BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ★ HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

11 (233)
1996
NĂM THỨ 33

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG

- VỀ MỘT TÍNH CHẤT THÚ VỊ CỦA HÌNH VUÔNG
- XÂY DỰNG CÔNG THỨC TÍNH ĐỘ DÀI TRUNG TUYẾN
- ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN TÍNH GIỚI HẠN
- ĐỊNH NGHĨA 3 ĐƯỜNG CÔNIC TRONG MẶT PHẲNG AFIN
- ĐỀ THI QUỐC GIA CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 9 NĂM HỌC 1995 - 1996

Đoán ngày sinh	Xác định tâm đường tròn	Những dãy số kì lạ

Lớp 12T trường chuyên Lê Khiết, Quảng Ngãi năm học 1995 - 1996.

TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ
MATHEMATICS AND YOUTH

MỤC LỤC

Trang

Trụ sở tòa soạn :
45B Hàng Chuối, Hà Nội ĐT: 8213786
231 Nguyễn Văn Cừ, TP Hồ Chí Minh ĐT: 8356111

Biên tập và trị sự : VŨ KIM THỦY
Trình bày : QUỐC HỒNG

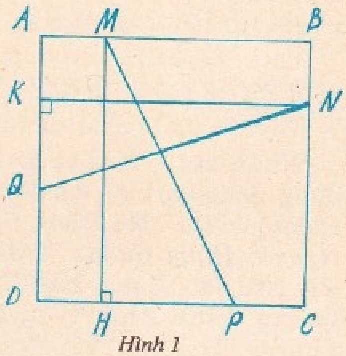
Dành cho các bạn THCS

VỀ MỘT TÍNH CHẤT THÚ VỊ CỦA HÌNH VUÔNG

LÊ QUỐC HÁN
(Nghệ An)

Trong sách giáo khoa hình học lớp 8 đã nêu lên các tính chất cơ bản của hình vuông. Trong bài báo này, chúng tôi xin nêu thêm một tính chất khác của hình vuông và các ứng dụng phong phú của nó.

Bài toán 1 : *Cho hình vuông ABCD và các điểm M, N, P, Q tương ứng trên các đường thẳng AB, BC, CD, DA. Chứng minh rằng : MP = NQ khi và chỉ khi MP ⊥ NQ.*



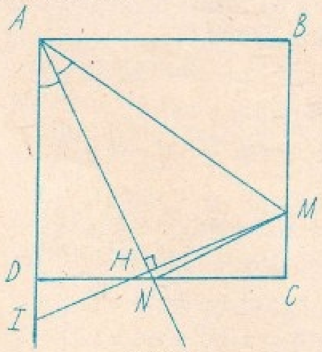
Hình 1

Giải : Để chứng minh ta kẻ $MH \parallel AD$, $NK \parallel AB$ rồi chứng minh hai tam giác vuông MHP và NKQ bằng nhau (xem hình 1).

Bây giờ, ta hãy áp dụng kết quả của bài toán 1 để giải các bài toán sau :

Bài toán 2 : *Cho hình vuông ABCD cạnh bằng a và một điểm M chuyển động trên cạnh BC. Phân giác của góc DAM cắt CD tại N.*

Chứng minh $AN \leq 2 . MN$. Đẳng thức xảy ra khi nào ?

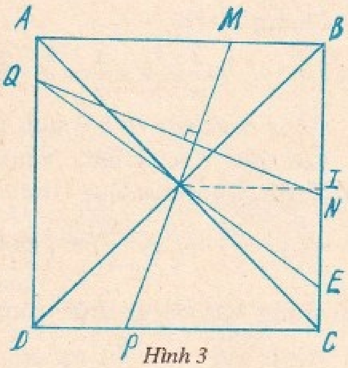


Hình 2

Giải : Đường thẳng kẻ từ M vuông góc với AN cắt AN tạo H và cắt đường thẳng AD tại I. (Xem hình 2). Vì $\widehat{DAN} = \widehat{NAM}$ nên $NH = HI = \frac{1}{2}AN$. Theo bài toán 1, từ $AN \perp MI$, ta có $AN = MI = 2MH \geq 2.MN$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $H \equiv N \Leftrightarrow CM = \frac{a}{4} (\Rightarrow DN = a/2)$. Bạn đọc hãy chứng minh kết quả này (Dựa vào sự đồng dạng của các tam giác ADN, NCM và ANM).

Bài toán 3 : *Dựng hình vuông ABCD biết vị trí tâm O của hình vuông và vị trí hai điểm M, N theo thứ tự nằm trên hai cạnh AB và BC.*



Hình 3

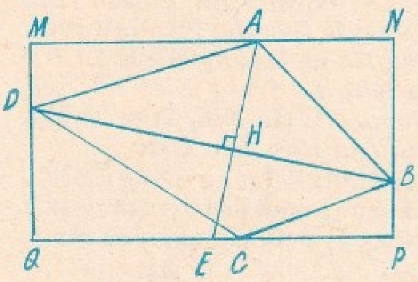
Giải : Gọi P là điểm đối xứng của M qua O thì P thuộc cạnh BC. Từ N kẻ $NH \perp MP$ và lấy trên đường thẳng NH một điểm Q sao cho $NQ = MP$ thì Q thuộc cạnh AO (xem hình 3). Gọi E là điểm đối xứng của Q qua O và I là chân đường vuông góc hạ từ O xuống EN. Lấy B và C trên đường thẳng EN sao cho : $IB = IC = IO$. Lấy A và D đối xứng với C và B qua O thì $ABCD$ là hình vuông phải dựng.

Kết quả sau đây là sự tổng quát hóa của bài toán 1.

Bài toán 1' : *Cho hình chữ nhật ABCD có $AB = a$, $BC = b$ và các điểm M, N, P, Q nằm trên các đường thẳng AB, BC, CD, DA. Chứng minh $MP \perp NQ$ khi và chỉ khi $\frac{MP}{NQ} = \frac{b}{a}$.*

Chứng minh bài toán 1' tương tự như cách chứng minh bài toán 1, xin dành cho bạn đọc.

Bài toán 4 : *Cho tứ giác ABCD. Dựng hình chữ nhật MNPQ ngoại tiếp tứ giác ABCD đó, biết tỷ số của hai cạnh kề nhau bằng k (k là số dương cho trước)*



Hình 4

Giải : Giả sử A, B, C, D theo thứ tự nằm trên các cạnh MN, NP, PQ, QM (xem hình 4) và $MN/NP = k$. Kẻ $AH \perp DB$, AH kéo dài cắt PQ tại E thì theo kết quả bài toán 1', ta có $\frac{AF}{DB} = \frac{NP}{MN} = \frac{1}{k}$ nên F hoàn toàn xác định, từ đó xác định được các đỉnh của hình chữ nhật $MNPQ$.

(xem tiếp trang 7)

Bài T1/229 *Cho $x > 0, y > 0, z > 0$*

Chứng minh

$$(xyz+1)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+\frac{x}{z}+\frac{z}{y}+\frac{y}{x} \geqslant x+y+z+6$$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

Lời giải : (của bạn *Nguyễn Hoạch Trúc Sinh*, 8A, Quốc học Quy Nhơn). Ta có vế trái là

$$A = \left(yz+\frac{z}{y}\right)+\left(xy+\frac{y}{x}\right)+\left(xz+\frac{x}{z}\right)+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}.$$

Áp dụng bất đẳng thức cộng ta có $y+\frac{z}{y} \geqslant 2z$, $\left(xy+\frac{y}{x}\right) \geqslant 2y$, $\left(xz+\frac{x}{z}\right) \geqslant 2x$.

Vậy $A \geqslant 2x+2y+2z+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} = x+y+z+\left(x+\frac{1}{x}\right)+\left(y+\frac{1}{y}\right)+\left(z+\frac{1}{z}\right) \geqslant x+y+z+6.$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $xy = \frac{y}{x}$, $xz = \frac{x}{z}$, $yz = \frac{z}{y}$, $x = \frac{1}{x}$, $y = \frac{1}{y}$, $z = \frac{1}{z}$. Điều này tương đương với $x = y = z = 1$.

Nhận xét : Bài toán này được hàng trăm bạn gửi lời giải đến. Tuyệt đại đa số giải đúng, ngắn gọn, cơ bản như trên. Chỉ có một số ít bạn giải hơi dài. Trong số nhiều lời giải tốt có : *Định Nam Dương* 9A **Nghệ An**, *Lê Anh Thơ*, 9A **Thanh Hóa**, *Trần Nguyên Thọ* 9 **Hà Tĩnh**, *Nguyễn Việt Hà* 9 **Hà Bắc**, *Đỗ Thùy Chi* 8A **Hải Phòng**, *Trần Lưu Vân* 8C Ngọc Lâm, *Bùi Thanh Hùng* 9H **Hà Nội**, *Võ Anh Tuấn*, 9T, **Quảng Bình**, *Nguyễn Tuấn Trung* 8T **Hà Bắc**, *Nguyễn Thái Sơn* 9T **Thanh Hóa**, *Nguyễn Huy Vũ*, 8T **Ninh Bình**, *Lê Anh Vinh* 8A1, **Hà Nội**, *Nguyễn Đức Hải* 9B **Vĩnh Phú**, *Nguyễn Thị Thu Hà* 8A **Quảng Ninh**, *Lê Thế Thắng* 8H **Hà Nội**, *Lê Trung Kiên* 9T Huế, *Đinh Trọng Quang* 7C **Hà Nội**, Trần Tạ Đạt 8A, **Hà Nội**, *Hà Thu Hiền* **Yên Bái**...

Bạn Đỗ Ngọc Đức (6H Trưng vương Hà Nội) đã phát biểu và chứng minh bài toán tổng quát sau : Cho $n \geqslant 3$ $a_1, a_n > 0$. Chứng minh rằng

$$(a_1 \ldots a_n+1)\left(\frac{1}{a_1}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right)+\frac{a_2}{a_3\ldots a_n}+\frac{a_3}{a_4\ldots a_n a_1}+\ldots+\frac{a_n}{a_1 \ldots a_{n-2}}+\frac{a_1}{a_2\ldots a_{n-1}} \geqslant a_1+\ldots+a_n+2n.$$

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T2/229. *Tìm nghiệm nguyên của phương trình*

$$x^2+x^3+x^4+x^5 = 271440$$

Lời giải : của *Nguyễn Hải Hà*, 9b, Chuyên Văn – Toán Ứng Hòa, Hà Tây.

$$x^2+x^3+x^4+x^5 = 271440$$

$$\Leftrightarrow x^2(x^2+1)(x+1) = 2^4 . 3^2 . 5 . 13 . 29 \quad (1)$$

Từ (1) ta suy ra ngay nghiệm x phải lớn hơn 1 và x^2 là ước chính phương của 271440. Các ước chính phương của 271440 có thể là 2^2, 2^4, $2^2.3^2$, $2^4.3^2$. Xét ước chính phương lớn nhất $2^4.3^2 = (2^2.3)^2 = 12^2$.

Thay $x^2 = 12^2$ vào phương trình ta thấy phương trình được nghiệm đúng

$$x^2(x^2+1)(x+1) = 12^2(12^2+1)(12+1) = 271440$$

Với $x^2 = (2.3)^2 = 6^2$ ta thấy

$$6^2(6^2+1)(6+1) < 12^2(12^2+1)(12+1) = 271440$$

Vậy $x = 12$ là nghiệm duy nhất.

Nhận xét : Hầu hết các lời giải gửi đến đều đúng. Song lập luận dài dòng. Các bạn sau đây có lời giải tốt : **Hà Bắc** : *Nguyễn Danh Nam, Nguyễn Hùng Cường, Trần Thị Hà Phương*, 9T, NK Bắc Giang. **Lào Cai** : *Nguyễn Hồng Quang*. **Vĩnh Phú** : *Nguyễn Đức Minh*, 8A, Chuyên Tam Đảo ; *Hà Vân Sơn*, 9T, Chuyên Phú Thọ. **Hà Tây** : *Đỗ Anh Tuấn*, 9T, Thường Tín ; *Nguyễn Mạnh Hà, 9K, Lê Lợi, Hà Đông*. **Hà Nội** : *Đường Ngọc Sơn, 8CT, Từ Liêm*. **Quảng Ninh** : *Bùi Anh Đức* 8A, TĐ Uông Bí. **Hải Phòng** : *Đỗ Thùy Chi*, $8A_1$, Hồng Bàng. **Thanh Hóa** : *Hà Xuân Giáp*, $6T_2$; *Hoàng Thị Hà, Hà Thị Phương Thảo*, 8T, NK Bỉm Sơn. **Khánh Hòa** : *Bùi Thanh Mai* 9T, Lê Quý Đôn, Nha Trang. **TP Hồ Chí Minh** : *Nguyễn Cẩm Thạch*, 8_1, Hồng Bàng, Quận 5.

TỐ NGUYÊN

Bài T3/229. *Giải phương trình :*

$$(x^2-3x+2)(x^2+15x+56)+8 = 0$$

Lời giải. Ta có :

$$(x^2-3x+2)(x^2+15x+56)+8 =$$
$$= x^4+12x^3+13x^2-138x+120 =$$
$$= (x^4+6x^3-15x^2)+(6x^3+36x^2-90)-$$
$$-(8x^2+48x-120) = x^2(x^2+6x-15)+$$
$$+6x(x^2+6x-15)-8(x^2+6x-15) =$$
$$= (x^2+6x-15)(x^2+6x-8) = (x+3-2\sqrt{6})$$

$(x+3+2\sqrt{6})(x+3+\sqrt{17}) = 0$. *Vậy phương trình có 4 nghiệm là :* $x_1 = -3+2\sqrt{6}$; $x_2 = -3-2\sqrt{6}$; $x_3 = -3+\sqrt{17}$; $x_4 = -3-\sqrt{17}$.

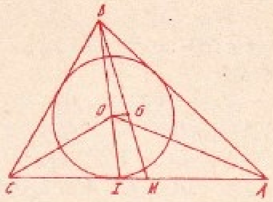
Nhận xét. Có 241 bài giải trong đó có 8 bài giải sai. Các bạn sau đây có lời giải tốt : *Phạm Nguyên Thắng* (**Đà Lạt**, 9 Toán PTCS Chuyên Thăng Long, Lâm Đồng), *Trần Tuấn Anh*

(**Khánh Hòa**, 8 Toán Lê Quý Đôn, Nha Trang), *Nguyễn Đỗ Thái Nguyên* (**Vĩnh Long**, $9T_2$ Chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, Tx Vĩnh Long), *Nguyễn Hồng Quang* (Tx **Lào Cai**), *Nguyễn Khánh Linh* (**Hà Nội**, 9^c THCS Ngọc Lâm, Gia Lâm), *Hán Minh Trung* (**Thanh Hóa**, 6E THCS Năng Khiếu, Tp Thanh Hóa), *Vũ Mạnh Cường* (**Vĩnh Phú**, 8^A Chuyên CII Tam Đảo), *Đinh Trọng Hùng* (**Vũng Tàu**, 9T Lê Quý Đôn, Tp Vũng Tàu), *Nguyễn Cảnh Toàn* (Tuyên Quang, 9 Toán Năng Khiếu Lê Quý Đôn), *Tạ Xuyên Hưng* (Yên Bái, 9T Lê Hồng Phong), *Nguyễn Ngọc Quang* (**Hà Nội**, 9H THCS Trưng Vương), *Lâm Mạnh Trường* (**Cao Bằng** 9A THCS Hợp Giang, Tx Cao Bằng)./.

ĐẶNG VIỄN

Bài T4/229. *Cho tam giác ABC với các cạnh $a = 5$; $b = 6$; $c = 7$. Tính khoảng cách giữa tâm đường tròn nội tiếp và trọng tâm của tam giác đó.*

Lời giải. Gọi M là trung điểm của AC và G là trọng tâm tam giác ABC, ta có G nằm trên đoạn BM sao cho $GM : GB = 1 : 1$ (1). Gọi O là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC và I là giao điểm của AC với tia BO, AO là các phân giác của các góc tương ứng ABC, BAC. Áp dụng định lí về tính chất đường phân giác (hình học 8), ta có :



$$\frac{IA}{IC} = \frac{BA}{BC} = \frac{7}{5} \Rightarrow \frac{IA}{AC} = \frac{IA}{IA+IC} = \frac{7}{5+7} = \frac{7}{12}.$$

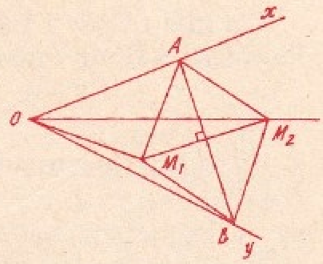
Vậy $IA = 7AC : 12 = 3{,}5$. Với phân giác AO, ta lại có : $\frac{OI}{OB} = \frac{AI}{AB} = \frac{3{,}5}{7} = \frac{1}{2}$ (2). Kết hợp (1) với (1), ta có GO // IM (định lí Talét đảo). Vậy : $\frac{OG}{IM} = \frac{BG}{BM} = \frac{2}{3}$, hay $OG = \frac{2}{3}IM = \frac{2}{3}(IA - AM) = \frac{2}{3}(3{,}5 - 3) = \frac{1}{3}$, và khoảng cách cần tìm là $\frac{1}{3}$.

Nhận xét. Có 96 bài giải trong đó có 5 bài giải sai. Nhiều bài trình bầy dài dòng, có bài được trình bầy hết bốn trang giấy (!). Đặc biệt có bạn Hán Minh Trung học lớp 6E THCS Năng Khiếu Thành phố Thanh Hóa có lời giải tốt cùng các bạn sau đây : Trần Tất Đạt (**Hà Nội**, $8A_1$ PTCS Chu Văn An), Trần Thị Hà (**Thanh Hóa**, 8 Toán Năng khiếu Bỉm Sơn), Phạm Thành Ngữ (**Vĩnh Phú**, 9A NK thị xã Vĩnh Yên), Nguyễn Hữu Quyền (**Vĩnh Phú**, 9T Chuyên Phú Thọ), Hà Văn Sơn (**Vĩnh Phú**, 9T Chuyên Phú Thọ), Ngọc Bích Phương (**Tiền Giang**, 9 Toán NK huyện Cai Lậy), Lê Chí Thành (Huế, 9I Nguyễn Tri Phương), Nguyễn Hoạch Trúc Sinh (**Bình Định**, 8A Quốc Học Qui Nhơn), Nguyễn Minh Quân (**Quảng Ngãi**, 9T Chuyên Nghĩa Hành), Nguyễn Hoàng Chương (**Bắc Thái**, 9 Toán THCS Năng Khiếu Tp Thái Nguyên), Trần Ngọc Cường (Tp **Hồ Chí Minh**, $8T_1$ Nguyễn An Khương, Hoóc Môn), Vũ Thanh Hà (Tp **Hồ Chí Minh**, $8T_1$ Nguyễn Du), Vũ Anh Tuấn (**Hà Nội**, 9^{A1} THCS Thành Công).

ĐẶNG VIỄN

Bài T5/229 : *Trên mặt phẳng cho góc xOy cố định ($\widehat{xOy} = 60^o$). Một tam giác cân MAB ($MA = MB = a$ không đổi ; $\widehat{AMB} = 120^o$) thay đổi vị trí sao cho hai đỉnh A, B chạy trên các tia tương ứng Ox, Oy. Tìm quỹ tích của điểm M.*

Lời giải vắn tắt : Gọi M_1 là tâm vòng tròn ngoại tiếp ΔOAB, M_2 là trung điểm của cung nhỏ AB của đường tròn đó. Để tìm tập M ta cần tìm tập $\{M_1\} \cup \{M_2\}$.

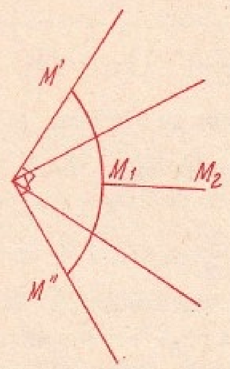


a) Tập $\{M_1\}$:

Ta có $OM_1 = M_1A = BM_1 = a$.

$\widehat{M_1OA} \leq 90^o$, $\widehat{M_1OB} \leq 90^o$

$\Rightarrow M_1$ thuộc cung nhỏ $\overset{\frown}{M'M''}$ của đường tròn (O, a) (ở đây $OM' \perp Oy$, $OM'' \perp Ox$



OM' khác phía với Oy so với Ox

OM'' khác phía Ox so với Oy).

b) Tập $\{M_2\}$ là đoạn M_1M_2 trong đó M_1, M_2 thuộc phân giác Oz của góc xOy, $OM_1 = a$, $OM_2 = 2a$.

Vậy tập các điểm M chính là $\overset{\frown}{M'M''} \cup M_1M_2$.

Nhận xét :

- Một số bạn chỉ tìm được 1 trong 2 tập M_1 hoặc M_2
- Các bạn đã giải tốt bài này :

Vĩnh Phú : *Mai Thu Thảo, Hà Văn Sơn* 9T Chuyên Phú Thọ, *Nguyễn Trung Lập*, 8B Chuyên Vĩnh Lạc.

Hà Tây : *Nguyễn Mạnh Hà*, 9K, THCS Lê Lợi, Hà Đông.

Hà Nội : *Bùi Mạnh Hùng*, 9H Trưng Vương, *Nguyễn Minh Công*, 9A Cấp II Yên Hòa, Từ Liêm.

Thanh Hóa : *Hàn Ngọc Sơn*, 8E Năng khiếu Thị xã, *Cao Xuân Sinh*, 9T Nga Liên, Nga Sơn.

Quảng Bình : *Trần Chí Hòa* PTNK Đồng Hới.

Quảng Trị : *Nguyễn Hữu Nghị*, 9TL Chuyên Lê Quý Đôn.

Quảng Ngãi : *Nguyễn Minh Quân*, 9T, Chuyên Nghĩa Hành, Quảng Ngãi.

Khánh Hòa : *Bùi Thanh Mai*, 9T, *Võ Thy Dung Hòa*, *Trần Tuấn Anh*, 8T, Lê Quý Đôn, Nha Trang.

TP Hồ Chí Minh : *Chung Nhân Phú*, $8T_1$ Nguyễn An Khương, Hóc Môn.

VŨ KIM THỦY

Bài T6/229 *Cho dãy số $\{x_n\}$ thỏa mãn $1 < x_1 < 2$ và $x_{n+1} = 1 + x_n - \frac{x_n^2}{2}$ $\forall n \geq 1$. Chứng minh rằng dãy $\{x_n\}$ hội tụ và tìm giới hạn của nó.*

Lời giải : Cách 1 (của bạn Nguyễn Minh Phương 10A Hùng Vương Phú Thọ).

Ta có : $x_{n+1} = \dfrac{3 - (x_n - 1)^2}{2}$

Từ đó bằng quy nạp dễ thấy $1 < x_n < 2$ $\forall n \geq 1$. Khi đó

$$|x_{n+1} - \sqrt{2}| = \frac{1}{2}|(3 - (x_n - 1)^2) - (3 - (\sqrt{2} - 1))^2|$$

$$= \frac{1}{2}|x_n - \sqrt{2}|\,|\sqrt{2} - (2 - x_n)| \qquad (1)$$

Vì $0 < 2 - x_n < \sqrt{2}$ do đó từ (1) suy ra $|x_{n+1} - \sqrt{2}| < \frac{1}{2}|x_n - \sqrt{2}|\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}|x_n - \sqrt{2}|$

Suy ra

$$|x_n - \sqrt{2}| < \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}|x_1 - \sqrt{2}|$$

Vì $\lim\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1} = 0$ nên suy ra $\lim x_n = \sqrt{2}$

Cách 2 (của bạn Nguyễn Ngọc Hưng 12T Thanh Hóa). Bằng quy nạp dễ thấy $1 < x_n < 2$.

Xét hàm số $f(x) = 1 + x - \frac{x^2}{2}$ có $f'(x) = 1 - x < 0$ $\forall x \in (1, 2)$ vậy $f(x)$ nghịch biến trong $(1, 2)$. Do đó

a) Nếu $x_1 \geq x_3$ thì $f(x_1) \leq f(x_3) \to x_2 \leq x_4$ tiếp tục như vậy ta có $x_1 \geq x_3 \geq x_5 \geq \ldots$ và $x_2 \leq x_4 \leq \ldots$

Thành thử hai dãy $\{x_{2k}\}$ và $\{x_{2k+1}\}$ hội tụ và giả sử $a = \lim x_{2k}$

$b = \lim x_{2k+1}$.

qua giới hạn ta có $a = 1 + b - \dfrac{b^2}{2}$

$$b = 1 + a - \frac{a^2}{2}$$

$\leftrightarrow (a - b)(a + b - 4) = 0.$

Chú ý rằng $x_n < \frac{3}{2}$ $\forall n$ do đó $a + b \leq \frac{6}{2} = 3$. Suy ra rằng $a = b$. Vậy $\lim x_n$ tồn tại.

b) Tương tự nếu $x_1 \leq x_3$ ta cũng có $\lim x_n$ tồn tại. Gọi giới hạn là A. Ta có $A = 1 + A - \frac{A^2}{2} \to A = \sqrt{2}$.

Nhận xét : Các bạn sau có lời giải tốt : Nguyễn Tiến Dũng 11 Đà Nẵng, Nguyễn Phúc Khánh 11 **Hải Hưng**, Trần Nam Dũng 11CT **Nghệ An**, Lê Hồng Hà Vinh, Đặng Hữu Thọ, **Bình Định**, Nguyễn Anh Hoa 11A **Nam Hà**, Phan Anh Huy 12 **Đà Nẵng**, Phạm Văn Du 11 **Thanh Hóa**, Đào Ngọc Luân **Hà Nội**, Trần Hữu Lực 11 **Quảng Bình**. Có khá nhiều lời giải sai, khẳng định dãy $\{x_n\}$ là tăng và bị chặn hoặc chứng minh giới hạn là $\frac{3}{2}$.

ĐẶNG HÙNG THẮNG.

Bài T7/229 : *Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0, 1]$, có đạo hàm trong $(0, 1)$ và $f(0) = f(1) = 0$. Chứng minh rằng tồn tại một số $c \in (0, 1)$ sao cho $f(c) = 1996f'(x)$.*

Hỏi kết luận của bài toán có thay đổi không nếu $f(0) = f(1) = m$, với m là số thực khác 0 cho trước ?

Lời giải : (của *Lê Quang Nẫm*, 11CT - ĐHKHTN - ĐHQG TP **Hồ Chí Minh**) ; *Cao Thế Anh*, 11CT Quốc học Huế ; *Trương Vĩnh Lân*, 10CT PTNK **Quảng Bình** ; *Nguyễn Ngọc Phúc*, 12I PTTH số 1 Đức Phổ - **Quảng Ngãi** ; *Trần Tiến Dũng*, 11T PTTH Amsterdam, **Hà Nội** ; *Trịnh Hữu Trung*, 11T - Lam Sơn - **Thanh Hóa** ; *Nguyễn Tiến Dũng, Phan Anh Huy*, $11A_1$, $12A_1$ PTTH Lê Quý Đôn - **Đà Nẵng**) :

Xét hàm số $g(x) = e^{\frac{-x}{1996}}.f(x)$ xác định trên $[0, 1]$. Từ các giả thiết đối với hàm $f(x)$ suy ra hàm $g(x)$ liên tục trên $[0, 1]$, có đạo hàm trong $(0, 1)$ và $g(0) = g(1) = 0$. Bởi thế, theo định lí Lagrăng, ta có : $\exists c \in (0, 1)$ sao cho $g'(c) = 0$ (1).

Mà : $g'(x) = e^{\frac{-x}{1996}}\left[f'(x) - \frac{1}{1996}f(x)\right]$ $\forall x \in (0, 1)$, và $e^{\frac{-x}{1996}} \neq 0$ $\forall x \in (0, 1)$ nên từ (1) ta có $f'(c) - \frac{1}{1996}.f(c) = 0$ hay $f(c) = 1996f'(c)$. (Đpcm).

Khi thay điều kiện $f(0) = f(1) = 0$ bởi điều kiện $f(0) = f(1) = m$ ($m \neq 0$ cho trước) thì kết luận của bài toán sẽ không còn đúng với $f(x)$ là hàm bất kì thỏa mãn điều kiện $f(x)$ liên tục trên $[0, 1]$ và có đạo hàm trong $(0, 1)$. Chẳng hạn, xét hàm $f(x) \equiv m$ $\forall x \in [0, 1]$. Lúc này, dễ thấy ta sẽ có $f(c) \neq 1996.f'(c)$ $\forall c \in (0, 1)$.

Nhận xét. 1. Nhiều bạn tỏ ra không nắm vững các tính chất của đạo hàm và hiểu chưa đúng về định lí Lagrăng. Từ đó dẫn tới : có nhiều bạn hoặc giải sai bài toán hoặc chỉ giải đúng phần đầu của bài toán.

2. Ngoài các bạn đã nêu tên trong phần Lời giải, các bạn sau đây cũng có lời giải tốt : **Lâm Đồng :** *Phan Thanh Hải* (12T PTTH Thăng Long) ; **Quảng Bình :** *Trần Đức Thuận* (10T PTTH Đào Duy Từ) ; **Thanh Hóa :** *Lê Văn Cường* (11T PTTH Lam Sơn) ; **Nam Hà :** *Nguyễn Anh Hoa* (11A PTTH Lê Hồng Phong) ; **Hà Nội :** *Lê Tuấn Anh* (12B PTCT – ĐHKHTN, ĐHQG HN)

NGUYỄN KHẮC MINH

Bài T8/229. *Tìm cất cả các số thực $a > 2$ sao cho*

$$\int_0^1 \frac{(1-t^2)dt}{t^4+at^2+1} = \frac{\pi}{8} \qquad (1)$$

Giải (của đa số các bạn).

Đặt $x = \dfrac{2t}{1+t^2}$ thì $dx = \dfrac{2(1-t^2)dt}{(1+t^2)^2}$ và

$$\int_0^1 \frac{(1-t^2)dt}{t^4+at^2+1} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dx}{1+\frac{a-2}{4}x^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a-2}}\,\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{a-2}}{2}.$$

Suy ra (1) $\Leftrightarrow \mathrm{arctg}u = \dfrac{\pi}{4}u$, (2)

với $u = \dfrac{\sqrt{a-2}}{2} > 0$.

Xét hàm số $f(u) = \mathrm{arctg}u - \dfrac{\pi}{4}u$; $u > 0$.

Ta có $f'(u) = \dfrac{1}{1+u^2} - \dfrac{\pi}{4}$; $f'(u) = 0 \leftrightarrow u = \sqrt{\dfrac{4}{\pi}-1}$

u	0		$\sqrt{\frac{4}{\pi}-1}$		1		$+\infty$
$f'(u)$		+	0	–		–	
$f(u)$	0	↗		↘	0	↘	

Vậy phương trình (2) có nghiệm duy nhất $u = 1$, hay $\dfrac{\sqrt{a-2}}{2} = 1 \Leftrightarrow a = 6$.

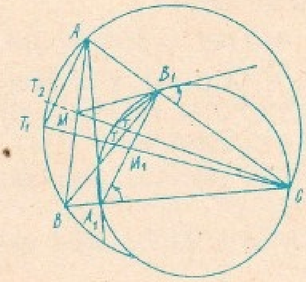
Nhận xét. + Ta thấy bài này thực chất là bài T8/227.

+ Các bạn gửi bài giải đến đều cho đáp số đúng. Có nhiều bạn còn có các cách giải khác ngắn gọn hơn, song phải sử dụng đến tích phân trên khoảng vô hạn.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T9/229. *Gọi AA_1, BB_1 là hai đường cao của tam giác nhọn ABC, M và M lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AB và A_1B_1. Đường thẳng CM cắt lại đường tròn (A_1B_1C) ở T và đường thẳng CM_1 cắt lại đường tròn (ABC) ở T_1. Chứng minh rằng T_1 đối xứng với T qua đường thẳng AB.*

Lời giải 1. (Dựa theo lời giải của Trần Tấn Đạt, 8A$_1$ Chu Văn An, Hà Nội). Vì A_1 và B_1 nằm trên đường tròn đường kính AB, tâm M, nên ta được : $\widehat{CA_1B_1} = \widehat{AB_1M}$; (1) và do đó : $\triangle A_1B_1C \overset{\cdot}{\backsim} \triangle ABC$; (2)



(Kí hiệu $\overset{\cdot}{\backsim}$ chỉ rằng hai tam giác này đồng dạng nghịch (đồng dạng nhưng ngược hướng)). Lại vì T nằm trên đường tròn $v_1(A_1B_1C)$, nên có :

$$\widehat{CA_1B_1} = \widehat{CTB_1}, \qquad (3)$$

Từ (1) và (3) suy ra :

– $\widehat{MAB_1} = \widehat{CTB_1}$ và do đó A, M, T, B_1 cùng thuộc một đường tròn ; từ đó :

$\widehat{MAT} = \widehat{MB_1T}$, hay là : $\widehat{BAT} = \widehat{MB_1T}$; (4)

– Đường thẳng MB_1 là tiếp tuyến tại B_1 của đường tròn $v_1(A_1B_1C)$ và do đó :

$\widehat{MB_1T} = \widehat{B_1CT}$, hay là : $\widehat{MB_1T} = \widehat{ACM}$; (5)

Từ (2) suy ra $\triangle CA_1M_2 \overset{\cdot}{\backsim} \triangle CAM$ và do đó :

$$\widehat{ACM} = \widehat{M_1CA_1} = \widehat{T_1CB} \qquad (6)$$

Cuối cùng, vì T_1 nằm trên đường tròn v(ABC), nên ta được :

$$\widehat{T_1CB} = \widehat{T_1AB} \qquad (7)$$

Từ (4), (5), (6) và (7) suy ra :

$$\widehat{BAT} = \widehat{T_1AB} \qquad (8)$$

Chứng minh tương tự, ta được :

$$\widehat{TBA} = \widehat{ABT_1} \qquad (9)$$

Từ (8) và (9) suy ra : $\triangle ABT_1 \overset{\cdot}{=} \triangle ABT$ và do đó T_1 và T đối xứng với nhau qua đường thẳng AB (đ.p.c.m.). (Kí hiệu $\overset{\cdot}{=}$ chỉ rằng hai tam giác ABT_1 và ABT bằng nhau, nhưng ngược hướng).

Lời giải 2. (Dựa theo Trần Nam Dũng, 11CT, Phan Bội Châu, Nghệ An và một số bạn khác). Gọi T_2 là giao điểm thứ hai của đường thẳng CM với đường tròn v(ABC). Cũng chứng minh như trên, vì CM và CM_1 là hai trung tuyến tương ứng của hai tam giác đồng dạng (nghịch) ABC và A_1B_1C, nên ta được (6), cũng tức là :

và ta được : $AT_1 = BT_2, BT_1 = AT_2$ (10)

Mặt khác, chứng minh tương tự như (1) và (3) ở trên, ta đi đến kết luận : MA_1 là tiếp tuyến ở A_1 của đường tròn $\upsilon_1(A_1B_1C)$ và do đó ta được các hệ thức :

$MC.MT = MA_1^2 = MA.MB = MC.MT_2$ ($= \mathcal{P}M/\upsilon_1(A_1B_1C)$). Từ đó suy ra : $MT = MT_2$, do đó TAT_2B là một hình bình hành và vì vậy : $BT_2 = AT$ và $AT_2 = BT$; (11).

Từ (10) và (11) suy ra : $AT_1 = AT$, $BT_1 = BT$, do đó $\overset{\Delta_1}{ABT} = \overset{\Delta}{ABT}$ và $T_1 = D_{AB}(T)$.

Nhận xét : 1°) Nhiều bạn nhận xét rằng, bài toán này chính là bài toán T5/211 cho PTCS, đã đăng trên tạp chí THvTT số 211 ra tháng 01/1995 (chỉ có thay đổi cách phát biểu đôi chút).

2°) Ta vẫn có kết quả như trên khi tam giác ABC có góc C tù. Thật vậy, sử dụng góc có hướng giữa hai đường thẳng, các hệ thức (1) → (9) vẫn đúng khi viết chúng dưới dạng góc có hướng ; chẳng hạn, các hệ thức (8) và (9) được viết lại như sau :

$(AB, AT) = (AT_1, AB)$, (8')

$(BT, BA) = (BA, BT_1)$; (9')

Như vậy, giả thiết tam giác ABC phải nhọn là không cần thiết, chỉ cần giả thiết tam giác ABC không vuông ở C mà thôi (để $A_1 \neq B_1$).

NGUYỄN ĐĂNG PHẤT

Bài T10/229. *Gọi G là trọng tâm của tứ diện ABCD, nội tiếp mặt cầu (O). Các đường thẳng AG, BG, CG và DF cắt lại (O) theo thứ tự ở A_1, B_1, C_1 và D_1. Chứng minh rằng :*

$$GA_1 + GB_1 + GC_1 + GD_1 \geq GA + GB + GC + GD \quad (*)$$

Lời giải. (của nhiều bạn). Gọi R là bán kính mặt cầu (O), thì ta có : $GA.GA_1 = GB.GB_1 = GC.GC_1 = GD.GD_1 = \mathcal{P}G/(O) = R^2 - OG^2$

Do đó ta được :

$$GA_1 + GB_1 + GC_1 + GD_1 = (R^2 - OG^2) \times \left(\frac{1}{GA} + \frac{1}{GB} + \frac{1}{GC} + \frac{1}{GD}\right) ; \quad (1)$$

Lại có :

$$4(R^2 - OG^2) = \vec{OA}^2 + \vec{OB}^2 + \vec{OC}^2 + \vec{OD}^2 - 4OG^2 = (\vec{OG} + \vec{GA})^2 + (\vec{OG} + \vec{GB})^2 + (\vec{OG} + \vec{GC})^2 + (\vec{OG} + \vec{GD})^2 - 4OG^2 = GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2 + 2\vec{OG}(\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD}) = GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2 \geq \frac{1}{4}(GA + GB + GC + GD)^2$$

hay là :

$$R^2 - OG^2 \geq \frac{1}{16}(GA + GB + GC + GD)^2 ; \quad (2)$$

Mặt khác, ta lại có (theo bất đẳng thức Côsi) :

$$(GA + GB + GC + GD) \times \left(\frac{1}{GA} + \frac{1}{GB} + \frac{1}{GC} + \frac{1}{GD}\right) \geq 16 \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) ta được (*), đ.p.c.m.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi : $GA = GB = GC = GD$ $(= R)$, nghĩa là $G \equiv O$, và tứ diện $ABCD$ là gần đều (Có thể chứng minh điều này bằng phương pháp véctơ).

Nhận xét : 1°) Khá đông các bạn tham gia giải bài toán trên và đều cho lời giải đúng ; tuy nhiên một số bạn trình bày lời giải còn rườm rà.

2°) Bạn Phùng Đức Tuấn, lớp 10 CT PTNK Hải Hưng và bạn Trần C Hà, lớp 11 CT, PTNK Đồng Hới, **Quảng Bình** đã đề xuất và cho lời giải đúng bài toán tổng quát hơn : "Nếu G là trọng tâm của hệ n điểm $\{A_i\ (i = 1, 2, ..., n)\}$ nằm trên mặt cầu (O) và các đường thẳng A_iG cắt lại (O) ở A'_i $(i = 1, 2, ..., n)$, thì ta có B.Đ.T. sau :

$\sum_{i=1}^{n} GA'_i \geq \sum_{i=1}^{n} GA_i$ }. Dấu đẳng thức đạt được khi và chỉ khi $G \equiv 0$

NGUYỄN ĐĂNG PHẤT

Bài L1/229. *Một con lắc lò xo có khối lượng $m = 200g$ và dao động bởi chu kì $T = 2s$. Tại thời điểm $t = 1s$ con lắc có vận tốc $v = -25\sqrt{2}\,\pi \,.\, 10^{-3}$ m/s và có thế năng $W_t = 125\pi^2 \,.\, 10^{-6}$ J. Hãy viết phương trình dao động của con lắc và tính năng lượng của nó.*

Hướng dẫn giải. Phương trình dao động điều hòa có dạng

$x = A\sin(\omega t + \varphi)$ (1), với $\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi$ và $k = m\omega^2$. Từ điều kiện đã cho $x = -25\sqrt{2}\,\pi.10^{-3}$ m/s và $W_t = \frac{kx^2}{2} = 125\pi^2 \,.\, 10^{-6}$ J, thay vào (1), giải ra ta được A = 5cm ; $\varphi = -\frac{\pi}{4}$ → $x = 5\sin\left(\pi t - \frac{\pi}{4}\right)$ (cm).

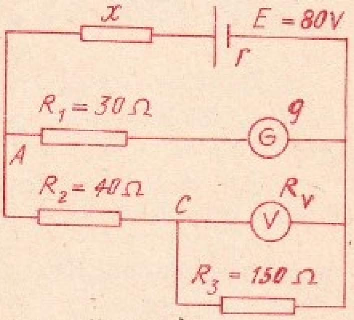
Năng lượng của con lắc :

$$W = W_d + W_t = W_{tmax} = \frac{kA^2}{2} = \frac{m\omega^2 A^2}{2} = 250 \,.\, \pi^2 \,.\, 10^{-6}\,J.$$

Nhận xét. Các em có lời giải đúng : *Trần Quang Vinh*, 12 Toán, trường chuyên Lê Khiết, **Quảng Ngãi** ; *Hán Văn Thắng*, 11A6, THCB Đào Duy Từ, **Thanh Hóa** ; *Vũ Mạnh Hùng*, 11B2, PTTH Bỉm Sơn, **Thanh Hóa** ; *Trương Cao Cường*, 12 Toán, trường chuyên Lê Khiết, **Quảng Ngãi**.

MAI ANH

Bài L2/229. *Cho mạch điện vẽ dưới, với $x + r = 48\,\Omega$, điện kế G chỉ 0,8A ; vôn kế chỉ 24V.*



1) Tính điện trở g của điện kế và R_v của vôn kế.

2) Tính điện trở x trong 2 trường hợp chuyển x sang // AB thì :

a) Điện trở toàn mạch đạt công suất cực đại P_{max}

b) Điện trở x đạt công suất cực đại P_{xmax}.

Hướng dẫn giải.

1) $E = I(r+x) + R_2(I - I_g) + U_v \to 80 = 48I + 40(I - 0{,}28) + 24 \to I = 1A$

$U_{AB} = R_2(I - I_g) + U_v = 32V \to g = \dfrac{U_{AB}}{I_g} - R_1 = 10\,\Omega$;

$$R_v = \frac{U_v}{I_v} = \frac{U_v}{I - I_g - \dfrac{U_v}{R_3}} = 600\,\Omega.$$

2) $R_{AB} = \dfrac{U_{AB}}{I} = 32\,\Omega.$

a) Khi x chuyển sang // AB thì mạch ngoài có điện trở $R = \dfrac{32x}{32+x}$ và có công suất P thỏa mãn $EI = rI^2 + P$. Từ đó $\Delta = E^2 - 4rP \geq 0 \to P_{max} = \dfrac{E^2}{4r}$ khi $\Delta = 0$. So sánh với biểu thức tổng quát $P = \dfrac{RE^2}{(r+R)^2}$ ta thấy khi có P_{max} thì $R = r$, suy ra $\dfrac{32x}{32+x} = 48 - x \to x = 32\Omega$;

b) Gọi I' là dòng qua x, I'_o là dòng qua đoạn mạch AB có chứa R_1, R_2, g, R_3, R. Ta có $I' = I - I_3 = \dfrac{E - U}{r} - \dfrac{U}{R_{AB}} = \dfrac{E' - U}{r}$ với $E' = 80 \cdot \dfrac{32}{32+r}$ và $r' = \dfrac{32r}{32+r}$

Từ đó P_x đạt cực đại khi $x = r' \to 48 - r = \dfrac{32r}{32+r} \to r = 32\Omega$, và do đó $x = 16$

Nhận xét. Các em có lời giải đúng : *Trần Mai Sơn Hà*, 11 CL, PTTH năng khiếu, Quảng Bình ; *Phan Văn Đức* 11L, PTTH Phan Bội Châu, Vinh, Nghệ An.

MAI ANH

VỀ MỘT TÍNH CHẤT

(tiếp theo trang 1)

Bây giờ, các bạn hãy dùng các kết quả trên để giải các bài tập sau :

Bài tập 1 : Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng a. Gọi M, N, P, Q là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA. Các đường thẳng AN, BP, CQ, DM cắt nhau tạo thành tứ giác $EFGH$. Chứng minh rằng

1) $EFGH$ là hình vuông

2) $S_{EFGH} = a^2/5$

Bài toán 2 : Dựng hình vuông $ABCD$ biết vị trí đỉnh A và vị trí trung điểm N của cạnh BC.

Bài toán 3 : Dựng hình vuông $ABCD$ biết vị trí tâm O và hai điểm M, N nằm trên hai cạnh đối diện của hình vuông.

Bài toán 4 : Dựng hình vuông ngoại tiếp một tứ giác cho trước (Đề thi vào chuyên toán ĐHTH và ĐHSP, 1972)

Bài toán 5 : Cho hình chữ nhật $ABCD$ và một điểm M chuyển động trên cạnh BC. Phân giác DAM cắt cạnh BC tại N. Xác định vị trí M để tỷ số $\dfrac{AN}{NM}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

(tiếp theo trang 9)

$$+2 \cdot \frac{1}{4}\left(|\vec{AB} + \vec{AC}|^2 - |\vec{AB} - \vec{AC}|^2\right)$$

$$= AB^2 + AC^2 + \frac{1}{2}(4AI^2 - CB^2)$$

Do đó $AI^2 = \dfrac{AB^2 + AC^2}{2} - \dfrac{BC^2}{4}$, hay là : $m_a^2 = \dfrac{b^2 + c^2}{2} - \dfrac{a^2}{4}$.

b) Cách 2 : Gọi I là trung điểm cạnh BC.

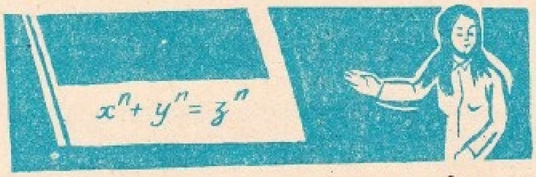
Ta có : $BC^2 = \vec{BC}^2 = (\vec{AC} - \vec{AB})^2 = AC^2 + AB^2 - 2\,\vec{AC}.\vec{AB} = AC^2 + AB^2 - 2 \cdot \dfrac{1}{4}\left(|\vec{AC} + \vec{AB}|^2 - |\vec{AC} - \vec{AB}|^2\right)$

$$= AC^2 + AB^2 - \frac{1}{2}(4AI^2 - BC^2)$$

Suy ra $AI^2 = \dfrac{AC^2 + AB^2}{2} - \dfrac{BC^2}{4}$; hay là $m_a^2 = \dfrac{b^2 + c^2}{2} - \dfrac{c^2}{4}$.

Ở đây cách trình bầy 1 tự nhiên và cho thấy rõ yếu tố cần tìm, còn cách trình bầy 2 lại sử dụng đúng kĩ thuật chứng minh mà các tác giả đã dùng trước đó đối với định lí hàm số côsin. Hơn nữa cả 2 cách nêu trên đều có tác dụng củng cố định nghĩa tích vô hướng của 2 vectơ mà các tác giả đã đưa ra.

Cuối cùng xin có một đề nghị với các tác giả : Nên chăng việc đưa định lí hàm số sin lên trước, gắn việc xây dựng định lí hàm số côsin với việc xây dựng công thức tính độ dài trung tuyến tam giác như thứ tự đã trình bầy trong những năm trước đây./.



ĐỀ RA KÌ NÀY

CÁC LỚP THCS

Bài T1/233 : Cho dãy số nguyên $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ thỏa mãn :

$$a_{n+2} + a_{n-1} = 2(a_{n+1} + a_n) \quad \forall n \geq 1$$

Chứng tỏ rằng tồn tại số nguyên M không phụ thuộc n sao cho :

$$M + 4a_{n+1} \cdot a_n$$

là số chính phương $\forall n \geq 0$

DOÀN QUANG MẠNH
(Hải Phòng)

Bài T2/233 : Chứng minh rằng nếu $(a+c)(a+b+c) < 0$, thì $(b-c)^2 > 4a(a+b+c)$

NGUYỄN ĐỄ
(Hải Phòng)

Bài T3/233 : Các số nguyên không âm, a, b, c, d thỏa mãn điều kiện :

$$\begin{cases} a^2 + 2b^2 + 3c^2 + 4d^2 = 36 & (1) \\ 2a^2 + b^2 - 2d^2 = 6 & (2) \end{cases}$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của $p = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$

PHẠM HÙNG
(Hà Nội)

Bài T4/233 : Cho tam giác ABC nhọn. Gọi $(0, 1)$ là đường tròn tâm O, bán kính bằng 1 ngoại tiếp tam giác ABC.

Chứng minh rằng : $a + b + c \geq abc$.

Dấu "=" xảy ra khi nào ?

DOÀN VĂN TRÚC
(Quảng Ngãi).

Bài T5/233 : Cho tam giác vuông ABC ($\hat{A} = 90^o$) đường cao AH, trung tuyến BM và phân giác CD đồng quy tại một điểm. Chứng minh rằng $\sin B = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}$

Từ đó suy ra cách dựng một tam giác có tính chất nêu trên.

VI QUỐC DŨNG
(Bắc Thái).

CÁC LỚP THCB

Bài T6/233 : Cho m là số thực dương.

Với mỗi n nguyên dương dãy số thực $\{a_{n,i}\}_{i=0}^{n}$ được xác định như sau :

$$a_{n,0} = 1 \quad a_{n,i+1} = a_{n,i}\left(1 + \frac{1}{m.n}a_{n,i}\right) \text{ với}$$

$i = 0, 1, \ldots n-1$

1) Chứng minh rằng nếu $m \leq 1$ thì $a_{n,n} > \sqrt{n+1}$ với mọi $n \in Z^+$

2) Giả sử $m > 1$. Chứng minh :

a) $a_{n,n} < \dfrac{m}{m-1}$ với mọi $n \in Z^+$

b) $\lim\limits_{n \to +\infty} a_{n,n} = \dfrac{m}{m-1}$

NGUYỄN MINH ĐỨC
(Hà Nội)

Bài T7/233 : Cho đa thức $f(x) = x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 1$. Hãy tính tổng $S = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{2x_i^2 + 1}{(x_i^2 - 1)^2}$ với n là số nghiệm và x_i là nghiệm của đa thức $f(x)$.

DOÀN THẾ PHIỆT
(Nam Hà)

Bài T8/233 : Cho ba số thực a, b, c thỏa mãn điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 = 2$. Chứng minh rằng :

1) $|a + b + c - abc| \leq 2$

2) $|a^3 + b^3 + c^3 - 3abc| \leq 2\sqrt{2}$

TRẦN XUÂN DÁNG
(Nam Hà)

Bài T9/233 : Cho tam giác ABC có các cạnh a, b, c các đường cao và trung tuyến tương ứng là $h_a, h_b, h_c, m_a, m_b, m_c$, diện tích S. Chứng minh rằng :

a) $a + b + c \geq 2\sqrt[4]{27}.\sqrt{S}$

b) $h_a.m_b^4 + h_b.m_c^4 + h_c.m_a^4 \geq 9\sqrt[4]{3}.S^2.\sqrt{S}$

LƯƠNG NGỌC VŨ
(Hà Tây).

Bài T10/233 : Cho tứ diện $ABCD$ và một điểm P sao cho $PA^2 + BC^2 + CD^2 + DB^2 = PB^2 + CD^2 + DA^2 + AC^2 = PC^2 + DA^2 + AB^2 + BD^2 = PD^2 + AB^2 + BC^2 + CA^2$.

Chứng minh rằng tồn tại trong không gian một điểm M thỏa mãn

$$AG_1 = BG_2 = CG_3 = DG_4$$

Trong đó G_1, G_2, G_3, G_4 lần lượt là trọng tâm của các tứ diện $MBCD, MCDA, MDAB, MABC$.

TRẦN DUY HINH
(Bình Định).

CÁC ĐỀ VẬT LÍ

Bài L1/233 : Từ 2 điểm A và B cách nhau 100m, xe 1 và xe 2 cùng xuất phát với cùng vận tốc $v_1 = v_2 = 10$ m/s. Xe 1 đi theo hướng hợp với AB góc 60^o. Biết rằng 2 xe sẽ gặp nhau ở C. Hãy xác định :

– Hướng chuyển động của xe 2 ?
– Thời điểm 2 xe gặp nhau ?
– Tọa độ điểm C ?.

PHẠM HÙNG QUYẾT
(Hà Nội)

Bài L2/233 : Một điện tích điểm $q = +2.10^{-8}$ c đứng cách tấm kim loại phẳng nối đất một khoảng $a = 3$cm. Hãy xác định lực tương tác giữa điện tích q và tấm kim loại đó khi đặt chúng trong chân không ?

NGUYỄN DUY TRUY
(Thái Bình).

Problems in this issue

FOR LOWER SECONDARY SCHOOLS

T1/233. Let the sequence of integers $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ satisfy

$a_{n+2} + a_{n-1} = 2(a_{n+1} + a_n)$, $\forall n \geq 1$.

Prove that there exists an integer M, not depending on n, such that

$$M + 4a_{n+1} \cdot a_n$$

is a perfect square for every $n \geq 0$.

T2/233 Prove that if $(a+c)(a+b+c)<0$ then

$$(b-c)^2 > 4a(a+b+c).$$

T3/233. The non positive integers a, b, c, d satisfy the conditions :

$$\begin{cases} a^2 + 2b^2 + 3c^2 + 4d^2 = 36 & (1) \\ 2a^2 + b^2 - 2d^2 = 6 & (2) \end{cases}$$

Find the least value of $P = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$.

T4/233. The radius of the circumcircle of an acuteangled triangle ABC equals 1. Prove that

$$a + b + c \geq abc.$$

When does equality occur ?

T5/233. The altitude AH, the median BM and the angled-bisector CD of a right triangle ABC $(A = 90^o)$ are concurrent. Prove that $sinB = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Deduce from it the construction of such a triangle.

FOR UPPER SECONDARY SCHOOLS

T6/233. Let m be a positive real number.

For every positive integer n, let $\{a_{n,i}\}_{i=0}^{\infty}$ be the sequence of real numbers defined by :

$a_{n,0} = 1$,

$$a_{n,i} = a_{n,i+1}\left(1 + \frac{1}{m.n}a_{n,i}\right) \; (i = 0, 1, ..., n-1).$$

1) Prove that if $m \leq 1$ then $a_{n,m} > \sqrt{n+1}$ for every $n \in \mathbb{Z}^+$.

2) Suppose that $m > 1$. Prove that :

a) $a_{n,n} < \dfrac{m}{m-1}$ for every $n \in \mathbb{Z}^+$

b) $\lim\limits_{n \to +\infty} a_{n,n} = \dfrac{m}{m-1}$.

T7/233. Consider the polynomial

$f(x) = x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 1$.

Calculate the sum $S = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{2x_i^2 + 1}{(x_i^2 - 1)^2}$

Where n is the number of roots and x_i $(i = 1, 2, ..., n)$ are the roots of $f(x)$.

T8/233. The real numbers a, b, c satisfy $a^2 + b^2 + c^2 = 2$. Prove that :

1) $|a + b + c - abc| \leq 2$,

2) $|a^3 + b^3 + c^3 - 3abc| \leq 2\sqrt{2}$.

T9/233. Let h_a, h_b, h_c and m_a, m_b, m_c be respectively the altitudes and the medians of a triangle with sides a, b, c and let S be its area. Prove that :

a) $a + b + c \geq 2\sqrt[4]{27}\sqrt{S}$,

b) $h_a m_b^4 + h_b m_c^4 + h_c m_a^4 \geq 9\sqrt[4]{3}\, S^2 \sqrt{S}$.

T10/233. Let be given a tetrahedron $ABCD$ and a point P such that

$PA^2 + BC^2 + CD^2 + DB^2 = PB^2 + CD^2 + DA^2 + AC^2 =$
$= PC^2 + DA^2 + AB^2 + BD^2 = PD^2 + AB^2 + BC^2 + CA^2$.

Prove that there exists a point M in space such that $AG_1 = BG_2 = CG_3 = DG_4$, where G_1, G_2, G_3, G_4 are respectively the centers of gravity of the tetrahedra $MBCD$, $MCDA$, $MDAB$, $MABC$.

Xây dựng công thức

TÍNH ĐỘ DÀI TRUNG TUYẾN CỦA TAM GIÁC

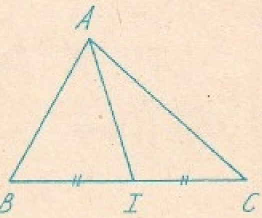
ĐỖ NHƯ NGỌC
(Hải Hưng)

Trong phần "Hệ thức lượng trong Tam giác" của sách giáo khoa lớp 10 Ban Khoa học Tự nhiên, các tác giả đã xây dựng công thức tính độ dài đường trung tuyến tam giác bằng phương pháp vectơ (như đã làm đối với định lí hàm số côsin). Đây là cách làm gọn và dễ hiểu. Tuy nhiên, còn có cách trình bầy khác hợp lí hơn.

Trước tiên, chúng ta xem các tác giả viết :

"Gọi I là trung điểm cạnh BC.

Ta có : $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IC}$
$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB}$



Do đó :

$\overrightarrow{CA}^2 + \overrightarrow{BA}^2 =$
$(\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IC})^2 + (\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB})^2 =$
$= (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IC})^2 + (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IC})^2 = 2IA^2 + 2IC^2$

Hay $b^2 + c^2 = 2m_a^2 + 2\left(\dfrac{a}{2}\right)^2$. Suy ra công thức đối với m_a"

Ở đây, theo tôi việc viết $\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BA}$ là chưa tự nhiên, vì học sinh thường viết $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}$ hoặc $\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB}$ (kiểu hoán vị vòng quanh). Mặt khác, mục đích là tìm m_a còn bị "khuất". Theo tôi nghĩ, có thể trình bầy theo 1 trong 2 cách sau đây :

a) Cách 1 :

Gọi I là trung điểm cạnh BC. Theo công thức trung điểm của đoạn thẳng : $2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

Suy ra : $4AI^2 = AB^2 + AC^2 + 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB^2 + AC^2 +$

(xem tiếp trang 7)

Dành cho các bạn chuẩn bị thi vào đại học

ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN TÍNH GIỚI HẠN

NGUYỄN THANH GIANG
(Hải Hưng)

• Nhắc lại : Định nghĩa tích phân (GT12)

Cho $f(x)$ xác định trên $[a, b]$

1. Chia đoạn $[a, b]$ thành n phần bằng nhau bởi $(n+1)$ điểm chia x_i $(i = \overline{0, n})$ như sau :

$x_o = a < x_1 < x_2 < ... < x_k < ... < x_n = b$ với

$x_o = a ; x_1 = a + \frac{b-a}{n} ; x_2 = a + \frac{2(b-a)}{n} ...$

$... x_n = a + n . \frac{b-a}{n} = b.$

2. Lấy $\xi_i = x_i \in [x_{i-1}, x_i]$ $i = \overline{1,n}$

$\Rightarrow \xi_i = a + i\frac{b-a}{n}$. Tính $f(\xi_i) = f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right)$

3. Lập tổng

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right) \times$$

$$\times \frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{n}\left[f\left(a + \frac{b-a}{n}\right) + \right.$$

$$\left. + f\left(a + \frac{2(b-a)}{n}\right) + ... + f\left(a + n.\frac{b-a}{n}\right)\right].$$

(S_n : Tổng tích phân (tổng Rieman) của hàm f ứng với phân hoạch đều $[a, b]$ ứng với cách chọn ξ_i ở bước 2)

4. Nếu $f(x)$ liên tục trên $[a,b]$ thì

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_a^b f(x)dx.$$

• Để tìm giới hạn tổng $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$ ($\lim\limits_{n\to\infty} S_n$) phụ thuộc vào $n \in \mathbb{N}$ trong nhiều trường hợp ta có thể dẫn đến dạng tổng tích phân $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i$ rồi tính tích phân tương ứng. Bằng cách tính tích phân ta tính được giới hạn cần tìm.

Bài toán : Cho $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$. Tính $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$?

Ngoài cách tính trực tiếp tổng S_n nhờ công thức biến đổi (đặc biệt là công thức cấp số cộng (cấp số nhân) ta rút gọn S_n theo n từ đó suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ ta có thể tính giới hạn nhờ tích phân theo các bước sau :

Bước 1 : Biến đổi S_n thành dạng :

$$S_n = \frac{b-a}{n}\left[f\left(a + 1.\frac{b-a}{n}\right) + f\left(a + 2.\frac{b-a}{n}\right) + \right.$$

$$\left. + ... + f\left(a + n.\frac{b-a}{n}\right)\right] = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(a + i.\frac{b-a}{n}\right)$$

Bước 2 : Chỉ ra hàm f và chứng minh f liên tục trên $[a, b]$.

Bước 3 : Kết luận $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \int_a^b f(x)dx$

Trong thực hành ta thường gặp trường hợp đơn giản $a = 0 ; b = 1$. Khi đó :

Bước 1 : Biến đổi S_n thành dạng

$$S_n = \frac{1}{a}\left[f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + ... + f\left(\frac{n}{n}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{1}{n}\right).$$

Bước 2 : Chỉ ra hàm f và chứng minh f liên tục trên $[0, 1]$

Bước 3 : Kết luận $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \int_0^1 f(x)dx.$

• Sau đây là một số thí dụ :

VD1 : Cho $S_n = \frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + ... + \frac{n}{n^2+n^2}$.

Tính $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

Ta có : $S_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}$. Xét $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

trên $[0, 1] \Rightarrow f(x)$ liên tục trên $[0, 1]$

Khi đó : S_n là tổng tích phân của $f(x)$ trên $[0, 1]$ với phép chia $[0, 1]$ thành n phần bằng nhau bởi các điểm chia $x_i = \frac{i}{n}$ $(i = \overline{on})$ với cách chọn $\xi_i = \frac{i}{n} \in [x_{i-1}, x_i]$ $(i = \overline{1n})$ tức là :

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2} \cdot \frac{1}{n} =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{f}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}\left(\Delta_i = x_i - x_{i-1} = \frac{1}{n}\right).$$

Do đó $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = arctgx\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$

VD2 : Tính

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{4n^2-1}} + \frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}}\right].$$

Ta có :

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{4n^2-1}} + \frac{1}{\sqrt{4n^2-2^2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{4n^2-n^2}} =$$

$$= \frac{1}{n}\left[\frac{1}{\sqrt{4-\frac{1}{n^2}}} + \frac{1}{\sqrt{4-\left(\frac{2}{n}\right)^2}} + \right.$$

$$\left. \dots + \frac{1}{\sqrt{4-\left(\frac{n}{n}\right)^2}} \right]$$

Xét $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ trên $[0\ ,\ 1] \Rightarrow f(x)$ liên tục trên $[0, 1]$.

Chia $[0, 1]$ thành n phần bằng nhau bởi các điểm chia $x_i = \frac{i}{n}$ $(i = \overline{on})$. Trên mỗi đoạn $[x_{i-1}, x_i]$ lấy $\xi_i = \frac{i}{n}$ $(i = \overline{1n})$; $\Delta_i = x_i - x_{i-1} = \frac{1}{n}$.

Ta có tổng tích phân :

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{4-\left(\frac{i}{n}\right)^2}}\,\frac{1}{n} =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{4-\left(\frac{i}{n}\right)^2}} = \delta_n$$

Do đó

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}} = I$$

Đặt $\frac{x}{2} = \cos t$ $\left(t \in \left[\frac{\pi}{3} ; \frac{\pi}{2}\right]\right)$

$\Rightarrow dx = -2\cos int\, dt$; $x = 0 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}$; $x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{3}$.

Do đó

$$I = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{-2\sin t\, dt}{\sin t} = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} dt = t\,\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}.$$

Vậy $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \frac{\pi}{6}$.

VD3 : (Đề thi ĐHQG Hà Nội khối D – năm 1995)

Tìm

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left(1 + \cos\frac{\pi}{n} + \cos\frac{2\pi}{n} + \dots + \cos\frac{n-1}{n}\pi\right)$$

Đặt

$$S_n = \frac{1}{n}\left(1 + \cos\frac{\pi}{n} + \cos\frac{2\pi}{n} + \dots + \cos\frac{n-1}{n}\pi\right) =$$

$$= \frac{1}{n}\left(\cos\frac{n-1}{n}\pi + \dots + \cos\frac{2\pi}{n} + \cos\frac{\pi}{n} + \cos\frac{0-\pi}{n}\right)$$

Xét $f(x) = \cos \pi x$ *trên* $[0, 1]$

Chia $[0, 1]$ thành n phần bằng nhau bởi các điểm chia $x_i = \frac{i}{n}$ $(i = \overline{on})$ chọn $\xi_i = \frac{i}{n}$ $(i = \overline{o; n-1})$ thuộc $[x_{i-1}, x_i]$ với $i = \overline{1n}$ và $\Delta_i = \frac{1}{n}$.

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,\Delta_i = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \cos\pi \cdot \frac{i}{n} = \frac{1}{n}\left(\cos\frac{0 \cdot \pi}{n} + \right.$$

$$\left. + \cos\frac{\pi}{n} + \dots + \cos\frac{n-1}{n}\pi\right) = S_n$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} S_n = \int_0^1 \cos \pi x\, dx = \frac{\sin \pi x}{\pi}\,\Big|_0^1 = 0.$$

VD4 : Tính

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\dots\left(1+\frac{n}{n}\right)\right]^{\frac{1}{n}}$$

Đặt

$P_n = \left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\dots\left(1+\frac{n}{n}\right)\right]^{\frac{1}{n}}$ và

$$S_n = \ln P_n = \frac{1}{n}\left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \dots + \ln\left(1+\frac{n}{n}\right)\right]$$

Xét hàm số $y = f(x) = \ln(1+x)$ liên tục trên $[0 ; 1]$

Khi đó S_n là tổng tích phân của hàm $f(x)$ trên $[0, 1]$ coi phép chia $[0, 1]$ thành n phần bằng nhau bởi các điểm chia $x_i = \frac{i}{n}$ và chọn $\xi_i = \frac{i}{n} \in [x_{i-1}, x_i]$ $(i = \overline{1n})$ với $\Delta_i = \frac{1}{n}$.

Do đó $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \int_o^1 \ln(1+x)dx = x\ln(1+x)\,\Big|_o^1 -$

$$-\int_o^1 \frac{xdx}{x+1} = \ln 2 - \int_o^1 dx + \int_o^1 \frac{dx}{x+1} = 2\ln 2 - 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} P_n = \lim_{n\to+\infty} e^{S_n} = e^{\lim\limits_{n\to+\infty} S_n} = e^{2\ln 2 - 1}$$

Ta xét ví dụ mà hàm lấy tích phân xác định tên *[a, b]* không là $[0 ; 1]$

VD5

Tính
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\pi^2}{n^2}\left[\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{1+\cos^2\frac{\pi}{n}} + \frac{2\sin\frac{2\pi}{n}}{1+\cos^2\frac{2\pi}{n}} + \right.$$

$$\left. + \dots + \frac{n\sin\frac{n\pi}{\pi}}{1 + cossp2\frac{n\pi}{\pi}}\right]$$

Đặt
$$S_n = \frac{\pi^2}{n^2}\left[\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{1+\cos^2\frac{\pi}{n}} + \frac{2\sin\frac{2\pi}{n}}{1+\cos^2\frac{2\pi}{n}} + \right.$$

$$\left. + \dots + \frac{n\sin\frac{n\pi}{n}}{1+\cos^2\frac{n\pi}{\pi}}\right] = \frac{\pi}{n}\left[\frac{\frac{\pi}{n}\sin\frac{\pi}{n}}{1+\cos^2\frac{\pi}{n}} + \frac{\frac{2\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}}{1+\cos^2\frac{2\pi}{n}} + \right.$$

$$\left. + \dots + \frac{\frac{n\pi}{n}\sin\frac{n\pi}{n}}{1+co^2\frac{n\pi}{n}}\right] = \frac{\pi}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i\pi}{n}\right)$$

$$= \frac{\pi - 0}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(0 + i\,\frac{\pi - 0}{n}\right)$$

Xét $f(x) = \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}$ Liên tục trên $[0, \pi]$

(xem tiếp trang 13)

ĐỊNH NGHĨA 3 ĐƯỜNG CÔNIC TRONG MẶT PHẲNG AFIN

NGUYỄN THÚC HÀO
(Hà Nội)

Trong hình học phổ thông, người ta định nghĩa đường elip và hypebol, với 2 tiêu điểm F, F', và bằng điều kiện là tổng hoặc hiệu của khoảng cách từ điểm M đến F và F' không đổi. Nếu là tổng, quỹ tích của M là đường elip ; nếu là hiệu thì quỹ tích của M là đường hypebol. Còn parabol thì là quỹ tích điểm M cách đều một điểm cố định F và đường thẳng cố định Δ. Cũng còn có định nghĩa chung cho 3 đường, với một tiêu điểm F và đường chuẩn tương ứng Δ. Điều kiện đặt ra là tỉ số μ của khoảng cách từ M đến F và Δ phải là hằng số. Quỹ tích của M là elip, hypebol hay parabol là tùy theo $\mu < 1$, $\mu > 1$, hay là $\mu = 1$.

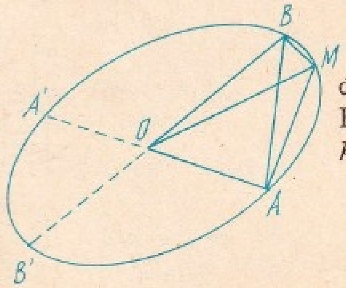
Nhưng trong hình học afin, chúng ta không thể làm như vậy, vì *khoảng cách là một khái niệm không có ý nghĩa gì trong hình học afin*. Thế cho nên sau đây, ta sẽ dùng *diện tích afin* (của bình hành hay tam giác), là một bất biến afin, để định nghĩa 3 cônic.

I. Định nghĩa đường elip

Cho 3 điểm O, A, B không thẳng hàng. Ta sẽ gọi là **elip** *quỹ tích điểm M sao cho* $\overline{OAM}^2 + \overline{OBM}^2 = \overline{OAB}^2$ (1)

tức là :

Tổng của bình phương diện tích hai tam giác MOA, MOB bằng bình phương diện tích tam giác OAB (xem hình 1)



Hình 1

Rõ ràng là A, B thuộc đường elip. Còn O là tâm (đối xứng) của elip. Ta hãy tìm phương trình của đường elip.

(Tức tam giác OAB là một *tam giác liên hợp*).

Ta hãy đặt $x = \overrightarrow{OM}$, $a = \overrightarrow{OA}$, $b = \overrightarrow{OB}$ Lấy diện tích bình hành (gấp đôi) thay diện tích tam giác, phương trình (1) viết được là

$$[x, a]^2 + [x, b]^2 = [a, b]^2 \qquad (2)$$

Đó là phương trình vectơ của đường elip.

Muốn có phương trình theo tọa độ, dưới dạng thu gọn, ta hay dùng a, b làm vectơ cơ sở. Ta đặt

$$x = \xi a + \eta b \qquad (3)$$

Ta suy ra

$$\left.\begin{aligned}[x, a] &= -\eta[a, b]\\ [x, b] &= \xi[a, b]\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Thay vào (2), ta được

$$\xi^2 + \eta^2 = 1 \qquad (5)$$

Chú ý. – Có thể chứng minh dễ dàng rằng OA, OB là hai bán kính liên hợp, tức AA', BB' *là hai đường kính liên hợp của đường elip.*

II. Định nghĩa đường hypebol

Cho ba điểm O, A, B không thẳng hàng. Ta sẽ gọi là **hypebol** *quỹ tích điểm M sao cho hiệu số của hai bình phương diện tích của hai tam giác MOB, MOA* (theo thứ tự) *bằng bình phương diện tích của tam giác AOB*. Tức là (hình 2)

$$\overline{OBM}^2 - \overline{OAM}^2 = \overline{OAB}^2 \qquad (6)$$

Ta có phương trình vectơ bằng cách đặt $\overrightarrow{OM} = x$, $\overrightarrow{OA} = a$, $\overrightarrow{OB} = b$

Phương trình (6) sẽ viết được là

$$[x, b]^2 - [x, a]^2 = [a, b]^2 \qquad (7)$$

Phương trình theo tọa độ, với cơ sở $\{a, b\}$, sẽ có được, căn cứ vào (4) :

$$\xi^2 - \eta^2 = 1 \qquad (8)$$

Ta thấy rằng O là *tâm* của đường hypebol, điểm A thuộc hypebol còn điểm B thì không. Hai đường thẳng chứa OA và OB là *hai đường kính liên hợp*.

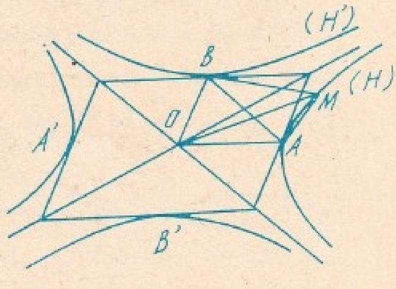
Chú ý. Nếu thay điều kiện (6) bằng

$$\overline{OAM}^2 - \overline{OBM}^2 = \overline{OAB}^2 \qquad (6')$$

thì quỹ tích của M sẽ có phương trình

$$\xi^2 - \eta^2 = -1 \qquad (8')$$

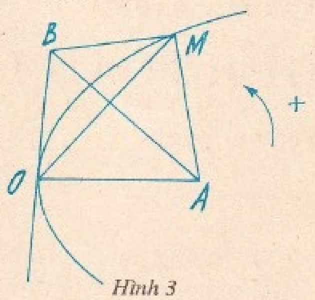
Đó là *đường hypebol liên hợp* của đường (8). Nó chứa điểm B mà không chứa điểm A. Trong hình vẽ đường H là đường có phương trình (6) còn H' là đường hypebol liên hợp có phương trình (6').



Hình 2

III. Định nghĩa đường parabol

Cho 3 điểm không thẳng hàng O, A, B. Quỹ tích điểm M ở cùng một phía với A đối với đường thẳng OB, sao cho bình phương diện tích tam giác OMA bằng tích số của diện tích OMB với diện tích OAB, được gọi là một đường **parabol**. Ta có điều kiện



Hình 3

$$\overline{OMA}^2 = \overline{OBM}\,.\,\overline{OAB} \qquad (9)$$

A và M cùng phía đường thẳng OB (hình 3).

Đặt $\vec{OM} = x$, $\vec{OA} = a$, $\vec{OB} = b$

Phương trình viết được là

$$[x, a]^2 = [x, b][a, b] \qquad (10)$$

Chuyển sang tọa độ theo (3) và (4) ta sẽ được

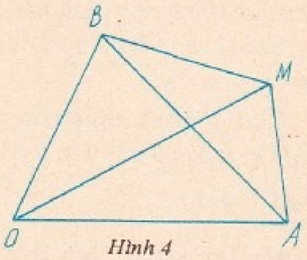
$$\eta^2 = \xi \qquad (11)$$

Đường thẳng OB là tiếp tuyến tại O. Phương OA là viễn phương của parabol.

IV. Định nghĩa chung 3 cônic

Trên đây, chúng ta đã định nghĩa riêng mỗi đường cônic và lập phương trình của chúng dưới dạng chính tắc.

Bây giờ ta hãy xét quỹ tích sau và định nghĩa nó.



Hình 4

Cho 3 điểm không thẳng hàng O, A, B. Ta sẽ gọi là **cônic** *quỹ tích điểm M sao cho* (hình 4) :

$$\overline{MOA}^2 + \overline{MOB}^2 = \frac{\mu}{2}\overline{MAB}^2 \quad (12) \quad (\mu \text{ là hằng số})$$

Cũng với kí hiệu như trên, ta có phương trình sau :

$$[x, a]^2 + [x, b]^2 = \frac{\mu}{2}[x - a, x - b]^2, \mu = \text{const.}$$

hay là

$$2([x, a]^2 + [x, b]^2) - \mu(-[x, b] + [x, a] + [ab])^2 = 0 \Rightarrow$$

$$(2 - \mu)([x, a]^2 + [x, b]^2) + 2\mu[x, a][x, b] -$$

$$-2\mu[a, b][x, a - b] - \mu[a, b]^2 = 0 \quad (13)$$

Phương trình trên có dạng

$$\Omega(xx) + 2\Lambda(x) + \alpha = 0 \qquad (14)$$

trong đó $\Omega(xx)$ là dạng toàn phương

$$\Omega(xx) = (2-\mu)([x, a]^2 + [x, b]^2) + 2\mu[x, a][x, b] \quad (15)$$

còn $\Lambda(x)$ là dạng tuyến tính

$$\Lambda(x) = -\mu[a, b][x, a - b] \qquad (16)$$

và α là hằng số

$$\alpha = -\mu[a, b]^2 \qquad (17)$$

Cùng với các kí hiệu như trong các phần trên, ta sẽ có phương trình sau của cônic, theo tọa độ ξ, η của M

$$(2-\mu)(\xi^2 + \eta^2) - 2\mu\xi\eta + 2\mu(\xi + \eta) - \mu = 0 \quad (18)$$

Trong phương trình (18), ta có định thức của dạng toàn phương là

$$\omega = \begin{vmatrix} 2 - \mu & -\mu \\ -\mu & 2 - \mu \end{vmatrix} = (2 - \mu)^2 - \mu = 4(1 - \mu)$$

Ta suy ra

1) nếu $\mu < 1$ thì $\omega > o$, ta có giống elip
2) nếu $\mu > 1$ thì $\omega < 0$, ta có giống hypebol
3) nếu $\mu = 1$ thì $\omega = 0$, ta có giống parabol.

Chú ý 1°) Căn cứ vào phương trình (18), độc giả có thể tìm tâm của cônic hoặc tìm giá trị của μ làm cho cônic suy biến.

2°) Đặc biệt, độc giả có thể thấy được 3 điểm O, A, B là *liên hợp với nhau từng đôi một*, đối với đường cônic (tức tam giác OAB là một *tam giác liên hợp*).

ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN ...

(tiếp theo trang 11)

Chia $[0, \pi]$ thành n phần bằng nhau bởi các điểm chia $x_i = \frac{i\pi}{n}$ $(i = \overline{0n})$

Trên mỗi đoạn $[x_{i-1}, x_i]$ chọn $\xi_i = \frac{i\pi}{n}$ $(i = \overline{1n})$ và $\Delta_i = \frac{\pi}{n}$

$$\text{Ta có } \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta_i = \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i\pi}{n}\right)\frac{\pi}{n} = \frac{\pi}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i\pi}{n}\right) = S_n$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} S_n = \int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1 + \cos^2 x}\,dx = J$$

Bằng phương pháp đổi biến bạn tính được $J = \frac{\pi^2}{4}$ (Đặt $x = \pi - t$).

Cuối cùng mời bạn làm một số bài tập tương tự sau :

1. Tính $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n}\right)$ (Đề 56 câu IVa)

2. Tính $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\frac{1^2}{2^3 + n^3} + \frac{2^2}{4^3 + n^3} + \dots + \frac{k^3}{(2k)^3 + n^3} + \dots + \frac{n^2}{(2n)^3 + n^3}\right]$ (Đề 134. IVa)

3. Tính $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1^5 + 2^5 + \dots + n^5}{n^6}$ (Đề 24. IVa)

4. Tính $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \dots + \sin\frac{n-1}{n}\pi\right)$ (Đề 59.IVa)

5. Tính $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1 + \sin\frac{\pi}{2n}} + \frac{1}{1 + \sin\frac{2\pi}{2n}} + \dots + \frac{1}{1 + \sin\frac{k\pi}{2n}} + \dots + \frac{1}{1 + \sin\frac{n\pi}{2n}}\right)$

(ĐHQG Hà Nội 1995 khối A).

ĐỀ THI QUỐC GIA CHỌN HỌC SINH GIỎI TOÁN LỚP 9

NĂM HỌC 1995 - 1996

NGUYỄN HỮU THẢO
(Hà Nội)

Bảng A *(180 phút, không kể thời gian giao đề)*

Bài 1. a. Tìm tất cả các số có hai chữ số $\overline{ab}$ sao cho $\dfrac{ab}{|a-b|}$ là số nguyên tố.

b. Với 100 số tự nhiên bất kì, hỏi có thể chọn ra được không 10 số để sao cho hiệu hai số tùy ý trong 10 số này chia hết cho 11 ?

Bài 2. a. Cho a, b là các số dương thỏa mãn điều kiện $a^2 = b + 3992$ và x, y, z là nghiệm dương của hệ phương trình

$$\begin{cases} x+y+z=a \\ x^2+y^2+z^2=b \end{cases}$$

Chứng minh rằng giá trị của biểu thức P sau đây không phụ thuộc vào x, y, z :

$$P = x\sqrt{\frac{(1996+y^2)(1996+z^2)}{1996+x^2}} + y\sqrt{\frac{(1996+z^2)(1996+x^2)}{1996+y^2}} + z\sqrt{\frac{(1996+x^2)(1996+y^2)}{1996+z^2}}$$

b. Cho n số thực dương x_1, x_2, ..., x_n và khi thay đổi thứ tự vị trí của n số đó, ta được x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_n} $(n > 1)$.

Chứng minh rằng :

$$\sqrt{\frac{x_1^2}{x_{i_1}} + \frac{x_2^2}{x_{i_2}} + \dots + \frac{x_n^2}{x_{i_n}}} \geqslant \frac{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\dots+\sqrt{x_n}}{\sqrt{n}}$$

Bài 3. Cho tam giác nhọn ABC và AD, BE, CF là các phân giác trong của nó. Gọi S_o và S lần lượt là diện tích của các tam giác DEF và ABC. a. Chứng minh rằng $4S_o \leqslant S$.

b. Với mỗi điểm M nằm trong tam giác ABC (M không thuộc các cạnh của tam giác ABC), gọi a', b', c' lần lượt là độ dài của các khoảng cách từ M đến các cạnh BC, AC và AB ; tìm tập hợp những điểm M thỏa mãn hệ thức $a' < b' < c'$.

Bài 4. a. Cho đường tròn (C) nằm trong góc xoy (đường tròn (C) không có điểm chung với các cạnh của góc xoy). Hãy tìm trên đường tròn (C) một điểm M sao cho tổng các khoảng cách từ M đến hai đường thẳng chứa các cạnh của góc xoy là nhỏ nhất.

b. Trong mặt phẳng tọa độ xoy (o là gốc tọa độ), người ta vẽ một đường tròn có tâm là điểm C (3 ; 4), bán kính bằng 2 đơn vị.

Hãy tính giá trị nhỏ nhất của tổng các khoảng cách từ điểm M trên đường tròn tâm C nói trên đến hai trục tọa độ ox và oy.

Bảng B *(180 phút, không kể thời gian giao đề)*

Bài 1. a. Tìm tất cả các số có hai chữ số $\overline{ab}$ sao cho $\dfrac{a\,.\,b}{|a-b|}$ là số nguyên tố.

b. Với 100 số tự nhiên bất kì, hỏi có thể chọn ra được không 10 số để sao cho hiệu hai số tùy ý trong 10 số này chia hết cho 11 ?

Bài 2. a. Cho 9 số dương a_1, a_2, a_3, ..., a_9 nhỏ hơn 1.

Chứng minh rằng trong 9 tích số :

$a_1(1-a_2)$, $a_2(1-a_3)$, $a_3(1-a_4)$,...,$a_8(1-a_9)$, $a_9(1-a_1)$;

tồn tại ít nhất một tích số không lớn hơn $\dfrac{1}{4}$.

b. Cho n số thực dương x_1, x_2, ..., x_n và khi thay đổi thứ tự vị trí của n số đó, ta được x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_n} $(n > 1)$.

Chứng minh rằng :

$$\sqrt{\frac{x_1^2}{x_{i_1}} + \frac{x_2^2}{x_{i_2}} + \dots + \frac{x_n^2}{x_{i_n}}} \geqslant \frac{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\dots+\sqrt{x_n}}{\sqrt{n}}$$

Bài 3. Cho điểm A cố định và hai điểm B, C di động sao cho $AB = a$, $AC = b$ (a, b là hai số dương cho trước). Người ta vẽ tam giác đều BCD sao cho A và D thuộc hai nửa mặt phẳng đối nhau mà bờ là đường thẳng BC.

Hãy xác định độ lớn của góc BAC khi AD có độ dài lớn nhất.

Bài 4. a. Cho đường tròn (C) nằm trong góc xoy (đường tròn (C) không có điểm chung với các cạnh của góc xoy). Hãy tìm trên đường tròn (C) một điểm M sao cho tổng các khoảng cách từ M đến hai đường thẳng chứa các cạnh của góc xoy là nhỏ nhất.

b. Trong mặt phẳng tọa độ xoy (o là gốc tọa độ), người ta vẽ một đường tròn có tâm là điểm C (3 ; 4), bán kính bằng 2 đơn vị.

Hãy tính giá trị nhỏ nhất của tổng các khoảng cách từ điểm M trên đường tròn tâm C nói trên đến hai trục tọa độ ox và oy.

ĐÁP ÁN

Bảng A

Bài 1 Câu a) Nếu số $\overline{ab}$ thỏa mãn điều kiện bài toán thì $\overline{ba}$ cũng thỏa mãn điều kiện bài toán, vì $|a-b| = |b-a|$

Do đó, ta chỉ xét trường hợp $a > b$:

$\dfrac{a \,.\, b}{|a-b|} = \dfrac{a \,.\, b}{a-b} = p$ (1), với p nguyên tố và $0 < b < a \leqslant 9$

(1) $\Leftrightarrow p(a-b) = ab \Leftrightarrow pa - pb - ab + p^2 = p^2$

hay $p(a+p) - b(a+p) = p^2 \Leftrightarrow (a+p)(p-b) = p^2$ (*)

Vì p nguyên tố nên các ước của p^2 là ± 1 ; $\pm p$; $\pm p^2$.

Từ đẳng thức (*) và do $a + p > 0$ nên $p - b > 0$

$\Rightarrow$ loại bỏ các trường hợp -1, $-p$ và $-p^2$.

Mặt khác, vì $a + p > p - b$ nên từ đẳng thức (*)

suy ra : $\begin{cases} a + p = p^2 \\ p - b = 1 \end{cases}$

Từ đó : $\begin{cases} a = p^2 - p \\ b = p - 1 \end{cases}$

Do a, b là các chữ số và $a > b$ nên $0 < b < a \leqslant 9$, vì thế p chỉ có thể là 2 hoặc 3 (vì nếu $p \geqslant 5$ thì $a = p^2 - p > 9$). Với $p = 2$, thì $a = 2$, $b = 1$; ta có số 21

Với $p = 3$, thì $a = 6$, $b = 2$; ta có số 62

Hoán vị vai trò của các chữ số a và b ta được 4 số thỏa mãn đề bài là : 21, 62, 12 và 26.

Câu b) Ta biết rằng hiệu hai số chia hết cho 11 khi số dư trong phép chia hai số đó cho 11 bằng nhau. Một số khi chia cho 11 chỉ có 1 trong 11 số dư từ 0 đến 10.

Giả sử không thể chọn ra được 10 số từ 100 số đã cho khi chia cho 11 có số dư là 0, nghĩa là có không lớn hơn 9 số khi chia cho 11 có số dư đều là 0. và

Giả sử có không lớn hơn 9 số khi chia cho 11 có số dư là 1,

v.v...

và có không lớn hơn 9 số khi chia cho 11 có số dư là 10.

như vậy thì tất cả có không quá 99 số (9.11)

Điều này trái với giả thiết cho trước là 100 số.

Vậy, ít nhất cũng phải có 10 số nào đó khi chia cho 11 có cùng số dư ; hiệu hai số bất kì trong 10 số này chia hết cho 11 (đpcm).

Bài 2 *Câu a)* Theo giả thiết ta có : $x + y + z = a$

$\Rightarrow (x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy+yz+zx) = a^2$.

Thay $x^2 + y^2 + z^2 = b$ và $a^2 = b + 3992$

Suy ra $xy + yz + zx = \dfrac{3992}{2} = 1996$

ta có :

$1996 + y^2 = (xy + yz + zx) + y^2 =$
$= x(y+z) + y(y+z) = (y+z)(y+x)$

$1996 + z^2 = (xy + yz + zx) + z^2 =$
$= x(y+z) + z(y+z) = (x+z)(y+z)$

$1996 + x^2 = (xy + yz + zx) + x^2 =$
$= x(y+x) + z(y+x) = (y+x)(x+z)$

Từ đó :

$$\frac{(1996+y^2)(1996+z^2)}{1996+x^2} = \frac{(y+x)(x+z)(y+z)^2}{(y+x)(x+z)} = (y+z)^2$$

$$\frac{(1996+z^2)(1996+x^2)}{1996+y^2} = (z+x)^2$$

$$\frac{(1996+x^2)(1996+y^2)}{1996+z^2} = (x+y)^2$$

$\Rightarrow P = x\sqrt{(y+z)^2} + y\sqrt{(x+z)^2} + z\sqrt{(x+y)^2}$

Vì $x > 0, y > 0, z > 0$ nên $(y+z), (y+z), (x+y)$ đều là các số dương

Khai căn ta được

$P = x(y+z) + y(x+z) + z(x+y)$
$= 2(xy + yz + zx) = 2 \,.\, 1996 = 3992$

Vậy P không phụ thuộc vào x, y, z (đpcm)

Câu b

Đặt $A = \dfrac{x_1^2}{x_{i_1}} + \dfrac{x_2^2}{x_{i_2}} + ... + \dfrac{x_n^2}{x_{i_n}} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^2}{x_{i_k}}$

$B = \dfrac{(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + ... + \sqrt{x_n})^2}{n}$

$C = x_1 + x_2 + ... + x_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k$

Ta sẽ chứng minh cho $A \geqslant C$ và $C \geqslant B$.

* Với hai số dương a, b ta có :

$a^2 + b^2 \geqslant 2ab \Leftrightarrow \dfrac{a^2}{b} + b \geqslant 2a \Leftrightarrow \dfrac{a^2}{b} = 2a - b$ (1)

Áp dụng bất đẳng thức (1) khi cho a, b lần lượt lấy các giá trị tương ứng x_1 và x_{i_1}, rồi x_2 và x_{i_2}, ..., rồi x_n và x_{i_n}, ta được :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^2}{x_{i_k}} \geqslant \sum_{k=1}^{n} (2x_k - x_{i_k}) = 2\sum_{k=1}^{n} x_k - \sum_{k=1}^{n} x_{i_k}$$

Vì $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{n} x_{i_k}$

Từ đó suy ra : $A \geqslant C$ (2)

* Ta có

$nB = (\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \ldots + \sqrt{x_n})^2 = (x_1 + x_2 + ... + x_n) + 2\sqrt{x_1x_2} + 2\sqrt{x_1x_3} + ... + 2\sqrt{x_1x_n} + 2\sqrt{x_2x_3} + 2\sqrt{x_2x_4} + \ldots + 2\sqrt{x_2x_n} + ... + 2\sqrt{x_{n-1}x_n}$ (*)

Với hai số dương a, b ta có $2\sqrt{ab} \leqslant a + b$. (3)

Áp dụng các điều này vào các số dương $x_1, x_2, \ldots x_n$ của đẳng thức (*) ta được :

$nB \leqslant (x_1 + x_2 + \ldots + x_n) + (x_1 + x_2) +$
$+ (x_1 + x_3) + \ldots + (x_1 + x_n) + (x_2 + x_3) +$
$+ (x_2 + x_4) + \ldots + (x_2 + x_n) + ... + x_{n-1} + x_n)$.

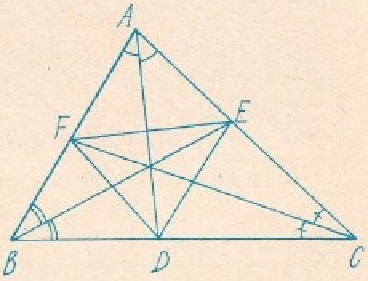
$nB \leqslant n(x_1 + x_2 + \ldots x_n) = nC \Rightarrow C \geqslant B$. (4)

Từ (2) và (4) suy ra $A \geqslant B$ (đpcm).

Bài 3

Câu a

Kí hiệu $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, AD, BE và CF là các đường phân giác của các góc A, B và C.



Ta có :

$$\frac{AF}{BF} = \frac{AC}{BC} = \frac{b}{a} \Rightarrow$$

$$\frac{AF}{b} = \frac{BF}{a} = \frac{AF+BF}{b+a} = \frac{AB}{b+a} = \frac{c}{b+a}$$

Tính được $AF = \frac{b\,.\,c}{a+b}$ (1)

Chứng minh tương tự $AE = \frac{bc}{a+c}$ (2)

Do đó

$$S_{AEF} = \frac{1}{2}AE.AF\sin A = \frac{1}{2}.\frac{bc}{(a+b)}.\frac{bc}{(a+c)}sinA$$

$$= \frac{1}{2}bc\sin a.\frac{bc}{(a+b)(a+c)} = \frac{bc.S}{(a+b)(a+c)}$$

(trong đó S là diện tích của tam giác ABC)

Tương tự như trên ta có :

$$S_{BDF} = \frac{ac.S}{(a+b)(b+c)}\,;\, S_{CED} = \frac{ab.S}{(a+c)(b+c)}$$

Mặt khác

$$S - S_o = S_{AEF} + S_{BDF} + S_{CDE} =$$

$$= \left[\frac{bc}{(a+b)(a+c)} + \frac{ac}{(a+b)(b+c)} + \frac{ab}{(a+c)(b+c)}\right].S$$

$$= \frac{b^2c + bc^2 + a^2c + ac^2 + a^2b + ab^2}{(a+b)(b+c)(c+a)}\,.\,S$$

$$\text{Vì : }\begin{cases} ab^2 + ac^2 = a(b^2 + c^2) \geqslant 2abc \\ ba^2 + bc^2 = b(a^2 + c^2) \geqslant 2abc \\ ca^2 + cb^2 = c(a^2 + b^2) \geqslant 2abc \end{cases}$$

nên : $b^2c + bc^2 + a^2c + ac^2 + a^2b + ab^2 \geqslant 6abc$

$$\Rightarrow S - S_o \geqslant \frac{6abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}\,.\,S =$$

$$= 3S\frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

Vì $(a+b)(b+c)(c+a) = 2abc + ab^2 + a^{2b} + ac^2 + a^2c + bc^2 + b^2c$

$= 2abc + ab(a+b) + ac(a+c) + bc(b+c)$

nên $2abc = (a+b)(b+c)(c+a) - [ab(a+b) + ac(a+c) + bc(b+c)]$

$$\Rightarrow \frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} =$$

$$= 1 - \frac{ab(a+b) + ac(a+c) + bc(b+c)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

$$= 1 - \left[\frac{ab}{(b+c)(c+a)} + \frac{ac}{(a+b)(b+c)} + \frac{bc}{(a+b)(c+a)}\right]$$

$$\Rightarrow S - S_o \geqslant \frac{6abc\,.\,S}{(a+b}(b+c)(c+a) =$$

$$3S\left[1 - \frac{bc}{(a+b)(c+a)} - \frac{ac}{(a+b)(b+c)} - \frac{ab}{(a+c)(b+c)}\right]$$

$$= 3(S - S_{AEF} - S_{BDF} - S_{CDE}) = 3S_o$$

hay $S - S_o \geqslant 3S_o \Rightarrow S \geqslant 4S_o$ (đpcm)

Câu b :

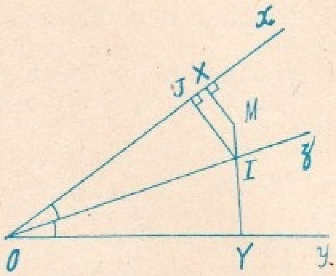
Trước hết ta chứng minh bổ đề :

Cho một góc nhọn xOy và M là một điểm nằm trong góc xOy. Gọi x' và y' lần lượt là khoảng cách từ M đến các cạnh Ox, Oy ; gọi Oz là phân giác của góc xoy. Chứng minh rằng $x' < y'$ khi và chỉ khi M thuộc miền trong của góc xOz.

Chứng minh :

– Giả sử M thuộc miền trong của góc xOz.

Từ M hạ $MX \perp$, $MY \perp OY$; MY phải cắt Oz, vì M và Y nằm trong hai nửa mặt phẳng đối nhau mà bờ là đường thẳng Oz. Gọi giao điểm đó là I. Từ I hạ $IJ \perp Ox$, ta có



$MX = x'$, $MY = y'$ và $IJ = IY$.

Từ đó

$$x' = MX < MJ < IJ + IM = IY + IM = MY = y'$$

hay $x' < y'$.

– Ngược lại, nếu có điểm N nào đó nằm trong góc xOy mà $NX_1 < NY_1$ (trong đó NX_1 và NY_1 là khoảng cách từ N đến các cạnh Ox và Oy) ta phải chứng minh N thuộc miền trong của góc xOz.

Thật vậy :

– Nếu N thuộc Oz thì $NX_1 = NY_1$. Điều này trái giả thiết.

– Nếu N thuộc miền trong của góc zOy, áp dụng cách chứng minh phần thuận ở trên, thì $NX_1 > NY_1$. Điều này cũng trái ~~với~~ giả thiết. Vậy N thuộc miền trong của góc xOz.

Áp dụng bổ đề này để chứng minh câu b :

Gọi O là giao điểm của ba đường phân giác AD, BE và CF.

Theo giả thiết M nằm trong tam giác ABC.

Vì $a' < b'$ nên M phải nằm trong tam giác BCF

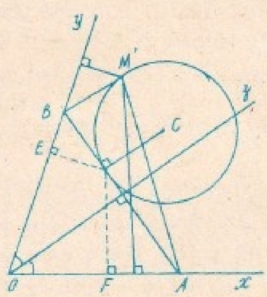
Vì $b' < c'$ nên M phải nằm trong tam giác CAD

Vậy M thỏa mãn điều kiện $a' < b' < c' \Leftrightarrow M$ nằm trong ΔCOD không kể các cạnh của nó.

Bài 4

Câu a

– Phân tích : Từ điểm M' bất kì trên đường tròn (C), hạ $M'H \perp Ox$, $M'K \perp Oy$. Dựng tiếp tuyến với đường tròn (C) tại M sao cho tiếp tuyến này cắt Ox ở



A, cắt Oy ở B, $OA = OB$, và các điểm O và C nằm về hai phía của tiếp tuyến này.

Ta thấy rằng :

$M'K \cdot OB + M'H \cdot OA = 2S_{M'AOB}$ hay $(M'H + M'K)OA = 2S_{M'AOB}$

suy ra $M'K + M'H = \dfrac{2S_{M'AOB}}{OA}$

Vì góc cho trước và đường tròn *(C)* cố định nên tiếp tuyến AB xác định và $OA = OB$ không đổi. Do đó $M'K + M'H$ nhỏ nhất khi $S_{M'AOB}$ nhỏ nhất, muốn vậy diện tích $\Delta M'AB$ phải nhỏ nhất (vì tam giác OAB cố định). Muốn vậy $M' \equiv M$ (lúc này đường cao hạ từ M' xuống AB bằng 0).

Vì M là tiếp điểm nên $CM \perp AB$ (1)

Mặt khác $\Delta\ OAB$ cân ($OA = OB$), nên phân giác Oz của góc O phải vuông góc với AB.

Từ (1) và (2) suy ra $CM \ // \ Oz$.

Cách dựng :

– Dựng phân giác Oz của góc xOy

– Từ C kẻ đường thẳng song song với Oz cắt *(C)* ở hai điểm. Điểm M, mà tiếp tuyến tại đó chia mặt phẳng làm hai phần, sao cho O và C nằm ở hai nửa mặt phẳng đối nhau có bờ là tiếp tuyến tại M, là điểm phải tìm.

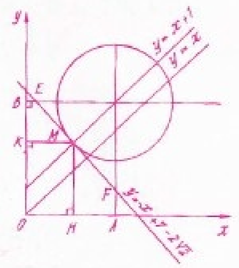
Chứng minh Qua M dựng tiếp tuyến AB.

Vì $CM \perp AB$ và $CM \ // \ Oz$ nên $Oz \perp AB$. Oz vừa là đường cao, vừa là phân giác của góc AOB nên $\Delta\ AOB$ cân ($OA = OB$).

Lấy M' bất kì trên *(C)*, ta có $(M'K + M'H)OA = 2S_{M'AOB} \geq 2S_{AOB} = (ME + MF) \cdot OA$

Suy ra $M'K + M'H \geq ME + MF$. Vậy $ME + MF$ nhỏ nhất.

~~Biện luận~~ : Dù góc xOy nhọn, vuông hay tù thì giao điểm M đã nói ở trên luôn luôn xác định. Bài toán luôn luôn có nghiệm hình. Khi C nằm trên Oz thì một trong hai giao điểm của Oz với đường tròn *(C)* là điểm phải tìm.



Câu b : Áp dụng kết quả câu a, điểm M có tổng khoảng cách nhỏ nhất đến hai trục tọa độ Ox, Oy chính là giao điểm của đường thẳng Ct với đường tròn (trong đó $Ct \ // \ Oz$, Oz là phân giác của góc xOy).

Đường thẳng Oz có phương trình $y = x$.

Gọi phương trình của đường thẳng CM là $y = ax + b$.

Vì $CM \ // \ Oz$ nên suy ra $a = 1$. Thay tọa độ của C vào phương trình ta tìm được $b = 1$. Vậy phương trình đường thẳng CM là $x + 1$.

Bây giờ ta phải tìm phương trình của đường thẳng EF (tiếp tuyến qua M) (E là giao điểm của tiếp tuyến và đường CB, F là giao điểm của đường CA với tiếp tuyến).

Tam giác CEF cân ($CE = CF$) vì CM vừa là đường cao vừa là phân giác của góc ECF. Ta có :

$- CM^2 = ME \cdot MF = ME^2 = MF^2$. Vì $CM = 2$ nên $ME = MF = 2$, suy ra $EF = 4$.

$\Rightarrow CE = CF = \dfrac{EF}{\sqrt{2}} = \dfrac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$.

Từ đó $BE = BC - CE = 3 - 2\sqrt{2}$; $AF = AC - CF = 4 - 2\sqrt{2}$.

Phương trình đường thẳng qua $E(3 - 2\sqrt{2}$; 4) và $F\ (3, 4 - 2\sqrt{2})$ là :

$$y = -x + 7 - 2\sqrt{2}$$

Tọa độ của điểm M là nghiệm của hệ phương trình :

$$\begin{cases} y = x + 1 \\ y = -x + 7 - 2\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x = 3 - \sqrt{2} \\ y = 4 - \sqrt{2} \end{matrix}$$

Gọi S là tổng khoảng cách từ M đến Ox và Oy, ta có :

$$S = 7 - 2\sqrt{2}.$$

Bảng B

Bài 1 (a, b) : xem lời giải ở bảng A.

Bài 2

Câu a : Theo giả thiết, các số $1 - a_i > 0$

Áp dụng kết quả của bất đẳng thức Cô–si, ta có :

$$a_1(1 - a_1) \leq \left(\frac{a_1 + (1 - a_1)}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

Tương tự : $a_2(1 - a_2) \leq \dfrac{1}{4}$

....

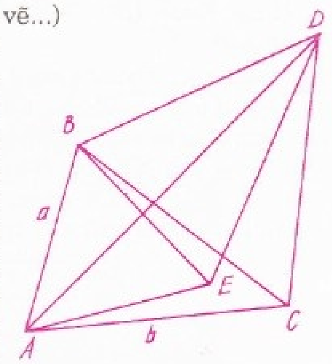
$$a_9(1 - a_9) \leq \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow [a_1(1 - a_1)] \cdot [a_2(1 - a_2)] \ldots \times [a_8(1 - a_8)] \times [a_9(1 - a_9)] \leq \left(\frac{1}{4}\right)^9 \quad (*)$$

Từ bất đẳng thức (*) suy ra : Trong 9 tích số đã cho ít nhất phải có một tích không lớn hơn $\dfrac{1}{4}$; vì nếu không có tích nào như vậy thì vế trái của bất đẳng thức (*) sẽ lớn hơn $\left(\dfrac{1}{4}\right)^9$. Điều đó trái với kết quả trên.

Câu b : xem lời giải ở bảng A.

Bài 3 (xem hình vẽ...)



Dựng tam giác đều ABE sao cho đỉnh E và đỉnh C cùng thuộc nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng AB. Ta có : $\widehat{ABC} = \widehat{EBD}$ (vì cùng bằng 60° cộng (hoặc trừ) góc EBC, và vì $BA = BE$, $BC = BD$ nên

$\Delta BAC = \Delta EBD$ (c.g.c)

Từ đó suy ra $ED = AC = b$ và $\widehat{BDE} = \widehat{BCA}$ (1)

Với 3 điểm A, E, D ta luôn có $AD \leq EA + ED = a + b$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $E \in AD$. Vậy AD lớn nhất khi bằng $a + b$ (max$AD = a + b$). Khi đó $ABCD$ nội tiếp được trong đường tròn nên $\widehat{BAC} + \widehat{BDC} = \widehat{BAC} + 60^\circ = 180^\circ \Rightarrow \widehat{BAC} = 120^\circ$

Kết luận : Khi AD lớn nhất có độ dài bằng $a + b$ thì $\widehat{BAC} = 120^\circ$.

Bài 4 : Xem lời giải bảng A.

XÁC ĐỊNH TÂM ĐƯỜNG TRÒN

Làm thế nào để xác định tâm của một đường tròn cho trước mà chỉ dùng compa một lần và dùng thước không quá 6 lần ?

VÕ KIM HUỆ

Giải đáp bài

ĐOÁN NGÀY SINH

Gọi ngày sinh của người mà Thắng đoán alf $\overline{ab}$, tháng sinh là $\overline{cd}$, năm sinh là $\overline{19mn}$ (vì các bạn của Thắng đều sinh vào thế kỉ 20).

Theo các phép tính mà Thắng đã đặt ra ta có :

$\{[(\overline{ab}\times 2+11)\,5+22]10+\overline{cd}\}\,100+\overline{19mn}+33 =$
$= 10000\times\overline{ab} + 77000+100\times\overline{cd}+1933+\overline{mn} =$
$= \overline{ab0000}+\overline{cd00}+\overline{mn}+78933 =$
$= \overline{abcdmn}+78933.$

Vì kết quả bao giờ cũng là $\overline{abcdmn}+78933$ nên bạn Thắng chỉ cần lấy kết quả của các bạn trừ đi 78933. Trong hiệu số còn lại thì 2 chữ số hàng trăm nghìn và hàng chục nghìn chỉ ngày sinh, hai chữ số, hàng nghìn và hàng trăm chỉ tháng sinh, hai chữ số hàng chục và hàng đơn vị chỉ năm sinh (đã bớt đi 1900) của người Thắng đoán.

Từ kết quả đó ta tính được ngày sinh của Hồng :

$$110115 - 78933 = 031182$$

tức là Ngày 3 tháng 11 năm 1982

Ngày sinh của Ngọc : $229813 - 78933 = 150880$

tức là Ngày 15 tháng 8 năm 1980.

(Theo *Đoàn Hải Giang*, 7A, NK Quỳnh Lưu, Nghệ An)

Nhận xét : Bạn *Phạm Lương Anh Minh* lớp 5^2, Nguyễn Đình Chiểu, QI, TP. **Hồ Chí Minh** cũng đã đưa ra cách đoán ngày sinh của Thắng như trên. Bà *Nguyễn Thị Tuyết* (139 Đường 30 – 4, P.5, TX Cà Mau, **Minh Hải**) và rất nhiều bạn đã có giải đáp tốt

BÌNH PHƯƠNG

NHỮNG DÃY SỐ KÌ LẠ

$$123456789 \times 8 + 9 = 987654321$$
$$12345678 \times 8 + 8 = 98765432$$
$$1234567 \times 8 + 7 = 9876543$$
$$123456 \times 8 + 6 = 987654$$
$$12345 \times 8 + 5 = 98765$$
$$1234 \times 8 + 4 = 9876$$
$$123 \times 8 + 3 = 987$$
$$12 \times 8 + 2 = 98$$
$$1 \times 8 + 1 = 9$$

$$123456789 \times 9 + 10 = 1111111111$$
$$12345678 \times 9 + 9 = 111111111$$
$$1234567 \times 9 + 8 = 11111111$$
$$123456 \times 9 + 7 = 1111111$$
$$12345 \times 9 + 6 = 111111$$
$$1234 \times 9 + 5 = 11111$$
$$123 \times 9 + 4 = 1111$$
$$12 \times 9 + 3 = 111$$
$$1 \times 9 + 2 = 11$$
$$0 \times 9 + 1 = 1$$

THANH TUẤN
(Sưu tầm)

CÙNG BẠN ĐỌC

Tòa soạn xin trả lời chung cho các bạn có thư hỏi về các vấn đề sau :

– Thời hạn ra báo : Toán học và tuổi trẻ ra một tháng một kì vào cuối tháng.

– Thời hạn nhận bài giải : Hai tháng tính từ ngày cuối của tháng mà báo phát hành.

– Tìm mua báo toán học tuổi trẻ ở đâu : Bạn có thể đặt mua dài hạn tại Bưu điện hoặc mua tại các Công ty sách và thiết bị trường học trong cả nước. Tòa soạn không có điều kiện nhận mua giúp các bạn được. Các bạn ở Hà Nội có thể mua tại 81 Trần Hưng Đạo, 25 Hàn Thuyên, 57 Giảng Võ...

Cảm ơn các bạn.

THTT

ISSN : 0866 – 8035
Chỉ số : 12884
Mã số : 8BT35M6

Sắp chữ tại TTVT Nhà xuất bản giáo dục
In tại nhà máy in Diên Hồng, 57 Giảng Võ
In xong và nộp lưu chiểu tháng 11/1996

Giá 2.000đ
Hai nghìn đồng