BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ★ HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

10 (232)
1996
NĂM THỨ 33

TẠP CHÍ RA HÀNG THÁNG

- *Khi đặc biệt hóa bài toán*
- **HÃY NHÌN BẰNG CON MẮT LƯỢNG GIÁC**
- DIỆN TÍCH A FIN TRONG MẶT PHẲNG
- *Từ một bài toán thi Olympic quốc tế ...*
- *ĐIỀN SỐ VÀO HÌNH LỤC GIÁC*
- **THI HỌC SINH GIỎI KHỐI PTCT TRƯỜNG ĐHSP HÀ NỘI 1995 - 1996**

Đội tuyển toán Hải Phòng. Đứng thứ hai từ bên phải là Ngô Đức Duy

TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ
MATHEMATICS AND YOUTH

MỤC LỤC

Trụ sở tòa soạn :
45B Hàng Chuối, Hà Nội ĐT: 8213786
231 Nguyễn Văn Cừ, TP Hồ Chí Minh ĐT: 8356111
Biên tập và trị sự : VŨ KIM THỦY
Trình bày : QUỐC HỒNG

Dành cho các bạn Trung học cơ sở

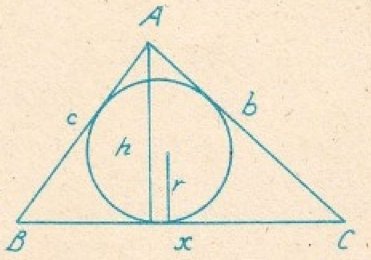
KHI ĐẶC BIỆT HÓA BÀI TOÁN

VŨ HỮU BÌNH
(Hà Nội)

Chúng ta bắt đầu từ bài toán sau :

Bài toán 1. *Tính cạnh huyền của một tam giác vuông biết đường cao ứng với cạnh huyền bằng h và bán kính đường tròn nội tiếp bằng r.*

Giải. Xét ΔABC vuông ở A (h. 1). Gọi $BC = x$. Ta đặt $AC = b$, $AB = c$. Cần tính x theo h và r.



Hình 1

Ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} b^2 + c^2 = x^2 & (1) \\ bc = hx & (2) \\ b + c - x = 2r & (3) \end{cases}$$

Từ (3) : $b + c = x + 2r$.

Bình phương hai vế : $b^2 + c^2 + 2bc = x^2 + 4r^2 + 4xr$.

Do (1) và (2) nên : $x^2 + 2hx = x^2 + 4r^2 + 4xr$

$$hx = 2r^2 + 2rx$$

$$x = \frac{2r^2}{h - 2r}.$$

Đặc biệt hóa bài toán 1 với $h = 5$, $r = 2$, ta có :

Bài toán 2. *Tính cạnh huyền của một tam giác vuông biết đường cao ứng với cạnh huyền bằng 5cm và bán kính đường tròn nội tiếp bằng 2cm.*

Giải như bài toán 1, ta được : $x = \dfrac{2.2^2}{5 - 2.2} = 8$. Cạnh huyền của tam giác vuông bằng 8cm.

Chớ vội bằng lòng với sự đặc biệt hóa trên. Ta thử phát biểu bài toán 2 dưới một dạng khác, tỉ mỉ hơn :

Nếu có một tam giác vuông có đường cao ứng với cạnh huyền bằng 5cm và bán kính đường tròn nội tiếp bằng 2cm thì tam giác đó có cạnh huyền bằng 8cm.

Khi diễn đạt bài toán như trên, nảy ra một câu hỏi : Liệu có tồn tại một tam giác vuông như vậy không ?

Để trả lời câu hỏi trên, ta hãy tính tiếp các cạnh góc vuông của tam giác vuông đó :

Từ (1) : $b^2 + c^2 = 8^2 = 64$.

Từ (2) : $bc = = 5.8 = 40$.

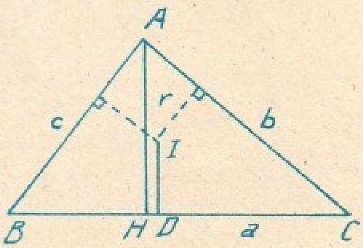
Suy ra : $(b - c)^2 = b^2 + c^2 - 2bc = 64 - 80 = -16$ (!)

Như vậy không tồn tại tam giác vuông thỏa mãn giả thiết của bài toán 2, tức là không tồn tại tam giác vuông nào có đường cao ứng với cạnh huyền h = 5cm và bán kính đường tròn nội tiếp $r = 2$cm.

Bây giờ chúng ta đi sâu thêm về quan hệ giữa h và r trong tam giác vuông. Ta có :

Bài toán 3. *Chứng minh rằng trong tam giác vuông có đường cao ứng với cạnh huyền bằng h và bán kính đường tròn nội tiếp bằng r, ta có bất đẳng thức :*

$$2 < \frac{h}{r} \leq \sqrt{2} + 1 \ (4).$$



Hình 2

Giải (h. 2) Xét ΔABC vuông ở A có $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Ta có $ah = (a + b + c)r$ (cùng bằng $2S$)

$$\Rightarrow \frac{h}{r} = \frac{a + b + c}{a} > \frac{a + a}{a} = 2.$$

Vậy $\dfrac{h}{r} > 2$.

Ta lại có : $AH \leq AI + ID$ (I là tâm đường tròn nội tiếp)

$$\Rightarrow h \leq r\sqrt{2} + r \Rightarrow \frac{h}{r} \leq \sqrt{2} + 1.$$

Bất đẳng thức (4) được chứng minh.

Ta trở lại bài toán 2 :

Trong đề bài của bài toán này, ta có $\dfrac{h}{r} = \dfrac{5}{2} = 2,5 > \sqrt{2} + 1$, vi phạm quan hệ được nêu trong bất đẳng thức (4).

Như vậy, khi thay các chữ bằng các số để đặc biệt hóa bài toán, cần lưu ý kiểm tra xem các số thay vào có thỏa mãn các quan hệ ràng buộc giữa các chữ trong bài toán hay không, hình được nêu trong bài toán có tồn tại hay không.

Đặc biệt hóa một bài toán đúng là đơn giản hơn nhiều so với tổng quát hóa bài toán đó. Nhưng... hãy thận trọng khi đặc biệt hóa bài toán !

Dành cho các bạn chuẩn bị thi vào đại học

HÃY NHÌN BẰNG "con mắt lượng giác"

PHẠM BẢO
(Hà Nội)

Ta đã biết các hàm số lượng giác có những tính chất riêng và các phép biến đổi riêng. Chẳng hạn hàm số $\sin x$, $\cos x$ có tập giá trị $|\sin x| \leqslant 1$, $|\cos x| \leqslant 1$ với mọi x ; hàm số $\text{tg}x$ có tập giá trị là tập các số thực. Các hàm số đó thỏa mãn các hệ thức và các phép biến đổi như :

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \sin y\cos x$$

$$1 + \text{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} ;\ \text{tg}2x = \frac{2\text{tg}x}{1 - \text{tg}x} ;$$

$$\cos x\cos y = \frac{1}{2}\left[\cos(x+y) + \cos(x-y)\right] \text{ v.v...}$$

Vì thế khi gặp một số bài toán đại số nếu biết nhìn bằng "con mắt lượng giác" có thể ta sẽ tìm được những cách giải ngắn gọn và có hiệu quả hơn. Các ví dụ sau đây sẽ thể hiện cách nhìn đó.

Ví dụ 1 : *Chứng minh rằng phương trình]*

$$x^4 - 6x^2 + 1 = 0 \qquad (1)$$

có các nghiệm là $\text{tg}\frac{\pi}{8}, \text{tg}\frac{3\pi}{8}, \text{tg}\frac{5\pi}{8}, \text{tg}\frac{7\pi}{8}$.

Giải : Đặt $x = \text{tg}\alpha$ thì (1) trở thành

$$\text{tg}^4\alpha - 6\text{tg}^2\alpha + 1 = 0 \Rightarrow (\text{tg}^2\alpha + 1)^2 - 8\text{tg}^2\alpha = 0$$

$$\frac{1}{\cos^4\alpha} - 8\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = 0 \Rightarrow 1 - 8\sin^2\alpha\cos^2\alpha = 0$$

(vì $\cos\alpha \neq 0$) hay $1 - 2\sin^2 2\alpha = \cos 4\alpha = 0$

$$4\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}$$

lấy $k = 0 ; 1 ; 2 ; 3$ ta có các nghiệm đã cho.

Ví dụ 2 : *Giải hệ phương trình :*

$$\begin{cases} 2x + x^2y = y \\ 2y + y^2z = z \\ 2z + z^2x = x \end{cases} \qquad (2)$$

Giải : Từ các phương trình của hệ (2) rõ ràng $x, y, z \neq \pm 1$. Do đó ta có

$$\begin{cases} y = \dfrac{2x}{1-x^2} \\ z = \dfrac{2y}{1-y^2} \\ x = \dfrac{2z}{1-z^2} \end{cases}$$

đặt $x = \text{tg}\alpha$ thì từ các phương trình của hệ trên ta có $y = \text{tg}2\alpha$, $z = \text{tg}4\alpha$, $x = \text{tg}8\alpha$ và cuối cùng ta có phương trình

$$\text{tg}8\alpha = \text{tg}\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{n\pi}{7}$$

với $n = 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6$ và dễ dàng thấy các nghiệm này thỏa mãn các điều kiện $x, y, z \neq \pm 1$.

Ví dụ 3. *Phương trình sau đây có bao nhiêu nghiệm nằm trong khoảng (0, 1) :*

$$8x(1 - 2x^2)(8x^4 - 8x^2 + 1) = 1 \qquad (3)$$

Giải : Đặt $x = \sin\alpha$ với $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ phương trình (3) sẽ là :

$$8\sin\alpha.\cos 2\alpha(8\sin^4\alpha - 8\sin^2\alpha + 1) = 1$$

hay $8\sin\alpha\cos 2\alpha[8\sin^2\alpha(\sin^2\alpha - 1) + 1] = 1$

$$8\sin\alpha\cos 2\alpha(1 - 2\sin^2 2\alpha) = 1$$

$8\sin\alpha\cos 2\alpha(1 - 2\sin^2 2\alpha) = 8\sin\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha = 1.$ (3')

vì $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ nên nhân 2 vế của (3') với $\cos\alpha$ và biến đổi theo công thức cung nhân đôi ta được

$$\sin 8\alpha = \cos\alpha \Rightarrow \sin 8\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

$$\left[\begin{array}{ll} 8\alpha = \dfrac{\pi}{2} - \alpha + 2k\pi \Rightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{18} + \dfrac{2k\pi}{9} & k \in Z \\ 8\alpha = \dfrac{\pi}{2} + \alpha + 2n\pi \Rightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{14} + \dfrac{2n\pi}{7} & n \in Z \end{array}\right.$$

nhưng vì $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ nên $k = 0 ; 1$ và $n = 0 ; 1$ vậy phương trình (3) có 4 nghiệm nằm trong khoảng (0, 1).

Ví dụ 4 : *Chứng minh rằng với mọi x, y*

$$-\frac{1}{4} \leqslant \frac{(x^2 - y^2)(1 - x^2y^2)}{(1 + x^2)^2(1 + y^2)^2} \leqslant \frac{1}{4} \qquad (4)$$

(xem tiếp trang 16)

Bài T1/228 Tìm $m, n \in N$ để

$A = 3^{3m^2+6n-61} + 4$ là số nguyên tố.

Lời giải (Dựa trên bài giải của bạn Đỗ Mai Linh 8 Từ Liêm Hà Nội)

Vì $A \in N^*$ nên $3m^2 + 6n - 61 \geqslant 0$.

$3m^2 + 6n - 61$ chia 3 dư 2. Vậy $3m^2 + 6n - 61 = 3k + 2$ $(k \in N)$

Từ đó $A = 3^{3k+2} + 4 = 27^k . 9 + 4$

Vì $27 \equiv 1 \pmod{13} \rightarrow 27^k . 9 \equiv 9 \pmod{13}$ $\rightarrow A \vdots 13$. Vì A nguyên tố suy ra $A = 13 \leftrightarrow 3^{3k+1} = 9 \rightarrow 3m^2 + 6n - 61 = 2 \rightarrow 3m^2 + 6n = 63 \rightarrow m^2 + 2n - 21 \rightarrow m^2 < 21$

m lẻ $\rightarrow m^2 = 1$ hoặc 9

Nếu $m^2 = 1 \rightarrow m = 1 \rightarrow n = 10$

Nếu $m^2 = 9 \rightarrow m = 3 \rightarrow n = 6$.

Nhận xét : Tất cả các bạn gửi lời giải đều giải đúng, trong số đó có : *Trần Vĩnh Hưng* 6T, **Hà Nội**, *Nguyễn Xuân Nguyên* $8A_1$, **Hà Nội**, *Đặng Duy Diễn Hải*, 9A **Hà Tĩnh**, *Mai Hậu Giang* 8T **Quảng Ngãi**, *Nguyễn Chu Chính* 8T **Nghệ An**, *Đặng Ngọc Tuấn* 9T **Thái Bình**, *Tống Thành Vũ* 8B **Thanh Hóa**, *Nguyễn Tất Thắng*, 7NK **Thanh Hóa**, *Lê Thị Bích Hạnh* 7CT **Từ Liêm**, *Hoàng Phương Đông* 9A **Lào Cai**, *Lê Chí Thành* 9T Hải Phòng, *Trương Thanh Cường* **Minh Hải**, *Lê Thị Thu Huyền* 9 **Hà Tây**, *Nguyễn Văn Khiêm* **TP HCM**, *Nguyễn Huy Khôi* **Lâm Đồng**, *Võ Đức Thành*, Gia Lâm, **Hà Nội**, *Trần Tuấn Anh* 8 **Khánh Hòa**.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T2/228 : *Tìm nghiệm dương của hệ phương trình*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = x_3^{1996} \\ x_2 + x_3 = x_4^{1996} \\ \dots\dots\dots \\ x_{1995} + x_{1996} = x_1^{1996} \\ x_{1996} + x_1 = x_2^{1996} \end{cases}$$

Lời giải : của *Nguyễn Nhật Anh*, 8T, Chuyên Nguyễn Nghiêm, Đức Phổ, Quảng Ngãi.

Gọi X là giá trị lớn nhất của các nghiệm x_i, $i = 1, ..., 1996$ và Y là giá trị bé nhất của chúng. Thế thì từ phương trình đầu ta có

$$2X \geqslant x_1 + x_2 = x_3^{1996},$$

Từ đó, đối với các phương trình của hệ ta có

$$2X \geqslant x_k^{1996} \;\forall\; k = 1, 2, ..., 1996$$

Hay là ta có $\quad 2X \geqslant X^{1996}$

Suy ra $\quad 2 \geqslant X^{1995}$ (vì $X > 0$), $\quad$ (1)

Lập luận một cách tương tự ta cũng đi đến

$$2 \leqslant Y^{1995} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $X^{1995} = Y^{1995} = 2$,

Nghĩa là ta có : $x_1 = x_2 = ... = x_{1996} = \sqrt[1995]{2}$

Bài này cũng có thể tổng quát hóa bằng cách thay 1996 bởi số n nguyên dương.

Nhận xét : Các bạn sau đây cũng có lời giải tốt : *Hoàng Tùng* 8T, NK Tiên Sơn ; *Lê Xuân Hoàng*, 9A, NK Hiệp Hòa ; *Ngô Văn Túc*, 9, NK Lạng Giang, **Hà Bắc** ; *Phạm Tuấn Anh*, 8A, Lương Thế Vinh, **Hà Nội** ; *Hồng Phương Đông*, 9C, NK thành phố **Thanh Hóa** ; *Nguyễn Bằng*, 9T, Phan Bội Châu, Vinh, **Nghệ An** ; *Dương Chí Vinh* 9T, NK **Hà Tĩnh** ; *Định Thái Minh Tâm*, 9_2, Cam Lộc, Cam Ranh, **Khánh Hòa** ; *Phạm Ngọc Huy*, 9T, Tr. Bồi dưỡng GD, Biên Hòa, **Đồng Nai**, *Nguyễn Chí Thành*, $8T_1$, Nguyễn Bỉnh Khiêm, **Vĩnh Long.**

TỐ NGUYÊN

Bài T3/228. *Tìm các nghiệm nguyên $(x ; n)$ của phương trình :*

$$x + \sqrt{x + \frac{1}{2} + x + \frac{1}{4}} = n$$

Lời giải. Đặt $y = x + \frac{1}{4} \geqslant 0$, ta có : $y^2 = x + \frac{1}{4}$ hay $x = y^2 - \frac{1}{4}$. Phương trình đã cho trở thành :

$$n = y^2 - \frac{1}{4} + \sqrt{y^2 + \frac{1}{4} + y} = y^2 - \frac{1}{4} +$$

$$+ \sqrt{\left(y + \frac{1}{2}\right)^2} = y^2 + y + \frac{1}{4} = \left(y + \frac{1}{2}\right)^2.$$

Từ đó ta có

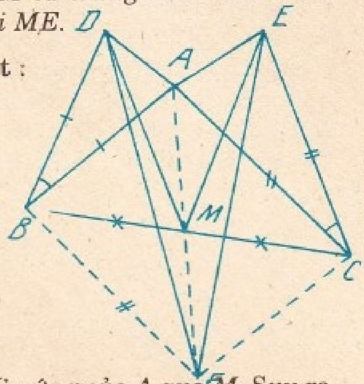
$n \geqslant \frac{1}{4}$ (vì $y \geqslant 0$). Với $n \geqslant \frac{1}{4}$ thì ta có $y = \sqrt{n} - \frac{1}{4}$ hay $\sqrt{x + \frac{1}{4}} = \sqrt{n} - \frac{1}{2}$, suy ra $x = n + \frac{1}{4} - \sqrt{n} - \frac{1}{4} = n - \sqrt{n}$. Để x nguyên với giá trị nguyên của n thì n phải là số chính phương, nghĩa là $n = t^2$ với $t \in Z$. Hơn nữa $t \neq 0$ (vì $n \neq 0$ do $n \geqslant 0{,}25$). Vậy nghiệm nguyên của phương trình đó là : $x = t^2 - t$; $n = t^2$ trong đó t là số nguyên khác 0.

Nhận xét. Các bạn sau đây có lời giải tốt : *Nguyễn Thanh Tuấn* (9T Chuyên Lạc Sơn **Hòa Bình**) ; *Nguyễn Thế Vinh* (9 Chuyên Toán, huyện Chương Mỹ – **Hà Tây**) ; *Nguyễn Đức Minh* (8ª Chuyên C2 Tam Đảo – **Vĩnh Phú**) ; *Trần Tuấn Anh* (8 Toán Lê Quí Đôn Nha Trang – **Khánh Hòa**) ; *Lâm Thành Đạt* (9A THCS Võ Thị Sáu, Bạc Liêu – **Minh Hải**) ; *Hoàng Thanh Lâm* (9T Thoại Ngọc Hồn, Long Xuyên – **An Giang**) ; *Võ Quang Mẫn* ($9A_1$ PTTH số 2 Phù Cát – Bình Định) ; *Lê Phương Thảo* (8^{A1} THCS Hồng Bàng – **Hải Phòng**) ; *Lê Hồng Linh* (8CT Năng Khiếu Tx Ninh Bình – **Ninh Bình**) ; *Nguyễn Văn Khiêm* (9B THCS Phạm Văn Hai, Bình Chánh – *TP HCM*).

ĐẶNG VIỄN

Bài T4/228 : *Cho tam giác ABC (AB < AC) và các tam giác cân BAD, CAE (BA = BD, CA = CE) sao cho D nằm khác phía với C đối với AB, E nằm khác phía với B đối với AC và $\widehat{ABD} = \widehat{ACE}$. Gọi M là trung điểm của BC. Hãy so sánh MD với ME.*

Lời giải tóm tắt :



Gọi F là điểm đối xứng của A qua M. Suy ra $ABFC$ là hình bình hành. Từ đó suy ra $\Delta DBF = \Delta FCE$ (cgc) $\Rightarrow FD = FE$. Mặt khác do ΔABD ΔACE mà $AB < AC$ nên $AD < AE$. Xét 2 tam giác ADF và AEF có $DF = EF$, AF chung và $AD < AE$ nên $\widehat{AFD} < \widehat{AFE}$

Xét hai tam giác MDF và MEF có $DF = EF$, *MF chung và $\widehat{AFM} < \widehat{EFM}$ suy ra $MD < ME$.*

Nhận xét :

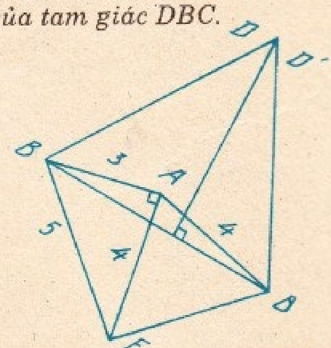
Giải tốt bài này có các bạn :

Hà Bắc : *Nguyễn Thị Hảo*, 9T Tiên Sơn ; **Bắc Thái** : *Nguyễn Hoàng Chương*, 9T NK Thái Nguyên ; **Vĩnh Phú** : *Nguyễn Đức Hải*, 9B Chuyên Yên Lạc ; **Hải Phòng** : *Nguyễn Minh Khôi*, 9T Chu Văn An, *Nguyễn Thị Thanh Hằng*, 10 Tin, Trần Phú, **Hải Hưng** : *Trần Đại Nghĩa*, 10T, PT Năng khiếu ; **Hà Nội** : *Bùi Mạnh Hùng*, 9H, Trưng Vương ; *Bùi Viết Lộc*, 8A, Bế Văn Đàn, *Nguyễn Tùng*, 8CT Từ Liêm, *Lương Tấn Đạt*, $8A_1$ Chu Văn An ; **Hà Tây** : *Nguyễn Mạnh Hà*, 8K Lê Lợi, **Thái Bình** : *Đỗ Trọng Giang*, Chuyên Quỳnh Phụ ; **Nam Hà** : *Vũ Trần Cương*, 9T, *Nguyễn Trọng Kiên*, 8T, *Nguyễn Khánh An*, 7T Trần Đăng Ninh, Nam Định, *Lê Thị Thu Hương*, Văn 7, NK Hải Hậu, **Thanh Hóa** : *Mai Thị Thu Sánh*, 8A Nga Hải, Nga Sơn, *Lê Hồng Minh*, 8T Năng khiếu Bỉm Sơn ; **Nghệ An** : *Lê Thị Tâm*, 9A PTTH Hưng Dũng, Vinh ; **Hà Tĩnh** : *Võ Sĩ Nam*, 9CT, NK Đức Thọ ; **Quảng Bình** : *Đặng Thị Tố Như*, 9T NK Hải Đình, *Trần Đức Sơn*, 8T, *Nguyễn Hữu Quyền* 9T Chuyên Quảng TRạch ; **Quảng Ngãi** : *Nguyễn Tấn Tích*, 8T Chuyên Mộ Đức, *Lương Hữu Thuận*, 8T Chuyên Nghĩa Hành ; **Bình Định** : *Trần Minh Mẫn*, $9A_1$ PTTH 2 Phù Cát, **Lâm Đồng** : *Hồ Việt Đức*, $9A_2$ Lê Lợi, Di Linh ; **Khánh Hòa** : *Đinh Thái Minh Tâm*, 92 THCS Cam Lộc, Cam Ranh, *Võ Trung Hòa*, 8T Lê Quý Đôn, Nha Trang, **Vĩnh Long** : *Nguyễn Chí Thành* $8T_1$, *Nguyễn Hoàng Quân*, $8T_2$, Nguyễn Bỉnh Khiêm.

2. Một bạn ở trường Lê Quý Đôn, **Tuyên Quang** đã sai khi cho rằng từ $DB < EC$, $DM < DB + BM$, $ME < EC + MC$, $BM = MC$ suy ra $DM < ME$

VŨ KIM THỦY

Bài T5/228. *Trên mặt phẳng cho tam giác ABC có AB = 3, AC = 4, $\widehat{BAC} = 150^o$. Trên đường trung trực của đoạn BC, ta lấy điểm D ở cùng phía với A đối với BC, sao cho AD = 5. Hãy tính các góc của tam giác DBC.*



Lời giải. Gọi M là trung điểm của BC. Kẻ tia AE nằm giữa hai tia AB, AC sao cho $\widehat{BAE} = 90^o$ và $AE = 4$. Suy ra $\widehat{EAC} = 150^o - 90^o = 60^o$, và ΔAEC đều, do đó $CA = CE$ (1). Trên nửa mặt phẳng bờ BC có chứa điểm A, lấy điểm D' sao cho tam giác DBC đều, ta có D' nằm trên tia MD (*), và $CD' = CB$, $\widehat{D'CA} = 60^o - \widehat{ACB} = \widehat{BCE}$ (2). Kết hợp (2) với (1), ta có $\Delta D'CA = \Delta BCE$, do đó $\{ AD' = BE = \sqrt{BA^2+EA^2} = \sqrt{3^2+4^2} = 5(**)$. Kết hợp (**) với (*), ta có D' trùng với D, hay cả ba góc cần tìm cùng bằng 60^o.

Nhận xét.

Có 64 bài giải, tất cả đều giải đúng. Một số bạn giải bằng phép quay một cách chính xác. Các bạn sau đây có lời giải tốt : *Nguyễn Bích*

Khiêm (8T2 Nguyễn Hoàng Quân, **Vĩnh Long**), *Trần Tuấn Anh* (8 Toán Lê Quý Đôn Nha Trang **Khánh Hòa**), *Hoàng Thanh Lâm* (9T PTTH chuyên Thoại Ngọc Hầu Long Xuyên **An Giang**), *Lê Hồng Linh* (8CT NK thị xã **Ninh Bình**), *Võ Thanh Việt* (9A Quốc Học **Quy Nhơn**), *Lương Việt Tường* (8A1 THCS Hồng Bàng, **Hải Phòng**), *Vũ Văn Phong* (9a Chuyên Văn Toán Vĩnh Tường **Vĩnh Phú**), *Phan Thanh Giản* (8A Hòa Thắng Tuy Phước **Bình Định**), *Trần Tất Đạt* (8A1 Chu Văn An Tây Hồ **Hà Nội**), *Lê Trung Kiên* (9A Nguyễn Tri Phương, **Thừa Thiên – Huế**), *Nguyễn Việt Cường* (9T Năng Khiếu Nga Sơn **Thanh Hóa**), *Nguyễn Chí Thành* (8T Chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm **Vĩnh Long**), *Hà Thị Phương Thảo* (8 Toán NK thị xã Bỉm Sơn, **Thanh Hóa**), *Mai Hàn Giang* (8T Lê Khiết **Quảng Ngãi**), *Bùi Mạnh Hùng* (9H THCS Trưng Vương, **Hà Nội**), *Nguyễn Ngọc Hòa* (8 PTCS Mỹ Hóa Tx Bến Tre, Tỉnh **Bến Tre**).

ĐẶNG VIỄN

Bài T6/228 *Cho p là số nguyên tố. Chứng minh rằng với mọi số m nguyên không âm bất kỳ, tồn tại một đa thức Q có hệ số nguyên sao cho p^m là Ước chung lớn nhất của tất cả các số*

$$a_p = (p+1)^n + Q(m)\ (n = 1, 2, 3, ...$$

Lời giải : Trước hết ta chứng minh

Bổ đề : $\forall k \in N$, $k < m$ tồn tại $b_k \in Z$ sao cho $b_k p^m + p^k \,\vdots\, k!$

Chứng minh : Giả sử $k! = p^{\alpha k} M_k$ với $(M_k, p) = 1$. Xét các số $\{ep^{m-k}\}$ $e = (0,1,...M_k - 1)$ Dễ thấy chúng lập thành một hệ thặng dư đầy đủ (mod M_k). Thành thử tồn tại $b_k \in Z$ sao cho $b_k p^{m-k} \equiv -1 \pmod{M_k}$

$b_k p^{m-k} + 1 \,\vdots\, M_k \rightarrow$

$b_k p^m + p^k \,\vdots\, p^k . M_k$. Mặt khác

$$\alpha_k = \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{k}{pi}\right] < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{k}{pi} < k.$$

Vậy $b_k p^m + p^k \,\vdots\, p^{\alpha k} M_k = k!$

Bổ đề được chứng minh

Kí hiệu $f_i(x) = \dfrac{x(x-1) - (x-i+1)}{i!}$

Ta có

$$f_i(n) = \begin{cases} C_n^i & \text{nếu } n \geq i \\ 0 & \text{nếu } n < i \end{cases}$$

Đặt

$$R(x) = -\sum_{c=0}^{m-1} f_i(x)[b_i p^m + p^i]$$

Theo bổ đề trên $R(x)$ là đa thức có hệ số nguyên.

Ta có $u_n = (p+1)^n + R(n) =$

$$\sum_{i=0}^{n} C_n^i p_i - \sum_{i=1}^{m-1} f_i(n) p^i + p^m \sum_{i=0}^{m-1} f_i(n) b_i$$

$$\equiv \sum_{i=0}^{\infty} f_i(n) p^i - \sum_{i=1}^{m-1} f_i(n) p^i \pmod{p^m}$$

$$\equiv \sum_{i=m}^{\infty} f_i(n) p^i \equiv 0 \pmod{p^m}\ \forall n.$$

Đặc biệt $u_1 = (p+1) + R(1) = lp^m$

Ta chứng minh đa thức $Q(x) = R(x) + p^m(1-e)$ là đa thức cần tìm

Quả vậy $a_n = (p+1)^n + Q(n) = (p+1)^n + R(n) + p^m(1-e) = u_n + p^m(1-e) \,\vdots\, p^m\ \forall n$

mà $a_1 = (p+1) + Q(1) = p + 1 + R(1) + p^n(1-e) = ep^m + p^m(1-e) - p^m$

Do đó p^m là ƯCLN của $a_1, a_2, ...$

Nhận xét : Đây là một bài toán khó. Chỉ có rất ít bài giải gửi đến. Hai bạn *Phạm Anh Huy* (11 Lê Quý Đôn **Quảng Nam – Đà Nẵng**) và *Nguyễn Sỹ Phong* 11 CT ĐHSP **Hà Nội**) có lời giải tương đối tốt. Các lời giải khác hoặc sai, hoặc chỉ mới có ý đúng.

ĐẶNG HÙNG THẮNG.

Bài T7/228. *Giải phương trình*

$$729x^4 + 8\sqrt{1-x^2} = 36 \qquad (1)$$

Lời giải (của đa số các bạn).

Điều kiện có nghĩa : $-1 \leq x \leq 1$.

Đặt $\sqrt{1-x^2} = y$ $(0 \leq y \leq 1)$ và viết (1) dưới dạng $729(1-y^2)^2 + 8y = 36$

$$\Leftrightarrow [27^2(1-y^2)^2 - 36(1-y^2) + 4/9] - \left[36y^2 - 8y + \frac{4}{9}\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[27(1-y^2) - \frac{2}{3}\right]^2 - \left(6y - \frac{2}{3}\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow [27(1-y^2) - 6y]\left[27(1-y^2) + 6y - \frac{4}{3}\right] = 0$$

Giải :

i) $27(1-y^2) - 6y = 0 \leftrightarrow$

$$\leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y_1 = \dfrac{1}{9}(-1-\sqrt{82}) < 0, \textit{ loại} \\ y_2 = \dfrac{1}{9}(-1+\sqrt{82}) \textit{ thỏa mãn} \end{array}\right.$$

Vậy : $\sqrt{1-x^2} = \dfrac{1}{9}(-1+\sqrt{82})$

$\leftrightarrow x = \pm \frac{1}{9}\sqrt{-2+2\sqrt{82}}$

ii) Giải : $27(1-y^2)+6y-4/3=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y_3 = \frac{1}{9}(1-\sqrt{78}) < 0, \textit{loại} \\ y_4 = \frac{1}{9}(1+\sqrt{78}) > 1, \textit{loại}. \end{array}\right.$$

Kết luận : Phương trình có nghiệm $x = \pm \frac{1}{9}\sqrt{-2+2\sqrt{82}}$

Nhận xét : – Có rất nhiều bạn ở bậc phổ thông cơ sở cũng tham gia giải và giải đúng bài này. Đại đa số giải theo phương pháp đã trình bày ở trên.

– Một số bạn giải (1) bằng phương pháp chuyển về hệ đại số hai ẩn. Tuy nhiên cách giải dài dòng hơn đôi chút.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T8/228. *Giả sử* $S_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{3n}{3k}$, *trong đó :*

$$\binom{m}{s} = \frac{m(m-1)\ldots(m-s+1)}{1.2\ldots s}.$$

Tìm $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[3n]{S_n}$.

Lời giải (của *Phạm Minh Hoàng*, 12A$_1$ PTTH Kim Liên – Hà Nội) : Ta có :

$$\binom{3n}{3k} = \binom{3n-1}{3k} + \binom{3n-1}{3k-1} = \binom{3n-2}{3k} + \binom{3n-2}{3k-1} + \binom{3n-2}{3k-1} + \binom{3n-2}{3k-2}$$

$$> \binom{3n-2}{3k} + \binom{3n-2}{3k-1} + \binom{3n-2}{3k-2}.$$

$$\Rightarrow S_n > \sum_{k=0}^{n}\left\{\binom{3n-2}{3k} + \binom{3n-2}{3k-1} + \binom{3n-2}{3k-2}\right\} = 2^{3n-2} \quad (1).$$

Mặt khác, lại có : $S_n < \sum_{k=0}^{3n}\binom{3n}{k} = 2^{3n}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra : $\sqrt[3n]{2^{3n-2}} < \sqrt[3n]{S_n} < 2$ (3). Mà :

$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[3n]{2^{3n-2}} = \lim_{n\to+\infty} 2 = 2$ nên từ (3) ta được :

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[3n]{S_n} = 2.$$

Nhận xét : 1. Số bạn gửi lời giải cho Bài toán không nhiều. Có 3 bạn cho lời giải sai, vì các bạn đã mắc phải những sai lầm. (Chẳng hạn có bạn đã lập luận như sau : Từ $S_n \geq n$ suy ra $S_n = n + n_o$, với $n_o = const \geq 0$ (? !)). Hầu hết các bạn giải đúng bài toán đều đưa ra những lời giải quá cồng kềnh và nặng nề. Ngoài bạn *P.M.Hoàng*, chỉ có các bạn sau đây có lời giải tương đối tốt : *Vũ Duy Tuấn* (11A PTTHNK **Hà Bắc**) ; *Đặng Đức Hạnh* (10T Trường Phan Bội Châu – **Nghệ An**) ; *Trương Vĩnh Lân, Trần Hữu Lực* (10CT, 11CT PTNK **Quảng Bình**) và *Nguyễn Tiến Dũng* (11A$_1$ PTTH Lê Quí Đôn – **Quảng Nam – Đà Nẵng**).

2. Xuất phát từ ý tưởng và phương pháp của Lời giải đã trình bày ở trên, bạn *P.M.Hoàng* đã đề xuất và giải quyết tốt **Bài toán khái quát** sau : "Cho số nguyên dương a và cho số thực $b \neq 0$. Với mỗi $n \in \mathbf{N}$ đặt $S_n = \sum_{k=0}^{n} C_{an}^{ak}$. Hãy tìm $\lim_{n\to+\infty}(S_n)^{\frac{1}{bn}}$.

NGUYỄN KHẮC MINH

Bài T9/228. *Chứng tỏ rằng với n véctơ đơn vị của mặt phẳng có thể chọn ra được các chỉ số* $i_1, i_2, \ldots, i_k$ *sao cho :*

$$|\vec{a}_{i_1} + \vec{a}_{i_2} + \ldots + \vec{a}_{i_k}| \geq \frac{n}{4\sqrt{2}}$$

Lời giải. Có một số bạn chỉ ra rằng bài toán là sai và sau đó không giải tiếp hoặc đề nghị sửa như trên mới đúng. Tòa soạn xin hoan nghênh nhận xét trên của các bạn. Tuy nhiên, có sự sai sót trên là do lỗi đánh máy hoặc in ấn (chứ không phải là lỗi của tác giả đề toán).

Hai trục tọa độ của hệ tọa độ Oxy chia mặt phẳng ra làm 4 góc phần tư và bộ n véctơ có thể sắp đặt sao cho chung điểm gốc O, còn các véctơ này nằm trong từng góc phần tư (có thể kể cả biên). Ta tính tổng độ dài của các véctơ ấy. Kí hiệu lại, nếu cần, ta có thể giả thiết trong góc phần tư thứ nhất có chứa k véctơ đầu $a_1, a_2, \ldots, a_k$ với tổng độ dài của chúng không nhỏ hơn các tổng độ dài của các véctơ ở từng góc phần tư khác. Vậy :

$$k = |\vec{a}_1| + |\vec{a}_2| + \ldots + |\vec{a}_k| \geq \frac{n}{4}$$

Xét đường phân giác thứ nhất l : có phương trình $y = x$, và kí hiệu b_i, φ_i lần lượt là độ dài hình chiếu của $\vec{a}_i$ trên l, và góc giữa $\vec{a}_i$ và l ; thế thì : $b_i = |\vec{a}_i|\cos\varphi_i$. Vì $0^o \leq \varphi_i \leq 45^o$ nên $\cos\varphi_i \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$|\vec{a}_1| + |\vec{a}_2| + \ldots + |\vec{a}_k| = \frac{b_1}{\cos\varphi_1} + \frac{b_2}{\cos\varphi_2} +$$

$+ \ldots + \dfrac{b_k}{\cos\varphi_k} \leq \sqrt{2}\,(b_1 + b_2 + \ldots + b_k) =$

$= \sqrt{2}\, h_c/l\,(\vec{a_1} + \vec{a_2} + \ldots + \vec{a_k})$

($h_c/l\,(\vec{a})$ là kí hiệu độ dài hình chiếu của $\vec{a}$ trên l).

Do đó : $k \leq \sqrt{2}\, h_c/l\,(\vec{a_1} + \vec{a_2} + \ldots + \vec{a_k}) \leq$

$\leq \sqrt{2}\, |\vec{a_1} + \vec{a_2} + \ldots + \vec{a_k}|$

Từ đó suy ra : $|\vec{a_1} + \vec{a_2} + \ldots + \vec{a_k}| \geq \dfrac{n}{4\sqrt{2}}$

Nhận xét : (vế phải của B.Đ.T. cần chứng minh là $\dfrac{n}{4\sqrt{2}}$ chứ không phải là $\dfrac{nk}{4\sqrt{2}}$ hoặc $\dfrac{n^k}{4\sqrt{2}}$; có lẽ có sơ xuất này là do chỉ số k của dãy $i_1, i_2, \ldots, i_k$ ở dòng trên !). Các bạn sau đây có lời giải tốt :

Lê Văn An 12T, Phan Bội Châu, **Nghệ An** và *Trương Vĩnh Lân*, 10T Đào Duy Từ, **Quảng Bình**

NGUYỄN ĐĂNG PHẤT

Bài T10/228. *Hình chóp SABC có tổng các mặt (góc ở đỉnh) của tam diện đỉnh S bằng 180^o và các cạnh bên $SA = SB = SC = 1$. Chứng minh rằng diện tích toàn phần của chóp này không lớn hơn $\sqrt{3}$.*

Lời giải 1. Kí hiệu độ lớn các mặt của góc tam diện đỉnh S như sau : $\widehat{BSC} = \alpha$, $\widehat{CSA} = \beta$, $\widehat{ASB} = \gamma$. Vì $\alpha + \beta + \gamma = 180^o$ nên có thể xem α, β và γ là ba góc của một tam giác nào đó. Tổng diện tích ba mặt bên của hình chóp bằng :

$$\frac{1}{2}(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma) \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

Đặt $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $a + b + c = 2p$; sử dụng định lí hàm số cosin, ta tính được : $a = 2\sin\dfrac{\alpha}{2}$, $b = 2\sin\dfrac{\beta}{2}$, $c = 2\sin\dfrac{\gamma}{2}$

Ta tính được diện tích đáy ABC của chóp theo công thức Hêrông :

$$S = s(\overset{\Delta}{ABC}) = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \leq$$

$$\leq \sqrt{p\left[\frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{3}\right]^3} = \sqrt{\frac{p^4}{27}}$$

hay là :

$$S \leq \frac{p^2}{3\sqrt{3}} = \frac{\left(\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2}\right)^2}{3\sqrt{3}} \leq$$

$$\leq \frac{9}{4 \times 3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Từ đó suy ra diện tích toàn phần của chóp $\leq \dfrac{3\sqrt{3}}{4} + \dfrac{\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$

Dấu đẳng thức đạt được khi và chỉ khi $\alpha = \beta = \gamma = 60^o$, tức là khi chóp $SABC$ là một tứ diện đều.

Lời giải 2 (của *Đặng Đức Hạnh*, 10T, Phan Bội Châu, Nghệ An và *Triệu Văn Sơn*, 12F, Hùng Vương, Việt Trì, Vĩnh Phú).

Sử dụng bất đẳng thức quen thuộc : $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4S\sqrt{3}$, trong đó S là diện tích của một tam giác có độ dài ba cạnh là a, b và c, ta được bất đẳng thức sau đây :

$$4S_{tp}\sqrt{3} \leq 2(SA^2+SB^2+SC^2+BC^2+CA^2+AB^2); \quad (1)$$

trong đó S_{tp} là diện tích toàn phần của hình chóp $SABC$.

Lại có :

$$BC^2 = 2 - 2\cos\alpha, \; CA^2 = 2 - 2\cos\beta,$$

$$AB^2 = 2 - 2\cos\gamma; \quad (2)$$

và : $$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \geq \frac{3}{2} \quad (3)$$

(vì α, β và γ là các góc của một tam giác

Từ (2) và thay $SA = SB = SC = 1$ vào (1), và sử dụng (3), ta được :

$$2\sqrt{3}\, S_{tp} \leq 9 - 2(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma) \leq 6$$

hay là : $S_{tp} \leq \sqrt{3}$ (đ.p.c.m)

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi chóp $SABC$ là tứ diện đều.

Nhận xét : 1°) Cả hai lời giải trên đều đã sử dụng những bất đẳng thức quen thuộc về các góc trong một tam giác ABC :

$$\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}; \; \sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} +$$

$$+ \sin\frac{C}{2} \leq \frac{3}{2}; \; \cos A + \cos B + \cos C \geq \frac{3}{2}$$

2°) Ngoài hai bạn có lời giải 2 ở trên, các bạn sau đây có lời giải tốt :

Hà Nội : *Đào Ngọc Luân*, $12A_{02}$, PTTH DL Lương Thế Vinh. *Phạm Minh Hoàng*, $12A_1$, Kim Liên.

Vĩnh Phú : *Nguyễn Minh Phương* (11A Hùng Vương), Hà Xuân Thành, THCN Việt Trì

Hà Bắc : *Vũ Duy Tuấn* 11A PTTH năng khiếu.

Hải Hưng : *Nguyễn Phú Khánh* ; **Hải Phòng** : *Hà Duy Hưng*

Nam Hà : *Nguyễn Anh Hoa* (Lê Hồng Phong), *Nguyễn Xuân Quang* (Trường Trần Hưng Đạo)

Thanh Hóa : *Lê Văn Cường*

Nghệ An : *Nguyễn Thị Thúy Vân* (Trường Huỳnh Thúc Kháng)

Hà Tĩnh : *Dương Thu Phương*

Quảng Bình : *Trần Chí Hòa, Trần Hữu Lực, Nguyễn Hữu Tần*

Quảng Trị : *Trần Thế Anh*

Thừa Thiên – Huế : *Đinh Trung Hoàng* (10CT, ĐHTH Huế)

Quảng Ngãi : *Đinh Hữu Khánh*

Phú Yên : *Phạm Ngọc Tân* (Lương Văn Chánh), *Võ Hoàng Phú* (Trường Nguyễn Huệ)
Minh Hải : *Lê Chí Nguyễn* (TH chuyên Phan Ngọc Hiến)

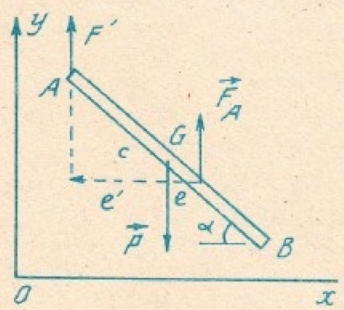
3°) Đặc biệt, bạn *Bùi Mạnh Hùng*, lớp 9H, PTCS Trưng Vương, Hà Nội đã đề xuất và giải đúng bài toán tổng quát hơn sau đây :

Hình chóp $SABC$ có tổng các mặt (góc ở đỉnh) của tam diện đỉnh S bằng n^o và các cạnh bên bằng nhau và bằng a. Chứng minh rằng

$$S_{tp} \leq a^2\left(\frac{3}{2}\sin\frac{n}{3} + \sqrt{3}\sin^2\left(\frac{n}{6}\right)\right)$$

NGUYỄN ĐĂNG PHÁT

Bài L1/228. *Thước gỗ AB, đầu A được xuyên qua một trục quay, trục này ở phía trên mặt nước. Thả thước xuống nước, khi thước đứng yên thì phần thước ngập trong nước $CB = \frac{3}{5}AB$. Tìm lực đẩy Acsimét tác dụng vào thước. Tìm lực ép của thước lên trục quay. Trọng lượng thước là P. Ma sát ở trục quay được bỏ qua.*

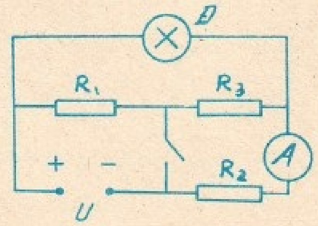


Hướng dẫn giải Gọi chiều dài thước là $AB \equiv l = 5a$. Điều kiện cân bằng của thước : $\vec{F'} + \vec{F}_A + \vec{P} = 0$ và $F'l' = F_A . l$ ($F^+ = F'$ là lực ép của thước lên trục). Suy ra $F' + F_A = P$ và $F' . 2,5a\cos\alpha = F_A . a\cos\alpha$. Rút ra $F_A = \frac{5}{7}P$; $F = F' = \frac{2}{7}P$.

Nhận xét. Các em có lời giải tốt : *Lê Thanh Hải*, 10CL, PTTH Lê Hồng Phong, **Nam Hà** ; *Trần Đức Minh*, 12 Lí, Thăng Long, Đà Lạt **Lâm Đồng ;** Nguyễn Đức *Minh Hoàng*, 12CL, Quốc Học Huế, *Đàm Hữu Thu*, 10 Lí, trường chuyên Lương Văn Chánh, Tuy Hòa, **Phú Yên** ; *Nguyễn Cảnh Linh*, 10CL, trường chuyên Phan Bội Châu, **Nghệ An** ; *Nguyễn Văn Linh*, $10A_3$, Quốc Học Quy Nhơn, **Bình Định** ; *Hoàng Kì Sơn*, 10 Lí, Nansi–Amsterdam, *Lưu Hoàng Minh* 10CL, PTTH Đào Duy Từ, Đồng Hới, **Quảng Bình** ; *Nguyễn Thịnh Vượng*, 9 Lí, chuyên Xuân Thủy, **Nam Hà**.

MAI ANH

Bài L2/228. *Cho mạch điện như hình vẽ. $R_2 = R_2$; $R_3 = 3R_2$. U không đổi. Bỏ qua giá trị điện trở của dây nối, khóa K và Iampe kế.*



Khi K mở, đèn Đ đạt công suất tiêu thụ cực đại, (A) chỉ 1A.

1) Xác định số chỉ (A) khi K đóng ;

2) Với U = 150V, hãy xác định $P_Đ$, $U_Đ$ lúc K mở, K đóng.

Hướng dẫn giải. 1) Khi K mở, mạch điện mắc theo sơ đồ

$[(R_1 + R_3)//R_Đ]\ ntR_2$ và (A) chỉ

$$I_c : I_c = \frac{U}{R_{tm}} = \frac{U(4R_1 + R_Đ)}{4R_1^2 + 5R_1R_Đ} \rightarrow$$

$$I_Đ = I_c . \frac{R_{13Đ}}{R_Đ} = \frac{4U}{4R_1 + 5R_Đ} \rightarrow$$

$$P_Đ = I^2R_Đ = \frac{16U^2 . R_Đ}{(4R_1 + 5R_Đ)^2}.$$

$P_Đ$ đạt cực đại khi $R_Đ = \frac{4}{5}R_1$ (1) $\rightarrow$ $I_c = \frac{3U}{5R_1} = 1A$ (theo đề bài)

$\rightarrow \frac{U}{R_1} = \frac{5}{3}$ (2). Khi K đóng mạch điện có sơ đồ : $[(R_2//R_3)\ ntR_Đ]\ //\ R_1$ (A) chỉ dòng qua $I_2 \rightarrow$

$$I_Đ = \frac{U}{R_{23Đ}} = \frac{20U}{31R_1} = \frac{100}{93}A \rightarrow$$

$$I_2 = I_Đ\frac{R_{23}}{R_2} = \frac{25}{31}A \text{ (số chỉ (A)}$$

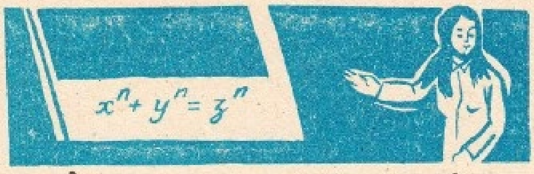
2) Với $U = 150V \rightarrow R_1 = 90\Omega$, $B_Đ = 72\Omega$

Khi K mở $P_Đ = 50W$, $U_Đ = 60V$

Khi K đóng $P_Đ = 84W$, $U_Đ = 77,8V$.

Nhận xét. Các em có lời giải tốt : *Nguyễn Đức Hải*, 11 Lí, PTTH Lê Hồng Phong, Nam Định, **Nam Hà** ; *Trần Đức Minh*, 12L, PTTH Thăng Long Đà Lạt, **Lâm Đồng**

MAI ANH



ĐỀ RA KÌ NÀY

CÁC LỚP THCS.

Bài T1/232 : Cho a, b là 2 số tự nhiên thỏa mãn

$$a^4 = 1996\, b^8 - 1$$

Chứng minh rằng tích ab là bội của 5.

TRẦN BÁ SỸ
(Thanh Hóa.)

Bài T2/232 : Tìm nghiệm nguyên của phương trình sau :

$$y^2 = -2\,(x^6 - x^3y - 32)$$

NGUYỄN ĐỨC TẤN
(TP Hồ Chí Minh).

Bài T3/232 : Cho x, y là hai số thực thỏa mãn :

$$x^2 + y^2 = x\sqrt{1 - y^2} + y\sqrt{1 - x^2}$$

Chứng minh rằng : $3x + 4y \leqslant 5$

TRỊNH BẰNG GIANG
(TP Hồ Chí Minh).

Bài T4/232 : Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), gọi M là trung điểm của BC. Trên đường thẳng BC có hai điểm I, J di động luôn luôn đối xứng với nhau qua M. Gọi E, F lần lượt là giao điểm thứ hai của AI, AJ với đường tròn (O) và H là trung điểm của EF. Tìm quỹ tích điểm H.

VI QUỐC DŨNG
(Bắc Thái).

Bài T5/232 : Cho hình vuông $ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R. Chứng minh rằng : Với mọi điểm $M \in (O, R)$ ta có tổng : $MA^4 + MB^4 + MC^4 + MD^4$ là một hằng số.

VŨ QUỐC LƯƠNG
(Hà Nội)

CÁC LỚP THCB

Bài T6/232 : Tìm tất cả giá trị m để hệ

$$\begin{cases} x^3 - mx - y = 0 \\ y^3 - my + x = 0 \end{cases}$$

Có 5 nghiệm (m, x, y là các số thực).

LÊ VĂN QUANG
(Thừa Thiên – Huế)

Bài T7/232 : Chứng minh rằng với mọi $x \in R$, ta có

$$|\sin^{1995} x + \cos x| < \frac{5}{4}$$

NGUYỄN ĐỨC THIỆU
(TP Hồ Chí Minh)

Bài T8/232 : Cho song ánh $f : N \to N$. Chứng minh rằng tồn tại vô số bộ (a, b, c) với $a, b, c \in N$ thỏa điều kiện : $a < b < c$, $2f(b) = f(a) + f(c)$

PHAN ĐỨC CHÍNH
(Hà Nội)

Bài T9/232 : Cho bốn điểm A_i ($i = \overline{1, 4}$) cùng nằm trên một đường tròn. Gọi T_i là tam giác xác định bởi ba trong bốn điểm trên trừ điểm A_i. Chứng minh bốn đường tròn Euler của T_i, bốn đường thẳng Simson của điểm A_i đối với T_i cùng qua một điểm.

(Đường thẳng Simson của điểm A_i đối với tam giác T_i là đường thẳng đi qua chân đường vuông góc kẻ từ A_i đến các cạnh của T_i)

TRẦN VIỆT HÙNG
(Sóc Trăng).

Bài T10/232 : Trong không gian cho ba tia ox, oy, oz và A, B, C là ba điểm cố định lần lượt nằm trên ba tia đó

Giả sử $\div\, a_n$ là một cấp số cộng có $a_1 > 0$, công sai $d > 0$. Với mỗi số nguyên dương n, trên ox, oy, oz lần lượt lấy các điểm A_n, B_n, C_n sao cho :

$$OA = a_n OA_n,\ OB = a_{n+1} OB_n,\ OC = a_{n+2} OC_n$$

Chứng minh rằng :

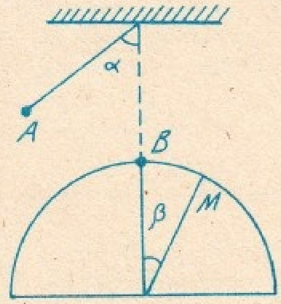
1/ Các đường thẳng A_nB_n, B_nC_n, C_nA_n lần lượt đi qua các điểm I, J, K cố định.

2/ I, J, K thẳng hàng.

HOÀNG HOA TRẠI
(Quảng Ngãi)

CÁC ĐỀ VẬT LÍ

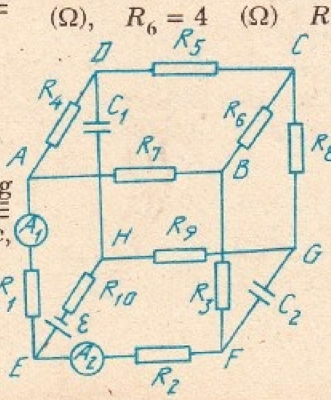
Bài L1/232 : Trên một mặt bán cầu, bán kính R = 1 mét, có đặt bi nhỏ B có khối lượng m_B = 2 kg. Một con lắc đơn có chiều dài l = 1m, khối lượng quả cầu A là m_A = 1 kg. Kéo A để dây treo hợp với phương thẳng đứng một góc $\alpha = 60^0$ (hình vẽ) rồi buông không vận tốc đầu. Sau va chạm, B trượt đến vị trí M ($\beta = 30^0$) thì rời khỏi vòm cầu. Tìm lực căng dây treo khi vật A đến vị trí cao nhất sau va chạm.



Lấy $g = 10 m/s^2$ và bỏ qua lực cản không khí và ma sát. /.

NGUYỄN ĐỨC PHI.
(Quảng Ngãi).

Bài L2/232 : Cho mạch điện 1 chiều như hình vẽ. Trong đó : ε = 12 (v), điện trở trong các nguồn không đáng kể. $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = 1$ (Ω), $R_6 = 4$ (Ω) $R_8 = R_9 = R_{10} = 2$ (Ω), $C_1 = 4\mu F$; $C_2 = 6\mu F$, các am pe kế có điện trở không đáng kể.



Tính :

a) Số chỉ của ampe kế (A_1) và (A_2)

b) Điện tích của 2 tụ C_1 và C_2

NGUYỄN VĂN HẠNH
(Nghệ An).

PROBLEMS IN THIS ISSUE

For lower secondary schools

T1/232 : Let a, b be two natural numbers satisfying

$$a^4 = 1996\,b^8 - 1.$$

Prove that the product ab is a multiple of 5.

T2/232 : Find integer–solutions of the equation :

$$y^2 = -2\,(x^6 - x^3y - 32).$$

T3/232 : Let x, y be two real numbers satisfying

$$x^2 + y^2 = x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\,.$$

Prove that $3x + 4y \leqslant 5$.

T4/232 : Let ABC be a triangle incribed in a circle (O) and M be the midpoint of BC. Two points I, J, symmetric through M, move on the line BC. Let E and F be respectively the second points of intersection of AI and AJ with the circle (O). Find the locus of the midpoint H of EF.

T5/232 : Let be given a square $ABCD$ inscribed in the circle with center O and radius R. Prove that the quantity $MA^4 + MB^4 + MC^4$ does not depend on $M \in (O, R)$.

For upper secondary schools

T6/232 : Find all values of m such that the system of equations

$$\begin{cases} x^3 - mx - y = 0 \\ y^3 - my + x = 0 \end{cases}$$

has five solutions ($m, x, y \in \mathbf{R}$).

T7/232 : Prove that for every $x \in \mathbf{R}$,

$$|\sin^{1995} x + \cos x| < \frac{5}{4}.$$

T8/232 : Let be given a bijection $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$. Prove that there exists an infinite number of triples (a, b, c) with $a, b, c \in \mathbf{N}$ satisfying : $a < b < c$, $2f(b) = f(a) + f(c)$.

T9/232 : Let be given four points A_i ($i = \overline{1,4}$) on a circle and let T_i be the triangle with these points, except A_i, as vertices. Prove that the four Euler circles of T_i, the four Simson lines of A_i with respect to T_i pass through a common point.

(The Simson line of A_i with respect to triangle T_i the line passing through the orthogonal projections of A_i on the sides of T_i).

T10/232 : Let be given three semi–lines Ox, Oy, Oz in space and theree points A, B, C respctively on these semi–lines.

Let $\div\, a_n$ be an arithmetic progression with $a_1 > 0$ and common difference $d > 0$. For every positive integer n, let A_n, B_n, C_n be the points respectively on Ox, Oy, Oz such that $OA = a_n\, OA_n$, $OB = a_{n+1}\, OB_n$, $OC = a_{n+2}\, OC_n$.

Prove that :

1) the lines A_nB_n, B_nC_n, C_nA_n pass respectively through fixed points I, J, K ;

2) I, J, K are collinear

SAI SÓT NHỎ NHƯNG HẬU QUẢ...

NGUYỄN THỊ PHƯƠNG THẢO
(PTCS Lê Lợi Hà Đông – Hà Tây)

Một lần xem vở ghi của học sinh chuyên ban lớp 10 tôi thấy có một vài chỗ sai. Các cháu bảo cô giáo chép từ trong sách giáo khoa ra. Tôi xem trong cuốn sách ĐẠI SỐ 10 in lần thứ 3 năm 1995 đúng là có một số sai sót nhỏ. Sai này có thể do khâu in ấn nhưng tai hại là mấy năm nay cô giáo và học sinh ở đây đều không biết. Thậm chí còn áp dụng để giải các bài toán khác. Sau đây là một vài thí dụ :

Trong phần các tính chất của hàm $y = |x|$ (trang 39) đã đưa ra một số tính chất nhưng không chứng minh, trong đó có một tính chất :

$a - b \geqslant |a| - |b|$ (sai, thí dụ $b = 0$; $a = -3$).

Học sinh đã sử dụng tính chất này để giải toán.

Trang 74 có một bất đẳng thức tương tự :

$|a - b| \leqslant |a + b|$ (sai với $a = 1$, $b = -1$).

Cùng trang này cũng có một bất đẳng thức sai :

$a^2/(a+1) \leqslant 1/2$ (sai, thí dụ $a = 2$).

DIỆN TÍCH A-FIN TRONG MẶT PHẲNG

NGUYỄN THÚC HÀO
(Hà Nội)

Trong hình học phổ thông, khái niệm *khoảng cách* giữa hai điểm (hay *độ dài* của một đoạn thẳng), cũng như khái niệm *số đo góc*, cho phép ta nói đến hình *bằng nhau* và *phép dời hình*. Phép dời hình (còn gọi là *phép đẳng cự*) là phép biến hình bảo toàn khoảng cách giữa hai điểm (cũng như số đo một góc). Nếu trong hình học phổ thông, ta loại trừ mọi tính chất liên quan đến khoảng cách, số đo góc, phép dời hình (hình bằng nhau), thì phần còn lại là *hình học a–fin*. Hình học a–fin công nhận các khái niệm ban đầu về *điểm, đường thẳng, tính sọng song* của đường thẳng (định đề Ơ–clit) và *tỉ số đơn* của 3 điểm thẳng hàng A, B, C xác định như sau. Do A, B, C thẳng hàng nên tồn tại một số thực ρ sao cho

$$\overrightarrow{CA} = \rho . \overrightarrow{CB}$$

và ρ gọi là *tỉ số đơn* của 3 điểm A, B, C (theo thứ tự) kí hiệu

$$\rho = (A, B, C)$$

Các *phép biến afin* bảo toàn các tính chất và khái niệm thuộc hình học afin, trong đó có tỉ số đơn.

Sau đây, chúng tôi nêu thêm một khái niệm được bảo toàn qua phép biến afin, đó là khái niệm *diện tích afin*. Trước hết xin nói đến

I. Phép biến tuyến tính của vectơ

Ta quy ước với nhau về kí hiệu như sau

1) Dành *chữ Hi lạp* ($\alpha, \beta, \ldots$) chỉ các *số thực*

2) Dành *chữ La tinh không viết hoa* ($a, b, c, \ldots$) chỉ *vectơ*

3) Dành *chữ La tinh kiểu chữ in hoa* ($A, B, M, \ldots$) chỉ các điểm.

Ví dụ. số α, vectơ x, điểm A

Bây giờ giả sử có một phép biến vectơ x thành vectơ x'.

$$x \overset{f}{\longmapsto} x' = f(x)$$

Phép biến $f(x)$ gọi là tuyến tính khi thỏa mãn hai điều kiện.

$$f(\alpha x) = \alpha f(x) \quad \forall \alpha, x$$

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \forall x, y$$

Quy về tọa độ theo một cơ sở $\{e_1, e_2\}$, ta viết

$$x = \xi e_1 + \eta e_2,\ x' = \xi' e_1 + \eta' e_2 \qquad (1)$$

thì ta có

$$x' = f(\xi e_1 + \eta e_2) \Rightarrow$$

$$\xi' e_1 + \eta' e_2 = \xi f(e_1) + \eta f(e_2) \qquad (2)$$

Mặt khác ta có thể đặt

$$f(e_1) = \alpha_1 e_1 + \beta_1 e_2 \qquad (3)$$

$$f(e_2) = \alpha_2 e_1 + \beta_2 e_2$$

Thay vào (2) sẽ được

$$\xi' e_1 + \eta' e_2 = (\alpha_1 \xi + \alpha_2 \eta) e_1 + (\beta_1 \xi + \beta_2 \eta) e_2 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \xi' = \alpha_1 \xi + \alpha_2 \eta \\ \eta' = \beta_1 \xi + \beta_2 \eta \end{cases} \qquad (4)$$

Hệ phương trình (4) biểu diễn bằng *tọa độ* phép biến $f(x)$. Đó là một hệ *phương trình tuyến tính*

Định thức

$$\det f = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} = \alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1$$

gọi là *Định thức* của phép tuyến tính f.

Muốn thấy ý nghĩa hình học của định thức det f, ta hãy tính *tích ngoài* (bạn đọc xem lại bài viết về tích ngoài của tác giả trong TH và TT số 2, 6/1985)

$$[f(e_1), f(e_2)] = [\alpha_1 e_1 + \beta_1 e_2, \alpha_2 e_1 + \beta_2 e_2]$$

$$= (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1)[e_1, e_2] \Rightarrow$$

$$\frac{[f(e_1), f(e_2)]}{[e_1, e_2]} = \det f \qquad (5)$$

Cho một cặp vectơ bất kì (không đồng phương) u, v.

Đặt $u = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$, $v = \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2$

ta có

$[u, v] = [\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2, \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2] \Rightarrow$

$$[u, v] = (\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1)[e_1, e_2] \qquad (6)$$

và

$[f(u), f(v)] = [\lambda_1 f(e_1) + \lambda_2 f(e_2), \mu_1 f(e_1) + \mu_2 f(e_2)] \Rightarrow$

$$[f(u), f(v)] = (\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1)[f(e_1), f(e_2)] \qquad (7)$$

So sánh (6) và (7) ta được

$$\frac{[f(u), f(v)]}{[u, v]} = \frac{[f(e_1), f(e_1)]}{[e_1, e_2]} = \det f \qquad (8)$$

Thế là với mọi cặp vectơ u, v thì ta có

$$\frac{[f(u), f(v)]}{[u, v]} = const = \det f$$

Đó chính là ý nghĩa hình học (bất biến) của $\det f$: *qua phép biến tuyến tính f*, tích ngoài của mọi cặp vectơ đều bị nhân với một hệ số như nhau và hệ số đó là *det f*. Như vậy, tích ngoài của hai vectơ là một *bất biến tương đối* của phép biến tuyến tính.

II. Phép biến afin trong mặt phẳng

Cho điểm cố định O, một điểm bất kì M được biểu diễn bằng vectơ – điểm $x = \overrightarrow{OM}$

Nếu một phép biến nào đó biến điểm M thành điểm M' biểu diễn bởi $x' = \overrightarrow{OM}$, sao cho

$$x' = f(x) \qquad (9)$$

mà f là một phép biến *tuyến tính*, thì ta nói rằng phép biến ấy là một *phép biến afin tâm*. Rõ ràng là trong phép này, điểm O không đổi và được gọi là *tâm* của phép afin tâm.

Còn nếu phép biến afin tâm được kèm theo một phép tịnh tiến u, tức là ta có phép

$$x' = f(x) + u \qquad (10)$$

thì phép biến này được gọi là *phép biến afin*. Giả sử A, B, C, D biến thành A', B', C', D' tức là các vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ lần lượt biến thành $\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{C'D'}$. Ta hãy tính tỉ số

$$\frac{[\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{C'D'}]}{[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}]}$$

Gọi a, b, c, d lần lượt là các vectơ $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}$

a', b', c', d' lần lượt là các vectơ $\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OB'}, \overrightarrow{OC'}, \overrightarrow{OD}$

Ta có $a' = f(a) + u$, $b' = f(b) + u$, $c' = f(c) + u$,

$d' = f(d) + u \Rightarrow$

$$\begin{cases} \overrightarrow{A'B'} = f(b) - f(a) = f(b - a) = f(\overrightarrow{AB}) \\ \overrightarrow{C'D'} = f(d) - f(c) = f(d - c) = f(\overrightarrow{CD}) \end{cases}$$

$$\text{Vậy } \frac{[\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{C'D'}]}{[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}]} = \frac{[f(\overrightarrow{AB}), f(\overrightarrow{CD})]}{[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}]} = \det f$$

Thế là *trong phép biến afin, tích ngoài của mỗi cặp vectơ đều được nhân bởi một hệ số chung là det f*. Det f cũng được gọi là *định thức của phép biến afin*. Ta giả thiết $\det f \neq 0$. Khi $\det f = 1$, tích ngoài là *một bất biến afin*. Nói chung, nó chỉ là một *bất biến tương đối*.

Phương trình của phép biến afin (10) nếu viết theo tọa độ sẽ cho ta hệ phương trình bậc nhất

$$\xi' = \alpha_1 \xi + \beta_1 \eta + \gamma_1 \qquad (11)$$
$$\eta' = \alpha_2 \xi + \beta_2 \eta + \gamma_2$$

trong đó ξ, η là tọa độ của x ; ξ', η' là tọa độ của x' ; còn γ_1, γ_2 là tọa độ của u. Phép biến afin có các tính chất sau đây :

1) Biến đường thẳng thành đường thẳng,

2) Bảo toàn tính song song của đường thẳng,

3) Bảo toàn tỉ số đơn của 3 điểm thẳng hàng.

4) Nhân với một hệ số chung ($\det f$) tích ngoài của mọi cặp vectơ.

Bạn đọc có thể dễ dàng chứng minh các tính chất trên.

III. Diện tích afin

Theo trực giác, ta hiểu diện tích là số đo một phần nào đó của mặt phẳng giới hạn trong một chu vi khép kín, số đo đó nói lên sự rộng lớn mức độ nào của phần mặt phẳng ấy. Nó có tính chất đương nhiên là *cộng tính*, nghĩa là nếu một hình H gồm có 2 phần kề nhau H_1 và H_2 thì diện tích của H bằng tổng diện tích của H_1 và H_2. Ta sẽ viết

$$\overline{H} = \overline{H}_1 + \overline{H}_2$$

Ta dùng *gạch ngang ở trên* để chỉ diện tích.

Trong mặt phẳng afin, ta hãy công nhận hai tính chất sau đây.

1) Diện tích không đổi qua một phép tịnh tiến.

Chẳng hạn, nếu $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'}$, thì

$$\overline{ABC} = \overline{A'B'C'}$$

2) Diện tích không đổi qua phép đối xứng tâm

Chẳng hạn, nếu $\overrightarrow{OA'} = -\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB'} = -\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC'} = -\overrightarrow{OC}$, thì

$$\overrightarrow{ABC} = A'\overrightarrow{B'}C'$$

Bây giờ ta định nghĩa.

Diện tích của hình bình hành là giá trị tuyệt đối của tích ngoài hai vectơ cạnh của nó

Giả sử cho hình bình hành ABCD với

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = u$$
$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = v$$

thì diện tích của nó là

$$\sigma = \overline{ABCD} = |[u, v]| \qquad (12)$$

Dễ dàng thấy rằng việc chọn hướng là thứ tự của các vectơ cạnh là tùy ý, bởi vì việc ấy chỉ ảnh hưởng đến dấu của tích ngoài mà thôi.

Hệ quả. Diện tích của một tam giác bằng 1/2 tích ngoài của hai vectơ cạnh bất kì.

Quả vậy, tam giác ABC và tam giác CDA có cùng diện tích vì đối xứng tâm với nhau. Vậy diện tích của mỗi tam giác ấy bằng 1/2 diện tích của hình bình hành, tức

$$\overline{ABC} = \overline{CDA} = \frac{1}{2}|[u, v]|$$

Ta hãy đặt $\overrightarrow{CA} = w$. Ta thấy

$$u + v + w = 0$$

Lấy tích ngoài lần lượt với u, v thì

$$[v, u] + [w, u] = 0,\ [u, v] + [w, v] = 0 \Rightarrow$$

$$[u, v] = [v, w] = [w, u]$$

Thế là

$$\overrightarrow{ABC} = \frac{1}{2}|[u, v]| = \frac{1}{2}|[v, w]| = \frac{1}{2}|[w, u]| \quad (13)$$

Chú ý. Muốn tính diện tích của một hình đa giác, ta chia nó thành tam giác và bình hành rồi tính từng phần mà cộng lại.

Nếu muốn tính diện tích của một hình có chu vi là đường cong, ta dùng phép tính tích phân

Để kết luận bài này, ta có thể nói rằng trong hình học afin của mặt phẳng, ta đã có được một bất biến để thay thế vai trò của khoảng cách trong hình học phổ thông. Bất biến đó là diện tích của một hình bình hành (hoặc của một tam giác) mà biểu diễn bằng số là tích ngoài của hai vectơ (lấy giá trị tuyệt đối). Mọi phép biến afin đều chỉ nhân nó với cùng một hệ số là det f. Như vậy, tỉ số của hai diện tích, sự bằng nhau của hai diện tích, tức mọi đẳng thức giữa hai diện tích, đều có ý nghĩa bất biến trong hình học afin.

NGUYỄN THÚC HÀO

Tìm hiểu sâu thêm toán học phổ thông

TỪ MỘT BÀI TOÁN THI OLYMPIC QUỐC TẾ ĐẾN KHÁI NIỆM "ĐỐI PHƯƠNG TÍCH"

NGÔ THẾ PHIỆT
(Quảng Nam – Đà Nẵng)

Các bạn đã biết khái niệm phương tích của một điểm P đối với một đường tròn $C(O\,;R)$ là số thực :

$$\mathcal{P}(P, C) = OP^2 - R^2$$

Từ đó có các khái niệm trục đẳng phương của hai đường tròn, tâm đẳng phương của 3 đường tròn. Nhưng nếu xét số thực $f(P_g, C) = OP^2 + R^2$ thì các khái niệm đó sẽ phải thay đổi ra sao ? và bản chất hình học của nó là gì ?

Các bạn chú ý bài toán dự tuyển của kì thi Olympic Toán quốc tế lần thứ XXXIV tổ chức tại Thổ Nhĩ Kì năm 1993 sau đây :

Một đường tròn *(C)* được bảo là cắt đường tròn *(S)* theo đường kính nếu dây cung chung của chúng là đường kính của *(S)*

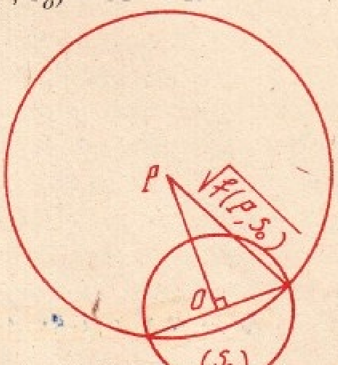
Cho 3 đường tròn có tâm A, B, C không trùng nhau. Chứng minh rằng A, B, C cùng ở trên một đường thẳng nếu và chỉ nếu không tồn tại duy nhất một đường tròn cắt S_A, S_B, S_C theo đường kính. Khi đó tất cả các đường tròn cắt S_A, S_B, S_C theo đường kính đều đi qua hai điểm cố định. Tìm vị trí của hai điểm đó đối với S_A, S_B, S_C.

Trong quá trình giải quyết bài toán này chúng ta xây dựng lí thuyết "*đối phương tích*" sau đây :

1) Định nghĩa : *Cho đường tròn (S_o) có tâm O bán kính R. Ta định nghĩa "ĐỐI PHƯƠNG TÍCH" của một điểm P đối với (S_o) là*

$$f(P\,;S_o) = OP^2 + R^2$$

Nhận xét :



Hình 1

+ Đối phương tích của P đối với (S_o) luôn luôn là một số dương.

+ Đường tròn tâm P bán kính $\sqrt{f(P, S_o)}$ cắt (S_o) theo đường kính. (Hình 1)

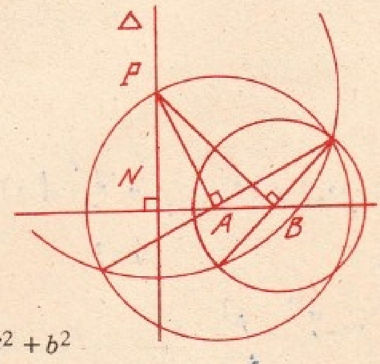
2) Trục đối phương – tích :

Định lí : *Cho hai đường tròn S_A, S_B có tâm khác nhau A và B bán kính lần lượt là a và b. Tập hợp các điểm P có đối phương tích đối với S_A và S_B bằng nhau là một đường thẳng (Δ) vuông góc với AB tại một điểm N thỏa mãn :*

$$\frac{\overline{NA}}{\overline{NB}} = -\frac{AB^2 + b^2 - a^2}{AB^2 + a^2 - b^2}$$

Chứng minh : Cho P bất kì trong mặt phẳng. Hạ $PN \perp AB$

Ta có : $f(P, S_A) = f(P, S_B)$



$$AP^2 + a^2 = PB^2 + b^2$$
$$\Leftrightarrow PA^2 - PB^2 = b^2 - a^2$$
$$\Leftrightarrow PN^2 + NA^2 - PN^2 - NB^2 = b^2 - a^2$$
$$\Leftrightarrow AN^2 - BN^2 = b^2 - a^2$$
$$\Leftrightarrow (\overline{NA} + \overline{NB})(\overline{NA} - \overline{NB}) = b^2 - a^2$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overline{NA} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{b^2 - a^2}{\overline{BA}} + \overline{BA}\right) \\ \overline{NB} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{b^2 - a^2}{\overline{BA}} - \overline{BA}\right) \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overline{NA} = \dfrac{AB^2 + b^2 - a^2}{2\overline{BA}} \\ \overline{NB} = -\dfrac{AB^2 + a^2 - b^2}{2\overline{BA}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\overline{NA}}{\overline{NB}} = -\frac{AB^2 + b^2 - a^2}{AB^2 + a^2 - b^2}$$

Định nghĩa : *Đường thẳng (Δ) vuông góc với AB tại N theo tỉ số :*

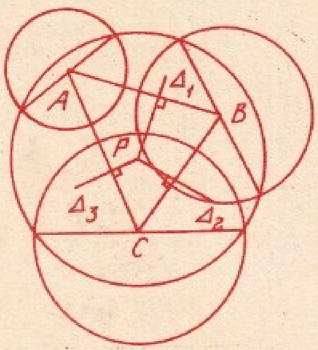
$$\frac{\overline{NA}}{\overline{NB}} = -\frac{AB^2 + b^2 - a^2}{AB^2 + a^2 - b^2}$$

được gọi là "TRỤC ĐỐI PHƯƠNG TÍCH" của hai đường tròn tâm A bán kính a và đường tròn tâm B bán kính b.

3) Tâm đối phương tích của 3 đường tròn có 3 tâm không thẳng hàng :

Định lí 2 : *Cho 3 đường tròn S_A, S_B, S_C có tâm A, B, C bán kính a, b, c. Để A, B, C thẳng hàng điều kiện cần và đủ là tồn tại duy nhất một điểm P có cùng đối phương tích đối với S_A, S_B, S_C.*

Chứng minh : Gọi Δ_1, Δ_2, Δ_3 theo thứ tự là trục đối phương tích của S_A và S_B ;S_B và S_C ; S_C và S_A.



$$f(P, S_A) = f(P, S_B) = f(P, S_C)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P \in \Delta_1 \\ P \in \Delta_2 \\ P \in \Delta_3 \end{cases} \Leftrightarrow \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3 \text{ đồng quy tại } P$$

$\Leftrightarrow A$, B, C không thẳng hàng.

4) Trường hợp S_A, S_B, S_C có 3 tâm thẳng hàng :

Định lí 3 : *Cho S_A, S_B, S_C có 3 tâm thẳng hàng. Nếu tồn tại thì tồn tại nhiều hơn một điểm P có cùng đối phương tích đối với S_A, S_B, S_C.*

Chứng minh : Vì Δ_1, Δ_2, Δ_3 vuông góc với AB, BC, CA vậy Δ_1, Δ_2, Δ_3 hoặc song song hoặc trùng nhau.

+ Nếu $\Delta_1 \,//\, \Delta_2 \,//\, \Delta_3$ thì không tồn tại điểm nào có cùng đối phương tích đối với 3 đường tròn.

+ Nếu $\Delta_1 \equiv \Delta_2 \equiv \Delta_3$: có vô số điểm có cùng đối phương tính đối với 3 đường tròn tức là có vô số các đường tròn cắt S_A, S_B, S_C theo đường kính.

+ Gọi Δ là đường thẳng chung của Δ_1, Δ_2, Δ_3 và N là giao điểm của Δ và đường thẳng chứa AB thì $NA^2 + a^2 = NB^2 + b^2 = NC^2 + c^2 \overset{\text{đặt}}{=} r^2$. Cho bất kì $P \in \Delta$ ta có :

$$f(P, S_A) = f(P, S_B) = f(P, S_C) = PA^2 + a^2 =$$

$$= PB^2 + b^2$$

$$= PC^2 + c^2 = PN^2 + NA^2 + a^2 \overset{\text{đặt}}{=} R^2$$

thì đường tròn tâm P bán kính R cắt S_A, S_B, S_C theo đường kính và cắt AB tại E, F sao cho

$$NE = NF = \sqrt{R^2 - NP^2} = \sqrt{NA^2 + a^2} = r$$

Ta thấy ngay E, F cố định trên AB. Từ đây ta có :

Hệ quả : Cho 3 đường tròn S_A, S_B, S_C có tâm A, B, C cùng trên một đường thẳng d và có bán kính a, b, c. Nếu tồn tại, thì tồn tại vô số đường tròn cắt S_A, S_B, S_C theo đường kính và chúng tạo thành một chùm đường tròn có tâm trên đường thẳng $\Delta \perp d$ tại N thỏa mãn

$$NA^2 + a^2 = NB^2 + b^2 = NC^2 + c^2$$

và có 2 *điểm để* E, F đối xứng qua N và ở trên d sao cho $NE = NF = \sqrt{NA^2 + a^2}$.

Như các bạn đã biết, khái niệm phương tích, trục đẳng phương, tâm đẳng phương đã có một số ứng dụng vào việc giải toán Hình Học. Các bạn có thể suy ngay từ các bài toán đó, các bài toán tương ứng với khái niệm "Đối phương tích".

HÃY NHÌN BẰNG ....

(tiếp theo trang 2)

Giải : Đặt $x = \operatorname{tg}\alpha$; $y = \operatorname{tg}\beta$ $\left(-\frac{\pi}{2} < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}\right)$ thì biểu thức

$$A = \frac{(x^2 - y^2)(1 - x^2y^2)}{(1 + x^2)^2(1 + y^2)^2} =$$

$$= \frac{(\operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{tg}^2\beta)(1 - \operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{tg}^2\beta)}{(1 + \operatorname{tg}^2\alpha)^2(1 + \operatorname{tg}^2\beta)^2}$$

$= (\sin^2\alpha\cos^2\beta - \sin^2\beta\cos^2\alpha)(\cos^2\alpha\cos^2\beta - \sin^2\alpha\sin^2\beta) =$

$\sin(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta)\cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta) = \frac{1}{4}\sin2(\alpha + \beta).\sin2(\alpha - \beta)$

A đạt được giá trị lớn nhất khi

$$\begin{cases}\sin2(\alpha + \beta) = 1\\ \sin2(\alpha - \beta) = 1\end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases}\sin2(\alpha + \beta) = -1\\ \sin2(\alpha - \beta) = -1\end{cases}$$

Giải ra ta được $\alpha = \pm\frac{\pi}{4}$; $\beta = 0$ tức $x = \pm 1$; $y = 0$. A đạt giá trị nhỏ nhất khi

$$\begin{cases}\sin2(\alpha + \beta) = 1\\ \sin2(\alpha - \beta) = -1\end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases}\sin2(\alpha + \beta) = -1\\ \sin2(\alpha - \beta) = 1\end{cases}$$

tức $\alpha = 0$; $\beta = \pm\frac{\pi}{4} \Rightarrow x = 0$; $y = \pm 1$.

Bất đẳng thức (4) đã được chứng minh.

Ví dụ 5 : *Cho hàm số $y = 4x^3 + mx$. Xác định m để $|y| \leqslant 1$ khi $|x| \leqslant 1$.*

Giải : Vì $|x| \leqslant 1$ nên đặt $x = \cos\alpha$ với $\alpha \in [0, \pi]$ thì $y = 4\cos^3\alpha + m\cos\alpha$. Do $|y| \leqslant 1$ với mọi α trong đoạn $[0, \pi]$ ta có thể tìm m bằng cách cho $\alpha = 0$ ta có $|y| = |4 + m| \leqslant 1 \Rightarrow -5 \leqslant m \leqslant -3$

$$\alpha = \frac{\pi}{3} \text{ ta có } |y| = \left|\frac{1 + m}{2}\right| \leqslant 1$$

$$\Rightarrow -3 \leqslant m \leqslant 1$$

từ đó $m = -3$. Đảo lại nếu $m = -3$ thì từ $y = 4x^3 - 3x$ ta đặt $x = \cos\alpha \Rightarrow |x| \leqslant 1$ và $y = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha = \cos3\alpha$ nên $|y| \leqslant 1$.

Ví dụ 6 : *Giả thử $\rho(x, y) = \dfrac{|x - y|}{\sqrt{1 + x^2}\,.\sqrt{1 + y^2}}$*

hãy chứng minh rằng với mọi số thực a, b, c ta có :

$$\rho(a, c) \leqslant \rho(a, b) + \rho(b, c) \qquad (6)$$

Giải : Ta cũng đặt $x = \operatorname{tg}\alpha$, $y = \operatorname{tg}\beta$ thì

$$\rho(x, y) = \frac{|\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta|}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\beta}} = |\sin(\alpha - \beta)|$$

để chứng minh (6) đặt $a = \operatorname{tg}\alpha_1$, $b = \operatorname{tg}\alpha_2$, $c = \operatorname{tg}\alpha_3$ với $\alpha_i \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Khi đó ta phải chứng minh :

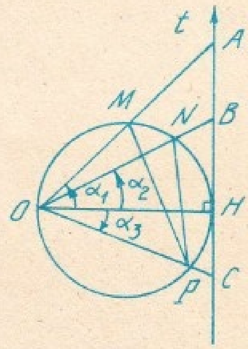
$$|\sin(\alpha_1 - \alpha_3)| \leqslant |\sin(\alpha_1 - \alpha_2)| + |\sin(\alpha_2 - \alpha_3)|$$

Quả vậy từ $|\sin(\alpha + \beta)| = |\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha|$ ta suy ra $|\sin(\alpha + \beta)| \leqslant |\sin\alpha| + |\sin\beta|$ (vì $\cos\beta$, $\cos\alpha \leqslant 1$). Do vậy

$|\sin(\alpha_1 - \alpha_3)| = |\sin(\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_2 - \alpha_3)| \leqslant |\sin(\alpha_1 - \alpha_2)| + |\sin(\alpha_2 - \alpha_3)|$ }

Minh họa hình học : Trên vòng tròn đường kính $OH = 1$ tại H dựng tiếp tuyến Ht và lấy H làm gốc, chiều dương là chiều từ dưới lên (xem hình 1). Trên Ht lấy các điểm A, B, C sao cho $\overline{HA} = a = \operatorname{tg}\alpha_1$, $\overline{HB} = b = \operatorname{tg}\alpha_2$, $\overline{HC} = c = \operatorname{tg}\alpha_3$. OA, OB, OC cắt vòng tròn lần lượt tại M, N, P. Theo định lí hàm số sin ta có

$MP = |\sin(\alpha_1 - \alpha_3)|$, $MN = |\sin(\alpha_1 - \alpha_2)|$, $NP = |\sin(\alpha_2 - \alpha_3)|$.



Hình 1

Rõ ràng ta có $MP \leqslant MN + NP$. Bất đẳng thức thành đẳng thức khi N trùng với M, hoặc N trùng với P. Tức $b = a$ hoặc $b = c$ ở (6)

Ví dụ 7 : *Chứng minh rằng với mọi số a, b, c, x, y, z ta có :*

$$ax + by + cz + \sqrt{(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{2}{3}(a + b + c)(x + y + z)$$

Giải : Quan sát các biểu thức trên ta nghĩ ngay đến tích vô hướng. Xét các vectơ $\vec{u}(a, b, c)$; $\vec{v}(x, y, z)$, $\vec{w}(1, 1, 1)$ thì $|\vec{u}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$; $|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ $|\vec{w}| = \sqrt{3}$. Do đó chia 2 vế của bất đẳng thức trên cho $|\vec{u}|\,.\,|\vec{v}|$ ta được

$$\frac{\vec{u}\,.\,\vec{v}}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|} + 1 \geqslant 2\,.\,\frac{\vec{u}.\vec{w}}{|\vec{u}|\,|\vec{w}|}\,.\,\frac{\vec{v}.\vec{w}}{|\vec{v}|\,|\vec{w}|}$$

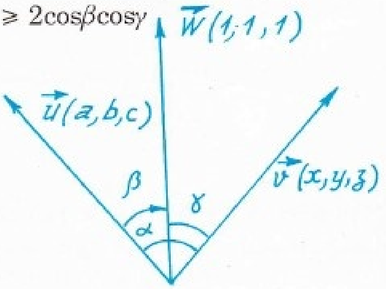
Gọi α là góc làm bởi $\vec{u}$ và $\vec{v}$; $\beta = (\vec{u}, \vec{w})$ $\gamma = (\vec{v}, \vec{w})$ ta phải chứng minh $\cos\alpha + 1 \geqslant$ $\geqslant 2\cos\beta\cos\gamma$. Từ một điểm O bất kì kẻ các véc tơ $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ làm thành một góc tam diện có các góc α, β, γ (xem hình 2).

Ta có $\alpha \leqslant \beta + \gamma$

do đó $\cos\alpha \geqslant \cos(\beta + \gamma)$

và $\cos\alpha + 1 \geqslant \cos(\beta + \gamma) + \cos(\beta - \gamma)$

$\cos\alpha + 1 \geqslant 2\cos\beta\cos\gamma$



Hình 2

Bất đẳng thức thành đẳng thức khi và chỉ khi $\beta = \gamma$ và $\alpha = 2\gamma$. Hai đường thẳng mang $\vec{u}$ và $\vec{v}$ đối xứng nhau qua đường thẳng có phương trình $x = y = z$ tức đường thẳng mang vectơ w.

Qua các ví dụ trên rõ ràng ta thấy "sự hiệu quả" của phương pháp lượng giác. Sau đây là những bài tập để thử nghiệm.

1. Chứng minh rằng từ bốn số cho trước luôn có thể chọn ra hai số x, y sao cho

$$0 \leqslant \frac{x - y}{1 + xy} \leqslant 1$$

(Đề số 12 câu II_2 Bộ đề thi Tuyển sinh vào đại học)

2. Giải hệ phương trình

$$x^2 + a^2 = y^2 + b^2 = (x - b)^2 + (y - a)^2$$

(Đề số 111 câu III_2. Bộ đề thi tuyển sinh vào đại học)

3. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của

$$A = \frac{(x + y)(1 - xy)}{(1 + x^2)(1 + y^2)}.$$

4. Giải bất phương trình

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \geqslant \frac{35}{12}$$

5. Cho hệ $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ z^2 + v^2 = 9 \\ xv + yz \geqslant 6 \end{cases}$

Tìm x, y, z, v để $x\,z$ có giá trị lớn nhất.

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI KHỐI PTCT – TRƯỜNG ĐHSP HÀ NỘI
Năm học 1995 – 1996

Ngày thi thứ nhất : 24/11/1995

Thời gian làm bài : 180 phút

Câu 1. Tìm tất cả các số tự nhiên $n > 6$ sao cho dãy số $a_1, a_2, ..., a_k$ là một cấp số cộng, trong đó $a_1 < a_2 < ... < a_k$ là tất cả các số tự nhiên nhỏ hơn n và nguyên tố với n.

Câu 2. Cho tứ diện $ABCD$ có AB CD, $AC \perp BD$ và $AD \perp BC$.

1) Chứng minh rằng 4 đường cao (hạ từ các đỉnh A, B, C, D xuống mặt đối diện) của tứ diện đồng quy tại một điểm mà ta kí hiệu là H.

2) Gọi O là điểm cách đều 4 đỉnh A, B, C, D, và G là trọng tâm của tứ diện. Chứng minh rằng 3 điểm O, G, H thẳng hàng.

3) Chứng minh rằng trong 4 mặt của tứ diện, có ít nhất một mặt là tam giác có 3 góc nhọn.

Câu 3. Giả sử M_1 là tập hợp các số thực d với $0 < d \leqslant 1$ có tính chất : nếu $f(x)$ là một hàm liên tục trên đoạn $[0 ; 1]$ thỏa mãn $f(0) = f(1)$ thì tồn tại $a \in [0 ; 1 - d]$ sao cho $f(a) = f(a + d)$.

Gọi M_2 là tập hợp $\left\{ \frac{1}{2} / k \in N^* \right\}$.

Chứng minh rằng $M_1 = M_2$.

Ngày thi thứ hai : 25/11/1995

Thời gian làm bài : 180 phút

Câu 4. Cho các số thực không âm a, b, c và d thỏa mãn hệ thức :

$$ab + bc + cd + da = 1.$$

Chứng minh rằng :

$$\frac{a^3}{b+c+d} + \frac{b^3}{a+c+d} + \frac{c^3}{a+b+d} + \frac{d^3}{a+b+c} \geqslant \frac{1}{3}$$

Câu 5. Gọi H, I và O theo thứ tự là trực tâm, tâm đường tròn nội tiếp và tâm đường tròn ngoại tiếp một tam giác nào đó. Chứng minh rằng :

$$OH \geqslant IH\sqrt{2}.$$

Câu 6. Hai người A và B lần lượt điền số vào các ô trong một bảng kẻ ô vuông 5×5 theo cách sau : mỗi người khi đến lượt chỉ điền 1 số vào 1 ô nào đó nếu ô đó còn trống ; A đi trước và chỉ điền số 1 ; B chỉ điền số 0. Sau khi hết ô trống, người ta tính tổng của các số trong mỗi hình vuông 3×3 và gọi S là số lớn nhất trong các tổng ấy.

1) Hãy nêu một chiến thuật của B để với mọi cách điền của A đều có $S \leqslant 6$.

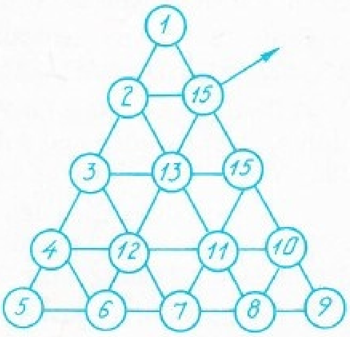
2) Hãy nêu một chiến thuật của A để với mọi cách điền của B đều có $S \geqslant 6$.

NGUYỄN HUY DOAN

Giải đáp bài

TÌM CỬA VÀO VÀ ĐƯỜNG ĐI

Ta đánh số các phòng của khu triển lãm như sau :



Ta thấy khu triển lãm có tối đa 10 cửa vào, ở các phòng được đánh số : 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 14.

Thật vậy ta có thể đưa ra đường đi thỏa mãn yêu cầu là qua tất cả các phòng mỗi phòng một lần qua các cửa vào nêu trên như sau :

1) → 1 → 2 → 3 → 4 → 5 → 6 → 7 → 8 → 9 → 10 → 11 → 12 → 13 → 14 → 15 →

2) → 3 → 4 → 5 → 6 → 12 → 7 → 11 → 8 → 9 → 10 → 14 → 13 → 2 → 1 → 15 →

3) → 4 → 5 → 6 → 12 → 7 → 11 → 8 → 9 → 10 → 14 → 13 → 3 → 2 → 1 → 15 →

4) → 5 → 4 → 6 → 12 → 11 → 7 → 8 → 9 → 10 → 14 → 13 → 3 → 2 → 1 → 15 →

5) → 6 → 5 → 4 → 12 → 7 → 11 → 8 → 9 → 10 → 14 → 13 → 3 → 2 → 1 → 15 →

6) → 7 → 6 → 5 → 4 → 12 → 11 → 8 → 9 → 10 → 14 → 13 → 3 → 2 → 1 → 15 →

7) → 8 → 9 → 10 → 14 → 11 → 7 → 6 → 5 → 4 → 12 → 3 → 13 → 2 → 1 → 15 →

8) → 9 → 8 → 7 → 6 → 5 → 4 → 12 → 11 → 10 → 14 → 13 → 3 → 2 → 1 → 15 →

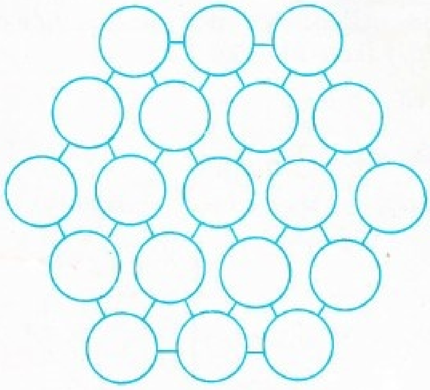
9) → 10 → 9 → 8 → 7 → 11 → 14 → 13 → 12 → 6 → 5 → 4 → 3 → 2 → 1 → 15 →

10) → 14 → 10 → 9 → 8 → 7 → 6 → 5 → 4 → 12 → 11 → 13 → 3 → 2 → 1 → 15 →

(Theo Lê Thị Bích Hạnh, 8CT, chuyên Từ Liêm, Hà Nội). Rất nhiều bạn có giải đáp đúng.

BÌNH PHƯƠNG

ĐIỀN SỐ VÀO HÌNH LỤC GIÁC



Hãy điền các số từ 1 đến 19 vào các đường tròn của hình lục giáctrên sao cho tổng các số của các đường tròn nằm trên một cạnh hoặc nằm trên một đường thẳng song song với các cạnh đều bằng nhau.

TUẤN ĐĂNG

Cùng bạn đọc

- Bạn đọc mới gửi bài lần đầu cho *TC Toán học và tuổi trẻ xin lưu ý :*

– Bài chỉ gửi 1 lần

– Ghi đầy đủ họ tên, địa chỉ (cơ quan, nhà riêng) số điện thoại (nếu có) vào cuối bài. Bài viết tránh dập xóa.

- Nếu là bài giải :

– Ghi họ tên, địa chỉ theo lớp, trường, huyện, tỉnh vào góc trên bên phải. Số của bài ghi bên trái.

– Gấp bài đơn giản. Không dán nhiều hồ.

– Ngoài phong bì ghi rõ : Lời giải của số báo nào.

- Các bạn học sinh có thể tham gia các mục :

– Học sinh tìm tòi

– Giải bài kì trước.

– Giải trí toán học.

– Nụ cười toán học.

Tòa soạn chưa nhận đăng để ra của các bạn học sinh. Xin cám ơn các bạn.

THVTT

ISSN : 0866 - 8035
Chỉ số : 12884
Mã số : 8BT34M6

Sắp chữ tại TTVT Nhà xuất bản giáo dục
In tại nhà máy in Diên Hồng, 57 Giảng Võ
In xong và nộp lưu chiểu tháng 10/1996

Giá 2.000đ
Hai nghìn đồng