

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ★ HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM



VÀ **TUỔI TRẺ**

1 (235)
1997
NĂM THỨ 34

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG



Hong 897

TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ MATHEMATICS AND YOUTH

Chúc mừng năm mới

Xuân Đình Sửu

Trụ sở tòa soạn :

45B Hàng Chuối, Hà Nội

231 Nguyễn Văn Cừ, TP Hồ Chí Minh

Bìa : ĐOÀN HỒNG

Tổng biên tập : **NGUYỄN CẢNH TOÀN**

Phó tổng biên tập : **NGÔ ĐẠT TỬ**

HOÀNG CHÚNG

Biên tập và trị sự : **VŨ KIM THỦY**

Trình bày : **QUỐC HỒNG**

Dành cho các bạn trung học cơ sở

PHƯƠNG PHÁP CỤC HẠN

NGÔ HÂN
(Hà Bắc)

Khi giải một số bài toán có các yếu tố rời rạc hoặc hữu hạn, nếu ta dùng *phương pháp cục hạn* để chứng minh nhiều khi rất thuận lợi.

Nội dung của phương pháp này là phải chọn được *phần tử cục hạn* (nhỏ nhất hoặc lớn nhất) của một tập hợp đã cho.

Đặc biệt nếu tập hợp đã cho là một tập con của tập hợp các số thực hoặc tập hợp đã cho có quan hệ với một tập con của tập hợp các số thực thì có thể sử dụng một tính chất (hay nguyên lý) của các số thực (xem bài *Nguyên lý khởi đầu cục trị*, báo TH và TT, số 138)

Tính chất đó như sau :

Trong một tập hợp hữu hạn khác rỗng các số thực luôn chọn được số nhỏ nhất và số lớn nhất.

Để các bạn làm quen với *phương pháp cục hạn*, xin giới thiệu một số bài toán thí dụ.

- **Bài toán 1 :** 7 người vào rừng hái nấm được tất cả 100 cái. Số nấm hái được của mỗi người đều khác nhau. Chứng minh rằng có 3 người hái được tổng số nấm không ít hơn 50 cái.

Giải : Gọi số nấm hái được của mỗi người là $a_1, a_2, \dots, a_7$ được sắp xếp từ nhỏ đến lớn :

$$a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < a_6 < a_7 \quad (1)$$

Xét 2 trường hợp :

1) $a_5 \geq 16$. Gọi M là tập hợp gồm 3 số nguyên a_5, a_6, a_7 . Khi đó theo (1) thì a_5 là số nhỏ nhất của M :

$$a_5 \geq 16 \Rightarrow a_6 \geq 17 ; a_7 \geq 18$$

Do đó ta có :

$$a_5 + a_6 + a_7 \geq 51 \quad (2)$$

a) $a_5 < 16$ hay $a_5 \leq 15$. Gọi N là tập hợp gồm 4 số nguyên a_1, a_2, a_3, a_4 . Khi đó theo (1) ta có :

$$a_4 \leq 14 \text{ (vì } a_5 \leq 15)$$

Mặt khác a_4 là số lớn nhất của N :

$$a_4 \leq 14 \Rightarrow a_3 \leq 13 ; a_2 \leq 12 ; a_1 \leq 11$$

Ta có :

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \leq 50$$

Suy ra :

$$a_5 + a_6 + a_7 \geq 50 \quad (3)$$

Các bất đẳng thức (2) và (3) chứng tỏ bài toán được chứng minh.

- **Bài toán 2 :** Chứng minh rằng phương trình

$$x^2 + y^2 = 3z^2$$

chỉ có một nghiệm nguyên duy nhất.

Giải : Dễ thấy phương trình đã cho có nghiệm tầm thường $(0, 0, 0)$ tức là :

$$x = y = z = 0.$$

Giả sử phương trình còn có nghiệm nguyên (x, y, z) khác với nghiệm $(0, 0, 0)$. Nhận thấy nghiệm này phải có x và y không đồng thời bằng 0. Suy ra $z \neq 0$.

Xét 2 trường hợp :

1) $z > 0$. Gọi M là tập hợp các số nguyên $z > 0$ có được từ các nghiệm nguyên (x, y, z) của phương trình.

M có số nhỏ nhất z_0 ứng với nghiệm (x_0, y_0, z_0) . Ta có :

$$x_0^2 + y_0^2 = 3z_0^2 \quad (1)$$

Vì $(x_0^2 + y_0^2)$ chia hết cho 3 nên x_0 và y_0 cùng chia hết cho 3. Thật vậy, nếu x_0 và y_0 đều không chia hết cho 3 thì x_0^2 và y_0^2 khi chia cho 3 sẽ có số dư là 1, do đó $(x_0^2 + y_0^2)$ không chia hết cho 3.

Đặt $x_0 = 3x_1 ; y_0 = 3y_1$, trong đó x_1 và y_1 là các số nguyên không đồng thời bằng 0.

Ta có :

$$9x_1^2 + 9y_1^2 = 3z_0^2$$

$$\text{hay : } 3(x_1^2 + y_1^2) = z_0^2$$

Vì z_0^2 chia hết cho 3 nên z_0 cũng chia hết cho 3. Đặt $z_0 = 3z_1$ trong đó z_1 là số nguyên dương. Ta có :

$$x_1^2 + y_1^2 = 3z_1^2 \quad (2)$$

Đẳng thức (2) chứng tỏ (x_1, y_1, z_1) là nghiệm nguyên của phương trình. Nhưng vì $z_1 < z_0$ nên không thỏa mãn với z_0 là số nhỏ nhất.

Như vậy phương trình không có nghiệm nguyên với $z > 0$.

2) $z < 0$. Nhận thấy nếu (x, y, z) là nghiệm của phương trình thì $(x, y, -z)$ cũng là nghiệm. Do đó suy ra phương trình đã không có nghiệm nguyên (x, y, z) với $z > 0$ thì cũng không có nghiệm nguyên (x, y, z) với $z < 0$. Tóm lại phương trình đã cho có một nghiệm nguyên duy nhất là $(0, 0, 0)$.

- **Bài toán 3 :** Trong mặt phẳng cho n đường thẳng ($n \geq 3$) trong đó không có 2 đường thẳng nào song song và không có 3 đường thẳng nào đồng quy. Chứng minh rằng tồn tại

(xem tiếp trang 10)



Bài T1/231 : Giải phương trình sau :

$$|x^2 + y^2 - 2xy + 3x - 2y - 1| + 4 = 2x - |x^2 - 3x + 2|$$

Lời giải : (của nhiều bạn)

$$\begin{aligned} &|x^2 + y^2 - 2xy + 3x - 2y - 1| + 4 = 2x - |x^2 - 3x + 2| \\ \Leftrightarrow &|x^2 + y^2 - 2xy + 3x - 2y - 1| + |x^2 - 3x + 2| \\ &= 2(x - 2) \quad (1) \end{aligned}$$

Vế trái không âm nên ta suy ra ngay $x \geq 2$ (2)

Ta có

$$(1) \Leftrightarrow |(x - y)^2 + 2(x - y) + 1 + x - 2| + |(x - 2)^2 + (x - 2)| = 2(x - 2)$$

$$\Leftrightarrow |(x - y + 1)^2 + x - 2| + |(x - 2)(x - 1)| = 2(x - 2) \quad (3) \quad \text{Vì } x \geq 2 \text{ nên}$$

$$(3) \Leftrightarrow (x - y + 1)^2 + x - 2 + (x - 2)(x - 1) = 2(x - 2)$$

$$\Leftrightarrow (x - y + 1)^2 + (x - 2)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x - 2 = 0 \end{cases}$$

Từ đó ta có $x = 2$ và $y = 3$.

Thay giá trị này của x và y vào ta thấy phương trình được nghiệm đúng. Vậy nghiệm của phương trình là $x = 2$; $y = 3$.

Nhận xét : Hầu hết các lời giải gửi đến đều đúng. Sau đây là các bạn có lời giải tốt. **Bắc Ninh :** Ngô Ngọc Dung, 8CT, Hoàng Tùng, 9CT, NK Tiên Sơn; Nguyễn Như Chuẩn, 9, NK Thuận Thành, Lê Vương Chiến, 9A, NK Yên Phong. **Vĩnh Phú :** Vũ Trọng Khoát, 8A; Vũ Văn Phong, 9A, Chuyên Vĩnh Tường; Nguyễn Đức Hải, Nguyễn Thanh Tú, 9B, Chuyên Yên Lạc; Mai Thu Thảo, Đặng Thu Hương, Tống Trường Hải, 9T, Chuyên Phú Thọ; Nguyễn Hà Giang, 9A, chuyên Phong Châu. **Tuyên Quang :** Nguyễn Quốc Tuấn, 9B, NK Lê Quý Đôn. **Hà Tây :** Nguyễn Công Hoàn; 9K, Lê Lợi, Hà Đông; Bùi Thanh Phong, 9, Chuyên Ứng Hòa. **Hà Nội :** Đỗ Ngọc Đức, 7H, Vũ Phương Nhi, 8H, Trưng Vương; Nguyễn Đình Hà, 8A, Chuyên Nguyễn Trường Tộ; Bùi Đức Vinh, Kim Liên, Đống Đa; Vũ Nhật Linh, 8C, Hà Nội - Amsterdam; Nguyễn Việt Anh, 8CT; Nguyễn Thị Minh Thoa; 9C, Ngọc Lâm, Gia Lâm; Tạ Quang Cường, 9T, Chuyên Đông Anh. **Hải Phòng :** Lương Việt Cường, 9A, THCS Hồng Bàng; Trần Trung Hiếu, 9D, PTCS Lạc Viên. **Hải Hưng :** Nguyễn Phi Hùng, 8T; Đoàn Thị Hương Giang, 9TL, NK Hải Hưng. **Bùi Nhật Minh,** 9A, NK Hưng Yên. **Thái Bình :** Nguyễn Đình Quang, 9T, NK Thái Thụy; Lê Quang Vinh, 9T, NK Vũ Thư. **Nam Định :** Đoàn Phương, 9T, Trần Đăng Ninh; Đỗ Thành Trung, 9T, Nguyễn Hiến, Nam Ninh; Ngô Minh Đức, 9, NK Xuân Thủy; Nguyễn Thế Vinh, Trần Mạnh Tiếp, 9CT, NK Ý Yên. **Hà Nam :** Lê Thành Nam, 9T, Duy Tiên. **Ninh**

Bình : Cao Trường Sơn, 9T, NK Ninh Bình; Mai Hồng Chương, Nguyễn Tử Quang, Đoàn Hữu Toàn, Lê Hồng Linh, 9T, NK Trương Hán Siêu; Phạm Đình Hoàng, 8T NKTXT Tam Điệp. **Thanh Hóa :** Đỗ Duy Sơn, 8C, NK Thành phố; Lê Ngọc Khoa, 7A, NK Hoàng Hóa; Lê Huy Tuấn, 9T, NK Thiệu Yên; Hoàng Trung Kiên, 9T, NK Nga Sơn; Lê Thị Hà Lan, 9T, NK Bỉm Sơn, Trần Hoàng Thắng; Lưu Văn Minh, 9T, Lam Sơn. **Nghệ An :** Nguyễn Thị Kim Dung, 9T, PTCS Quán Hành, Nghi Lộc; Nguyễn Đình Quân, 9T, Phan Bội Châu. **Hà Tĩnh :** Trương Hữu Cát, Phan Thanh Đồng, Nguyễn Mai Hương, Lê Thị Hồng Na, Hồ Anh Tài, Nguyễn Việt Tú, Dương Chí Vinh, 9T, NK tỉnh. **Quảng Bình :** Hoàng Thị Minh Diệu, Đặng Thị Tố Như, 9T, NK Hải Đình, Đồng Hới; Đinh Cao Cường, 9CT, Ba Đồn, Quảng Trạch. **Đà Nẵng :** Đặng Thị Quý Liên, 8, Ông Ích Khiêm, Hòa Vang; Đặng Phạm Lan Chi, 9/2 Trần Hưng Đạo, TP Đà Nẵng. **Quảng Ngãi :** Trần Thái An, 7T, Lê Khiết, Nguyễn Hải Âu, Trần Đức Mỹ, 9T, Chuyên Mộ Đức. **Khánh Hòa :** Trần Tuấn Anh, 9T, Lê Quý Đôn, Nha Trang. **TP Hồ Chí Minh :** Trần Ngọc Cường, 9T, Nguyễn An Khương, Hóc Môn. Lưu Thế Tâm, 9T, NK Nguyễn Du, Gò Vấp. **Vĩnh Long :** Nguyễn Hoàng Quân, Nguyễn Chí Thành, 9T, Nguyễn Bình Khiêm. **Đồng Nai :** Phạm Ngọc Huy; 9T, Nguyễn Bình Khiêm, Biên Hòa; Trà Vinh : Bùi Minh Khoa, 94, Lý Tự Trọng, TX Trà Vinh. **Mình Hải :** Lương Thế Nhân, 8A, Chuyên Bạc Liêu. **Hòa Bình :** Nguyễn Anh Tuấn, 8A, Chuyên Phương Lâm; Đỗ Quang Nam, 9T, Chuyên TX Hòa Bình.

TỔNG NGUYỄN

Bài T2/231

Cho $x^3 + y^3 + 3(x^2 + y^2) + 4(x + y) + 4 = 0$ và $xy > 0$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$M = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

Lời giải : Từ đầu bài suy ra

$$(x + 1)^3 + (y + 1)^3 + (x + 1) + (y + 1) = 0$$

$$\text{Đặt } X = x + 1, Y = y + 1 \text{ ta có } X^3 + Y^3 + X + Y = 0$$

$$\rightarrow (X + Y)(X^2 - XY + Y^2 + 1) = 0 \quad (1)$$

Vì $X^2 - XY + Y^2 > 0$ do đó từ (1) suy ra

$$X + Y = 0 \Leftrightarrow x + y = -2$$

$$\text{Khi đó } M = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x + y}{xy} = -\frac{2}{xy} \text{ Mà } xy \leq$$

$$\frac{(x + y)^2}{4} = \frac{(-2)^2}{4} = 1$$

Do $xy > 0$ nên suy ra $\frac{1}{xy} \geq 1$. Vậy $\frac{2}{xy} \geq 2 \rightarrow$

$$M = -\frac{2}{xy} \leq -2$$

Vậy $\max M = -2$ khi $x = y = -1$.

Nhận xét : Bài này được rất đông các bạn tham gia giải. Có 2 lời giải sai. Trong số các lời giải tốt có lời giải của các bạn sau : Lê Hồng Linh 9T Ninh Bình, Đỗ Anh Tuấn 9A Ngọc

Thụy Hà Nội, Hà Minh Thế 8B, Vinh Phú Hoàng Ngọc Dũng 8T Thanh Hóa, Vũ Phương Nhi 8H Trưng Vương Hà Nội, Nguyễn Trọng Kiên 9T Trần Đăng Ninh Nam Định, Ngô Hà Thạch 9A Nghệ An, Hoàng Thị Nguyệt 8T Hải Hưng, Trần Tất Đạt 9A Hà Nội, Dương Chí Vinh 9T Hà Tĩnh, Nguyễn Tùng 9T Hà Nội.

DẶNG HÙNG THẮNG

Bài T3/231. Chứng minh rằng nếu các số $a, b, c, \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$ là số hữu tỉ thì các số $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$ cũng là số hữu tỉ.

Lời giải. (Dựa theo Nguyễn Đức Trung, 10A, ĐHSPT Vinh). Do tổng, tích, thương của hai số hữu tỉ cũng đều là số hữu tỉ nên ta có :
 $(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})^2 \in \mathbb{Q}$, hay $a + b + c + 2(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}) \in \mathbb{Q}$, $\Rightarrow \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} \in \mathbb{Q}$. Suy ra $b + \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} \in \mathbb{Q}$ hay $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{b} + \sqrt{c}) \in \mathbb{Q}$. Một cách tương tự cũng có $(\sqrt{b} + \sqrt{c})(\sqrt{c} + \sqrt{a}) \in \mathbb{Q}$, và $(\sqrt{c} + \sqrt{a})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \in \mathbb{Q}$. Bằng cách nhân hai trong ba biểu thức hữu tỉ cuối cùng rồi chia cho biểu thức còn lại, ta có chẳng hạn $\sqrt{b} + \sqrt{c} \in \mathbb{Q}$. Suy ra $(\sqrt{b} + \sqrt{c})^2 \in \mathbb{Q}$ hay $b + c + 2\sqrt{bc} \in \mathbb{Q}$, $\sqrt{bc} \in \mathbb{Q}$. Một cách tương tự, ta cũng có $\sqrt{ca}, \sqrt{ab} \in \mathbb{Q}$. Từ đó, $a + \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} \in \mathbb{Q}$, $a(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) \in \mathbb{Q}$, và do đó $a \in \mathbb{Q}$, tương tự, ta cũng có $b \in \mathbb{Q}, c \in \mathbb{Q}$. Suy ra đpcm.

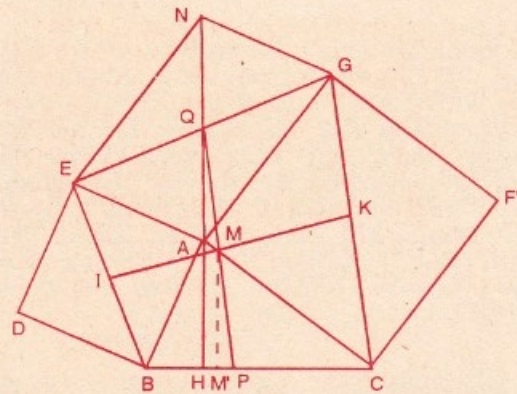
Nhận xét. Trừ một vài bạn ngỡ nhận rằng tổng của số vô tỉ với số vô tỉ phải là số vô tỉ ra thì các bạn đều giải đúng tuy trình bày còn chưa gọn. Các bạn sau đây có lời giải tốt :

Nguyễn Đức Trung (10A, ĐHSPT Vinh), Tạ Quang Cường (Hà Nội, 9T Chuyên Đông Anh), Trần Đức Sơn (Quảng Bình, 9 Chuyên Quảng Trạch), Đinh Thị Hòa (Hà Tĩnh, 9T Năng Khiếu), Nguyễn Hải Hà (Hà Tây, 9B Chuyên Toán Văn Ứng Hòa), Tăng Mỹ Hào (Vĩnh Long, 9^{T1} Nguyễn Bình Khiêm), Nguyễn Chiến Thắng (Hải Phòng, 9 Toán PTTHNK Trần Phú), Mai Thu Thảo (Phú Thọ, Chuyên cấp 2 Phú Thọ), Phan Long Yên Anh (Phú Yên, 9A Chuyên Lương Văn Chánh, Tx Tuy Hòa), Vũ Nhật Linh (Hà Nội, 8C Hà Nội - Amsterdam), Trần Tuấn Anh (Khánh Hòa, 9 Toán Lê Quý Đôn, Tp Nha Trang), Trần Ngọc Cường (Tp Hồ Chí Minh, 9^{T1} Nguyễn An Khương, Hoắc Môn) Nguyễn Xuân Quý (Thanh Hóa, 8CT THCS Năng Khiếu), Hoàng Tùng (Bắc Ninh, 9 Chuyên Toán NK Tiên Sơn) Vũ Ngọc Hải (Thái Bình, 9 Toán PTCS Chuyên Tx Thái Bình), Nguyễn Văn Khải (Quảng Ngãi, 9 Toán Chuyên Nghĩa Hành), Hoàng Thế Hùng (Ninh Bình, 9 Toán NK Tx Ninh Bình), Ngô Quốc Anh (Đắc Lắc, 8 CT, PTTH Chuyên Nguyễn Du, Buôn Ma Thuột).

DẶNG VIỄN

Bài T4/231 : Tam giác ABC có BC = 8cm, đường cao AH = 6cm. Ở phía ngoài tam giác, dựng hai hình vuông ABDE, ACFG. Gọi M là trung điểm đoạn nối tâm của hai hình vuông. Tính khoảng cách từ M đến BC.

Lời giải vắn tắt : Gọi I, K là tâm các hình vuông ABDE, ACFG, P là trung điểm của BC, Q là giao điểm của AH và EG. Dễ thấy Q là trung điểm của EG, IPKQ là hình bình hành.



Do đó trung điểm M của IK là trung điểm của PQ. Kẻ $MM' \perp BC$ ta có $MM' = \frac{QH}{2}$. Lấy N đối xứng với A qua Q. Dễ dàng chứng minh được $\triangle GNA = \triangle ABC$ (cgc)

Do đó $QA = \frac{NA}{2} = \frac{BC}{2} = 4$ (cm). $QH = QA + AH = 10$ (cm). Vậy $MM' = 5$ cm.

Nhận xét :

1. Chứng minh trên vẫn đúng trong trường hợp B hoặc C là góc tù.

2. Giải tốt bài này có các bạn :

Quảng Ninh : Bùi Anh Đức 8A, Trọng điểm Uông Bí, Hà Bắc : Hoàng Tùng, 9CT, Ngô Ngọc Dung 8CT Tiên Sơn, Nguyễn Như Chuẩn, 9NK Thuận Thành. **Vĩnh Phúc :** Nguyễn Thanh Tú, Kiều Việt Cường 9B Chuyên Yên Lạc, Vũ Văn Phong, 9A Chuyên Vĩnh Tường. **Hải Dương :** Nguyễn Phi Hùng, 8T PTNK tỉnh. Hà Tây : Đỗ Thanh Hiền, 7A Toán Thường Tín, Nguyễn Hải Hà, 9B Chuyên Ứng Hòa. **Thái Bình :** Nguyễn Mạnh Cường 9T NK Thái Thụy. Hà Nội : Tạ Quang Cường, 9T Chuyên Đông Anh, Nguyễn Mậu Dũng, 8A, Vạn Phúc, Thanh Trì, Trần Thanh Vân, Lê Minh Hoàng, Nguyễn Tuấn Anh, Vũ Phương Nhi, 8H Trưng Vương, Lê Anh Vinh, 8A1 Giảng Võ. **Hải Phòng :** Đỗ Thùy Chi, 8A1, Hồng Bàng. **Nam Định :** Phạm Thu Giang, Nguyễn Trọng Kiên, Đoàn Phương 9T, Nguyễn Công Tuấn, Phạm Đình Quốc Hưng, Đoàn Quý Hiếu 8T Trần Đăng Ninh, Nguyễn Thế Vinh, Trần Mạnh Tiếp, 9T, Trần Quang Vinh, 8T Năng khiếu Ý Yên. **Thanh Hóa :** Mai Chí Trung, 8ANK Hậu Lộc, Đoàn Công Anh, 9A NK Hà Trung, Nguyễn Quang Quý, 8C Năng khiếu Thanh Hóa, Nghệ An : Lê Thị Tâm, trường Huỳnh Thúc Kháng, Hà Tĩnh : Nguyễn Thành Trung, 9T Năng khiếu Thị Xã. **Quảng Bình :** Đinh Cao Cường, 9 Chuyên Ba Đồn, Quảng Trạch, Hoàng Thị Minh Diệu 9T NK Hải Đình, Đồng Hới. **Đà Nẵng :** Đặng Phạm Lan Chi, 9² Trần Hưng Đạo, Đỗ Trọng Tuấn, 9/2 Nguyễn Huệ, Nguyễn Khuyến 9/1 Nguyễn Lương Huy. **Quảng Ngãi :** Nguyễn Hải Âu, 9T Chuyên Mộ Đức. **Bình Định :** Nguyễn Quốc Hưng, 9B Đồng Đa, Quy Nhơn. **Phú Yên :** Phan Long Yên Anh, 9A, Chuyên Lương Văn Chánh, Văn Thị Khánh Vy, 8A Trần Quốc Toàn, Tuy Hòa. **Khánh Hòa :** Nguyễn Thị Thanh Nhà, 9T Chuyên Lê Quý Đôn, Nha Trang. **Đắc Lắc :** Tạ Quốc Hưng, Hoàng Thị Lệ Quyên, 8T Nguyễn

Du, Buôn Ma Thuột. **Đồng Nai**: Phạm Ngọc Huy, 9T Chuyên Nguyễn Bình Khiêm Biên Hòa. **TPHCM**: Phan Minh Trí, 9T Nguyễn Du, Lưu Thế Tân, 8T Nguyễn Du, Gò Vấp, Chung Nhân Phú, Trần Ngọc Cường 9T1 Nguyễn An Khương, Hóc Môn, Võ Thành Luân, 9A1 Bình Tây, Quận 6, **Vĩnh Long**: Nguyễn Chí Thành 9T1 Nguyễn Bình Khiêm, Trà Vinh: Bùi Minh Khoa, 9E Lý Tự Trọng, **Minh Hải**: Nguyễn Chí Linh, Lê Kiên Cường 9A1 THCS Dâm Dơi.

VŨ KIM THUY

Bài 5/231. Trên đường tròn (O) , cho đường kính AB và dây CD (C, D không trùng với A, B). Gọi M là giao điểm của các tiếp tuyến tại C, D của đường tròn (O) ; N là giao điểm của các dây cung AC, BD . Chứng minh rằng MN vuông góc với AB .

Lời giải.

Gọi P là giao điểm của các đường thẳng AD, BC , ta có N là trực tâm tam giác PAB vì các góc ADB, ACB vuông (nội tiếp chắn đường kính), bài toán trở thành chứng minh M, N, P thẳng hàng. Gọi M' là trung điểm của PM , tam giác $M'PC$ cân đỉnh M' nên $P_1 = C_1$. Do $OA = OC$ (cùng là bán kính của (O)) nên tam giác OAC cân đỉnh O và ta có $A_1 = C_1$. Mà $P_1 = A_1$ (cạnh tương ứng vuông góc), nên $C_1 = A_1$. Suy ra $C_3 + C_2 = C_1 + C_3 = 90^\circ$ hay CM' là tiếp tuyến tại C của (O) . Tương tự, ta cũng có DM' là tiếp tuyến tại D của (O) , suy ra $M' = M$, và ta có đpcm.

Nhận xét. Có 113 bài giải, nhìn chung đều giải đúng, tuy rằng không ít bạn vẽ hình không phù hợp do không nghiên cứu kĩ để ra: " N là giao điểm của các dây cung AC, BD ", thậm chí có bạn còn cho rằng bài toán có quá nhiều trường hợp hình vẽ khác nhau (!). Các bạn sau đây có lời giải tốt:

Đào Minh Tuấn (Hà Tây, 9K PTCS Lê Lợi, Tx Hà Đông), Hà Quang Chiến (Vĩnh Phú, 9A1 Chuyên Sông Thao), Trần Quang Vinh (Nam Hà, 8 Toán Năng Khiếu Ý Yên), Thới Ngọc Linh (Quảng Ngãi, 10A4 PTTH Chuyên Ban Trần Quốc Tuấn), Tạ Quốc Hưng (Đắk Lắk, 8 Toán Chuyên Nguyễn Du), Bùi Minh Khoa (Trà Vinh, 9H Lý Tự Trọng, Tx Trà Vinh), Đào Mạnh Cường (Nghệ An, 9T Phan Bội Châu), Tống Văn Huy (Thái Bình, 9 Toán PTCS Năng Khiếu Kiến Xương), Nguyễn Hoàng Chương (Bắc Thái, 9 Toán THCS Năng Khiếu), Nguyễn Lương Huy (Đà Nẵng, 9/1 Nguyễn Khuyến), Lê Xuân Dũng (Thanh Hóa, 10A Lương Đắc Bằng, Hoàng Hóa), Phạm Hải Trung (Hà Nội, 10A Chuyên Toán, Đại Học Khoa Học Tự Nhiên), Ngô Thanh (Hòa

Bình, 9A Chuyên PTCS Tx Hòa Bình), Nguyễn Chí Linh (Minh Hải, 9A1 THCS Thị Trấn Dâm Dơi), Trần Trung Hiếu (Hải Phòng, 9D2 PTTH Lạc Viên, Ngô Quyền), Huyền Tôn Nữ Hoàng Lan (Thừa Thiên-Huế, 9¹ Nguyễn Tri Phương Tp Huế), Nguyễn Thị Thanh Nhã (Khánh Hòa, 9 Toán PTTH Chuyên Lê Quý Đôn), Nguyễn Hoàng Quân (Vĩnh Long, 9¹² Nguyễn Bình Khiêm), Bùi Duy Hiền (Hà Nội, 8C PTTH Hà Nội - Amsterdam), Bùi Bá Hưng (Quảng Ninh, 9A Chuyên Toán Trọng Điểm Tx Uông Bí), Trần Tuấn Anh (Khánh Hòa, 9 Toán Lê Quý Đôn Tp Nha Trang), Ngô Quốc Anh (Đắk Lắk, 8 chuyên toán PTTH Chuyên Nguyễn Du).

DẶNG VIÊN

Bài T6/231. Giả sử phương trình lượng giác sau có nghiệm x_0

$$\sin^2 x + k \cos^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} - 2.$$

Hãy tìm những giá trị thực có thể có của k .

Lời giải (của đa số các bạn)

$$\text{Điều kiện có nghĩa: } \begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

Biến đổi hai vế phương trình ta được

$$\cos^2 x (\tan^2 x + k) = 1 + \cot^2 x + 1 + \tan^2 x - 2$$

$$\Leftrightarrow \tan^2 x + k = \frac{1}{\cos^2 x} (\tan^2 x + \cot^2 x)$$

$$\Leftrightarrow \tan^2 x + k = (1 + \tan^2 x)(\tan^2 x + \cot^2 x)$$

$$\Leftrightarrow k = \tan^4 x + \frac{1}{\tan^2 x} + 1.$$

Đặt $\tan^2 x = t$ ($t > 0$), thì

$$k = t^2 + \frac{1}{t} + 1, t \in (0, +\infty).$$

$$k' = 2t - \frac{1}{t^2}; k' = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Lập bảng biến thiên để xác định các giá trị có thể có của k

t	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$+\infty$
k'		-	0
k			$+\infty$

$$k_{\min} = 1 + \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Kết luận: } k \geq 1 + \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Nhận xét. 1. Một bạn đã thiết lập được hệ thức $k \geq 1 + \frac{3\sqrt{2}}{2}$ bằng cách sử dụng bất đẳng thức. Tuy vậy, kết luận rằng các giá trị có thể có của k là mọi giá trị thuộc $\left[1 + \frac{3\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$ là không đúng.

2. Các bạn sau đây có lời giải tốt: Thái Nguyên: Nguyễn Duy Phương, 12T, NK. Hà Bắc: Nguyễn Ngọc Sơn, 12A, PTTH Yên Dũng

số 1. **Phú Thọ**: Nguyễn Kim Sô, 11A, PTTH Thanh Ba; Nguyễn Minh Phương, 11A, Chuyên Hùng Vương. **Hà Nội**: Phan Tuấn Sơn, 10A; Nguyễn Việt Anh, 11B, Lê Tuấn Anh, 12B, CT, Đại học KHTN; **Hải Phòng**: Đoàn Mạnh Hà, 11CT, NK Trần Phú. **Thái Bình**: Trần Công Cường, 12A, PTTH Chuyên. **Nam Định**: Lương Minh Anh, Trần Đức Quyền, 12CT, Lê Hồng Phong. **Thanh Hóa**: Phan Xuân Thành, 10T, Lam Sơn; Lê Hoài Nam; 11B₁, Bim Sơn; Hán Văn Thắng, 12A₆, Đào Duy Từ; Trịnh Trọng Dương, 12D, Hà Trung I. **Nghe An**: Nguyễn Thịnh, Trần Nam Dũng, 11CT; Lê Văn An, 12CT, Phan Bội Châu; Hồ Hữu Thọ, 12A, Nghĩa Dân; **Quảng Bình**: Phạm Hồng Thái, 12A₁, Đào Duy Từ; Nguyễn Việt Thanh, Nguyễn Hoa, 10T₁, Năng Khiếu. **Dak-Lak**: Mai Thanh Dũng, 11T, Nguyễn Du, Buôn Ma Thuột. **Gia Lai**: Lê Hải Tân; Trường Chuyên. **Lâm Đồng**: Phan Thanh Hải, Tô Hiền Sỹ, 12T, Chuyên Thăng Long; Đà Lạt. **Đà Nẵng**: Phan Phú Đông, Bùi Việt Phương, Hồ Vũ Quốc Vương, Đặng Công Tiều, Lê Triệu Phong 11A₁, Phan Anh Huy, 12A₁, Chuyên Lê Quý Đôn; Nguyễn Phước Hiệp, 12A₂, PTTH Nguyễn Duy Hiệu. **Quảng Ngãi**: Nguyễn Ngọc Phúc, PTTH số 1, Đức Phổ. **Đồng Nai**: Phạm Hoài Lăng; 12CT₂, Lương Thế Vinh, Biên Hòa. **TP Hồ Chí Minh**: Nguyễn Lê Lục, 11CT, Đại học Quốc Gia. **Vĩnh Long**: Trần Như Nam, 12T Chuyên Nguyễn Bình Khiêm. **Trà Vinh**: Huỳnh Thế Khanh; 12A₁, PTTH Phạm Thái Bường, Thị xã; Bùi Minh Thiện, 12B, Chuyên. **Mình Hải**: Nguyễn Ngọc Toán, 12A₁, PTTH Hồ Thị Kỳ, TX Cà Mau.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T7/231: Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn:
 $f(x+1)f(y) = y(f(x)+1) \quad (1) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Lời giải: Thay $x = -1$ vào (1) ta được: $f(0) = y(f(-1)+1) \quad \forall y \in \mathbb{R} \Rightarrow f(0) = 0$ và $f(-1) = -1$. Từ đó, thay $x = 0$ vào (1) ta được $f(f(y)) = y \quad \forall y \in \mathbb{R}$ (2). Thay $x = -2, y = -1$ vào (1) ta có: $f(1) = -(f(-2)+1) \Rightarrow$ hoặc $f(1) = -1$ hoặc $f(1) = 1$. Nếu $f(1) = -1$ thì $1 = f(f(1)) = f(-1) = -1$, vô lý. Vậy $f(1) = 1$. Vì thế, thay $y = 1$ vào (1) ta sẽ có: $f(x+1) = f(x)+1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Suy ra: $f(xy) = f(x.f(f(y))) = f(y)(f(x-1)+1) = f(y)f(x) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$ (3). Kết hợp với (2) suy ra với $x \geq 0$ thì $f(x) = [f(\sqrt{x})]^2 \geq 0$ và $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. (4). Hơn thế, từ (2), (3) ta còn có: với $y \neq 0$ thì

$$f(x+y) = f\left(\left(\frac{x}{y}+1\right)y\right) = f\left(\left(\frac{x}{y}+1\right)f(f(y))\right) = f(y)\left(f\left(\frac{x}{y}\right)+1\right) = f(y).f\left(\frac{x}{y}\right)+f(y) = f(x)+f(y)$$

Kết hợp với $f(0) = 0$ ta được $f(x+y) = f(x)+f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$. Từ đó, kết hợp với (4), ta có với $x, y \in \mathbb{R}$ mà $x > y$ thì $f(x)-f(y) = f(x-y) = [f(\sqrt{x-y})]^2 > 0 \Rightarrow f(x)$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$. Vì thế từ (2) ta có:

+ Nếu $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ mà $f(x_0) > x_0$ thì $x_0 = f(f(x_0)) > f(x_0)$, mâu thuẫn.

+ Nếu $\exists x_0 \in \mathbb{R}$ mà $f(x_0) < x_0$ thì $x_0 = f(f(x_0)) < f(x_0)$, mâu thuẫn.

Vậy $f(x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại ta thấy hàm số vừa tìm được thỏa các yêu cầu của đề bài; và điều này chứng tỏ đó là hàm số duy nhất cần tìm.

Nhận xét: 1. Tất cả các bạn gửi Lời giải tới Tòa soạn đều chỉ ra đúng kết quả của bài ra. Tuy nhiên, trong số này có tới 57% số bạn cho lời giải sai vì không hiểu đúng các kiến thức cơ bản về hàm số.

2. Các bạn sau đây có lời giải đúng:

DHQG Thành phố HCM: Lê Quang Năm (11ct)

Lâm Đồng: Phan Thanh Hải (12 TPTTH Chuyên Thăng Long - Đà Lạt).

Đà Nẵng: Phan Anh Huy (12 A₁ PTTH Lê Quý Đôn)

Nghe An: Trần Nam Dũng, Lê Văn An (11CT, 12 CT PTTH Phan Bội Châu).

Thanh Hóa: Lê Hoài Nam (11B₁ PTTH Bim Sơn) và Lê Duy Diễn (11TPTTH Lam Sơn)

Thái Bình: Trần Công Cường (12A PTTH chuyên TB).

3. Nếu chăm chú cho việc không thử lại hàm số tìm được thì các bạn sau đây cũng được coi là có lời giải đúng: Hồ Vũ Quốc Vương và Bùi Việt Phương (11A₁ PTTH Lê Quý Đôn - Đà Nẵng).

NGUYỄN KHẮC MINH.

Bài T8/231. Cho a, b là các số thực dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A = \sum_{n=1}^{1995} (-1)^{n+1} \left(\frac{a^n}{b^n} + \frac{b^n}{a^n} \right).$$

Lời giải (của bạn Lê Quang Năm 11 Toán DHQG TPHCM)

Trước hết ta chứng minh

$$\frac{a^{k+1}}{b^{k+1}} + \frac{b^{k+1}}{a^{k+1}} \geq \frac{a^k}{b^k} + \frac{b^k}{a^k} \quad (*)$$

với mọi $k \in \mathbb{N}^0$. Thật vậy bất đẳng thức (*) tương đương với $a^{2k+2} + b^{2k+2} \geq ab(a^{2k} + b^{2k})$

$\Leftrightarrow (a-b)(a^{2k+1} - b^{2k+1}) \geq 0$. Dễ thấy bất đẳng thức này đúng.

Sử dụng (*) ta có

$$A = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \sum_{k=1}^{997} \left(\frac{a^{2k+1}}{b^{2k+1}} + \frac{b^{2k+1}}{a^{2k+1}} - \frac{a^{2k}}{b^{2k}} - \frac{b^{2k}}{a^{2k}} \right) \geq \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$$

Với $a = b$ thì $A = 2$. Vậy $A_{\min} = 2$.

Nhận xét: Các bạn sau đây có lời giải tốt: Phan Thanh Thu 12T Đà Lạt, Lê Văn Phương 10T Thanh Hóa, Nguyễn Minh Phương 11A Hùng Vương Phú Thọ, Lương Minh Anh 12G Nam Định, Trần Văn Nghĩa 10T Quảng Ngãi, Hồ Vũ Quốc Vương 11A, QNĐN, Lê Hoài

Nam 11B1 Thanh Hóa, Vũ Văn Quý 10A, Hải Hưng, Trần Tuấn Anh 9 Lê Quý Đôn Khánh Hòa, Trần Thế Anh 12T Quảng Trị, Nguyễn Ngọc Phúc 10 Quảng Ngãi.

Có không ít lời giải sai. Một số lời giải còn dài, phức tạp không cần thiết.

DẶNG HÙNG THẮNG

Bài T9/231. Trong mặt phẳng cho đường thẳng Δ và hai điểm A, B không thuộc Δ . Tìm trên Δ một điểm M sao cho :

$$|MA - MB| = m, \quad (1)$$

trong đó m là một độ dài cho trước.

Lời giải. Đây là một bài toán dựng hình, hình ở đây là một điểm.

a) *Phân tích.* Giả sử đã dựng được điểm M trên đường thẳng Δ thỏa mãn điều kiện (1) của bài toán và giả sử $MA > MB$, thế thì :

$$MA - MB = m \leq AB \quad (1')$$

Lấy trên đoạn $[MA]$ điểm T sao cho $MT = MB$ thế thì $AT = MA - MT = m$ (2) và do đó : $(1') \Leftrightarrow (2)$

Như vậy, muốn cho $(1')$ thỏa mãn, cần và đủ là $AB \geq m$ và đường tròn (ω) tâm M , đi qua B phải tiếp xúc với đường tròn (α) , tâm A , bán kính m . Nhưng đường tròn (ω) có tâm M trên (Δ) và đi qua B cũng là đường tròn đi qua hai điểm : điểm B và điểm C , đối xứng của B qua (Δ) . Vậy bài toán đã cho đưa về bài toán sau đây : Tìm tâm M của đường tròn đi qua hai điểm $B, C = D(B)$ và tiếp xúc với đường tròn $\alpha(A, m)$.

b) Từ đó, suy ra cách dựng như sau :

- Trước hết dựng điểm $C = D(B)$, rồi dựng đường tròn (α) , tâm A bán kính m . - Sau đó, dựng một đường tròn bất kì đi qua B và C (lẽ dĩ nhiên, đường tròn này có tâm trên (Δ)), cắt đường tròn $\alpha(A, m)$ ở hai điểm D và E ; rồi xác định giao điểm $P = (BC) \cap (DE)$.

- Từ P dựng một tiếp tuyến PT với đường tròn (α) .

- Sau cùng, dựng giao điểm $M = (AT) \cap (\Delta)$.

c) Để chứng minh được rằng nếu tất cả các phép dựng nêu ở trên đều thực hiện được thì M là điểm thỏa mãn điều kiện của bài toán. Thật vậy, theo hệ thức lượng trong đường tròn, ta có : $\overline{PD} \cdot \overline{PE} = \Pi^2 = \overline{PB} \cdot \overline{PC}$. Hệ thức sau cùng chứng tỏ rằng đường tròn (BCT) tiếp xúc với đường thẳng PT ở điểm T và có tâm là M ; và do đó $MA - MB = MA - MT = AT = m$.

d) *Biện luận.* Muốn cho bài toán có lời giải (và nếu có thì có 2 hoặc 1), cần và đủ là điểm P phải ở ngoài hoặc nằm trên đường tròn $\alpha(A, m)$, nghĩa là P không nằm trong đường tròn $\alpha(A, m)$, đồng thời cả hai điểm B và C đều phải nằm ngoài đường tròn $\alpha(A, m)$. Từ đó suy ra :

1) Nếu cả hai điểm B và C đều nằm ngoài đường tròn $\alpha(A, m)$ thì bài toán có 2 lời giải ; nói khác đi là : Bài toán có 2 lời giải khi và chỉ khi : $AB > m$ và $AC > m$.

2) Nếu một trong hai điểm B hoặc C nằm ngoài đường tròn $\alpha(A, m)$, và điểm kia nằm trên (α) thì bài toán có 1 lời giải ; nói khác đi là : Bài toán có 1 lời giải khi và chỉ khi : $AB > m$ và $AC = m$ hoặc $AB = m$ và $AC > m$

3) Bài toán sẽ vô nghiệm nếu một trong hai điều kiện nêu trên không được thỏa mãn, nghĩa là nếu ít nhất một trong hai điểm B hoặc C nằm trong đường tròn (α) , tâm A bán kính m (dù cho điểm kia nằm ở đâu đi nữa) thì bài toán sẽ không có lời giải.

Nhận xét : 1) Số bạn tham gia giải bài toán trên không nhiều, trong đó đa số các bạn sử dụng phương pháp tọa độ. Bài toán đưa về tìm giao điểm của đường thẳng (Δ) và hypebol. Hệ có hai tiêu điểm là A và B , tiêu cự $AB = 2c > m = 2a$ và bán trục thực $a = \frac{m}{2}$ ($a < c$). Nếu

chọn hệ trục tọa độ Để các vuông góc Oxy sao cho gốc O là trung điểm của đoạn AB , đường trung trực của AB làm trục tung $y'Oy$ và trục hoành $x'Ox$ chứa hai điểm A, B thì trong hệ tọa độ này, hypebol $(\mathcal{H})$ có phương trình : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$

$= 1$ (trong đó $b^2 = c^2 - a^2$). Bài toán quy về giải và biện luận một hệ 2 phương trình, một bậc hai và một bậc nhất :

$$(i) \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ \alpha x + \beta y + \gamma = 0 \end{cases} \quad \text{hoặc} : \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = kx + l \quad (\text{nếu } \beta \neq 0) \end{cases}$$

(ii)

2) Tuy nhiên, nhìn chung, dù sử dụng phương pháp tổng hợp hay phương pháp tọa độ, không có lời giải nào đạt được hoàn chỉnh phần biện luận của bài toán một cách cụ thể. Thậm chí, với phương pháp tọa độ, đối với hệ phương trình (ii) cũng chưa thấy lời giải nào biện luận được chi tiết và triệt để. Rất tiếc, nhiều bạn chỉ dừng lại ở chỗ nêu ra đường lối, phương pháp biện luận một cách chung chung mà không chỉ ra được một kết quả cụ thể nào dựa trên vị trí tương đối của hai điểm A, B và đường thẳng (Δ) cũng như quan hệ giữa khoảng cách $AB = 2c$ và m cho trước. Chính vì lẽ đó, không có lời giải nào đạt điểm tối đa của bài toán.

3) Cuối cùng, cần lưu ý rằng trong bài toán này vai trò hai điểm A và B là hoàn toàn bình đẳng, thể hiện trong phương pháp tổng hợp cũng như phương pháp tọa độ. Cũng cần nói thêm rằng, đối với bài toán này, nếu sử dụng phương pháp tọa độ thì phần biện luận sẽ gặp khó khăn nhiều hơn vì khó chỉ ra được vị trí tương đối của đường thẳng Δ đối với hypebol $(\mathcal{H})$ để bài toán có lời giải hoặc vô nghiệm !

NGUYỄN DẶNG PHÁT

Bài T10/231. Gọi diện tích các mặt đối diện với các đỉnh A, B, C và D của một tứ diện $ABCD$ lần lượt là S_a, S_b, S_c và S_d . Chứng minh hệ thức:

$$S_a \vec{IA} + S_b \vec{IB} + S_c \vec{IC} + S_d \vec{ID} = \vec{0}, \quad (*)$$

trong đó I là tâm hình cầu nội tiếp tứ diện $ABCD$.

Lời giải

(Dựa theo Lê Triệu Phong,

11A₁ trường Lê Quý Đôn, Đà Nẵng).

Gọi M, M', N, N' và P, P' lần lượt là

giao điểm của các mặt phẳng

$(DAI), (BCI); (DBI), (CAI)$ và

$(DCI), (ABI)$ với

các cạnh đối diện tương ứng. Do I nằm trong tứ diện nên các điểm này cũng nằm trong các cạnh của tứ diện. Vì (DAM) là mặt phân giác của nhị diện cạnh DA , nên $d(M, DCA) = d(M, DAB)$, do đó ta được:

$$\frac{MB}{MC} = \frac{s(AMB)}{s(AMC)} = \frac{v(DAMD)}{v(DAMC)} = \frac{s(DAB)}{s(DCA)}, \text{ tức là: } \frac{MB}{MC} = \frac{S_c}{S_b}; (**)$$

$$\text{Lại vì } M \in [BC], \text{ nên: } \frac{\vec{MB}}{\vec{MC}} = -\frac{S_c}{S_b}, \text{ hay là:}$$

$$S_b \vec{MB} + S_c \vec{MC} = \vec{0}$$

Từ đó, (bằng cách thay $\vec{MB} = \vec{IB} - \vec{IM}$, $\vec{MC} = \vec{IC} - \vec{IM}$) suy ra:

$$S_b \vec{IB} + S_c \vec{IC} = (S_b + S_c) \vec{IM}; \quad (1)$$

Chứng minh tương tự, ta được:

$$S_d \vec{ID} + S_a \vec{IA} = (S_d + S_a) \vec{IM'}; \quad (2)$$

Để ý rằng $I \in (MM') = (DAM) \cap (BCM')$ nên $\vec{IM} \parallel \vec{IM'} \parallel \vec{MM'}$; bởi vậy, nếu đặt $v = S_a \vec{IA} + S_b \vec{IB} + S_c \vec{IC} + S_d \vec{ID}$, thì từ (1) và (2) ta được:

$$v = (S_b + S_c) \vec{IM} + (S_d + S_a) \vec{IM'} \parallel \vec{MM'}$$

Chứng minh tương tự, $v \parallel \vec{NN'}$ và $v \parallel \vec{PP'}$. Nhưng $\vec{MM'}, \vec{NN'}$ và $\vec{PP'}$ không đồng phẳng, lại càng không thể cùng phương; và như vậy, v có phương không xác định, nên $v = \vec{0}$ (đpcm).

Nhận xét: 1) Có nhiều cách chứng minh hệ thức vectơ (*); tuy nhiên, cách giải nào cũng đều phải chứng minh hệ thức (**), tức là chứng minh tính chất hình học sau đây: Mặt phân giác của một nhị diện nào đó của một tứ diện thì chia cạnh đối diện thành hai đoạn tỉ lệ với diện tích các mặt kề với hai đoạn đó (tương tự như tính chất đường phân giác của một tam giác trong hình học phẳng).

Cách giải trên đây của bạn Phong là đơn giản nhất và độc đáo hơn cả chính vì lẽ ngoài việc chứng minh hệ thức (**), bạn Phong đã chỉ sử dụng một tính chất đặc trưng của vectơ không: vectơ $\vec{0}$ là vectơ có phương không xác định. Có thể nói lời giải trên đây của bạn Phong đã sử dụng thành thạo và triệt để phương pháp vectơ (cùng với phương pháp diện tích và thể tích).

2) Một số bạn không chứng minh hệ thức (**), nhưng sử dụng một hệ thức vectơ đã biết trong hình học phẳng và sử dụng phương pháp diện tích, thể tích cũng đi đến kết quả khá nhanh chóng. Chẳng hạn, bạn Mai Thanh Dũng, lớp 11T, trường Nguyễn Du, Buôn Mê Thuột đưa ra lời giải sau đây: Gọi K là giao điểm của đường thẳng DI với mặt phẳng (ABC) , thế thì K nằm trong tam giác ABC (do I nằm trong tứ diện $ABCD$) và ta có hệ thức vectơ:

$$s(KBC) \vec{KA} + s(KCA) \vec{KB} + s(KAB) \vec{KC} = \vec{0} \quad (i)$$

Mặt khác, ta có (vì $I \in [KD]$):

$$\frac{v(KBCD)}{v(BCD)} = \frac{KD}{ID} = \frac{v(KCAD)}{v(ICAD)}, \text{ suy ra: } \frac{v(ICDA)}{v(BCD)} = \frac{v(KCDA)}{v(KBCD)}; \quad (ii)$$

$$\text{Lại có: } \frac{s(KCA)}{s(KBC)} = \frac{v(DKCA)}{v(DKBC)}; \text{ do đó, theo (ii) được: } \frac{s(KCA)}{s(KBC)} = \frac{v(ICDA)}{v(BCD)}; \quad (iii)$$

Từ (iii) và chứng minh hệ thức tương tự như (iii), ta được:

$$\frac{s(KBC)}{v(IDBC)} = \frac{s(KCA)}{v(IDCA)} = \frac{s(KAB)}{v(IDAB)} \quad (iv)$$

Đối chiếu (i) và (iv) thì được:

$$v(BCD) \vec{KA} + v(ICDA) \vec{KB} + v(IDAB) \vec{KC} = \vec{0} \quad (i')$$

Từ đó (bằng cách thay $\vec{KA} = \vec{IA} - \vec{IK}$, v.v... vào (i')), thu được:

$$v(BCD) \vec{IA} + v(ICDA) \vec{IB} + v(IDAB) \vec{IC} = [v(BCD) + v(ICDA) + v(IDAB)] \vec{IK} = [v(ABCD) - v(ABCA)] \vec{IK} \quad (v)$$

Thế nhưng, lại có:

$$\frac{KD}{KI} = \frac{v(ABCD)}{v(ABCA)}, \text{ hay là: } 1 + \frac{ID}{KI} = \frac{v(ABCD) - v(ABCA)}{v(ABCA)} + 1; = \frac{v(ABCD) - v(IABC)}{v(IABC)} + 1;$$

từ đó suy ra:

$$[v(ABCD) - v(IABC)] \vec{KI} = v(IABC) \vec{ID}. \quad (vi)$$

Từ (v) và (vi) ta được hệ thức sau đây:

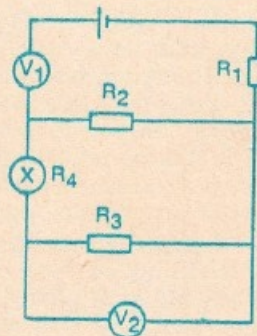
$$v(BCD) \vec{IA} + v(ICDA) \vec{IB} + v(IDAB) \vec{IC} + v(IABC) \vec{ID} = \vec{0} \quad (**)$$

Để ý rằng $v(BCD) : v(ICDA) : v(IDAB) : v(IABC) = S_a : S_b : S_c : S_d$ ta được hệ thức (*) cần tìm.

3) Các bạn khác đều giải đúng, nhưng hầu hết đều phải vẽ thêm đường phụ hoặc lời giải quá rườm rà

NGUYỄN ĐĂNG PHÁT

Bài L1/231. Trong mạch vẽ bên có 2 vôn kế cùng điện trở $R_1, R_1 = r, R_2 = R_3 = 10\Omega$, đèn báo R_4 mỗi tiêu thụ $1/4$ công suất định mức.



a) Tính r, R_1, R_4 biết rằng muốn đèn sáng bình thường thì phải bỏ bớt đi 2 trong các điện trở, khi đó số chỉ của V_1 không thay đổi và bằng 5 lần số chỉ của V_2 .

b) Cho biết công suất định mức của đèn là $8W$, tính E .

Hướng dẫn giải. Trong mỗi trường hợp, vẽ lại mạch điện, và chú ý rằng vôn kế là một điện trở (R_v) và số chữ vôn kế bằng $U_v = I_v R_v$, với I_v là dòng điện chạy qua vôn kế

a) Muốn cho đèn sáng bình thường (sáng lên so với trước), dòng qua đèn phải tăng lên, suy ra phải bỏ R_2 ; nhưng nếu chỉ bỏ R_2 thì điện trở toàn mạch tăng và dòng qua V_1 giảm, do đó muốn dòng qua V_1 không thay đổi (số chữ V_1 không thay đổi) phải bỏ thêm R_1 .

Bỏ bớt R_1 và R_2 , vẽ lại mạch. Theo đề bài

$$I = I_{V1} = 5I_{V2} \rightarrow I_3 = I - I/5 = 4I/5 = 4I_{V2} \rightarrow$$

$R_v = 4R_3 = 40\Omega$. Đèn sáng bình thường, nghĩa là công suất đã tăng 4 lần, dòng qua đèn tăng 2 lần; do đó khi có R_2 dòng chính đã rẽ qua R_2 mất $I/2$ (để dòng qua V_1 không đổi), suy ra $R_4 + R_{3v2} = R_2$

$$\rightarrow R_4 = R_2 - R_{3v2} = 10 - 8 = 2\Omega$$

Khi chưa bỏ $R_1 R_2$ điện trở toàn mạch là :

$$R_{tm} = R_{v1} + \frac{R_2}{2} + 2r = 45 + 2r$$

Khi đã bỏ $R_1 R_2$, $R'_{tm} = R_{v1} + R_4 + R_{3v2} + r = 50 + r$

Muốn I như cũ $R'_{tm} = R_{tm} \rightarrow r = 5\Omega$

$$b) \text{ Khi đã bỏ } R_1 R_2, I = \sqrt{\frac{P_4}{R_4}} = 2A$$

Biết $R_{tm} = 50 + r = 55\Omega$, suy ra $E = IR_{tm} = 100V$

Nhận xét. Các em có lời giải đúng và gọn : Nguyễn Thành Hưng, 11 Lí, chuyên Lê Khiết, Quảng Ngãi ; Phạm Vũ Hoài, 11 Lí PTTH Lê Hồng Phong, Nam Định ; Lê Đức Dũng, 11 CL, PTNK Đồng Hới, Quảng Bình ; Nguyễn Thanh Hà, 11A, trường chuyên Phan Ngọc Hiển, Lâm Nam, Minh Hải ; Hồ Linh Phi 11 CL Phan Bội Châu, Nghệ An ; Nguyễn Xuân Nghĩa, 11L, PTNK Hải Dương ; Phan Văn Tập 10C₁, PTTH Vĩnh Bảo, Hải Phòng.

MAI ANH

Bài L2/231.

Một con lắc đơn có chiều dài dây treo

$$\text{là } l = \frac{g}{10} \text{ (m) được}$$

treo vào buồng thang máy đứng yên. Gia tốc trọng

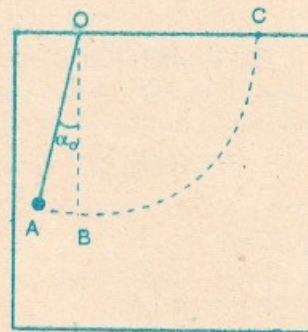
lực là $g \text{ (m/s}^2\text{)}$. Kéo lệch con lắc ra khỏi

vị trí cân bằng một

góc α_0 rồi thả cho dao động không vận tốc ban

dầu. Khi con lắc vừa đến vị trí cân bằng B thì

cho thang máy rơi tự do.



1) Với $\alpha_0 = \alpha^\circ$. Hãy tính thời gian để con lắc

di từ A $\rightarrow$ C (xem hình).

2) Chứng tỏ rằng với α_0 có độ lớn thích hợp

thì khi con lắc chuyển động từ A $\rightarrow$ C sẽ có một

vị trí mà vận tốc của con lắc đối với đất bằng

không. Tính α_0 .

Hướng dẫn giải. 1) Khi thang máy đứng

$$\text{yên } t_{AB} = \frac{T}{4} = \frac{1}{4} \cdot 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \approx 0,5s \text{ Áp dụng}$$

định luật bảo toàn cơ năng

$$v_B = \sqrt{2gl(1 - \cos\alpha_0)} \text{ Khi thang máy rơi tự do,}$$

nó chịu tác dụng của trọng lực (mg), lực căng T ,

lực quán tính ($-mg$), nên hợp lực là T và con

lắc chuyển động tròn đều (lực hướng tâm). Do

$$\text{đó } t_{BC} = \frac{BC}{v} \text{ với } BC = \frac{\pi l}{2}, v = v_B. \text{ Vì } \alpha_0 \text{ là góc}$$

$$\text{nhỏ } t_{BC} = \frac{\pi l}{2\sqrt{2gl(1 - \cos\alpha_0)}} \approx \frac{\pi l}{2\sqrt{gl}\alpha_0} \approx 14,23s$$

$$\text{Vậy } t_{AC} = t_{AB} + t_{BC} = 14,73s$$

2) Vận tốc con lắc đối với đất $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$, với

$\vec{v}_1$ là vận tốc con lắc đối với thang máy (có

phương tiếp tuyến với quỹ đạo), $\vec{v}_2$ là vận tốc

của thang máy đối với đất (hướng thẳng đứng

xuống dưới). Muốn $v = 0$ thì $v_1 = -v_2$ (xảy ra

khi con lắc đến C) và $v_1 = v_2$, với

$$v_1 = v_B = \sqrt{2gl(1 - \cos\alpha_0)} \text{ và } v_2 = gt_{BC} =$$

$$\frac{\pi lg}{2\sqrt{2gl(1 - \cos\alpha_0)}} \text{ Suy ra } \cos\alpha_0 = 1 - \frac{\pi}{4} \approx$$

$$\approx 0,215 \text{ rad}$$

Vậy với $\alpha_0 = \arccos 0,215$ thì khi con lắc tới

C vận tốc của nó đối với đất bằng không.

Nhận xét. Các em có lời giải đúng : Hán

Văn Thắng, 12A6 THCB Đào Duy Từ, Thanh

Hóa ; Lê Viết Đức 12L PTTHNK Đồng Hới,

Quảng Bình ; Mai Anh Tuấn, 11A2, PTTH Lê

Quý Đôn Đà Nẵng ; Nguyễn Văn Thuận, 12B,

PTTHNK Ngô Sĩ Liên Hà Bắc ; Nguyễn

Quang Tường, 12CL, chuyên Phan Bội Châu,

Vĩnh Nghệ An ; Tô Thị Dưa, 10A1, PTTH

Đồng Thụy Anh, Thái Thụy, Thái Bình ; Đào

Ngọc Luân, 12A02, PT Dân lập Lương Thế

Vinh, Hà Nội.

MAI ANH



ĐỀ RA KÌ NÀY

CÁC LỚP THCS

Bài T1/235 : Tìm số có 8 chữ số $a_1 a_2 a_3 \dots a_8$ sao cho :

$$\begin{cases} \overline{a_1 a_2 a_3}^2 = \overline{a_7 a_8}^2 \\ \overline{a_4 a_5 a_6 a_7 a_8}^3 = \overline{a_7 a_8}^3 \end{cases}$$

NGUYỄN ĐỂ
(Hải Phòng)

Bài T2/235 : Cho các số thực a, b, x, y thỏa mãn điều kiện :

$$\begin{cases} a + b = 6 \\ ax + by = 10 \\ ax^2 + by^2 = 24 \\ ax^3 + by^3 = 62 \end{cases}$$

Tính giá trị của $ax^4 + by^4$

DẶNG HÙNG THẮNG
(Hà Nội)

Bài T3/235 : Tìm giá trị của x sao cho thương của phép chia $1996x + 1497$ cho $x^2 + 1$ đạt giá trị bé nhất có thể được.

NGUYỄN VĂN DŨNG
(Nghệ An)

Bài T4/235 : Cho tam giác ABC , một điểm D cố định trên tia đối của tia BC . Kẻ tia D_x cắt các cạnh AB, AC tại các điểm tương ứng E, F . Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của BF, CE . Chứng minh rằng đường thẳng MN luôn luôn đi qua một điểm cố định.

HÀ ĐỨC VƯỢNG
(Nam Định)

Bài T5/235 : Cho đường tròn (O, R) và một điểm M ở bên trong. Hỏi điểm M phải thỏa mãn điều kiện gì để có thể kẻ dây AB qua M sao cho $MA : MB = 1 : 2$, tại sao ?

NGUYỄN HỮU DỰ
(Nghệ An)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/235 : Tìm một hằng số $C > 0$ nhỏ nhất sao cho $\forall a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ ta đều có :

$$\frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_1 + a_2} + \dots + \frac{n}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} < C \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right)$$

NGUYỄN LÊ MINH
(Hà Nội)

Bài T7/235 : Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$F = \frac{a}{bcd + 1} + \frac{b}{cda + 1} + \frac{c}{dab + 1} + \frac{d}{abc + 1}$$

Với $a, b, c, d \in [0, 1]$

DÀM VĂN NHÌ
(Thái Bình)

Bài T8/235 : Cho hai đa thức với hệ số thực $P(x)$ và $Q(x)$, trong đó $P(x)$ là đa thức bậc 3 tùy ý còn $Q(x)$ là tam thức bậc 2 không có nghiệm thực.

Chứng minh rằng nếu đồ thị hàm số $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$ có ba điểm uốn thì ba điểm uốn của nó nằm trên một đường thẳng.

LÊ VĂN QUANG
(Thừa Thiên - Huế)

Bài T9/235 : Giả sử M là một điểm bất kì nằm trong mặt phẳng của một tam giác đều ABC . Gọi x, y, z là khoảng cách từ M đến các đỉnh và p, q, r là khoảng cách từ M đến các cạnh của tam giác. Chứng minh rằng ta luôn có :

$$p^2 + q^2 + r^2 \geq \frac{1}{4} (x^2 + y^2 + z^2) \quad (1)$$

Đồng thời hãy chứng tỏ rằng bất đẳng thức (1) là đặc trưng của các tam giác đều, theo nghĩa : với mọi tam giác ABC không đều, ta luôn tìm được một điểm M trong mặt phẳng tam giác sao cho (1) không đúng.

TRẦN NAM DŨNG
(TP Hồ Chí Minh)

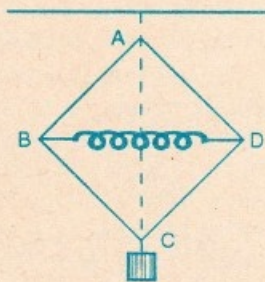
Bài T10/235 : Cho tứ diện $ABCD$. M là một điểm thuộc mặt BCD , một mặt phẳng bất kì cắt các đoạn AB, AC, AD, AM theo thứ tự tại B', C', D', M' . Chứng minh rằng :

$$AM + AM' < \max \{ AB + AB', AC + AC', AD + AD' \}$$

NGUYỄN MINH HÀ
(Hà Nội)

CÁC ĐỀ VẬT LÝ

Bài L1/235 : Một hệ dao động như hình vẽ, khung $ABCD$ gồm các thanh nhẹ có thể di động nhờ các khớp ở đỉnh. Ở vị trí cân bằng khung có dạng hình thoi, góc ở đỉnh A là $2\alpha_0$. Bóp nhẹ hai đầu BD rồi thả ra.



Chứng minh vật dao động điều hòa.

Lập biểu thức tính tần số và chu kỳ dao động.

HỒ LINH PHI
(Nghệ An)

(xem tiếp trang 10)

Problems in this issue



FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/235. Find 8-digit number $a_1 a_2 a_3 \dots a_8$ satisfying simultaneously

$$\begin{cases} (a_1 a_2 a_3)^2 = (a_7 a_8)^2 \\ (a_4 a_5 a_6 a_7 a_8)^3 = (a_1 a_2 a_3)^3 \end{cases}$$

T2/235. The real numbers a, b, x, y satisfy the conditions :

$$\begin{aligned} a + b &= 6 \\ ax + by &= 10 \\ ax^2 + by^2 &= 24 \\ ax^3 + by^3 &= 62. \end{aligned}$$

Find the value of $ax^4 + by^4$.

T3/235. Find the value of x such that the quotient of the division of $1996x + 1497$ by $x^2 + 1$ attains the least value.

T4/235. Let be given a triangle ABC and a fixed point D on the opposite ray of the ray BC . A moving ray Dx cuts the sides AB, AC respectively at E, F . Let M, N be respectively the midpoints of BF, CE . Prove that the line MN passes through a fixed point.

T5/235. Let be given a circle (O, R) and a point M in its interior. What condition does satisfy the point M so that one can draw a chord AB passing through M such that $MA : MB = 1 : 2$? Justify the answer.

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/235. Find the least value of the constant C such that for every $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$, we have

$$\frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_1 + a_2} + \dots + \frac{n}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} < C \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} \right).$$

T7/235. Find the greatest value of the expression

$$F = \frac{a}{bcd+1} + \frac{b}{cda+1} + \frac{c}{dab+1} + \frac{d}{abc+1},$$

where $a, b, c, d \in [0, 1]$.

T8/235. Let be given two polynomials $P(x), Q(x)$ with real coefficients, $P(x)$ is of 3^{d} degree and $Q(x)$ is of 2^{d} degree, having no real root. Prove that if the graph of the function $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$ has three points of inflection then these points are collinear.

T9/235. Let M be an arbitrary point in the plane of an equilateral triangle ABC . Let x, y, z be the distances from M to the vertices and p, q, r be the distances from M to the lines containing the sides of the triangle. Prove that

$$p^2 + q^2 + r^2 \geq \frac{1}{4} (x^2 + y^2 + z^2) \quad (*)$$

and that this condition characterizes the equilateral triangles, i.e. for every non equilateral triangle, we can find a point M in the plane of the triangle so that the inequality $(*)$ does not hold.

T10/235. Let be given a tetrahedron $ABCD$ and a point M on the plane BCD . An arbitrary plane cuts the segments AB, AC, AD, AM respectively at B', C', D', M' . Prove that :

$$AM + AM' < \max \{AB + AB', AC + AC', AD + AD'\}.$$

PHƯƠNG PHÁP...

(tiếp trang 1)

một tam giác được tạo thành từ 3 đường thẳng đã cho mà tam giác này không bị cắt bởi bất kì đường thẳng nào trong các đường thẳng còn lại.

Giải : Giả sử l_1 là một trong các đường thẳng đã cho. Xét tất cả các giao điểm của $n - 1$ đường thẳng còn lại. Gọi M là tập hợp các khoảng cách (số đo là số thực dương) từ các giao điểm đó đến đường thẳng l_1 . M có số nhỏ nhất là d_0 .

Giả sử P là giao điểm của 2 đường thẳng l_2 và l_3 có khoảng cách đến l_1 bằng d_0 . Các đường thẳng l_2 và l_3 cắt l_1 tại các điểm Q và R tương ứng (vì không có 2 đường thẳng nào song song). Nhận thấy tam giác PQR được tạo thành từ 3 đường thẳng l_1, l_2, l_3 và không bị cắt bởi bất kì đường thẳng nào. Thật vậy, giả sử có đường thẳng l_4 cắt tam giác PQR thì l_4 phải cắt l_2 hoặc l_3 tại điểm $T \neq P$ (vì không có 3 đường thẳng đồng quy). Khoảng cách từ T đến l_1 là d_1 . Rõ ràng $d_1 < d_0$. Điều này trái với d_0 là khoảng cách nhỏ nhất. (Các bạn hãy tự vẽ lấy hình)

ĐỀ RA KÌ NÀY.

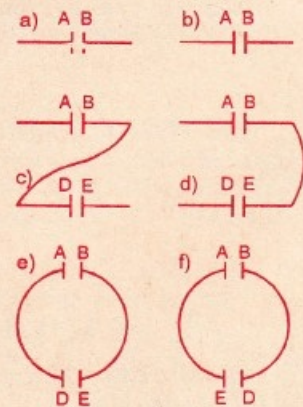
(tiếp theo trang 9)

Bài L2/235 : Cho tụ điện AB điện dung $C_1 = 2\mu F$ và điện tích

$q_1 = 10^{-4} C$ (cốt A mang điện dương) và tụ điện DE điện dung $C_2 = 3\mu F$ và điện tích $q_2 = 3.10^{-4} \mu F$ (cốt D mang điện dương).

Hãy xác định hiệu điện thế V_{AB} và U_{DE} của các tụ điện trên và nói rõ bản nào mang điện dương trong các trường hợp sau đây :

- Các tụ AB và tụ DE để tách riêng (hình 1a và 1b).
- B nối với D bằng dây dẫn
- B nối với E
- A nối với D và B nối với E
- A nối với E và B nối với D



NGUYỄN QUANG HẬU
(Hà Nội)

Dành cho các bạn chuẩn bị thi vào đại học

ỨNG DỤNG PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ

NGÔ THÀNH LONG

(Vĩnh Phú)

Trong các kì thi vào đại học, phần hình học rất được chú trọng. Một phương pháp giải các bài toán hình học có nhiều ưu việt nhưng ít được đề cập đến trong các sách giáo khoa, đó là phương pháp tọa độ. Bằng phương pháp này các bạn có thể giải được một lớp các bài hình học thông thường rất đơn giản. Dưới đây là sơ lược các bước giải một bài hình học.

- Chọn hệ trục tọa độ. Bài toán có đơn giản hay không một phần phụ thuộc vào cách chọn hệ trục tọa độ. Để các và đơn vị trục. Thông thường gốc và trục tọa độ gắn liền với điểm và đường đặc biệt của bài toán, như là tâm đường tròn, đỉnh góc vuông, đỉnh góc tam diện vuông...

- Dựa vào các điều kiện của bài toán để xác định tọa độ các điểm, phương trình của đường thẳng và mặt phẳng cần thiết, điều kiện ràng buộc với nhau giữa tọa độ các điểm, phương trình các đường và mặt.

- Sử dụng các kiến thức cần thiết để giải bài toán.

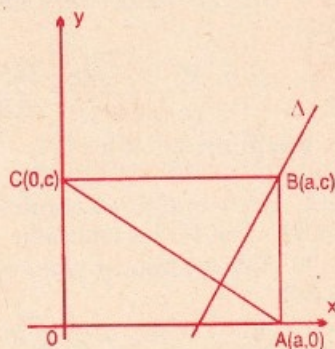
Sau đây ta xét một vài ví dụ áp dụng.

Bài toán 1. Cho góc vuông xOy . Một hình chữ nhật $OABC$, có chu vi không đổi, A, C là điểm thay đổi thuộc Ox, Oy . Chứng minh rằng: đường vuông góc kẻ từ B vuông góc với đường chéo AC luôn đi qua một điểm cố định.

Bài toán này có "dáng dấp" là một bài đại số: tìm điểm cố định, vì thế rất thuận tiện khi ta "đại số hóa" bằng phương pháp tọa độ. Ở đây, ta dễ dàng có ngay một hệ trục tọa độ. Để các đề bài toán đơn giản nhất là Oxy (hình vẽ 1), đơn vị $|i| = |j|$. Ta gọi: $A(a, 0), C(0, c)$ nên $B(a, c)$ và đặt $a + c = b = \text{const}$, vì chu vi $OABC$ không đổi. Dễ dàng có ngay phương trình đường thẳng AC

$$\text{là: } y = -\frac{c}{a}x + c$$

Vậy nên đường thẳng Δ qua B và vuông góc với AC có dạng $(B(a, c))$:



$$y = \frac{a}{c}x + y_0 \Rightarrow y_0 = c - \frac{a}{c} \cdot a = \frac{c^2 - a^2}{c} = b \left(1 - \frac{a}{c}\right).$$

Do đó phương trình của Δ là:

$$y = \frac{a}{c}x + b \left(1 - \frac{a}{c}\right).$$

Giả sử Δ qua điểm cố định $D(x_1, y_1)$ với $\forall$

$\frac{a}{c}$, ta có:

$$\frac{a}{c}(x_1 - b) - (y_1 - b) = 0 \text{ với } \forall \frac{a}{c} \text{ hay } \begin{cases} x_1 = b \\ y_1 = b. \end{cases}$$

Vậy Δ luôn đi qua điểm cố định $D(b, b)$ (đpcm)

Bài toán 2: (Câu III(2) đề 130. DTTS). Từ góc $IAJB$ có các góc A và B vuông, $IA > IB$. Chứng tỏ rằng với mọi điểm M trên đường thẳng IJ ta luôn có:

$$\frac{JA}{JB} \leq \frac{MA}{MB} \leq \frac{IA}{IB}.$$

Ở đây chưa có một

hệ trục vuông góc nào

để đơn giản bài toán.

Ta chọn bằng cách

sau: Gọi O là trung

điểm của IJ là gốc tọa

độ và IJ là trục hoành

Ox (hình 2). Khi đó $A,$

B thuộc đường tròn

(O, R) ($R = OI$),

không mất tính tổng

quát ta chọn $|I| = |J| = R = 1$. Mặt khác gọi

hoành độ của A là $\cos a$ ($a \in [0, \pi]$) thì có A

$(\cos a, \sin a)$. Tương tự gọi: $B(\cos b, \sin b)$ ($b \in$

$[0, \pi]$) và $I(-1, 0), J(1, 0)$.

Từ giả thiết $IA > IB$ ta có:

$$\sqrt{(-1 - \cos a)^2 + \sin^2 a} > \sqrt{(-1 - \cos b)^2 + \sin^2 b}$$

$$\text{hay } \cos a > \cos b.$$

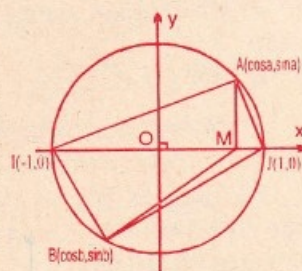
Mặt khác, gọi $M(x, 0)$ ta sẽ có:

$$\frac{MA^2}{MB^2} = \frac{x^2 - 2x\cos a + 1}{x^2 - 2x\cos b + 1}.$$

Xét hàm số: $y = \frac{x^2 - 2x\cos a + 1}{x^2 - 2x\cos b + 1}$ ta có:

$$y' = \frac{(\cos a - \cos b)(x^2 - 1)}{(x^2 - 2x\cos b + 1)^2} = 0$$

$$\text{khi } x = \pm 1. \text{ Xét bảng biến thiên.}$$



x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
y'		+	0	-
y	1	$y(-1)$	$y(1)$	1

Ta đã có : $\frac{IA^2}{IB^2} = \frac{1 + \cos a}{1 + \cos b} = y(-1) > 1$ và

$$\frac{JA^2}{JB^2} = \frac{1 - \cos a}{1 - \cos b} = y(1) < 1.$$

Từ đó : $y(1) \leq \frac{MA^2}{MB^2} \leq y(-1)$ hay

$$\frac{JA}{JB} \leq \frac{MA}{MB} \leq \frac{IA}{IB} \text{ (đpcm)}$$

Như vậy bằng phương pháp này ta đã biến bài bất đẳng thức hình học thành bài tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của hàm số. Dưới đây ta sẽ xét bài toán hình không gian.

Bài toán 3 : (Câu Vb, đề 42. ĐTTS). Cho hình lập phương ABCD. A'B'C'D' cạnh a, điểm M thuộc đoạn AD', N thuộc đoạn BD với AM = DN = x. ($0 < x < a\sqrt{2}$).

1) Chứng minh rằng với $x = \frac{a\sqrt{2}}{3}$ thì đoạn MN ngắn nhất.

2) Khi MN ngắn nhất hãy chứng minh :

a) MN là đoạn vuông góc chung của AD' và DB.

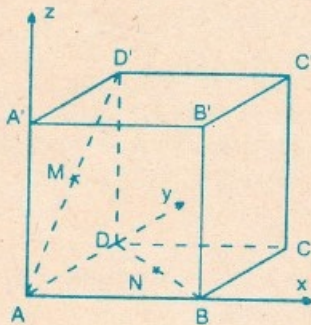
b) MN // A'C.

3) Chứng minh rằng khi x thay đổi, thì MN luôn luôn song song với mặt phẳng (A'BCD').

Bài này ta có thể chọn bất cứ hệ trục tọa độ. Để các nào mà gắn với đỉnh hình lập phương, trục chứa các cạnh xuất phát từ đỉnh đó. Ta chọn : A làm gốc tọa độ, Ox $\supset$ AB, Oy $\supset$ AD, Oz $\supset$ AA', đơn vị $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}|$.

Khi đó dễ dàng có : $M\left(0, \frac{x\sqrt{2}}{2}, \frac{x\sqrt{2}}{2}\right)$ và $N\left(\frac{x\sqrt{2}}{2}, a - \frac{x\sqrt{2}}{2}, 0\right)$.

1) Từ đó ta có : $MN = \sqrt{x^2 + (a - x\sqrt{2})^2} = \sqrt{3x^2 + 2ax\sqrt{2} + a^2}$ ngắn nhất khi : $x = \frac{a\sqrt{2}}{3}$ (đpcm).



2) Khi đó ta có : $M\left(0, \frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right)$ và $N\left(\frac{a}{3}, \frac{2a}{3}, 0\right)$ nên $\vec{MN} = \left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}, -\frac{a}{3}\right)$.

a) Mặt khác : $D'(0, a, a)$ nên $\vec{AD'} = (0, a, a)$.

Vậy $\vec{AD'} \cdot \vec{MN} = 0 \cdot \frac{a}{3} + a \cdot \frac{a}{3} + a \cdot \left(-\frac{a}{3}\right) = 0$

hay $AD' \perp MN$. Và $D(0, a, 0)$, $B(a, 0, 0)$ nên

$\vec{DB} = (a, -a, 0)$. Vì vậy $\vec{DB} \cdot \vec{MN} = a \cdot \frac{a}{3} +$

$+ a \cdot \left(-\frac{a}{3}\right) + 0 \cdot \frac{a}{3} = 0$ hay $DB \perp MN$.

Vậy MN là đoạn vuông góc chung của AD' và DB.

b) Ta cũng có : $A'(0, 0, a)$ và $C(a, a, 0)$ nên $\vec{A'C} = (a, a, -a)$ vì vậy $A'C = 3MN$ hay $A'C \parallel MN$.

3) Khi x thay đổi ta có :

$\vec{MN} = \left(\frac{x\sqrt{2}}{2}, a - x\sqrt{2}, -\frac{x\sqrt{2}}{2}\right)$. Dễ dàng có

phương trình mặt phẳng (A'BCD') là : $x + z - a = 0$ nên có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1, 0, 1)$. Từ đó : $\vec{MN} \cdot \vec{n} = 0$ hay $MN \perp \vec{n}$ hay MN song song với mặt phẳng (A'BCD').

Đến đây thì bài toán được chứng minh xong và các bạn chắc đã thấy tính ưu việt của phương pháp này. Dưới đây là một số bài toán để các bạn rèn luyện :

Bài toán 4 : Cho hình thang ABCD ngoại tiếp đường tròn (O, R), gọi S là diện tích hình thang. Chứng minh rằng :

$$AC^2 + BD^2 > 2 \cdot S$$

Bài toán 5. (Câu IVb - đề 109 - ĐTTS) Cho một tam diện vuông đỉnh O. Trên 3 cạnh của tam diện, lấy 3 điểm A, B, C sao cho $AC = 20B$, $BC = 20A$.

1) M, N là chân đường vuông góc kẻ từ O xuống AC và BC. Chứng minh rằng $MN \perp OC$.

2) Tính $\cos(\widehat{MON})$

3) Gọi D là điểm của đoạn AB. Chứng minh rằng :

$$\frac{\tan^4(\widehat{OCD})}{\tan^4(\widehat{OCA})} + \frac{MN}{AB} = 1.$$

Bài toán 6 : (Câu IVb - đề 130 - ĐTTS). Hình chóp SABC có đáy ABC là tam giác vuông tại C, $CA = a$, $CB = b$, cạnh $SA = h$ vuông góc với đáy. Gọi D là trung điểm của cạnh AB.

1) Tính góc nhọn φ giữa các đường thẳng AC và SD.

2) Tính khoảng cách giữa các đường thẳng AC và SD.

3) Tính khoảng cách giữa các đường thẳng BC và SD.

Bằng phương pháp này các bạn có thể giải được nhiều bài toán nữa.

Tìm hiểu sâu thêm toán học phổ thông

NHÌN TỪ ĐỊNH LÍ MENELAUT

HỒ CÔNG DỨNG
(Bình Thuận)

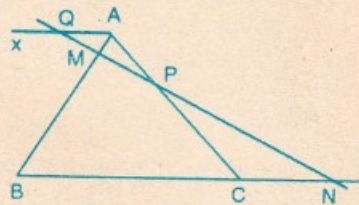
Làm mạnh hơn một định lý và các áp dụng của nó luôn là công việc hấp dẫn các bạn trẻ học toán. Bài viết này tôi xin giới thiệu với các bạn một kết quả nhìn từ định lý Menelaus.

Trước hết tôi xin nhắc lại nội dung định lý và phương pháp chứng minh thường gặp:

Định lý Menelaus: "Nếu một đường thẳng cắt các cạnh AB, BC, CA (hoặc phần kéo dài) của tam giác ABC theo thứ tự tại các điểm M, N, P thì ta có: $\frac{MA}{MB} \cdot \frac{NB}{NC} \cdot \frac{PC}{PA} = 1$."

Chứng minh:

Gọi (d) là đường thẳng cắt các cạnh AB, BC, CA theo thứ tự tại các điểm M, N, P .



Dựng $A_x \parallel$

BC . Gọi $\{Q\} = A_x \cap (d)$

Ta có: $\triangle APQ$ đồng dạng với $\triangle CPN$

$$\Rightarrow \frac{AP}{AQ} = \frac{CP}{CQ} \Rightarrow \frac{AQ}{AP} = \frac{CQ}{CP} = 1. \quad (1)$$

$\triangle AMQ$ đồng dạng với $\triangle BMN$

$$\Rightarrow \frac{AM}{AQ} = \frac{BM}{BN} \Rightarrow \frac{AQ}{AM} = \frac{BN}{BM} = 1 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow \frac{AQ}{AM} \cdot \frac{BN}{BM} \cdot \frac{AP}{CN} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{MA}{MB} \cdot \frac{NB}{NC} \cdot \frac{PC}{PA} = 1. \text{ (đpcm)}$$

Bây giờ tôi xin giới thiệu một cách chứng minh khác.

Ta dựng đường thẳng (d') bất kỳ cắt (d) tại điểm I :

Từ $A; B; C$ kẻ $Ax \parallel By \parallel Cz \parallel (d)$.

(d') cắt $Ax; By; Cz$ lần lượt tại $A'; B'; C'$

$$\text{Ta có: } \frac{IA'}{IB'} \cdot \frac{IB'}{IC'} \cdot \frac{IC'}{IA'} = 1.$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{IA'}{IB'} = \frac{MA}{MB} \\ \frac{IB'}{IC'} = \frac{NB}{NC} \\ \frac{IC'}{IA'} = \frac{PC}{PA} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{MA}{MB} \cdot \frac{NB}{NC} \cdot \frac{PC}{PA} = 1.$$

$$\Rightarrow \frac{MA}{MB} \cdot \frac{NB}{NC} \cdot \frac{PC}{PA} = 1 \text{ (đpcm).}$$

Nếu dừng lại ở hệ thức: $\frac{MA}{MB} \cdot \frac{NB}{NC} \cdot \frac{PC}{PA} = 1$.

Ta có thể chứng minh điều ngược lại:

"Nếu M, N, P là điểm trên các cạnh (hoặc trên phần kéo dài của tam giác ABC thỏa:

$$\frac{MA}{MB} \cdot \frac{NB}{NC} \cdot \frac{PC}{PA} = 1 \text{ thì } M, N, P \text{ thẳng hàng.}"$$

Thật vậy: Gọi $\{P'\} = MN \cap AC$

Theo phân chứng minh trên ta có:

$$\frac{MA}{MB} \cdot \frac{NB}{NC} \cdot \frac{P'C}{P'A} = 1 \quad (1)$$

$$\text{Theo giả thiết: } \frac{MA}{MB} \cdot \frac{NB}{NC} \cdot \frac{PC}{PA} = 1. \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow \frac{P'C}{P'A} = \frac{PC}{PA} \Rightarrow P' \equiv P \Rightarrow$$

$\Rightarrow M, N, P$ thẳng hàng.

Như vậy từ đây ta có thể phát biểu một kết quả mạnh hơn định lý Menelaus.

Kết quả 1: "Cho M, N, P lần lượt là các điểm trên các cạnh tam giác ABC (hoặc phần kéo dài).

$$\text{Ta có: } M, N, P \text{ thẳng hàng} \Leftrightarrow \frac{MA}{MB} \cdot \frac{NB}{NC} \cdot \frac{PC}{PA} = 1."$$

Từ kết quả với 1 phương pháp chứng minh tương tự ta có thể phát biểu một kết quả trong không gian ba chiều.

Kết quả 2: Cho M, N, P, Q lần lượt là các điểm trên các cạnh AB, BC, CD, DA của tứ diện $ABCD$. Ta có:

$$M, N, P, Q \text{ đồng phẳng} \Leftrightarrow \frac{MA}{MB} \cdot \frac{NB}{NC} \cdot \frac{PC}{PD} \cdot \frac{QD}{QA} = 1.$$

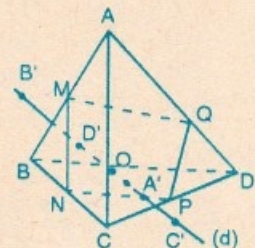
Chứng minh:

Phần thuận:

Dựng đường thẳng (d) bất kỳ cắt mp $(MNPQ)$ tại O . Từ các đỉnh A, B, C, D ta dựng các mặt phẳng song song với $(MNPQ)$ theo thứ tự cắt (d) tại các điểm A', B', C', D' .

$$\text{Ta có: } \frac{OA'}{OB'} \cdot \frac{OB'}{OC'} \cdot \frac{OC'}{OD'} \cdot \frac{OD'}{OA'} = 1.$$

Theo định lý talet ta có:



$$\left. \begin{array}{l} \frac{OA'}{OB'} = \frac{MA}{MB} \\ \frac{OB'}{OC'} = \frac{NB}{NC} \\ \frac{OC'}{OD'} = \frac{PC}{PD} \\ \frac{OD'}{OA'} = \frac{QD'}{QA'} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{MA}{MB} \cdot \frac{NB}{NC} \cdot \frac{PC}{PD} \cdot \frac{QD'}{QA'} = 1 \quad (1)$$

Phần đảo: Mp (MNP) cắt AD tại Q'

Theo chứng minh trên ta có:

$$\frac{MA}{MB} \cdot \frac{NB}{NC} \cdot \frac{PC}{PD} \cdot \frac{Q'D'}{Q'A'} = 1 \quad (2)$$

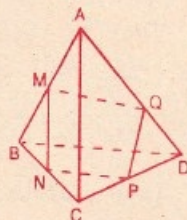
$$\text{So sánh (1) và (2)} \quad \frac{Q'D'}{Q'A'} = \frac{QD}{AQ} \Rightarrow Q' \equiv Q \Rightarrow$$

$\Rightarrow M, N, P, Q$ đồng phẳng.

* Áp dụng các kết quả trên, ta có lời giải gọn cho các bài toán sau:

Bài toán 1: Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N, P, Q lần lượt là các điểm nằm trên các cạnh AB, BC, CD, DA.

Chứng minh rằng: Nếu $\frac{MA}{MB} = \frac{PD}{PC}$ và $\frac{NB}{NC} = \frac{QA}{QD}$ thì M, N, P, Q đồng phẳng.



Giải: Ta có $\frac{MA}{MB} = \frac{PD}{PC} \Rightarrow \frac{MA}{MB} \cdot \frac{PC}{PD} = 1 \quad (1)$

Tương tự: $\frac{NB}{NC} \cdot \frac{QA}{QD} = 1 \quad (2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{MA}{MB} \cdot \frac{NB}{NC} \cdot \frac{PC}{PD} \cdot \frac{QA}{QD} = 1$

$\Rightarrow M, N, P, Q$ đồng phẳng.

Bài toán 2: Cho 4 điểm A, B, C, D không đồng phẳng và điểm O bất kì trong không gian.

Chứng minh rằng chân các đường phân giác trong vach từ đỉnh O của các tam giác: OAB; OBC; OCD; ODA là đồng phẳng.

Giải: Gọi E, F, I, K lần lượt là chân các đường phân giác trong của các tam giác: OAB; OBC; OCD; ODA

Ta có:

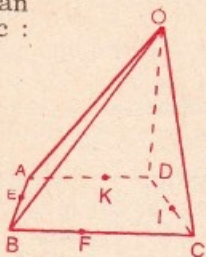
$$\frac{EA}{EB} = \frac{OA}{OB}; \frac{KD}{KA} = \frac{OD}{OA}$$

$$\frac{IC}{ID} = \frac{OC}{OD}; \frac{FB}{FC} = \frac{OB}{OC}$$

Do đó: $\frac{EA}{EB} \cdot \frac{FB}{FC} \cdot \frac{IC}{ID} \cdot \frac{KD}{KA} = \frac{OA}{OB} \cdot \frac{OB}{OC} \cdot \frac{OC}{OD} \cdot \frac{OD}{OA} = 1$

$\Rightarrow E, F, I, K$ đồng phẳng.

Bài toán 3: Cho 3 đường thẳng a, b, c không đồng phẳng, cùng song song với một mặt phẳng. Một đường thẳng (d) di động luôn cắt 3 đường thẳng nói trên. Chứng minh rằng (d) luôn song song với một mặt phẳng



LỜI GIẢI ĐỀ THI QUỐC GIA CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN THPT NĂM HỌC 1995 - 1996

(Bảng A)

NGUYỄN KHẮC MINH

I. ĐỀ THI:

Bài 1: Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sqrt{3x} \cdot \left(1 + \frac{1}{x+y}\right) = 2 \\ \sqrt{7y} \cdot \left(1 - \frac{1}{x+y}\right) = 4\sqrt{2} \end{cases}$$

Bài 2: Cho góc tam diện Sxyz. Một mặt phẳng (P) không đi qua S và cắt các tia Sx, Sy, Sz lần lượt tại A, B, C. Trong mặt phẳng (P) dựng ba tam giác DAB, EBC, FCA sao cho mỗi tam giác đó không có điểm trong chung với tam giác ABC, và $\Delta DAB = \Delta SAB$, $\Delta EBC = \Delta SBC$, $\Delta FCA = \Delta SCA$. Xét mặt cầu (T) thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau:

(1) T tiếp xúc với các mặt phẳng (SAB), (SBC), (SCA), (ABC).

(2) T nằm trong góc tam diện Sxyz và nằm ngoài hình tứ diện SABC.

Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF là điểm tiếp xúc của mặt cầu (T) với mặt phẳng (P).

Bài 3: Cho các số nguyên dương k và n với $k \leq n$. Hỏi có tất cả bao nhiêu chỉnh hợp chập k ($a_1, a_2, \dots, a_k$) của n số nguyên dương đầu tiên, mà mỗi chỉnh hợp ($a_1, a_2, \dots, a_k$) thỏa mãn ít nhất một trong hai điều kiện sau:

(1) Tồn tại $t \in \{1, 2, \dots, k\}$ sao cho $a_t < t$ và $a_k > a_1$.

(2) Tồn tại $s \in \{1, 2, \dots, k\}$ sao cho $(a_s - s)$ không chia hết cho 2.

Bài 4: Hãy xác định tất cả các hàm số $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ thỏa mãn đẳng thức:

$$f(n) + f(n+1) = f(n+2)f(n+3) - 1996$$

với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

($\mathbb{N}^*$ là tập hợp các số nguyên dương).

Bài 5: Xét các tam giác ABC có độ dài cạnh BC bằng 1 và số đo góc BAC bằng α cho trước

($\alpha > \frac{\pi}{3}$). Hỏi tam giác nào có khoảng cách từ tâm đường tròn nội tiếp đến trọng tâm bé nhất? Hãy tính khoảng cách bé nhất đó theo α .

Kí hiệu $f(\alpha)$ là khoảng cách bé nhất nói trên.

Hỏi khi α thay đổi trong khoảng $(\frac{\pi}{3}, \pi)$ thì hàm số $f(\alpha)$ đạt giá trị lớn nhất tại giá trị nào của α ?

Bài 6: Cho bốn số thực không âm a, b, c, d thỏa mãn điều kiện:

$$2(ab + ac + ad + bc + bd + cd) + abc + abd + acd + bcd = 16,$$

Chứng minh rằng:

$$a + b + c + d \geq \frac{2}{3}(ab + ac + ad + bc + bd + cd).$$

Hỏi dấu bằng xảy ra khi nào?

II. LỜI GIẢI:

Bài 1: Điều kiện có nghĩa của hệ: $x \geq 0, y \geq 0$ và $x^2 + y^2 \neq 0$.

Để thấy, nếu (x, y) là nghiệm của hệ đã cho thì phải có $x > 0, y > 0$. Do đó:

$$\text{Hệ đã cho} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \frac{1}{x+y} = \sqrt{3x} \\ 1 - \frac{1}{x+y} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7y}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x+y} = \frac{1}{\sqrt{3x}} - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7y}} & (1) \\ 1 = \frac{1}{\sqrt{3x}} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7y}} & (2) \end{cases}$$

Nhân (1) với (2), vế theo vế, ta được :

$$\frac{1}{x+y} = \frac{1}{\sqrt{3x}} - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7y}} \Leftrightarrow 21xy = (x+y)(7y-24x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+y}{7y^2} - \frac{3x}{38xy} - \frac{24x^2}{24x^2} = 0 \Leftrightarrow (y-6x)(7y+4x) = 0 \Leftrightarrow y = 6x \quad (3) \quad (\text{vì } x, y > 0).$$

Thay (3) vào (2) sẽ được :

$$1 = \frac{1}{\sqrt{3x}} + \frac{2}{\sqrt{21x}} \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{2+\sqrt{7}}{\sqrt{21}}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{11+4\sqrt{7}}{21} \Rightarrow y = \frac{22+8\sqrt{7}}{7}$$

Thay cặp giá trị (x, y) vừa tìm được vào (1) được đẳng thức đúng. Từ đó suy ra : Hệ phương trình đã cho có duy nhất nghiệm :

$$x = \frac{11+4\sqrt{7}}{21}, y = \frac{22+8\sqrt{7}}{7}$$

Bài 2 : Lời giải 1 : Gọi D' là điểm đối xứng với S qua mặt phẳng phân giác (P_1) của góc nhị diện bù của góc nhị diện cạnh AB của tứ diện $SABC$. Khi đó, hiển nhiên, $D' \in \text{m.p. } (ABC)$, $\Delta D'AB$ không có điểm chung với ΔABC và $\Delta D'AB = \Delta SAB$. Kết hợp các kết quả trên với giả thiết vẽ ΔDAB suy ra $D' \equiv D$, nghĩa là D và S đối xứng với nhau qua m.p. (P_1) . (4).

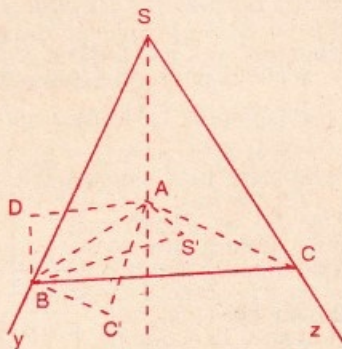
Chứng minh tương tự, ta sẽ được : E và S đối xứng với nhau qua m.p. (P_2) (5), F và S đối xứng với nhau qua m.p. (P_3) (6) ; với (P_2) và (P_3) tương ứng là mặt phẳng phân giác của góc nhị diện bù của góc nhị diện cạnh BC và của góc nhị diện cạnh CA của tứ diện $SABC$.

Mặt khác, từ giả thiết ta có tâm O của (T) là giao điểm của 3 m.p. (P_1) , (P_2) và (P_3) . Kết hợp với (4), (5), (6) suy ra $OD = OE = OF = OS$. Do đó, nếu gọi S' là hình chiếu vuông góc của O trên m.p. (ABC) ta sẽ có $S'D = S'E = S'F$, và điều này chứng tỏ mặt cầu (T) tiếp xúc với m.p. (ABC) tại tâm đường tròn ngoại tiếp ΔDEF . (Đpcm).

Chú ý : Lời giải trên sẽ là lời giải rất tự nhiên của bài toán nếu bạn hiểu được rằng việc sử dụng ΔDAB , như đã nêu trong bài ra, thực chất là một cách mô tả phép quay mặt SAB quanh trục AB sao cho ảnh của nó, qua phép quay đó, nằm trong mp. (ABC) và đồng thời không có điểm chung với ΔABC .

Lời giải 2 : gọi S' và C' theo thứ tự là điểm tiếp xúc của (T) với các m.p. (ABC) và (SAB) . Thế thì : $AS' = AC'$, $BS' = BC'$. Suy ra : $\Delta S'AB = \Delta C'AB$ (c.c.c.) (7).

Mặt khác, cách dựng ΔDAB và giả thiết (2) của (T) cho ta : S' và D nằm khác phía đối với đường thẳng AB (xét trong m.p. (ABC)) ; C' và S nằm khác phía đối với đường thẳng AB (xét trong m.p. (SAB)). Do đó, từ (7) và giả thiết $\Delta DAB =$



$\Delta SAB \Rightarrow ADBS' = ASBS'$ Dẫn tới $S'D = C'S$ (8)

Cách chứng minh tương tự, ta sẽ được : $S'E = A'S$ (9) và $S'F = B'S$ (10), với A' và B' theo thứ tự là điểm tiếp xúc của (T) với các m.p. (SBC) và (SCA) .

Mà $A'S = B'S = C'S$ (do SA', SB', SC' tiếp xúc với (T) theo thứ tự tại A', B', C'), nên từ (8), (9) và (10) ta có $S'D = S'E = S'F$, hay S' là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔDEF . (Đpcm).

Bài 3 : Gọi A là tập gồm tất cả các chỉnh hợp chập k của n số nguyên dương đầu tiên. Gọi A_1 là tập gồm tất cả các chỉnh hợp thỏa yêu cầu đề bài. Kí hiệu $A_2 = \{\text{chỉnh hợp } (a_1, a_2, \dots, a_k) \in A \mid a_i < a_{i+1} \forall i = 1, k-1 \text{ và } a_i \equiv i \pmod{2} \forall i = 1, k\}$. Hiển nhiên có $A_2 \subset A$ và $A_1 = A \setminus A_2$. Suy ra : $|A_1| = |A| - |A_2|$ (11).

Xét A_2 . Với mỗi $(a_1, a_2, \dots, a_k) \in A_2$ ta đều có $a_i + i \neq a_j + j \forall i \neq j \in \{1, 2, \dots, k\}$, $(a_i + i) : 2$ và $a_i + i \in \{1, 2, \dots, n+k\} \forall i = 1, k$. Vì thế, phép đặt tương ứng :

$(a_1, \dots, a_i, \dots, a_k) \in A_2 \mapsto (b_1, \dots, b_i, \dots, b_k) = (a_1 + 1, \dots, a_i + i, \dots, a_k + k)$ xác lập một ánh xạ f từ A_2 đến tập $B = \{(b_1, b_2, \dots, b_k) \mid b_i \neq b_j \forall i \neq j \in \{1, 2, \dots, k\}, b_i \in \{1, 2, \dots, n+k\} \text{ và } b_i : 2 \forall i = 1, k\}$.

Để thấy, nếu $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ và $(a'_1, a'_2, \dots, a'_k)$ là hai phân tử khác nhau thuộc A_2 thì ảnh của chúng qua f cũng là hai phân tử khác nhau thuộc B chứng tỏ f là đơn ánh từ A_2 đến B .

Xét $(b_1, b_2, \dots, b_k)$ bất kì thuộc B . Không mất tổng quát, giả sử $b_1 < b_2 < \dots < b_k$. Khi đó, vì $b_i : 2$ và $b_i \in \{1, 2, \dots, n+k\} \forall i = 1, k$ nên $1 \leq b_1 - i < b_2 - i - (i+1) \leq n \forall i = 1, k-1$ và $b_1 - i \equiv i \pmod{2} \forall i = 1, k$. Suy ra $(b_1 - 1, b_2 - 2, \dots, b_k - k) \in A_2$, và hơn nữa, dễ thấy, ảnh của $(b_1 - 1, b_2 - 2, \dots, b_k - k)$ qua f là $(b_1, b_2, \dots, b_k)$. Vậy f là toàn ánh từ A_2 đến B .

Nên f là song ánh từ A_2 đến B , và do đó : $|A_2| = |B| = C_k^{n+k} = \frac{n+k}{2}!$ (12).

Thay (12) vào (11), với lưu ý $|A| = \frac{n!}{(n-k)!}$, ta được :

$$|A_1| = \frac{n!}{(n-k)!} - C_k^{n+k} = \frac{n!}{(n-k)!} - \frac{n+k}{2}!$$

Chú ý : Bằng phương pháp của lời giải trên, các bạn có thể giải được Bài toán, khái quát từ bài đã ra bằng cách thay điều kiện (2) ở bài đã ra bởi điều kiện : *Tồn tại $s \in \{1, 2, \dots, k\}$ sao cho $(a_s - s)$ không chia hết cho m , với m là số nguyên ≥ 2 cho trước.*

Bài 4 : Từ điều kiện của đề bài ta có :

$$f(n+1) + f(n+2) = f(n+3).f(n+4) - 1996 \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad (13)$$

$$f(n) + f(n+1) = f(n+2).f(n+3) - 1996 \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad (14)$$

Lấy (13) trừ (14), vế theo vế, ta được :

$$f(n+2) - f(n) = f(n+3)[f(n+4) - (n+2)] \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Từ đó, bằng quy nạp theo n , dễ dàng chứng minh được :

$$f(3) - f(1) = f(4).f(6) \dots f(2n+2).[f(2n+3) - f(2n+1)] \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad (15) \quad f(4) - f(2) = f(5).f(7) \dots$$

$$f(2n+3).[f(2n+4) - f(2n+2)] \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad (16) \quad \text{Từ (15) ta thấy phải có } f(3) \geq f(1), \text{ vì nếu, ngược}$$

lai, $f(3) < f(1)$ thì từ (15) $\Rightarrow f(2n-1) > f(2n+1) \forall n \in \mathbb{N}^*$ và như vậy sẽ có vô số số nguyên dương nằm trong đoạn $[1, f(1)]$ (!).

Xét hai trường hợp sau:

• Trường hợp 1: $f(3) = f(1)$. Khi đó, từ (15) $\Rightarrow f(2n+3) - f(2n+1) = f(3) - f(1) = 0 \forall n \in \mathbb{N}^*$ $\Rightarrow f(2n-1) = f(1) \forall n \in \mathbb{N}^*$ (17). Kết hợp với (16) ta được: $f(4) - f(2) = [f(1)]^n \cdot [f(2n+4) - f(2n+2)] \forall n \in \mathbb{N}^*$ (18).

+ Nếu $f(1) = 1$ thì từ (18) suy ra $f(2), f(4), \dots, f(2n), \dots$ là dãy số cộng. Thay $n = 1$ vào (13), với chú ý tới (17), ta được: $f(4) - f(2) = 1997$ và điều này cho thấy 1997 là công sai của dãy số cộng nói trên. Từ đó, ta được lớp hàm:

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } n \text{ lẻ} \\ a + \left(\frac{n}{2} - 1\right) \cdot 1997 & \text{nếu } n \text{ chẵn} \end{cases}$$

với $a \in \mathbb{N}^*$ tùy ý.

+ Nếu $f(1) > 1$ thì từ (18) $\Rightarrow f(4) - f(2) = f(2n+4) - f(2n+2) = 0 \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow f(2n) = f(2) \forall n \in \mathbb{N}^*$ (19). Thay $n = 1$ vào (14), với chú ý tới (17) và (19), ta được: $f(1) + f(2) = f(1)f(2) - 1996 \Leftrightarrow [f(1) - 1][f(2) - 2] = 1997$ (20). Vì 1997 là số nguyên tố nên: (20) $\Leftrightarrow \{f(1), f(2)\} = \{2, 1998\}$. Do đó, ta được các hàm:

$$f(n) = \begin{cases} 2 & \text{nếu } n \text{ lẻ} \\ 1998 & \text{nếu } n \text{ chẵn} \end{cases}; f(n) = \begin{cases} 1998 & \text{nếu } n \text{ lẻ} \\ 2 & \text{nếu } n \text{ chẵn} \end{cases}$$

• Trường hợp 2: $f(3) > f(1)$. Khi đó, từ (15) $\Rightarrow f(2n-1) < f(2n+1) \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Kết hợp với (16) suy ra $f(4) - f(2) = f(2n+4) - f(2n+2) = 0 \forall n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow f(2n) = f(2) \forall n \in \mathbb{N}^*$ (21) $f(3) - f(1) = [f(2)]^n \cdot [f(2n+3) - f(2n+1)] \forall n \in \mathbb{N}^*$ (theo (15)) $\Rightarrow f(2) = 1 \Rightarrow$ dãy $f(1), f(2), \dots, f(2n+1), \dots$ là dãy số cộng. Thay $n = 1$ vào (14), với chú ý tới (21), ta được: $8f(3) - f(1) = 1997$, chứng tỏ 1997 là công sai của dãy số cộng vừa nêu. Từ đó, ta được lớp hàm:

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } n \text{ chẵn} \\ a + \frac{n-1}{2} \cdot 1997 & \text{nếu } n \text{ lẻ} \end{cases}$$

với $a \in \mathbb{N}^*$ tùy ý.

Bằng cách thử trực tiếp tất cả các hàm số đã nhận được trong 2 trường hợp trên, ta thấy chúng đều thỏa các yêu cầu của đề bài. Vậy, đó chính là tất cả các hàm số cần tìm.

Bài 5: Lời giải Bài 5 Bảng B (xem Tạp chí TH và TT số 12 (234) năm 1996) cho ta cách tìm tam giác có khoảng cách từ tâm đường tròn nội tiếp đến trọng tâm bé nhất, cũng như cách tính khoảng cách $f(\alpha)$ bé nhất đó theo α .

Tiếp theo, ta tìm giá trị của α mà tại đó $f(\alpha) = \frac{1}{2} \cotg\left(\frac{\alpha}{4} + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{6} \cotg\frac{\alpha}{2}$ đạt giá trị lớn nhất khi α thay đổi trong khoảng $\left(\frac{\pi}{6}, \pi\right)$. Có:

$$\begin{aligned} f'(\alpha) &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{\sin^2 \frac{\alpha}{2}} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sin^2 \left(\frac{\alpha}{4} + \frac{\pi}{4}\right)} \right] = \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} - \frac{1}{1 + \sin \frac{\alpha}{2}} \right) \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(\sin \frac{\alpha}{2} + 1) \sin^2 \frac{\alpha}{2}} \cdot \left(\sin \frac{\alpha}{2} - \frac{1 - \sqrt{13}}{6} \right) \times \\ &\times \left(\frac{1 + \sqrt{13}}{6} - \sin \frac{\alpha}{2} \right). \end{aligned}$$

Vì hàm $\sin \frac{\alpha}{2}$ đồng biến trong $\left(\frac{\pi}{3}, \pi\right)$ và với

$\alpha \in \left(\frac{\pi}{3}, \pi\right)$ thì $\frac{1}{2} < \sin \frac{\alpha}{2} < 1$ nên trong $\left(\frac{\pi}{3}, \pi\right)$ ta có:

$$\bullet f'(\alpha) > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < \sin \frac{\alpha}{2} < \frac{1 + \sqrt{13}}{6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{3} < \alpha < \arcsin \frac{1 + \sqrt{13}}{6}.$$

$$\bullet f'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \sqrt{13}}{6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha = 2 \arcsin \frac{1 + \sqrt{13}}{6}.$$

$$\bullet \{f'(\alpha) < 0 \Leftrightarrow \frac{1 + \sqrt{13}}{6} < \sin \frac{\alpha}{2} < 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \arcsin \frac{1 + \sqrt{13}}{6} < \alpha < \pi.$$

Từ đó, suy ra trong khoảng $\left(\frac{\pi}{3}, \pi\right)$ thì $f(\alpha)$

đạt giá trị lớn nhất tại $\alpha = 2 \arcsin \frac{1 + \sqrt{13}}{6}$.

Bài 6: Đặt $p = a + b + c + d$, $q = ab + ac + bc + bd + cd$, $r = abc + abd + acd + bcd$ và $s = abcd$. Theo định lý Viet đảo, ta có a, b, c, d là 4 nghiệm thực không âm của đa thức:

$$P(x) = x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s$$

Do đó, theo định lý Rolle, đa thức $P'(x) = 4x^3 - 3px^2 + 2qx - r$ sẽ có 3 nghiệm thực không âm x_1, x_2, x_3 . Theo định lý Viet thuận ta có:

$$x_1 + x_2 + x_3 = \frac{3}{4}p, \quad x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \frac{1}{2}q$$

và $x_1x_2x_3 = \frac{1}{4}r$. Nhờ thế, đẳng thức ràng buộc a, b, c, d ở bài ra được viết lại dưới dạng:

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 + x_1x_2x_3 = 4. \quad (22)$$

Bất đẳng thức cần chứng minh được viết lại dưới dạng:

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1. \quad (23)$$

Việc chứng minh (23) với giả thiết x_1, x_2, x_3 là các số thực không âm thỏa (22) đã được trình bày ở Lời giải Bài 6 Bảng B (xem Tạp chí TH và TT số 12 (234) năm 1996,). Vậy, bất đẳng thức của đề bài được chứng minh. Dấu "=" ở bất đẳng thức đó xảy ra $\Leftrightarrow a, b, c, d$ là 4 số thực không âm sao cho đa thức $P'(x)$ hoặc có dạng $P'(x) = 4(x-1)^3$ hoặc có dạng $P'(x) = 4x(x-2)^2$ (theo kết quả Bài 6 Bảng B).

+ Vì $P(x)$ phải có 4 nghiệm thực không âm nên:

$$P'(x) = 4(x-1)^3 \Leftrightarrow P(x) = (x-1)^4 \Leftrightarrow a=b=c=d.$$

+ Xét $P'(x) = 4x(x-2)^2$ (*). Lúc này, ta có bảng biến thiên sau của $P(x)$ trong $[0, +\infty)$:

Từ đó suy ra:

$P(x)$ có 4 nghiệm thực không âm $\Leftrightarrow$
 hoặc 0 là nghiệm bởi 4 của $P(x)$ hoặc 2 là nghiệm bởi 4 của $P(x)$
 $\Rightarrow$ hoặc 0 là nghiệm bởi 3 của $P'(x)$ hoặc 2 là nghiệm bởi 3 của $P'(x)$. Tuy nhiên, những điều này không thể xảy ra (xem (*)).

x	0	2	$+\infty$
$P'(x)$	0	+	0
$P(x)$	$P(0)$	$P(2)$	

Vậy, dấu "=" ở bất đẳng thức của đề bài xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = d = 1$.

Trò chơi "CỘT VÀ DÒNG"

NGUYỄN ĐÌNH TÙNG
(Hà nội)

I. XUẤT XỨ

Năm 1971 một trò chơi được phổ biến trong sinh viên khóa cơ toán trường Đại học Tổng hợp Masocva. Trò chơi mang tên "định thức", phát biểu như sau :

2 người chơi lần lượt viết vào bảng 3×3 các số nguyên dương nhỏ hơn 10 (mỗi số dùng một lần). Khi kín bảng, tính 2 tổng : tổng S_1 cách tích theo cột, tổng S_2 các tích theo dòng. Nếu $S_1 > S_2$ thì người đi trước thắng, nếu $S_1 < S_2$ thì người đi sau thắng.

Trò chơi này có một hình thức biến tướng đi hơi khác một chút :

2 người chơi lần lượt viết vào bảng 3×3 các số nguyên dương nhỏ hơn 10 (mỗi số dùng một lần). Khi kín bảng, tính 2 tổng : tổng S_1 cách tích theo cột, tổng S_2 các tích theo dòng. Nếu $S_1 > S_2$ thì người đi trước thắng, nếu $S_1 < S_2$ thì người đi sau thắng.

Hai trò chơi này thực chất như nhau. Nhưng ta sẽ xét hình thức "cột và dòng" của trò chơi, về kĩ thuật thực hành đơn giản hơn và nó áp dụng được cho bất cứ ai chỉ cần biết cộng và nhân là đủ, mà không cần biết đến khái niệm định thức.

II. SUY NGHĨ CÓ ÍCH

Để giúp ích cho người chơi, ta hãy giải bài toán sau (xem bảng 1)

Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của tổng

$$S = x_1x_2x_3 + x_4x_5x_6 + x_7x_8x_9$$

(x_i - các số từ 1 đến 9)

Để tìm giá trị nhỏ nhất ta áp dụng vào 3 số hạng của nó bất đẳng thức về trung bình cộng và trung bình nhân :

$$\frac{x_1x_2x_3 + x_4x_5x_6 + x_7x_8x_9}{3} \geq \sqrt[3]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot x_7 \cdot x_8 \cdot x_9}$$

$$\sqrt[3]{9!} = \sqrt[3]{70 \cdot 72 \cdot 72} > 71$$

tức đó $S > 213$ và bởi vì S nguyên, nên $S \geq 214$

Nhưng $2.5.7 + 1.8.9 + 3.4.6 = 70 + 72 + 72 = 214$

nghĩa là giá trị nhỏ nhất cần tìm bằng 214.

Để tìm giá trị lớn nhất ta áp dụng bổ đề sau :

Nếu các số a, b, c, d dương, $ab = cd$ và $|a - b| > |c - d|$ thì $a + b > c + d$.

Ta lập tổng mới S' như sau : số hạng cuối $x_7x_8x_9$ giữ nguyên không đổi, số hạng đầu $x_1x_2x_3$ lập từ 3 số nhỏ nhất của tập $\{x_1, x_2, \dots, x_9\}$, còn số hạng thứ hai lập từ 3 số còn lại của tập trên.

Khi đó theo bổ đề $S' \leq S$, đồng thời bất đẳng thức sẽ xảy ra chỉ khi mỗi trong các số x_1, x_2, x_3 lớn hơn (hoặc nhỏ hơn) mỗi trong các số x_4, x_5, x_6 . Từ đó ta được giá trị của tổng S sẽ lớn nhất nếu tất cả các nhân tử của số hạng thứ nhất nhỏ hơn tất cả các nhân tử của số hạng thứ hai, đến lượt mình tất cả các nhân tử của số hạng thứ hai nhỏ hơn tất cả các nhân tử của số hạng thứ ba. Như vậy giá trị lớn nhất cần tìm bằng :

$$1.2.3 + 4.5.6 + 7.8.9 = 630$$

Tóm lại : tổng S nhận giá trị nhỏ nhất khi các số hạng của chúng gần nhau nhất (và do đó xấp xỉ bằng 71), và sẽ nhận giá trị lớn nhất khi các số hạng của chúng khác nhau nhiều nhất. Từ đó có lời khuyên thực tế cho người chơi :

Hướng sao cho các số hạng của đối phương xích gần nhau (và gần bằng 71), còn các số hạng của mình thì khác xa nhau cực đại !!!

Mặc dù lời khuyên này áp dụng chung cho cả 2 đối thủ, nhưng đầu sau người đi trước vẫn có nhiều ưu thế hơn do được chọn 5 ô, trong khi người đi sau chỉ có 4 ô. Ta hãy tìm hiểu kế hoạch của người đi trước.

III. CHIẾN LƯỢC "71" CỦA NGƯỜI ĐI TRƯỚC

Giả sử bạn đi trước và sau nước đi đầu tiên, đối phương viết số vào cùng cột hoặc cùng dòng với số của bạn. Bây giờ bạn có thể áp dụng chiến lược "71" sau đây. Đối với mỗi dòng và mỗi cột đã viết kín, ta xác định số

$$m = \begin{cases} P/71 & \text{nếu } P \geq 71 \\ 71/P & \text{nếu } P < 71 \end{cases}$$

ở đây P là tích các số viết trong dòng hoặc cột đó.

Nước tiếp theo bạn phải bổ sung dòng hoặc cột theo nguyên tắc : nếu bổ sung DÒNG thì số cho giá trị m đối với dòng đó đạt CỰC TIỂU CHO PHÉP (để tích có thể xấp xỉ 71), còn nếu là CỘT thì số cho giá trị m đối với cột đó đạt CỰC ĐẠI CHO PHÉP (để tích khác 71 càng xa càng tốt).

	3	
	5	

Bảng 2

	1	
	3	4
	5	

Chẳng hạn sau 2 nước đầu tiên (hình 2a) theo chiến thuật bạn cần phải đặt vào ô x_2 một số để cho m đạt cực đại cho phép (bổ sung cột).

Trong trường hợp này cực đại m có thể đạt bởi nước $x_2 = 1$, khi đó tích các số của cột giữa bằng 15, hoặc bởi nước $x_2 = 9$ cho tích bằng 135.

Vì $\frac{71}{15} > \frac{135}{71}$ nên phải chọn $x_2 = 1$ (như hình 2b). Sau nước tiếp theo của đối phương $x_6 = 4$ (h.2b) bạn cần phải bổ sung dòng vào x_4 để cho m đạt cực tiểu, đó là $x_4 = 6$.

IV. HAI TRƯỜNG HỢP RIÊNG

1. Nếu người chơi có tích 1.2.3 hoặc 1.2.4 hoặc 6.8.9 hoặc 7.8.9 thì anh ta sẽ thắng bất kể các số còn lại được phân bố trong bảng như thế nào.

Chẳng hạn ta hãy chứng minh rằng khi trong bảng có cột số 1, 2, 4 người đi trước sẽ thắng. Nếu bảng thể hiện như hình 3 thì :

$$\frac{x_2x_5x_8 + x_3x_6x_9}{2} \geq \sqrt{x_2x_5x_8x_3x_6x_9} = \sqrt{3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9} > 212$$

$$\text{Nghĩa là } S_1 \geq 1.2.4 + 425 = 433$$

Mặt khác, giá trị của tổng S_2 cực đại khi các số x_2 và x_3 nhỏ hơn x_5 và x_6 rồi các số này đến lượt lại nhỏ hơn x_8 và x_9 . Như vậy :

$$S_2 \leq 1.3.5 + 2.6.7 + 4.8.9 = 387$$

tức $S_1 > S_2$ là điều khẳng định.

2. Đối khi trong khi chơi được dùng "mẹo" nếu đối phương đi kém không ngoan. Chẳng hạn trong tình huống như trên hình 4, dù người thứ ba đi thế nào thì người thứ nhất cũng có thể nào thì người thứ nhất cũng có thể và cần phải đặt các số 1, 2 vào một cột, còn 8, 9 vào cột kia. Tính cách khả năng khác nhau để thấy rằng điều đó bảo đảm cho người đi trước chiến thắng.

3	6	5
4		
7		

Bảng 4

NÓI LẠI ĐÔI LỜI VỀ BÀI TOÁN T7/230

Toàn bộ phần từ dòng 22 (trên xuống) đến dòng 29 (trên xuống) của cột bên trái trang 6 Tạp chí THVTT số 12 (234)/1996 nay xin được sửa lại như sau : "Cũng với giả thiết như vậy đối

với a, b, c, n có 3 bạn đã đưa ra BĐT : $S_n \geq \frac{3 \cdot \sqrt[n]{2^{n-1}}}{2}$ (*) và

dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$. Tuy nhiên, các bạn đã chứng minh sai BĐT đó. Hơn thế, ta còn có thể chứng minh (*) là BĐT sai !"

Thành thật xin lỗi bạn đọc về sơ suất mà tôi đã để xảy ra và rất mong nhận được sự lượng thứ của các bạn.

NGUYỄN KHẮC MINH



Giải đáp bài

Xác định tâm đường tròn

Muốn xác định tâm của đường tròn cho trước ta làm như sau :

1. Dùng compa vẽ một đường tròn tâm I : (I) sao cho (I) cắt đường tròn cho trước tại hai điểm A và B phân biệt.

2. Dùng thước, kẻ đường thẳng qua A, I. Đường thẳng này cắt đường tròn (I) tại điểm thứ hai C.

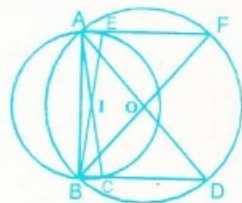
3. Dùng thước, kẻ đường thẳng qua C, B. Đường thẳng này cắt đường tròn cho trước tại điểm thứ hai D.

4. Dùng thước, kẻ đường thẳng qua A, D. AD là đường kính của đường tròn cho trước (vì $\angle ADB = 90^\circ$).

5. Dùng thước, kẻ đường thẳng qua B, I. Đường thẳng này cắt đường tròn (I) tại điểm thứ hai E.

6. Dùng thước, kẻ đường thẳng qua A, E. Đường thẳng này cắt đường tròn cho trước tại điểm thứ hai F.

7. Dùng thước kẻ đường thẳng qua B, F, BF là đường kính của đường tròn cho trước. (vì $\angle BAF = 90^\circ$).



8. Hai đường kính AD và BF cắt nhau tại O. Đó là tâm của đường tròn cho trước.

(Dựa theo đáp án của các bạn : Phạm Sỹ Vinh, 7A, Hưng Dũng, Vinh, Nghệ An, Phạm Vũ Doanh, 9D, Trần Đăng Ninh, Nam Định, Đinh Trung Hòa, 9A, Tầng Bạt Hồ, Hoài Nhơn, Bình Định).

BÌNH PHƯƠNG

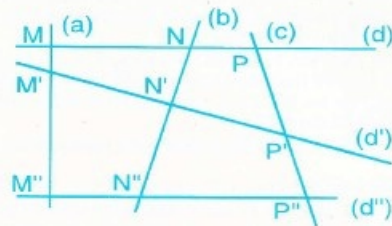
Cắt ghép hình vuông

Một người có 10 miếng gỗ vuông bằng nhau, muốn cắt và ghép chúng lại để được một bảng gỗ vuông. Các bạn hãy chỉ giúp người đó phải cắt và ghép như thế nào ?

PHẠM HÙNG

(tiếp theo trang 14)

Giải : Giả sử MNP là một vị trí xác định của (d) và $M'N'P'$; $M''N''P''$ là hai vị trí bất kì của (d) (kí hiệu (d') và (d'')). Rõ ràng : N, M', N'', P' đồng phẳng



$$\Rightarrow \frac{NM}{NP} \cdot \frac{P'P}{P'P''} \cdot \frac{N''P''}{N''M''} \cdot \frac{M'M''}{M'M} = 1. (1)$$

Vì a, b, c cùng song song với 1 mặt phẳng nên theo định lý Talet ta có :

$$\frac{NM}{NP} = \frac{N'M'}{N''P''} \Rightarrow \frac{NM}{NP} \cdot \frac{N''P''}{N'M'} = 1 (2)$$

$$\begin{aligned} \text{Từ (1) và (2)} &\Rightarrow \frac{P'P}{P'P''} \cdot \frac{M'M''}{M'M} = 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{P'P}{P'P''} = \frac{M'M}{M'M''} \Rightarrow (d), (d'), (d'') \text{ cùng song} \\ &\text{song với 1 mặt phẳng} \Rightarrow (\text{đpcm}) \end{aligned}$$

Chắc chắn rằng, còn rất nhiều điều thú vị xung quanh định lý.

Mong các bạn tiếp tục nghiên cứu

Cùng bạn đọc

1. Bạn đọc gửi bài giải dự thi cần ghi đầy đủ họ tên, địa chỉ (lớp, trường, huyện, tỉnh) vào mỗi bài, phía trên, bên phải. Bên trái ghi số của bài. Ngoài phong bì ghi rõ :

Báo Toán học và tuổi trẻ

45B Hàng Chuối - Hà Nội

Ghi rõ Bài giải của số báo nào

Mỗi phong bì chỉ gửi các bài của cùng 1 số báo. Bài giải không gửi về trụ sở tại TP Hồ Chí Minh, chỉ gửi về 1 địa chỉ nêu trên.

2. Thời hạn nhận bài giải là trong 2 tháng tính từ cuối tháng mà báo phát hành.

3. Bạn có thể đặt mua báo dài hạn (3 tháng, 6 tháng, cả năm) tại các Bưu điện tỉnh, thành phố, huyện, thị xã, thị trấn trong cả nước. Nếu mua tại các Công ty sách và thiết bị trường học từ 100 tờ trở lên thì được trừ 22% so với giá bìa. Có khó khăn gì xin bạn liên hệ với số máy (04) 8213786.

Cảm ơn các bạn

THVTT.

ISSN : 0866 - 8035

Chỉ số : 12884

Mã số : 8BT37M7

Sắp chữ tại TIVT Nhà xuất bản giáo dục
In tại nhà máy in Diên Hồng, 57 Giảng Võ
In xong và nộp lưu chiểu tháng 1/1997

Giá 2.000đ
Hai nghìn đồng