

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ★ HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

8 (230)
1996
NĂM THỨ 33

TẠP CHÍ RA NGÀY 15 HÀNG THÁNG

★ VỀ BÀI TOÁN SO SÁNH PHÂN SỐ

★ CÁCH NHÌN MỘT DẠNG TOÁN QUỶ TÍCH

★ MỘT ZUẢ TRƯNG VÀNG VĨ ĐẠI

★ CÁC SỐ RAMSEY

★ KÌ THI OLEMPIC TOÁN QUỐC TẾ



Đoàn Việt Nam
tại IMO - 96 : Từ
trái sang phải :
Phạm Lê Hùng,
PGS Phan Đức
Chính, Ngô Đắc
Tuấn, thầy
Nguyễn Khắc
Minh, Nguyễn
Thái Hà, Trịnh
Thế Huỳnh, Đỗ
Quốc Anh, Ngô
Đức Duy.

TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ MATHEMATICS AND YOUTH

MỤC LỤC

	Trang
● <i>Dành cho các bạn Trung học Cơ sở</i> <i>For Lower Secondary School Level Friends</i> Nguyễn Hữu Bằng – Về bài toán so sánh phân số.	1
● <i>Giải bài kì trước</i> <i>Solutions of Problems in Previous Issue</i> Các bài của số 226.	2
● <i>Biographies of Mathematicians.</i> Nhân kỉ niệm 170 năm ngày ra đời của hình học Lobasepski – Nguyễn Cảnh Toàn – Một quả trứng vàng vĩ đại.	8
● <i>Đề ra kì này</i> <i>Problems in this Issue</i> T1/230 ... T10/230, L1/230, L2/230	9
● <i>Học sinh tìm tòi</i> <i>Young Friends Search in Maths</i> Ngô Minh Nghĩa – Suy nghĩ về một bài toán.	11
● <i>Dành cho các bạn chuẩn bị thi vào Đại học</i> <i>For College and University Entrance</i> <i>Exam Preparers.</i> Hồ Quang Vinh – Cách nhìn một dạng toán quỹ tích trong không gian.	12
● Hoàng Chúng – Các số Ramsey.	13
● Phan Đức Chính – Nguyễn Khắc Minh – Kì thi Olympic Toán Quốc tế lần thứ 37.	16
● <i>Giải trí toán học</i> <i>Fun with Mathematics</i> Giải đáp bài : Viết số trong bàn cờ.	Bìa 4
Tuấn Đăng – Tìm cửa vào và đường đi.	Bìa 4

Tổng biên tập :
NGUYỄN CẢNH TOÀN
Phó tổng biên tập :
NGÔ ĐẠT TỬ
HOÀNG CHÚNG

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP :

Nguyễn Cảnh Toàn, Hoàng
Chúng, Ngô Đạt Tử, Lê Khắc
Bảo, Nguyễn Huy Doan,
Nguyễn Việt Hải, Đinh Quang
Hào, Nguyễn Xuân Huy, Phan
Huy Khải, Vũ Thanh Khiết, Lê
Hải Khôi, Nguyễn Văn Mậu,
Hoàng Lê Minh, Nguyễn Khắc
Minh, Trần Văn Nhung,
Nguyễn Đăng Phát, Phan
Thanh Quang, Tạ Hồng
Quảng, Đặng Hùng Thắng, Vũ
Dương Thụy, Trần Thành
Trai, Lê Bá Khánh Trình, Ngô
Việt Trung, Đặng Quan Viễn.

Trụ sở tòa soạn :

45B Hàng Chuối, Hà Nội
231 Nguyễn Văn Cừ, TP Hồ Chí Minh

ĐT: 8213786
ĐT: 8356111

Biên tập và trị sự : VŨ KIM THỦY
Trình bày : QUỐC HỒNG

Dành cho các bạn THCS

VỀ BÀI TOÁN SO SÁNH PHÂN SỐ

NGUYỄN HỮU BẢNG
(Nghệ An)

Sách giáo khoa Toán 6, tập 2, ở phần ôn tập về tính chất của bốn phép tính trong $\mathbb{N}$ và trong $\mathbb{Q}_+$ có bài toán :

So sánh bằng nhiều phương pháp khác nhau xem trong hai phân số $\frac{5}{7}$ và $\frac{13}{16}$ thì phân số nào lớn hơn.

Đây là một bài toán đơn giản nhưng chứa đựng nhiều vấn đề trong chương trình Toán 6. Trong bài này tôi xin trao đổi với các bạn vài điều như sau : Trước hết xin nêu tóm tắt những cách so sánh phân số (trong tập hợp $\mathbb{Q}_+$) quen thuộc là :

1. Quy đồng mẫu các phân số đã cho rồi so sánh các tử với nhau.
2. Viết các phân số đã cho dưới dạng các phân số cùng tử rồi so sánh các mẫu với nhau.

3. So sánh phân số theo tính chất : nếu $ad < bc$ thì $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$

4. So sánh tỉ số các phân số đã cho với 1, theo tính chất :
nếu $x : y < 1$ thì $x < y$ ($y \neq 0$)

5. Viết các phân số dưới dạng số thập phân rồi so sánh các số thập phân

6. So sánh số nghịch đảo của các phân số, theo tính chất

Cho $a, b, c, d \neq 0$, nếu $\frac{b}{a} < \frac{d}{c}$ thì $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$

7. Dựa vào tính chất bắc cầu của quan hệ thứ tự : nếu $\frac{a}{b} < \frac{m}{n}$ và $\frac{m}{n} < \frac{c}{d}$ thì $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$

8. So sánh "phần bù của các phân số đối với đơn vị", theo tính chất : nếu $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} < 1$ và $1 - \frac{a}{b} < 1 - \frac{c}{d}$ thì $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$

Tiếp theo xin nêu thêm vài cách giải khác :

9. Ta có tính chất (dễ chứng minh)

Nếu $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ thì $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$

Áp dụng vào bài toán trên ta có :

Vì $\frac{5}{7} < \frac{3}{2}$ nên $\frac{5}{7} < \frac{5+3}{7+2} < \frac{3}{2}$,

Từ $\frac{5}{7} < \frac{3}{2}$ suy ra $\frac{5}{7} < \frac{13}{16} < \frac{8}{9}$

Vậy $\frac{5}{7} < \frac{13}{16}$

10. Từ tính chất đã nêu ở cách 9 ta dễ dàng suy ra tính chất sau :

Nếu $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ thì $\frac{a}{b} < \frac{an+c}{bn+d} < \frac{c}{d}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)

Áp dụng vào bài toán trên ta có

Vì $\frac{5}{7} < \frac{3}{2}$ nên $\frac{5}{7} < \frac{5 \cdot 2 + 3}{7 \cdot 2 + 2} < \frac{3}{2}$ suy ra $\frac{5}{7} < \frac{13}{16}$

Một vài nhận xét về các cách giải

a. Do bốn số 5, 7, 13, 16 đôi một nguyên tố cùng nhau nên khi áp dụng các cách giải 1, 2, 3, 4 vào bài toán trên ta đều quy về so sánh 5.16 và 7.13.

b. Khi so sánh các phân số chẳng hạn $\frac{35}{82}$ và $\frac{36}{83}$; $\frac{97}{99}$ và $\frac{969}{991}$; $\frac{1991}{1995}$ và $\frac{1993}{1997}$, rõ ràng ta nên áp dụng các cách 6, 7, 8, tương ứng là hợp lý nhất.

c. Để vận dụng cách 10 trong bài toán ban đầu ta cần viết

$$13 = 5 \cdot 2 + 3; \quad 16 = 7 \cdot 2 + 2$$

Tương tự ta cũng so sánh được một cách nhanh gọn hai phân số chẳng hạn

$$\frac{89}{95} \text{ và } \frac{895}{954}$$

Ta có $\frac{89}{95} < \frac{5}{4}$ nên $\frac{89}{95} < \frac{89 \cdot 10 + 5}{95 \cdot 10 + 4} < \frac{5}{4}$ do đó $\frac{89}{95} < \frac{895}{954}$

(xem tiếp trang 10)



Bài T1/226: Tìm số $\overline{abcd}$ trong hệ đếm thập phân thỏa mãn:

- 1) Số $\overline{bc} \times 4$ tận cùng bằng $\overline{cd}$
- 2) $\overline{abcd} - \overline{bc} \times 4$ là số chính phương.

Lời giải: Từ thiết ta có:

$$\begin{aligned} \overline{abcd} - \overline{bc} \times 4 &= n^2 \times 100 \quad (n \in \mathbb{Z}^+) \\ \Leftrightarrow a \times 100 + \overline{bc} \times 10 + d - \overline{bc} \times 4 - n^2 \times 100 &= 0 \\ \Leftrightarrow 100(n^2 - 10a) &= 6\overline{bc} + d \quad (1) \end{aligned}$$

Do $0 \leq b, c, d \leq 9$ nên $0 < 6\overline{bc} + d \leq 610$

(2). Kết hợp (2) với (1) ta có:

$$0 < n^2 - 10a \leq 6 \quad (3)$$

Hơn nữa, $0 < a \leq 9$ ($a \in \mathbb{N}$) nên chỉ có các cặp (a, n) sau đây là thỏa mãn (3): (1,4), (2,5), (3,6), (6,8), (8,9). Và ta có các số tương ứng sau đây: 1996, 2828, 2832, 3996, 6664, 8164. Thử lại, ta thấy cả 6 số này đều là số cần tìm.

Nhận xét. Có 84 bài giải, tất cả đều giải đúng. Các bạn sau đây có lời giải tốt: Trần Anh Tuấn (8 Toán Lê Quý Đôn Nha Trang - Khánh Hòa), Bùi Đức Anh (7A Trọng Điểm THCS Uông Bí - Quảng Ninh), Trần Thanh Sơn (8 Toán Năng Khiếu Tx Ninh Bình), Nguyễn Việt Dũng (9A Toán Năng Khiếu Lạng Giang - Hà Bắc), Nguyễn Trần Ngọc Quang (9 Toán Lê Quý Đôn Long Khánh - Đồng Nai), Vương Gia Vũ (6 TC PTCS Trưng Vương, Hoàn Kiếm - Hà Nội), Đỗ Quốc Bảo (9T Trần Đăng Ninh Tp Nam Định - Nam Hà), Bùi Anh Tú (9T Từ Liêm - Hà Nội), Phạm Đình Phú (9³ THCS Long Định Châu Thành - Tiền Giang), Vũ Tuấn Anh (9 Toán THCS Năng Khiếu Thái Nguyên - Bắc Thái), Nguyễn Lê Giang (7CK Nghĩa Dân - Nghệ An), Võ Thanh Việt (9A Quốc học - Quy Nhơn), Trần Đức Sơn (8 Chuyên Thị trấn Ba Đồn Quảng Trạch - Quảng Bình).

DẶNG VIỄN

Bài T2/26: Giải phương trình nghiệm nguyên

$$4y^2 = 2 + \sqrt{199 - x^2 - 2x}$$

Lời giải: Cách 1. của Nguyễn Thanh Tùng 8A₁, Hồng Bàng, Hải Phòng

Điều kiện để bài toán có nghĩa: $-15 \leq x \leq 13$.

Ta có:

$$4y^2 = 2 + \sqrt{199 - x^2 - 2x} = 2 + \sqrt{200 - (x+1)^2}$$

Vì y là số nguyên nên từ đó suy ra

$$\frac{1}{2} \leq y^2 \leq \frac{2 + \sqrt{200}}{4} \leq 4$$

Hay $y^2 = 1$ hoặc $y^2 = 4$.

$$\text{- Nếu } y^2 = 1 \text{ ta có } 4 = 2 + \sqrt{199 - x^2 - 2x}$$

$$\Leftrightarrow 4 = 199 - x^2 - 2x$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 195 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 13)(x + 15) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 13 \text{ và } x = -15 \quad (1)$$

$$\text{- Nếu } y^2 = 4 \text{ ta có } 16 = 2 + \sqrt{199 - x^2 - 2x}$$

$$\Leftrightarrow 196 = 199 - x^2 - 2x$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)(x + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ và } x = -3 \quad (2)$$

Thay các giá trị $y = \pm 1, y = \pm 2$ và các giá trị của x ở (1) và (2) vào phương trình ta thấy phương trình được thỏa mãn. Vậy các nghiệm của phương trình là: $(x, y) = (1, 2), (1, -2), (-3, 2), (-3, -2), (13, 1), (13, -1), (-15, 1), (-15, -1)$

Cách 2 của Phạm Văn Tiến, 9A₁; THCS bán công, Dầm Dơi, Minh Hải.

$$4y^2 = 2 + \sqrt{199 - x^2 - 2x}$$

$$\Leftrightarrow 4y^2 = 2 + \sqrt{200 - (x+1)^2}$$

Để phương trình có nghiệm nguyên thì

$$\begin{aligned} \sqrt{200 - (x+1)^2} &= \sqrt{2 \cdot 10^2 - (x+1)^2} = \\ &= \sqrt{2^2 + 14^2 - (x+1)^2} \end{aligned}$$

phải là số chính phương. Khi đó phải có:

$$\text{hoặc } (x+1)^2 = 10^2 \text{ hoặc } (x+1)^2 = 2^2 \text{ hoặc } (x+1)^2 = 14^2$$

$$\text{- Nếu } (x+1)^2 = 10^2 \Rightarrow 4y^2 = 2 + 10 \Rightarrow y^2 = 3$$

phương trình không có nghiệm nguyên

$$\text{- Nếu } (x+1)^2 = 2^2 \Rightarrow x+1 = \pm 2 \Rightarrow x = 1 \text{ và } x = -3 \quad (1) \text{ từ đó có: } 4y^2 = 2 + 14 \Rightarrow y = \pm 2 \quad (2)$$

$$\text{- Nếu } (x+1)^2 = 14^2 \Rightarrow x+1 = \pm 14 \Rightarrow x = 13 \text{ và } x = -15 \quad (3) \text{ từ đó có: } 4y^2 = 2 + 2 \Rightarrow y = \pm 1 \quad (4)$$

Thay các cặp (x, y) , ở (1) và (2), ở (3) và (4) vào phương trình ta thấy phương trình được thỏa mãn. Vậy phương trình có các cặp nghiệm nguyên là

$$(1, -2), (1, 2), (-3, -2), (-3, 2), (13, -1), (13, 1), (-15, -1), (-15, 1).$$

Nhận xét: 1. Đa số các bạn giải theo cách 1. Giải theo cách 2 còn có các bạn: Lê Hoàng Đức Khánh, 9T, Chuyên Nguyễn Nghiêm, Đức Phổ, Quảng Ngãi; Võ Thanh Việt, 9A, Quốc học, Quy Nhơn, Bình Định.

2. Các bạn có lời giải tốt là: Phạm Hải Trung, 9T, NK Tiên sơn; Dương Quang Kiên, Phạm Trung Dũng, 9T, NK Bắc Giang; Nguyễn Việt Dũng, Ngô Văn Túc, 9T, NK Lạng Giang, Hà Bắc. Đặng Việt Dũng, 9², Chuyên Vĩnh Tường; Anh Hùng Dũng, 9A, Sa Dec - Phú Thọ; Đặng Thu Hoàng, 8T, Chuyên cấp II, Phú Thọ; Vũ Mạnh Cường, 8A; Bùi Đăng Quang, 9T, Chuyên cấp II, Tam Đảo, Vĩnh Phú. Nguyễn Thị Ngọc Anh, 9T, Lê Hồng Phong, Thị xã, Yên Bái, Trần Tất Đạt, Ngô Quý Dương, 8A₁, Chu Văn An; Nguyễn Tuấn Anh, 8A, Ngọc Lâm, Gia Lâm; Trần Hữu Đức, 9CT, Chuyên

Từ Liêm, Hà Nội. Vũ Văn Quý, 9A, Kim Anh, Kim Môn Hải Hưng. Lương Sĩ Tùng, 9T, chuyên Kiến Xương, Phan Hương Thu, Hoàng Thế Doanh, 8T, Chuyên Thị xã, Thái Bình Nguyễn Trọng Kiên, Hà Thanh Tuấn; Đào Hoàng Anh, 8T; Nguyễn Thị Hồng Dung, Mai Ngọc Kha, 9T, Trần Đăng Ninh; Nguyễn Ngọc Diệp, 9B, Thanh Lưu, Thanh Liêm, Nam Hà. Đinh Hữu Toàn, 8T, NK Trương Hán Siêu; Trần Thành Sơn, 8T, NK Thị Xã, Ninh Bình. Đoàn Công Anh, 8A, NK Hà Trung; Phùng Hải Anh, 9A, Xi Măng; Đỗ Thị Hoa, 7T, NK Bim Sơn, Nguyễn Trọng Phong, 8C, NK Thành phố, Thanh Hóa, Phan Thanh Trung, 8T, Quán Hành, Nghi Lộc; Phan Thị Nghĩa, 8A, NK Yên Thành; Nguyễn Tuấn Dương, 9A, Lê Mao, Vinh; Nguyễn Anh Tú, 9T, chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An. Nguyễn Thị Thúy Hạnh, 8T, NK Thị xã; Trần Nguyễn Thọ, 8T, NK Hà Tĩnh. Nguyễn Minh Kiên, 6T₁, Võ Chí Thành, 9T, Chuyên Lê Khiết; Nguyễn Hải Âu, 8T, Chuyên Mộ Đức, Quảng Ngãi. Bùi Tiến Đạt, Trịnh Duy Bình, 9A₂, Lê Lợi, Di Linh, Lâm Đồng. Nguyễn Ngọc Minh, 9A, Lương Văn Chánh, Phú Yên. Lương Trung Tuấn, 9T, Bồi dưỡng giáo dục, Biên Hòa, Đồng Nai. Chung Nhân Phú, 8T₁, Nguyễn An Khương, Học Môn; Phạm Minh Hùng, 9T, Nguyễn Du, Gò Vấp, TP. Hồ Chí Minh. Nguyễn Chí Thành, 8T_{1d}, chuyên Nguyễn Bình Khiêm, Vĩnh Long. Phạm Việt Sơn, 6A₁, Phạm Thị Vân Giang, 8A, chuyên Bạc Liêu, Minh Hải.

TỔ NGUYÊN

Bài T3(226): Tìm tất cả $a \in \mathbb{N}$ để phương trình

$$x^2 - a^2x + a + 1 = 0$$

có nghiệm nguyên.

Lời giải: Cách 1 (của đa số các bạn)

Để phương trình có nghiệm nguyên điều kiện là $\Delta = a^4 - 4a - 4$ là số chính phương

Với $a = 0, 1$ thì $\Delta < 0$

Với $a = 2 \Rightarrow \Delta = 4$ thỏa mãn

Với $a \geq 3$ ta có $\Delta > (a^2 - 1)^2$ vì

$$\Delta > (a^2 - 1)^2 \Leftrightarrow a^4 - 4a - 4 > a^4 - 2a^2 - 1$$

$$= 2a^2 - 4a - 5 > 0 \Leftrightarrow 2a(a - 2) > 5$$

đúng vì $2a \geq 6, a - 2 \geq 1$.

Để thấy $\Delta < (a^2)^2$. Vậy Δ không là số chính phương với $a \geq 3$ vì

$$(a^2 - 1)^2 < \Delta < (a^2)^2$$

Kết luận: $a = 2$ là giá trị duy nhất cần tìm

Cách 2 (của Lê Bảo Toàn, 9 Quy Nhơn, Vũ Văn Quý 9a Hải Hưng)

Giả sử x_1, x_2 là nghiệm nguyên của phương trình. Theo định lý Viet

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= a^2 \\ x_1 x_2 &= a + 1 \end{aligned} \quad (1)$$

Từ đó $(x_1 - 1)(x_2 - 1) = -(a^2 - a - 2)$

Vì $x_1, x_2 \in \mathbb{N}$ nên từ (1) suy ra

$$x_1 \geq 1, x_2 \geq 1. \text{ Vậy } a^2 - a - 2 \leq 0$$

$\Rightarrow 0 \leq a \leq 2$. Thử trực tiếp chỉ có $a = 2$ thỏa mãn đòi hỏi bài toán.

Nhận xét: Bài này có rất nhiều bạn tham gia giải. Chỉ có 6 lời giải sai: Lời giải tốt là của: Nguyễn Hà Duy 9 Hà Tây, Nguyễn Thị Minh Hoàng 9 Hà Bắc, Võ Chí Thành 9 Quảng Ngãi, Lê Hoàng Anh 9 Hà Nội, Phạm Thế Anh 9 Hà Nội, Trần Đức Sơn, 8 Quảng Bình Phạm Thị Vân Giang 8 Minh Hải Nguyễn Trung Kiên 8T Nam Hà, Trần Tất Đạt 8A Chu Văn An Hà Nội, Nguyễn Văn Thành 9 Ninh Bình, Nguyễn Thị Thúy Hạnh 8 Hòa Bình, Lê Thị Tâm 9 Nghệ An.

DẶNG HÙNG THẮNG

Bài T4/226: Trong các hình thang cân có chu vi $2p$, góc kề đáy lớn bằng α ($\alpha < 90^\circ$), dựng hình thang có diện tích lớn nhất.

Lời giải vắn tắt: Gọi ABCD là hình thang ($AB \parallel CD$) có $AB = 2a$, $CD = 2b$, $BC = c$. O là trung điểm CD. Ta có $2p = 2a + 2b + 2c$

$$\Rightarrow p = a + b + c$$

$$\text{Mặt khác } h = c \sin \alpha.$$

$$\Rightarrow S = (a + b)h = (a + b) \cdot c \sin \alpha$$

Do đó S lớn

nhất $\Leftrightarrow (a + b)c$

lớn nhất. Vì $a + b$

và c là hai số

dương có tổng

không đổi nên

tích của chúng

lớn nhất khi và

chỉ khi $a + b =$

$$c = \frac{p}{2}.$$

Để thấy $CK = c$ (K là hình chiếu của A

xuống CD). Suy ra cách dựng: Dựng $\triangle BHC$

vuông ở H có $\hat{C} = \alpha$, $BC = \frac{p}{2}$. Vẽ đường tròn

(C, CB) cắt CH kéo dài ở K. Kẻ $Bx \parallel CK$ và $Ky \perp CK$ cắt nhau tại A. Từ đó suy ra điểm D.

Nhận xét: 1. Bài này nhiều bạn giải rất dài

do chưa chú ý giả thiết cho p và α tức là đã

không đổi.

2. Các bạn giải tốt bài này:

Cao Bằng: Lâm Mạnh Trường, 9A THCS Hợp Giang.

Bắc Thái: Vũ Tuấn Anh, 9CT THCS Năng khiếu Thái Nguyên.

Hà Bắc: Trần Hồng Quang, 9T Chuyên Bắc Giang, Nguyễn Nhu Chuẩn, 8NK Thuận Thành, Phạm Hải Trung, 9CT Năng khiếu Tiên Sơn.

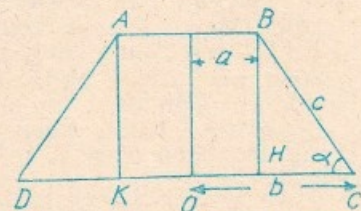
Vĩnh Phú: Trần Thị Thơ 8, PTCS Supe Phong Châu, Bùi Đăng Quang, 9T Chuyên Tam Đảo, Phạm Tất Đạt 8B Chuyên Yên Lạc, Anh Hùng Dũng, 9A PTCS Sa Đéc, Phú Thọ, Đặng Thu Hương 8T Chuyên Phú Thọ,

Yên Bái: Nguyễn Thị Ngọc Anh, 9T Lê Hồng Phong.

Hà Tây: Đỗ Hoàng Diệp, CII Bê tông, Chương Mỹ.

Hà Nội: Đào Phương Bắc, 8A, Bế Văn Đàn, Vũ Phương Nhi, 7H, Lê Thị Hoàng, 8H Trưng Vương, Trần Phúc Long, 9A PTCS Phan Chu Trinh.

Hải Phòng: Nguyễn Thanh Tùng, 8A₁ THCS Hồng Bàng



Thái Bình : Phan Hương Thu, 8T PTCS Chuyên Thị xã.

Nam Hà : Vũ Trần Cương, Nguyễn Trọng Cương, Đoàn Phương, Hà Thanh Tuấn, Nguyễn Văn Trung, Đào Hoàng Anh, 8T, Đỗ Quốc Bảo, Nguyễn Hồng Dung, 9T, Trần Đăng Ninh, Nam Định.

Thanh Hóa : Đoàn Công Anh, 8A Năng khiếu Hà Trung, Nguyễn Trọng Phong 8C NK Thanh Hóa.

Nghệ An : Nguyễn Anh Tú, 9T Phan Bội Châu, Nguyễn Thanh Quỳnh, 8T NK Vinh

Hà Tĩnh : Võ Sĩ Nam 9CT NK Đức Thọ, Quảng Bình : Trần Đức Sơn 8 Chuyên Ba Đồn, Quảng Nam - Đà Nẵng : Võ Trung Thành, 8T Nguyễn Khuyến, Nguyễn Hoàng Thành, 9/2 Nguyễn Huệ, Đoàn Thị Xuân Vinh, 9/1 Trưng Vương, Đà Nẵng.

Quảng Ngãi : Võ Chí Thành, Hồ Từ Vũ, Chuyên Lê Khiết.

Bình Định : Hoàng Anh Thu, 9A THCS Đống Đa, Võ Thanh Việt, 9A Quốc học Quy Nhơn.

Khánh Hòa : Đinh Thị Phương Thanh, Trần Tuấn Anh ; 8T Lê Quý Đôn, Nha Trang.

Lâm Đồng : Phạm Nguyễn Thắng, 8T PTTH Chuyên Thăng Long, Đà Lạt.

Sông Bé : Đoàn Ngọc Minh, 8A₁ Hiệp Thành, Thủ Dầu Một.

Đồng Nai : Phạm Ngọc Huy, 8T Lý Tự Trọng, Hà Minh Ngọc 9/15 Trần Hưng Đạo, Biên Hòa

TPHCM : Chung Nhân Phú 8T1 Nguyễn An Khương Học Môn,

An Giang : Hoàng Thanh Lâm, 8T PTTH Chuyên Thoại Ngọc Hầu, Long Xuyên,

Vĩnh Long : Nguyễn Chí Thành, 8T1 Chuyên Nguyễn Bình Khiêm

Sóc Trăng : Đặng Minh Thanh, 9 PT CI-II An Lạc Tây, Kế Sách

Mình Hải : Phạm Văn Tiến, 9A1 THCS bán công Dầm Dơi, Minh Hải.

VŨ KIM THỦY

Bài T5/226 : Cho hình vuông ABCD, các điểm M, N lần lượt trên BC và CD sao cho $\angle MAN = 45^\circ$. Hãy tìm vị trí của M, N để diện tích tam giác CMN đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải : Đặt a là cạnh của hình vuông ABCD. Trên tia đối của tia DC, lấy điểm E sao cho $DE = BM$, ta có $\triangle ADE = \triangle ABM$ (cg), do đó $AE = AM$ và $\angle EAD = \angle MAB$. Suy ra $\angle EAN = \angle EAD + \angle DAN = \angle MAB + \angle DAN = 90^\circ - \angle MAN = 45^\circ$, và ta có $\triangle EAN = \triangle MAN$ (cg), do đó $MN = EN = ED + DN = BM + DN = 2a - CM - CN$ (1). Mặt khác, từ tam giác vuông CMN ta lại có $MN = \sqrt{CM^2 + CN^2}$. Thay vào (1), được :

$$2a - CM - CN = \sqrt{CM^2 + CN^2}$$

$$\Rightarrow 2a = (CM + CN) + \sqrt{CM^2 + CN^2} \quad (2)$$

Hơn nữa, $CM + CN \geq 2\sqrt{CM \cdot CN}$ và $\sqrt{CM^2 + CN^2} \geq \sqrt{2CM \cdot CN}$, và cả hai dấu bằng

cùng xảy ra khi và chỉ khi $CM = CN$, nên từ (2) ta có :

$$\frac{2a}{2 + \sqrt{2}} \geq CM \cdot CN \text{ hay } \frac{1}{2} \left(\frac{2a}{2 + \sqrt{2}} \right)^2 \geq S_{CMN}$$

Suy ra S_{CMN} đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $CM = CN$, tức là khi $DN = a - CN = a - CM = BM$, và ta có $\triangle AND = \triangle ABM$ (cg) hay $\angle BAM = \angle DAN = 22^\circ 30'$. Vậy vị trí của M, N để diện tích tam giác CMN đạt giá trị lớn nhất là : góc BAM bằng $22^\circ 30'$.

Nhận xét : Có 98 bài giải trong đó có 12 bài giải sai. Sai lầm phổ biến là cho rằng nếu $f(x) \leq g(x)$ và tại điểm x_0 , $f(x_0) = g(x_0)$ thì $f(x_0)$ là giá trị lớn nhất của $f(x)$. Chỉ cần xét ví dụ đơn giản sau đây cũng đủ để bác bỏ điều đó. Hàm x^2 luôn luôn bé hơn hoặc bằng hàm $2x^2$, chúng bằng nhau tại điểm $x = 0$, nhưng 0 không phải là giá trị lớn nhất mà lại là giá trị bé nhất của hàm số x^2 (!). Các bạn sau đây có lời giải tốt : Lê Hoàng Đức Khánh (9 Toán Chuyên Nguyễn Nghiêm Đức Phổ - Quảng Ngãi), Nguyễn Chí Thành (8T TH Chuyên Nguyễn Bình Khiêm - Vĩnh Long), Nguyễn Văn Quang (9T PTTH Lam Sơn - Tp Thanh Hóa), Trần Tất Đạt (8A₁ Chu Văn An Tây Hồ - Hà Nội), Nguyễn Huy Cường (10A₁ KCT DHSP Vinh Nghệ An).

DẶNG VIỄN

Bài T6/226 : Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \geq 2$ ta có

$$\sum_{k=0}^{n-1} C_{2n+1}^{2(n-k)} \cdot C_{n-k}^1$$

chia hết cho 4^{n-1} .

Lời giải : (của đa số các bạn). Ta có

$$\sum_{k=0}^{n-1} C_{2n+1}^{2(n-k)} \cdot C_{n-k}^1 = \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) C_{2n+1}^{2(n-k)} = \sum_{k=0}^{n-1} k C_{2n+1}^{2k+1}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{2k \cdot (2n+1)!}{2 \cdot (2k)!(2n-2k+1)!} = \frac{2n+1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} C_{2n}^{2k-1}$$

Mặt khác, ta có

$$(1+1)^{2n} - (1-1)^{2n} = 2 \sum_{k=0}^{n-1} C_{2n}^{2k-1} = 4^n$$

Do đó

$$\sum_{k=0}^{n-1} C_{2n+1}^{2(n-k)} \cdot C_{n-k}^1 = \frac{2n+1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4^n = (2n+1)4^{n-1}. (*)$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Nhận xét : Đa số các bạn chứng minh được đẳng thức (*).

Các bạn sau đây có lời giải tốt :

TPHCM : Lê Quang Mẫn.

Hà Nội : Vũ Tất Thắng, Nguyễn Quốc Thắng, Trần Nguyễn Ngọc, Phạm Minh Hoàng, Nguyễn Công Minh, Nguyễn Hoàng Anh, Hoàng Sĩ Hùng, Nguyễn Vũ Hưng.

Nam Hà : Nguyễn Anh Hoa, Nguyễn Thu Thủy.

Hà Tây : Nguyễn Quang Nguyễn.
 Hải Hưng : Trần Hoàng Việt, Phùng Đức Tuấn, Mạc Đăng Nghị.
 Hà Bắc : Vũ Duy Tuấn.
 Hòa Bình : Lê Văn Mạnh.
 Thái Bình : Trần Công Cường.
 Hải Phòng : Hoàng Lê Quang.
 Thanh Hóa : Đinh Trường Sơn, Nguyễn Văn Quang, Nguyễn Minh Thanh, Viên Ngọc Quang, Lưu Trường Huy, Hán Văn Thắng, Đỗ Hồng Sơn.
 Nghệ An : Dương Văn Yên, Lê Thanh Bình, Đặng Đức Hạnh, Lê Văn An, Nguyễn Thái Thọ, Lê Hồng Hà, Nguyễn Việt Dũng.
 Quảng Bình : Trần Đức Thuận, Phan Duy Hùng, Trương Vĩnh Lân, Đỗ Dũng, Trần Hữu Lực, Trần Chí Hòa.
 Thừa Thiên - Huế : Đoàn Xuân Vinh, Cao Thế Anh.
 Quảng Nam - Đà Nẵng : Nguyễn Văn Dung.
 Bình Định : Nguyễn Phương Trinh, Tô Phước Sanh.
 Trà Vinh : Bùi Minh Thiện.
 Khánh Hòa : Trần Tuấn Anh.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T7/226 : Cho phương trình

$$x^{13} - x^6 + 3x^4 - 3x^2 + 1 = 0$$

a) Chứng minh rằng phương trình có đúng một nghiệm số thực

b) Đặt $x_1 = 1$ và

$$x_{n+1} = (x_n^{-7/3} + 1)^{-3/13}$$

với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng dãy số x_n có giới hạn và khi đặt $x_0 = -\lim x_n$ thì x_0 là nghiệm số thực nói trên.

c) Dùng máy tính bỏ túi hãy tính gần đúng nghiệm số thực nói trên đến hai chữ số thập phân.

Lời giải : Đặt $f(x) = x^{13} - x^6 + 3x^4 - 3x^2 + 1$. Nếu $x \geq 1$ thì $f(x) = (x^{13} - x^6) + 3(x^4 - x^2) + 1 \geq 1 > 0$

Nếu $x \in (0, 1)$ thì $f(x) = x^{13} - (x^2 - 1)^3 > 0$

Với $x < 0$ thì

$f'(x) = 13x^{12} - 6x^5 + 12x^3 - 6x = 13x^{12} - 6x(x^2 - 1)^2 > 0$ do đó $f(x)$ đồng biến trong $(-\infty, 0)$. Vì $f(x)$ là đa thức bậc lẻ do đó $f(x)$ có 1 nghiệm duy nhất trong $(-\infty, 0)$. Vì $f(-1) = -1$, $f(0) = 1$ nên nghiệm đó thuộc $(-1, 0)$

b) Đặt $g(x) = (x^{-7/3} + 1)^{-3/13}$

Ta có $x_1 = 1$, $x_{n+1} = g(x_n)$

Vì hàm x^α ($x > 0$) với $\alpha < 0$ là hàm giảm do đó $g(x)$ là hàm tăng. Mặt khác $x_2 = 2^{-3/13} < 1 = x_1 \rightarrow x_3 = g(x_2) < g(x_1) = x_2, \dots$ dãy (x_n) là dãy giảm và bị chặn dưới bởi 0 nên tồn tại giới hạn $a = \lim x_n$. Qua giới hạn ta được

$$a^{-13/3} = a^{-7/3} + 1 \Leftrightarrow$$

$$1 = (a^{-7/3} + 1)a^{13/3} = a^2 + a^{13/3} \rightarrow$$

$$(1 - a^2)^3 = a^{13} \text{ đặt } x_0 = -a \rightarrow$$

$$(1 - x_0^2)^3 = -x_0^{13} \rightarrow x_0^{13} - (x_0^2 - 1)^3 = 0$$

$$\rightarrow f(x_0) = 0.$$

$$c) \text{ Ta có } f(-0,80) = -0,0083$$

$$f(-0,79) = 0,0064 \dots$$

$$f(-0,78) = 0,020 \dots$$

$$\text{Vậy } x \approx -0,79.$$

Nhận xét : Các bạn sau đây có lời giải tốt

Trần Nguyên Ngọc 11 ĐHKHTN, Lê Quang Năm 10 HCM, Trần Hữu Lực 10 Quảng Bình, Trần Nam Dũng 10 Nghệ An, Phan Anh Huy 11 Đà Nẵng, Nguyễn Vĩnh Chi 11, Hà Nội, Hồ Lợi Thuận 11 Đồng Tháp, Trần Đức Thuận 10 Quảng Bình, Nguyễn Thái Thọ 10 Nghệ An, Đoàn Xuân Vinh 11 Huế, Nguyễn Quốc Thắng 10 ĐHSP, Nguyễn Mạnh Tinh 11, Hải Hưng, Phan Thanh Hải 11 Lâm Đồng, Nguyễn Anh Hoa, 10 Nam Hà, Cao Thế Anh 11 Huế, Nguyễn Đăng Triển 11, Đồng Tháp.

DẶNG HÙNG THẮNG

Bài T8/226 : Cho a, b, c, d, e, f là 6 số thực thỏa mãn điều kiện

$$ab + bc + cd + de + ef = 1.$$

Chứng minh rằng

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 \geq \frac{1}{2\cos \frac{\pi}{7}}$$

Lời giải. (của đa số các bạn). Với mọi $\alpha_i > 0, i = 1, 5$, ta có

$$\alpha_1 a^2 + \frac{1}{\alpha_1} b^2 \geq 2ab$$

$$\alpha_2 b^2 + \frac{1}{\alpha_2} c^2 \geq 2bc$$

$$\alpha_3 c^2 + \frac{1}{\alpha_3} d^2 \geq 2cd$$

$$\alpha_4 d^2 + \frac{1}{\alpha_4} e^2 \geq 2de$$

$$\alpha_5 e^2 + \frac{1}{\alpha_5} f^2 \geq 2ef.$$

Từ đó suy ra

$$\alpha_1 a^2 + \left(\frac{1}{\alpha_1} + \alpha_2\right) b^2 + \left(\frac{1}{\alpha_2} + \alpha_3\right) c^2 + \left(\frac{1}{\alpha_3} + \alpha_4\right) d^2 + \left(\frac{1}{\alpha_4} + \alpha_5\right) e^2 + \frac{1}{\alpha_5} f^2 \geq 2(ab + bc + cd + de + ef) = 2. \quad (1)$$

Đặt

$$\alpha_i = \frac{\sin(i+1)\frac{\pi}{7}}{\sin \frac{i\pi}{7}}, i = \overline{1,5}.$$

Khi đó dễ dàng chứng minh được rằng

$$\alpha_1 = \frac{1}{\alpha_1} + \alpha_2 = \frac{1}{\alpha_2} + \alpha_3 = \frac{1}{\alpha_3} + \alpha_4 = \frac{1}{\alpha_4} + \alpha_5 = \frac{1}{\alpha_5} = 2\cos \frac{\pi}{7}. \quad (2)$$

(1) và (2) cho ta đpcm.

Các bạn sau đây có lời giải tốt : Đào Mạnh Thắng, 10A, PTTH Hùng Vương, Vĩnh Phú, Lê Quang Mẫn, 10CT, ĐHTH TP. HCM, Nguyễn Anh Hoa, 10A, Lê Hồng Phong, Nam Hà,

Nguyễn Quốc Thắng, 10A, PTCT-ĐHSP I Hà Nội, Trần Nguyên Ngọc, 11B, ĐHKHTN, Hà Nội, Đinh Trường Sơn, 11T, Lam Sơn, Thanh Hóa.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T9/226 : Gọi G là trọng tâm mặt ABC của tứ diện $ABCD$ và M là một điểm bất kì thuộc miền tam giác ABC . Đường thẳng qua M song song với DG cắt các mặt phẳng DBC , DCA và DAB ở A' , B' và C' .

Chứng minh rằng :

$$DA' + DB' + DC' \geq 3GM \quad (*)$$

Lời giải : Giả sử $M \neq G$ và đường thẳng GM không song song với cạnh nào của đáy ABC . Gọi A_1 , B_1 và C_1 là giao điểm của các đường thẳng GM theo thứ tự với các đường thẳng BC , CA và AB ; thế thì các điểm A' , B' và C' chính là giao điểm của các đường thẳng DA_1 , DB_1 và DC_1 với đường thẳng đi qua M song song với DG (xem hình vẽ bên).

Vì G và M đều nằm trong tam giác ABC và $MA' \parallel GD$ nên ta có :

$$\begin{aligned} \vec{MA'} &= \frac{MA'}{GD} \vec{GD} = \frac{MA_1}{GA_1} \vec{GD} = \\ &= \frac{s(MBC)}{s(ABC)} \vec{GD} = 3 \frac{s(MBC)}{s(ABC)} \vec{GD}; \end{aligned} \quad (1)$$

và hai đẳng thức tương tự :

$$\vec{MB'} = \frac{MB'}{GD} \vec{GD} = 3 \frac{s(MCA)}{s(ABC)} \vec{GD}; \quad (2)$$

$$\vec{MC'} = \frac{MC'}{GD} \vec{GD} = 3 \frac{s(MAB)}{s(ABC)} \vec{GD}; \quad (3)$$

Cộng vế đối vế (1), (2) và (3), ta được :

$$\vec{MA'} + \vec{MB'} + \vec{MC'} = 3\vec{GD}; \quad (4)$$

Từ đó suy ra : $DA' + DB' + DC' = 3GM$; (5)

Từ (5) ta được bất đẳng thức (*) cần tìm.

Đấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $M \equiv G$ (lúc đó A' , B' và C' đều $\equiv D$).

Nhận xét : 1°) Bất đẳng thức (*) không chỉ nghiệm đúng với những điểm M nằm trong tam giác ABC , mà đúng với mọi điểm M thuộc mặt phẳng đáy ABC . Thật vậy, khi M là một điểm bất kì thuộc mặt phẳng ABC , ta vẫn có các đẳng thức (1), (2) và (3) duy chỉ có điều là thay các độ dài thông thường bằng các độ dài đại số, các diện tích thông thường bởi các diện tích đại số. Chẳng hạn :

$$\vec{MA'} = \frac{MA'}{BD} \vec{GD} = 3 \frac{s(MBC)}{s(ABC)} \vec{GD}$$

Với chú ý rằng $s(MBC) + s(MCA) + s(MAB) = s(ABC)$ ($\forall M \in mp ABC$), ta thu được (4) với (5) và do đó được BDT (*).

2°) Hai bạn Nguyễn Thành Phương, 10A, PTTH chuyên Thái Bình và Phạm Anh Đức, 11T, PTNK Hải Hưng đã giải hoặc đề xuất bài toán tổng quát hơn bằng cách thay tứ diện (chóp tam giác) $D.ABC$ bởi chóp n -giác $S.A_1A_2...A_n$

Khi đó, BDT (*) được thay đổi BDT :

$$\sum_{i=1}^n SA'_i \geq nGM.$$

3°) Ngoài hai bạn trên, các bạn sau đây có lời giải tốt :

Hà Nội : Lê Tuấn Anh, Nguyễn Vĩnh Chi, Nguyễn Sỹ Phong, Nguyễn Quốc Thắng, Trần Nguyên Ngọc, Nguyễn Vũ Hưng,

Hà Tây : Nguyễn Quang Nguyên

Hải Hưng : Phạm Văn Khánh, Mạc Đăng Nghi, Nguyễn Mạnh Tinh

Thái Bình : Quỳnh Hoa,

Thanh Hóa : Phạm Như Ngọc, Đinh Trường Sơn, Viên Ngọc Quang,

Nghệ An : Nguyễn Việt Dũng, Trần Nam Dũng, Đặng Đức Hạnh, Nguyễn Thịnh, Dương Văn Yên

Quảng Bình : Đỗ Dũng, Trung Vinh Lân, Trần Hữu Lực, Trần Chí Hòa, Phan Duy Hùng,

Thừa Thiên - Huế : Cao Thế Anh, Đoàn Xuân Vinh./.

NGUYỄN DẰNG PHÁT

Bài T10/226 : Gọi h_a, h_b, h_c và l_a, l_b, l_c lần lượt là độ dài các đường cao và các đường phân giác ứng với các cạnh có độ dài a, b, c của một tam giác có bán kính các đường tròn nội và ngoại tiếp là r và R . Chứng minh rằng :

$$\frac{h_a}{l_a} + \frac{h_b}{l_b} + \frac{h_c}{l_c} \geq 3 \sqrt{\frac{2r}{R}}$$

Lời giải : Sử dụng các công thức tính độ dài đường cao và đường phân giác của một tam giác theo độ dài các cạnh :

$$h_a = \frac{2}{a} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

$$l_a = \frac{2\sqrt{bc}}{b+c} \sqrt{p(p-a)},$$

trong đó $p = \frac{1}{2}(a+b+c)$, ta được :

$$\frac{h_a}{l_a} = \frac{b+c}{a\sqrt{bc}} \sqrt{(p-b)(p-c)} \text{ và hai hệ thức}$$

tương tự :

$$\frac{h_b}{l_b} = \frac{c+a}{b\sqrt{ca}} \sqrt{(p-c)(p-a)},$$

$$\frac{h_c}{l_c} = \frac{a+b}{c\sqrt{ab}} \sqrt{(p-a)(p-b)}$$

Từ đó, áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta được :

$$\frac{h_a}{l_a} + \frac{h_b}{l_b} + \frac{h_c}{l_c} \geq 3 \sqrt{\frac{(b+c)(c+a)(a+b)(p-a)(p-b)(p-c)}{a^2b^2c^2}}$$

$$\geq 3 \sqrt[3]{\frac{8S^2}{pabc}} = 3 \sqrt[3]{\frac{2r}{R}}$$

$$(v_i(b+c)(c+a)(a+b) \geq 2\sqrt{bc} \cdot 2\sqrt{ca} \cdot 2\sqrt{ab} = 8abc$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$, tức là tam giác là đều.

Nhận xét. 1^o) Bài này có rất nhiều cách giải trên cơ sở sử dụng các công thức khác nhau tính độ dài đường cao và đường phân giác của một tam giác không những chỉ theo độ dài các cạnh a, b và c mà còn theo cả các góc A, B và C . Chẳng hạn:

$$h_a = b \sin C (= c \sin B), l_a = \frac{2bc}{b+c} \cos \frac{A}{2}, v.v...$$

Tuy nhiên, cuối cùng đều phải sử dụng B.Đ.T. Còsi đối với 3 số

Chú ý thêm rằng có hệ thức sau đây giữa r, R và các góc A, B, C :

$$r = 4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

2^o) Gọi $AH = h_a$ và $AD = l_a$, ta được:

$$\widehat{HAD} = \frac{1}{2} |B - C|, \text{ do đó:}$$

$$\frac{h_a}{l_a} = \cos \frac{B - C}{2}, \text{ cũng vậy: } \frac{h_b}{l_b} = \cos \frac{C - A}{2}$$

$$\text{và } \frac{h_c}{l_c} = \cos \frac{A - B}{2}.$$

$$\text{Từ đó: } \frac{h_a}{l_a} + \frac{h_b}{l_b} + \frac{h_c}{l_c} = \cos \frac{B - C}{2} + \cos \frac{C - A}{2} + \cos \frac{A - B}{2}$$

Một số bạn đã sử dụng kết quả này để đi đến B.Đ.T. cần tìm

3^o) Đáng tiếc có nhiều bạn phát hiện đúng rằng mỗi tỉ số $\frac{h_i}{l_i}$ ($i = a, b, c$) đều $\geq \sqrt{\frac{2r}{R}}$, nhưng

từ đó suy ra B.Đ.T. cần tìm là không đúng

$$\frac{h_a}{l_a} + \frac{h_b}{l_b} + \frac{h_c}{l_c} \geq 3 \sqrt{\frac{2r}{R}} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{2r}{R}} !!!$$

Nhớ rằng $R \geq 2r$, nên $\frac{2r}{R} \leq 1$ và do đó

$$\sqrt{\frac{2r}{R}} < \sqrt[3]{\frac{2r}{R}}$$

NGUYỄN ĐĂNG PHÁT

Bài L1/226: Một quả cầu khối lượng m đang chuyển động trên một đường thẳng nằm ngang với vận tốc v thì va chạm vào một quả cầu khối lượng M đang chuyển động cùng chiều trên đường thẳng đó với vận tốc $v/3$. Sau va chạm quả cầu m chuyển động với vận tốc $v/2$. Coi va chạm là xuyên tâm. Bỏ qua ma sát giữa hai quả cầu với đường nằm ngang. Chứng tỏ rằng sau va chạm hai quả cầu tiếp tục chuyển động theo hướng cũ. Tìm điều kiện để va chạm xảy ra.

Hướng dẫn giải: Giả thiết sau va chạm, quả cầu m bị bật trở lại: áp dụng định luật bảo toàn động lượng tìm được vận tốc u của M sau

va chạm $u = \frac{9m + 2M}{6M} v$. Tính tổng động năng T_1 trước va chạm và T_2 sau va chạm, phải có

$T_2 \leq T_1$, muốn vậy $1 + \frac{9m}{M} \leq 0$: vô lí. Vậy sau va chạm cả hai quả cầu tiếp tục chuyển động theo hướng cũ. Bây giờ áp dụng định luật bảo

toàn động lượng suy ra $u = \frac{3m + 2M}{6M} v$. Điều

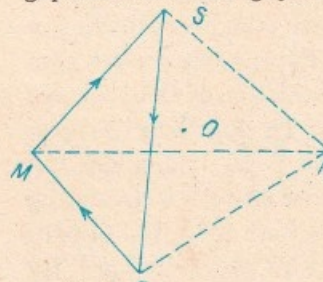
kiện để va chạm xảy ra là: $u \geq \frac{v}{2}$ và $T_1 \geq T_2$

$$\text{rút ra } \frac{M}{3} \leq m \leq \frac{5M}{3}.$$

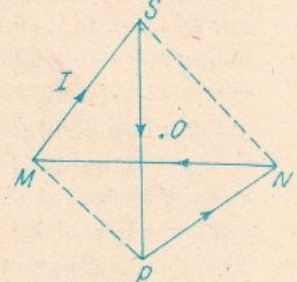
Nhận xét: Các em có lời giải đúng: Lê Quang Thành, 11L-H, chuyên PTTH Lê Quý Đôn Quảng Trị; Phạm Thanh Giang, 11L, PTNK Hải Hưng; Nguyễn Thành Hưng 10L chuyên Lê Khiết, Quảng Ngãi; Phan Duy Hùng, 12CT Quảng Bình.

MAI ANH

Bài L2/226: S, M, N, P là các đỉnh của một tứ diện đều có tâm hình cầu ngoại tiếp là O . Dòng điện cường độ I chạy theo đường MSPM (hình 1) gây ra tại O cảm ứng từ B_0 . Xác định cảm ứng từ B do một dòng điện cường độ I chạy theo đường gấp khúc MSPNM gây ra tại O (hình 2).



Hình 1

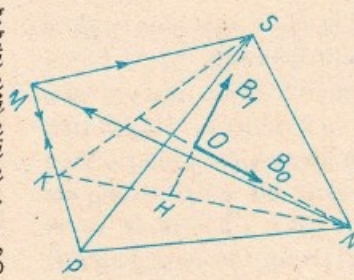


Hình 2

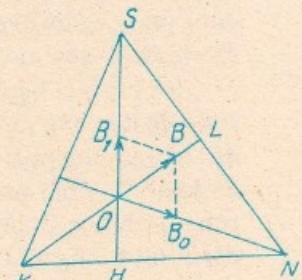
Hướng dẫn giải: Coi từ trường gây bởi dòng điện I chạy theo đường MSPNM là sự "chồng chất" của 2 từ trường: B_0 gây bởi dòng điện chạy theo MSPM và B_1 gây bởi dòng điện chạy theo MPNM (từ trường do 2 dòng điện chạy qua MP và PM triệt tiêu nhau). Vị trí do đối xứng B_0 hướng theo ON và B_1 hướng theo OS (hình 3). Dễ dàng thấy $ON \perp SK$ và $OS \perp KN$. Xét mặt phẳng SKN (hình 4).

Chú ý rằng $B_0 = B_1$; $KS = KN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $OS = ON$; từ đó vectơ $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_1$ có phương KO (OKL là trung trực của SN), hướng từ O

đến L và có độ lớn $B = 2B_0 \cos \widehat{BOB_0} = \frac{2B_0}{\sqrt{3}}$.



Hình 3



Hình 4

Nhận xét: Các em có lời giải đúng:

Lê Xuân Quyền, 11A PTTH Lương Đắc Bằng Thanh Hóa, Hàn Văn Thắng, 11A6, THPT Đào Duy Từ, Thanh Hóa, Phan Duy Hùng, 12CT Quảng Bình. Một số em không chỉ ra hướng của B .

MAI ANH

Nhân kỉ niệm 170 năm ngày ra đời của hình học LÔBASEPSKI (1826 - 1996)

MỘT QUẢ TRỨNG VÀNG VĨ ĐẠI

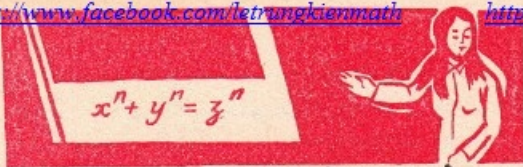
NGUYỄN CẢNH TOÀN

Nhân dịp định lí lớn Fermat được chứng minh, có tác giả đã viết rằng quá trình 300 năm tìm tòi chứng minh định lí đó là một con gà đẻ trứng vàng. Trong lịch sử toán học, còn có những gà đẻ trứng vàng khác mà sau đây tôi xin kể thêm một chuyện. Nếu như câu chuyện chứng minh định lí lớn Fermat kéo dài 300 năm thì câu chuyện chứng minh tiên đề Ôclit còn kéo dài đến hơn 2000 năm. Từ thời Ôclit (3 thế kỉ trước công nguyên) đến 1826, không biết bao nhiêu giấy mực và tâm trí đã đổ vào việc chứng minh cái tiên đề bướng bỉnh này. Nếu ai hỏi: "Đeo đuổi chứng minh như vậy để làm gì?" thì chỉ có thể trả lời rằng: "Đó là biểu hiện tính bất khuất của trí tuệ loài người; từ thế hệ này qua thế hệ khác, người ta không chịu đầu hàng trước tiên đề đó. Có người, như nhà toán học Pháp nổi tiếng Legendre (1752 - 1833) đã tưởng chứng minh được rồi nhưng rồi cuộc cố người phát hiện ra rằng ông đã vô tình chấp nhận một mệnh đề tương đương với tiên đề Ôclit để chứng minh tiên đề đó. Mệnh đề đó như sau: Cho một góc nhọn xOy và một điểm A bất kì trong góc, qua A bao giờ cũng dựng được một đường thẳng không qua O và cắt cả hai cạnh góc. Chính Legendre chấp nhận điều này coi như là một điều quá hiển nhiên và cũng thật đáng phục người nào hồi đó đã phát hiện ra rằng đó chính là tiên đề Ôclit trá hình.

Tích lũy biết bao nhiêu thất bại như vậy cuối cùng đã đưa đến một sự nghi ngờ: "Hay là tiên đề Ôclit không phải là hệ quả logic của các tiên đề khác?". Phải nói rằng hồi đó tư tưởng coi rằng hình học Ôclit là chân lí duy nhất, tuyệt đối đúng đương ngự trị trong đầu óc mọi người; nhưng cũng đã có người dám nghĩ khác. Cho dễ hiểu, ta hãy hình dung mặt cầu; nếu có một loài sinh vật nào thông minh sống trên mặt cầu và không hay biết gì thế giới ngoài mặt cầu thì sinh vật đó sẽ xây dựng nên một thứ hình học trong đó mọi đường thẳng (vòng tròn lớn của

mặt cầu) đều khép kín và trong thế giới này không có đường thẳng song song. Như vậy đã mạnh mẽ ý kiến rằng có thể có nhiều hình học khác nhau. Kế thừa ý kiến này và chấp nhận rằng tiên đề Ôclit không phải là con đẻ logic của các tiên đề khác, Lôbasepski (1792 - 1856), một nhà toán học Nga, giáo sư trường Đại học Kadan, mới đưa đến cho gia đình các tiên đề này một đứa con nuôi khác hẳn tiên đề Ôclit mà sau này thường gọi là tiên đề Lôbasepski. Tiên đề này không chấp nhận tính duy nhất của đường thẳng song song kẻ từ một điểm A trong mặt phẳng (A, a) với đường thẳng a . Từ đó ông không trắc trở gì để suy diễn ra các định lí nhưng đều được những định lí kì quặc như có những tam giác mà cả ba góc đều bằng không và đó là những tam giác có diện tích cực đại. Người đời không ai hiểu ông và ông sống trong sự đau khổ vì toàn bị chỉ trích cho đến khi chết (1856). Thật ra thì cũng có 2 người hiểu ông: Bolyai, nhà toán học Hung cũng nghĩ như ông nhưng công bố công trình chậm hơn ông 6 năm (1832) và cũng sống đau khổ như ông cho đến chết, và Gauss, nhà toán học Đức (nhưng ông này không công bố, sợ không ai hiểu sẽ bị chỉ trích). 12 năm sau khi Lôbasepski mất (1868), một nhà toán học Ý là Beltrami (1835 - 1900) mới bắt đầu hiểu Lôbasepski. Beltrami chứng minh được rằng hình học trên mặt cầu giả là hình học Lôbasepski. Mặt cầu giả là mặt tròn xoay sinh ra bởi đường "con chó" (tên khoa học là đường trắc tích) khi quay xung quanh đường thẳng mà người dắt chó đi với dây dài 1, còn chó lúc đầu đứng bên lề đường; nói chính xác toán học thì đường trắc tích là đường có độ dài tiếp tuyến (tính từ tiếp điểm đến giao điểm với Ox) không đổi 1 ($x, h1$). Điều quan trọng là nhân đó loài người tính ngộ ra rằng lâu nay không hiểu nổi Lôbasepski vì trí tuệ bị các hình ảnh vẽ điểm (hạt bụi) và đường thẳng (sợi giây mảnh căng thẳng) cầm thu. Đường thẳng, trên mặt cầu

(xem tiếp trang 15)



ĐỀ RA KÌ NÀY

CÁC LỚP THCS.

Bài T1/230 : Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình :

$$5^x + 2 \cdot 5^y + 5^z = 4500 \text{ với } x < y < z$$

ĐỖ THANH HÂN

(Minh Hải).

Bài T2/230 : Cho biết mỗi phương trình sau :

$x^2 - mx + p = 0$ và $x^2 - nx + q = 0$ đều có hai nghiệm dương. Chứng minh rằng các bất đẳng thức $m < n$, $m \cdot n < p + q$, $m \cdot q < n \cdot p$ không đồng thời xảy ra.

HOÀNG NGỌC CẢNH

(Hà Tĩnh)

Bài T3/230 : Giải phương trình :

$$x^4 - 4\sqrt{3}x - 5 = 0$$

QUÁCH BỬU THƯ

(TP Hồ Chí Minh)

Bài T4/230 : Cho một hình chữ nhật có chu vi không nhỏ hơn $2\sqrt{2}$ và một tứ giác có các đỉnh nằm trên các cạnh khác nhau của hình chữ nhật đó. Chứng minh rằng chu vi của tứ giác không nhỏ hơn 2.

TRẦN DUY HINH

(Bình Định).

Bài T5/230 : Cho trước đường tròn (O, R) và điểm A cố định trên đó. Một điểm M chuyển động trên (O) , tiếp tuyến với đường tròn tại M cắt tiếp tuyến tại A ở P. Một đường tròn (O_1, R_1) biến thiên đi qua M và tiếp xúc với AP tại P. Chứng minh rằng (O_1) luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định.

NGUYỄN KHÁNH NGUYỄN

(Hải Phòng).

CÁC LỚP THPT

Bài T6/230 : Xét số $\alpha = 1 - \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$.

a) Tìm đa thức bậc ba có hệ số nguyên nhận số α là nghiệm.

b) Chứng minh rằng không tồn tại các đa thức bậc nhất hoặc bậc hai có hệ số nguyên nhận α là nghiệm.

DẶNG HÙNG THẮNG.

(Hà Nội).

Bài T7/230 : Cho a, b, c là ba số dương, $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Chứng minh rằng :

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b+c}} + \sqrt[n]{\frac{b}{c+a}} + \sqrt[n]{\frac{c}{a+b}} > \frac{n}{n-1} \sqrt[n]{n-1}$$

TRẦN XUÂN DĂNG

(Nam Hà).

Bài T8/230 : Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện :

$$|f(x) - f(q)| \leq 5(x - q)^2 \forall x \in \mathbb{R}, \forall q \in \mathbb{Q}.$$

NGUYỄN XUÂN HUỖNH.

(Khánh Hòa).

Bài T9/230 : Gọi R, r lần lượt là bán kính các đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của tam giác ABC. Chứng minh rằng nếu có hệ thức $6r = R(\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C + 2\sin A \sin B + 2\sin B \sin C + 2\sin C \sin A)$ thì tam giác ABC là đều.

TRỊNH BẢNG GIANG.

(TP Hồ Chí Minh).

Bài T10/230 : Giả sử M là một điểm nằm trên đường thẳng chứa đường chéo AB' của mặt bên ABB'A' của một hình hộp ABCD.A'B'C'D', $M \neq A, M \neq B'$ và $MA = kMB'$ ($k \neq 0$).

Gọi N và P là các điểm lần lượt nằm trên các đường thẳng BC' và CD' sao cho $NB = xNC'$, $PC = yPD'$.

a) Hãy xác định x và y theo k để ba điểm M, N và P thẳng hàng.

b) Từ đó suy ra có vô số đường thẳng cắt cả bốn đường thẳng AB', BC', CD' và DA', đồng thời 4 điểm này lập thành một hàng điểm điều hòa.

NGUYỄN DĂNG PHÁT.

(Hà Nội).

CÁC ĐỀ VẬT LÝ

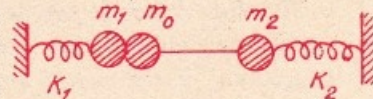
Bài L1/230 : Ba quả cầu khối lượng m_0, m_1 và m_2 bằng nhau có thể trượt không ma sát trên sợi dây xuyên tâm và căng ngang, m_1 và m_2 được nối với lò xo tương ứng k_1, k_2 như hình vẽ. Ở vị trí cân bằng m_1 cách m_2 một khoảng l , khối lượng của các lò xo nhỏ không đáng kể, quả cầu m_0 có thể ghép hoặc tách với m_1 . Ban đầu, ghép m_0 với m_1 rồi nén lại một đoạn a thả tay ra, khi m_0 và m_1 tới vị trí cân bằng thì m_0 tách ra chuyển động theo dây tới va chạm vào m_2 .

Coi va chạm, ghép, tách của m_0 đối với m_1 và m_2 là hoàn toàn đàn hồi.

1) Tìm mối quan hệ giữa K_1, K_2, l và a để sau khi va chạm với m_2, m_0 quay trở về va chạm đúng tại điểm cân bằng khi m_1 dao động được 1 chu kỳ.

2) Suy luận tiếp cho quá trình tiếp theo.

Bỏ qua kích thước của các quả cầu.



LẠI THỂ HIỆN

(Thái Bình).

Bài L2/230 : Cho mạch điện như hình vẽ, trong đó nguồn có suất điện động E , điện trở trong $r = 2\Omega$ các điện trở $R_1 = 80\Omega, R_2 = 40\Omega;$

$R_3 = 26,67\Omega$ (lấy $26,67 = \frac{80}{3}$), $R_4 = 8\Omega$.

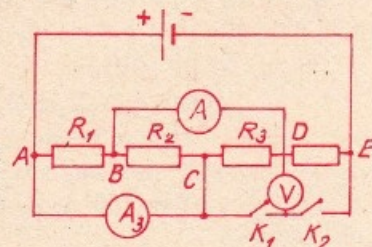
Bỏ qua điện trở các ampe kế, các dây nối và các khóa K_1, K_2 . Khi K_1 đóng, K_2 ngắt, vôn kế chỉ 30V. Khi K_1 ngắt, K_2 đóng, vôn kế chỉ 18,2V

(lấy $18,2 = \frac{200}{11}$).

Tìm số chỉ của các ampe kế trong hai trường hợp trên.

NGUYỄN DỨC PHI.

(Quảng Ngãi).



PROBLEMS IN THIS ISSUE

For Lower Secondary Schools

T1/230. Find integer-solutions of the equation

$$5^x + 2 \cdot 5^y + 5^z = 4500$$

satisfying $x < y < z$.

T2/230. Each of the following equations

$$x^2 - mx + p = 0 \text{ and } x^2 - nx + q = 0$$

has two positive roots.

Prove that the inequalities $m < n$, $m \cdot n < p + q$, $mq < np$ do not hold simultaneously.

T3/230. Solve the equation.

$$x^4 - 4\sqrt{3}x - 5 = 0.$$

T4/230. Let be given a rectangle, the perimeter of which is not less than $2\sqrt{2}$ and a quadrilateral, the vertices of which lie on distinct sides of the rectangle. Prove that the perimeter of the quadrilateral is not less than 2.

T5/230. Let be given a circle (O, R) , a fixed point A on it, and let the point M move on the circle. The tangents to the circle at A and at M intersect at P . A variable circle (O_1, R_1) , passing through M , touches the line AP at P . Prove that the circle (O_1) touches a fixed circle.

For Upper Secondary Schools

T6/230. Let $\alpha = 1 - \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$.

a) Find a polynomial of degree 3, with integer-coefficients, such that α is one of its roots.

b) Prove that there is no polynomial of degree 1 or 2, with integer-coefficients, such that α is one of its roots.

T7/230. Let be given three positive numbers a, b, c and an integer $n \geq 2$. Prove that :

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b+c}} + \sqrt[n]{\frac{b}{c+a}} + \sqrt[n]{\frac{c}{a+b}} > \frac{n}{n-1} \sqrt[n]{n-1}.$$

T8/230. Find all functions $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfying :

$$|f(x) - f(q)| \leq 5(x - q)^2, \forall x \in \mathbb{R}, \forall q \in \mathbb{Q}.$$

T9/230. Let R and r be respectively the radii of the circum-circle and the incircle of triangle ABC . Prove that if

$$6r = R(\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C + 2\sin A \sin B + 2\sin B \sin C + 2\sin C \sin A)$$

then the triangle ABC is equilateral.

T10/230. Let M be a point on the line containing the diagonal AB' of the face $ABB'A'$ of a parallelepiped $ABCD.A'B'C'D'$, $M \neq A$, $M \neq B'$ and $MA = kMB'$ ($k \neq 0$).

Let N and P be two points respectively on the lines BC' and CD' , $NB = xNC'$, $PC = yPD'$.

a) Determine x and y in terms of k so that these three points M, N and P are collinear.

b) Deduce from it that there exists and infinite number of lines, cutting the lines AB' , BC' , CD' and DA' at four points, forming and harmonic quadruplet.

VỀ BÀI TOÁN...

(Tiếp theo trang 1)

d. Một điều thú vị là nhờ so sánh phân số mà ta có một cách chứng minh tính chất sau :

Cho $a, b, c, d \in \mathbb{N}$, nếu $a < b \leq c < d$ và $a + d = b + c$ thì $ad < bc$

Thật vậy từ giả thiết suy ra

$$\begin{cases} b - a = d - c \\ 0 < b < d \end{cases} \Rightarrow \frac{b - a}{b} > \frac{d - c}{d} \Rightarrow$$

$$1 - \frac{a}{b} > 1 - \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow ad < bc$$

Nghĩa là : Cho hai số tự nhiên biến thiên có tổng không đổi, thế thì tích của chúng càng lớn nếu hiệu của chúng càng nhỏ.

Ví dụ : $95.98 > 94.99$

$$1995^2 > 1992.1998$$

$$a^2 > (a - 1)(a + 1)$$

Thật ra tính chất này cũng đúng với $a, b, c, d \in \mathbb{Q}_+$. Khi đó ta xét các tỉ số tương ứng thay cho phân số.

Rõ ràng một bài toán đơn giản nhưng cũng chứa đựng nhiều vấn đề lí thú.

Cuối cùng xin nêu vài bài tập vận dụng

1. So sánh các phân số theo cách hợp lí nhất :

$$\frac{47}{96} \text{ và } \frac{49}{100}; \frac{38}{43} \text{ và } \frac{383}{428}; \frac{625}{655} \text{ và } \frac{3871}{3874};$$

$$\frac{73}{65} \text{ và } \frac{7345}{6551}$$

2. Chứng minh rằng

$$a) \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{100^2} < \frac{99}{100}$$

$$b) \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{n^3} < \frac{1}{4}.$$

Hướng dẫn : ta có $n^3 > (n - 1)n(n + 1) \Rightarrow$

$$\frac{2}{n^3} < \frac{2}{(n - 1)n(n + 1)} = \frac{1}{(n - 1)n} - \frac{1}{n(n + 1)},$$

$$n = 2; 3; \dots$$

SUY NGHĨ VỀ MỘT BÀI TOÁN

NGÔ MINH NGHĨA

Lớp 12T2, chuyên cấp 2 - 3 Lê Khiết Quảng Ngãi.

Như mọi lần, vừa mua được tạp chí "Toán học và tuổi trẻ" là tôi bắt tay vào giải ngay những bài mà báo ra. Lần này, tôi đã gặp bài toán sau :

Bài T5/195 : Giải phương trình :
 $x^2 + x - 1 = x \cdot e^{x^2-1} + (x^2 - 1)e^x$ (*)

Tôi đã có lời giải như sau :

Phương trình (*) $\Leftrightarrow$

$$x[e^{x^2-1} - 1] + (x^2 - 1)[e^x - 1] = 0 \quad (**)$$

Ta xét các trường hợp :

$$1) x \cdot (x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

Thay vào phương trình (**) ta có

là nghiệm của phương trình.

$$2) x \cdot (x^2 - 1) < 0 :$$

$$a) \begin{cases} x < 0 \\ x^2 - 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^x - 1 < 0 \\ e^{x^2-1} - 1 > 0 \end{cases} \quad (\text{Do } e > 1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x^2 - 1)[e^x - 1] < 0 \\ x[e^{x^2-1} - 1] < 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow (x^2 - 1)[e^x - 1] + x[e^{x^2-1} - 1] < 0 \Rightarrow$
 phương trình (**) vô nghiệm.

$$b) \begin{cases} x > 0 \\ x^2 - 1 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^x - 1 > 0 \\ e^{x^2-1} - 1 < 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} (x^2 - 1)[e^x - 1] < 0 \\ x[e^{x^2-1} - 1] < 0 \end{cases} \Rightarrow \text{phương trình (**) vô nghiệm}$$

Do đó, trong trường hợp này, phương trình đã cho vô nghiệm

$$3) x \cdot (x^2 - 1) > 0$$

$$a) * \begin{cases} x > 0 \\ x^2 - 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^x - 1 > 0 \\ e^{x^2-1} - 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} (x^2 - 1)[e^x - 1] > 0 \\ x[e^{x^2-1} - 1] > 0 \end{cases} \Rightarrow \text{phương trình (**) vô nghiệm}$$

$$b) * \begin{cases} x < 0 \\ x^2 - 1 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^x - 1 < 0 \\ e^{x^2-1} - 1 < 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} (x^2 - 1)[e^x - 1] > 0 \\ x[e^{x^2-1} - 1] > 0 \end{cases} \Rightarrow \text{phương trình (**) vô nghiệm.}$$

Do đó, trong trường hợp này, phương trình đã cho vô nghiệm. Vậy, pt đã có 3 nghiệm là $x = 0, x = -1, x = 1$.

Xem lại đề bài và lời giải trên tôi có nhận xét sau :

- Phương trình đã cho có dạng :

$$f(x) + g(x) = f(x) \cdot e^{g(x)} + g(x) \cdot e^{f(x)}$$

- Các biểu thức $(x^2 - 1)$ và x có thể thay bởi các biểu thức $f(x)$ và $g(x)$ bất kì vào đó.

- Số e có thể thay bởi số dương a khác 1 bất kì. Như vậy, ta có thể mở rộng bài toán đã cho thành bài toán :

Bài toán 1 : Giải phương trình :

$$f(x) + g(x) = f(x) \cdot a^{g(x)} + g(x) \cdot a^{f(x)} \text{ với } a \text{ là một số dương khác 1.}$$

Lời giải bài toán này tương tự như trên.

$$\text{Nghiệm của pt là nghiệm của : } \begin{cases} g(x) = 0 \\ f(x) = 0 \end{cases}$$

Nhìn bài toán mở rộng ở trên (bài toán 1) tôi "cảm thấy" chưa thỏa mãn, bài toán chưa tổng quát lắm khiến tôi lại một lần nữa phải suy nghĩ và cuối cùng thì tôi phát hiện ra là : "Mình chưa

mở rộng $[f(x) + g(x)]$ thành $\sum_{i=1}^n f_i(x)$

Nhưng mà khi mở rộng $f(x) + g(x)$ thành $\sum_{i=1}^n f_i(x)$ thì cách giải trên có còn giá trị không ?

Thế là tôi giải với trường hợp $n = 3$.

Bài toán 2. Giải phương trình :

$$f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) = f_1(x) \cdot a^{f_2(x)} + f_2(x) \cdot a^{f_1(x)} + f_3(x) \cdot a^{f_1(x)} \text{ với } a \text{ là số dương khác 1.}$$

Giải :

Ta viết lại phương trình dưới dạng :

$$f_1(x)[a^{f_2(x)} - 1] + f_2(x)[a^{f_1(x)} - 1] + f_3(x)[a^{f_1(x)} - 1]$$

Ta chia 3 trường hợp :

* $f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot f_3(x) = 0$: giải như bên.

* $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ cùng dấu : giải như trên

* $f(x)$ khác dấu với $f_2(x)$ và $f_3(x)$: (Vì vai trò f_1, f_2, f_3 bình đẳng) : thì ta rơi vào ngõ cụt.

Như vậy, bài toán này khác với bài toán 1 là không có sự đối xứng giữa : $f(x)[a^{g(x)} - 1]$ và $g(x)[a^{f(x)} - 1]$.

Cho nên để giải được bài toán với $n = 3$, tôi đưa ra bài toán sau :

(Xem tiếp trang 15)

CÁCH NHÌN MỘT DẠNG TOÁN QUỈ TÍCH TRONG KHÔNG GIAN

HỒ QUANG VINH
(Nghệ An)

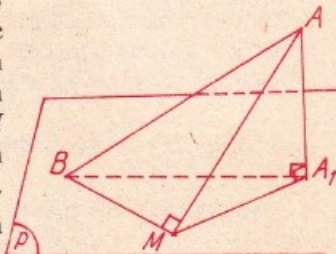
Trong bài viết này, chúng tôi xin trình bày với các bạn một cách nhìn một dạng toán quỉ tích trong không gian, với hi vọng rằng nó sẽ giúp ích cho các bạn trong kỳ thi tuyển sinh vào các trường Đại học, Cao đẳng và Trung học chuyên nghiệp.

Đầu tiên ta hãy xét hai quỉ tích cơ bản sau đây, mà hẳn là các bạn không thể nào quên :

1. *Quỉ tích cơ bản 1* : Quỉ tích những điểm M (trong mặt phẳng) nhìn đoạn AB cố định dưới một góc vuông là đường tròn đường kính AB .

2. *Quỉ tích cơ bản 2* : Trong không gian, quỉ tích những điểm M nhìn đoạn AB cố định dưới một góc vuông là mặt cầu đường kính AB .

3. *Nhận xét* : Nếu điểm M vừa nhìn AB cố định dưới một góc vuông, vừa nằm trên mặt phẳng cố định $[P]$ đi qua B thì M thuộc đường tròn đường kính A_1B . (Trong đó A_1 là hình chiếu vuông góc của điểm A lên mặt phẳng $[P]$).



Thực vậy : Do A cố định ; $[P]$ là mặt phẳng cố định $\rightarrow$ điểm A_1 cố định.

Mặt khác, do : $AA_1 \perp [P]$

nên : $\left. \begin{array}{l} AA_1 \perp MB \\ AM \perp MB \end{array} \right\} \Rightarrow MB \perp [AA_1M]$, do đó :

$MB \perp MA_1$. Điểm M nhìn đoạn A_1B cố định dưới 1 góc vuông, đồng thời thuộc mặt phẳng cố định $[P]$ nên nó thuộc đường tròn đường kính A_1B , đường tròn này nằm trong mặt phẳng $[P]$ cố định.

Bây giờ chúng ta sẽ vận dụng ý tưởng của nhận xét III vào việc nhìn và dự đoán 1 dạng toán quỉ tích trong không gian.

Ví dụ 1 : Cho tứ diện $ABCD$ và M là một điểm di động trong đoạn CD . Dựng AK vuông góc với BM . Tìm quỉ tích các điểm K ?

Ở bài toán này, nhìn vào hình vẽ chúng ta nhận thấy rằng điểm K luôn nhìn đoạn AB cố định dưới một góc vuông đồng thời nằm trên

mặt phẳng $[BCD]$ cố định, nên ta dự đoán ngay, rằng (theo ý tưởng của nhận xét 3) K sẽ chạy trên đường tròn (hoặc một phần của đường tròn) đường kính A_1B (trong đó $AA_1 \perp [BCD]$). Ta có ngay lời giải bài toán.

Lời giải : Phần thuận : Dựng $AA_1 \perp [BCD]$,

khi đó do

$BK \perp AK$

$BK \perp AA_1$ (vì $AA_1 \perp [BCD]$) $\Rightarrow BK \perp [AA_1K]$

$\Rightarrow BK \perp A_1K$. Điểm K luôn nhìn A_1B cố định dưới 1 góc vuông nên K chạy trên đường tròn đường kính A_1K (đường tròn này nằm trong mặt phẳng $[BCD]$ cố định)

Giới hạn : Khi $M \equiv C$ thì $K \equiv K_1$ với $AK_1 \perp BC$

Khi $M \equiv D$ thì $K \equiv K_2$ với $AK_2 \perp BD$

Vậy khi M chuyển động trong đoạn CD thì K chuyển động trên K_1K_2

Phần đảo : Lấy điểm K bất kỳ trên K_1K_2 ,

nối BK cắt CD tại M . Ta chứng minh :

$AK \perp BM$. Thực vậy, do $K \in K_1K_2 \Rightarrow$

$BK \perp KA_1$, Do $AA_1 \perp [BCD] \Rightarrow AA_1 \perp BK$

Vậy $BK \perp [AA_1K] \Rightarrow BK \perp AK$ hay

$BM \perp AK$ (đpcm)

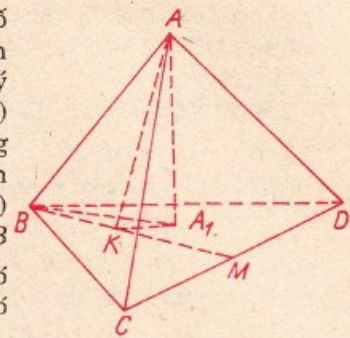
Kết luận : Quỉ tích của K là cung $\widehat{K_1K_2}$ (Một phần của đường tròn đường kính A_1B)

Ví dụ 2 : Cho hình lập phương $ABCD . A_1B_1C_1D_1$ tâm O cạnh a . M là một điểm chuyển động trong đoạn AB . Tìm quỉ tích điểm H , chân đường vuông góc hạ từ điểm C xuống đường thẳng MO ?

(Trích đề số 103 câu V - Bộ đề thi tuyển sinh) 1990.

Dựa vào nhận xét 3 ta thấy điểm cần tìm quỉ tích H luôn nhìn đoạn OC cố định dưới một góc vuông, đồng thời nó nằm trên mặt phẳng $[ABC_1D_1]$ cố định nên ta dự đoán : H sẽ chạy

(Xem tiếp trang 14)



CÁC SỐ RAMSEY

HOÀNG CHUNG
(TP Hồ Chí Minh)

Ta xét các bài toán biểu khá đơn giản sau đây.

Bài toán 1 – Hai vợ chồng mời bạn dự một bữa tiệc; trong số khách mời,

(a) ông chồng muốn có ít nhất 3 người từng đôi quen nhau;

(b) bà vợ muốn có ít nhất 3 người từng đôi không quen nhau. Họ phải mời ít nhất bao nhiêu bạn để mong muốn của chồng (a) hoặc mong muốn của vợ (b) được thỏa?

Giải

Giả sử các bạn (A, B, C, D, E, ...) được mời ngồi quanh một bàn tròn (hình 1); nếu hai người (A và C chẳng hạn) quen nhau thì ta nối A với C bằng một đường nét liền; nếu hai người (A và D) không quen nhau thì ta nối A với D bằng một đường nét đứt. Trên hình 1, A quen với B, C, E và không quen với D, F.

Ta sẽ chứng minh rằng số bạn được mời ít nhất phải là 6, nghĩa là:

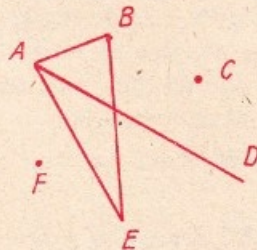
(i) Nếu chỉ mời 5 bạn thì có thể xảy ra trường hợp cả (a) lẫn (b) không được thỏa;

(ii) Nếu mời 6 bạn thì luôn thỏa được (a) hoặc (b).

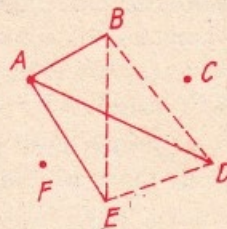
Thật vậy:

(i) Giả sử chỉ có 5 bạn A, B, C, D, E được mời. Lúc đó có thể xảy ra trường hợp như hình 2 (ai cũng có 2 người quen và 2 người không quen), trong đó không có 3 người nào từng đôi quen nhau, mà cũng không có 3 người nào từng đôi không quen nhau.

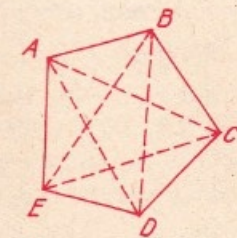
(ii) Xét khi 6 bạn (A, B, C, D, E, F) được mời. Giả sử A quen với ít nhất là 3 người (B, D, E); lúc đó, nếu có hai trong 3 người này quen nhau (B, E quen nhau chẳng hạn) thì (a) được



Hình 3



Hình 2



Hình 1

thỏa (xem hình 3a); còn nếu 3 người này từng đôi không quen nhau thì (b) được thỏa (xem hình 3b). (Trường hợp A chỉ quen với nhiều nhất là 2 người thì A không quen với ít nhất là 3 người và những đường nét liền trên các hình 3a, b được thay bằng đường nét đứt, những đường nét đứt được thay bằng đường nét liền và (b) hoặc (a) được thỏa).

Bài toán 1 đã được giải. Số phải tìm là $r = 6$.

Bài toán 2 – Như bài toán 1, chỉ thay (b) bởi (b'):

(b') bà vợ muốn có ít nhất 4 người từng đôi không quen nhau. Họ phải mời ít nhất mấy bạn để (a) hoặc (b') được thỏa?

Ta sẽ chứng minh rằng số phải tìm là 9, nghĩa là:

(i) nếu chỉ 8 người thì có thể chỉ ra trường hợp mà cả (a) lẫn (b') không được thỏa;

(ii) nếu có 9 người thì luôn thỏa được (a) hoặc (b').

Thực vậy:

(i) Nếu chỉ có 8 người thì có thể xảy ra trường hợp như hình 4, trong đó không có 3 người nào từng đôi quen nhau, mà cũng không có 4 người nào từng đôi không quen nhau.

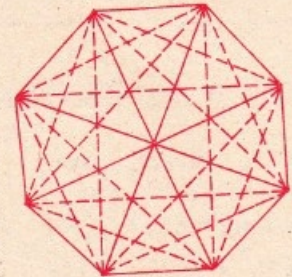
(ii) Trong trường hợp có 9 người, ta xét hai khả năng có thể xảy ra:

– Có một người (A) quen với ít nhất 4 người khác (B, C, D, E, hình 5). Lúc đó nếu trong 4 người này có hai người quen nhau thì (a) được thỏa, còn nếu không ai quen ai thì (b') được thỏa, đpcm.

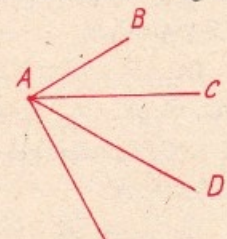
– Mỗi người (trong 9 người) chỉ quen với nhiều nhất là 3 người khác. Thế thì phải có một người (A) chỉ quen với 2 người hoặc không quen với ai hết (vì nếu mỗi người quen với đúng 3 người thì số đường nét liền ta phải vẽ là $\frac{3 \cdot 9}{2}$, vô lí).

Giả sử A chỉ quen với nhiều nhất là 2 người (B và C) và không quen với ít nhất là 6 người khác (D, E, F, G, H, I, xem hình 6).

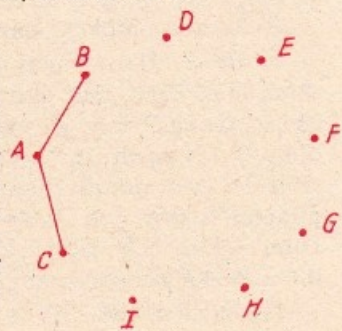
Theo bài toán 1, trong 6 người này có 3 người từng đôi quen nhau, tức (a) được thỏa; hoặc có 3 người từng đôi không quen nhau, 3 người này cùng với A tạo thành 4 người từng đôi không quen nhau, tức (b') được thỏa, đpcm.



Hình 4



Hình 5



Hình 6

Bài toán 2 đã được giải, số nhỏ nhất phải tìm là $r = 9$.

Trên đây là trường hợp đơn giản của lớp các bài toán do Frank Ramsey nghiên cứu năm 1930, và nay được phát triển thành một đề tài lớn trong lý thuyết Graph.

Ta xét bài toán tổng quát của hai bài toán trên.

Bài toán - Tìm số người ít nhất để trong họ luôn có m người từng đôi quen nhau, hoặc n người từng đôi không quen nhau.

Số phải tìm được gọi là số Ramsey $r(m, n)$.

Ở bài toán 1 thì $m = n = 3$, còn ở bài toán 2 thì $m = 3, n = 4$. Ta đã chứng minh được rằng $r(3, 3) = 6$ và $r(3, 4) = 9$. Tuy nhiên với những giá trị lớn hơn của m và n thì việc xác định $r(m, n)$ phức tạp hơn rất nhiều. Cho đến nay, người ta chỉ mới tìm được rất ít số Ramsey :

$r(3, 3) = 6, r(3, 4) = 9, r(3, 5) = 14, r(3, 6) = 18, r(3, 7) = 23, r(3, 8) = 28, r(3, 9) = 36, r(4, 4) = 18$

Số $r(3, 8) = 28$ được McKay và Min tìm thấy năm 1992. Người ta chỉ xác định được cận trên của mọi số Ramsey với định lý Erdős - Szekeres sau đây :

Với mọi số nguyên $m \geq 2$ và $n \geq 2$, ta có :

$$r(m, n) \leq r(m-1, n) + r(m, n-1).$$

Chẳng hạn :

$$r(4, 5) \leq r(3, 5) + r(4, 4) = 32$$

$$r(4, 6) \leq r(3, 6) + r(4, 5) \leq 18 + 32 = 50.$$

CÁCH NHÌN MỘT DẠNG...

(Tiếp theo trang 12)

trên đường tròn (hoặc một phần) đường kính OC_1 (với $CC_1 \perp ABC_1D_1$) ta có lời giải bài toán.

Lời giải : Gọi C_1 là giao điểm của CB_1 và C_1B .

Do $AB \perp [BCC_1B_1] \Rightarrow AB \perp CC_1$ mà $CC_1 \perp BC_1$ từ đó : $CC_1 \perp [ABC_1B_1] \Rightarrow CC_1 \perp OH$, Mặt khác $OH \perp CH$ (giả thiết) nên $OH \perp [CC_1H] \Rightarrow OH \perp C_1H$

Điểm H luôn nhìn OC_1 cố định dưới một góc vuông, đồng thời nằm trên $[ABC_1D_1]$ cố định nên H chạy trên đường tròn đường kính OC_1 .

Giới hạn : Khi $M \equiv A$ thì $H \equiv H_1$ (Với $CH_1 \perp AC_1$)

Khi $M \equiv B$ thì $H \equiv H_2$ (Với $CH_2 \perp BD_1$)

Vậy H chỉ chạy trên $\widehat{H_1H_2}$ (một phần của đường tròn đường kính OC_1).

Phản đảo : Mời các bạn tự làm.

Ví dụ 3 : Trong mặt phẳng $[P]$, cho một điểm O cố định, một đường thẳng (d) cố định không đi qua O , một góc vuông xOy quay quanh điểm O , các cạnh Ox, Oy cắt (d) theo thứ tự tại A và B . Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng $[P]$ và đi qua O , lấy một điểm S cố định. Dựng $OE \perp SA; OF \perp SB$. Tìm quỹ tích các điểm E và F khi góc vuông xOy quay quanh O ?

(Trích đề số 136 - Bộ đề thi tuyển sinh 1990)

Lời giải : Tìm quỹ tích E (Việc tìm quỹ tích F các bạn làm hoàn toàn tương tự). Dựng

$OH \perp [SAB]$, để chứng minh H là điểm cố định. Do $OH \perp [SAB] \Rightarrow OH \perp SE$. Theo giả thiết $OE \perp SE$. Vậy $SE \perp [OEH] \Rightarrow SE \perp EH$. E nhìn đoạn SH cố định dưới 1 góc vuông, đồng thời nằm trên mặt phẳng

$[S; (d)]$ cố định nên nó chạy trên đường tròn đường kính SH (trừ hai điểm S và H), đường tròn này nằm trên $[S; (d)]$ cố định.

Phản đảo : Các bạn tự làm.

Kết luận : Quỹ tích E là đường tròn đường kính SH , trừ S và H . Để kết thúc bài báo, xin mời các bạn thử dùng cách nhìn trên (dựa vào ý tưởng của nhận xét 3) để giải các bài tập sau :

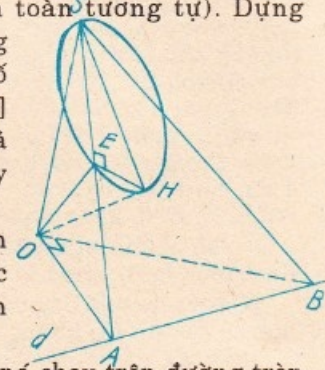
Bài tập 1 : Cho tam giác đều ABC và S là điểm chuyển động trên đường thẳng Ax vuông góc với mặt phẳng $[ABC]$. Dựng $CD \perp SB, BE \perp SC$ a) Tìm quỹ tích các điểm D và E ?

b) Tìm quỹ tích H , trực tâm tam giác SBC

Bài tập 2 : Cho tam giác đều ABC cạnh a cố định và các nửa đường thẳng Bx và Cy vuông góc với mặt $[ABC]$ và ở về cùng một phía đối với mặt phẳng ấy. Hai điểm M, N chuyển động trên Bx và Cy sao cho $BM + CN = 2k$ (k - cho trước)

a. Chứng minh mặt $[AMN]$ luôn đi qua 1 đường thẳng cố định

b. Gọi O là trung điểm BC . Dựng $OH \perp MN$. Tìm quỹ tích điểm H .



SUY NGHĨ VỀ ...

(...tiếp theo trang 11)

Bài toán 3 : Giải phương trình :

$$2[f_1(x) + f_2(x) + f_3(x)] = f_1(x).a^{f_2(x)} + f_1(x).a^{f_3(x)} + f_2(x).a^{f_1(x)} + f_2(x).a^{f_3(x)} + f_3(x).a^{f_1(x)} + f_3(x).a^{f_2(x)}$$

Với a là 1 số dương khác 1.

Các lời giải hoàn toàn tương tự như trên.

Như vậy, để giải được bài toán khi mở rộng $f(x) + g(x)$ thành $\sum_{i=1}^n f_i(x)$ thì khi biến đổi về

một vế ta phải có sự đối xứng giữa $f_i(x)[a^{f_i(x)} - 1]$ và $f_j(x)[a^{f_i(x)} - 1]$ (Với $i \neq j$). Cuối cùng, tôi đã tìm được bài toán tổng quát như mong muốn là :

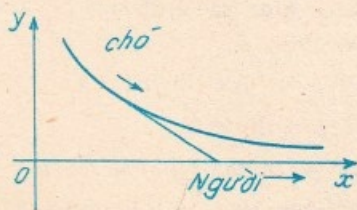
Bài toán 4 : Giải phương trình :

$$(n-1) \sum_{i=1}^n f_i(x) = f_1(x) \sum_{i=1}^n [a^{f_i(x)} - a^{f_1(x)}] + f_2(x) \sum_{i=1}^n [a^{f_i(x)} - a^{f_2(x)}] + \dots + f_n(x) \sum_{i=1}^n [a^{f_i(x)} - a^{f_n(x)}]$$

Với a là một số dương khác 1.

MỘT QUẢ TRỨNG VÀNG...

(Tiếp theo trang 8)



giả, cũng giống như đường thẳng trên mặt cầu thật không có hình ảnh là những sợi giấy mảnh căng thẳng trong không gian mà căng thẳng trên một mặt (cầu giả hay cầu thật). Từ đó, người ta mới nhận ra rằng trong khi suy diễn toán học, những tính chất như "mảnh", "thẳng" chỉ dùng đến ở đâu cả mà chỉ những tính chất về quan hệ giữa điểm và đường thẳng như : "hai điểm xác định một đường thẳng duy nhất" mới dùng đến ; đã thế thì thiếu gì những loại đối tượng có mối quan hệ "hai đối tượng loại này xác định duy nhất một đối tượng loại kia" như : "hai mặt cầu bán kính R xác định duy nhất một mặt trụ tròn xoay bán kính R ngoại tiếp hai mặt cầu đó" hoặc như "Hai nghiệm của một phương trình bậc hai xác định duy nhất phương trình đó, li lai một hệ số tỉ lệ khác không". Càng đi sâu vào hướng suy nghĩ mới này người ta càng tìm ra những thể hiện cụ thể khác nhau của hình học Lobasepski như thể hiện của Felix Klein trong đó mỗi đường thẳng thể hiện thành đoạn thẳng, thể hiện của Henri Poincaré trong đó mỗi đường thẳng thể hiện thành một cung tròn. Tư tưởng này cũng tràn sang đại số và

người ta cũng sớm nhận ra rằng chính tính chất các mối quan hệ giữa các số và các phép tính mới đóng vai trò quan trọng chứ không phải bản thân các số đó ; chẳng hạn các tính chất trong nội bộ các số nguyên với phép cộng và phép nhân cũng chẳng khác gì các tính chất trong nội bộ các đa thức (có hệ số thực) với phép cộng và phép nhân, các tính chất trong nội bộ các số thực với phép cộng chẳng khác gì các tính chất trong nội bộ các vectơ với phép cộng vectơ v.v... Điều đó là dấu hiệu của sự chuyển mình từ "cổ điển" lên "hiện đại" của toán học với nét đặc trưng là : toán học từ chỗ là khoa học nghiên cứu các quan hệ về số lượng và hình dạng của thế giới khách quan trở thành khoa học về các cấu trúc giữa các khái niệm và các quan hệ rất trừu tượng. Toán học vút lên cao của sự trừu tượng như vậy thì lại nhân sức mạnh của mình lên rất nhiều vì khi ứng dụng cụ thể, các khái niệm và quan hệ trừu tượng đó muốn hiểu là cái gì cụ thể cũng được miễn sao một số tiên đề được thỏa mãn. Nhờ vậy mà toán học có sức xâm nhập vào tất cả các khoa học, trở thành nữ hoàng của các khoa học. Toán học hiện đại quả là một mùa xuân và hình học Lobasepski là con chim én báo hiệu mùa xuân. Điều này cũng nhắc chúng ta đừng thiển cận. Giá như suốt hơn 2000 đó, có người cứ cản trở, cứ phê phán : "Các anh cứ rồi hời mà chứng minh tiên đề Öclit. Chưa chứng minh thì đã chết ai "thì hậu quả sẽ ra sao nhỉ ?

NCT

KÌ THI OLEMPIC TOÁN QUỐC TẾ (IMO)

LẦN THỨ 37

PHAN DỨC CHÍNH - NGUYỄN KHẮC MINH

IMO lần thứ 37 được tổ chức từ ngày 5/7 đến ngày 17/7/1996 tại Mumbai (Bombay) - thủ phủ bang Maharashtra của nước CH Ấn Độ. Dự thi kì này có 426 học sinh của 75 nước. Đội tuyển Việt Nam, gồm 6 học sinh (4 học sinh lớp 12 và 2 học sinh lớp 11): Đỗ Quốc Anh, Nguyễn Thái Hà, Phạm Lê Hùng, Ngô Đắc Tuấn (khối PTCT Đại học KHTN - DHQG Hà Nội), Ngô Đức Duy (PTTH Trần Phú - Hải Phòng) và Trịnh Thế Huỳnh (PTTH Lê Hồng Phong - Nam Hà).

Sơ với kì thi IMO năm 1995, thể thức tổ chức của kì thi lần này có một sửa đổi nhỏ: Sau ngày thi thứ nhất (10/7/1996), tất cả các phó đoàn được đưa tới nơi ở và làm việc của các trưởng đoàn. Kể từ đó, cũng như các trưởng đoàn, tất cả các phó đoàn bị cách li tuyệt đối với học sinh cho tới khi Ban tổ chức (BTC) kì thi đã quyết định xong giải thưởng.

IMO lần thứ 37 được chính thức khai mạc vào 9/7 tại Hội trường của Viện nghiên cứu cơ bản Tata. Từ ngày 6/7 đến ngày 8/7 là khoảng thời gian dành cho các trưởng đoàn của BTC soạn thảo đề thi chính thức của kì thi. Phương thức làm đề của kì thi năm nay là sự kế thừa phương thức làm đề của kì thi năm ngoái và có cải biên đôi chút nhằm giảm bớt sự căng thẳng cho các trưởng đoàn mà vẫn đảm bảo được tính khách quan trong việc lựa chọn và đánh giá mức độ dễ, khó của các bài toán dự tuyển. Dưới đây là Đề thi của IMO lần thứ 37:

Ngày thi thứ nhất. 10/7/1996

Bài 1 (Tổ hợp, Phần Lan*): Cho hình chữ nhật ABCD với $|AB| = 20$, $|BC| = 12$. Hình chữ nhật đó được chia thành 20×12 hình vuông đơn vị. Giả sử r là một số nguyên dương cho trước. Một bước chuyển động đồng xu từ một hình vuông này sang một hình vuông khác là được phép khi và chỉ khi khoảng cách giữa các tâm của các hình vuông ấy bằng $\sqrt{r}$. Nhiệm vụ của ta là tìm một dãy những bước chuyển liên tiếp để chuyển được đồng xu từ hình vuông có đỉnh A đến hình vuông có đỉnh B.

(a) Chứng minh rằng nhiệm vụ đó không thể thực hiện được nếu r chia hết cho 2 hoặc cho 3.

* Sự phân loại là của ban tổ chức

(b) Chứng tỏ rằng nhiệm vụ đó thực hiện được nếu $r = 73$.

(c) Nhiệm vụ đó thực hiện được chăng nếu $r = 97$?

Bài 2 (Hình học phẳng, Canada): Giả sử P là một điểm trong của tam giác ABC sao cho:

$$\widehat{APB} - \widehat{ACB} = \widehat{APC} - \widehat{ABC}.$$

Giả sử D, E lần lượt là tâm các hình tròn nội tiếp của các tam giác APB và APC . Chứng minh rằng AP, BD, CE đồng qui.

Bài 3 (Đại số, Rumania): Gọi $S = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ là tập hợp tất cả các số nguyên không âm. Tìm tất cả các hàm xác định trên S và có giá trị thuộc S sao cho:

$$f(m + f(n)) = f(f(m)) + f(n)$$

với mọi m, n thuộc S .

Ngày thi thứ hai. 11/7/1996

Bài 4 (Số học, Nga): a, b là những số nguyên dương sao cho các số $15a + 16b$ và $16a - 15b$ đều là bình phương của những số nguyên dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của số nhỏ nhất trong hai bình phương ấy.

Bài 5 (Hình học phẳng, Acmenia): ABCDEF là một hình lục giác lồi với AB song song với ED, BC song song với FE và CD song song với AF. Gọi R_A, R_C, R_E lần lượt là bán kính của các đường tròn ngoại tiếp các tam giác FAB, BCD, DEF và gọi p là chu vi của hình lục giác. Chứng minh:

$$R_A + R_C + R_E \geq \frac{p}{2}.$$

Bài 6 (Tổ hợp, Pháp): Giả sử n, p, q là ba số nguyên dương với $n > p + q$. Giả sử $x_0, x_1, \dots, x_n$ là những số nguyên thỏa mãn các điều kiện sau đây:

$$(a) x_0 = x_n = 0$$

(b) Với mỗi i với $1 \leq i \leq n$, ta có hoặc $x_i - x_{i-1} = p$ hoặc $x_i - x_{i-1} = -q$. Chứng tỏ rằng tồn tại một cặp chỉ số (i, j) với $i < j$ và $(i, j) \neq (0, n)$ sao cho $x_i = x_j$.

Theo qui định của các kì thi IMO, thời gian làm bài của mỗi ngày thi là 4 tiếng rưỡi và điểm tối đa cho mỗi bài là 7.

Theo đánh giá chung của các đoàn thi Đề thi năm nay gai góc hơn so với đề thi của năm 1995, và đề thi của năm 1994. Tuy nhiên, có một điều may mắn là cả 6 bài toán thi nêu trên đều thuộc các dạng bài khá quen thuộc đối với các học sinh của Đội tuyển nước ta.

Trái với thông lệ tại các IMO trước đây, bài 1 của Đề thi năm nay lại không phải là bài được Hội đồng chọn đề (HĐCD) đánh giá là bài dễ nhất trong 6 bài toán thi. Đây là một điều bất ngờ của kì thi lần này. Điều bất ngờ thứ hai, còn lớn hơn nhiều, của kì thi năm nay là bài 5 và bài 6. Theo đánh giá của HĐCD thì bài 5 thuộc loại bài trung bình (xét về độ khó, dễ), nhưng trên thực tế bài toán này đã "hạ gục nhanh" hầu hết các thí sinh. Chỉ có 6 thí sinh (2 của Đội tuyển Rumania, 2 của Đội tuyển Acmenia, 1 của Đội tuyển Hàn Quốc và 1 của Đội tuyển Hi Lạp) đạt điểm tối đa ở bài 5 và có tới 313 thí sinh bị điểm 0 ở bài này. Trong khi đó, Bài 6, mặc dù được HĐCD đánh giá là bài khó nhất của đề thi, lại có số thí sinh đạt điểm tối đa cao nhất (99 em) và đồng thời số thí sinh bị điểm 0 ở bài này nhiều hơn không đáng kể so với số thí

sinh bị điểm 0 ở bài 2, cũng như ở bài 4. Xét về toàn cục, kết quả bài làm của các thí sinh ở IMO lần thứ 37 kém hơn kết quả làm bài của các thí sinh ở IMO lần trước. Năm nay, trong tổng số 426 thí sinh chỉ có 1 thí sinh (của Đội tuyển Rumania) đạt điểm tuyệt đối (42/42), không có thí sinh nào đạt 41 hay 40 điểm, đạt 39 điểm có 1 thí sinh, đạt 38 điểm có 1 thí sinh, đạt 37 điểm có 3 thí sinh,... Căn cứ vào kết quả thi và theo Điều lệ của các kì IMO, BTC kì thi năm nay đã quyết định trao :

- 35 huy chương vàng cho các thí sinh đạt từ 28 đến 42 điểm.

- 66 huy chương bạc cho các thí sinh đạt từ 20 đến 27 điểm.

- 99 huy chương đồng cho các thí sinh đạt từ 12 đến 19 điểm.

Như vậy, đây là kì thi có mức điểm tối thiểu để trao huy chương vàng (HCV) thấp nhất từ trước tới nay.

Kết quả cụ thể của Đội tuyển Việt Nam như sau :

Họ và tên	B1	B2	B3	B4	B5	B6	Tổng số	Giải
Đỗ Quốc Anh	2	7	6	0	0	3	18	Huy chương đồng
Ngô Đức Duy	2	7	5	7	5	7	33	Huy chương vàng
Nguyễn Thái Hà	4	7	6	7	0	7	31	Huy chương vàng
Trịnh Thế Huỳnh	2	1	2	1	3	0	9	
Phạm Lê Hùng	7	7	2	7	0	4	27	Huy chương bạc
Ngô Đắc Tuấn	7	7	7	7	2	7	37	Huy chương vàng

Trong Bảng xếp hạng không chính thức của BTC kì thi, với tổng số 155 điểm. Đội tuyển Việt Nam đứng ở vị trí thứ 7 sau các Đội tuyển : Rumania (187 điểm), Hoa Kỳ (185 điểm), Hungari (167 điểm), Nga (162 điểm), Anh (161 điểm) và Trung Quốc (160 điểm).

Xét riêng về HCV thì các Đội tuyển Rumania và Hoa Kỳ đạt nhiều HCV nhất (mỗi đội đoạt 4HC), tiếp theo là các Đội tuyển : Hungari, Đức, Trung Quốc, Việt Nam (mỗi đội

đoạt 3HC), Anh, Hàn Quốc, Nga (mỗi đội đoạt 2 HC) ; Belarus, Bungari, Grudia, Ấn Độ, Iran, Ixraen, Nhật Bản, Singapo và Ukraina (mỗi Đội đoạt 1 HC).

Lễ bế mạc IMO lần thứ 37 đã được tổ chức vào chiều tối ngày 16/7. Tại buổi lễ này, Trưởng BTC IMO lần thứ 37 đã chuyển giao lá cờ của IMO cho Trưởng đoàn của Đoàn Achentina - nước chủ nhà của IMO lần thứ 38.

Giải đáp bài

VIẾT SỐ TRONG BÀN CỜ

Ta đã biết cách điền các số từ 1 đến 16 vào hình vuông có 16 ô sao cho tổng các số của mỗi hàng ngang, mỗi hàng dọc và mỗi đường chéo đều bằng nhau (xem TC THVTT số 7 (229)/1996). Thí dụ

Lời giải của
Bùi Thu Hà, 4A,
Minh Tân, Kim
Môn, Hải Hưng
(hình 1).

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

Bàn cờ Vua có 64 ô (32 ô đen, 32 ô trắng). Bây giờ chia bàn cờ vua thành 16 hình vuông nhỏ. (Mỗi hình vuông có 2 ô đen và 2 ô trắng xen kẽ nhau) và ghi các số trong các ô của hình 1 vào 4 ô của hình vuông nhỏ tương ứng của cờ ta sẽ được cách viết số trong bàn cờ thỏa mãn yêu cầu của bài ra là :

1) Số các ô được viết các số từ 1 đến 16 đều bằng 4

2) Tổng các số viết trong các ô trắng của mỗi hàng ngang hoặc mỗi hàng dọc đều 34 và cũng bằng tổng các số viết trong các ô đen của mỗi hàng ngang hoặc mỗi hàng dọc.

3) Tổng các số viết trong các ô nằm trên mỗi đường chéo của bàn cờ đều bằng 68.

16	16	2	2	3	3	13	13
16	16	2	2	3	3	13	13
5	5	11	11	10	10	8	8
5	5	11	11	10	10	8	8
9	9	7	7	6	6	12	12
9	9	7	7	6	6	12	12
4	4	14	14	15	15	1	1
4	4	14	14	15	15	1	1



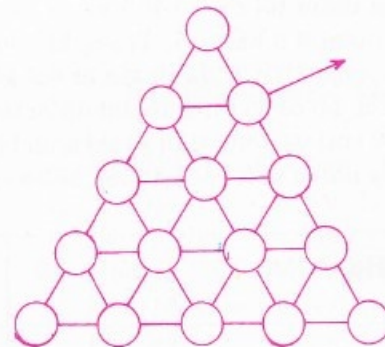
Lời giải của Nguyễn Thị Nhung, 7D, Phú Thù, Kim Môn, Hải Hưng.

Nhận xét. Bạn Võ Thế Duy, 10A₂, Trần Quốc Tuấn, Quảng Ninh cũng có lời giải đúng, nhưng tổng các số trên mỗi đường đều bằng 66. Bạn Nguyễn Hữu Thuận, 11A₃, Đông Hà, Quảng Trị, có tổng các số trên mỗi đường chéo đều bằng 48.

BÌNH PHƯƠNG

TÌM CỬA VÀO VÀ ĐƯỜNG ĐI

Một khu triển lãm sơ đồ như hình dưới.



Phòng có mũi tên là lối ra. Phiên các bạn tìm giúp xem khu triển lãm tối đa có mấy lối vào để có thể có đường đi qua tất cả các phòng mỗi phòng một lần và tới lối ra.

TUẤN DĂNG

CÙNG BẠN ĐỌC

- Các bạn gửi bài giải cần ghi địa chỉ vào từng bài.

- Ngoài phong bì ghi rõ bài giải của số báo nào.

- Không gửi bài của nhiều số báo chung cho một phong bì.

- Không gập bài phức tạp.

THVTT

ISSN : 8066 - 8035
Chỉ số : 12884
Mã số : 8BT32M6

Sắp chữ tại TTVT Nhà XBGD
In tại Nhà in Diên Hồng
In xong và nộp lưu chiếu tháng 4/1996

Giá 2000đ
Hai nghìn đồng