

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ★ HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

12 (234)
1996
NĂM THỨ 33

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG

- ❖ VỀ MỘT ỨNG DỤNG CỦA ĐỊNH LÍ VIỆT
- ❖ TÍNH CHẤT DÂY CÁC TỈ SỐ BẰNG NHAU
- ❖ ĐIỂM TORICELLI CỦA TỨ DIỆN
- ❖ VỀ SỐ NGUYÊN TỔ LỚN NHẤT
- ❖ LỜI GIẢI ĐỀ THI QUỐC GIA CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN THPT NĂM HỌC 1995 - 1996 (BẢNG B)
- ❖ SUY NGHĨ VỀ MỘT BÀI TOÁN HÀM SỐ
- ❖ ĐIỀN SỐ VÀO HÌNH LỤC GIÁC
- ❖ TRÒ CHƠI CHỮA ĐỀ M



Thầy trò đội tuyển thi quốc gia lớp 9 (1995 - 1996)
tỉnh Thanh Hóa.

TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ MATHEMATICS AND YOUTH

MỤC LỤC

Trang

● <i>Dành cho các bạn Trung học cơ sở</i> <i>For Lower Secondary School Level Friends</i> Nguyễn Đức Tấn – Về một ứng dụng của định lý Viet	1
● <i>Giải bài kì trước</i> <i>Solution of Problems in Previous Issue</i> Các bài của số 230	2
● <i>Đề ra kì này</i> <i>Problems in this Issue</i> T1/234, ..., T10/234, L1/234, L2/234	10
● <i>Ổng kính cải cách dạy và học toán</i> <i>Kaleidoscope : Reform of Maths Teaching and Learning</i> Huỳnh Văn Trọng – Tính chất dãy các tỉ số bằng nhau	11
● <i>Tìm hiểu sâu thêm toán học phổ thông</i> <i>Helping Young Friends Gain Better Understanding in Secondary School Maths</i> Nguyễn Minh Hà – Điểm Toricelli của tứ diện	12
● <i>Nguyễn Khắc Minh – Lời giải đề thi quốc gia</i> chọn học sinh giỏi toán THPT năm học 1995 – 1996 (Bảng B)	14
● <i>Học sinh tìm tòi</i> <i>Young Friend's search in Maths</i> Lê Quang Năm – Suy nghĩ về một bài toán hàm số	16
● <i>Bạn có biết</i> <i>Do you know ?</i> Nguyễn Tường – Về số nguyên tố lớn nhất	Bìa 3
● <i>Giải trí toán học</i> <i>Fun with Mathematics</i> Bình Phương – Giải đáp bài : Điền số vào hình lục giác	Bìa 4
Ngô Hàn – Trò chơi chia diêm	Bìa 4

Tổng biên tập :
NGUYỄN CẢNH TOÀN
Phó tổng biên tập :
NGÔ ĐẠT TỬ
HOÀNG CHÚNG

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP :

Nguyễn Cảnh Toàn, Hoàng
Chúng, Ngô Đạt Tử, Lê Khắc
Bảo, Nguyễn Huy Doan,
Nguyễn Việt Hải, Đinh Quang
Hào, Nguyễn Xuân Huy, Phan
Huy Khải, Vũ Thanh Khiết, Lê
Hải Khôi, Nguyễn Văn Mậu,
Hoàng Lê Minh, Nguyễn Khắc
Minh, Trần Văn Nhung,
Nguyễn Đăng Phát, Phan
Thanh Quang, Tạ Hồng
Quảng, Đặng Hùng Thắng, Vũ
Dương Thụy, Trần Thành
Trai, Lê Bá Khánh Trình, Ngô
Việt Trung, Đặng Quan Viễn.

Trụ sở tòa soạn :

45B Hàng Chuối, Hà Nội
231 Nguyễn Văn Cừ, TP Hồ Chí Minh

ĐT: 8213786
ĐT: 8356111

Biên tập và trị sự : VŨ KIM THỦY
Trình bày : QUỐC HỒNG

Dành cho các bạn trung học cơ sở

VỀ MỘT ỨNG DỤNG CỦA ĐỊNH LÍ VIẾT

NGUYỄN DỨC TẤN
(T.P Hồ Chí Minh)

Định lí Viét (hệ thức Viét) : Nếu phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm $x_1; x_2$ thì tổng và tích hai nghiệm đó là

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}; P = x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Vận dụng định lí để giải toán là vấn đề rất hấp dẫn.

Trên Tạp chí T.HvT.T số 6 (204)/1994 thầy giáo Nguyễn Đức đã viết về "Sử dụng định lí Viét để giải một bài toán về bất đẳng thức". Trong bài viết này, tôi xin được trao đổi cùng bạn đọc về ứng dụng của định lí Viét trong việc giải một số bài toán về hàm số.

Xét các bài toán rất quen thuộc sau :

Bài toán 1 : Cho parabol $(P) y = x^2$. Gọi A và B là hai điểm thuộc (P) có hoành độ lần lượt là -1 ; 2. Viết phương trình đường thẳng AB.

Đây là bài toán dễ, hầu hết học sinh và nhiều tài liệu toán đều cho lời giải sau :

$$\begin{cases} A \in (P) \\ x_A = -1 \Rightarrow y_A = (-1)^2 = 1. \text{ Vậy } A(-1; 1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} B \in (P) \\ x_B = 2 \Rightarrow y_B = 2^2 = 4. \text{ Vậy } B(2; 4) \end{cases}$$

Phương trình đường thẳng AB cần tìm có dạng $y = ax + b$ (AB)

$$\begin{cases} A \in (AB) \\ B \in (AB) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = -a + b \\ 4 = 2a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3a = -3 \\ 1 = -a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$$

Vậy phương trình đường thẳng AB là $y = x + 2$.

Nếu suy nghĩ đến việc sử dụng định lí Viét ta có lời giải "đẹp" sau :

Phương trình đường thẳng AB cần tìm có dạng : $y = ax + b$ (AB)

Phương trình xác định hoành độ giao điểm của (AB) và (P)

$$x^2 = ax + b \Leftrightarrow x^2 - ax - b = 0 (*)$$

$x_A = -1, x_B = 2$ là hai nghiệm của (*)

Mặt khác theo hệ thức Viét ta có

$$\begin{cases} x_A + x_B = a \\ x_A \cdot x_B = -b \end{cases}$$

do đó $a = 1, b = 2$.

Phương trình đường thẳng AB là $y = x + 2$.

Bài toán 2 : Cho parabol $y = \frac{x^2}{4}$ (P), A là điểm trên (P) có hoành độ là 2. Tìm phương trình tiếp tuyến tại A với (P).

Cũng như bài toán 1, hầu hết học sinh và nhiều tài liệu toán đều cho lời giải sau :

$$\begin{cases} A \in (P) \\ x_A = 2 \end{cases} \Rightarrow y_A = \frac{2^2}{4} = 1 \text{ Vậy } A(2; 1)$$

Phương trình đường thẳng cần tìm có dạng $y = ax + b$ (D)

$$A \in (D) \Leftrightarrow 1 = 2a + b \Leftrightarrow b = 1 - 2a.$$

$$\text{Vậy } y = ax + 1 - 2a \text{ (D)}$$

Phương trình xác định hoành độ giao điểm của (D) và (P) là

$$\frac{1}{4}x^2 = ax + 1 - 2a \Leftrightarrow x^2 - 4ax - 4 + 8a = 0$$

$$\Delta' = 4a^2 + 4 - 8a = 4(a - 1)^2$$

$$(D) \text{ tiếp xúc } (P) \Leftrightarrow \Delta' = 0 \Leftrightarrow 4(a - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow a = 1, a = 1 \Rightarrow b = 1 - 2 \cdot 1 = -1$$

Phương trình đường thẳng cần tìm là $y = x - 1$.

Sau đây là lời giải nếu sử dụng hệ thức Viét.

Phương trình đường thẳng cần tìm có dạng $y = ax + b$ (D)

Phương trình xác định hoành độ giao điểm của (D) và (P)

$$\frac{x^2}{4} = ax + b \Leftrightarrow x^2 - 4ax - 4b = 0 (**)$$

$x = 2$ là nghiệm kép của (**)

Mặt khác theo hệ thức Viét ta có

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4a \\ x_1 x_2 = -4b \end{cases}$$

$$x_1 = x_2 = 2$$

do đó $a = 1, b = -1$

Phương trình đường thẳng cần tìm là $y = x - 1$

Các bạn hãy tìm thêm những bài toán tương tự, bài toán về hàm số mà ứng dụng định lí Viét cho lời giải ngắn gọn.



Bài T1/230. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình :

$$5^x + 2.5^y + 5^z = 4500 \text{ với } x < y < z.$$

Lời giải. (Dựa theo Lê Hồng Linh, 9T, NK Tx Ninh Bình). Từ phương trình đã cho, ta có :

$5^z < 4500 < 5^6$, mà $5 > 1$ nên $z \leq 5$. Hơn nữa, $x < y < z$ nên :

$5^x + 2.5^y + 5^z \leq 5^3 + 2.5^4 + 5^5 = 4500$. Suy ra, nghiệm của phương trình là : $x = 3, y = 4, z = 5$ vì khi và chỉ khi đó thì dấu bằng mới xảy ra.

Nhận xét. 1) Có 305 bài giải, tất cả đều giải đúng, phần lớn đều giải dựa vào tính duy nhất của dạng phân tích ra thừa số nguyên tố của số nguyên, tuy nhiên thường là chưa thật chặt chẽ, chẳng hạn không nêu rõ tại sao biểu thức chữ đang xét là số nguyên.

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt : Phạm Đình Phú (Tiên Giang, 9³ Long Định - Châu Thành), Trần Đức Sơn (Quảng Bình, 9, Chuyên thị trấn Ba Đồn - Quảng Trạch), Phạm Ngọc Huy (Đồng Nai, 9T, Nguyễn Bình Khiêm, Biên Hòa), Dương Thiên Đức (Thừa Thiên Huế, 9¹, Nguyễn Tri Phương), Phạm Thị Văn Giang (Minh Hải, 9^A, Chuyên Bạc Liêu), Đỗ Thị Di Thiên (Khánh Hòa, 9 Toán Lê Quý Đôn, Nha Trang), Ngô Quốc Anh (Đắk Lắk, 8 Chuyên Toán PTTH Nguyễn Du, Buôn Ma Thuột), Bùi Tiến Đạt (Lâm Đồng, 9A₂ THCS Lê Lợi, Di Linh), Lê Hồng Linh (Ninh Bình, 9T Năng Khiếu, Tx Ninh Bình), Lê Quang Tuấn (Thanh Hóa, B₁ PTTH Hàm Rồng, Tp Thanh Hóa), Đặng Tố Như (Quảng Bình, 9 Toán THCS NK Hải Định, Đồng Hới), Bùi Minh Khoa (Trà Vinh, 9₄ Lý Tự Trọng, TX Trà Vinh), Phạm Quốc Trán (Đồng Nai, 9⁸ Lý Tự Trọng, Tân Biên), Nguyễn Xuân Nguyên (Hà Nội, 9A¹ THCS Chu Văn An, Tây Hồ), Nguyễn Hoạch Trúc Sinh (Bình Định, 9^A Quốc Học Quy Nhơn), Lê Trường Giang (Thanh Hóa, 10^A, PTTH Lương Đắc Bằng, Hoàng Hóa), Nguyễn Thanh Tân (Hải Hưng, 8 NK Phúc Thành, Kinh Môn), Đỗ Mạnh Hùng (Thái Bình, 222 - Tổ 4 - Chu Minh Tiến, Thị trấn Vũ Thư), Lê Trung Kiên (Thừa Thiên - Huế, 9^A Nguyễn Tri Phương), Lê Trần Trung (Quảng Nam - Đà Nẵng, Tổ 61/6 Phường VT, Tp Đà

Nẵng), Phạm Bảo Châu (Bà Rịa - Vũng Tàu, 8 Chuyên Toán, Chuyên Lê Quý Đôn), Lê Đức Trí (Vĩnh Long, 7T Nguyễn Bình Khiêm), Nguyễn Ngọc Hà (Minh Hải, 9A₁ THCS Thị trấn Đầm Dơi), Phan Thanh Bình (Quảng Ngãi, 9 Toán Chuyên Lê Khiết), Nguyễn Thái Phú (Hà Tĩnh, 9 Toán Năng Khiếu Đức Thọ), Nguyễn Văn Hợp (Nghệ An, 9T Phan Bội Châu), Nguyễn Hoàng Giáp (Vĩnh Phú, 9T Chuyên THCS Tam Đảo), Đoàn Công Anh (Thanh Hóa, 8A THCS Năng Khiếu Hà Trung), Lương Thanh Hoài (Hà Tây, 9 Toán Chuyên Hoài Đức).

DẶNG VIỄN

Bài T2/230 : Cho biết mỗi phương trình $x^2 - mx + p = 0$ và $x^2 - nx + q = 0$ đều có hai nghiệm dương. Chứng minh rằng các bất đẳng thức $m < n, mn < p + q$ và $mq < np$ không đồng thời xảy ra.

Lời giải : Giả sử đồng thời xảy ra

$$m < n \quad (1)$$

$$mn < p + q \quad (2)$$

$$mq < np \quad (3)$$

Từ định lý Viét dễ thấy m, n, p, q dương.

Từ (1) $\rightarrow mp < np$. Từ (2) $m^2n < mp + mq < mp + np < 2np \rightarrow m^2 < 2p$. Vì phương trình $x^2 - mx + p = 0$ có nghiệm nên $m^2 \geq 4p$. Vậy $2p > 4p \rightarrow p < 0$. Vô lí.

Nhận xét : Tất cả các bạn tham gia giải bài này đều làm đúng với nhiều cách giải khác nhau. Các bạn có lời giải tốt : Nguyễn Hữu Tình, 9, Hà Tĩnh ; Huỳnh Minh Sơn, 9, Quảng Ngãi ; Nguyễn Minh Hoài, 9, Hà Nội ; Nguyễn Văn Long, 9, Hà Bắc ; Nguyễn Hải Hà, 9, Hà Tây, Đỗ Ngọc Đức, 6, Hà Nội ; Hoàng Minh Phúc, 9, Nghệ An ; Ngô Thị Hào, 9, Hà Bắc ; Bùi Phương Thảo, 9, Thái Bình ; Lục Văn Hào, 9, Tp. Hồ Chí Minh ; Vũ Ngọc Hải, 9, Thái Bình ; Vũ Văn Phong, 9, Vĩnh Phú ; Nguyễn Viết Tú, 9, Hà Tĩnh ; Dương Thiên Đức, 9, Huế ; Bùi Đức Giang, 9, Hà Tây ; Nguyễn Văn Bình, 9, Quảng Bình ; Nguyễn Hồng Quang, 9, Lào Cai.

DẶNG HÙNG THẮNG

Bài T3/230 : Giải phương trình (nghiệm thực)

$$x^4 - 4\sqrt{3}x - 5 = 0$$

$$\text{Lời giải. } x^4 - 4\sqrt{3}x - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2 - 4\sqrt{3}x - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 1)^2 - 2(x + \sqrt{3})^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + \sqrt{2}x + 1 + \sqrt{3})(x^2 - \sqrt{2}x + 1 - \sqrt{3}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + \sqrt{2}x + 1 + \sqrt{3} = 0 & (1) \\ x^2 - \sqrt{2}x + 1 - \sqrt{3} = 0 & (2) \end{cases}$$

Ta thấy (1) vô nghiệm vì có $\Delta = -(2 + 4\sqrt{6}) < 0$

Giải (2) ta được :

$$x_1 = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{4\sqrt{6} - 2}}{2}; x_2 = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{4\sqrt{6} - 2}}{2}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm trên.

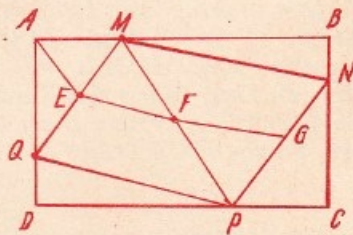
Nhận xét. Có rất nhiều bạn gửi lời giải đến, trong đó đa số có lời giải tốt.

TÓ NGUYỄN

Bài T4/230 : Cho một hình chữ nhật có chu vi không nhỏ hơn $2\sqrt{2}$ và một tứ giác có các đỉnh nằm trên các cạnh khác nhau của hình chữ nhật đó. Chứng minh rằng chu vi của tứ giác không nhỏ hơn 2.

Lời giải. (Vấn tất)

Cách 1 :



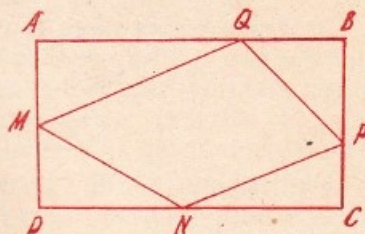
$$\begin{aligned} \text{Trong } \triangle MDN \text{ có: } MN^2 &= DM^2 + DN^2 \\ \Rightarrow 2MN^2 &= (1+1)(DM^2 + DN^2) \geq (DM + DN)^2 \\ \text{Hay } 2MN^2 &\geq (DM + DN)^2 \\ \Rightarrow \sqrt{2}MN &\geq DM + DN \end{aligned}$$

$$\text{Tương tự } \sqrt{2}NP \geq NC + CP, \sqrt{2}PQ \geq BQ + BP, \sqrt{2}MQ \geq AM + AQ.$$

$$\text{Do đó: } \sqrt{2}(MN + NP + PQ + QM) \geq AB + BC + CD + AD \geq 2\sqrt{2}$$

Vậy chu vi tứ giác MNPQ không nhỏ hơn 2.

Cách 2 :



Lấy E, F, G lần lượt là trung điểm MQ, MP, PN. Suy ra $EF = \frac{1}{2}QP, FG = \frac{1}{2}MN$

$$\text{Lại có } \hat{A} = \hat{C} = 90^\circ \Rightarrow AE = \frac{1}{2}MQ$$

$$CG = \frac{1}{2}NP.$$

$$\text{Do đó chu vi } MNPQ = 2(AE + EF + FG + GC) \geq 2AC = 2\sqrt{AB^2 + BC^2}$$

$$\begin{aligned} \text{Mặt khác } (AB - BC)^2 &\geq 0 \Rightarrow 2(AB^2 + BC^2) \\ &\geq (AB + BC)^2 \Rightarrow \sqrt{AB^2 + BC^2} \geq \frac{AB + BC}{\sqrt{2}}. \text{ Do} \end{aligned}$$

$$\text{vậy chu vi } MNPQ \geq 2 \cdot \frac{AB + BC}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2$$

(Dấu = xảy ra khi MNPQ là hình chữ nhật và ABCD là hình vuông).

Nhận xét : Nhiều bạn giải rất dài dòng. Sau đây là danh sách các bạn giải đúng và ngắn gọn :

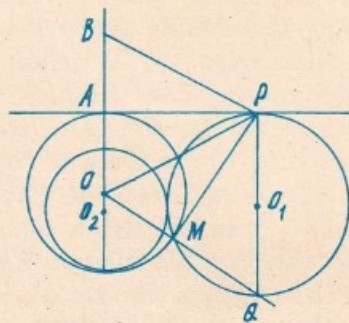
Vĩnh Phú : Nguyễn Đức Minh, Nguyễn Hoàng Giáp, Vũ Mạnh Cường, 9T Chuyên Tam Đảo. **Hà Bắc :** Nguyễn Nhu Chuẩn, 9NK, Đặng Đình Hanh, 9A, NK Thuận Thành, Hoàng Tùng, 8 Chuyên, Nguyễn Thị Hào 9B, NK Tiên Sơn. **Hải Hưng :** Vũ Tuấn Long, Phù Tiên, Vũ Thái Sơn 8T NK tỉnh. **Hà Nội :** Nguyễn Thị Minh thoa, 9T Ngọc Lâm, Gia Lâm, Trần Tất Đạt, Nguyễn Xuân Nguyễn, 9A1 Chu Văn An, Đào Thế Vũ, 9A1, Giảng Võ, Nguyễn Quang Dũng, Lê Thế Thắng, 9H Trưng Vương. **Hải Phòng :** Trần Trung Hiếu 9D₂, Lạc Viên, Ngô Quyên. **Nam Định :** Nguyễn Trọng Kiên, Trần Đình Hùng, Đào Hoàng Anh, Vũ Trần Cương, Phạm Ngọc Hưng, Phạm Thu Giang, Đỗ Quế Hương, Lê Nam Bình 9T, Đoàn Nam Thái, Phạm Đình Quốc Hưng, 8T, Trần Đăng Ninh, Hoàng Tiến, Lí 9 NK Hải Hậu, Nguyễn Diệu Quỳnh 9T NK Ý Yên. **Hà Tây :** Nguyễn Hữu Định 9B Chuyên Ứng Hòa, Nguyễn Hà Duy, 9T Chuyên Phú Xuyên. **Thái Bình :** Lương Văn Huỳnh, 9T Lê Quý Đôn, Hưng Hà. **Thanh Hóa :** Nguyễn Tất Thắng, Đỗ Thị Hoa, 8TNK Bím Sơn, Đặng Đức Trung, 9A Ba Đình, Bím Sơn. **Nghệ An :** Hoàng Minh Phúc, 9B Nghi Liên, Nghi Lộc, Nguyễn Hồng Đức, 9A1 NK Yên Thành, Nguyễn Cảnh Thành, 9TB, Phan Bội Châu, Vinh. **Hà Tĩnh :** Nguyễn Hữu Tình, 9T1 NK thị xã. **Quảng Bình :** Đặng Tố Như, 9T NK Hải Đình, Đồng Hới, Trần Đức Sơn, 9 Chuyên Ba Đồn, Quảng Trạch. **Thừa Thiên - Huế :** Phạm Nguyên Quý 91, Nguyễn Tri Phương, Đinh Trung Hiếu, 8A cấp 2-3 Phú Bài, Hương Thủy. **Bình Định :** Nguyễn Hoạch Trúc Sinh, 9A Quốc học Quy Nhơn. **Quảng Ngãi :** Mai Hàn Giang, 9C Lê Khiết, Hồ Ngọc Nam, 9T Chuyên Mộ Đức. **Khánh Hòa :** Đinh Thái Minh Tâm 92, THCS Cam Lộc, Cam Ranh. **Đắk Lắk :** Nguyễn Thanh Nhã, 9T Chuyên Nguyễn Du, Ban Mê Thuật. **Lâm Đồng :** Phan Thị Thanh Hà, 8A1 Quang Trung, Đà Lạt. **Bà Rịa - Vũng Tàu :** Trần Giang, 7A/2 Nguyễn An Ninh. **Đồng Nai :** Phạm Ngọc Huy, 9T Nguyễn Bình Khiêm, Biên Hòa. **TP HCM :** Chung Nhân Phú, 9T1 Nguyễn An Khương,

Học Môn, *Lư Boun Vinh*, 9A1 Chánh Hưng Q8.
Vĩnh Long : *Nguyễn Chí Trung Kiên*, 8T,
Nguyễn Đỗ Thái Nguyên, 9T2 Chuyên Nguyễn
 Bình Khiêm, Vĩnh Long. **Bến Tre** : *Nguyễn*
Ngọc Hòa, 81, Mỹ Hóa. **Minh Hải** : *Nguyễn*
Chí Linh, 9A¹ thị trấn Dăm Dơi.

VŨ KIM THÙY

Bài T5/230. Cho trước đường tròn $(O; R)$ và điểm A cố định trên đó. Một điểm M chuyển động trên (O) , tiếp tuyến với đường tròn tại M cắt tiếp tuyến tại A ở điểm P . Một đường tròn $(O_1; R_1)$ biến thiên đi qua M và tiếp xúc với AP tại P . Chứng minh rằng (O_1) luôn luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định.

Lời giải. (Dựa theo *Vũ Văn Phong*, 9^a THCS Chuyên Vĩnh Tường, Vĩnh Phú). Kẻ đường kính



AA' của $(O; R)$ rồi lấy trên đó điểm O_2 sao cho $A'O_2 = 3R : 4$. Ta sẽ chứng minh đường tròn cố định $(O_2; 3R : 4)$ chính là đường tròn cần tìm. Thật vậy, kẻ đường kính PQ của đường tròn (O_1) ta có O, M, Q thẳng hàng vì MO, MQ cùng vuông góc với MP . Mặt khác, do $(O), (O_1)$ cùng tiếp xúc với AP nên $A'A, QP$ cùng vuông góc với AP và do đó song song với nhau, suy ra $\angle AQP = \angle QPO$ (so le trong). Hơn nữa, $\angle AOP = \angle QOP$ vì PA, PM là các tiếp tuyến của (O) cùng qua P . Suy ra $\angle QPO = \angle QOP$, hay tam giác QOP cân đỉnh Q . Gọi B là điểm đối xứng với O qua A , ta có B, O, A thẳng hàng và tam giác PBA cân đỉnh P . Như trên, $\angle QOP = \angle POB$, nên hai tam giác cân QOP, POB đồng dạng, và ta có $QP : PO = PO : OB$ hay $OP^2 = 4RR_1$.

Từ tam giác vuông AOP , ta có $OA^2 + AP^2 = 4RR_1$ hay $R_1^2 + \frac{9}{16}R^2 + \frac{3}{2}RR_1 = AP^2 + R_1^2 + \frac{25}{16}R^2 - \frac{5}{2}RR_1 \Leftrightarrow (R_1 + \frac{3}{4}R)^2 = AP^2 + (R_1 - \frac{5}{4}R)^2 = AP^2 + (O_1P - O_2A)^2 = O_1O_2^2$

Vậy $R_1 + 3R : 4 = O_1O_2$, hay (O_1) tiếp xúc với (O_2) , và ta có đ.p.c.m.

Nhận xét. Bài này tương đối khó, chỉ có 16 bạn gửi bài về tòa soạn, tất cả đều giải đúng. Đó là các bạn : *Vũ Văn Phong* (**Vĩnh phú**), 9a PTCS chuyên Vĩnh Tường), *Lương Thanh Hoài*, **Hà Tây**, 9 toán PTCS chuyên Hoài Đức), *Hoàng Tiến* (**Nam Hà**, lớp Lí 9 PTCS Năng khiếu Hải Hậu), *Nguyễn Thái Phú*, (**Hà Tĩnh**), 9 Toán, PTCS Năng khiếu Đức Thọ), *Vũ Trần Cương* (**Nam Hà**, 9 toán Trần Đăng Ninh), *Đào Mạnh Cường* (**Nghệ An**), 9T_A PTCS Phan Bội Châu), *Ngô Minh Đức* (**Nam Hà** T9 PTCS Xuân Thủy), *Nguyễn Huy Vũ* (**Ninh Bình**, 8 chuyên toán NK Nho Quan), *Nguyễn Hoàng Quân* (**Vĩnh Long**, 9T 2 PTCS Nguyễn Bình Khiêm), *Hồ Ngọc Nam* (**Quảng Ngãi**, 9T PTCS chuyên Mộ Đức), *Trần Tuấn Anh* (**Khánh Hòa**, 9 toán PTCS Lê Quý Đôn, Nha Trang), *Bùi Đức Giang* (**Hà Tây**, 9 PTCS chuyên Chương Mỹ), *Phan Hương Thu* (**Thái Bình**, 9T PTCS chuyên thị xã Thái Bình), *Nguyễn Tùng* (**Hà Nội**, 9CT PTCS Từ Liêm), *Nguyễn Thùy Giang* (**Hà Tĩnh**, 9A PTCS năng khiếu Đức Thọ), *Phạm Đình Quốc Hưng* (**Nam Hà**, 8 toán PTCS Trần Đăng Ninh).

DẶNG VIỄN

Bài T6/230 Xét số $\alpha = 1 - \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$

a) Tìm đa thức bậc ba có hệ số nguyên nhận số α là nghiệm.

b) Chứng minh rằng không tồn tại đa thức bậc nhất hoặc bậc hai có hệ số nguyên nhận α là nghiệm.

Lời giải : a) Ta có $\alpha(\sqrt[3]{2} + 1) = 2 + 1 = 3 \rightarrow \sqrt[3]{2}\alpha = 3 - \alpha \rightarrow 2\alpha^3 = (3 - \alpha)^3 = 27 - 27\alpha + 9\alpha^2 - \alpha^3 \rightarrow \alpha^3 - 3\alpha^2 + 9\alpha - 9 = 0$. Vậy α là nghiệm của $P(x) = x^3 - 3x^2 + 9x - 9 = 0$

b) Trước hết ta nhận thấy $P(x)$ không có nghiệm hữu tỷ. Thật vậy nếu β là nghiệm hữu tỷ của $P(x)$ thì $\beta \in \mathbb{Z}$ và β là ước của 9 tức là $\beta \in \{\pm 1, \pm 3, \pm 9\}$. Để kiểm tra thấy $P(\pm 1), P(\pm 3), P(\pm 9)$ đều khác không.

Như vậy $\alpha \notin \mathbb{Q}$ do đó α không là nghiệm của đa thức bậc nhất $ax + b$ ($a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}$). Giả sử tồn tại đa thức bậc 2 $Q(x)$ hệ số nguyên nhận α là nghiệm. Chia $P(x)$ cho $Q(x)$ ta được

$$P(x) = Q(x)H(x) + R(x)$$

Ta có : $P(\alpha) = Q(\alpha) = 0 \rightarrow R(\alpha) = 0$ vì bậc của $R < 2$ và R không là đa thức bậc nhất nên chỉ có thể $R(x)$ là đa thức không tức là $P(x)$ chia hết cho $Q(x)$. Nhưng khi đó $H(x)$ sẽ là đa thức bậc nhất có nghiệm hữu tỷ β . Suy ra $P(x)$ cũng có nghiệm hữu tỷ. Mâu thuẫn đó chứng minh bài toán.

Nhận xét : a) Mặc dù có nhiều bạn tham gia giải bài toán này nhưng khá nhiều lời giải không chính xác ở phần b). Các bạn thường mắc sai lầm ở hai điểm :

- Thừa nhận α là số vô tỷ coi như là mọi điều hiển nhiên.

- Từ điều kiện $a\sqrt[3]{4} + b\sqrt[3]{2} + c = 0$ ($a, b, c, \in \mathbb{Z}$) suy ra $a = b = c = 0$ mà không chứng minh. Trong khi đó mấu chốt của bài toán là chứng minh chính điều ấy.

b) Các bạn sau đây có lời giải đúng (tuy có hơi dài): **Trần Tuấn Anh**, 9, **Khánh Hòa**; **Lê Hồng Linh**, 9, **Ninh Bình**; **Nguyễn Ngọc Khánh** 12 **Thái Bình**, **Nguyễn Thị Hào**, 9, **Hà Bắc**; **Trần Phương**, 11, **Hà Nội**; **Trần Nam Dũng**, 11, **Nghệ An**; **Trần Nguyễn Thọ**, 9, **Hà Tĩnh**; **Hoàng Lê Quang**, 12, **Hải Phòng**; **Vũ Tuấn Anh**, 10, **Bắc Thái**; **Lê Mạnh Hà**, 12, **Quảng Bình**, **Trần Tất Đạt**, 9, **Hà Nội**.

DẶNG HÙNG THẮNG

Bài T7/230: Cho a, b, c là ba số dương; $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b+c}} + \sqrt[n]{\frac{b}{c+a}} + \sqrt[n]{\frac{c}{a+b}} > \frac{n}{n-1} \cdot \sqrt[n]{n-1}$$

Lời giải (của nhiều bạn): Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho n số dương: $\frac{(a+b)(n-1)}{c}$ và

$(n-1)$ số 1 ta có:

$$\sqrt[n]{\frac{(a+b)(n-1)}{c}} \leq \frac{(n-1)(a+b+c)}{nc} \Rightarrow \sqrt[n]{\frac{c}{a+b}} \geq \frac{n}{n-1} \cdot \sqrt[n]{n-1} \cdot \frac{c}{a+b+c} \quad (1)$$

Tương tự, ta cũng có:

$$\sqrt[n]{\frac{b}{c+a}} \geq \frac{n}{n-1} \cdot \sqrt[n]{n-1} \cdot \frac{b}{a+b+c} \quad (2)$$

$$\text{và } \sqrt[n]{\frac{a}{b+c}} \geq \frac{n}{n-1} \cdot \sqrt[n]{n-1} \cdot \frac{a}{a+b+c} \quad (3).$$

Cộng các bất đẳng thức (1), (2) và (3), về theo vế, ta được:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b+c}} + \sqrt[n]{\frac{b}{c+a}} + \sqrt[n]{\frac{c}{a+b}} > \frac{n}{n-1} \cdot \sqrt[n]{n-1} \quad (4).$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ dấu "=" xảy ra đồng thời ở (1), (2) và (3) $\Leftrightarrow (n-1)(a+b) = c, (n-1)(c+a) = b$ và $(n-1)(b+c) = a \Rightarrow 2(n-1)(a+b+c) = a+b+c \Rightarrow n = \frac{3}{2}$ (vì $a, b, c > 0$). Do $\frac{3}{2} \notin \mathbb{N}$ nên điều vừa nhận được cho thấy dấu "=" ở (4) không xảy ra và bởi thế ta có Đpcm.

Nhận xét: 1. Có nhiều cách vận dụng khác nhau bất đẳng thức (BĐT) Côsi để chứng minh (1). Dưới đây là danh sách các bạn có lời giải tốt:

Bến Tre: **Nguyễn Ngọc Hòa** (8¹ PTCS Mĩ Hóa) và **Nguyễn Hữu Phúc** (11A PTTH Bến Tre). **Vĩnh Long**: **Trần Như Nam** (12T, TH Chuyên Nguyễn Bình Khiêm). **Lâm Đồng**:

Phan Thanh Hải. (12T PTTH Thăng Long - Đà Lạt). **Đông Nai**: **Phạm Ngọc Huy** (9T Trường Nguyễn Bình Khiêm - Biên Hòa). **Quảng Nam - Đà Nẵng**: **Lê Ngọc Phong** (12A₂ THCB Nguyễn Duy Hiệu - Điện Bàn); **Hồ Lê Viết Trung**, **Phan Phú Đông**, **Lê Triệu Phong**, **Nguyễn Duy Lập**, **Hồ Vũ Quốc Vương**, **Bùi Việt Phương**, **Nguyễn Hoàng Minh Tuấn** và **Nguyễn Huỳnh Hải** (PTTH Lê Quý Đôn - Đà Nẵng), **Thừa Thiên Huế**: **Cao Thế Anh** (11 CT Quốc học Huế) và **Đinh Trung Hoàng** (11 CT ĐHTH Huế). **Quảng Bình**: **Nguyễn Hoa** và **Trần Đức Thuận** (THNK Quảng Bình). **Nghệ An**: **Nguyễn Nam Dũng**, **Đặng Đức Hạnh**, **Trương Xuân Thung**, **Nguyễn Thái Thọ**, **Nguyễn Thịnh** (11T, 12T PHTH Phan Bội Châu); **Lê Văn Biều**, **Phạm Tuấn Anh**, **Ngô Anh Tuấn**, **Hoàng Minh Hải**, **Nguyễn Xuân Tương** (Khối PTCT ĐHSPT Vinh). **Thanh Hóa**: **Nguyễn Văn Quang**, **Trương Minh Tuấn**, **Lê Văn Cường** (9T, 12T PTTH Lam Sơn) **Trương Cao Dũng**, **Lê Hoài Nam**, **Nguyễn Đình Trung** (11B₁, 12A₁ PTTH Bim Sơn) và **Hán Văn Thắng** (12A₆ THCB Đào Duy Từ). **Nam Hà**: **Hoàng Tiến** (9 Lí Trường NK Hải Hậu); **Phạm Ngọc Hưng**, **Phạm Thu Giang**, **Vũ Trần Cường** (9 toán THCS Trần Đăng Ninh) **Đồ Quốc Bảo**, **Nguyễn Huyền Trang**, **Bùi Quang Hải**, **Trần Đức Quyền** (PTTH Lê Hồng Phong). **Thái Bình**: **Trần Văn Hà**, **Hoàng Xuân Hương** (8T, 9T Trường chuyên Kiến Xương); **Lương Thu Hương** (9 toán); **Nguyễn Ngọc Khánh** (12 A PTTH chuyên Thái Bình). **Hải Phòng**: **Phạm Thu Hương**, **Đoàn Mạnh Hà**, **Hoàng Lê Quang** (10T, 12T PTTH Trần Phú). **Hải Hưng**: **Phạm Anh Đức**, **Mạc Đông Nghi**, **Phùng Đức Tuấn**, **Nguyễn Văn Luật**, **Nguyễn Thị Nhậm** (PTNK Hải Hưng). **Hà Nội**: **Trần Tất Đạt** (9A₁ THCS Chu Văn An), **Phạm Anh Thái** (11A₀ PTDL Lương Thế Vinh), **Nguyễn Xuân Long** (12A₂ PTTH Kim Liên); **Trần Phương**, **Trần Hải Sơn** (11T, 12T₁ PTTH Kim Liên); **Trần Phương**, **Trần Hải Sơn** (11T, 12T₁ PTTH Amsterdam). **Hà Bắc**: **Đào Ngọc Minh** (9T THCS Yên Dũng); **Nguyễn Tiến Mạnh**, **Vũ Duy Tuấn** (11A PTTH Ngô Sĩ Liên). **Vĩnh Phú**: **Phan Tiến Dũng** (9A₁ THCS chuyên và dân tộc nội trú huyện Sông Thao); **Vũ Mạnh Cường**, **Nguyễn Đức Minh**, **Trần Tân Nam**, **Nguyễn Hoàng Giáp** (9 T THCS chuyên Tam Đảo); **Vũ Mạnh Hùng**, **Nguyễn Minh Phương**. (PTTH Hùng Vương - Việt Trì). **Yên Bái**: **Vũ Ngũ Bình** (11A₁ PTTH chuyên Yên Bái). **DHQQ Hà Nội**: **Nguyễn Lan Anh**, **Đặng Hữu Minh**, **Cung Thái Sơn**, **Lê Hoài Phương**, **Phạm Quang Vinh**, **Cung Mai Loan**, **Lê Tuấn Anh**, (Khối PTCT ĐHKHTN). **DHQQ TP Hồ Chí**

Minh : Nguyễn Lê Lục, Lê Quang Năm (khối PTCT).

2. Xuất phát từ bài đã ra, một số bạn đã đề xuất và giải đúng một số bài toán khái quát. Trong số đó, bài toán do bạn Trần Nam Dũng (Nghệ An) đề xuất mang tính khái quát cao nhất. Bài toán đó như sau : Cho $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$; $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha < 1$. Cho m số thực dương a_1 ,

$a_2, \dots, a_m$. Đặt $S = \sum_{i=1}^m a_i$. Chứng minh rằng :

$$\sum_{i=1}^m \left(\frac{a_i}{S - a_i} \right)^\alpha \geq \frac{1}{1 - \alpha} \left(\frac{1 - \alpha}{\alpha} \right)^\alpha$$

và dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi có đồng thời : $a_1 = a_2 = \dots = a_m$ và $m(1 - \alpha) = 1$.

3. Dấu ">" ở BĐT của bài ra đã "kích động" một số bạn đi tìm các đánh giá chặt hơn cho vế trái của BDT đó. Theo hướng này, các bạn Lê Quang Năm, và Nguyễn Anh Hoa (11A PTTH Lê Hồng Phong - Nam Định) đã chứng minh được rằng :

$$S_n = \sqrt[n]{\frac{a}{b+c}} + \sqrt[n]{\frac{b}{c+a}} + \sqrt[n]{\frac{c}{a+b}} > 2$$

Với a, b, c, n là các số thỏa mãn giả thiết của bài ra.

Tuy nhiên, cũng với giả thiết như vậy đối với a, b, c, n , bạn Nguyễn Hoa (Quảng Bình) còn chứng minh được BDT mạnh hơn :

$$S_n \geq \frac{3 \cdot \sqrt[n]{2^{n-1}}}{2} \text{ và dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow a = b = c.$$

Cùng với Nguyễn Hoa, có hai bạn khác cũng phát hiện ra BDT trên, tuy nhiên các bạn lại chứng minh sai BDT đó.

4. Có 11 bạn (trên tổng số 106 bạn gửi lời giải tới tòa soạn) cho lời giải sai, do các bạn đã mắc phải một trong các sai lầm sau :

- . Hiểu sai BDT Côsi, BDT Trébusep.
- . Đặt sai bài toán khái quát
- . Tính đạo hàm sai
- . Không nắm vững các tính chất cơ bản của BDT, v.v...

NGUYỄN KHẮC MINH

Bài T8/230. Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện $|f(x) - f(q)| \leq 5(x - q)^2$ $\forall x \in \mathbb{Q}$

Lời giải : (Của đa số các bạn). Với mọi $x, x_0 \in \mathbb{R}$ ($x \neq x_0$), chọn số hữu tỷ q nằm ở giữa x và x_0 thì :

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |f(x) - f(q) + f(q) - f(x_0)| \leq \\ &|f(x) - f(q)| + |f(q) - f(x_0)| \leq 5(x - q)^2 + 5(q - x_0)^2 \leq 5(x - x_0)^2 + 5(x - x_0)^2 = 10(x - x_0)^2. (*) \end{aligned}$$

Vậy nên $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x) - f(x_0)| = 0$ hay

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Suy ra $f(x)$ là hàm số liên tục tại mọi $x_0 \in \mathbb{R}$. Mặt khác, từ (*) ta nhận được

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| \leq 10 |x - x_0|$$

$$\text{Suy ra } \lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| = 0 \text{ hay } f'(x_0) = 0$$

$\forall x_0 \in \mathbb{R}$

Do $f(x)$ liên tục và có $f'(x) = 0 \forall x \in \mathbb{R}$, ta suy ra $f(x) = c, \forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại, ta thấy hàm này thỏa mãn điều kiện bài ra.

Nhận xét. Các bạn sau đây có lời giải tốt.

Hà Nội : Trần Phương, Cung thị Mai Loan, Lê Tuấn Anh,

Nam Hà : Bùi Quang Hào, Trần Đức Quỳnh, Nguyễn Anh Hoa,

Hải Hưng : Phạm Anh Đức, Nguyễn Thị Nhận, Phùng Đức Tuấn, Nguyễn Văn Luật, **Lâm Đồng :** Phan Thanh Hải,

Nghệ An : Trần Nam Dũng, Lê Văn Biên, Ngô Anh Tuấn, Phạm Tuấn Anh, Lê Hồng Hà,

Quảng Bình : Trần Đức Thuận, Phạm Hồng Thái, Nguyễn Minh Tuấn, Trần Đức Thuận, Trưng Vĩnh Lâm.

Đà Nẵng : Phan Anh Huy, Hồ Lê Viết Trung, Nguyễn Ngọc Hải, Lê Ngọc Phong, Phan Phú Đông, Lê Triệu Phong, Hồ Vũ Quốc Vương, Nguyễn Duy Lập, Bùi Việt Phương.

TP Hồ Chí Minh : Lê Quang Mẫn, Nguyễn Lê Lục,

Vĩnh Phú : Nguyễn Minh Phương,

Bắc Thái : Nguyễn Duy Phương,

Thanh Hóa : Trương Cao Dũng, Nguyễn Văn Quang, Hán Văn Thắng, Lưu Tường Huy,

Quảng Ngãi : Nguyễn Ngọc Phúc

Hà Bắc : Nguyễn Tiến Mạnh, Vũ Duy Tuấn, Phạm Việt Ngọc,

Hải Phòng : Hà Duy Hưng,

Huế : Đoàn Xuân Vinh

Trà Vinh : Trần Huỳnh Thế Khanh.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T9/230. Gọi R, r lần lượt là bán kính các đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của một tam giác ABC. Chứng minh rằng nếu có hệ thức $6r = R(\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C + 2\sin A \sin B + 2\sin B \sin C + 2\sin C \sin A), (*)$ thì tam giác ABC là đều.

Lại vì M, N và $P \in \Delta$ nên $\exists! \lambda$ sao cho :
 $\vec{NM} = \lambda \vec{NP}$, hay là :

$$\vec{AM} - \vec{AN} = \lambda (\vec{AP} - \vec{AN}); \quad (2)$$

Thay $\vec{AM}, \vec{AN}$ và $\vec{AP}$ bởi các biểu thức (1) và (2) rồi rút gọn, ta được :

$$\begin{aligned} & \frac{x}{1-x} \vec{a} + \frac{1}{k-1} \vec{b} + \left(\frac{x}{1-x} + \frac{k}{k-1} \right) \vec{c} = \\ & = \frac{\lambda}{1-x} \vec{a} + \lambda \frac{y}{1-y} \vec{b} + \lambda \left(\frac{x}{1-x} + \frac{y}{y-1} \right) \vec{c}. \end{aligned}$$

Vì $\vec{a}, \vec{b}$ và $\vec{c}$ không đồng phẳng nên ta được :

$$\begin{cases} \frac{\lambda}{1-x} = \frac{x}{1-x} \\ \lambda \frac{y}{1-y} = \frac{1}{k-1} \\ \lambda \left(\frac{x}{1-x} + \frac{y}{y-1} \right) = \frac{x}{1-x} + \frac{k}{k-1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda = x = \frac{1+k}{1-k} \\ y = -\frac{1}{k} \end{cases}$$

Ta đi đến kết luận : Qua điểm M [trên đường thẳng AB' xác định bởi $(AB', M) = MA : MB' = k$ ($0 \neq k < \infty, k \neq 1$)] có duy nhất một đường thẳng Δ cắt cả ba đường thẳng AB', BC' và CD' lần lượt ở các điểm M, N và P sao cho

$$x = (BC', N) = \overline{NB} : \overline{NC'} = \frac{1+k}{1-k}; y = (CD', P) = \overline{PC} : \overline{PD'} = -\frac{1}{k}, \text{ đồng thời ta có : } \vec{NM} = \frac{1+k}{1-k} \vec{NP},$$

$$\text{tức là } (MP, N) = \overline{NM} : \overline{NP} = \frac{1+k}{1-k} = (BC', N) = x.$$

Để thấy rằng đường thẳng Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng $(BC'M)$ và $(CD'M)$.

b) Chứng minh tương tự, qua điểm P trên đường thẳng CD' [xác định bởi $(CD', P) = y = -1/k$] có duy nhất một đường thẳng Δ' cắt cả ba đường thẳng CD', DA' và AB' lần lượt ở các điểm P, Q và M' sao cho nếu $(CD', P) = y$ thì

$$(DA', Q) = \overline{QD} : \overline{QA'} = \frac{1+y}{1-y} \text{ và } (AB', M') =$$

$$= \overline{M'A} : \overline{M'B'} = -\frac{1}{y}, \text{ đồng thời ta có : } (PM', Q)$$

$$= (DA', Q). \text{ Thay } y = -\frac{1}{k}, \text{ ta được : } (AB', M') =$$

$$k, (DA', Q) = \frac{k-1}{k+1} \left(= -\frac{1}{x} \right) \text{ và do đó } M' \equiv$$

M , tức là Δ' trùng với Δ . Ta đi đến kết luận : Nếu một đường thẳng Δ nào đã cắt ba trong bốn đường thẳng AB', BC', CD' và DA' thì cũng cắt đường thẳng còn lại, đồng thời với mỗi điểm M trên (AB') ($M \neq A, M \neq B'$) có duy nhất một đường thẳng cắt cả bốn đường thẳng nói trên.

Cho M thay đổi trên (AB') , tức là cho k thay đổi ($k \neq 0, \neq 1, \neq \infty$) ta được vô số đường thẳng cắt cả bốn đường thẳng AB', BC', CD' và DA' . Lại vì $(PM, Q) = (DA', Q) = -\frac{1}{x}$ nên $(MP, Q) = \frac{1}{(PM, Q)} = -x$ và do đó $(MPNQ) = (MP, N) : (MP, Q) = -1$, tức là bốn giao điểm M, N, P, Q của một đường thẳng cắt cả bốn đường thẳng AB', CD', BC' và DA' lập thành một hàng điểm điều hòa.

Nhận xét : 1^o) Nhiều bạn lập luận lời giải câu b) không chặt chẽ, không rõ ràng suy luận bằng tương tự hoặc lại tính toán dài dòng, không cần thiết. Bạn Mạnh cũng rơi vào nhận xét này. Rất tiếc, có một bạn ở Vĩnh Long đã giải sai bài này.

2^o) Các bạn sau đây có lời giải tương đối tốt : Vũ Mạnh Hùng, 11 chuyên Hùng Vương, Vĩnh Phú; Nguyễn Anh Hoa, 11A Lê Hồng Phong, Nguyễn Xuân Quang, THPT Trần Hưng Đạo, Nam Hà; Phạm Việt Ngọc, 11A Hà Bắc; Lê Văn Cường, 11, Hán Văn Thám, 12, Lê Hoài Nam, Thanh Hóa; Nguyễn Thái Thọ, Đặng Đức Hạnh, Nguyễn Thịnh, Trần Nam Dũng, Nguyễn Xuân Tương, Nguyễn Đình Đức, Nghệ An; Nguyễn Hoa, Trần Đức Thuận, Lê Mạnh Hà, Nguyễn Trung Kiên, Trương Vĩnh Lân, Quảng Bình; Đoàn Xuân Vinh, Cao Thế Anh, Huế; Nguyễn Hoàng Minh Tuấn, Phan Phú Đông, Nguyễn Phước Hiệp QN-ĐN; Nguyễn Xuân Hà, Quảng Ngãi; Lê Quang Năm; TP HCM; Phan Thanh Hải, Lâm Đồng.

NGUYỄN DẰNG PHÁT.

Bài L1/230. Ba quả cầu khối lượng m_0, m_1, m_2 bằng nhau có thể trượt không ma sát trên sợi dây xuyên tâm và căng ngang. m_1 và m_2



được nối với hai lò xo có độ cứng tương ứng k_1, k_2 như hình vẽ. Ở vị trí cân bằng, m_1 cách m_2 một khoảng l , khối lượng của các lò xo nhỏ không đáng kể, quả cầu m_0 có thể ghép hoặc tách với m_1 . Ban đầu, ghép m_0 với m_1 rồi nới lại một đoạn a thả tay ra, khi m_0 và m_1 tới vị trí cân bằng thì m_0 tách ra chuyển động theo dây tới va chạm vào m_2 . Coi va chạm, ghép, tách của m_0 đối với m_1 và m_2 là hoàn toàn đàn hồi.

1. Tìm mối quan hệ giữa k_1, k_2, l và a để sau khi va chạm với m_2, m_0 quay trở về va chạm

đúng tại điểm cân bằng khi m_1 dao động được 1 chu kỳ. 2. Suy luận tiếp cho quá trình tiếp theo.

Bỏ qua kích thước của các quả cầu.

Hướng dẫn giải. Áp dụng các định luật bảo toàn động lượng và năng lượng. 1) Khi tới vị trí cân bằng hệ $m_1 + m_0$ có vận tốc v cực đại.

$$v = a \sqrt{\frac{k_1}{2m}} \quad (\text{chú ý } m_1 = m_2 = m_0 = m);$$

sau đó m_1 bắt đầu dao động còn m_0 trượt về phía m_2 với vận tốc v . Sau khi va chạm với m_2 , m_0 đứng yên ($v_0 = 0$) còn $v_2 = v$; tiếp theo m_2 bắt đầu chuyển động một nửa chu kỳ T_2 để quay lại va chạm với m_0 . Sau lần va chạm thứ hai này m_2 đứng yên còn m_0 có vận tốc v trượt về để va chạm với m_1 . Theo đề bài:

$$T_1 = \frac{1}{2} T_2 + \frac{2l}{v}$$

$$\rightarrow \sqrt{\frac{k_1}{k_2}} = \frac{2\pi a - 2\sqrt{2}l}{\pi a}$$

2) Sau khi va chạm với m_1 , m_0 và m_1 đều bật ngược trở lại với vận tốc $v \rightarrow m_0$ là trượt về phía m_2 theo quy luật cũ, còn m_1 bắt đầu dao động; sau khi m_1 thực hiện được 1 chu kỳ thì m_0 vừa vận trở về sau hai lần va chạm với m_2 , khi đó m_0 và m_1 ghép với nhau, bắt đầu chuyển động với vận tốc v và nén lò xo k_1 một đoạn a rồi dừng lại...

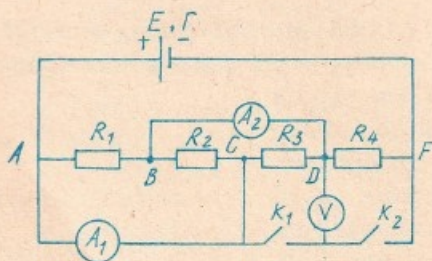
Chu kỳ T do cả hệ thực hiện sẽ bằng

$$T = \frac{1}{2} T_{1,0} + 2T_1 = (4 + \sqrt{2}) \pi \sqrt{\frac{m}{k_1}}$$

Nhận xét: Chỉ có em Trần Mai Sơn Hà (11 chuyên lí, PTTH năng khiếu, Quảng Bình) có lời giải đúng và đầy đủ.

MAI ANH

Bài L2/230. Cho mạch điện như hình vẽ, trong đó nguồn có suất điện động E , điện trở



trong $r = 2\Omega$; các điện trở $R_1 = 80\Omega$; $R_2 = 40\Omega$, $R_3 = 26,67\Omega$ (lấy $26,67 = \frac{80}{3}$), $R_4 = 8\Omega$.

Bỏ qua điện trở các ampe kế, các dây nối và các khóa K_1, K_2 . Khi K_1 đóng, K_2 ngắt vôn kế chỉ

30V. Khi K_1 ngắt, K_2 đóng vôn kế chỉ 18,2V (Lấy $18,2 = \frac{200}{22}$). Tìm số chỉ của các ampe kế trong hai trường hợp trên.

Hướng dẫn giải. Vẽ lại mạch điện trong mỗi trường hợp.

- Khi K_1 đóng K_2 ngắt, sơ đồ mắc mạch ngoài là:

$$\{R_1 // R_2 // R_3\} \text{ nối tiếp } R_4. \text{ Suy ra}$$

$$R_{AB} = \frac{40R_v}{40 + 3R_v} \quad \text{và} \quad I_{AB} = \frac{U_{AB}}{R_{AB}} = \frac{9}{4} + \frac{30}{R_v} \rightarrow$$

$$E = U_{AB} + I_{AB}(R_4 + r) = \frac{105}{2} + \frac{300}{R_v} \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác } I_1 = \frac{U_{AB}}{R_1} = 0,375A; I_2 = \frac{U_{AB}}{R_2} = 0,75A$$

$$\rightarrow I_{A2} = I_1 + I_2 = 1,12A \text{ và } I_{A1} = I_{AB} - I_1. \quad (2)$$

- Khi K_1 ngắt, K_2 đóng, sơ đồ mắc mạch ngoài là:

$$(R_1 // R_2 // R_3) \text{ nối tiếp } (R_4 // V). \text{ Suy ra: } R'_{AB} = \frac{40}{3} \Omega$$

$$R_{BF} = \frac{8R_v}{8 + R_v}; I = \frac{U_{BF}}{R_{BF}} = \frac{25(8 + R_v)}{11R_v},$$

$$E = U_{BF} + I(R'_{AB} + r) = \frac{1750}{33} + \frac{9200}{33R_v}, \quad (3)$$

$$U_{AB} = IR'_{AB} = \frac{1000(8 + R_v)}{33R_v}$$

$$\rightarrow I_1 = \frac{U_{AB}}{R_1}, I_2 = 2I_1.$$

Từ (1) và (3) suy ra $R_v = 40\Omega$ và, do đó $I = 2,73A$; $I_1 = 0,45A$; $I_2 = 0,9A$ Từ đó $I_{A1} = I - I_1 = 2,28A$; $I_{A2} = I_1 + I_2 = 1,36A$

$$\text{Đồng thời, rút ra } I_{AB} = \frac{9}{4} + \frac{30}{R_v} = 3A \text{ và}$$

$$I_{A1} = I_{AB} - I_1 = 2,62A.$$

Nhận xét. Các em có lời giải đúng: Nguyễn Trung Dũng, 9 lí, Trần Đăng Ninh, Nam Định; Lê Xuân Dũng, 10A, Lương Đắc Bằng, Hoàng Hóa, Thanh Hóa; Chu Thế Sơn, Lí 9, Năng khiếu Hải Hậu, Nam Hà; Nguyễn Thanh Tùng, 9 Lí 9, Năng khiếu Vũ Thư, Thái Bình; Phạm Lan Chi, 9/2, Trần Hưng Đạo, Đà Nẵng; Hoàng Tuấn Vinh; 10F, PTTH Lam Sơn, Thanh Hóa; Phạm Quốc Hùng, 9A, PTTH; Nguyễn Hiến, Điện Bàn, Quảng Nam - Đà Nẵng.

MAI ANH



ĐỀ RA KÌ NÀY

CÁC LỚP THCS

Bài T1/234 : Tìm tất cả các số tự nhiên có ba chữ số abc trong hệ đếm thập phân sao cho :

$$\begin{cases} \overline{abc} = n^2 - 1 \\ \overline{cba} = (n-2)^2 \end{cases}$$

với n là một số nguyên lớn hơn 2

LĂNG LÂM HUY HOÀNG
(Minh Hải)

Bài T2/234 : Cho 6 số a, b, c, x, y, z thỏa :

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases} \quad (a > 0, b > 0, c > 0)$$

Chứng minh rằng $a(x+b) + b(y+c) + c(z+a) < 1$

ĐỖ THANH HÂN
(Minh Hải)

Bài T3/234 : Giải bất phương trình :

$$\frac{x}{x+1} + \frac{2x}{(x+1)(2x+1)} + \dots + \frac{1996x}{(x+1)(2x+1) \dots (1996x+1)} > 1$$

MINH TRẦN
(Thừa Thiên - Huế)

Bài T4/234 : Cho nửa đường tròn đường kính BC trên đó có một điểm A di động. Gọi D là chân đường cao AD của tam giác ABC và M, N lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ABD, ACD . Chứng minh rằng đường vuông góc với MN kẻ từ A luôn luôn đi qua một điểm cố định

TRẦN DUY HINH
(Bình Định)

Bài T5/234 : Cho tam giác ABC với điểm M ở bên trong. Chứng minh rằng : $MA \cdot BC + MB \cdot CA + MC \cdot BA < 2 \max \{ AB \cdot AC, BC \cdot BA, CA \cdot CB \}$

NGUYỄN MINH HÀ
(Hải Phòng)

CÁC LỚP THPT

Bài T6/234 : Xét các số a, b, x, y thỏa mãn

Các điều kiện : $0 < b \leq a \leq 4$

$$a + b \leq 7$$

$$2 \leq x \leq 3 \leq y$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{2x + \frac{1}{x} + y + \frac{2}{y}}{a^2 + b^2}$$

HUỖNH VĂN TRỌNG
(Bình Định)

Bài T7/234 : Cho các số thực a, b, c , và số nguyên $n > 0$ thỏa mãn hệ thức $c = \frac{-6(a+b)}{5(n+2)}$.

Chứng minh rằng phương trình :

$$a \sin^n x + b \cos^n x + c \sin x + c = 0 \text{ có nghiệm trong khoảng } \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$$

ĐOÀN THẾ PHIỆT
(Nam Hà)

Bài T8/234 : Xác định m để giá trị nhỏ nhất của hàm số :

$$f(x, y, z) = (x - y + mz + 1)^2 + (x + (m+1)y - 2z + 2)^2 + (2x + 2y + (m-4)z + 1)^2$$
 là lớn nhất.

HOÀNG HOA TRẠI
(Quảng Ngãi)

Bài T9/234 : Chứng minh rằng nếu độ dài các cạnh a, b, c và các bán kính r, R của các đường tròn nội, ngoại tiếp một tam giác thỏa mãn hệ thức sau đây :

$$\frac{a^3}{br + cR} + \frac{b^3}{cr + aR} + \frac{c^3}{ar + bR} = \frac{2(a+b+c)^2}{9R}$$
 thì tam giác đó là đều.

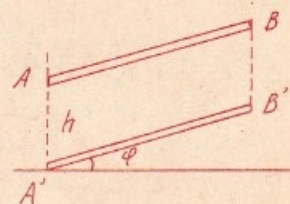
NGUYỄN BÁ ĐĂNG
(Hải Hưng)

Bài T10/234 : Cho một góc tam diện với các góc phẳng ở đỉnh không phải là góc vuông. Qua đỉnh ta dựng ba đường thẳng mỗi đường vuông góc với một cạnh và nằm trong mặt phẳng chứa mặt đối diện với cạnh đó. Chứng minh rằng các đường thẳng dựng được cùng nằm trong một mặt phẳng.

VŨ NHẬT KIỂU
(Thái Bình)

CÁC ĐỀ VẬT LÝ.

Bài L1/234 : Một thanh đồng chất chiều dài $2l$ đặt nghiêng so với phương nằm ngang một góc φ rồi không quay từ độ cao nào đó so với mặt bàn nằm ngang và va chạm với mặt bàn. Va chạm được coi là đàn hồi. Tìm vận tốc của khối tâm và vận tốc góc quay ngay sau khi va chạm với bàn



TRƯƠNG VINH DIÊN
(Quảng Bình)

(xem tiếp trang 13)

Problems in this issue



FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS.

T1/234. Find all 3-digit whole numbers (in decimal system) abc such that :

$$\begin{cases} \overline{abc} = n^2 - 1 \\ \overline{cba} = (n - 2)^2 \end{cases}$$

where n is an integer greater than 2.

T2/234. Six numbers a, b, c, x, y, z satisfy :

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases} \quad (a > 0, b > 0, c > 0)$$

Prove that

$$a(x + b) + b(y + c) + c(z + a) < 1.$$

T3/234. Solve the inequation

$$\frac{x}{x+1} + \frac{2x}{(x+1)(2x+1)} + \dots + \frac{1996x}{(x+1)(2x+1) \dots (1996x+1)} > 1.$$

T4/234. A point A moves on a semi-circle with diameter BC . Let D be the orthogonal projection of A on BC and M, N be respectively the centers of the incircles of the triangles ABD, ACD . Prove that the line drawn from A , orthogonal to MN , passes through a fixed point.

T5/234. M is a point inside the triangle ABC . Prove that

$$MA \cdot BC + MB \cdot CA + MC \cdot BA < 2 \max \{ AB \cdot AC, BC \cdot BA, CA \cdot CB \}$$

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS.

T6/234. The numbers a, b, x, y satisfy the conditions :

$$\begin{cases} 0 < b \leq a \leq 4 \\ a + b \leq 7 \\ 2 \leq x \leq 3 \leq y \end{cases}$$

Find the least value of the expression

$$P = \frac{2x + \frac{1}{x} + y + \frac{2}{y}}{a^2 + b^2}.$$

T7/234. The real numbers a, b, c and the integer $n > 0$ satisfy the relation

$$c = \frac{-6(a+b)}{5(n+2)}.$$

Prove that the equation

$$a \sin^n x + b \cos^n x + c \sin x + c = 0$$

has a root in the interval $(0, \frac{\pi}{2})$

T8/234. Determine m such that the least value of the function

$$f(x, y, z) = (x - y + mz + 1)^2 + (x + (m + 1)y - 2z + 2)^2 + (2x + 2y + (m - 4)z + 1)^2$$

is greatest.

T9/234. Prove that if the sides a, b, c and the radii r, R of the incircle and the circumcircle of a triangle satisfy the relation

$$\frac{a^3}{br + cR} + \frac{b^3}{cr + aR} + \frac{c^3}{ar + bR} + \frac{2(a + b + c)^2}{9R}$$

then the triangle is equilateral.

T10/234. Let be given a trihedral, the angles of the faces at the vertex are not right. Through the vertex, in each face, draw the line orthogonal to the opposite edge. Prove that the three drawn lines are coplanar.

Tính chất dãy các tỉ số bằng nhau

Trong sách lớp 7 trang 57, 58 ta có :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{a - c + e}{b - d + f}$$

- Thầy : Qua tính chất trên, các em hãy chỉ ra một số ví dụ cụ thể về dãy các tỉ số bằng nhau ?

$$\text{- Trò A : } \frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8} = \frac{1 - 2 + 4}{2 - 4 + 8}$$

$$\text{- Trò B : } \frac{1}{2} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{1 + 3 - 4}{2 + 6 - 8}$$

ỐNG KÍNH CẢI CÁCH DẠY VÀ HỌC TOÁN

- Trò C : Thưa thầy, trong trường hợp kết quả của bạn B đã nêu, em thấy kì cục vì gặp phân số $\frac{0}{0}$

- Thầy : ...

Lời bàn : Thấy lúng túng là phải, vì trong tính chất của dãy các tỉ số bằng nhau, chỉ ngầm hiểu làm các phép tính cộng, trừ tương ứng ở tử và mẫu thế nào để cho phân số có nghĩa (mẫu số $\neq 0$) nhưng SGK lại không ghi chú cho trường hợp này. Xin các tác giả SGK Đại số 7 có ý kiến.

HUỖNH VĂN TRỌNG
Bình Định

Tìm hiểu sâu thêm toán học phổ thông

ĐIỂM TORICELLI CỦA TỨ DIỆN

NGUYỄN MINH HÀ

Hải Phòng

Trong hình học phẳng có một bài toán kinh điển.

Bài toán 1 : Cho tam giác ABC , hãy tìm trên mặt phẳng (ABC) điểm M sao cho tổng $(MA + MB + MC)$ nhỏ nhất.

Bài toán 1 đã được giải bởi Toricelli, nhà toán học người Ý.

Có lẽ cũng từ thời Toricelli người ta đã quan tâm tới hai bài toán sau.

Bài toán 2 : Cho tam giác ABC và ba số dương x, y, z , hãy tìm trên mặt phẳng (ABC) điểm M sao cho tổng $(xMA + yMB + zMC)$ nhỏ nhất.

Bài toán 3 : Cho tứ diện $ABCD$, hãy tìm trong không gian điểm M sao cho tổng $(MA + MB + MC + MD)$ nhỏ nhất.

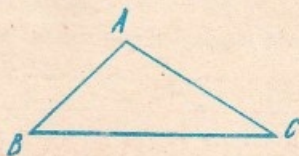
Trong báo "Toán học và tuổi trẻ" số 9/1994 tôi đã đưa ra lời giải hoàn chỉnh cho bài toán 2.

Kĩ thuật cơ bản trong lời giải này, xét cho cùng chính là sự phát triển trọn vẹn kĩ thuật mà Toricelli đã dùng để giải bài toán 1. Thật đáng tiếc, kĩ thuật này không còn hiệu lực để giải bài toán 3. Vì vậy, muốn giải bài toán 3, trước hết ta cần giải bài toán 1 theo một cách mới với một kĩ thuật hoàn toàn mới.

A - LỜI GIẢI MỚI CỦA BÀI TOÁN 1 :

1) Nếu ΔABC có một góc không nhỏ hơn 120°

Chẳng hạn $\hat{A} \geq 120^\circ$ (h.1)



Hình 1

Khi đó $\left| \frac{\vec{AB}}{AB} + \frac{\vec{AC}}{AC} \right| \leq 1$

$\Rightarrow$ với mọi M ta có :

$$MA + \vec{MA} \left(\frac{\vec{AB}}{AB} + \frac{\vec{AC}}{AC} \right) \geq 0$$

Từ đó, với mọi M ta có đánh giá sau :

$$\begin{aligned} MA + MB + MC &= MA + \frac{MB \cdot AB}{AB} + \frac{MC \cdot AC}{AC} \\ &\geq MA + \frac{\vec{MB} \cdot \vec{AB}}{AB} + \frac{\vec{MC} \cdot \vec{AC}}{AC} = MA + \\ &+ \frac{(\vec{MA} + \vec{AB}) \cdot \vec{AB}}{AB} + \frac{(\vec{MA} + \vec{AC}) \cdot \vec{AC}}{AC} \\ &= MA + \vec{MA} \left(\frac{\vec{AB}}{AB} + \frac{\vec{AC}}{AC} \right) + AB + AC \geq AB + AC \end{aligned}$$

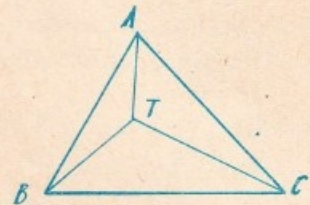
12

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow M$ trùng A .

Vậy tổng $(MA + MB + MC)$ nhỏ nhất khi M trùng A .

2) Nếu ΔABC không có góc nào lớn hơn hoặc bằng 120° (h.2)

Khi đó, trong tam giác ABC tồn tại (duy nhất) điểm T sao cho;



Hình 2

$$\widehat{BTC} = \widehat{CTA} = \widehat{ATB} = 120^\circ$$

$$\text{Để thấy: } \frac{\vec{TA}}{TA} + \frac{\vec{TB}}{TB} + \frac{\vec{TC}}{TC} = \vec{0}$$

Từ đó, với mọi M ta có đánh giá sau :

$$\begin{aligned} MA + MB + MC &= \frac{MA \cdot TA}{TA} + \frac{MB \cdot TB}{TB} + \frac{MC \cdot TC}{TC} \\ &+ \frac{\vec{MC} \cdot \vec{TC}}{TC} \geq \frac{\vec{MA} \cdot \vec{TA}}{TA} + \frac{\vec{MB} \cdot \vec{TB}}{TB} + \frac{\vec{MC} \cdot \vec{TC}}{TC} \\ &= \frac{(\vec{MT} + \vec{TA}) \cdot \vec{TA}}{TA} + \frac{(\vec{MT} + \vec{TB}) \cdot \vec{TB}}{TB} + \frac{(\vec{MT} + \vec{TC}) \cdot \vec{TC}}{TC} \\ &= \vec{MT} \left(\frac{\vec{TA}}{TA} + \frac{\vec{TB}}{TB} + \frac{\vec{TC}}{TC} \right) + TA + TB + TC \\ &= TA + TB + TC \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow M$ trùng T

Vậy : Tổng $(MA + MB + MC)$ nhỏ nhất khi M trùng T .

Điểm T được gọi là điểm Toricelli của tam giác ABC .

Bài toán 1 đã được giải quyết. Kết luận cụ thể xin dành cho bạn đọc.

Lời giải trên khá ngắn gọn. Nhưng điều quan trọng hơn là chất đại số rất cao của nó. Nhờ nó, tôi đã tìm được lời giải của bài toán 3. Do khuôn khổ có hạn của bài viết, tôi chỉ giới thiệu một cách sơ lược lời giải này.

B - LỜI GIẢI SƠ LƯỢC CỦA BÀI TOÁN 3 :

$$\text{1) Nếu } \left[\begin{aligned} &\left| \frac{\vec{AB}}{AB} + \frac{\vec{AC}}{AC} + \frac{\vec{AD}}{AD} \right| \leq 1 \\ &\left| \frac{\vec{BC}}{BC} + \frac{\vec{BD}}{BD} + \frac{\vec{BA}}{BA} \right| \leq 1 \\ &\left| \frac{\vec{CD}}{CD} + \frac{\vec{CA}}{CA} + \frac{\vec{CB}}{CB} \right| \leq 1 \\ &\left| \frac{\vec{DA}}{DA} + \frac{\vec{DB}}{DB} + \frac{\vec{DC}}{DC} \right| \leq 1 \end{aligned} \right. , \text{Chẳng}$$

$$\text{hạn } \left| \frac{\vec{AB}}{AC} + \frac{\vec{AC}}{AC} + \frac{\vec{AD}}{AD} \right| \leq 1$$

Khi đó với mọi M ta có :

$$MA + \vec{MA} \left(\frac{\vec{AB}}{AB} + \frac{\vec{AC}}{AC} + \frac{\vec{AD}}{AD} \right) \geq 0.$$

Từ đó, với mọi M ta có đánh giá sau :

$$\begin{aligned} MA + MB + MC + MD &= MA + \frac{MB \cdot AB}{AB} + \frac{MC \cdot AC}{AC} + \frac{MD \cdot AD}{AD} \\ &\geq MA + \frac{\vec{MB} \cdot \vec{AB}}{AB} + \frac{\vec{MC} \cdot \vec{AC}}{AC} + \frac{\vec{MD} \cdot \vec{AD}}{AD} \\ &= MA + \frac{(\vec{MA} + \vec{AB}) \cdot \vec{AB}}{AB} + \frac{(\vec{MA} + \vec{AC}) \cdot \vec{AC}}{AC} + \frac{(\vec{MA} + \vec{AD}) \cdot \vec{AD}}{AD} \\ &= MA + \vec{MA} \left(\frac{\vec{AB}}{AB} + \frac{\vec{AC}}{AC} + \frac{\vec{AD}}{AD} \right) + AB + AC + AD = AB + AC + AD \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow M$ trùng A .

Vậy : Tổng $(MA + MB + MC + MD)$ nhỏ nhất khi M trùng A .

$$2) \text{ Nếu } \begin{cases} \left| \frac{\vec{AB}}{AB} + \frac{\vec{AC}}{AC} + \frac{\vec{AD}}{AD} \right| > 1 \\ \left| \frac{\vec{BC}}{BC} + \frac{\vec{BD}}{BD} + \frac{\vec{BA}}{BA} \right| > 1 \\ \left| \frac{\vec{CD}}{CD} + \frac{\vec{CA}}{CA} + \frac{\vec{CB}}{CB} \right| > 1 \\ \left| \frac{\vec{DA}}{DA} + \frac{\vec{DB}}{DB} + \frac{\vec{DC}}{DC} \right| > 1 \end{cases}$$

Để giải bài toán trong trường hợp này, ta cần có ba bổ đề. Tôi chỉ phát biểu mà không chứng minh chúng.

Bổ đề 1: Cho tứ diện $ABCD$ nội tiếp mặt cầu (O) bán kính bằng 1 và O nằm trong (có thể nằm trên mặt, nhưng không nằm trên cạnh) của tứ diện;

$$\text{Đặt } \begin{cases} \vec{\alpha}_1 = \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} \\ \vec{\alpha}_2 = \vec{OC} + \vec{OD} + \vec{OA} \\ \vec{\alpha}_3 = \vec{OD} + \vec{OA} + \vec{OB} \\ \vec{\alpha}_4 = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} \end{cases}$$

Khi đó trong bốn số $|\vec{\alpha}_1|, |\vec{\alpha}_2|, |\vec{\alpha}_3|, |\vec{\alpha}_4|$ nếu có một số lớn hơn 1 thì cũng phải có một số nhỏ hơn 1.

Bổ đề 2: Cho tứ diện $ABCD$, M là một điểm thay đổi trong tứ diện (M khác A, B, C, D). Thế thì tổng $(MA + MB + MC + MD)$ không thể nhận giá trị nhỏ nhất khi M thuộc cạnh tứ diện.

Bổ đề 3: Cho tứ diện $ABCD$ và điểm O nằm trong tứ diện. Khi đó, hai điều kiện sau là tương đương :

$$a) \frac{\vec{OA}}{OA} + \frac{\vec{OB}}{OB} + \frac{\vec{OC}}{OC} + \frac{\vec{OD}}{OD} = \vec{0}$$

$$b) \angle AOB = \angle COD; \angle AOC = \angle DOB; \angle AOD = \angle BOC$$

Nhờ các bổ đề 1 và 2 ta chứng minh được rằng ; trong tứ diện $ABCD$ tồn tại (duy nhất)

$$\text{điểm } T \text{ có tính chất : } \frac{TA}{TA} + \frac{TB}{TB} + \frac{TC}{TC} + \frac{TD}{TD} = 0$$

Từ đó, với mọi M ta có đánh giá sau :

$$\begin{aligned} MA + MB + MC + MD &= \frac{MA \cdot TA}{TA} + \frac{MB \cdot TB}{TB} + \frac{MC \cdot TC}{TC} + \frac{MD \cdot TD}{TD} \\ &\geq \frac{\vec{MA} \cdot \vec{TA}}{TA} + \frac{\vec{MB} \cdot \vec{TB}}{TB} + \frac{\vec{MC} \cdot \vec{TC}}{TC} + \frac{\vec{MD} \cdot \vec{TD}}{TD} \\ &= \frac{(\vec{MT} + \vec{TA}) \cdot \vec{TA}}{TA} + \frac{(\vec{MT} + \vec{TB}) \cdot \vec{TB}}{TB} + \frac{(\vec{MT} + \vec{TC}) \cdot \vec{TC}}{TC} + \frac{(\vec{MT} + \vec{TD}) \cdot \vec{TD}}{TD} \\ &= \vec{MT} \left(\frac{\vec{TA}}{TA} + \frac{\vec{TB}}{TB} + \frac{\vec{TC}}{TC} + \frac{\vec{TD}}{TD} \right) + TA + TB + TC + TD \\ &= TA + TB + TC + TD \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow M$ trùng T .

Vậy tổng $(MA + MB + MC + MD)$ nhỏ nhất khi M trùng T .

Nhờ bổ đề 3, điểm T được đặc trưng bởi đặc điểm hình học :

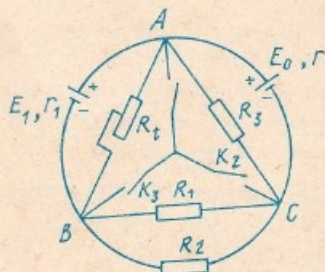
$$\angle ATB = \angle CTD; \angle ATC = \angle DTB; \angle ATD = \angle BTC.$$

Giống như trong trường hợp tam giác, ta gọi T là điểm Toricelli của tứ diện $ABCD$.

Bài toán 3 đã được giải quyết. Kết luận cụ thể xin dành cho bạn đọc. Nếu để ý, bạn sẽ thấy một điều rất thú vị : Kết quả nhận được trong trường hợp tứ diện hoàn toàn tương tự kết quả nhận được trong trường hợp tam giác.

(tiếp theo trang 10)

Bài L2/234 : Cho mạch điện như hình vẽ



$$E_0 = 5V, r = [0,5\Omega \rightarrow 2\Omega]$$

$$E_1 = 8V, r_1 = 2\Omega$$

$$R_1 = R_2 = R_3 = 4\Omega$$

$$R_i = (0,5\Omega \rightarrow 1\Omega)$$

1) Khóa K_1 mở, K_2, K_3 đóng hãy chọn r và điều chỉnh R_i để công suất trên R_i min.

2) K_2, K_3 mở, tìm cường độ dòng điện qua R_1, R_2 với giá trị r, R_i ở câu 1.

NGUYỄN PHÚ VINH
(Long An)

LỜI GIẢI ĐỀ THI QUỐC GIA

CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN PTTH

NĂM HỌC 1995 - 1996 (Bảng B)

NGUYỄN KHẮC MINH

I - ĐỀ THI:

Bài 1: Hãy biện luận số nghiệm thực của hệ phương trình với ẩn x, y :

$$\begin{cases} x^3 y - y^4 = a^2 \\ x^2 y + 2xy^2 + y^3 = b^2 \end{cases}$$

theo các tham số thực a, b .

Bài 2: Cho hình tứ diện $ABCD$ nội tiếp trong một cầu tâm O và $AB = AC = AD$. Gọi G là trọng tâm tam giác ACD , gọi E là trung điểm của BG và F là trung điểm của AE .

Chứng minh rằng OF vuông góc với BG khi và chỉ khi OD vuông góc với AC .

Bài 3: Cho n số ($n > 4$) đôi một khác nhau $a_1, a_2, \dots, a_n$. Hỏi có tất cả bao nhiêu hoán vị của n số đó, mà trong mỗi hoán vị không có ba số nào trong bốn số a_1, a_2, a_3, a_4 nằm ở ba vị trí liên tiếp?

Bài 4: Hãy xác định tất cả các hàm số $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau:

(1) $f(1995) = 1996$.

(2) Với mọi $n \in \mathbb{Z}$, nếu $f(n) = m$ thì $f(m) = n$ và $f(m+3) = n-3$.

($\mathbb{Z}$ là tập hợp các số nguyên).

Bài 5: Xét các tam giác ABC có độ dài cạnh BC bằng 1 và số đo góc BAC bằng α cho trước ($\alpha > \frac{\pi}{3}$). Hỏi tam giác nào có khoảng cách từ tâm đường tròn nội tiếp đến trọng tâm bé nhất? Hãy tính khoảng cách bé nhất đó theo α .

Bài 6: Cho ba số thực không âm x, y, z thỏa mãn điều kiện: $xy + yz + zx + xyz = 4$.

Chứng minh rằng:

$$x = y = z \geq xy + yz + zx.$$

Hỏi dấu bằng xảy ra khi nào?

II. LỜI GIẢI:

Bài 1: Điều kiện có nghĩa của hệ: $x, y \in \mathbb{R}$.
Viết lại hệ đã cho dưới dạng:

$$\begin{cases} y(x^3 - y^3) = a^2 & (1) \\ y(x + y)^2 = b^2 & (2) \end{cases}$$

Xét các trường hợp sau:

• Trường hợp 1: $b = 0$. Khi đó;

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = -x \end{cases}$$

và do vậy:

$$\text{Hệ đã cho} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y(x^3 - y^3) = a^2 & (I) \\ y = -x \\ y(x^3 - y^3) = a^2 & (II) \end{cases}$$

$$\text{Có: (II)} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ -2x^4 = a^2 \end{cases}$$

Từ đó: + Nếu $a \neq 0$ thì (I) và (II) cùng vô nghiệm, dẫn tới hệ đã cho vô nghiệm.

+ Nếu $a = 0$ thì (I) có vô số nghiệm dạng ($x \in \mathbb{R}, y = 0$), còn (II) có duy nhất nghiệm ($x = 0, y = 0$). Vì thế hệ đã cho sẽ có vô số nghiệm.

• Trường hợp 2: $b \neq 0$. Khi đó, từ (1) và (2) dễ thấy, nếu (x, y) là nghiệm của hệ đã cho thì phải có $x, y > 0$. Vì thế: (2) $\Leftrightarrow x = \frac{|b|}{\sqrt{y}} - y$ (3).

Thế (3) vào (1) ta được:

$$y \left[\left(\frac{|b|}{\sqrt{y}} - y \right)^3 - y^3 \right] = a^2 \quad (4).$$

Đặt $\sqrt{y} = t > 0$. Từ (4) ta có phương trình sau (ẩn t):

$$t^2 \left[\left(\frac{|b|}{t} - t^2 \right)^3 - t^6 \right] \Leftrightarrow \frac{(|b| - t^3)^3}{t} - t^8 = a^2 \\ \Leftrightarrow t^9 = (|b| - t^3)^3 + a^2 t = 0 \quad (5)$$

Xét hàm số $f(t) = t^9 - (|b| - t^3)^3 + a^2 t$ xác định trên $[0, +\infty)$ có: $f'(t) = 9t^8 + 9(|b| - t^3)^2 t^2 + a^2 \geq 0 \forall t \in [0, +\infty)$. Suy ra, hàm $f(t)$ đồng biến trên $[0, +\infty)$, và vì thế phương trình (5) có tối đa một nghiệm trong $[0, +\infty)$. Mà $f(0) = -|b|^3 < 0$ và $f(\sqrt[3]{|b|}) = |b|^3 + |b| a^2 > 0$, nên phương trình (5) có duy nhất nghiệm, kí hiệu là t_0 , trong $(0, +\infty)$. Suy ra, hệ đã cho có duy nhất nghiệm $(x = \frac{|b|}{t_0} - t_0^2, y = t_0^2)$.

Vậy, tóm lại: + Nếu $a = b = 0$ thì hệ đã cho có vô số nghiệm.

+ Nếu a tùy ý, $b \neq 0$ thì hệ đã cho có duy nhất nghiệm

+ Nếu $a \neq 0, b = 0$ thì hệ đã cho vô nghiệm.

Bài 2. (Bạn đọc tự vẽ hình): Gọi R là bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$. Đặt $OA = a, OB = b, OC = c$ và $OD = d$. Ta có $|a| = |b| = |c| = |d| = R$ (6).

Từ $AB = AC = AD$ (gt) dễ dàng suy ra $\triangle AOB = \triangle AOC = \triangle AOD$. Kéo theo $\angle AOB = \angle AOC = \angle AOD$. Kết hợp điều này với (6) ta được: $a \cdot b = a \cdot c = a \cdot d$ (7)

Từ các giả thiết về vị trí của G, E, F để thấy có:

$$3\vec{BG} = \vec{BA} + \vec{BC} + \vec{BD} = \vec{OA} - \vec{OB} + \vec{OC} - \vec{OB} + \vec{OD} - \vec{OB} = \vec{a} + \vec{c} + \vec{d} - 3\vec{b}. \quad (8)$$

$$4\vec{OF} = 2(\vec{OA} + \vec{OE}) = 2\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OG} = 2\vec{OA} + \vec{OB} + \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OC} + \vec{OD})$$

$$\Rightarrow 12\vec{OF} = 7\vec{OA} + 3\vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} = 7\vec{a} + 3\vec{b} + \vec{c} + \vec{d} \quad (9).$$

Nhân vô hướng về theo vế của (8) và (9), với chú ý tới (7), ta được:

$$36\vec{BG} \cdot \vec{OF} = (\vec{a} + \vec{c} + \vec{d} - 3\vec{b}) \cdot (7\vec{a} + 3\vec{b} + \vec{c} + \vec{d})$$

$$= 7\vec{a}^2 - 9\vec{b}^2 + \vec{c}^2 + \vec{d}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{d} + 2\vec{c} \cdot \vec{d} = 7R^2 - 9R^2 + R^2 + R^2 + 2\vec{d} \cdot (\vec{c} - \vec{a})$$

$$= 2\vec{OD} \cdot \vec{AC}.$$

Do đó: $\vec{BG} \cdot \vec{OF} = 0 \Leftrightarrow \vec{OD} \cdot \vec{AC} = 0$, hay $BG \perp OF \perp OD \perp AC$ (Đpcm) ■

Bài 3: Gọi H là tập gồm tất cả các hoán vị của $(a_1, a_2, \dots, a_n)$; H' là tập gồm tất cả các hoán vị thỏa yêu cầu đề bài. Kí hiệu:

$H_1 = \{h \in H \mid \text{trong } h \text{ có đúng 3 trong 4 số } a_1, a_2, a_3, a_4 \text{ nằm ở 3 vị trí liên tiếp}\}.$

$H_2 = \{h \in H \mid \text{trong } h \text{ có 4 số } a_1, a_2, a_3, a_4 \text{ nằm ở 4 vị trí liên tiếp}\}.$

Hiển nhiên, có $H' = H \setminus (H_1 \cup H_2)$, $(H_1 \cup H_2) \subset H$ và $H_1 \cap H_2 = \emptyset$.

Suy ra: $|H'| = |H| - |H_1| - |H_2| \quad (10).$

• Tìm $|H_1|$. Lấy i, j, k đôi một khác nhau mà $i, j, k \in \{1, 2, 3, 4\}$. Kí hiệu a_l là số khác với a_i, a_j, a_k và $a_l \in \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$. Khi đó, sẽ có $(n-2)!$ hoán vị của $a_i, a_j, a_k, \dots, a_n$, và, dễ thấy, có $2(n-3)!$ hoán vị của $n-2$ số nói trên, mà trong mỗi hoán vị đều thấy a_i và a_l nằm ở 2 vị trí liên tiếp. Suy ra, có $(n-2)! - 2(n-3)!$ hoán vị của $a_i, a_j, a_k, \dots, a_n$ mà trong mỗi hoán vị đều thấy a_i và a_l không nằm ở 2 vị trí liên tiếp. Mỗi hoán vị loại này sẽ cho ta $3!$ hoán vị của $a_1, a_2, \dots, a_n$, mà trong mỗi hoán vị có đúng 3 số a_i, a_j, a_k trong 4 số: a_1, a_2, a_3, a_4 nằm ở 3 vị trí liên tiếp. Từ đây, và do cách chọn i, j, k ở trên, ta được: $|H_1| = 3![(n-2)! - 2(n-3)!]. C_4^3 = 4![(n-2)! - 2(n-3)!]. \quad (11)$

• Tìm $|H_2|$. Dễ dàng chứng minh được $|H_2| = 4!(n-3)! \quad (12)$. Thay (11), (12) vào (10), và với lưu ý $|H| = n!$, ta sẽ được: $|H'| = n! - 4![(n-2)! - (n-3)!] = (n-4)(n^2 + n - 18) \times (n-3)! \quad \blacksquare$

Bài 4: Viết lại điều kiện (2) của đề bài dưới dạng:

$$f(f(n)) = n \text{ và } f(f(n) + 3) = n - 3 \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Từ đó: $f(n-3) = f(f(f(n) + 3)) = f(n) + 3$
 $\forall n \in \mathbb{Z}$, hay: $f(n) = f(n-3) - 3 \quad \forall n \in \mathbb{Z}$. Suy ra:

$$f(n) = \begin{cases} f(0) - 3k & \text{nếu } n = 3k, k \in \mathbb{Z} \\ f(1) - 3k & \text{nếu } n = 3k + 1, k \in \mathbb{Z} \quad (III) \\ f(2) - 3k & \text{nếu } n = 3k + 2, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Vì $1995 \equiv 3 \pmod 3$ nên từ $f(1995) = 1996 \Rightarrow f(0) - 1995 = 1996 \Rightarrow f(0) = 3991 \quad (13) \Rightarrow 0 = f(3991)$.
 Mà $3991 = 3 \times 1330 + 1$ nên $0 = f(1) - 3990 \Rightarrow f(1) = 3990 \quad (14)$.

Nhận thấy, nếu $f(2) = 3t, t \in \mathbb{Z}$, thì $2 = f(3t) = f(0) - 3t = 2991 - 3t \Rightarrow 3989 = 3t$, hay $3989 \equiv 3 \pmod 3$. Điều vô lí đó cho thấy $f(2) \neq 3t \quad \forall t \in \mathbb{Z}$. Nếu $f(2) = 3t + 1, t \in \mathbb{Z}$, thì $2 = f(3t + 1) = f(1) - 3t = 3990 - 3t \Rightarrow 3988 = 3t$, hay $3988 \equiv 2 \pmod 3$. Mâu thuẫn vừa nhận được cho thấy $f(2) \neq 3t + 1 \quad \forall t \in \mathbb{Z}$. Như vậy, chỉ có thể $f(2) = 3t + 2, t \in \mathbb{Z} \quad (15)$. Thay (13), (14), (15) vào (III) ta được:

$$f(n) = \begin{cases} 3991 - n, & \text{nếu } n \equiv 3k + 2 \pmod 3, k \in \mathbb{Z} \\ 3t + 4 - n, & \text{nếu } n \equiv 3k + 2 \pmod 3, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

với t là số nguyên tùy ý.

Bằng cách thử trực tiếp, sẽ thấy tất cả các hàm vừa nhận được ở trên thỏa tất cả các điều kiện của đề bài. Vậy, đó chính là tất cả các hàm số cần tìm. ■

Bài 5 (Bạn đọc tự vẽ hình): Coi B và C cố định. Vì các $\triangle ABC$ thỏa đề bài đối xứng từng cặp qua đường thẳng BC nên chỉ cần xét các $\triangle ABC$ thỏa đề bài và nằm trong cùng một nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng BC .

Vì $\angle BAC = \alpha$ nên A chạy trên cung tròn $\mathcal{C}$ chứa góc α vẽ trên đoạn BC . Khi đó, trọng tâm G của $\triangle ABC$ sẽ vạch nên cung tròn $\mathcal{C}_1$ - ảnh của cung tròn $\mathcal{C}$ qua phép vị tự tâm M tỉ số $\frac{1}{3}$

(M là trung điểm của BC), còn tâm I đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$ sẽ vạch nên cung tròn $\mathcal{C}_2$ chứa góc $\frac{\alpha + \pi}{2}$ vẽ trên đoạn BC . Vì G, I nằm trong $\triangle ABC$

nên suy ra cung $\mathcal{C}_1$ và cung $\mathcal{C}_2$ nằm trong hình viên phân giới hạn bởi cung tròn $\mathcal{C}$ và đoạn BC .

Gọi A_0, G_0, I_0 lần lượt là điểm chính giữa của các cung $\mathcal{C}, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$. Ta có A_0, G_0, I_0, M thẳng hàng (do cùng nằm trên đường trung trực của đoạn BC). Hơn nữa, dễ thấy, $\triangle BA_0C$ cân tại A_0 và nhận G_0, I_0 tương ứng làm trọng tâm, tâm đường tròn nội tiếp. Từ đó suy ra:

$$\frac{MI_0}{I_0A_0} = \frac{MB}{BA_0} = \sin \frac{\alpha}{2} > \frac{1}{2} \quad (\text{do } \frac{\pi}{3} < \alpha < \pi) \Rightarrow 2MI_0$$

$$> I_0A_0 \Rightarrow MI_0 > \frac{1}{3}MA_0, \text{ hay } MI_0 > MG_0. \text{ Kết}$$

hợp điều này với quan hệ giữa $\mathcal{C}$ và $\mathcal{C}_1$ (đã nêu ở trên) suy ra cung $\mathcal{C}_1$ nằm trong hình viên phân giới hạn bởi cung tròn $\mathcal{C}_2$ và đoạn BC . Từ đó, dễ dàng chứng minh được rằng với P bất kì $\in \mathcal{C}_1$ và Q bất kì $\in \mathcal{C}_2$ ta luôn có $PQ \geq G_0I_0$,

(xem tiếp Bài 4)

Học sinh tìm tòi

SUY NGHĨ VỀ MỘT BÀI TOÁN HÀM SỐ

LÊ QUANG NĂM

Lớp 11 CT, PT Năng Khiếu, ĐH Quốc gia TP. Hồ Chí Minh

Trong quyển "Tuyển tập các bài toán từ các kì thi Olympic toán quốc tế" (ĐH Tổng hợp Hà Nội) có một bài toán sau:

Bài toán (bài số 15)

Cho $a, 0 < a < 1$ là một số thực và f là một hàm số liên tục trên $[0, 1]$ thỏa mãn $f(0) = 0, f(1) = 1$ và

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = (1-a)f(x) + af(y)$$

với mọi $x, y \in [0, 1]$ và $x \leq y$. Hãy xác định $f\left(\frac{1}{7}\right)$.

Quyển sách trên đã trình bày lời giải như sau:

Lời giải Trước hết chúng ta để ý rằng chỉ có duy nhất một hàm số thỏa mãn các điều kiện của bài ra. Thật vậy, giá trị của f cố định tại 0,

$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4} \dots$ v.v... nghĩa là tại mọi điểm $\frac{k}{2^n}$. Do

f liên tục, nên nó phải là duy nhất trên cả đoạn $[0, 1]$. Ngoài ra, $f(x) = f(y)$ chỉ khi $x = y$ vì nếu $f(x) = f(y)$ với $x < y$ thì ta sẽ có $f(z) = f(x)$ với mọi $z \in [x, y]$ và cuối cùng là mọi $z \in [0, 1]$.

$$\text{Đặt } g(x) = \frac{f\left(\frac{1}{8} + \frac{x}{8}\right) - f\left(\frac{1}{8}\right)}{f\left(\frac{1}{4}\right) - f\left(\frac{1}{8}\right)} = Af(Bx+C)+D$$

Ta thấy rằng $g(0) = 0; g(1) = 1$ và

$$\begin{aligned} g\left(\frac{x+y}{2}\right) &= Af\left(B\frac{x+y}{2}+C\right) + D = \\ &= Af\left(\frac{Bx+C}{2} + \frac{By+C}{2}\right) + D \\ &= (1-a)Af(Bx+c) + (1-a)D + aAf(By+c) \\ &+ aD = (1-a)g(x) + ag(y). \end{aligned}$$

Điều này cho ta $g = f$. Vì thế $f\left(\frac{1}{7}\right) = g\left(\frac{1}{7}\right) =$

$$\frac{f\left(\frac{1}{7}\right) - f\left(\frac{1}{8}\right)}{f\left(\frac{1}{4}\right) - f\left(\frac{1}{8}\right)} \text{ hay } f\left(\frac{1}{7}\right) = \frac{f\left(\frac{1}{8}\right)}{1 - f\left(\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{1}{8}\right)}$$

Ta chú ý rằng $f\left(\frac{1}{2}\right) = a, f\left(\frac{1}{4}\right) = a^2, f\left(\frac{1}{8}\right) = a^3$. Vậy $f\left(\frac{1}{7}\right) = \frac{a^3}{a^3 - a^2 + 1}$. Lời giải này rất

hay. Tuy nhiên, việc tìm ra hàm số g không phải tất cả mọi người đều làm được. Phải chăng, có cách giải khác đơn giản hơn? Trong bài viết này, tôi sẽ trình bày các lời giải khác của bài toán cùng một số suy nghĩ về bài toán này. Trong đẳng thức

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = (1-a)f(x) + af(y) (*)$$

Cho $x = 0$, ta có $f\left(\frac{y}{2}\right) = af(y); \forall y \in [0, 1]$ (1)

Trong (*) cho $y = 1$, ta có:

$$f\left(\frac{x+1}{2}\right) = (1-a)f(x) + a, \forall x \in [0, 1] (2)$$

Lời giải 2 Ta có $f\left(\frac{y}{4}\right) = af\left(\frac{y}{2}\right) = a^2f(y)$
 $\forall y \in [0, 1] (3)$

Trong (*), xét $0 \leq x \leq \frac{1}{7}$ và cho $y = 7x$ ta có:

$$f(4x) = (1-a)f(x) + af(7x) (4).$$

Từ (3) và (4) ta có

$$af(7x) = f(4x) - (1-a)f(x) = \frac{f(x)}{a^2} - (1-a)f(x)$$

$$\text{hay } f(x) = \frac{a^3}{a^3 - a^2 + 1} f(7x), \forall x \in \left[0, \frac{1}{7}\right].$$

$$\text{Vậy } f\left(\frac{1}{7}\right) = \frac{a^3}{a^3 - a^2 + 1} f(1) = \frac{a^3}{a^3 - a^2 + 1}$$

Lời giải 3 Ta có $f\left(\frac{1}{7}\right) = a^2f\left(\frac{4}{7}\right) =$

$$a^2f\left(\frac{\frac{1}{7}+1}{2}\right) = a^2 \left[(1-a)f\left(\frac{1}{7}\right) + a \right]$$

$$\text{Suy ra } f\left(\frac{1}{7}\right) = \frac{a^3}{a^3 - a^2 + 1}.$$

Hai lời giải trên cùng cho một kết quả, hơn thế nữa tính liên tục của f không được sử dụng. Vậy điều kiện f liên tục là thừa chăng, hay tác giả bài toán có dụng ý gì? Sau khi suy ngẫm kĩ hai lời giải trên, tôi thu được một kết quả hết sức bất ngờ, đó là a phải bằng $\frac{1}{2}$!

Thật vậy:

Trong (*), xét $0 \leq x \leq \frac{1}{3}$ và cho $y = 3x$ ta có:

$$f(2x) = (1-a)f(x) + af(3x), \text{ do } af(2x) = f(x)$$

nên ta có $af(3x) = \frac{a^2 - a + 1}{a} f(x)$ hay

$$f(x) = \frac{a^2}{a^2 - a + 1} f(3x), \forall x \in \left[0, \frac{1}{3}\right] (5)$$

Trong (*), xét $0 \leq x \leq \frac{1}{5}$ và cho $y = 5x$ ta có

$$f(3x) = (1-a)f(x) + af(5x) (6)$$

Từ (5) và (6) ta có $f(x) = \frac{a^3}{a^3 - a + 1} f(5x), \forall x$

$$\in \left[0; \frac{1}{5}\right]$$

$$\text{Suy ra } f\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{a^3}{a^3 - a + 1} (7)$$

Bây giờ, ta sử dụng (2) để tính $f\left(\frac{1}{5}\right)$.

Ta có $f\left(\frac{1}{5}\right) = a^2 f\left(\frac{4}{5}\right)$ mà $f\left(\frac{4}{5}\right) = f\left(\frac{\frac{3}{5} + 1}{2}\right) = (1-a)f\left(\frac{3}{5}\right) + a$

$$f\left(\frac{3}{5}\right) = f\left(\frac{\frac{1}{5} + 1}{2}\right) = (1-a)f\left(\frac{1}{5}\right) + a.$$

Suy ra $f\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{a^3(2-a)}{1-a^2(1-a)^2}$ (8)

Từ (7) và (8) ta có

$$\frac{a^3}{a^3 - a + 1} = \frac{a^3(2-a)}{1-a^2(1-a)^2} \quad (**)$$

Do $0 < a < 1$ nên $(**) \Leftrightarrow 1 - a^2(1-a)^2 = (2-a)(a^3 - a + 1) \Leftrightarrow 2a^3 - 3a + 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2} (0 < a < 1)$

Như vậy là chúng ta phải có $a = \frac{1}{2}$.

Thích thú với kết quả vừa tìm ra, tôi thử thế $a = \frac{1}{2}$ vào các kết quả vừa tìm và thấy $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{5}, f\left(\frac{1}{7}\right) = \frac{1}{7}$. Vậy phải chăng $f(x) = x$ với mọi $x \in [0, 1]$?

Chú ý là chúng ta thu được các kết quả trên không sử dụng đến tính liên tục của f . Vậy chẳng lúc này "thời cơ" đã đến?

Chúng ta hãy cùng nhau giải bài toán:

Bài toán 1: Cho $a, 0 < a < 1$ là một số thực. Tìm tất cả các hàm số f liên tục trên $[0, 1]$ thỏa mãn điều kiện

$$\begin{cases} f\left(\frac{x+y}{2}\right) = (1-a)f(x) + af(y) \\ f(0) = 0, f(1) = 1 \\ \text{với mọi } x, y \in [0, 1] \text{ và } x \leq y. \end{cases}$$

Lời giải Nếu $a \neq \frac{1}{2}$ thì từ những điều vừa chứng minh trên, ta thấy không tồn tại hàm f .

$$\text{Xét } a = \frac{1}{2}.$$

Trong (*) ta có $f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(y)$, $\forall x, y \in [0, 1]$ và do $f\left(\frac{y}{2}\right) = \frac{1}{2}f(y) \forall y \in [0, 1]$ nên ta có:

$f(x+y) = f(x) + f(y) \forall x, y \in [0, 1]$ và $x+y \leq 1$.

Xét p là một số nguyên dương lớn hơn 1. Ta có:

$$f\left(\frac{1}{p}\right) + f\left(\frac{1}{p}\right) = f\left(\frac{2}{p}\right);$$

$$f\left(\frac{2}{p}\right) + f\left(\frac{1}{p}\right) = f\left(\frac{3}{p}\right)$$

và bằng quy nạp, ta thu được $f\left(\frac{K}{p}\right) = Kf\left(\frac{1}{p}\right) \forall K: 1 \leq K \leq p$.

Do đó $f\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{1}{p}f\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{1}{p} \forall p: 2 \leq p \in \mathbb{N}$.

Suy ra $\forall 1 \leq q \leq p, q \in \mathbb{N}$, ta có $f\left(\frac{q}{p}\right) = qf\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{q}{p}$

Vậy $f(x) = x$ với mọi x hữu tỉ thuộc đoạn $[0, 1]$. Bây giờ xét một số thực $x_0 \in (0, 1)$. Tồn tại dãy số hữu tỉ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ sao cho $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$. Do

tính liên tục của hàm f trên $[0, 1]$ nên ta có: $f(x_0) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$

Vậy $f(x) = x, \forall x \in [0, 1]$.

Kết quả của bài toán không thay đổi nếu ta thay điều kiện: f liên tục bởi f đơn điệu. Đó là nội dung của bài toán.

Bài toán 2 Cho $a, 0 < a < 1$ là một số thực. Tìm tất cả các hàm số đơn điệu f xác định trên $[0, 1]$ sao cho $f(0) = 0, f(1) = 1$ và thỏa mãn điều kiện:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = (1-a)f(x) + af(y) \text{ với mọi } x, y \in [0, 1] \text{ và } x \leq y$$

Chúng ta còn thay điều kiện gì nữa để kết quả không thay đổi.

Rất mong nhận được sự trao đổi của các bạn.

Bạn có biết?

VỀ SỐ NGUYÊN TỔ LỚN NHẤT

NGUYỄN TƯỜNG
(Hà Nội)

Hỏi rằng hơn 200 năm nay, kỉ lục tìm được các số nguyên tố lớn nhất đã đạt được như thế nào? Tôi xin lược kể ra để các bạn trẻ có thể theo dõi cuộc hành trình đầy thú vị này!

Năm 1772, Ole (Euler) đã chứng minh rằng số $2^{31} - 1$ là số nguyên tố.

Tiếp theo Lucas đã chỉ ra các số $2^{61} - 1$ (có 19 chữ số) và $2^{127} - 1$ (có 39 chữ số) là các số nguyên tố kỉ lục về độ lớn trong thời gian dài.

Năm 1951, Miller đã tìm ra dãy các số nguyên tố có dạng $K(2^{127} - 1) + 1$ - số nguyên tố lớn nhất tương ứng với $K = 978$, rồi thì số nguyên tố 180 $(2^{127} - 1)^2 + 1$ có 79 chữ số.

Vào những năm 1960 nhờ máy tính điện tử khổng lồ, người ta đã tìm được những số nguyên tố cỡ khổng lồ:

$2^{521} - 1; 2^{607} - 1; 2^{1279} - 1; 2^{2203} - 1; 2^{2281} - 1$.

Năm 1963, Donald B. Gillies đã tính ra được số nguyên tố $2^{11213} - 1$ có 3376 chữ số.

Năm 1971, Tuckermann đã tính ra được số nguyên tố $2^{19937} - 1$ có 6002 chữ số là số nguyên tố cực lớn vào lúc này.

Bảy năm sau đó, năm 1978, hai học sinh trung học trường California dưới sự giúp đỡ của D.H. Lehnier và Tuckermann đã vượt kỉ lục của Tuckermann vào năm 1971, đã tìm ra số nguyên tố $2^{23209} - 1$ có 6533 chữ số.

Vào mùa xuân 1983, D. Slovincski đã công bố 2 số nguyên tố $2^{44497} - 1$ và $2^{86243} - 1$; 1984 ông tiếp tục công bố số nguyên tố $2^{132049} - 1$ và năm 1985 số nguyên tố $2^{16091} - 1$ có 65050 chữ số.

Các bạn có thể tiếp tục thử sức lực và tài năng của mình để hạ kỉ lục toán học này không?

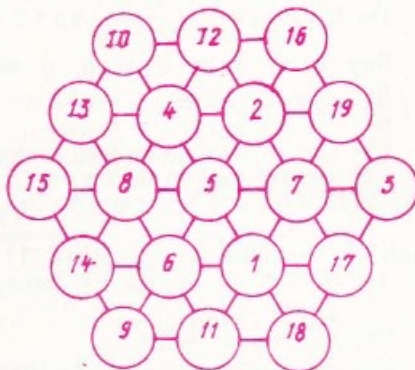


Giải đáp bài

ĐIỀN SỐ VÀO HÌNH LỤC GIÁC

Trước hết ta thấy tổng các số từ 1 đến 19 là $\frac{19(19+1)}{2} = 190$.

Các đường tròn lại nằm trên 5 đường thẳng song song với các cạnh của hình lục giác. Vậy tổng số các số của các đường tròn nằm trên một đường thẳng là $190 : 5 = 38$. Ta có cách điền số như hình bên. Hình lục giác có 6 trục đối xứng. Nếu ta trao đổi các số trong các đường tròn đối xứng nhau qua các trục đối xứng đó ta lại được một cách điền số mới.



(Dựa theo đáp án của các bạn Nguyễn Tư Duy, 4a, Phú Ninh, Phong Châu, Vĩnh Phú, Nguyễn Hải Minh, 8A, CT, Trọng điểm Uông Bí, Quảng Ninh; Phạm Mạnh Hà, 9T, Chuyên Thái Bình; Hoàng Trọng Hùng, 11A₃, Nguyễn Hữu Huân, Thủ Đức TP. Hồ Chí Minh).

BÌNH PHƯƠNG

Trò chơi

CHIA DIÊM

Hai người chơi trò chơi CHIA DIÊM như sau: Trên bàn có một đồng diêm 30 que. Hai người lần lượt thay nhau đi. Đến lượt người nào thì người ấy sẽ chọn một trong các đồng diêm đã có ở trên bàn để chia thành 2 đồng nhỏ. Mỗi đồng có một số que diêm tùy ý. Đến lượt người nào mà không còn đồng nào để chia, tức là đồng nào cũng chỉ có một que diêm thôi thì người đó sẽ thua.

Nếu bạn là người đi trước thì nên chia diêm như thế nào để bao giờ cũng thắng.

NGÔ HÂN

LỜI GIẢI ĐỀ THI ...

(tiếp theo trang 15)

dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow P \equiv G_o$ và $Q \equiv I_o$. Vì thế, trong các ΔABC thỏa đề bài chỉ có Δ cân BA_oC là Δ có khoảng cách từ tâm đường tròn nội tiếp đến trọng tâm bé nhất. (Đpt).

Gọi $f(\alpha)$ là khoảng cách bé nhất vừa nói trên, ta có: $f(\alpha) = G_oI_o = MI_o - MG_o =$

$$= \frac{1}{2} \cotg \left(\frac{\alpha}{4} + \frac{\pi}{4} \right) - \frac{1}{6} \cotg \frac{\alpha}{2} \cdot \blacksquare$$

Bài 6: Từ giả thiết của đề bài:

$$xy + yz + zx + xyz = 4 \quad (16)$$

ta có thể viết lại bất đẳng thức cần chứng minh dưới dạng tương đương;

$$x + y + z \geq 4 - xyz \quad (17)$$

Hơn thế, (16) còn cho thấy trong 3 số không âm x, y, z chỉ có thể có tối đa một số bằng 0.

Không mất tổng quát, giả sử $x = \min \{x, y, z\}$. Khi đó $x, y > 0$ và vì thế: (16) $\Leftrightarrow$

$$z = \frac{4 - xy}{x + y + xy}. \text{ Do đó:}$$

$$(17) \Leftrightarrow x + y + \frac{4 - xy}{x + y + xy} \geq 4 - xy \cdot \frac{4 - xy}{x + y + xy}$$

$\Leftrightarrow$

$$(x + y)^2 + xy(x + y) + 4 - xy \geq 4(x + y) + 4xy - 4xy + x^2y^2$$

$$\Leftrightarrow (x + y - 2)^2 \geq xy(1 - x)(1 - y) \quad (18)$$

• Nếu $(1 - x)(1 - y) \leq 0$ thì, hiển nhiên, (18) là bất đẳng thức đúng. Dấu "=" ở (18) xảy ra $\Leftrightarrow (x + y - 2)^2 = xy(1 - x)(1 - y) = 0 \Leftrightarrow x = y = 1$. Kết hợp với (16) suy ra, dấu "=" ở (17) xảy ra $\Leftrightarrow x = y = z = 1$.

• Xét trường hợp $(1 - x)(1 - y) > 0$. Khi đó, do $(x + y - 2)^2 \geq 4(1 - x)(1 - y) > 0$ (19) và $4 \geq xy > 0$ (20) (suy ra từ (16)) nên $(x + y - 2)^2 \geq xy(1 - x)(1 - y)$. Bất đẳng thức (18) được chứng minh, và dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow$ dấu "=" đồng thời xảy ra ở (19) và (20) $\Leftrightarrow x = y = 2$. Kết hợp với (16) ta có, dấu "=" ở (17) xảy ra $\Leftrightarrow x = y = 2, z = 0$.

Vậy, tóm lại bất đẳng thức của bài ra được chứng minh và dấu "=" ở bất đẳng thức đó xảy ra khi và chỉ khi hoặc $x = y = z = 1$ hoặc trong 3 số x, y, z có một số bằng 0, còn 2 số còn lại mỗi số bằng 2.

Chú ý: Bằng cách vận dụng bất đẳng thức Côsi cho hai số, cũng như các định lý cơ bản về dấu của tam thức bậc hai các bạn còn có thể giải bài toán trên theo các cách khác khá đơn giản và ngắn gọn.

ISSN : 0866 - 8035
Chỉ số : 12884
Mã số : 8BT36M6

Sắp chữ tại TTVT Nhà xuất bản giáo dục
In tại nhà máy in Diên Hồng, 57 Giảng Võ
In xong và nộp lưu chiểu tháng 12/1996

Giá 2.000đ
Hai nghìn đồng