BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ★ HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

2 (236)
1997
NĂM THỨ 34

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG

- TÍNH SỐ ĐO GÓC
- MỘT HỌC SINH ẤN ĐỘ ĐƯỢC TẶNG GIẢI THƯỞNG LỚN CỦA MĨ DÀNH CHO SINH VIÊN
- PHƯƠNG PHÁP GIÁN TIẾP ĐỂ VIẾT PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG
- ĐỀ THI TUYỂN SINH MÔN TOÁN 1996 TRƯỜNG ĐHBK HÀ NỘI
- ĐÔI KHI TƯỞNG LÀ ĐÚNG
- ĐỊNH LÍ EULER - LAGRANGE VỀ TỔNG CỦA BỐN BÌNH PHƯƠNG
- HÀM SỐ LIÊN TỤC VÀ ỨNG DỤNG

Cô giáo Nguyễn Thị Nhàn và học sinh giỏi huyện Định Quán, Đồng Nai

TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ
MATHEMATICS AND YOUTH

MỤC LỤC

Trụ sở tòa soạn :
45B Hàng Chuối, Hà Nội ĐT : 8.213786
231 Nguyễn Văn Cừ, TP Hồ Chí Minh ĐT : 8.356111
Trình bày : QUỐC HỒNG

Tổng biên tập : NGUYỄN CẢNH TOÀN
Phó tổng biên tập : NGÔ ĐẠT TỨ, HOÀNG CHÚNG
Biên tập và trị sự : VŨ KIM THỦY, LÊ THỐNG NHẤT

Dành cho các bạn Trung học cơ sở

TÍNH SỐ ĐO GÓC VỚI HỌC SINH LỚP 7

HÀ ĐỨC VƯỢNG
(Hà Nam)

Với một bài toán, việc định hướng để tìm ra lời giải là một công việc rất quan trọng, đặc biệt là với các bạn học sinh lớp 7, mới được tiếp xúc với hình học. Khi các bạn đứng trước một bài tập hình, để có một định hướng cho việc tìm ra lời giải quả thật không phải là một công việc đơn giản chút nào. Do đó tôi muốn trao đổi cùng các bạn vài suy nghĩ về định hướng giải các bài toán "Tính số đo góc".

Trước hết ta để ý đến những tam giác chứa những góc có số đo xác định :

1. Tổng các góc trong một tam giác bằng 180^o. Do đó tam giác cân có 1 góc có số đo xác định thì các góc còn lại có số đo xác định.

2. Tam giác đều : 3 góc bằng nhau bằng 60^o.

3. Tam giác vuông cân : 2 góc bằng nhau bằng 45^o và 1 góc 90^o.

4. Tam giác vuông có 1 cạnh góc vuông bằng nửa cạnh huyền thì góc đối diện với cạnh góc vuông đó bằng 30^o. (Nửa tam giác đều).

Vậy nên chăng khi gặp bài toán "tính số đo góc" bạn hãy nghĩ đến việc tính số đo của góc đó thông qua mối liên hệ với các góc của một trong các hình chứa góc có số đo hoàn toàn xác định nêu trên.

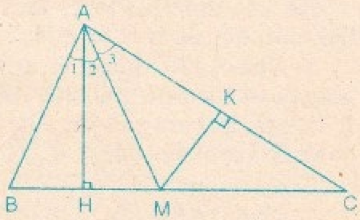
(Thường là chúng ta xét mối liên hệ bằng nhau của 2 tam giác rồi rút ra góc tương ứng của chúng bằng nhau).

Nhưng trong bài cho lại không có một hình nào là tam giác đều, tam giác cân, tam giác vuông có cạnh góc vuông bằng nửa cạnh huyền thì sao ? Bạn hãy tạo ra một trong các hình đó được không ? Tôi cho rằng với suy nghĩ như vậy sẽ giúp bạn vẽ được những đường phụ thích hợp để bạn có thể tìm ra lời giải của bài toán.

Sau đây xin nêu ra một số ví dụ minh họa :

1. Tính số đo góc thông qua việc phát hiện ra tam giác vuông có cạnh góc vuông bằng nửa cạnh huyền :

Ví dụ 1 : Tính các góc của ΔABC biết rằng đường cao AH, trung tuyến AM chia BAC thành 3 góc bằng nhau.



* Vẽ $MK \perp AC$.

ΔABM cân ở A (đường cao AH đồng thời là phân giác) $\rightarrow H$ là trung điểm BM.

$$HM = \frac{1}{2}BM = \frac{1}{4}BC.$$

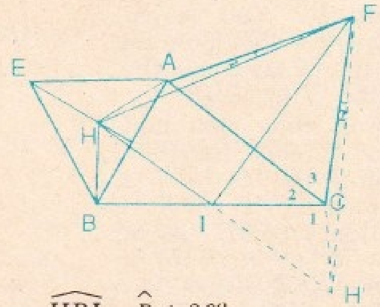
Δ vuông $AHM = \Delta$ vuông $AKM \Rightarrow HM = MK$

Vậy $MK = \dfrac{1}{4}BC$, hay $MK = \dfrac{1}{2}MC$

Ta có ΔMKC là tam giác vuông có cạnh góc vuông bằng $\dfrac{1}{2}$ cạnh huyền $\rightarrow \widehat{C} = 30^o$. Từ đó ta tính được $\widehat{A} = 90^o$; $\widehat{B} = 60^o$. ΔABC đã cho có 3 góc : $A = 90^o$; $B = 60^o$; $C = 30^o$.

Ví dụ 2 : Cho ΔABC, ở miền ngoài của tam giác ta vẽ các tam giác đều ABE và ACF. H là trực tâm ΔABE, I là trung điểm BC. Tính các góc của ΔFIH.

* Trên tia đối của tia IH ta lấy H' sao cho $IH = IH'$. $\Delta IBH = \Delta ICH'$ (c.g.c) $\rightarrow CH' = BH = HA$.



$\widehat{C_1} = \widehat{HBI} = \widehat{B} + 30^o$

$\Rightarrow \widehat{FCH'} = 360^o - (\widehat{C_3} + \widehat{C_2} + \widehat{C_1})$

$= 360^o - (90^o + \widehat{B} + \widehat{C})$

$= 90^o + \widehat{A}$, (ΔABC, $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^o$)

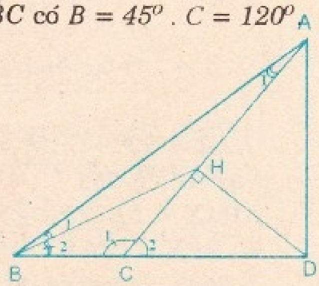
Do đó $\Delta AHF = \Delta CH'F$ (c.g.c)

$AF = CF$; $CH' = AH$; $\widehat{HAF} = 90^o + \widehat{A} = \widehat{H'CF} \Rightarrow FH = FH'$. $\Delta FHH'$ cân ở F.

Mặt khác do 2 tam giác bằng nhau nên $\widehat{F_1} = \widehat{F_2}$, mà $\widehat{AFC} = 60^o \Rightarrow \widehat{HFH'} = 60^o$ vậy $\Delta FHF'$ đều. $\Rightarrow \Delta HIF$ bằng nửa tam giác đều và có $I = 90^o$; $H = 60^o$; $F = 30^o$.

2. Tính số đo góc thông qua việc phát hiện ra tam giác vuông cân :

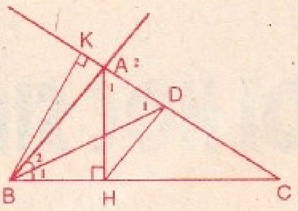
Ví dụ 1 : Cho ΔABC có $\widehat{B} = 45^o$. $\widehat{C} = 120^o$. Trên tia đối của tia CB lấy điểm D sao cho $CD = 2CB$. Tính $\widehat{ADB}$.



* $\widehat{C_1}$ và $\widehat{C_2}$ là 2 góc kề bù nên $\widehat{C_1} = 120^o$ $\Rightarrow \widehat{C_2} = 60^o$ vẽ $DH \perp AC$ ta có Δ vuông HCD có $D = 30^o$ vậy $CH = \dfrac{1}{2}CD$; $BC = \dfrac{1}{2}CD$ vậy ΔCBH cân ở C. $\Rightarrow$ $B_2 = 30^o$. Vậy ΔHBD cân ở H.

Ta có $B_1 = 15^o$ và $A_1 = 15^o \Rightarrow \Delta HBA$ cân ở H. Vậy ΔHAD vuông cân ở H. Từ đó ta tính được $\widehat{ADB} = 45^o + 30^o = 75^o$.

Ví dụ 2 : Cho ΔABC có đường cao AH ; đường phân giác BD, $\widehat{AHD} = 45^o$. Tính $\widehat{ADB}$.



* Vẽ $BK \perp AC$. Xét ΔABH có BD là đường phân giác trong ; HD là đường phân giác góc ngoài đỉnh $H \Rightarrow AD$ là đường phân giác góc ngoài đỉnh $A \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{A}_2$.

Mà $\hat{A}_1 = \widehat{KBH}$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc)

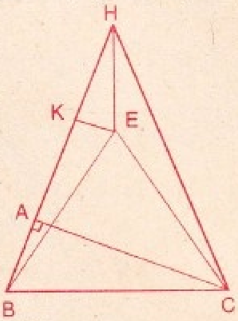
$\Rightarrow \hat{A}_1 = \widehat{KDB} + \hat{B}_1$ (1). $\hat{A}_2 = \widehat{KAB}$ (đối đỉnh)

$\widehat{KAB} = \hat{D}_1 + \hat{B}_2$ (góc ngoài của ΔABD tại A)

$\Rightarrow \hat{A}_2 = \hat{D}_1 + \hat{B}_2$ (2)

Vì $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$; $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$ nên từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{KBD} = \hat{D}_1 \Rightarrow \Delta KBD$ vuông cân tại K, vậy $\widehat{KDK} = \widehat{ADB} = 45^o$.

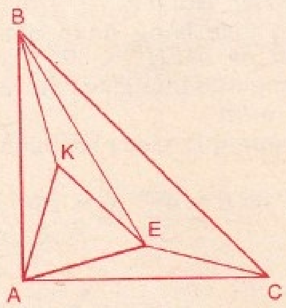
3. Tính số đo góc thông qua việc phát hiện ra tam giác đều :



Ví dụ 1 : Cho ΔABC vuông ở A, $B = 75^o$. Trên tia đối của tia AB lấy H sao cho $BH = 2AC$. Tính $\widehat{BHC}$.

* Trên cùng nửa mặt phẳng bờ BC chứa đỉnh A vẽ tam giác EBC đều $\Rightarrow E \in$ miền trong ΔHBC gọi K là trung điểm của BH. Ta có $\widehat{KBE} = 75^o - 60^o = 15^o \Rightarrow \Delta ABC = \Delta KEB$ ($KB = AC$; $EB = BC$; $\widehat{KBE} = \widehat{ACB} = 15^o$).

$\Rightarrow \widehat{EKB} = \widehat{BAC} = 90^o$. Mà K là trung điểm $BH \Rightarrow \Delta EHB$ cân tại E. $\Rightarrow \widehat{EBH} = \widehat{EHB} = 15^o$ vậy $\widehat{BEH} = 150^o$. Do đó $\widehat{CEH} = 150^o \Rightarrow \Delta EHC = \Delta EHB$ (c.g.c) (EH chung ; $\widehat{BEH} = \widehat{CEH} = 150^o$; $EB = EC \Rightarrow \widehat{BHE} = \widehat{CHE} = 15^o$. Hay $\widehat{BHC} = 30^o$.



Ví dụ 2. Cho ΔABC vuông cân ở A ; Điểm E nằm trong tam giác sao cho $\widehat{EAC} = \widehat{ECA} = 15^o$. Tính $\widehat{AEB}$.

* Trong ΔABC lấy K sao cho $\widehat{KBA} = \widehat{KAB} = 15^o \Rightarrow \Delta KAB = \Delta EAC$ (g.c.g) $\Rightarrow AK = AE$.

$\widehat{KAE} = 90^o - 2.15^o = 60^o$.

Vậy ΔAKE đều.

$\Delta BAK = \Delta BEK$ (c.g.c)

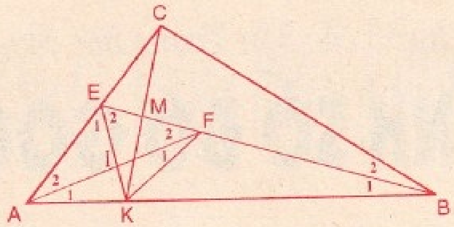
$\Rightarrow \widehat{BEK} = \widehat{BAK} = 15^o. \Rightarrow \widehat{BEA} = 75^o$.

4. Tính số đo góc thông qua việc phát hiện ra tam giác cân có 1 góc đã biết số đo.

Ví dụ 1. Cho ΔABC có $A = 50^o$, $B = 20^o$. Trên đường phân giác BE của tam giác ta lấy F sao cho $\widehat{FAB} = 20^o$ Gọi I là trung điểm của AF, EI cắt AB tại K. Tính $\widehat{KCB}$.

* CK cắt BE tại M.

$\hat{F}_2 = \hat{A}_1 + \hat{B}_1 = 30^o$ (góc ngoài của ΔFAB)



$\hat{A}_2 = 30^o \Rightarrow \hat{F}_2 = \hat{A}_2. \Rightarrow \Delta EAF$ cân ở E.

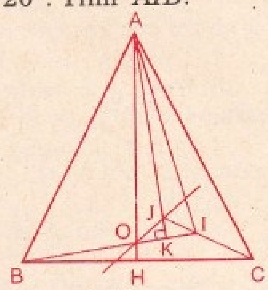
$\Rightarrow \widehat{AEF} = 120^o$.

Trung tuyến AI đồng thời là phân giác $\Rightarrow \hat{E}_1 = \hat{E}_2 = 60^o$ và từ đó $\Rightarrow \hat{E}_3 = 60^o$.

$\Delta BEK = \Delta BEC$ (g.c.g) (EB chung, $\hat{E}_3 = \hat{E}_2 = 60^o$, $B_1 = B_2 = 10^o$)

$\Rightarrow \Delta BCK$ cân tại B góc ở đỉnh $\hat{B} = 20^o$ vậy $\widehat{CKB} = \frac{1}{2}(180^o - 20^o) = 80^o$.

Ví dụ 2 : Cho ΔABC cân đỉnh A. $\hat{A} = 80^o$. I là điểm thuộc miền trong của tam giác thỏa mãn $\widehat{IBC} = 10^o$, $\widehat{ICB} = 20^o$. Tính $\widehat{AIB}$.



* Đường cao AH của ΔABC cắt BI tại O ; vẽ $AK \perp BI$, AK cắt CI tại J. $\widehat{OBH} = \widehat{HAK} = 10^o$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc).

$\widehat{HAC} = 40^o \Rightarrow \widehat{KAC} = 30^o \Rightarrow \widehat{ICA} = 30^o$

$\Rightarrow \Delta JAC$ cân tại $J \Rightarrow JA = JC$ (1)

ΔOBC cân tại O (OH vừa là đường cao, trung tuyến) $\Rightarrow \widehat{OBC} = \widehat{OCB} = 10^o \Rightarrow \widehat{OCA} = \widehat{OAC} = 40^o$. Vậy ΔOAC cân ở $O \Rightarrow OA = OC$ (2)

Từ (1) và (2) $\rightarrow OJ$ là đường trung trực của AC và cũng là phân giác $\widehat{AOC} \Rightarrow \widehat{AOJ} = \frac{1}{2}$. $100^o = 50^o$. $\widehat{IOC}$ là góc ngoài của ΔOBC tại O $\Rightarrow \widehat{IOC} = 20^o$. Vậy $\widehat{OIJ} = 30^o$. Do đó $\widehat{AOI} = 80^o$. Mà $\widehat{BIO}$ là góc ngoài của ΔIBC tại $I \Rightarrow \widehat{BIO} = 30^o$.

$\Rightarrow \Delta IOJ$ cân tại J. Mà JK là đường cao $\Rightarrow JK$ là trung trực của OI. Hay AK là trung trực của OI ta có :

ΔAOI cân tại A. $\widehat{AIB} = \widehat{AOI} = 80^o$.

Để kết thúc bài viết, tôi xin nêu ra một số bài toán để các bạn tự giải :

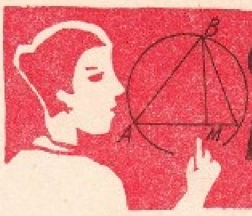
1. Cho ΔABC nhọn, ở miền ngoài của tam giác ta vẽ các tam giác đều ABC' và ACB'. K và L thứ tự là trung điểm của $C'A$ và $B'C$. $M \in$ cạnh BC sao cho $BM = 3\,MC$.

Tính các góc của ΔKLM.

2. Cho ΔABD và ΔCBD (A và C thuộc hai nửa mặt phẳng đối nhau bờ BD). Biết $\widehat{BAC} = 50^o$, $\widehat{ABD} = 60^o$, $\widehat{CBD} = 20^o$, $\widehat{CDB} = 30^o$. Tính $\widehat{DAC}$ và $\widehat{ADB}$

3. Cho ΔABC cân đỉnh A, $\hat{A} = 20^o$. Các điểm M, N thứ tự trên các cạnh AB, AC sao cho $\widehat{BCM} = 50^o$, $\widehat{CBN} = 60^o$.

Tính $\widehat{MNA}$.



GIẢI BÀI kì trước

Bài T1/232. *Cho a, b là hai số tự nhiên thỏa mãn $a^4 = 1996\,b^8 - 1$. Chứng minh rằng tích ab là bội của 5.*

Lời giải. (Dựa theo Lê Anh Vinh – Hà Nội, 8A, Giảng Võ, Q. Ba đình) Nếu $b \,\vdots\, 5$ thì hiển nhiên $ab \,\vdots\, 5$, còn nếu $b \not\vdots\, 5$ thì $b^4 - 1 \,\vdots\, 5$ vì $b(b^4 - 1) \,\vdots\, 5$ (định lí Fermat). Như vậy, ta có : $a^4 = 1996\,b^8 - 1 = 1995\,b^8 + b^8 - 1 = 1995\,b^8 + (b^4+1)(b^4-1)$, chia hết cho 5 vì 1995 và $b^4 - 1$ đều chia hết cho 5. Suy ra $a \,\vdots\, 5$, do đó $ab \,\vdots\, 5$.

Chú ý. Ta có thể chứng minh không tồn tại hai số tự nhiên a, b như đã cho.

Thật vậy, do $1996\,b^8 - 1$ lẻ nên a^4 lẻ, suy ra a lẻ, do đó $a^4 \equiv 1 \pmod 4$ (1). Trong khi đó thì $1996\,b^8$ chia hết cho 4 nên $1996\,b^8 - 1 \equiv 3 \pmod 4$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $a^4 \neq 1996\,b^8 - 1$.

Nhận xét. Có 324 bài giải, phần lớn đều giải như trên nhưng không có phần chú ý. Ngoài bạn *Lê Anh Vinh*, còn có 6 bạn nữa có nêu phần chú ý. Đó là : *Đinh Hoàng Yến* (**Hà Nội**), 8H THCS Trưng Vương, Q. Hoàn Kiếm), *Trương Thị Thao* (**Hà Bắc**, 9 Năng Khiếu Tiên Sơn), *Đào Ngọc Minh* (**Hà Bắc** 9T Năng Khiếu Yên Dũng), *Đỗ Thị Tuyết Minh* (**Phú Thọ**, 7A Toán Chuyên cấp II), *Nguyễn Hoạch Trúc Sinh* (**Qui Nhơn**, 9A Quốc Học), *Phạm Quốc Hùng*. Hoan nghênh các bạn có tác phong đào sâu suy kỹ bài toán sau khi đã giải xong và thành thật xin lỗi bạn đọc về điều sơ suất nêu trên trong đề ra.

DẶNG VIÊN

Bài T2/232 : *Tìm nghiệm nguyên của phương trình sau :*

$$y^2 = -2(x^6 - x^3y - 32)$$

Lời giải. của *Lương Thế Nhân*, 8A, chuyên Bạc Liêu, Minh Hải

Ta có : $y^2 = -2(x^6 - x^3y - 32)$

$\Leftrightarrow 2x^6 + y^2 - 2x^3y = 64$

$\Leftrightarrow (x^3)^2 + (x^3 - y)^2 = 64 = 8^2$

Từ đó suy ra ta có

hoặc $\begin{cases} x^3 = 0 \\ (x^3 - y)^2 = 8^2 \end{cases}$ (1) hoặc $\begin{cases} (x^3)^2 = 8^2 \\ (x^3 - y) = 0 \end{cases}$ (2)

– Trường hợp (1) : $x^3 = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y^2 = 8^2 \Rightarrow y = \pm 8$

– Trường hợp (2) : $(x^3)^2 = 8^2 \Rightarrow x^3 = \pm 8 \Rightarrow x = \pm 2$

$\Rightarrow y = x^3 = \pm 8$

Vậy phương trình có 4 nghiệm nguyên là :

$(x, y) = (0,8)$; $(0, -8)$; $(2, 8)$; $(-2, -8)$

Nhận xét. Hầu hết các lời giải gửi đến đều đúng. Các bạn sau đây có lời giải tốt : **Hà Bắc** : *Đào Ngọc Minh*, 9T, NK Yên Dũng ; *Phạm Viết Khoa*, 9T, NK Tiên sơn. **Vĩnh Phú** : *Lê Văn Hùng, Nguyễn Xuân Hiếu*, 9A, Mê Linh ; *Trần Thị Thu Hà*, 9A, Chuyên Phong Châu ; *Tạ Thanh Xuân*, $9A_2$, Chuyên Việt Trì, *Chu Bùi Ngọc*, 9T, Chuyên TX Phú Thịnh **Hà Tây**, *Tô Ngọc Phan*, 9K, Lê Lợi, TX Hà Đông. **Hải Phòng** : *Nguyễn Việt Phương* $10C_1$, Trần Nguyên Hãn. **Nam Định** : *Hoàng Đình Tuấn, Trần Quang Vinh*, 8T, NK Ý Yên. **Thanh Hóa**. *Nguyễn Văn Hoàng*, 7 Tự nhiên 2, NK Bỉm Sơn ; *Hoàng Ngọc Dương*, 9A, NK Hoằng Hóa *Vũ Đức Nghĩa*, 8A, Đông Cương ; *Trần Nam Trung*, 9F, Lam Sơn. **Nghệ An** : *Phạm Bá Trung*, $10A_1$, Nguyễn Xuân Ôn, Diễn Châu **Hà Tĩnh** : *Nguyễn Viết Cường, Phạm Công Đức, Phan Thanh Đồng, Dương Chí Vinh*, 9CT, NK Hà Tĩnh. **Thừa Thiên – Huế** : *Phạm Nguyên Quý*, 9A, Nguyễn Tri Phương, Huế. **Quảng Ngãi** *Hà Quang Đạt, Ngô Minh Trí*, 7T, Chuyên Lê Khiết. **Đaklak** *Lưu Minh Ngọc*, Chuyên Phan Chu Trinh, Buôn Ma Thuột. **Lâm Đồng** : *Đoàn Nguyễn Huy Khôi, Lê Trọng Thọ, Đoàn Xuân Thủy, Nguyễn Thị Thanh Thủy*, 9A2, Lê Lợi, Di Linh. **Khánh Hòa** : *Bùi Thanh Mai*, 9T, Lê Quý Đôn, Nha Trang. **TP Hồ Chí Minh** : *Chung Nhân Phú*, $9T_1$, Nguyễn An Khương, Hóc Môn. **Vĩnh Long** : *Lâm Xuân Nhã*, $9T_2$, Nguyễn Bỉnh Khiêm. **An Giang** : *Hoàng Thanh Lâm, 9T, Thoại Ngọc Hầu, Long Xuyên*. **Minh Hải** : *Phạm Việt Lan*, $7A_1$, Chuyên TX Bạc Liêu.

NGÔ ĐẠT TỨ

Bài T3/232 : *Cho x, y là hai số thực thỏa mãn*

$$x^2 + y^2 = x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}$$

Chứng minh rằng $3x + 4y = 5$

Lời giải : Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpxki :

$(x^2 + y^2)^2 = (x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2})^2 \leq$

$\leq (x^2 + y^2)(2 - (x^2 + y^2))$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 1$

Lại có $(3x + 4y)^2 \leq (3^2 + 4^2)(x^2 + y^2) = 25$

$3x + 4y \leq 5$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x > 0, y > 0 \\ \dfrac{x}{y} = \dfrac{3}{4} \end{cases}$ suy ra $x = \dfrac{3}{5}, y = \dfrac{4}{5}$

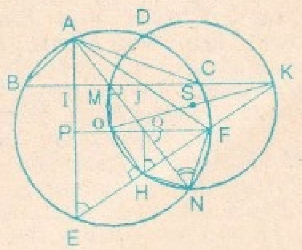
Nhận xét : Rất đông các bạn tham gia giải bài toán này. Tất cả đều làm đúng. Một số bạn có lời giải tốt như *Dương Thế Nhân* 8 **Bạc Liêu**, *Trương Thị Thao* 9 **Hà Bắc**, *Đoàn Nguyễn huy Khôi* 9 **Lâm Đồng**, *Dương Tuấn Anh* 8 **Hà Tĩnh**, *Mai Như Ngọc* 9 **Thanh Hóa**, *Nguyễn Thế Vinh* 9T **Nam Hà**, *Hà Quang Chiến* 9 **Vĩnh Phú**, *Dương Thị Thanh Minh* 8 **Đắc Lắc**, *Nguyễn Việt Hòa* 7 **Hải Phòng**, *Đoàn Thanh Tùng* 8 **Hà Nội**,...

DẶNG HÙNG THẮNG

Bài T4/232. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), gọi M là trung điểm của BC. Trên đường thẳng BC có hai điểm I, J di động luôn luôn đối xứng với nhau qua M. Gọi E, F lần lượt là giao điểm thứ hai của AI, AJ với đường tròn (O) và H là trung điểm của EF. Tìm quỹ tích điểm H.*

Lời giải. Gọi N là giao điểm thứ hai của tia AM với (O)(*). Với $AB = AC$, dễ dàng thấy quỹ tích cần tìm là các điểm trong của đoạn thẳng AN. Với $AB \neq AC$, chẳng hạn $AB < AC$, ta có

EF không song song mà cắt BC tại một điểm gọi là $K^{(*)}$. Qua F kẻ đường thẳng song song với BC cắt AE, AN tương ứng tại các điểm P, Q. Ta có :



$\frac{IM}{PQ} = \frac{AM}{AQ} = \frac{MJ}{QF}$, mà $IM = IJ$ (gt) nên $PQ = QF$, và Q là trung điểm của PF. Hơn nữa, theo giả thiết thì H là trung điểm của EF nên QH là đường trung bình trong ΔFPE, do đó $QHF = PEF$ (đồng vị). Mà $PEF = QNE$ (nội tiếp (O) cùng chắn ACF). Suy ra $QHF = QNF$, nên tứ giác $QHNF$ nội tiếp và do đó ta có $NHE = NQF$. Và lại, $NQF = NMC$ (đồng vị), nên $NHF = NMC$, suy ra tứ giác $NHMK$ nội tiếp (1). Mặt khác, do M, H là các trung điểm của BC, EF nên $OMK = 90^o = OHK$ và tứ giác $OMKH$ nội tiếp (2). Từ (1), (2) ta có 5 điểm O, M, H, N, K nằm trên đường tròn đường kính OK. Do M, N, H cố định nên đường tròn đó cố định, và giao điểm thứ hai của nó với đường thẳng BC là K cũng cố định. Gọi S là trung điểm của OK (*), ta có S cố định, OS không đổi, và H thuộc đường tròn $(S ; OS)$. Gọi D là giao điểm thứ hai của (S) với $(O)^{(*)}$, do H là trung điểm của dây EF nên nằm bên trong (O), và do đó chỉ nằm trên cung DON. Đảo lại, lấy điểm H_1 trên cung DON, gọi E_1, F_1 là các giao điểm của H_1K với (O) (F_1 nằm giữa H_1, K), ta có $\widehat{OH_1K} = 90^o$ (nội tiếp (S), chắn đường kính OK) nên H_1 là trung điểm của E_1F_1. Gọi I_1 là giao điểm của AE_1 với BC, J' là điểm đối xứng với I_1 qua M ; F' là giao điểm thứ hai của tia AJ' với (O). Theo phần thuận ở trên, ta có F' thẳng hàng với E_1, K nên là giao điểm thứ hai của KE_1 với (O) và do đó trùng với F_1, hay H_1 là một điểm của quỹ tích đang xét. Vậy quỹ tích là cung DON của đường tròn $(S ; OS)$ trong đó K, N, S, D được xác định tại các dấu (*).

Nhận xét. 1) Có 20 bạn giải bài này và đều giải đúng với phần lớn lời giải tương tự trên, trong đó nhiều bạn trình bày dài phần đảo do không biết tận dụng phần thuận.

2) Ngoài ra, các bạn sau đây có lời giải độc đáo và hay : *Trần Khoa Văn* và *Trịnh Quốc Chung* (**Nghệ An**, 9A NK Quỳnh Lưu), đã giải theo như sau : Gọi S là giao điểm của tiếp tuyến tại A của (O) với đường thẳng BC ; K là điểm đối xứng với S qua M, suy ra S, M đều cố định, sau đó dùng định lí Ménélaus để chứng minh E, F, K thẳng hàng, từ đó tiếp tục chứng minh như trên.

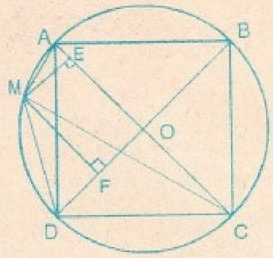
ĐẶNG VIỄN

Bài T5/232 : *Cho hình vuông ABCD nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R. Chứng minh rằng với mọi điểm M thuộc (O, R) ta có tổng $MA^4 + MB^4 + MC^4 + MD^4$ là một hằng số.*

Lời giải. Nối M với A, M với C ta có $\widehat{AMC} = 90^o$. Theo định lí Pitago ta có :

$$MA^2 + MC^2 = AC^2 = (2R)^2 = 4R^2$$

$\Rightarrow (MA^2 + MC^2)^2 = 16R^4$. Do đó $MA^4 + MC^4 = 16R^4 - 2MA^2 . MC^2$ (1)



ΔAMC vuông nên nếu hạ $ME \perp AC$ ta có $MA.MC = ME.AC = ME.2R$ (cùng bằng $2S_{\Delta AMC}$) $\Rightarrow MA^2.MC^2 = 4R^2 . ME^2$

Thay vào (1) ta có :

$$MA^4 + MC^4 = 16R^4 - 8R^2 . ME^2$$

Tương tự, hạ $MF \perp BD$ có :

$$MB^4 + MD^4 = 16R^4 - 8R^2 . MF^2.$$

Cộng theo vế hai đẳng thức sau cùng ta được :

$$MA^4 + MB^4 + MC^4 + MD^4 = 32R^4 - 8R^2(ME^2 + MF^2) \quad (2)$$

Do $NEOF$ là hình chữ nhật nên $ME^2 + MF^2 = MO^2 = R^2$.

Thay vào (2) ta có :

$$MA^4 + MB^4 + MC^4 + MD^4 = 24R^4 = \text{const}.$$

Nhận xét. Giải tốt bài này có các bạn :

Tuyên Quang : *Nguyễn Quốc Tuấn*, 9B Lê Quý Đôn ; **Yên Bái** : *Nguyễn Hoàng Điệp*, 9A, Quang Trung, **Thái Nguyên** : *Vũ Thái Hòa*, THCS Năng Khiếu, **Hòa Bình** : *Đỗ Thị Thu Hà*, 9A, Hữu Nghị B, **Phú Thọ** : *Nguyễn Quốc Toàn*, 9A$_1$ trường THCS Dệt Việt Trì, *Tống Trường Hải*, 9T Chuyên cấp II Phú Thọ ; **Vĩnh Phúc** : *Nguyễn Trung Lập*, 9B Chuyên Yên Lạc ; *Nguyễn Thu Trang*, 6A Chuyên Vĩnh Tường ; **Bắc Ninh** : *Hoàng Tùng*, 9 Chuyên Tiên Sơn ; **Hà Tây** : *Hoàng minh Hoàng*, 9B Chuyên Ứng Hòa, *Tô Ngọc Phan*, 9K Lê Lợi, Hà Đông ; **Hải Dương** : *Đào Văn Huy* 8T Năng khiếu tỉnh ; **Quảng Ninh** : *Nguyễn Thị Thu Hà*, 9A THCS Trọng điểm, Cẩm phả, **Hải Phòng** : *Hoàng Giang Sơn*, 9T Chu Văn An ; **Hà Nội** : *Vũ Phương Nhi*, 8H, Lê Thế Thắng, 9H, Trưng Vương, *Vũ Nhật Linh*, 8C Amsterdam, *Đường Ngọc Lan*, 9CT Chuyên Từ Liêm, *Đào Thế Vũ*, 9A$_1$ Giảng Võ ; **Nam Định** : *Trần Đình Hùng*, *Nguyễn Văn Trung*, *Phạm Thu Giang*, *Phạm Ngọc Hưng*, *Hà Thanh Tuấn*, 9T Trần Đăng Ninh, *Trần Quang Vinh*, *Hoàng Đình Tuấn*, 8T Năng khiếu Ý Yên, *Ngô Minh Đức*, *Đỗ Xuân Toàn*, 9T Chuyên Xuân Thủy ; **Thanh Hóa** : *Hán Minh Trung*, 7E Năng khiếu TP, *Ngô Thanh Tùng*, 9T Lam Sơn ; **Nghệ An** : *Trịnh Quốc Chung*, 9A NK Quỳnh Lưu, *Nguyễn Chiến Thắng*, 9B Trường Thi, Vinh ; **Hà Tĩnh** : *Phan Thanh Đồng* : 9T$_1$ PTTH NK Hà Tĩnh ; **Quảng Bình** : *Hoàng Hồ Quang*, 9TNK Hải Đình, Đồng Hới. **Thừa Thiên - Huế** : *Phạm Nguyên Quý*, 9^1 Nguyễn Tri Phương, *Lê Thị Hạnh*, 8C Phú Thượng, Phú Vang ; **Đà Nẵng** : *Võ Trung Thành*, 9T Nguyễn Khuyến ; **Quảng Ngãi** : *Nguyễn Thị Xuân Nương*, 9A Chuyên Nguyễn Nghiêm, Đức Phổ ; *Mai Hậu Giang*, 9T, Lê Khiết ; **Bình Định** : *Dương Hải Châu*, 9 Trọng điểm Phú Mỹ ; *Nguyễn Hoạch Trúc Sinh*, 9A Quốc học Quy Nhơn ; **Phú Yên** : *Trần Thanh Phú* : 8A Lương Văn Chánh, Tuy Hòa ; **Khánh Hòa** :

Bùi Thanh Mai, 9T Lê Quý Đôn, Nha Trang ; **Đắc Lắc** : *Tăng Thị Hà Yên, Phạm Lan Hương*, 8T Chuyên Nguyễn Du, Buôn Ma Thuột. **Lâm Đồng** : *Phan Thị Thanh Hà*, 8A1, Quang Trung, Đà Lạt. *Tô Thu Hiền* 9A1 Quang Trung, Bảo Lộc. **TP HCM** : *Nguyễn Đỗ Duy Thức*, 8[1] Hồng Bàng, *Phan Duy Anh*, 8[1] Hồng Bàng, Q5, *Nguyễn Hữu Tuấn*, 9T THCS Vân Đồn, *Nguyễn Thị Thiên Thanh*, *Chung Nhân Phú*, 9T, Nguyễn An Khương, Hóc môn ; **An Giang** : *Hoàng Thanh Lâm*, 9T Chuyên Thoại Ngọc Hầu ; **Vĩnh Long** : *Nguyễn Đỗ Thái Nguyên, Lâm Xuân Nhã*, $9T_2$ Nguyễn Bỉnh Khiêm ; **Bạc Liêu** : *Trương Yến Nhi, Lương Thế Nhân*, 8A Chuyên Bạc Liêu, **Sóc Trăng** : Vương Trọng Nghĩa : Chuyên Sóc Trăng.

VŨ KIM THỦY

Bài T6/232 : *Tìm tất cả các giá trị của m để hệ*

$$\begin{cases} x^3 - mx - y = 0 \\ y^3 - my + x = 0 \end{cases} \quad (1)$$

có 5 nghiệm (m, x, y là các số thực)

Lời giải : (của bạn *Hán Văn Thắng* 12A Đào Duy Từ **Thanh Hóa**)

Hệ luôn có nghiệm (0, 0). Nếu $x \neq 0$ thì $y \neq 0$ (và ngược lại).

Từ hệ suy ra $x^4 + y^4 = m(x^2 + y^2) \Rightarrow m > 0$ nếu $x \neq 0, y \neq 0$.

Vậy bài toán tương đương với : Tìm $m > 0$ để hệ có 4 nghiệm (x, y) khác không. Thế $y = x^3 - mx$ vào phương trình thứ hai của hệ dẫn đến $x^2(x^2 - m)^3 - m(x^2 - m) + 1 = 0$ (2)

Đặt $t = x^2 - m$. (2) tương đương với

$$\begin{cases} t^4 + mt^3 - mt + 1 = 0 \\ t > -m \end{cases} \quad (3)$$

Đặt $u = t - \frac{1}{t}$. (3) trở thành

$$u^2 + m \cdot u + 2 = 0 \quad (4)$$

Ta phải có $\Delta \geq 0 \Rightarrow m \geq 2\sqrt{2}$. Khi đó (4) có hai nghiệm

$$u_1 = \frac{-m + \sqrt{m^2 - 8}}{2} \text{ và } u_2 = \frac{-m - \sqrt{m^2 - 8}}{2}$$

Xét phương trình $t - \frac{1}{t} = u_1 \Leftrightarrow f(t) = 2t^2 - (\sqrt{m^2 - 8} - m)t - 2 = 0$ (5)

và phương trình $t - \frac{1}{t} = u_2 \Leftrightarrow g(t) = 2t^2 + (\sqrt{m^2 - 8} + m)t - 2 = 0$ (6)

Ta có $f(-m)f(0) = -2(m^2 + m\sqrt{m^2 - 8} - 2) < 0$

$$g(-m)g(0) = -2(m^2 - m\sqrt{m^2 - 8} - 2) < 0$$

Vậy phương trình (5) có hai nghiệm phân biệt $-m < t_1 < 0 < t_2$ phương trình (6) có hai nghiệm phân biệt $-m < t_3 < 0 < t_4$.

Ứng với mỗi t sẽ có hai giá trị của $x = \pm\sqrt{t + m}$. Thành thử để hệ (1) có 4 nghiệm ta phải có $t_1 = t_3,\ t_2 = t_4 \Leftrightarrow u_1 = u_2 \Leftrightarrow m = 2\sqrt{2}$. Thử lại thấy đúng.

Nhận xét : Lời giải của bạn Thắng là tự nhiên ngắn gọn và hiệu quả. Một số bạn giải đúng nhưng khá phức tạp. Một số bạn cho đáp số đúng nhưng lập luận chưa đầy đủ. Cũng có khá nhiều bạn giải sai. Lời giải tốt thuộc về các bạn : *Trần Huỳnh Thế Khanh* 12 **Trà Vinh**, *Phạm Tuấn Anh* 12 **Vinh**, *Hà Duy Hưng* 12 Trần Phú **Hải Phòng**, *Nguyễn Đặng Hiền* 12 **Đồng Tháp**, *Đào Xuân Vinh* 12 **Thừa thiên – Huế**, *Đặng Đức Hạnh* 11 **Nghệ An**.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T7/232 : *Chứng minh rằng với mọi $x \in R$ ta có :*

$$|\sin^{1995}x + \cos x| < \frac{5}{4}$$

Lời giải *(của nhiều bạn)* : Vì $|\sin x| \leq 1\ \forall x \in \mathbf{R}$ nên $|\sin^{1995}x| \leq \sin^2 x\ \forall x \in \mathbf{R}$. Từ đó, suy ra :

$$|\sin^{1995}x + \cos x| \leq |\sin^{1995}x| + |\cos x| \leq$$
$$\leq \sin^2 x + |\cos x| = 1 - \cos^2 x + |\cos x| =$$
$$= \frac{5}{4} - \left(|\cos x| - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{5}{4} (1)$$

Dấu "=" ở (1) xảy ra chỉ khi :

$$\begin{cases} |\sin^{1995}x| = \sin^2 x \\ |\cos x| = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin x = 0 \\ |\cos x| = \frac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} |\sin x| = 1 \\ |\cos x| = \frac{1}{2} \end{cases} \end{array}\right. \text{(I)}$$

Dễ thấy không có x thỏa (I) và vì thế dấu "=" ở (1) không thể xảy ra. Từ đó ta có đpcm. ■

Nhận xét : 1. Nhiều bạn chứng minh không chặt chẽ việc ở (1) không thể có dấu "=". Không ít bạn đã mắc phải sai lầm về kiến thức cơ bản, như : "Từ $a < b$ suy ra $|a| < |b|$", ...

2. Các bạn sau đây có lời giải đúng và ngắn gọn :

Đồng Tháp : *Nguyễn Đăng Triều* (12T PTTH Thị xã Cao Lãnh).

Đà Nẵng : *Nguyễn Hoàng Thành, Nguyễn Ngọc Hải, Trần Quang Sơn, Phan Anh Huy* ($10A_1$, $11A_3$, $11A_4$, $12A_1$ PTTH Chuyên Lê Quý Đôn).

Huế : *Nguyễn Trần Mạnh Quân* (10CT Quốc học Huế) ; *Đinh Trung Hoàng* (11CT ĐHTH Huế).

Quảng Ngãi : *Võ Thị Minh Thư, Phùng Minh Tuấn* (PTTH Chuyên Lê Khiết).

Quảng Bình : *Phan Thị Minh Nguyệt* (12T PTNK Quảng Bình).

Nghệ An : Trần Khoa Văn (9A PTNK Quỳnh Lưu), *Đặng Đức Hạnh* (11T PTTH Phan Bội Châu), *Nguyễn Trung Thành* (11A PTCT ĐHSP Vinh).

Thanh Hóa : *Lê Đức Thịnh* (12A PTTH Quảng Xương III), *Lê Cát Vượng* ($11A_5$ PTTH Đào Duy Từ).

Nam Định : *Nguyễn Trường Giang* (11T–L PTTH Lê Hồng Phong).

Hòa Bình : *Đỗ Thị Thu Hà* (9A Trường Hữu Nghị B)

Hà Nội : *Nguyễn Trọng Hồng* (12A PTTH Cao Bá Quát – Gia Lâm).

Hải Dương : *Phùng Đức Tuấn* (11CT tỉnh PTNK Hải Dương)

Hà Bắc : *Nguyễn Xuân Thu* (11T PTTH Hàn Thuyên), *Nguyễn Ngọc Sơn* (12A PTTH Yên Dũng số 1).

Phú Thọ : *Nguyễn Văn Bản* (12A PTTH Long Châu Sa – Phong Châu) ; *Nguyễn Thanh Tùng, Đào Mạnh Thắng* (12F, 11A PTTH Chuyên Hùng Vương).

Vĩnh Phúc : *Cao Thế Thụ* (10B PTTH Vĩnh Tường)

3. Bằng phương pháp của lời giải trên, một số bạn đã chứng minh được rằng : *"Với $m, n \in \mathbf{N}^*$, $m \geq 2$, và với mọi $x \in \mathbf{R}$ ta luôn có : $|\sin^m x + \cos^n x| \leq \frac{5}{4}$.*

NGUYỄN KHẮC MINH

Bài T8/232 : *Cho song ánh $f: N \to N$. Chứng minh rằng tồn tại vô số bộ (a, b, c) với $a, b, c \in N$ thỏa điều kiện : $a < b < c$ và $2f(b) = f(a) + f(c)$*

Lời giải (theo *Đinh Trung Hoàng*, 11CT ĐHTH Huế) : Do f là song ánh từ $\mathbf{N}$ đến $\mathbf{N}$ nên, dễ thấy, phải tồn tại $n \in \mathbf{N}^*$ sao cho $\max\{f(0), f(1), ..., f(n)\} = f(a)$ với $0 < a \leq n$, $a \in \mathbf{N}^*$. Từ đó suy ra $\exists\, a \in \mathbf{N}^*$ sao cho $f(a) > f(m)$ $\forall m = \overline{0, a-1}$ (1).

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh, rằng với $a \in \mathbf{N}^*$ và thỏa (1) sẽ $\exists\, b \in \mathbf{N}^*$ sao cho $a < b$ và $f(b) > f(m)$ $\forall m = \overline{0, b-1}$ (2). Thật vậy, với $a \in \mathbf{N}^*$ sẽ $\exists\, b_o \in \mathbf{N}^*$ sao cho $f(b_o) > f(a)$ (*) và do a thỏa (1) nên từ (*) suy ra $a < b_o$ (**). Xét tập T gồm tất cả các số $b_o \in \mathbf{N}^*$ và thỏa (*), (**). Do f là song ánh từ $\mathbf{N}$ đến $\mathbf{N}$ nên sẽ tồn tại $b = \min\limits_{b_o \in T} b_o$. Hiển nhiên ta có $a < b$ và $f(b) > f(m)$ $\forall m = \overline{0, b-1}$. Tóm lại, (2) được chứng minh.

Từ (1) và (2) suy ra tồn tại dãy tăng ngặt $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ thỏa đồng thời các điều kiện sau :

(i) $a_n \in \mathbf{N}^*$ $\forall n \in \mathbf{N}^*$

(ii) $f(a_n) > f(m)$ $\forall m = \overline{0, a_n - 1}$.

Xét k bất kì thuộc $\mathbf{N}^*$. Từ $a_k < a_{k+1}$ và (ii) suy ra $f(a_{k+1}) > f(a_k) \Rightarrow f(a_{k+1}) = f(a_k) + m$ (3), với $m \in \mathbf{N}^*$. Vì f là song ánh từ $\mathbf{N}$ đến $\mathbf{N}$ nên $\exists c$ sao cho $f(c) = f(a_{k+1}) + m$ (4), hơn nữa do (ii) nên $a_{k+1} < c$. Từ (3) và(4) suy ra : $2f(a_k) = f(a_{k+1}) + f(c)$ với $a_k < a_{k+1} < c$. Điều vừa nhận cho thấy, tồn tại vô số bộ (a, b, c) với $a, b, c \in \mathbf{N}$ và $a < b < c$, $2f(b) = f(a) + f(c)$ (đpcm).

Nhận xét : 1. Chỉ có ba bạn : *Đ.T. Hoàng ; Lê Quang Nẫm* (11CT PTNK ĐHQG T.P. Hồ Chí Minh) và *Nguyễn Phước Hiệp* ($12A_2$ PTTH Nguyễn Duy Hiệp – Điện Bàn – Quảng Nam) cho lời giải đúng.

2. Một số bạn cho lời giải sai . Chẳng hạn, có bạn khẳng định rằng "do f là song ánh từ $\mathbf{N}$ đến $\mathbf{N}$ nên f đơn điệu trên $\mathbf{N}$" (? !),...

NGUYỄN KHẮC MINH

Bài T9/232. Cho bốn điểm $A_i (i = 1, 2, 3, 4)$ cùng nằm trên một đường tròn (O). Gọi (T_i) là tam giác xác định bởi ba trong bốn điểm trên, trừ điểm A_i. Chứng minh rằng bốn đường tròn Ơle của bốn tam giác (T_i), bốn đường thẳng Simson của các điểm A_i đối với bốn tam giác (T_i) cùng đi qua một điểm.

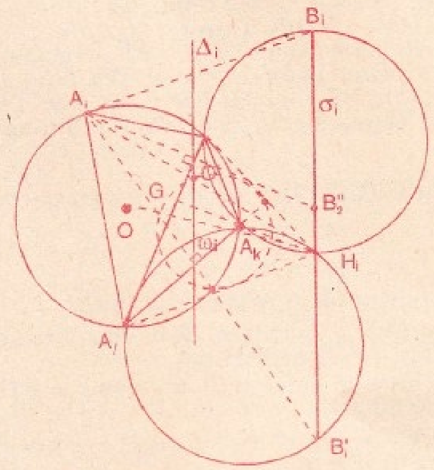
Lời giải. Gọi G là trọng tâm của tứ điểm $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ và H_i là trực tâm của tam giác (T_i) có các đỉnh là A_j, A_k, A_e ; với $i = 1, 2, 3, 4$ và $\{i, j, k, l\} = \{1, 2, 3, 4\}$. Thế thì ta có :

$$\overrightarrow{OH_i} = \overrightarrow{OA_j} + \overrightarrow{OA_k} + \overrightarrow{OA_l} \;; \qquad (1)$$

do đó :

$$\overrightarrow{OA_i} + \overrightarrow{OH_i} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3} + \overrightarrow{OA_4} \; (\forall i) = 4\overrightarrow{OG} = 2\overrightarrow{OO'} \qquad (2)$$

trong đó $O' = Đ_G(O)$, đối xứng của O qua G. Hệ thức vectơ (2) chứng tỏ rằng đoạn thẳng A_iH_i nhận điểm O' (đối xứng với O qua G) làm trung điểm ; nói khác đi là bốn đoạn thẳng A_iH_i đồng quy tại trung điểm chung O' và ta có :



$$\overrightarrow{H_iO'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{H_iA_i} \qquad (3)$$

Ta lại biết rằng tâm ω_i của đường tròn Ơle của tam giác T_i $(A_kA_kA_l)$ là trung điểm của đoạn thẳng OH_i, nối tâm O đường tròn ngoại tiếp với trực tâm H_i của tam giác T_i, nghĩa là :

$$\overrightarrow{H_i\omega_i} = \frac{1}{2}\overrightarrow{H_iO} \qquad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra : phép vị tự $V_{H_i}^{k=\frac{1}{2}}$ tâm H_i, tỷ số vị tự $k = \frac{1}{2}$ biến đường tròn (O) thành đường tròn (ω_i) ; mà (O) đi qua $\{A_i\}$ nên (ω_i) đi qua O'. Vậy :

Bốn đường tròn Ơle (ω_i) của các tam giác (T_i) cùng đi qua $O' = Đ_G(O)$.

Bây giờ, gọi B_i, B_i' và B_i'' là điểm đối xứng của điểm A_i lần lượt qua các đường thẳng A_jA_k, A_kA_l và A_lA_j chứa các cạnh của tam giác (T_i), thế thì các điểm này thẳng hàng trên đường thẳng Stâyne (Steiner) σ_i vị tự của đường thẳng Simson Δ_i của A_i đối với tam giác (T_i). Để chứng minh Δ_i đi qua O', ta chứng minh σ_i đi qua H_i. Thật vậy, trực tâm H_i của (T_i), điểm B_i, đối xứng của A_i qua (A_jA_k) và các điểm A_j, A_k cùng nằm trên đường tròn đối xứng với đường tròn (O) qua đường thẳng A_jA_k. Hoàn toàn tương tự, H_i và điểm B_i', đối xứng của A_i qua (A_kA_l) cùng nằm trên đường tròn đối xứng với đường tròn (O) qua đường thẳng A_kA_l.

Từ đó, sử dụng góc có hướng giữa hai đường thẳng, ta được :

$(H_iB_i, H_iA_k) = (A_kB_i, A_jA_k) = (A_jA_k, A_jA_i)$, $(\bmod \pi)$(5)

và : $(H_iB_i', H_iA_k) = (A_iB_i', A_iA_k) = (A_lA_k, A_lA_i)$. $(\text{mod } \pi)$ (6)

Lại vì A_i, A_j, A_k và A_l cùng nằm trên đường tròn (O) nên có :

$$(A_jA_k, A_jA_i) = (A_lA_k, A_lA_i). \ (\text{mod } \pi) \quad (7)$$

Bởi vậy ta được :

$$(H_iB_i, H_iA_k) = (H_iB_i', H_iA_k) \ (\text{mod } \pi) \quad (8)$$

Từ đó suy ra hai đường thẳng (H_iB_i) và (H_iB_i') phải trùng nhau ; nói khác đi là, H_i nằm trên đường thẳng Stâyne σ_i chứa các điểm B_i, B_i' và B_i''. Đường thẳng Simson Δ_i của điểm A_i đối với (T_i) là ảnh của đường thẳng Stâyne σ_i trong phép vị tự $V_{A_i}^{k=\frac{1}{2}}$ tâm A_i, tỉ số $k = \frac{1}{2}$; mà σ_i đi qua H_i nên Δ_i đi qua điểm $O' = V_{A_i}^{\frac{1}{2}}(H_i)$, ảnh của H_i trong phép vị tự đó. Vậy bốn đường thẳng Simson Δ_i cùng đi qua O'.

Nhận xét : 1°) Lời giải trên đây sử dụng kiến thức lớp 10, là sự kết hợp giữa *phương pháp vectơ* và *phương pháp biến hình*. Ngoài ra, để chứng minh ba điểm thẳng hàng, lời giải cũng đã sử dụng *góc có hướng giữa hai đường thẳng* trong mặt phẳng (hệ thức (8)) thông qua những hệ thức (5), (6) và (7) diễn tả điều kiện bốn điểm cùng thuộc một đường tròn. Chính vì vậy, lời giải không những sáng sủa, ngắn gọn mà còn *không phụ thuộc vào hình vẽ*.

2°) Về cơ bản, có thể giải bài toán trên chỉ cần kiến thức hình học thuộc chương trình phổ thông cơ sở. Hầu hết các bạn đã cho lời giải theo hướng này, nên lời giải thường dài dòng, không gọn, thậm chí còn quá phức tạp, rườm rà. Cũng có một số ít bạn biết sử dụng hệ thức vectơ (1), đặc trưng cho trực tâm của tam giác, đi đến kết luận các đoạn A_iH_i đồng quy tại trung điểm chung một cách nhanh chóng. Tuy nhiên, việc sử dụng không được triệt để, còn nửa vời, chẳng hạn như không nhìn ra hệ thức (4)) ; thành thử không có sự nhất quán trong phương pháp chứng minh.

3°) Lời giải của các bạn thường dài dòng ở phần cuối của bài toán. Các bạn hãy rút kinh nghiệm, nên cố gắng sử dụng thành thạo góc có hướng giữa hai đường thẳng vào những bài toán liên quan đến bốn điểm đồng viên (cùng thuộc một đường tròn), các đường tròn đồng quy.

NGUYỄN ĐĂNG PHẤT.

Bài T10/232. *Trong không gian cho ba tia Ox, Oy, Oz và ba điểm A, B, C cố định ($\neq 0$) lần lượt nằm trên ba tia đó.*

Giả sử $\div a_n$ là một cấp số cộng có $a_1 > 0$, công sai $d > 0$. Với mỗi số nguyên dương n, trên Ox, Oy, Oz lần lượt lấy các điểm A_n, B_n, C_n sao cho : $OA = a_nOA_n$, $OB = a_{n+1}OB_n$; $OC = a_{n+2}OC_n$.

Chứng minh rằng :

1°) Các đường thẳng A_nB_n, B_nC_n và C_nA_n lần lượt đi qua các điểm I, J và K cố định.

2°) Ba điểm I, J, K thẳng hàng.

Lời giải. (Dựa theo *Phùng Đức Tuấn*, 11CT, PTNK **Hải Dương**)

1°) Trước hết, xin nhắc lại rằng : Nếu X và Y là hai điểm phân biệt thì cần và đủ để đường thẳng (XY) đi qua điểm S là có hai số thực x và y thỏa mãn các điều kiện sau :

$$(XY) \in S \Leftrightarrow \exists x, y \in \mathbf{R} : \begin{cases} \overrightarrow{OS} = x\overrightarrow{OX} + y\overrightarrow{OY} \\ x + y = 1 \end{cases} (\forall O) (1)$$

Theo giả thiết, ta có : $a_{n+1} = a_n + d$ hay là : $a_{n+1} - a_n = d$ cũng tức là : $\frac{a_{n+1}}{d} - \frac{a_n}{d} = 1$. Bởi vậy nếu I là điểm được xác định bởi hệ thức vectơ :

$$\overrightarrow{OI} = \frac{a_{n+1}}{d}\overrightarrow{OB_n} - \frac{a_n}{d}\overrightarrow{OA_n} \text{ thì } (A_nB_n) \ni I \ (2)$$

Nhưng, theo giả thiết lại có : $\overrightarrow{OA} = a_n\overrightarrow{OA_n}$, $\overrightarrow{OB} = a_{n+1}\overrightarrow{OB_n}$ nên ta được :

$$\overrightarrow{OI} = \frac{\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}}{d} = \frac{\overrightarrow{AB}}{d} \quad (3)$$

Vậy là : với mọi n nguyên dương, đường thẳng A_nB_n luôn đi qua một điểm I cố định, được xác định bởi hệ thức (3).

Chứng minh tương tự, ta thấy rằng : với mọi n nguyên dương các đường thẳng B_nC_n và C_nA_n cũng lần lượt đi qua các điểm cố định J và K được xác định bởi các hệ thức sau đây :

$$\overrightarrow{OJ} = \frac{1}{d}\overrightarrow{BC} \text{ và } \overrightarrow{OK} = \frac{1}{2d}\overrightarrow{AC}$$

2°) Từ kết quả trên ta có :

$$\overrightarrow{OK} = \frac{1}{2d}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ})$$

hay là : $2\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ}$

Đẳng thức này chứng tỏ không những ba điểm I, J, K thẳng hàng mà K còn là trung điểm của đoạn IJ.

Cũng từ chứng minh trên, ta có nhận xét thêm rằng nếu ba tia Ox, Oy và Oz không đồng phẳng (cũng tức là ba cạnh của một góc tam diện) thì mặt phẳng $(A_nB_nC_n)$ luôn đi qua một đường thẳng cố định Δ (chứa ba điểm thẳng hàng I, J và K).

Nhận xét : 1°) Trên đây là lời giải sử dụng phương pháp vectơ. Cũng có một số bạn sử dụng vectơ nhưng không triệt để, nên lời giải dài dòng, không gọn thậm chí còn sử dụng một cách nửa vời.

2°) Ngoài cách giải trên, bài toán này còn có nhiều cách giải khác. Chẳng hạn, sử dụng định lí Ménélais : Xét trường hợp $A_nB_n \not\parallel A_1B_1$, gọi $I = (A_nB_n) \cap (A_1B_1)$, chứng minh được rằng $(A_1B_1, I) = \frac{IA_1}{IB_1} = -\frac{a_1 + d}{a_1}$ nên I cố định. Cũng có một số bạn sử dụng định lí Talet (chứng minh rằng đường thẳng A_nB_n cắt đường thẳng đi qua O và song song với AB ở điểm I cố định) hoặc sử dụng phương pháp tọa độ (trên mặt phẳng) nhưng lời giải thường rườm rà, không gọn.

NGUYỄN ĐĂNG PHẤT

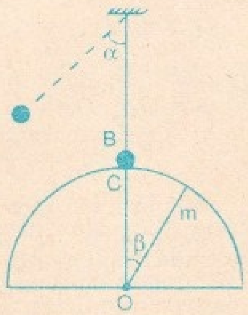
Bài L1/232. *Trên đỉnh C của một mặt bán cầu bán kính R = 1m, có đặt một viên bi nhỏ B có khối lượng m_B = 2kg. Một con lắc đơn có chiều dài l = 1m, khối lượng quả cầu A là m_A = 1kg. Kéo A để dây treo hợp với phương thẳng đứng một góc $\alpha = 60°$ (xem hình) rồi buông không có vận tốc đầu. Sau va chạm B trượt đến vị trí M ($\beta = 30°$) thì rời khỏi bán cầu. Tìm lực căng dây treo khi vật A đến vị trí cao nhất sau va chạm. Lấy g = 10m/s² và bỏ qua lực cản không khí và ma sát.*

Hướng dẫn giải. Áp dụng định luật bảo toàn cơ năng tìm được vận tốc của A trước va chạm $v_o = \sqrt{2gl(1 - \cos\alpha)} = \sqrt{10}$ m/s. Áp dụng định luật bảo toàn động lượng và bảo toàn năng lượng (tại C và tại M), với chú ý rằng tại M phản lực của mặt bán cầu bằng không, suy ra hệ thức giữa vận tốc của A sau va chạm (v_{1x}) và của B sau va chạm (v_2), và khi rời khỏi mặt cầu (v) :

$v_{1x} = v_o - v_2$ (1) ; $gR + \frac{v_2^2}{2} = gR\cos\beta + \frac{v^2}{2}$ (2) ;

và $v^2 = gR\cos\beta$.

Từ đó $v_2 = \sqrt{3gR\omega o\beta - 2gR} \approx 6\,m/s$ và $v_{1x} = -2{,}8\,m/s$: quả cầu A giật lùi lại. Gọi γ là góc lệch lớn nhất của A sau va chạm, áp dụng định luật bảo toàn cơ năng tìm được :



$$mgl(1 - \cos\gamma) = \frac{mv_{1x}^2}{2}$$

(đặt $m_A = m$). Từ đó lực căng dây tại vị trí đang xét (bắt đầu rời khỏi mặt bán cầu) bằng

$$T = mg\cos\gamma = m(gl - \frac{v_{1x}^2}{2}) \approx 12N$$

Nhận xét. Các em có lời giải tương đối đúng : *Hà Thị Thọ*, 11C trường PTTH chuyên **Thái Bình** ; *Lê Thanh Minh*, 12CL, Quốc học **Huế** ; *Phạm Vũ Hoài*, 11L, Lê Hồng Phong, **Nam Định** ; *Nguyễn Anh Đức*, 11L PTTH Năng khiếu, **Hà Tĩnh**.

MAI ANH

Bài L2/232. *Cho mạch điện một chiều như hình vẽ*

Trong đó $E = 12V$, điện trở trong của nguồn không đáng kể.

$R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = 1\Omega$;

$R_6 = 4\Omega$; $R_7 = R_8 = R_9 = R_{10} = 2\Omega$

$C_1 = 4\mu F$; $C_2 = 6\mu F$. Các ampe kế có điện trở không đáng kể. Hãy tính :

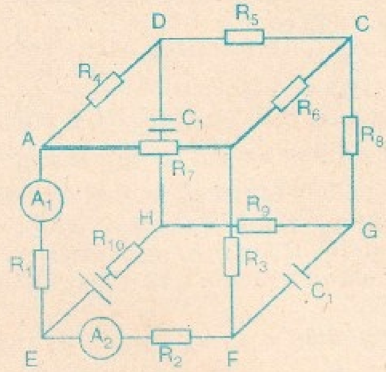
a) Số chỉ của các ampe kế

b) Điện tích của các tụ điện

Hướng dẫn giải. Vẽ lại mạch điện, sẽ thấy $ABCE$ là mạch cầu cân bằng vì $\frac{R_1}{R_2 + R_3} = \frac{R_4 + R_5}{R_6}$; suy ra $I_7 = 0$ và

$$R_{CE} = \frac{(R_1 + R_4 + R_5)(R_2 + R_3 + R_6)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5 + R_6} = 2\Omega.$$

Điện trở mạch ngoài là $R = R_8 + R_9 + R_{10} + R_{CE} = 8\Omega$. Vì $r = 0$, nên dòng điện mạch chính $I = \frac{E}{E} = 1{,}5A$.



a) Vì $\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2 + R_3}{R_1} = 2$ nên $I_1 = \frac{2I}{3} = 1A$ (số chỉ ampe kế A_1 và $I_2 = \frac{I}{3} = 0{,}5A$ (số chỉ ampe kế A_2) b) $V_{FG} = I_2(R_3 + R_6) + I_1R_8 = 5{,}5V$, do đó điện tích của tụ $C_2 : q_2 = C_2V_{FG} = 33\mu C$;

$V_{DH} = I_1R_5 + I(R_8 + R_9) = 7V$, do đó điện tích của tụ $C_1 : q_1 = C_1V_{DH} = 28\mu C$.

Nhận xét. Các em có lời giải đúng và gọn : *Huỳnh Thế Khanh*, 12A, PTTH Phạm Thái Bường thị xã **Trà Vinh** ; *Nguyễn Đức Công* 11L Phan Bội Châu (**Nghệ An**) ; *Lê Hồng Hà*, 11A, KPTCT Đại học Vinh (**Nghệ An**) ; *Nguyễn Hồng Phong* 11A, PTTH Hồng Quang, Thị xã **Hải Dương** ; *Cù Sĩ Thắng*, 11F, chuyên PTTH Hùng Vương, TP Việt Trì, **Phú Thọ** ; *Trịnh Ngọc Thành*, 11CL, Chuyên Lê Khiết, **Quảng Ngãi**, *Đàm Hữu Thu*, 11L, chuyên Lương Văn Chánh, Tuy Hòa (**Phú Yên**) ; *Trần Đức Minh*, 12 Thăng Long, 7E Hai Bà Trưng, Đà Lạt, **Lâm Đồng** ; *Hoàng Trường Sơn*, 11A$_2$, chuyên Lê Quý Đôn, **Đà Nẵng** ; *Lí Minh Hiếu*, 11A, PTTH Bắc Kiến Xương, **Thái Bình** ; *Trần Mai Sơn Hà*, 11CL, PTTH Năng khiếu, **Quảng Bình** ; *Trịnh Minh Tuấn*, 11B$_2$, PTTH Bỉm Sơn, **Thanh Hóa** ; *Nguyễn Trần Thu*, 11T, PTTH năng khiếu Hàn Thuyên, **Bắc Ninh** ; *Phạm Văn Tập*, 10C$_1$, PTTH Vĩnh Bảo, **Hải Phòng** ; *Tăng Hoàng Yến*, 11A, PTTH Lê Quý Đôn, **Long An** ; *Trần Hữu Lực*, 11T, PTTHNK **Quảng Bình** ; *Nguyễn Thanh Vũ* 11A, chuyên Phan Ngọc Hiển, **Cà Mau**.

MAI ANH

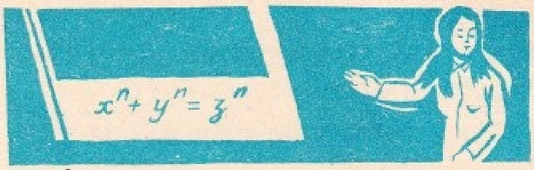
HỘP THƯ

Vừa qua, "Toán học và tuổi trẻ" đã nhận được bài của các bạn : Nguyễn Tuấn Nam *(Vũng Tàu)* ; Vũ Trần Kim Phụng, Trần Nguyên Châu *(Đà Nẵng)* ; Võ Thanh Xuân *(Gia Lai)* ; Trương Ngọc Đắc *(Bình Định)* ; Phạm Hùng, Đặng Kỳ Phong, Hồ Xuân Tùng, Trần Văn Minh, Nguyễn Vũ Hưng, Nguyễn Quang Học, Nguyễn Hải Thanh, Nguyễn Thanh Hải, Nguyễn Quang Hậu, Ngô Văn Hiệp, Lê Hải Khôi, Nguyễn Văn Ngọc, Nguyễn Hữu Việt Hưng, Trần Văn Nhung, Ngô Thành Long *(Hà Nội)* ; Đoàn Thế Phiệt, Quách Thị Tĩnh, Nguyễn Trọng Kiên *(Nam Định)* ; Nguyễn Hữu Dự, Hồ Quang Vinh, Lê Quốc Hán, Phạm Ngọc Bội *(Nghệ An)* ; Hồ Công Dũng *(Bình Thuận)* ; Hoàng Minh Dũng, Hoàng Văn Phương, Ngô Đức Minh, Trần Bá Sĩ *(Thanh Hóa)*, Phạm Hữu Hoài *(TP Hồ Chí Minh)* ; Trần Cường *(Thái Bình)* ; Bùi Trọng Kiên *(Ninh Bình)* ; Ngô Quang Hòa, Phùng Đức Tuấn, Nguyễn Bá Đang *(Hải Dương)* ; ...

Chúng tôi đang nghiên cứu để sử dụng dần các bài cho các số tạp chí tới. Chúng tôi sẽ tiếp tục thông báo các tác giả có bài đã gửi về Tòa soạn.

"Toán học và tuổi trẻ" đang chuẩn bị mở thêm các chuyên mục mới và tăng trang khi có điều kiện. Mong nhận được thêm sáng kiến của các bạn. Xin chân thành cám ơn và mong các bạn tiếp tục cộng tác.

TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ



ĐỀ RA KÌ NÀY

CÁC LỚP THCS

Bài T1/236 : *Tìm ước số chung lớn nhất của* $2^{1964} - 1$ *và* $2^{1996} - 1$.

TRẦN XUÂN DÁNG
(Nam Định)

Bài T2/236 : *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases} x^4 + y^4 + z^4 = 8(x + y + z) \\ xyz = 8 \end{cases}$$

NGUYỄN ĐỨC TẤN
(TP Hồ Chí Minh)

Bài T3/236 : *Cho* $2n$ *số* $a_1, a_2 \dots a_n$, $b_1, b_2 \dots b_n$ *thỏa mãn :*

1) $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$

2) $b_i \geq 0, \forall i = \overline{1, n}$

DOÀN QUANG MẠNH
(Hải Phòng)

Bài T4/236 : *Cho tam giác ABC với điểm D ở bên trong sao cho :* $AB = AC$, $\widehat{BAC} = 80^o$, $\widehat{DBC} = 20^o$, $\widehat{DCB} = 40^o$. *Gọi F là giao điểm của đường vuông góc với AC kẻ qua D và E là điểm đối xứng với F qua BD. Tam giác ADE là tam giác gì, tại sao ?.*

PHẠM HÙNG
(Hà Nội)

Bài T5/236 : *Cho tam giác ABC. Kẻ AD và AE là hai phân giác trong và ngoài tại đỉnh A. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có bán kính bằng 1. Biết rằng AD = AE. Tính AD, khi tam giác ABC có diện tích lớn nhất.*

DOÀN VĂN TRÚC
(Quảng Ngãi)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/236 : *Cho dãy* $\{a_n\}$ *thỏa mãn :*

$a_1 = 1$, $a_{n+1} = (2a_n^3 - 2a_n^2 - 2)/(3a_n^3 - 4a_n - 1)$ *với mọi* $n \in Z^+$

Chứng minh rằng, nếu $|a| \geq 2$ *thì dãy* $\{a_n\}$ *hội tụ. Tính giới hạn của dãy trong trường hợp đó.*

HOÀNG HOA TRẠI
(Quảng Ngãi)

Bài T7/236 : *a) Giải phương trình* $\cos 3x = \dfrac{1}{2}$

b) Áp dụng kết quả câu trên để tính các tổng sau đây :

$$S_1 = \cos\frac{\pi}{9} + \cos\frac{7\pi}{9} + \cos\frac{13\pi}{9}$$

$$S_2 = \cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{7\pi}{9} + \cos\frac{7\pi}{9}\cos\frac{13\pi}{9} + \cos\frac{13\pi}{9}\cos\frac{\pi}{9}$$

$$S_3 = \cos\frac{\pi}{9}\,.\,\cos\frac{7\pi}{9}\,.\,\cos\frac{13\pi}{9}$$

ANH VŨ
(Thừa Thiên – Huế)

Bài T8/236 : *Cho* $a > 0$ *và f là hàm số liên tục trên* $[a, +\infty)$ *giả sử rằng :*

$$\int_a^t f^2(x)\,dx \leq \int_a^t x^2\,dx \text{ với mọi } t \geq a$$

Chứng tỏ rằng $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b x dx$ *với mọi* $b \geq a$.

LÊ VĂN QUANG
(Thừa Thiên – Huế).

Bài T9/236 : *Cho tam giác ABC nội tiếp vòng tròn (O). Gọi* (O_1, R_1), (O_2, R_2), (O_3, R_3) *lần lượt là tâm và bán kính các đường tròn tiếp xúc ngoài với (O), đồng thời tiếp xúc với các cặp tia AB, AC ; BC, BA và CA, CB. R là bán kính dường tròn nội tiếp tam giác. Chứng minh rằng :* $R_1 + R_2 + R_3 \geq 12r$.

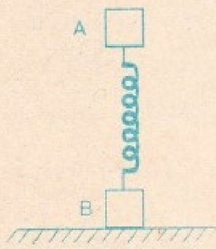
PHẠM HIẾN BẰNG
(Thái Nguyên)

Bài 10/236 : *Cho tứ diện ABCD và điểm O nằm trong tứ diện thỏa mãn điều kiện :* $\widehat{AOB} = \widehat{COD}$, $\widehat{AOC} = \widehat{DOB}$, $\widehat{AOD} = \widehat{BOC}$ *với mọi điểm M trong không gian, chứng minh rằng :* $MA + MB + MC + MD \geq OA + OB + OC + OD$.

NGUYỄN MINH HÀ
(Hà Nội)

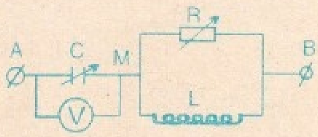
CÁC ĐỀ VẬT LÍ.

Bài L1/236 : *Một vật A có khối lượng* $m_1 = 1{,}00$ *kg và một vật B có khối lượng* $m_2 = 4{,}10$ *kg được nối với nhau bằng lò xo có khối lượng không đáng kể. Vật A thực hiện dao động điều hòa theo phương thẳng đứng với biên độ* $a = 1{,}6$cm *và với tần số góc* $\omega = 25$ rad/s. *Hãy tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của áp lực của hệ này lên mặt sàng* ($g = 9{,}8$m/s).



TÔ GIANG
(Hà Nội)

Bài L2/236 : *Cho mạch điện như hình vẽ, trong đó điện dung C và điện trở* R_H, *có thể thay đổi, độ tự cảm* $L = \dfrac{1}{\pi}$ *vôn kế nhiệt có điện trở rất lớn. Đặt vào AB hiệu điện thế xoay chiều* $U = 220\sqrt{2}\sin 100\pi t\ (v)$.



1) Với $R = 100.\sqrt{3}\ \Omega$, *chọn C bằng bao nhiêu để vôn kế có số chỉ lớn nhất, tìm số chỉ này.*

2) Với giá trị nào của C thì số chỉ của vôn kế không đổi khi R biến đổi.

ĐỖ VĂN TOÁN
(Nghệ An)

Problems in this issue

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/236 *Find the greates common divisor of $2^{1964} - 1$ and $2^{1996} - 1$.*

T2/236 *Solve the system of equations*

$$\begin{cases} x^4 + y^4 + z^4 = 8(x + y + z) \\ xyz = 8 \end{cases}$$

T3/236 *Let be given $2n$ numbers $a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n$ satisfying :*

1) $a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n$,

b) $b_i \geq 0, \forall i = \overline{1, n}$.

Put $m = \min\limits_{1 \leq i < j \leq n}(a_j - a_i, a_1)$, $M = \max\limits_{1 \leq i \leq n}\{b_i\}$

Prove that : $M(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n) \geq$

$\geq \frac{m}{2}(b_1 + b_2 + ... + b_n)^2$.

T4/236 *Let be given a triangle ABC and a ~~point~~ D in ~~its interior such that~~ : AB = AC, BAC = 80°, DBC = 20°, DCB = 40°. Let F be the point of intersection of the line passing through D, orthogonal to AC and BC. Let E be the point symmetric to D with respect to BD. What kind of triangle is ADE and why is it ?*

T5/236 *Let be given a triangle ABC, AD and AE be respectively its inner and outer angled–bisectors issued from A. Suppose that AD = AE and the radius of the circumcircle of ABC is equal to 1. Calculate AD when the triangle ABC has greates area.*

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/236 *The sequence $\{a_n\}$ satisfies :*

$a_1 = a, a_{n+1} = (2a_n^3 - 2a_n^2 - 2)/(3a_n^2 - 4a_n - 1)$

for every $n \in Z^+$.

Prove that if $|a| \geq 2$ then the sequence $\{a_n\}$ is convergent, and in this case, find its limit.

T7/236 a) *Solve the equation $\cos 3x = \frac{1}{2}$.*

b) *Using the result of a), calculate the sums*

$S_1 = \cos\frac{\pi}{9} + \cos\frac{7\pi}{9} + \cos\frac{13\pi}{9}$,

$S_2 = \cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{7\pi}{9} + \cos\frac{7\pi}{9}\cos\frac{13\pi}{9} + \cos\frac{13\pi}{9}\cos\frac{\pi}{9}$,

$S_3 = \cos\frac{[i}{9}\cos\frac{7\pi}{9}\cos\frac{13\pi}{9}$.

T8/236 *f is a continuous function on $[a, +\infty)$, (a is a given number, $a > 0$) such that*

$$\int_a^t f^2(x)dx \leq \int_a^t x^2dx \text{ for every } t \geq a.$$

Prove that $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b xdx$ *for every $b \geq a$.*

T9/236 *The triangle ABC is inscribed in a circle (O). Let R_1, R_2, R_3 be the radii of the circles which are tangent externally to (O) and tangent respectively to the pairs of lines AB and AC, BC and BA, CA and CB. Prove that $R_1 + R_2 + R_3 \geq 12r$, where r is the radius of the incircle of ABC.*

T10/236 *Let be given a tetrahedron ABCD and a point O in ~~its~~ interioir, ~~satisfying the conditions~~ : AOB = COD, AOC = DOB, AOD = BOC. Prove that for every point M in space, MA+MB+MC+MD≥OA+OB+OC+OD.*

MỘT HỌC SINH ẤN ĐỘ ĐƯỢC TẶNG GIẢI THƯỞNG LỚN CỦA MĨ DÀNH CHO NGHIÊN CỨU TOÁN HỌC TRONG SINH VIÊN

Giới toán học Mĩ vừa đặt ra một giải thưởng lớn dành cho nghiên cứu toán học trong sinh viên đại học. giải thưởng này được đặt tên là giải thưởng Brennie Morgan. Bất ngờ lớn đã xảy ra khi em Kannan Sound, một học sinh Ấn Độ vừa sang Mĩ học đã được trao giải thưởng trong lần trao giải đầu tiên năm 1996.

Tuy nhiên những người đã từng biết Sound đều không lấy làm ngạc nhiên khi biết được tin này. Em đã tham gia nghiên cứu số học giải tích ngay từ lúc còn đang học phổ thông. Mới gần đây, Sound cùng với giáo sư R. Balasubramian đã giải quyết được một giả thuyết có từ lâu trong Số học. Đặc biệt là em đã có những kết quả nghiên cứu sâu sắc về các tính chất của hàm zeta. Những kết quả này đã được công bố trong 4 công trình đăng trong những tạp chí toán học có uy tín nhất. Nhiều chuyên gia đã cho rằng các kết quả của Sound đã làm đảo lộn toàn bộ lĩnh vực nghiên cứu hàm zeta. Chính vì những kết quả nghiên cứu này mà hội đồng xét duyệt việc trao giải thưởng đã chọn em là người nhận giải thưởng Biennie Morgan đầu tiên.

Sound sinh ra và đi học phổ thông ở thành phố Madras ở miền Nam Ấn Độ. Con đường làm quen với toán học của Sound cũng giống như những học sinh chuyên toán của chúng ta. Các giáo viên khi phát hiện thấy Sound có năng khiếu toán học đã khuyến khích em học toán sâu hơn. Sau đó họ đã khuyên em đến thăm Viện Toán học Madras, một trong những trung tâm nghiên cứu toán học hàng đầu ở Ấn Độ. Tại đây em đã làm que với giáo sư Balasubrahmian, người đã giúp em làm quen với Số học giải tích và hướng dẫn em nghiên cứu. Do những thành tích nghiên cứu của mình, Sound đã dễ dàng xin được học bổng sang học tại trường đại học tổng hợp Michigan ở Mĩ. Em cũng tham gia vào cuộc thi toán học Putnam dành cho sinh viên Mĩ và đã đoạt được giải tuy không cao lắm. Bù vào đó em đã làm những chuyên gia Số học kinh ngạc về các kết quả nghiên cứu của mình. Những kết quả nghiên cứu này đã làm cho em trội hơn những sinh viên cùng lứa một cái đầu. Được biết rằng Sound không những chỉ quan tâm đến toán mà em còn thích đọc sách, nghe nhạc và chơi cờ.

Qua tấm gương nghiên cứu của em Sound có thể thấy rằng muốn trở thành một nhà toán học thì phải bắt đầu nghiên cứu toán học sớm trước khi bị những phương pháp giảng dạy theo kiểu máy móc, dập luôn làm thui chột mất khả năng sáng tạo toán học. Thực tế cũng đã chứng tỏ rằng học toán phổ thông giỏi và đoạt giải tại các kì thi toán không đồng nghĩa với việc sau này sẽ có khả năng nghiên cứu toán tốt.

NGÔ VIỆT TRUNG

Dành cho các bạn chuẩn bị thi vào Đại học

Phương pháp gián tiếp để viết PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG QỦA 2 ĐIỂM

MỴ DUY THỌ
(Thanh Hóa)

Thông thường để viết phương trình đường thẳng qua 2 điểm A, B, ta đi tìm tọa độ của A, B:

$$A = (x_1, y_1)$$
$$B = (x_2, y_2)$$

và áp dụng công thức:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

Nhưng trong nhiều trường hợp cứ đi theo suy nghĩ đó mà tiến hành thì công việc khá phức tạp, thậm chí ở nhiều bài toán với tham số thì có thể không thực hiện nổi đến kết quả.

Xin giới thiệu với các bạn một con đường khác không cần tìm tọa độ 2 điểm A, B mà vẫn tìm được phương trình đường thẳng qua A, B.

Ta hãy xem lời giải ở một vài ví dụ dưới đây:

Ví dụ 1:

Cho E líp $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a, b > 0$ và điểm $M(2a, 2b)$. Biết rằng qua M có 2 tiếp tuyến đến E líp. Hãy viết phương trình đường thẳng qua 2 tiếp điểm.

Giải:

Gọi 2 tiếp điểm là $A(x_1, y_1)$ và $B(x_2, y_2)$

Ta có phương trình tiếp tuyến tại A là:

$$\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1 \qquad (d_1)$$

Tiếp tuyến tại B có phương trình là:

$$\frac{x_2 x}{a^2} + \frac{y_2 y}{b^2} = 1 \qquad (d_2)$$

Do 2 tiếp tuyến này đều đi qua M nên ta có:

$$\begin{cases} \dfrac{x_1 \cdot 2a}{a^2} + \dfrac{y_1 \cdot 2b}{b^2} = 1 \\ \dfrac{x_2 \cdot 2a}{a^2} + \dfrac{y_2 \cdot 2b}{b^2} = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2x_1}{a} + \dfrac{2y_1}{b} = 1 \quad (1) \\ \dfrac{2x_2}{a} + \dfrac{2y_2}{b} = 1 \quad (2) \end{cases}$$

Xét đường thẳng $\frac{2x}{a} + \frac{2y}{b} = 1$ (d)

Hệ thức (1) chứng tỏ đường thẳng (d) qua A.

Hệ thức (2) chứng tỏ đường thẳng (d) đi qua B.

Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là:

$$\frac{2x}{a} + \frac{2y}{b} = 1$$

Ví dụ 2: Giả sử hàm số:

$$y = f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x + b'} \quad a, a' \neq 0$$

có cực đại cực tiểu. Viết phương trình đường thẳng qua điểm cực đại cực tiểu.

Giải: Giả sử $A(x_1, y_1)$ và $B(x_2, y_2)$ là 2 điểm cực trị của hàm số.

Suy ra $f'(x_1) = 0$

và $y_1 = f(x_1)$

Nhưng ta dễ chứng minh rằng: nếu $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ mà $f'(x)=0$ thì $f(x)=\frac{u'(x)}{v'(x)}$. Do đó $y_1 = \frac{2ax_1 + b}{a'}$ (1). Tương tự ta có $y_2 = \frac{2ax_2 + b}{a'}$ (2).

Xét đường thẳng $y = \frac{2a}{a'}x + \frac{b}{a'}$ (d)

Các hệ thức (1), (2) chứng tỏ đường thẳng (d) đi qua cả A, cả B. Vậy phương trình đường thẳng qua điểm cực đại, cực tiểu là:

$$y = \frac{2a}{a'}x + \frac{b}{a'}$$

Ở cả 2 thí dụ trên bạn thử tưởng tượng ta đặt vấn đề tìm tọa độ 2 điểm thì công việc sẽ như thế nào và có đến kết quả được không.

Phương pháp gián tiếp này có thể khái quát như sau:

Tọa độ 2 điểm $A(x_1, y_1)$ và $B(x_2, y_2)$ cần viết phương trình đường thẳng đi qua được xác định bởi một hệ điều kiện nào đó mà ta xác lập được từ đề bài. Ta hãy gọi đó là hệ đặc trưng của A và B. Nếu ta giải hệ đặc trưng để tìm tọa độ A, B thì sẽ viết được phương trình đường thẳng AB một cách trực tiếp. Còn ở đây phương pháp gián tiếp là: Nếu từ hệ đặc trưng ta nhận ra được phương trình một đường thẳng mà tọa độ của 2 điểm A, B đều thỏa mãn thì đường thẳng đó là đường thẳng cần tìm.

Nhưng không phải khi nào trong hệ đặc trưng cũng có ngay cho ta phương đường thẳng như ở hai ví dụ trên, khi đó ta cần phải biến đổi hệ đặc trưng để làm xuất hiện các đường thẳng đó.

Ví dụ 3 : Cho hàm số

$$y = \frac{x+m}{x^2+1}$$

Chứng minh rằng nếu đồ thị hàm số có 3 điểm uốn thì 3 điểm uốn thẳng hàng. Viết phương trình đường thẳng qua 3 điểm uốn.

Giải :

$$y' = \frac{-x^2-2mx+1}{(x^2+1)^2}$$

$$y'' = \frac{2(x^3+3mx^2-3x-m)}{(x^2+1)^3}$$

Do đồ thị hàm số có 3 điểm uốn nên phương trình $x^3+3mx^2-3x-m=0$ có 3 nghiệm phân biệt và 3 điểm uốn A, B, C có tọa độ là nghiệm của hệ

$$(*)\begin{cases} x^3+3mx^2-3x-m=0 & (1)\\ y=\dfrac{x+m}{x^2+1} & (2)\end{cases}$$

Nếu ta biến đổi tương đương để hệ trên xuất hiện một phương trình đường thẳng thì bài toán giải xong.

Ta có (1) $\Leftrightarrow x^3+x+3mx^2+3m-4x-4m=0$

$\Leftrightarrow x(x^2+1)+3m(x^2+1)-4(x+m)=0$

$\Leftrightarrow x+3m-4\dfrac{x+m}{x^2+1}=0$

Vậy hệ (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} x+3m-4y=0\\ y=\dfrac{x+m}{x^2+1}\end{cases}$

$x-4y+3m=0$ là 1 phương trình đường thẳng mà A, B, C thỏa mãn hệ (*) nên A, B, C thỏa mãn phương trình đường thẳng $\Rightarrow A$, B, C cùng nằm trên đường thẳng $x-4y+3m=0$.

Tương tự với đường thẳng ta còn có thể viết phương trình parabol một cách gián tiếp.

Ví dụ 4 : Cho hàm số :

$$y = x^4-x^3-5x^2+1$$

Chứng minh hàm số có 3 cực trị. Viết phương trình parabol $y=ax^2+bx+c$ đi qua 3 điểm cực trị đó.

Giải :

$$y' = 4x^3 = 3x^2-10x$$
$$= x(4x^2-3x-10)$$

$y'=0$ có 3 nghiệm phân biệt và đổi dấu liên tiếp qua 3 nghiệm nên hàm số có 3 điểm cực trị.

Giả sử 3 điểm cực trị là A, B, C. Tọa độ A, B, C là nghiệm của hệ

$\begin{cases} y'=0\\ y=f(x)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3-3x^2-10x=0 & (1)\\ y=x^4-x^3-5x^2+1 & (2)\end{cases}$

(2) $\Leftrightarrow 4y = 4x^4-4x^3-20x^2+4$

$\Rightarrow 4y = x(4x^3-3x^2-10x)-x^3-10x^2+4$

Do (1) $\Rightarrow 4y = -x^3-10x^2+4$

$\Rightarrow 16y=(-4x^3+3x^2+10x)+(-43x^2-10x+16)$

Do (1) $\Rightarrow 16y = -43x^2-10x+16$

Vậy hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3-3x^2-10x=0\\ y=-\dfrac{43}{16}x^2-\dfrac{5}{8}x+1\end{cases}$

Do đó parabol đi qua các điểm cực trị là $y=-\dfrac{43}{16}x^2-\dfrac{5}{8}x+1$

Sau đây là một số bài tập để các bạn rèn lyện.

1) Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$. Chứng minh rằng nếu hàm số có cực đại cực tiểu thì phương trình đường thẳng qua điểm cực đại, cực tiểu là :

$$y = f(x)-\frac{1}{18a}.f'(x).f''(x)$$

2) Cho parabol $y=ax^2+bx+c$ và $M(x_o, y_o)$ là điểm có thể kẻ đến parabol 2 tiếp tuyến. Viết phương trình đường thẳng đi qua 2 tiếp điểm.

Đáp số :

$$(2ax_o+b)x-y+2c+bx_o-y_o=0$$

3) Cho 2 hàm số $y=-x^4+2ax^2$ và $y=x^2+b$.

Biết đồ thị 2 hàm số cắt nhau tại 4 điểm phân biệt. Chứng minh 4 điểm đó nằm trên 1 đường tròn. Viết phương trình đường tròn đó.

Đáp số :

$$x^2+(y-a-b)^2=a^2-b$$

ĐỀ THI TUYỂN SINH MÔN TOÁN 1996

TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI

I. ĐỀ BÀI

Câu I. *Cho hàm số* $y = x + \dfrac{1}{x+1}$

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

b) Chứng minh rằng qua điểm A(1, −1) bao giờ cũng kẻ được hai tiếp tuyến với đồ thị (C) và hai tiếp tuyến ấy vuông góc với nhau.

c) Tìm số k lớn nhất để bất phương trình sau được nghiệm đúng với mọi x : $k(|\sin x| + |\cos x| + 1) \leq |\sin 2x| + |\sin x| + |\cos x| + 2$

Câu II. *a) Tìm nghiệm của phương trình :*

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \cos 2x \qquad (1)$$

thỏa mãn bất phương trình :

$$1 + \log_{\frac{1}{2}}(2 + x - x^2) \geq 0 \qquad (2)$$

b) Gọi A, B, C là ba góc của ΔABC. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để ΔABC đều là ta có hệ thức :

$$\frac{\cos\frac{A}{2}}{1+\cos A} + \frac{\cos\frac{B}{2}}{1+\cos B} + \frac{\cos\frac{C}{2}}{1+\cos C} = \sqrt{3}$$

Câu III. *Trong không gian với hệ tọa độ Đềcác trực chuẩn Oxyz cho tứ diện ABCD với A(3, 2, 6), B(3, −1, 0), C(0, −7, 3), D(−2, 1, −1).*

a) Chứng minh rằng tứ diện ABCD có các cặp cạnh đối vuông góc với nhau.

b) Tính góc giữa đường thẳng (d) đi qua hai điểm A, D và mặt phẳng (α) đi qua ba điểm A, B, C.

c) Thiết lập phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD.

Câu IV. *Cho tích phân*

$$I(x) = \int_0^x (e^{2t} + e^{-2t})dt$$

a) Tính giá trị của tích phân I(x) khi x = ln2

b) Giải và biện luận phương trình I(x) = m (m là tham số)

Câu V. *Tìm giá trị lớn nhất của hàm số :*

$y = \cos^p x \sin^q x$ $\left(0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}; p, q \text{ là các số tự nhiên lớn hơn } 1\right)$

II. ĐÁP ÁN

Câu I. *a) Khảo sát và vẽ đồ thị :*

$$y = x + \frac{1}{x+1}$$

1) Tập xác định : $\forall x \neq -1$

2) Tiệm cận

*) $\lim\limits_{x \to -1} y = \infty \Rightarrow$ TCĐ : $x = -1$

*) $\lim\limits_{x \to \infty} [y - x] = 0 \Rightarrow$ TCX : $y = x$

3) $y' = 1 - \dfrac{1}{(1+x)^2} = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = -2 \\ x_2 = 0 \end{array}\right.$.

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
y'		+	0	−	‖	−	0	+	
y			CĐ		$+\infty$				$+\infty$
	$-\infty$		-3		$-\infty$		1		

4) Đồ thị : bạn đọc tự vẽ.

b) Tiếp tuyến qua A(1, −1)

Phương trình đường thẳng (d) đi qua $A(1, -1)$ không song song với trục Oy có dạng : $y - (-1) = k(x - 1)$. (d) tiếp xúc với $(c) \Leftrightarrow x + \dfrac{1}{x+1} = kx - (k+1)$ có nghiệm kép $\Leftrightarrow t(x) = (k-1)x^2 - 2x - (k+2) = 0$ có nghiệm kép $x \neq -1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} k \neq 1 \\ \Delta' = k^2 + k - 1 = 0. \text{ Theo định lí Viét} \Rightarrow \\ t(-1) \neq -1 \end{cases}$

$k_1 k_2 = -1$ $(k_1, k_2 \neq 1)$. Vậy qua $A(1, -1)$ luôn kẻ được hai tiếp tuyến với đồ thị (C) và hai tiếp tuyến ấy vuông góc với nhau.

c) Đặt $t = |\sin x| + |\cos x| \Rightarrow t^2 = 1 + |\sin 2x| \Rightarrow 1 \leq t^2 \leq 2 \Rightarrow 1 \leq t \leq \sqrt{2}$

Vậy bất phương trình xuất phát $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} k(t+1) \leq t^2 + t + 1 \\ 1 \leq t \leq \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{t^2+t+1}{t+1} \geq k \\ 1 \leq t \leq \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow k \leq \dfrac{3}{2}$. Vậy $k_{max} = \dfrac{3}{2}$

Câu II. *a)*

$(1) \Leftrightarrow 1 - \dfrac{1}{2}\sin^2 2x = \cos 2x \Leftrightarrow \cos^2 2x - 2\cos 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = 1 \Leftrightarrow x = k\pi$ $(k \in z)$

$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 + x + 2 > 0 \\ \log_{\frac{1}{2}}(2 + x - x^2) \geq -1 = \log_{\frac{1}{2}} 2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} -x^2 + x + 2 > 0 \\ -x^2 + x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 < x \leq 0 \\ 1 \leq x < 2 \end{array}\right.$

Nghiệm của (1) thỏa mãn (2) ta phải có : $\left[\begin{array}{l} -1 < k\pi \leq 0 \Leftrightarrow k = 0 \\ 1 \leq k\pi < 2 \Rightarrow \nexists k \end{array}\right.$

Vậy $x = 0$ là nghiệm cần tìm.

b) ΔABC đều $\Leftrightarrow$

$$\frac{\cos\frac{A}{2}}{1+\cos A} + \frac{\cos\frac{B}{2}}{1+\cos B} + \frac{\cos\frac{C}{2}}{1+\cos C} = \sqrt{3} \quad (3)$$

1) *Cần :* Δ đều $\Rightarrow A = B = C = 60^o \Rightarrow$ VT $=$

$$3 \cdot \frac{\cos 30^o}{1+\cos 60^o} = \sqrt{3} = \text{VP}$$

2) *Đủ :*

$$(3) \Leftrightarrow \frac{1}{\cos\frac{A}{2}} + \frac{1}{\cos\frac{B}{2}} + \frac{1}{\cos\frac{C}{2}} = 2\sqrt{3} \quad (4)$$

Trong ΔABC ta có các bất đẳng thức sau :

$$\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2} \quad (5)$$

$$\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad (6)$$

dấu = xẩy ra $\Leftrightarrow \Delta$ là đều. Thực vậy :

*) $(5) \Leftrightarrow 2\sin^2\frac{A}{2} - 2\cos\frac{B-C}{2}\sin\frac{A}{2} + \frac{1}{2} \geq 0$;

$$\Delta' = \cos^2\frac{B-C}{2} - 1 \leq 0$$

$\Rightarrow$ (5) luôn luôn đúng và dấu = xẩy ra $\Leftrightarrow \Delta$ đều.

*) Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacốpski ta được :

$$\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2} \leq$$

$$\leq \sqrt{3}\sqrt{\cos^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{B}{2} + \cos^2\frac{C}{2}} =$$

$$= \sqrt{3}\sqrt{\frac{3}{2} + \frac{1}{2}(\cos A + \cos B + \cos C)}$$

$$\leq \sqrt{3} \cdot \sqrt{\frac{3}{2} + \frac{3}{4}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$ (do (5)). Dấu = xẩy ra $\Leftrightarrow \Delta$ là đều. Theo Cauchy

$$9 \leq \left(\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2}\right)\left(\frac{1}{\cos\frac{A}{2}} + \frac{1}{\cos\frac{B}{2}} + \frac{1}{\cos\frac{C}{2}}\right)$$

$$\leq \frac{3\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{\cos\frac{A}{2}} + \frac{1}{\cos\frac{B}{2}} + \frac{1}{\cos\frac{C}{2}}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cos\frac{A}{2}} + \frac{1}{\cos\frac{B}{2}} + \frac{1}{\cos\frac{C}{2}} \geq \frac{18}{3\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}.$$

Dấu = xẩy ra $\Leftrightarrow \Delta$ là đều.

Câu III. a)

C. 1 :

Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{BA} = \{0, 3, 6\} \\ \overrightarrow{CD} = \{-2, 8, -4\} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CD} = 0 + 24 - 24 = 0 \Rightarrow AB \perp CD$

$\begin{cases} \overrightarrow{BD} = \{-5, 2, -1\} \\ \overrightarrow{AC} = \{-3, -9, -3\} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC} = 15 - 18 + 3 = 0 \Rightarrow AC \perp BD$

$\begin{cases} \overrightarrow{AD} = \{-5, -1, -7\} \\ \overrightarrow{BC} = \{-3, -6, 3\} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 15 + 6 - 21 = 0 \Rightarrow AD \perp BC$

C. 2 : Ta có $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Rightarrow$ 3 véctơ $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}$ vuông góc với nhau từng đôi một $\Rightarrow$ góc tam diện đỉnh B có 3 mặt vuông $\Rightarrow BD \perp$ mf $(ABC) \Rightarrow BD \perp AC$. Tương tự $CD \perp AB$ và $BC \perp AD$

b) C. 1 : Vì $BD \perp$ mf $(ABC) \Rightarrow \overrightarrow{BD}$ là véctơ pháp của mf (ABC) vậy $\vec{n} = \overrightarrow{BD} = \{-5, 2, -1\}$. Véctơ chỉ phương của AD là :

$\vec{l} = \overrightarrow{AD} = \{-5, -1, -7\}$ vậy $\sin\varphi = \frac{|25 - 2 + 7|}{\sqrt{75}.\sqrt{30}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$ (φ là góc giữa AD và mf (ABC))

C. 2 : Do $BD \perp$ mf (ABC) nên hình chiếu của AD lên mặt phẳng (ABC) là đoạn thẳng $AB \Rightarrow$
$\varphi = \widehat{DAB} \Rightarrow \sin\varphi = \frac{BD}{AD} = \frac{\sqrt{30}}{\sqrt{75}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$

c) C. 1 : Vì ΔBCD vuông tại B và $AB \perp$ mf (BCD) nên tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ là giao điểm của trục đường tròn ngoại tiếp ΔBCD và đường trung trực của đoạn thẳng AB nằm trong mf (ABH) (H là trung điểm của CD). Gọi $\begin{cases} I \text{ là trung điểm của AB} \\ O \text{ là tâm mặt cầu} \end{cases} \Rightarrow$ tứ giác $OIBH$ là hình chữ nhật $\Rightarrow \overrightarrow{HO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$. Ta có $H(-1, -3, 1)$; $O(x_o, y_o, z_o) \Rightarrow$

$\overrightarrow{HO} = \{x_o + 1, y_o + 3, z_o - 1\}$

$\frac{1}{2}\overrightarrow{BA} = \left\{0, \frac{3}{2}, 3\right\}$ $\Rightarrow \begin{cases} x_o + 1 = 0 \\ y_o + 3 = \frac{3}{2} \\ z_o - 1 = 3 \end{cases} \Rightarrow$

$O\left(-1, -\frac{3}{2}, 4\right)$. Vì $R^2 = OA^2 = \frac{129}{4}$ nên phương trình mặt cầu có dạng :

$$(x+1)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 + (z-4)^2 = \frac{129}{4} \Leftrightarrow$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 3y - 8z - 13 = 0$$

C. 2 : Ta tìm phương trình mặt cầu (S) dưới dạng

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$$

1) $A(3, 2, 6) \in (S) \Leftrightarrow 49 - 6a - 4b - 12c + d = 0$ (1)

2) $B(3, -1, 0) \in (S) \Leftrightarrow 10 - 6a + 2b + d = 0$ (2)

3) $C(0, -7, 3) \in (S) \Leftrightarrow 58 + 14b - 6c + d = 0$ (3)

4) $D(-2, 1, -1) \in (S) \Leftrightarrow 6 + 4a - 2b + 2c + d = 0$ (4)

Lấy (1) trừ (2) $\Rightarrow 2b + 4c = 13$ (5)

(3) trừ (4) $\Rightarrow a - 4b + 2c = 13$ (6)

(1) trừ (4) $\Rightarrow 10a + 2b + 14c = 43$ (7)

Nhân (6) với 10 và trừ (7) $\Rightarrow -14b+2c=29$ (8)

Kết hợp (5) và (8) ta được $\begin{cases} 2b+4c=13 \\ -14b+2c=29 \end{cases} \Rightarrow b=-\frac{3}{2}, c=4 ; a=-1,$ $d=-13 \Rightarrow (S)$ có dạng : $x^2+y^2+z^2+2x+3y-8z-13=0$

Câu IV. a) $I(x)=\frac{1}{2}(e^{2x}-e^{-2x}) \Rightarrow I(\ln 2)=\frac{1}{2}(e^{2\ln 2}-e^{-2\ln 2})=\frac{1}{2}\left(4-\frac{1}{4}\right)=\frac{15}{8}$

b) Phương trình $I(x)=m \Leftrightarrow \frac{1}{2}(e^{2x}-e^{-2x})=m$

$\Leftrightarrow \begin{cases} t^2-2mt-1=0 \\ t=e^{2x}>0 \end{cases}$ Theo Viét : $t_1t_2=-1<0$ vậy $(\forall m)$ phương trình luôn luôn có 1 nghiệm dương $t_2=m+\sqrt{m^2+1}=e^{2x} \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\ln(m+\sqrt{m^2+1})$ với mọi m.

Câu V.

Vì $y \geq 0$ nên $y_{LN} \Leftrightarrow y^2_{LN}$. Ta có :

$y^2=(\cos^2x)^p(\sin^2x)^q=$

$$=p^p.q^q\underbrace{\left(\frac{\cos^2x}{p}\cdots\frac{\cos^2x}{p}\right)}_{\text{q thừa số}}.\underbrace{\left(\frac{\sin^2x}{q}\cdots\frac{\sin^2x}{q}\right)}_{\text{p thừa số}} \leq$$

$$\leq p^pq^q\left(\frac{\frac{\cos^2x}{p}+\ldots+\frac{\cos^2x}{p}+\frac{\sin^2x}{q}+\ldots+\frac{\sin^2x}{q}}{p+q}\right)^{p+q}$$

$$=\frac{p^p.q^q}{(p+q)^{p+q}}$$

(Áp dụng bđt Cauchy cho $p+q$ số trong đó : p số có dạng $\frac{\cos^2x}{p}$ và q số có dạng $\frac{\sin^2x}{q}$).

Vậy $y_{LN}=\sqrt{\left(\frac{p}{p+q}\right)^p.\left(\frac{q}{p+q}\right)^q}$ đạt được khi và chỉ khi $\frac{\cos^2x}{p}=\frac{\sin^2x}{q} \Leftrightarrow \operatorname{tg}x=\sqrt{\frac{q}{p}}$ (do $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$)

TRẦN XUÂN HIỂN

(tiếp theo bìa 3)

Áp dụng định lí 3 và định lí 4 ta có thể giải được bài toán sau :

Bài toán 4 : Tìm tất cả các hàm liên tục

$$f:[0,1]\to R$$

sao cho $f(x)=\frac{1}{2}\left[f\left(\frac{x}{2}\right)+f\left(\frac{1+x}{2}\right)\right]\ \forall x \in [0,1]$ (Đề thi chọn đội tuyển của Việt Nam thi toán quốc tế năm 1989)

Lời giải : *Giả sử f(x)) là hàm số thỏa mãn đề bài*

Khi đó $f(0)=f\left(\frac{1}{2}\right)=f(1)$

Ta chứng minh $f(x)=f(0)\ \forall x \in (0,1)$.

Thật vậy giả sử tồn tại $x_o \in (0,1)$ sao cho $f(x_o) \neq f(0)$.

Xét trường hợp $f(x_o)>f(0)$.

Và $f(x)$ là hàm số liên tục trên $[0,1]$ nên

$\exists\ x_1\ (0,1)$ sao cho $f(x_1) \geq f(x)\ \forall x \in [0,1]$

$(f(x_1)=\max\limits_{x\in[0,1]} f(x))$

Đặt $M=f(x_1)$, ta có $M>f(0)$

Xét tập hợp $P=\{x \in (0,1) \mid f(x)=M\}$.

Và $x_1 \in P$ nên $P \neq \phi$. Hơn nữa P bị chặn.

Vậy theo định lí 3 ta có $\exists d=\sup P$.

Hiển nhiên $d \leq 1$ và $d>0$

Giả sử $d<1$. Khi đó tồn tại dãy số $\{x_n\}$ sao cho $x_n \in P\ \forall n \in N^*$ và $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=d$.

Và hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[0,1]$ nên $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=f(d)$. Và $x_n \in P\ \forall n \in N^*$

nên $f(x_n)=M\ \forall n \in N^*$. Suy ra $f(d)=M$ Mặt khác vì $d \in (0,1)$ nên

$$f(d)=\frac{1}{2}\left[f\left(\frac{d}{2}\right)+f\left(\frac{1+d}{2}\right)\right]$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{d}{2}\right)=M \text{ và } f\left(\frac{1+d}{2}\right)=M$$

$$(\text{vì } f\left(\frac{d}{2}\right) \leq M \text{ và } f\left(\frac{1+d}{2}\right) \leq M)$$

Và $0<\frac{1+d}{2}<1$ và $f\left(\frac{1+d}{2}\right)=M$ nên $\frac{1+d}{2} \in P$

Mặt khác $\frac{1+d}{2}>d$. Điều này trái với định nghĩa của d. Nếu $d=1$ ta có $M=f(1)=f(0)$: vô lí. Trường hợp $f(x_o)<f(0)$ cũng dẫn đến điều vô lí.

Vậy $f(x)=f(0)\ \forall x \in (0,1)$

$\Rightarrow f(x)=f(0)\ \forall x \in [0,1]$

Vậy $f(x)=c$ (c là hằng số)

Thử lại ta thấy rằng hàm số $f(x)=c$ (c là hằng số) thỏa mãn đề bài

Cuối cùng là hai bài tập dành cho bạn đọc :

Bài 1 : Chứng minh rằng nếu hàm số

$$f:[0,1]\to[0,1]$$

liên tục trên đoạn $[0,1]$ và thỏa mãn

$$f(f(x))=x^2\ \forall x \in [0,1]$$

thì cũng thỏa mãn $x^2<f(x)<x,\ \forall x \in (0,1)$.

Hãy chỉ ra một hàm số có các tính chất nêu trên.

Bài 2 : Tìm tất cả các hàm liên tục $f: R \to R$ thỏa mãn điều kiện sau : Với bất kì $x_1, x_2 \in R$ mà $x_1<x_2$ đều tồn tại $c \in (x_1,x_2)$ sao cho $f(c) \geq f(x_1)$ và $f(c) \geq f(x_2)$

ĐỊNH LÍ EULER - LAGRANGE VỀ TỔNG CỦA BỐN BÌNH PHƯƠNG

TRẦN XUÂN DÀI
(Tp Hồ Chí Minh)

Có thể chứng minh khá dễ dàng rằng :

Mọi số nguyên n đều là tổng của năm lập phương.

Chỉ cần viết số nguyên n dưới dạng

$n = n^3 + (k+1)^3 + (k-1)^3 + (-k)^3 + (-k)^3$

trong đó $k = (n - n^3)/6$ là số nguyên.

Nhà toán học nổi tiếng Euler (Ole, 1707 – 1783) đã quan tâm đến bài toán sau đây :

Chứng minh rằng mọi số tự nhiên đều là tổng của bốn bình phương.

Euler chỉ mới chứng minh được hai bổ đề, giúp cho nhà toán học Pháp Lagrange (Lagơrăng, 1736 – 1813) giải trọn vẹn bài toán đó năm 1770. Ta gọi đây là *định lí về tổng của bốn bình phương.*

Sau đây là các bổ đề và chứng minh định lí của Euler và Lagrange.

Bổ đề 1 – *Nếu hai số P và Q là tổng của bốn bình phương thì tích PQ cũng là tổng của bốn bình phương.*

Thật vậy, giả sử $P = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$

$Q = e^2 + f^2 + g^2 + h^2$.

Ta lấy :

$p = ae + bf + cg + dh$

$q = af - bc + ch + dg$

$r = ag - bh - ce + df$

$s = ah + bg - cf - de$

Thế thì $PQ = p^2 + q^2 + r^2 + s^2$, đpcm.

Từ bổ đề 1, suy ra rằng để chứng minh định lí đã cho, chỉ cần chứng minh rằng *mọi số nguyên tố đều là tổng của bốn bình phương.*

Bổ đề 2 – *Với mọi số nguyên tố lẻ p, có một số tự nhiên M sao cho 0 < M < p và Mp là tổng của bốn bình phương. Hơn nữa, số nhỏ nhất (m) trong các số M này là một số lẻ.*

Chứng minh :

Xét dãy

$$0^2, 1^2, 2^2, ..., \left(\frac{p-1}{2}\right)^2 \qquad (1)$$

Chia các số của dãy cho p, ta có các số dư đôi một khác nhau. Thật vậy, giả sử có H^2 và K^2 (với $H^2 < K^2$) trong dãy (1) mà $H^2 = hp + r$ và $K^2 = kp + r$. Thế thì p là ước của $H^2 - K^2 = (H-K)(H+K)$, tức p là ước của $H - K$ hoặc của $H + K$. Nhưng $0 < H - K, H + K < p$, vô lí.

Tương tự, các số trong dãy

$$-1-0^2, -1-1^2, -1-2^2, ..., -1-\left(\frac{p-1}{2}\right)^2 \quad (2)$$

cho số dư đôi một khác nhau khi chia cho p.

Mỗi dãy (1) và (2) chứa $(p+1)/2$ số, cả hai dãy chứa $p+1$ số, các số này cho p số dư khác nhau khi chia cho p ; vì vậy, phải có một số (x^2) trong dãy (1) và một số $(-1 - y^2)$ trong dãy (2) cho cùng số dư khi chia cho p. Hiệu của hai số này, tức $x^2 + y^2 + 1$, chia hết cho p, nghĩa là có số tự nhiên M sao cho

$$Mp = x^2 + y^2 + 1^2 + 0^2$$

Mà $0 \leq x, y \leq (p-1)/2$, nên $0 < M < p$.

Gọi m là số nhỏ nhất trong các số M nói trên, ta có

$mp = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$.

Nếu m chẵn thì trong bốn số a, b, c, d có 0 số, 2 số (giả sử là a và b) hoặc cả 4 số là chẵn. Do đó :

$$\frac{mp}{2} = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c+d}{2}\right)^2 + \left(\frac{c-d}{2}\right)^2$$

tức là $mp/2$ là tổng của bốn bình phương. Mà $m/2 < m$, mâu thuẫn với giả thiết m là số nhỏ nhất trong các số M.

Vậy m là số lẻ. Bổ đề 2 đã được chứng minh.

Chứng minh định lí về tổng của bốn bình phương

Vì $2 = 1^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2$, nên theo bổ đề 1, chỉ cần chứng minh rằng mọi số nguyên tố lẻ là tổng của bốn bình phương.

Gọi p là số nguyên tố lẻ bất kì và m là số tự nhiên nhỏ nhất giữa 0 và p sao cho mp là tổng của bốn bình phương. Theo bổ đề 2, m là số lẻ.

Ta chứng minh $m = 1$ bằng phản chứng.

Giả sử $m \geqslant 3$ và $mp = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$.

Gọi u là số nguyên gần a/m nhất, tức là $|a/m - u| < 1/2$ (do m lẻ nên không có $a/m = k + 1/2$ với k nguyên).

Tương tự, v, x, y là các số nguyên gần nhất với b/m, c/m và d/m tương ứng. Như vậy các số

$u' = a - m.u$

$v' = b - m.v$

$x' = c - m.x$

$y' = d - m.y$

đều ở giữa $-m/2$ và $m/2$.

Ta có

$mp = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 =$

$= m^2(u^2 + v^2 + x^2 + y^2) + 2m(uu' + vv' + xx' + yy') + (u'^2 + v'^2 + x'^2 + y'^2)$

$= m^2Z + 2mT + Z'$

với $Z = u^2 + v^2 + x^2 + y^2$

$Z' = u'^2 + v'^2 + x'^2 + y'^2$

$T = uu' + vv' + xx' + yy'$

Chú ý rằng $Z' < 4(m/2)^2 = m^2$ và $Z' \neq 0$ (vì nếu $Z = 0$ thì m là ước của a, b, c, d ; do đó m^2 là ước của $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = mp$, vô lí vì $1 < m < p$ mà p là số nguyên tố).

Đặt $M = Z'/m = p - mZ - 2T$ (M nguyên).

Vì $Z' \neq 0$ nên $M \neq 0$ và vì $Z' < m^2$ nên $M < m$.

Ta có

$Mp = (M/m)mp$

$= (M/m)(m^2Z + 2mT + Z')$

$= ZMm + 2MT + MZ'/m = ZZ' + 2MT + M^2 =$

$= ZZ' - T^2 + (T+M)^2$.

Do bổ đề 1, $ZZ' = T^2 + q^2 + r^2 + s^2$ với các số tự nhiên q, r, s nào đó. Vì vậy, Mp là tổng của bốn bình phương :

$$Mp = q^2 + r^2 + s^2 + (T+m)^2.$$

Mà $M < m$, trái với giả thiết m là số nhỏ nhất giữa 0 và p sao cho mp là tổng của bốn bình phương. *Mâu thuẫn này chứng minh định lí.*

Tìm hiểu sâu thêm toán học phổ thông

HÀM SỐ LIÊN TỤC VÀ ỨNG DỤNG

TRẦN XUÂN ĐÁNG
(Nam Định)

Trước hết ta nêu thêm các tính chất của hàm số liên tục :

Định lí 1 : Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$. Nếu $f(x) \neq 0\ \forall x\ [a, b]$ thì

hoặc $f(x) > 0\ \forall x\ [a, b]$

hoặc $f(x) < 0\ \forall x \in [a, b]$

(Bạn đọc tự chứng minh).

Bài toán 1. Cho $f(x)$ và $g(x)$ là các hàm số liên tục trên R sao cho $f(g(x)) = g(f(x))\ \forall x \in R$. Chứng minh rằng, nếu phương trình $f(x) = g(x)$ vô nghiệm thì phương trình $f(f(x)) = g(g(x))$ cũng vô nghiệm.

Lời giải : Vì phương trình $f(x) = g(x)$ vô nghiệm nên $f(x) - g(x) \neq 0\ \forall x \in R$.

Mặt khác $f(x) - g(x)$ là hàm số liên tục trên R. Vậy theo định lí 1 :

hoặc $f(x) - g(x) > 0\ \forall x \in R$

hoặc $f(x) - g(x) < 0\ \forall x \in R$

Trường hợp 1 : $f(x) - g(x) > 0\ \forall x \in R$

Khi đó $f(x) > g(x)\ \forall x \in R$

Với $x \in R$ ta có $f(x) > g(x)$

$$\Rightarrow f(f(x)) > g(f(x)) = f(g(x)) > g(g(x))$$

$$\Rightarrow f(f(x)) > g(g(x))\ \forall x \in R$$

Vậy phương trình $f(f(x)) = g(g(x))$ vô nghiệm

Trường hợp 2 : $f(x) - g(x) < 0\ \forall x \in R$

Bằng cách tương tự ta cũng chứng minh được

$$f(f(x)) < g(g(x))\ \forall x \in R$$

Vậy phương trình $f(f(x)) = g(g(x))$ vô nghiệm

Trong cả hai trường hợp ta đều có phương trình

$$f(f(x)) = g(g(x)) \text{ vô nghiệm}$$

Định lí 2 : Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$. Nếu $f(x)$ đơn ánh thì hoặc $f(x)$ đồng biến trên đoạn $[a, b]$

hoặc $f(x)$ nghịch biến trên đoạn $[a, b]$

(Bạn đọc tự chứng minh)

Áp dụng định lí 2 ta có thể giải được các bài toán sau :

Bài toán 2 : Có tồn tại hay không hàm số $f(x)$ liên tục trên R sao cho $f(f(x)) = -x\ \forall x \in R$?

Lời giải : Giả sử tồn tại hàm số $f(x)$ thỏa mãn đề bài

Trước hết ta chứng minh rằng $f(x)$ đơn ánh.

Thật vậy, giả sử $x_1, x_2 \in R$ và $f(x_1) = f(x_2)$.

Khi đó $f(f(x_1)) = f(f(x_2)) \Rightarrow -x_1 = -x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$

Vậy $f(x)$ đơn ánh.

Theo định lí 2 thì hoặc $f(x)$ đồng biến trên R hoặc $f(x)$ nghịch biến trên R. Nếu $f(x)$ đồng biến trên R thì : với $x_1, x_2 \in R$ và $x_1 < x_2$ thì $f(x_1) < f(x_2)$

$$\Rightarrow f(f(x_1)) < f(f(x_2)) \Rightarrow -x_1 < -x_2$$

$\Rightarrow x_1 > x_2$. Điều này trái với giả thiết.

Trường hợp $f(x)$ nghịch biến trên R cũng dẫn đến điều vô lí.

Vậy điều giả sử rằng tồn tại hàm số $f(x)$ thỏa mãn đề bài là sai. Điều đó có nghĩa là không tồn tại hàm số $f(x)$ thỏa mãn đề bài.

Bài toán 3 : Tìm tất cả các giá trị của k để tồn tại một hàm liên tục $f : R \to R$ thỏa mãn

$$f(f(x)) = kx^9,\ \forall x \in R$$

Lời giải : Với $k = 0$, hàm số $f(x) = 0$ $(\forall x \in R)$ thỏa mãn đề bài

Với $k > 0$, hàm số $f(x) = \sqrt[4]{k}\,x^3$ thỏa mãn đề bài với $k < 0$, bằng cách chứng minh như lời giải của bài toán 2 ta thấy rằng không tồn tại hàm số $f(x)$ thỏa mãn đề bài.

Ta bổ sung thêm khái niệm và hai định lí dưới đây :

Định nghĩa : a) Giả sử M là một tập con của tập số thực R $(M \neq \phi)$. Số $c \in R$được gọi là cận trên đúng của tập M nếu hai điều kiện sau được thỏa mãn đồng thời :

1) $x \leqslant c\ \forall x \in M$

2) $\forall \delta > 0, \exists x \in M$ sao cho $c - \delta < x$.

b) Giả sử M là một tập con của tập số thực R $(M \neq \phi)$. Số $d \in R$ được gọi là cận dưới đúng của M nếu hai điều kiện sau được thỏa mãn đồng thời :

1) $x \geqslant d\ \forall x \in M$

2) $\forall d > 0\ \exists\, x \in M$ sao cho $x < d + \delta$

Định lí 3 : 1) Giả sử M là một tập con khác rỗng của tập số thực R. Nếu M bị chặn trên thì tồn tại cận trên đúng *của* M

2) Giả sử M là một tập con khác rỗng của tập số thực R. Nếu M bị chặn dưới thì tồn tại cận dưới đúng của M. Người ta kí hiệu cận trên đúng của tập M là sup M và cận dưới đúng của tập M là inf M.

Định lí 4 : 1) Nếu c là cận trên đúng của tập M $(M \neq \phi)$ thì tồn tại dãy số $\{x_n\}$ sao cho $x_n \in M\ \forall n \in N^*$ và $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = c$.

2) Nếu d là cận dưới đúng của tập M $(M \neq \phi)$ thì tồn tại dãy số $\{x_n\}$ sao cho $x_n \in M\ \forall n \in N^*$ và $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = d$. Việc chứng minh định lí 3 vượt ra ngoài chương trình phổ thông.

Việc chứng minh định lí 4 xin dành cho bạn đọc.

(xem tiếp trang 15)

ĐÔI KHI TƯỞNG LÀ ĐÚNG

Có một dạng phương trình vô tỉ mà nhiều người mắc sai lầm khi giải, đó là phương trình dạng $\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B} = C$.

Thí dụ 1 :

Đề số 48 trong bộ đề thi tuyển sinh vào các trường đại học, cao đẳng và trung học chuyên nghiệp – Môn Toán có bài :

Giải phương trình

$$\sqrt[3]{2x-1} = x\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{2x+1}$$

Trong hướng dẫn giải đề thi tuyển sinh đã giải như sau :

Phương trình đã cho tương đương với

$$(\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{2x+1})^3 = 16x^3$$

$$\Leftrightarrow 4x + 3\sqrt[3]{4x^2-1}(\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{2x+1}) = $$
$$= 16x^3$$

$$\Leftrightarrow 3x\sqrt[3]{16}\sqrt[3]{4x^2-1} = 4(4x^2-1)x$$

$$\Leftrightarrow 2x\sqrt[3]{4x^2-1}\,[2\sqrt[3]{(4x^2-1)^2} - 3\sqrt[3]{2}] = 0$$

a) $x = 0$

b) $x^2 - \frac{1}{4} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{2}$

c) $\sqrt[3]{(4x^2-1)^2} = \frac{3\sqrt[3]{2}}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{2+3\sqrt{3}}}{2\sqrt{2}}$

Ta hãy xét thí dụ 2 :

Giải phương trình

$$\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{x-1} = \sqrt[3]{3x+1}$$

Nếu giải theo phương pháp trên ta có :

Phương trình đã cho tương đương với

$$(\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{x-1})^3 = 3x+1$$

$$\Leftrightarrow 3x - 2 + 3\sqrt[3]{(2x-1)(x-1)}(\sqrt[3]{2x-1} + $$
$$+ \sqrt[3]{x-1}) = 3x+1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{(2x-1)(x-1)(3x+1)} = 1$$

$$\Leftrightarrow 6x^3 - 7x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = \frac{7}{6}$$

Nhưng có thể thấy ngay rằng $x = 0$ không là nghiệm của phương trình đã cho. Phương pháp giải trên sai lầm ở chỗ đã xem rằng phương trình $\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B} = C$ và phương trình $A + B + 3\sqrt[3]{A.B.C} = C^3$ tương đương nhau.

NGUYỄN DOANH HÒA

(Giáo viên trường PTTH Châu Văn Liêm – Cần Thơ)

Lời Tòa soạn : Quan hệ giữa hai tập nghiệm của hai phương trình $\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B} = C$ và $A + B + 3\sqrt[3]{AB}\,.\,C = C^3$ như thế nào ? Thí dụ 1 với lời giải trên có thừa hoặc thiếu nghiệm không ? Tại sao lời giải ở thí dụ 2 lại cho thừa giá trị $x = 0$? Chúng tôi mong nhận được câu trả lời của các bạn !

Giải đáp bài

Trò chơi chia diêm

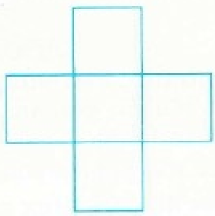
Giả sử người chơi đi trước là A và người chơi đi sau là B. Ta biết rằng một số chẵn bao giờ cũng tách được thành tổng của hai số lẻ. Một số lẻ (không nhỏ hơn 3) thì bao giờ cũng tách được thành tổng của một số lẻ và một số chẵn. Vì vậy người chơi A muốn thắng thì lần chơi trước tiên phải chia đống diêm (30 que) thành 2 đống cùng có số que lẻ (17 và 13 chẳng hạn). Tiếp đó người chơi B sẽ phải chia một trong hai đống có số que lẻ thành hai đống nhỏ hơn : một đống có số que lẻ, một đống có số que chẵn. Đến lượt người chơi A lại chọn đống có số que chẵn và chia thành 2 đống có số que lẻ và đến lượt người B lại phải chọn một đống có số que lẻ nào đó để chia thành hai đống nhỏ hơn một đống có số que lẻ và một đống có số que chẵn. Cứ tuần tự như thế cho tới khi người A chia đống có số chẵn que cuối cùng là 2 thành hai đống mỗi đống có một que thì người chơi B không chia được nữa và chịu thua.

(Dựa theo giải đáp của các bạn : *Hoàng Thị Nguyệt Ánh*, 8T, NK Hải Hưng ; *Nguyễn Văn Lượng*, 90, NK TP. Thanh Hóa ; *Hoàng Hải Yến* ; B_1, F_9 đường Vũ Bản, Nam Định)

BÌNH PHƯƠNG

Cắt và ghép

Hãy cắt bằng 2 nhát miếng gỗ như hình bên sao cho khi ghép các mảnh thu được lại ta có một mảnh hình vuông.



MINH TRẦN

(Thừa Thiên – Huế)

ISSN : 0866 – 8035
Chỉ số : 12884
Mã số : 8BT38M6

Sắp chữ tại TTVT Nhà xuất bản giáo dục
In tại nhà máy in Diên Hồng, 57 Giảng Võ
In xong và nộp lưu chiểu tháng 3/1997

Giá 2.000đ
Hai nghìn đồng