ thuộc vào sự tồn tại của điểm P. Chính vì vậy, trong lời giải 1 đưa ra ở trên, đã chỉ rõ cách dựng trực tiếp điểm M (hoặc điểm P) một cách cụ thể.

4°) Có thể thiết lập hệ thức (1) nhanh chóng hơn bằng cách sử dụng các công thức Lagrange và Jacobi (Từ đó ta được ngay (1)) :

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = GA^2 + GB^2 +$$
$$+ GC^2 + GD^2 + 4GM^2 ; \forall M$$
$$= \frac{1}{4}\sigma + 4MG^2$$

5°) Bạn *Bùi Mạnh Hùng*, 10A Toán ĐHKHTN – ĐHQG **Hà Nội** đã phát biểu và giải đúng bài toán tổng quát hơn bằng cách thay các đỉnh của một tứ diện bởi một hệ n điểm A_i nằm trên cùng một mặt cầu ($n \geq 4$).

6°) Sau đây là một lời giải khác *(lời giải véctơ)* của bài toán.

Lời giải 2. Gọi O, G và Z lần lượt là tâm mặt cầu $\mathcal{C}$ $(ABCD)$, trọng tâm của tứ diện $ABCD$ và trọng tâm của hệ 5 điểm $\{A, B, C, D, M\}$. Thế thì ta có các hệ thức sau :

$$\overrightarrow{OA} + 4\overrightarrow{OG_1} = \overrightarrow{OB} + 4\overrightarrow{OG_2} = \overrightarrow{OC} + 4\overrightarrow{OG_3} =$$
$$= \overrightarrow{OD} + 4\overrightarrow{OG_4}$$
$$= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OM} = 5\overrightarrow{OZ}.$$

Từ đó suy ra 5 đoạn thẳng AG_1, BG_2, CG_3, DG_4 và MG đồng quy ở Z và đồng thời ta có : $(AG_1, Z) = (BG_2, Z) = (CG_3, Z) = (DG_4, Z) = (MG, Z) = -4$

$$\times \frac{\overline{AZ}}{\overline{AG_1}} = \frac{\overline{BZ}}{\overline{BG_2}} = \frac{\overline{CZ}}{\overline{CG_3}} = \frac{\overline{DZ}}{\overline{DG_4}} = \frac{\overline{MZ}}{\overline{MG}} = \frac{4}{5}$$

Từ đó suy ra :

$$AG_1 = BG_2 = CG_3 = DG_4 \Leftrightarrow AZ = BZ = CZ$$
$$= DZ \Leftrightarrow Z = O \Leftrightarrow \frac{\overline{MO}}{\overline{MG}} = \frac{4}{5} \Leftrightarrow \overrightarrow{GM} = 5\overrightarrow{GO}$$

$\Leftrightarrow O$ là trọng tâm của hệ 5 điểm $\{A, B, C, D, M\}$

$\Leftrightarrow$ *M* là tâm tỷ cự của hệ điểm $A(-1), B(-1), C(-1), D(-1), O(5)$.

Đẳng thức $\overrightarrow{GM} = 5\overrightarrow{GO}$ không những nói lên sự tồn tại và duy nhất của điểm *M* thỏa mãn các điều kiện (**) của bài toán, mà còn chỉ ra cách dựng rất cụ thể và đơn giản vị trí hình học của điểm *M* cần tìm : $M = V_{G, k=5}(O)$, ảnh của *O* trong phép vị tự tâm *G*, tỉ số $k = 5$.

7°) Cuối cùng, cũng phải nói thêm rằng : *Thực chất bài toán này là một bài toán dựng hình* tuy hình thức phát biểu dưới dạng chứng minh sự tồn tại. Chính vì vậy, việc cho điểm *P* thỏa mãn các điều kiện (*) tham gia vào trong đề toán là *thừa*. Tuy nhiên, các điều kiện (*) về điểm P cho ta biết thêm một tính chất của điểm *M* nói trong bài toán của ta : $M = D_O(P)$.

Không thấy bạn nào băn khoăn khi sử dụng đến điểm *P* nói trong đề toán, duy chỉ có bạn *Nguyễn Minh Phương*, 11A trường chuyên Hùng Vương, **Phú Thọ** có nhận xét rằng : Có thể chứng minh sự tồn tại và duy nhất của điểm *P* thỏa mãn các điều kiện (*) nói trong đề toán. Nhưng tiếc thay, bạn Phương đã cho lời giải không đúng phần nhận xét này. Tuy nhiên, bạn Phương đã mạnh dạn đề nghị sửa lại đề (Trong đề toán không cần thiết phải cho điểm *P* tham gia vào mà vẫn giải được). Rất hoan nghênh những nhận xét như trên của bạn Phương và mong các bạn khác cũng đào sâu, khai thác một bài toán như bạn Phương. Như thế, việc học toán của các bạn sẽ tiến bộ nhiều trong việc rèn luyện tư duy lôgic, và đạt tới : "học một, biết mười".

NGUYỄN ĐĂNG PHẤT

Bài L1/233. *Từ hai điểm A và B cách nhau 100m, xe 1 và xe 2 cùng xuất phát với cùng vận tốc $v_1 = v_2 = 10m/s$. Xe 1 đi theo hướng hợp với AB góc 60°. Biết rằng 2 xe sẽ gặp nhau ở C. Hãy xác định :*

– *Hướng chuyển động của xe 2 ;*

– *Thời điểm 2 xe gặp nhau ;*

– *Tọa độ điểm C.*

Hướng dẫn giải. Chọn hệ trục tọa độ *Oxy*, có gốc *O* trùng *A*, trục *Ox* trùng với *AB* ; lấy gốc thời gian $t = 0$ là lúc hai xe xuất phát. Viết phương trình chuyển động của hình chiếu hai xe trên các trục tọa độ : $x_1 = 10 . (\cos 60^o)\, t$; $y_1 = 10 . (\sin 60^o)\, t$;

$x_2 = 100 - 10 . (\cos\alpha)\, t$; $y_2 = 10 . (\sin\alpha) t$

(Với α là góc giữa hướng chuyển động của xe 2 và *AB*)

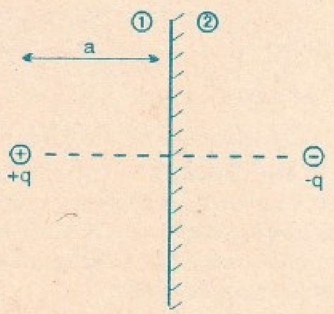
Hai xe gặp nhau tại $C = x_{1c} = x_{2c}$; $y_{1c} = y_{2c}$. Suy ra $\alpha = 60^o$, $t = 10s$ và $x_c = 50$ (m) ; $y_c = 50\sqrt{3}$ (m)

Nhận xét : Các em có lời giải đúng và gọn : *Lê Tuấn Thế Duy*, 11 Lí, chuyên Lê Khiết, **Quảng Ngãi** ; *Hoàng Tuấn Vinh*, 10F, PTTH Lam Sơn, **Thanh Hóa** ; *Nguyễn Thị Phương Uyên*, 7 chuyên Nghĩa Hành **Quảng Ngãi** ; *Nguyễn Trung Dũng*, 9 Lí, Trần Đăng Ninh **Nam Định** ; *Võ Bá Thi*, 9A PTTH **Bến Tre** ; *Trần Thanh Thọ*, 9b, chuyên Yên Lạc, **Vĩnh Yên** ; *Nguyễn Trọng Trần Hòa*, 11 Lí, PTNK **Quảng Bình** ; *Trịnh Quốc Chung*, 9A Năng Khiếu, Quỳnh Lưu, **Nghệ An** ; *Dương Minh Ngọc* $11A_2$, PTTH Nguyễn Trân, Hoài Nhơn, **Bình Định** ; *Ninh Văn Tuấn*, Năng khiếu thị xã Tam Điệp **Ninh Bình**.

MAI ANH

Bài L2/233. *Một điện tích điểm $q = +2.10^{-8}C$ đứng cách một tấm kim loại phẳng nối đất một khoảng $a = 3cm$. Hãy xác định lực tương tác giữa điện tích q và tấm kim loại đó khi đặt chúng trong chân không .*

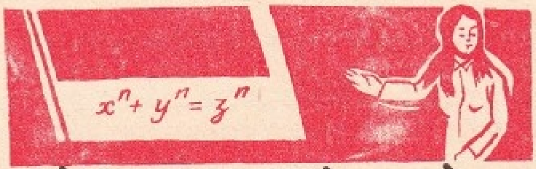
Hướng dẫn giải. Do cảm ứng tĩnh điện, hai bề mặt tấm kim loại xuất hiện các điện tích bằng nhau và trái dấu : Bề mặt 1 đối diện với *q* xuất hiện điện tích âm, còn bề mặt kia mang điện tích dương. Nhưng do tấm kim loại nối đất nên bề mặt 2 trở thành trung hòa điện. Kết quả là giữa tấm kim loại (bề mặt 1) và điện tích có lực hút. Tấm kim loại nối đất trở thành mặt đẳng thế, có điện thế bằng không ; điều này giống như điện tích $+q$ đã làm xuất hiện một điện tích $-q$ đối diện với nó qua tấm kim loại. Và tương tác giữa điện tích *q* với tấm kim loại có thể được coi như tương tác giữa hai điện tích *q* và $-q$ ở cách nhau một khoảng $r = 2a$. Vậy lực tương tác giữa *q* và tấm kim loại là lực hút, có độ lớn



$$F = 9 . 10^9 \frac{q^2}{4a^2} = 10^{-3}N$$

Nhận xét. Các em có lời giải gọn và đúng : *Trần Mai Sơn* , 11CL, PTTH năng khiếu **Quảng Bình**. *Phan Văn Đức*, 11 Lý, PTTH Phan Bội Châu, Vinh **(Nghệ An)** ; *Lê Doãn Cường*, $11A_2$, PTTH chuyên Lê Quý Đôn, **Đà Nẵng** ; *Hoàng Duy Khang*, 12F, PTTH chuyên Hùng Vương, Việt Trì, **Phú thọ** ; *Nguyễn Xuân Hà*, 12H, PTTH chuyên ban số 1, Đức Phổ, **Quảng Ngãi** ; *Đàm Hữu Thu*, 11L, chuyên Lương Văn Chánh, Tuy Hòa, **Phú Yên**.

MAI ANH



ĐỀ RA KÌ NÀY

CÁC LỚP THCS

Bài T1/237 : *Cho số A có 1997 chữ số trong đó có 1996 chữ số 5 và một chữ số khác 5. Hỏi A có thể là số chính phương hay không, tại sao ?*

NGUYỄN ĐỨC TẤN
(TP Hồ Chí Minh)

Bài T2/237 : *Giải phương trình :*

$$19 + 10x^4 - 14x^2 = (5x^2 - 38)\sqrt{x^2 - 2}$$

NGUYỄN HỮU DỰ
(Nghệ An)

Bài T3/237 : *Cho n số dương $x_1, x_2 ..., x_n$ ($n \in N$, $n \geqslant 3$). Chứng minh :*

$$\frac{x_1}{x_n + x_2} + \frac{x_2}{x_1 + x_3} + \frac{x_3}{x_2 + x_4} + \ldots + \frac{x_{n-1}}{x_{n-2} + x_n} + \frac{x_n}{x_{n-1} + x_1} \geqslant \frac{n}{2} \times$$
$$\times \left[2 \sqrt[n]{\frac{(x_1 + x_2)(x_2 + x_3) \ldots (x_n + x_1)}{(x_n + x_2)(x_1 + x_3) \ldots (x_{n-1} + x_1)}} - 1 \right]$$

NGÔ VĂN THÁI
(Thái Bình)

Bài T4/237 : *Giả sử AA', BB', CC' là các đường phân giác trong của tam giác ABC. Gọi L là giao điểm của AA' và B'C', K là giao điểm của CC' và A'B'. Chứng minh rằng BB' là phân giác của góc KBL.*

LƯU XUÂN TÌNH
(Thanh Hóa)

Bài T5/237 : *Cho tam giác ABC có góc B bằng 30°. Dựng về phía ngoài của tam giác một tam giác đều ABC. Chứng minh rằng :*

$$BD^2 = AB^2 + BC^2$$

NGUYỄN DẾ
(Hải Phòng)

CÁC LỚP THPT.

Bài T6/237 : *Cho dãy số a_1, a_2, a_3... thỏa mãn : $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_{n+1} = (n+2)\,a_n - (n+1)\,a_{n-1}$, với $n \geqslant 2$. Tìm tất cả các giá trị của n để a_n là số chính phương.*

NGUYỄN KHÁNH NGUYÊN
(Hải Phòng)

Bài T7/237 : *Chứng minh rằng $\forall a_1, a_2, ..., a_n > 0$ và $x_1, x_2 ... x_n \in R$ ta có bất đẳng thức sau :*

$$\frac{1}{n-1}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2 \leqslant \left(\frac{a_1^{m+1}}{s - a_1} + \ldots + \frac{a_n^{m+1}}{s - a_n}\right) \times \left(\frac{x_1^2}{a_1^m} + \frac{x_2^2}{a_1^m} + \ldots + \frac{x_n^2}{a_n^m}\right)$$

$\forall m, n \in N$, $m, n \geqslant 2$ và $s = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$

BÙI TRỌNG KIÊN
(Ninh Bình)

Bài T8/237 : *Tìm phần nguyên của số S xác định bởi :*

$$S = tg^4\frac{3\pi}{7} + tg^4\frac{2\pi}{7} + 2\left(tg^2\frac{3\pi}{7} + tg^2\frac{2\pi}{7}\right)$$

TRẦN TUẤN DIỆP
(Hà Nội)

Bài T9/237 : *Kí hiệu m_a, m_b, m_c là độ dài các trung tuyến được kẻ tới các cạnh tương ứng a, b, c của tam giác ABC. Chứng minh rằng :*

1) $\dfrac{a}{m_a} + \dfrac{b}{m_b} + \dfrac{c}{m_c} \geqslant 2\sqrt{3}$

2) $\dfrac{m_a}{a} + \dfrac{m_b}{b} + \dfrac{m_c}{c} \geqslant \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

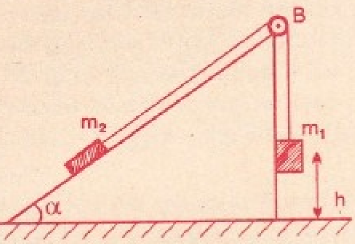
TRẦN XUÂN DÁNG
(Nam Định)

Bài T10/237 : *Gọi G_i là trọng tâm mặt đối diện với đỉnh A_i của 1 tứ diện $A_1A_2A_3A_4$. M là một điểm bất kỳ trong không gian và gọi M_i là điểm đối xứng của M qua G_i. Chứng minh rằng các đường thẳng A_iM_i đồng quy ($i = \overline{1,4}$)*

TRẦN DUY HINH
(Bình Định)

CÁC ĐỀ VẬT LÝ

Bài L1/237 : *Cho hệ cơ như hình vẽ. Ban đầu m_2 được giữ cố định ở độ cao h so với mặt đất. Sau đó thả cho hệ thống chuyển động không vận tốc ban đầu, m_1 trượt trên mặt phẳng nghiêng với hệ số ma sát K.*



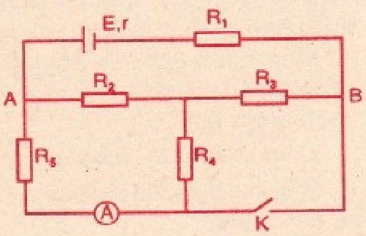
a) Tính vận tốc V của m_2 khi nó sắp chạm đất.

b) Tính sức căng T của sợi dây.

Khối lượng của dây nối và ròng rọc không đáng kể.

NGUYỄN VĂN MINH
(Quảng Ngãi)

Bài L2/237 : *Cho mạch điện như hình vẽ $R_1 = 14r$, $R_2 = 4r$, $R_3 = 18r$, $R_4 = 9r$ $R_A = r$. Bỏ qua điện trở của dây nối khóa K.*



Khi K đóng R_5 có công suất tiêu thụ cực đại và (A) chỉ 2^A. Xác định số chỉ (A) khi K mở.

LẠI THẾ HIỀN
(Thái Bình)

Problems in this issue

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/237. Let A be a 1997 – digit number, 1996 digits of which are 5 and a digit is distinct from 5. Can A be a perfect square ? and why is it ?

T2/237. Solve the equation

$$19 + 10x^4 - 14x^2 = (5x^2 - 38)\sqrt{x^2 - 2}$$

T3/237. Le be given n positive numbers $x_1, x_2, ..., x_n$ ($n \in \mathbf{N}, n \geqslant 3$). Prove that :

$$\frac{x_1}{x_n + x_2} + \frac{x_2}{x_1 + x_3} + \frac{x_3}{x_2 + x_4} + ... + \frac{x_{n-1}}{x_{n-2} + x_n} + \frac{x_n}{x_{n-1} + x_1} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{n}{2}\left[2\sqrt[n]{\frac{(x_1+x_2)(x_2+x_3)...(x_n+x_1)}{(x_n+x_2)(x_1+x_3)...(x_{n-1}+x_1)}} - 1\right]$$

T4/237. Let AA', BB', CC' be the inbisectors of the triangle ABC, L be the point of intersection of $A'A$ and $B'C'$, K be the point of intersection of $C'C$ and $A'B'$. Prove that BB' is the bisector of the angle $\widehat{KBL}$.

T5/237. Let be given a triangle ABC, the angle $\hat{B}$ of which is equal to 30^o. Construct in the outside of ABC the equilateral triangle ACD. Prove that $BD^2 = AB^2 + BC^2$.

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/237. The sequence of numbers $a_1, a_2, a_3, ...$ satisfies $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_{n+1} = (n+2)a_n - (n+1)a_{n-1}$ for $n \geqslant 2$.

Find all values of n such that a_n is a perfect square.

T7/237. Prove that for all positive numbers $a_1, a_2, ..., a_n$, for all real numbers $x_1, x_2, ..., x_n$ ($n \in \mathbf{N}, n \geqslant 2$) and for every $m \in \mathbf{N}$, we have the inequality :

$$\frac{1}{n-1}(x_1 + x_2 + ... + x_n)^2 \leqslant \left(\frac{a_1^{m+1}}{s-a_1} + ... + \frac{a_n^{m+1}}{s-a_n}\right)\left(\frac{x_1^2}{a_1^m} + \frac{x_2^2}{a_2^m} + ... + \frac{x_n^2}{a_n^m}\right),$$

where $s = a_1 + a_2 + ... + a_n$.

T8/237. Find the whole number part of the number S defined by :

$$S = tg^4\frac{3\pi}{7} + tg^4\frac{2\pi}{7} + 2\left(tg^2\frac{3\pi}{7} + tg^2\frac{2\pi}{7}\right).$$

T9/237. Denote by m_a, m_b, m_c the measures of the medians corresponding to the sides a, b, c of a triangle ABC. Prove that :

1) $\dfrac{a}{m_a} + \dfrac{b}{m_b} + \dfrac{c}{m_c} \geqslant 2\sqrt{3}$

2) $\dfrac{m_a}{a} + \dfrac{m_b}{b} + \dfrac{m_c}{c} \geqslant \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

T10/237. Let G_i be the centre of gravity of the face opposite to the vertex A_i of a tetrahedron $A_1A_2A_3A_4$. M is an arbitrary point in space, let M_i be the symmetric point of M about G_i. Prove that the lines A_iM_i ($i = \overline{1, 4}$) are concurent.

VỀ CÁCH GIẢI MỘT BÀI TOÁN THI HỌC SINH GIỎI 1995

Trong kì thi chọn học sinh giỏi toàn quốc 1995 môn toán lớp 9 có bài toán : *Tìm số tự nhiên k lớn nhất thỏa mãn điều kiện $(1994\,!)^{1995}$ chia hết cho 1995^k.*

Có thể sử dụng kiến thức về *phần nguyên của một số* để giải rất ngắn gọn : Nhận thấy : $1995^k = (3 \,.\, 5 \,.\, 7 \,.\, 19)^k = 3^k \,.\, 5^k \,.\, 7^k \,.\, 19^k$, do đó chỉ cần tìm số mũ lớn nhất của thừa số nguyên tố 19 trong số $(1994\,!)^{1995}$

Số mũ lớn nhất của 19 trong 1994 ! bằng :

$$\left[\frac{1994}{19}\right] + \left[\frac{1994}{19^2}\right] = 104 + 5 = 109$$

Suy ra số mũ lớn nhất của thừa số nguyên tố 19 trong $(1994\,!)^{1995}$ bằng 109. 1995 thỏa mãn : $(1994\,!)^{1995}$ chia hết cho 1995^k.

NGUYỄN VĂN VĨNH
(TP Hồ Chí Minh)

Dành cho các bạn chuẩn bị thi vào Đại học

TỔNG QUÁT TỪ BÀI TOÁN QUEN THUỘC

TRỊNH TUẤN
(Thanh Hóa)

Bất đẳng thức lượng giác trong tam giác là một chủ đề hấp dẫn và lý thú. Nhưng đây cũng là nỗi lo cho rất nhiều bạn hằng năm khi bước vào các kỳ thi đại học. Trong bài viết ngắn này, chúng ta cùng tìm hiểu thêm về một số bất đẳng thức hàm tang và hàm cotang.

Bài toán 1 *(1–a) Cho ΔABC nhọn thì* $tgA + tgB + tgC \geq 3\sqrt{3}$

(Bộ đề thi ĐH số 88 II_2)

(1–b) cho ΔABC thì $tg\frac{A}{2} + tg\frac{B}{2} + tg\frac{C}{2} \geq \sqrt{3}$

giải quyết (1–a) thì không có gì đáng bàn nhưng từ (1–a) cho ta

$$tgA \,.\, tgB \,.\, tgC) \geq 3\sqrt{3} \qquad (2\text{–a})$$

và từ đó ta được $Min(tgAtgBtgC) = 3\sqrt{3} \Leftrightarrow$ Δ đều *(Đề thi số 10 II_1 – Bộ đề thi)*

Từ (2–a) và bất đẳng thức Côsi cho ta

$$tg^2A + tg^2B + tg^2C \geq 3\sqrt[3]{(3\sqrt{3})^2} = 9 \quad (3\text{–a})$$

Tổng quát hóa bài toán : Cho ΔABC nhọn, $n \in \mathbf{N}^*$ thì ta có :

$$tg^nA + tg^nB + tg^nC \geq 3\sqrt[3]{(3\sqrt{3})^n} \qquad (4\text{–a})$$

Nhờ (2–a) và bất đẳng thức Côsi ta được (4–a).

Đặc biệt với $n = 6$ ta có

$$tg^6A + tg^6B + tg^6C \geq 81$$

(Đề ĐH Thương mại 1996)

Nếu ta đặt $-p = tgA + tgB + tgC \Rightarrow p \leq -3\sqrt{3}$.

$q = tgAtgB + tgAtgC + tgBtgC \geq$

$\geq 3\sqrt[3]{(tgAtgBtgC)^2} \geq 9$

thì ta nhận được bài toán :

Giả sử Δ nhọn tgA, tgB, tgC là 3 nghiệm của phương trình

$$x^3 + px^2 + qx + p = 0, q \neq 1$$

thì $p \leq -3\sqrt{3}$, $q > 1$

(Đề thi HSG PTTH toàn quốc 1988)

Từ bài toán (1–b) ta thấy có rất nhiều cách chứng minh

Bình phương 2 vế của (1–b) thì được bất đẳng thức đúng : $tg^2\frac{A}{2} + tg^2\frac{B}{2} + tg^2\frac{C}{2} \geq$

$\geq tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2} + tg\frac{A}{2}tg\frac{C}{2} + tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2}$

và như vậy ta nhận được

$$tg^2\frac{A}{2} + tg^2\frac{B}{2} + tg^2\frac{C}{2} \geq 1 \qquad (2\text{–b})$$

Lẽ đương nhiên chúng ta còn nhận được từ đẳng thức

$tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2} + tg\frac{A}{2}tg\frac{C}{2} + tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2} = 1 \Rightarrow$

$$tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2} \leq \frac{1}{3\sqrt{3}} \qquad (3\text{–b})$$

Nhờ bất đẳng thức (2–b) và bất đẳng thức Côsi suy rộng ta sẽ có bài toán tổng quát :

Cho ΔABC, $n \in \mathbf{N}^*$ thì :

$$tg^{2n}\frac{A}{2} + tg^{2n}\frac{B}{2} + tg^{n}\frac{C}{2} \geq \frac{1}{3^{n-1}} \qquad (4\text{–b})$$

Dấu = Δ đều.

Thật vậy :

$$\left(tg^2\frac{A}{2}\right)^n + \left(tg^2\frac{B}{2}\right)^n + \left(tg^2\frac{C}{2}\right)^n \geq$$

$$\geq 3\left(\frac{tg^2\frac{A}{2} + tg^2\frac{B}{2} + tg^2\frac{C}{2}}{3}\right)^n \geq 3\,\frac{1}{3^n}$$

Chú ý rằng khi $n = 3$ thì ta được : $tg^6\frac{A}{2} + tg^6\frac{B}{2} + tg^6\frac{C}{2} \geq \frac{1}{9}$ Dấu = khi ΔABC đều

(Đề thi ĐHGiao thông Vận tải 1996)

Nếu biết kết hợp các bất đẳng thức này lại ta sẽ được các bài khá đẹp, chẳng hạn nhờ (2–b), (3–b) :

Cho ΔABC nếu $\left(tg^2\frac{A}{2} + tg^2\frac{B}{2} + tg^2\frac{C}{2}\right) -$ $-\left(tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2}\right)^2 = \frac{26}{27}$ thì Δ đó đều.

Chắc rằng đến đây các bạn sẽ nghĩ đến việc tổng quát bài toán này. Hoàn toàn tương tự cho bài toán mở rộng của hàm cotang :

Bài toán 2 : Cho ΔABC

(2–c) $cotgA + cotgB + cotgC \geq \sqrt{3}$

(2–d) $cotg\frac{A}{2} + cotg\frac{B}{2} + cotg\frac{C}{2} \geq 3\sqrt{3}$

Các bạn sẽ nhận được các bất đẳng thức đẹp như hàm tang. Xin chúc các bạn thành công trong kỳ thi vào đại học sắp tới.

Các bạn hãy luyện qua ba bài toán sau :

Bài 1 : Cho Δ nhọn ABC Chứng minh :

$(tgA)^{tgA} \times (tgB)^{tgB} \times (tgC)^{tgC} \geq (\sqrt{3})^{3\sqrt{3}}$

Bài 2 : Cho Δ ABC nhọn Chứng minh :

$$\frac{tg^5A + tg^5B + tg^5C}{tgA + tgB + tgC} \geq 9$$

Bài 3 : Cho ΔABC nhọn. Chứng minh :

$$\frac{tg^6A + tg^6B + tg^6C}{tgA + tgB + tgC} \geq 9\sqrt{3}$$

(Đề thi HSG lớp 11 TP Hà Nội vòng 2 1991 – 1992)

Giới thiệu một số THẦN ĐỒNG TOÁN HỌC

TRẦN VĂN NHUNG
PHẠM VĂN HÙNG

Theo từ điển tiếng Việt "Thần đồng là đứa trẻ thông minh khác thường có năng khiếu đặc biệt" về một lĩnh vực nào đó. Trong lịch sử toán học đã có rất nhiều thần đồng, nhưng trong khuôn khổ hạn hẹp của một bài báo, chúng tôi chỉ có thể giới thiệu một số trong các chân dung của các thần đồng toán học.

Có lẽ chúng ta nên bắt đầu từ C.F. Gauss (1777 – 1855), nhà toán học thiên tài người Đức – Ông Hoàng của toán học. Ngay từ khi mới 3 tuổi, tức là ở cái tuổi "mẫu giáo bé", Gauss đã bộc lộ năng khiếu tính toán chính xác. Tương truyền rằng vào một ngày thứ 7, bố của Gauss phải thực hiện một bảng thanh toán, lúc làm xong, ông đọc lại các kết quả tính toán của mình cho một người bạn thì bỗng ông nghe thấy từ phía giường trẻ có tiếng gọi của Gauss, đứa con ba tuổi của ông :

Cha ơi, cha tính nhầm rồi, phải thế này mới đúng cơ.

Cha của Gauss kiểm tra lại các phép tính và thấy Gauss đã tính đúng. Lên bảy tuổi, đến trường học, một lần Gauss đã làm thầy giáo sững sờ vì cậu đã tính nhẩm quá nhanh tổng các số tự nhiên từ 1 đến 100. Khi vào đại học tổng hợp, ngay sau năm thứ nhất Gauss đã giải được phương trình $X^{17} - 1 = 0$ và đưa ra cách dựng đa giác đều 17 cạnh bằng thước và com – pa. Sau này khi Gauss mất, theo di chúc, người ta đã khắc trên bia mộ ông một đa giác đều 17 cạnh.

A.N.Kolmogorov (1903 – 1987), nhà toán học lớn của Liên Xô (trước đây), ngay từ khi 7 tuổi, ông đã phát hiện ra rằng : $1 + 3 = 2^2$, $1 + 3 + 5 = 3^2$; $1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$... Năm 32 tuổi Kolmogorov là tiến sĩ toán – lí, 36 tuổi là viện sĩ chính thức Viện hàn lâm khoa học Liên Xô (trước đây). Ông là nhà khoa học tiêu biểu trong điều khiển học hiện đại. Trong lĩnh vực này ông có những tư tưởng quan trọng, giả thuyết độc đáo và nhiều tiên đoán táo bạo.

Kolmogorov đặc biệt quan tâm tới việc phát hiện và bồi dưỡng những năng khiếu toán học trẻ. Ông có rất nhiều buổi nói chuyện và giảng bài cho học sinh trung học. Ông là một trong những người sáng lập ra *trường phổ thông chuyên toán lí* giành cho các học sinh trung học có năng khiếu về toán và vật lí. Trường này được đặt tại Đại học Tổng hợp quốc gia mang tên Lomonosov. Kolmogorov còn là sáng lập viên của tạp chí *Cơ học lượng tử* (KBAHT), tạp chí dành cho học sinh yêu thích toán và vật lí. Ông đã làm phó tổng biên tập tờ báo này từ khi sáng lập cho đến khi từ giã cuộc sống và toán học.

Khi nói về các thần đồng toán học, sẽ khiếm khuyết nếu không nhắc đến các thần đồng toán học của Hung – ga – ri, một trong những đất nước có nhiều thần đồng toán học trên thế giới. Một nhà toán học lớn đã phân tích nguyên nhân "giàu" thần đồng của Hung – ga – ri như sau : đây là đất nước có truyền thống toán học lâu đời, toán học được giảng dạy trong trường phổ thông gần trăm năm nay, các kì thi học sinh giỏi toán đã có thâm niên hơn 75 năm, như kì thi mang tên E–ô–vốt Ku–rơ–sác. Gần đây các kì thi học sinh giỏi do đài truyền hình tổ chức đã thu hút được nhiều người xem, các thí sinh tham dự kì thi phải trả lời các câu hỏi rất lắt léo trong vòng 2 – 3 phút, tham gia ban giám khảo có các nhà toán lớn của Hung–ga–ri. Chính sự quan tâm của quốc gia và dân tộc tới những học sinh có năng khiếu về toán học đã làm cho đất nước Hung–ga–ri có nhiều nhà toán học.

Paul Erdos là một trong những nhà toán học và cũng là thần đồng nổi tiếng Hung–ga–ri, ông sinh năm 1913. Ngay từ khi 3 tuổi, ông đã có thể tính toán chính xác với những con số khá lớn. Theo Erdos, hai trong số những phát minh lớn nhất của đời ông là : khi lên 4 tuổi Erdos đã nói với mẹ ông rằng nếu lấy 150 trừ đi 250 thì sẽ được 100 dưới không, và lên 5 tuổi ông đã tính được thời gian mà tầu hỏa cần có để chạy từ quả đất lên đến mặt trời. Năm 18 tuổi Erdos đã đưa ra cách chứng minh định lí Trê–bư–sép : luôn có một số nguyên tố giữa n và 2n.

Erdos là một nhà "truyền giáo" không mệt mỏi cho toán học. Ông là tác giả hoặc đồng tác giả của 1500 bài báo, và cộng tác với các nhà toán học nhiều hơn bất cứ ai trong lịch sử khoa học. Ông rất quan tâm dìu dắt các thần đồng toán học và khơi gợi những ý tưởng toán học cho họ. Dưới đây là những thần đồng toán học có quan hệ ít nhiều với Erdos.

Posa một thần đồng đã trở thành giáo viên của những học sinh yêu toán. Khi Posa chưa đầy 12 tuổi, trong một bữa ăn, Erdos đã ra cho cậu bé bài toán sau : "chứng minh rằng nếu có (n + 1) số nguyên dương nhỏ hơn hoặc bằng 2n thì trong đó luôn có 2 số nguyên tố cùng nhau". Dễ dàng chứng minh được rằng định lí không còn đúng cho trường hợp n số, vì nếu bạn lấy bội của 2 thì không có 2 số nào trong đó là nguyên tố cùng nhau. Thực ra mấy năm trước đó Erdos đã chứng minh được bài toán này, nhưng ông cũng phải mất 10 phút để tìm ra lời giải ngắn gọn. Posa ăn súp và sau đó nói : "Nếu ta có (n + 1) số nguyên dương nhỏ hơn hoặc bằng 2n thì 2 trong số đó sẽ là số nguyên liên tiếp và do đó chúng nguyên tố cùng nhau". Erdos đã rất xúc động và ông đánh giá sự kiện này ngang với việc Gauss tìm ra tổng của các số nguyên từ 1 đến 100. Sau đó Erdos đã ra cho Posa các bài toán sau :

1. Nếu ta có một đồ thị 2n đỉnh và $(n^2 + 1)$ cạnh thì nó luôn chứa một tam giác (đây là trường hợp đặc biệt của định lí Turan nổi tiếng).

2. Cho một chuỗi vô hạn mà số hạng thứ n của nó được xác định như sau :

Tử số là 1, mẫu số là bội số chung nhỏ nhất của các số nguyên từ 1 đến n. Chứng minh rằng tổng của chuỗi đó là một số vô tỉ.

Erdos nhận xét rằng việc chứng minh hai khẳng định trên là không khó nhưng một cậu bé 12 tuổi mà làm được thì thật đáng ngạc nhiên. Khi Posa 13 tuổi, Erdos đã giải thích cho cậu định lí Ramsay với trường hợp k = 2. Định lí được phát biểu như sau :

Giả sử ta có một đồ thị vô hạn, khi đó nó sẽ chứa hoặc là một đồ thị vô hạn đầy đủ hoặc là một tập hợp độc lập vô hạn, nói một cách khác là tồn tại một tập hợp vô hạn sao cho bất kì 2 trong số các đỉnh nào của nó cũng kết hợp được hoặc không có bất kì 2 đỉnh nào của nó kết hợp được. Phải mất 15 phút để Posa hiểu được bài toán, cậu đi về nhà, suy nghĩ về bài toán suốt cả chiều tối và đã tìm ra lời giải trước khi đi ngủ.

Bài báo nổi tiếng nhất và được trích dẫn nhiều nhất của Posa viết về các đường Hamilton, Posa viết bài báo này khi cậu vừa 15 tuổi.

Ở Hung-ga-ri, trẻ em học 8 năm tiểu học và 4 năm trung học, có các trường trung học chuyên toán giành cho học sinh có năng khiếu về toán. Posa đã vào học trường này và cậu rất thích. Posa cho Erdos biết rằng trong lớp có các bạn nam giỏi toán sơ cấp hơn cậu, một trong số những người đó là L. Lovasz. Hiện nay Lovasz là người thành đạt nhất trong số các thần đồng toán học của Hung-ga-ri, sự nghiệp của Lovasz không bị gián đoạn như của Posa. Lovasz bắt đầu sự nghiệp khoa học hơi muộn ở tuổi 17 (so với Posa), nhưng đã rất xuất sắc trong lĩnh vực toán tổ hợp. Anh là người đầu tiên đưa ra phép dựng đồ thị đối với số sắc sai lớn tùy ý và chu vi lớn tùy ý. Lovasz đã tìm cách giải bài toán này từ khi học trường trung học và đề ra phép dựng rất khéo và khó. Lovasz đã trở thành một trong số các nhà toán học hàng đầu, công trình nghiên cứu của anh về hợp số và về khoa học máy tính sẽ tồn tại hàng thế kỉ, công trình nghiên cứu về xác suất cũng rất quan trọng. Vợ anh, Kati Lovasz cũng là nhà toán học nhưng thiên về Hình học, chỉ có một số bài báo viết chung với Erdos. Có một giai thoại về đôi vợ chồng này : Khi Lovasz vào trường trung học chuyên toán, cậu và anh bạn học cùng theo đuổi cô con gái bà chủ nhà (cũng học toán), hai cậu đề nghị cô bé lựa chọn, cô bé nói rằng "Tôi sẽ chọn người nào chứng minh được thuyết Riemann" và cô chọn Lovasz, cô đã trở thành Kati Lovasz.

Pelikan cũng là một trong các học sinh được Posa đánh giá là giỏi toán sơ cấp hơn mình. Pelikan nghiên cứu chủ yếu về lí thuyết đồ thị. Những ai đã có mặt tại cuộc hội thảo về lí thuyết đồ thị ở Tihany năm 1966 chắc còn nhớ anh, khi đó Pelikan vừa tốt nghiệp trung học, anh đã trình bày các kết quả nghiên cứu của mình bằng tiếng Anh, các kết quả được trình bày rất tinh thông và mạch lạc, khó ai có thể tin rằng đó là các bài giảng đầu tiên của anh.

Còn rất nhiều, rất nhiều thần đồng nữa mà chúng tôi không thể và cũng không đủ khả năng để tìm hiểu hết và giới thiệu với các bạn. Đó là một công việc thú vị của các nhà biên soạn từ điển Danh nhân. Điều đáng nói ở đây là tất cả các thần đồng đều say mê toán học đến mức khó tả, họ có thể nghỉ về toán, tìm lời giải cho bài toán ngay cả trong bữa ăn, khi đi chơi lang thang và có thể ngay cả trong giấc ngủ (ai mà biết được). Muốn trở thành người tài trong bất cứ lĩnh vực nào, điều kiện cần là bạn phải say mê lĩnh vực đó, và phải đầu tư nhiều thời gian cho nó.

Không phải tất cả các nhà toán học đều đã từng là thần đồng, và không phải bất cứ thần đồng toán học nào cũng trở thành nhà toán học. Vì vậy chúng tôi xin chúc các bạn trẻ yêu toán (đã từng hoặc chưa từng là thần đồng toán) trở thành các nhà toán học nổi tiếng có nhiều cống hiến và mang lại niềm tự hào cho Đất nước.

ĐỊNH LÍ 4 ĐIỂM ... *(Tiếp theo bìa 4)*

4. Trên cạnh BC của hình vuông $ABCD$ ta lấy đoạn $BE = BC/3$, trên đoạn DC kéo dài ta lấy đoạn $CF = BC/2$. Chứng minh giao điểm của AE và BF nằm trên đường tròn ngoại tiếp hình vuông $ABCD$.

(Thi vô địch Hungari 1951)

5. Cho ngũ giác $ABCDE$ có : $\widehat{A} = \widehat{B} = 90^0$; $AE = BC$.

Chứng minh 3 đường thẳng đi qua 3 đỉnh A, B, D lần lượt vuông góc với các cạnh CD, DE và AB đồng quy.

KẾT LUẬN

Mong muốn của tác giả sau bài viết này là được các bạn yêu toán ứng dụng định lí 4 điểm như là một phương pháp để giải quyết một lớp các bài toán chứng minh "hai đường thẳng vuông góc".

Chúc các bạn phát hiện nhiều bài toán hay khi sử dụng phương pháp này.

3. Cho hình vuông $ABCD$, I là điểm bất kì trên cạnh AB (I khác A và B). Tia DI cắt tia CB tại E. Đường thẳng CI cắt đường thẳng AE tại M. Chứng minh rằng đường thẳng DE vuông góc với đường thẳng BM.

(Thi chọn học sinh giỏi tp Hồ Chí Minh 93 – 94)

ĐỀ THI TUYỂN SINH MÔN TOÁN 1996

TRƯỜNG ĐẠI HỌC XÂY DỰNG

(Thời gian làm bài 180 phút)

Câu I : *Cho hàm số $y=x^3+mx^2-9x-9m$ với m là tham số.*

1) Tìm những điểm cố định mà đồ thị hàm số luôn đi qua với mọi giá trị của m.

2) Xác định m để đồ thị của hàm số tiếp xúc với trục hoành.

Câu II : *1) Cho phương trình*

$|x+1|+m|x-1|=(m+1)\sqrt{x^2-1}$ *với m là tham số.*

a) Giải phương trình khi m = 2.

b) Giải và biện luận phương trình đã cho.

2) Giải bất phương trình

$$\log_{x^2-x+1}\sqrt{2x^2-2x-1}<\frac{1}{2} \qquad (*)$$

Câu III : *1) Giải phương trình*

$$\cos^5x+\sin^7x+\frac{1}{2}(\cos^3x+\sin^5x)\sin 2x = \cos x+\sin x$$

2) Các góc A, B, C của tam giác ABC thỏa mãn điều kiện :

$$\cos A+\cos B+\cos C=\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}$$

Chứng minh rằng tam giác ABC là tam giác đều.

Câu IV : *Chứng minh các bất đẳng thức sau :*

1) $e^x>1+x$ *với mọi* $x\neq 0$

2) $\int_0^1 e^{\frac{1}{1+x^2}}dx>\frac{4+\pi}{4}$

Câu V : *Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Đề các vuông góc xOy, cho elip*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ với } a>b>0$$

1) Gọi E là điểm tùy ý thuộc elip, chứng tỏ rằng b ⩽ OE ⩽ a.

2) A, B là hai điểm thuộc elip sao cho OA vuông góc với OB. Hãy xác định vị trí A, B trên elip để tam giác OAB có diện tích lớn nhất, nhỏ nhất. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất đó.

ĐÁP ÁN

Câu I (1,5 d). *1) (0,5d).* Gọi (x_o, y_o) là điểm cố định cần tìm. $\Rightarrow m(x_o-3)(x_o+3)=x_o^3-9x_o-y_o=0$ với $\forall m \Rightarrow$ Hai điểm cố định đó là (–3, 0) và (3, 0)

2) (1d). Đồ thị của hàm số $y=x^3+mx^2-9x-9m$ tiếp xúc với Ox khi chỉ khi phương trình $x^3+mx^2-9x-9m=0$ có nghiệm kép $\Leftrightarrow (x+3)(x-3)(x+m)=0$ có nghiệm kép $\Leftrightarrow m=-3$ hoặc $m=3$

Câu II. *1a) (0,5d)* (*) $|x+1|+2|x-1| = 3\sqrt{x^2-1}$ đk $|x|\geq 1$

* Nếu $x\leq -1$ (*) $\Leftrightarrow -3x+1=3\sqrt{x^2-1}\Leftrightarrow (-3x+1)^2=9(x^2-1)\Leftrightarrow 6x=10\Leftrightarrow x=5/3$ vô lí

** Nếu $x\geq 1$ (*) $\Leftrightarrow 3x-1=3\sqrt{x^2-1}\Leftrightarrow (3x-1)^2=9(x^2-1)\Leftrightarrow 6x=10\Leftrightarrow x=5/3$. Vậy $x=5/3$ là nghiệm.

1b) (1d) **Cách 1.** (*) $|x+1|+m|x-1| = (m+1)\sqrt{x^2-1}$ đk $|x|\geq 1$. Do $x=1$ không là nghiệm nên

$$(*) \Leftrightarrow \left|\frac{x+1}{x-1}\right|+m=(m+1)\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \Leftrightarrow$$

$t^2-(m+1)t+m=0$ với $t=\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \Rightarrow t_1 = 1, t_2=m$

* $t_1=\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}=1$ vô nghiệm

** $t_2=\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}=m$ vô nghiệm nếu $m=1$ ($=t_1$ theo *) hoặc $m<0$.

Xét $0\leq m\neq 1 \Rightarrow x+1=m^2(x-1)\Rightarrow x=\frac{1+m^2}{m^2-1}$ thỏa mãn đk $|x|\geq 1$

Kết luận : $m<0$ hoặc $m=1$ pt vô nghiệm, $0\leq m\neq 1$ nghiệm $x=\frac{1+m^2}{m^2-1}$

Cách 2. Do đk $|x|\geq 1\Rightarrow |x+1|\,|x-1|=x^2-1$ nên bình phương 2 vế của (*) và rút gọn ta được phương trình hệ quả $(m^2-1)x = m^2+1$.

* Nếu $m=+1$ hoặc $m=-1$ thì pt vô nghiệm.

** Với $m\neq 1, -1$ $x=\frac{1+m^2}{m^2-1}$ hiển nhiên thỏa mãn đk $|x|\geq 1$ thay vào pt (*) :

$\text{VT}(*)=\frac{2m^2+2m}{|m^2-1|}=\frac{2m(m+1)}{|m^2-1|}$, $\text{VP}(*)=\frac{(m+1)|2m|}{|m^2-1|}$ khi đó VT(*) = VP(*) khi $m\geq 0$

Kết luận : $m<0$ hoặc $m=1$ pt vô nghiệm, $0\leq m\neq 1$ nghiệm $x=\frac{1+m^2}{m^2-1}$

2) (1d) Điều kiện để căn thức có nghĩa (**) $x>\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ hoặc $x<\frac{1-\sqrt{3}}{2}$. Khi đó cơ số $x^2-x+1>1\Rightarrow$

(*) $\Leftrightarrow x^2 - x - 2 < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 2$. Kết hợp (**), nghiệm của (*) là $-1 < x < \frac{1-\sqrt{3}}{2}$ và $\frac{1+\sqrt{3}}{2} < x < 2$.

Câu III (2d). *1)(1d)* $\cos^5x + \sin^7x + \frac{1}{2}(\cos^3x + \sin^5x) \times \sin2x = cosx + sinx \Leftrightarrow cos^4x(cosx + sinx) + \sin^6x(\cos x + \sin x) = cosx + sinx \Leftrightarrow (\cos x + \sin x)(cos^4x + \sin^6x - 1) = 0$

* $\cos x + \sin x = 0 \Leftrightarrow x = 3\pi/4 + k\pi$

** $\cos^4x + \sin^6x = 1$ Do $\cos^4x \leqslant \cos^2x$ vaf $\sin^6x \leqslant \sin^2x$ nên phương trình $\Leftrightarrow x = k\pi/2$

2) (1d) Giả thiết

$$\cos A + \cos B + \cos C = \sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2}$$

Do $\cos A + \cos B \leqslant 2\cos\frac{A+B}{2} = 2\sin\frac{C}{2}$ (dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $A = B$)

Tương tự $\cos B + \cos C \leqslant 2\sin\frac{C}{2}$

$\cos C + \cos A \leqslant 2\sin\frac{B}{2} \Rightarrow$

$$\cos A + \cos B + \cos C \leqslant \sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $A = B = C$ đpcm.

Câu IV : (1, 5d). *1) (1d)* Xét hàm $f(x) = e^x - 1 - x, f'(x) = e^x - 1$ đổi dấu từ − sang + qua $x = 0 \Rightarrow f(x)$ đạt min tại $x = 0 \Rightarrow f(x) = e^x - 1 - x > f(0) = 0$ với $\forall x \neq 0$, đpcm

2) (0,5) Sử dụng 1) ta được $e^{\frac{1}{1+x^2}} > 1 + \frac{1}{1+x^2}$ với $\forall x \in [0, 1] \Rightarrow$

$$\int_0^1 e^{\frac{1}{1+x^2}}dx > \int_0^1 \left(1 + \frac{1}{1+x^2}\right)dx = 1 + \frac{\pi}{4}$$ đpcm

Câu V : (2,5d). 1) *(1d)* **Cách 1.** Gọi $E(x, y)$ tùy ý thuộc elíp, khi đó (do $b < a$),

$$b = b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}} = \sqrt{b^2\frac{x^2}{a^2} + y^2} \leqslant \sqrt{x^2 + y^2} =$$

$$OE \leqslant \sqrt{x^2 + a^2\frac{y^2}{b^2}} \leqslant a\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}} = a$$

Cách 2. Điểm $E(x, y)$ tùy ý thuộc elíp, khi đó tọa độ (x, y) của E có thể viết dưới dạng $x = a\cos\varphi$, $x = b\sin\varphi \Rightarrow b \leqslant OE = \sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi} \leqslant a$

2) *(1,5d)* **Cách 1.** Gọi $y = kx$ là phương trình đường thẳng OA, khi đó có thể tính OA (theo k) : $OA^2 = \frac{a^2b^2(1+k^2)}{b^2 + k^2a^2}$

Phương trình đường thẳng $OB : y = -x/k$ ($k \neq 0 \Rightarrow OB^2 = \frac{a^2b^2(1+k^2)}{a^2 + k^2b^2}$

Xét $\frac{1}{OA^2}\frac{1}{OB^2} = \frac{a^2b^2(1+k^2)^2 + (a^2-b^2)^2k^2}{a^4b^4(1+k^2)^2}$

$$= \frac{1}{a^2b^2} + \frac{(a^2-b^2)^2}{a^4b^4}\frac{k^2}{(1+k^2)^2}$$

$$\frac{1}{a^2b^2} \leqslant \frac{1}{OA^2}\frac{1}{OB^2} = \frac{1}{4S^2_{\Delta OAB}} = \frac{1}{a^2b^2} + \frac{(a^2-b^2)^2}{a^4b^4}\frac{k^2}{(1+k^2)^2} \leqslant \frac{1}{a^2b^2} + \frac{(a^2-b^2)^2}{a^4b^4}\frac{1}{4}$$

* Bất đẳng thức thứ nhất dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow k = 0$, nhưng do $k \neq 0$ nên $S_{\Delta OAB} < \frac{ab}{2}$. Mặt khác khi A, B là các điểm trùng với đỉnh elíp thì $S_{\Delta OAB} = \frac{ab}{2}$. Vậy $S_{\Delta OAB}$ đạt max tại các điểm trên elíp $(\pm a, 0)$ hoặc $(0, \pm b)$ và $S_{\max} = \frac{ab}{2}$

** Bất đẳng thức thứ hai dấu "=" xảy ra $\Rightarrow k^2 = 1 \Rightarrow S_{\Delta OAB}$ đạt min tương ứng với các điểm trên elíp $\left(\pm\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}} \pm \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$ và $S_{\min} = \frac{a^2b^2}{(a^2+b^2)}$.

Cách 2. * Giả sử $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ khi đó

$$2S_{\Delta OAB} = |x_1y_2 - x_2y_1| = ab\left|\frac{x_1}{a}\frac{y_2}{b} - \frac{x_2}{a}\frac{y_1}{b}\right|$$

$$\leqslant ab\sqrt{\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2}}\sqrt{\frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2}} = ab$$

$\Rightarrow S_{\Delta OAB} \leqslant \frac{ab}{2}$ hay $S_{\max} = \frac{ab}{2}$ khi và chỉ khi $x_1 = t\frac{a}{b}y_2$ và $x_2 = -\frac{a}{tb}y_1$, mặt khác do OA ⊥ OB hay $x_1x_2 + y_1y_2 = 0 \Rightarrow y_1y_2\left(-\frac{a^2}{b^2}\right) = 0 \Rightarrow y_1y_2 = 0 \Rightarrow A, B$ là các đỉnh của elíp.

** Sử dụng các kí hiệu như **cách 1**, xét

$$\frac{1}{S_{\Delta OAB}} = 2\frac{1}{OA}\frac{1}{OB} < \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2b^2}$$

$\Rightarrow S_{\min} = \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$ khi và chỉ khi $OA = OB$

$$\Rightarrow OA^2 = \frac{a^2b^2(1+k^2)}{b^2+k^2a^2} = OB^2 = \frac{a^2b^2(1+k^2)}{a^2+k^2b^2}$$

hay $a^2 + k^2b^2 = b^2 + k^2a^2 \Leftrightarrow k^2 = 1 \Leftrightarrow S_{\Delta OAB}$ đạt min tương ứng với các điểm trên elíp $\left(\pm\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}, +\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$ và $S_{\min} = \frac{a^2b^2}{(a^2+b^2)}$

ĐẶNG ĐÌNH BÍCH

Định lí 4 điểm và cách chứng minh
HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI NHAU
(hay mở rộng định lí Pitago)

VÕ KIM HUỆ
(Cần Thơ)

A. MỞ RỘNG ĐỊNH LÍ PITAGO VÀ ỨNG DỤNG :

Chúng ta đã quá quen thuộc với định lí Pitago cho tam giác vuông : *Bình phương cạnh huyền bằng tổng bình phương hai cạnh góc vuông.*

Nếu xem định lí pitago là

Định lí cho 3 điểm :

Cho 3 điểm ABC, AB vuông góc với AC $\Leftrightarrow$ $AB^2 + AC^2 = BC^2$

và một ứng dụng của định lí 3 điểm :

Chứng minh góc BAC là góc vuông khi

$$AB^2 + AC^2 = BC^2.$$

thì ta có thể mở rộng định lí 3 điểm thành

Định lí 4 điểm như sau :

Cho 4 điểm $ABCD$. AC vuông góc với BD $\Leftrightarrow$ $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$

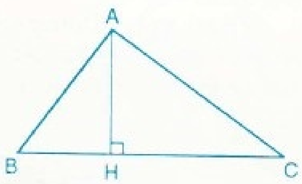
và một ứng dụng định lí 4 điểm :

Chứng minh hai đường thẳng AC và BD vuông góc với nhau khi

$$AB^2+CD^2=AD^2+BC^2.$$

B. CHỨNG MINH :

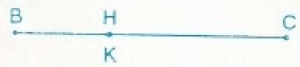
Việc tìm tòi chứng minh *định lí 4 điểm* cũng rất hấp dẫn, vì sự đa dạng của các trường hợp cần phải xét đến, có thể đặc biệt hóa từng bước chứng minh như sau :



a. Cho tam giác ABC.

AH là đường cao $\Leftrightarrow$ $AB^2+HC^2=AC^2+HB^2$

và đặc biệt hóa một lần nữa :



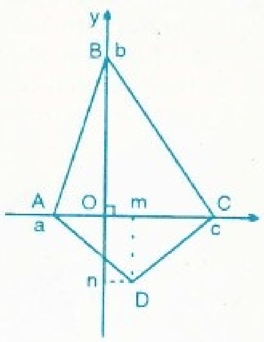
b. Cho đoạn thẳng AB. H và K trên AB.

$$H = K \Leftrightarrow HA^2 + KB^2 = KA^2 + HB^2$$

trước khi xét trường hợp tổng quát.

Sau đây là cách chứng minh *định lí 4 điểm* bằng phương pháp tọa độ :

Chọn AC là trục hoành, ta có : $A(a,\ 0)$; $C(c,\ 0)$. Chọn đường thẳng vuông góc với AC đi qua B làm trục tung ta có : $B(0,\ b)$. Gọi $D(m,\ n)$.



Chứng minh :

Ta có $AB^2 = a^2 + b^2$

$$CD^2 = (c-m)^2 + n^2 =$$
$$= c^2 - 2cm + m^2 + n^2$$
$$AD^2 = (a-m)^2 + n^2 = a^2 - 2am + m^2 + n^2$$
$$BC^2 = b^2 + c^2$$
$$AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2 \Leftrightarrow 2cm = 2am$$

vì A khác C nên $a \neq c$ do đó $m = 0$ hay D nằm trên trục tung.

Vậy AC vuông góc với BD.

Một số hệ quả :

Cho tứ giác $ABCD$. Ta có :

1. Nếu tổng bình phương hai cạnh đối diện của tứ giác bằng nhau thì hai đường chéo vuông góc với nhau và ngược lại :

AC vuông góc $BD \Leftrightarrow AB^2+CD^2=AD^2+BC^2$

2. Nếu tổng bình phương hai cạnh đối diện của tứ giác bằng tổng bình phương hai đường chéo thì hai cạnh đối diện còn lại của tứ giác vuông góc với nhau và ngược lại.

AD vuông góc $BC \Leftrightarrow AC^2+BD^2=BC^2+AD^2$

Nhận xét rằng :

a. Khi $A = D$ ta có định lí pitago cho tam giác ABC vuông tại A.

b. Khi $D = H$ là trực tâm tam giác ABC :

H là trực tâm tam giác ABC $\Leftrightarrow$ $HA^2 + BC^2 = HB^2 + AC^2 = HC^2 + AB^2$.

c. Muốn chứng minh hai đường thẳng AC và BD vuông góc với nhau ta chứng minh : $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$

C. MỘT SỐ BÀI TOÁN GIẢI BẰNG ĐỊNH LÍ 4 ĐIỂM :

Bài toán 1 :

Cho tam giác ABC. Dựng các tam giác ABC', BCA', CAB' sao cho :

$AB' = AC'$; $BA' = BC'$ và $CA' = CB'$.

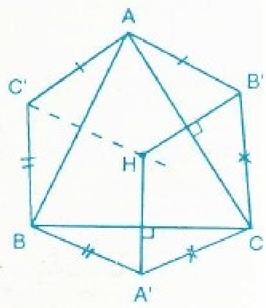
Chứng minh các đường thẳng qua các điểm A', B', C' vuông góc với các cạnh BC, CA và AB đồng quy.

Nhận xét :

Bài toán trên đây nếu xét đầy đủ các trường hợp xảy ra để chứng minh theo cách thông thường thì rất vất vả và dễ thiếu sót, thử nêu một số trường hợp :

a) A' cùng phía hoặc khác phía với A qua đường thẳng BC.

b) Chân đường cao H của đường cao $A'H$ của tam giác $A'BC$ có vị trí bên trái, trùng với B, bên trong hay bên phải đoạn BC...



Chứng minh :

Gọi H là giao điểm của hai đường vuông góc $A'x$ và $B'y$. Theo định lí 4 điểm ta có :

$$HB^2 + CA'^2 = HC^2 + BA'^2 \qquad (1)$$
$$HC^2 + AB'^2 + HA^2 + CB'^2 \qquad (2)$$

(1) + (2) : $HB^2 + AB'^2 = HA^2 + BA'^2$ (3) (vì $CA' = CB'$)

mà $AB' = AC'$ và $BA' = BC'$ nên

(3) : $HB^2 + AC'^2 = HA^2 + BC'^2$

do đó theo định lí 4 điểm ta có CH vuông góc với AB hay 3 đường thẳng qua các điểm A', B', C' vuông góc với các cạnh BC, CA và AB đồng quy.

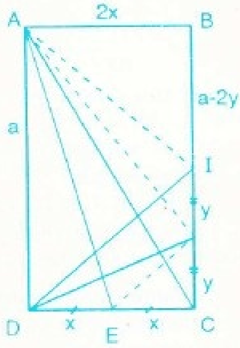
Bài toán 2 :

Cho hình chữ nhật ABCD. Đường vuông góc với đường chéo AC đi qua D cắt BC tại I.

Gọi E và F lần lượt là trung điểm của DC và CI.

Chứng minh AE vuông góc với DF.

Chứng minh :



Đặt $DE = EC = x$, $CF = FI = y$, $AD = BC = a$. Ta có : $AB = 2x$, $BI = a - 2y$, $BF = a - y$.

áp dụng định lí 4 điểm :

DI vuông góc $AC \Leftrightarrow AD^2 + CI^2 = DC^2 + AI^2$

$\Leftrightarrow a^2 + 4y^2 =$

$= 4x^2 + 4x^2 + (a - 2y)^2$

$\Leftrightarrow 8x^2 = 4ay.$

Ta có : $AD^2 + EF^2 = DE^2 + AF^2 \Leftrightarrow a^2 + x^2 + y^2 = x^2 + 4x^2 + (a - y)^2$

$\Leftrightarrow 4x^2 = 2ay$ (2)

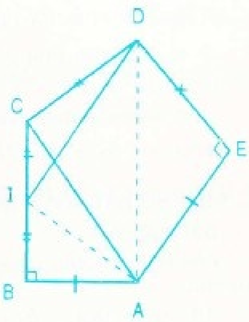
Từ (1) và (2) và áp dụng định lí 4 điểm ta có :

AE vuông góc với DF.

Bài toán 3 :

Cho ngũ giác ABCDE có : $AB = AE$, $DE = DC$, góc $\widehat{ABC} = \widehat{AED} = 90^0$.

Gọi I là trung điểm của BC. Chứng minh AC vuông góc với DI.



Chứng minh : Ta có :

$IC^2 + AD^2 =$

$= IB^2 + AE^2 + ED^2$

$= IB^2 + AB^2 + DC^2$

$= AI^2 + DC^2$

Theo định lí 4 điểm ta có AC vuông góc với DI. *Chú ý rằng ta không quan tâm đến ngũ giác ABCDE lồi, lõm, đơn hoặc không đơn.*

Qua ba bài toán trên đây, ta thấy việc sử dụng định lí 4 điểm có ưu thế rõ rệt đối với các bài toán mà việc xét tất cả các khả năng xảy ra là phức tạp và dễ thiếu sót (bài toán 1 và bài toán 3), ngoài ra phương pháp này giúp ta định hướng rõ ràng cách giải bài toán (bài 2 và các bài luyện tập). Dĩ nhiên ta có thể sử dụng định lí 4 điểm vào việc chứng minh khá lớn các bài toán chứng minh hai đường thẳng vuông góc, kể cả các bài toán không vuông góc.

MỘT SỐ BÀI TOÁN LUYỆN TẬP :

1. Cho tam giác cân ABC đỉnh A. Gọi H là trung điểm của BC. D là hình chiếu của H lên AC. M là trung điểm của HD.

Chứng minh AM vuông góc với BD

(Thi chọn học sinh giỏi Cần Thơ)

2. Tam giác ABC có điểm O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác, $AB = AC$, D là trung điểm của AB và E là trọng tâm tam giác ACD. Chứng minh rằng OE vuông góc với CD

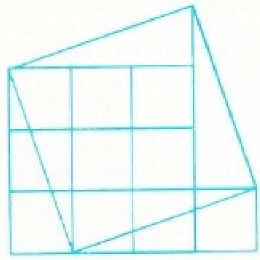
(Thi vô địch Anh 1983)

(xem tiếp trang 14)

Giải đáp bài

CẮT GHÉP HÌNH VUÔNG

Nhiều bạn đã tham gia giải và có nhiều "sáng kiến" khác nhau



(Ngô Quốc Anh, 8 Toán, trường chuyên Nguyễn Du, Buôn Ma Thuột, **Đắc Lắc** ; Đỗ Quang Khánh, 6A_2, trường trọng điểm Uông Bí, **Quảng Ninh**) Lời giải dễ hiểu từ hình 1.

Các bạn Trình Đình Hùng, 9 Toán, Trần Đăng Ninh, **Nam Định** ; Lê Minh Tuấn, 8A, Quang Trung, **Yên Bái** ; Phạm Thành vinh, 6 Toán, Năng khiếu Yên Khánh, **Ninh Bình** ; Mai Lệ Thủy, 159/1C, Bình Giã, **Vũng Tàu** ; Phạm Viết Khoa, 9 Toán, Tiên Sơn, **Bắc Ninh** ; Lê Thị Hải Vân, 6E, Năng Khiếu **Thanh Hóa** ; ... cũng có "tư tưởng" giải như thế, nhưng trình bày phức tạp hơn.

Nhận xét : Không có bạn nào để ý đến *yếu tố thực tế* : cần phải nghĩ ra cách cắt và ghép mà số miếng gỗ bị cắt ra là ít nhất.

LÊ THỐNG NHẤT

CHIA HÀNG

Ba khách hàng muốn chia nhau một lô hàng mà họ vừa mua chung được. Dù các loại trong lô rất đa dạng nhưng mỗi người đều tin rằng mình có thể chia được lô hàng đó thành ba phần đều nhau. Chỉ có điều hai người kia thì lại không tin anh ta.

1) Vậy bạn hãy cho biết họ phải hành động thế nào để phân chia được lô hàng đó sao cho cả ba người đều tin rằng mình đã lấy được không ít hơn một phần ba giá trị lô hàng.

2) Hãy giải bài toán trên trong trường hợp có n khách hàng ($n \geq 4$)

NGUYỄN CÔNG SỨ

ISSN : 0866 - 8035
Chỉ số : 12884
Mã số : 8BT31M7

Sắp chữ tại TTVT Nhà xuất bản giáo dục
In tại nhà máy in Diên Hồng, 57 Giảng Võ
In xong và nộp lưu chiểu tháng 3/1997

Giá 2.000đ
Hai nghìn đồng