BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ★ HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

7 (229)
1996
NĂM THỨ 33

TẠP CHÍ RA NGÀY 15 HÀNG THÁNG

★ PHƯƠNG PHÁP NỘI SUY VÀ CÁC BÀI TOÁN . . .

★ XUNG QUANH MỘT CÔNG THỨC TÍNH THỂ TÍCH

★ ĐỀ THI PHỔ THÔNG NĂNG KHIẾU HẢI HƯNG 1995

★ TÌM HIỂU THÊM VỀ BẤT ĐẲNG THỨC LƯỢNG GIÁC

KÌ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN VIỆT NAM

KẾT QUẢ TRẬN ĐẦU

MỘT PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC

Thầy giáo Vũ Hữu Bình và các học sinh giỏi Thành phố, Toàn quốc của lớp 9H trường Trưng Vương, Hà Nội

TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ
MATHEMATICS AND YOUTH

MỤC LỤC

Trụ sở tòa soạn :
45B Hàng Chuối, Hà Nội ĐT: 8213786
231 Nguyễn Văn Cừ, TP Hồ Chí Minh ĐT: 8356111

Biên tập và trị sự : VŨ KIM THỦY
Trình bày : QUỐC HỒNG

PHƯƠNG PHÁP NỘI SUY VÀ CÁC BÀI TOÁN VỀ XÁC ĐỊNH ĐA THỨC

NGUYỄN VĂN VĨNH
(TP Hồ Chí Minh)

Trong các kì thi học sinh giỏi, thường có các bài toán về xác định một đa thức.

Để xác định các hệ số của một đa thức, ta thường dùng phép chia đa thức hoặc dùng phương pháp hệ số bất định, phương pháp giá trị riêng kết hợp việc giải một hệ phương trình. Bài viết này xin giới thiệu với các bạn một phương pháp nội suy của Niutơn (Newton) cho phép tìm nhanh các hệ số của một đa thức.

Kiến thức cần thiết gồm :

1. Định lí Bézout (Bêdu) : Phần dư của phép chia đa thức $P(x)$ cho nhị thức bậc nhất $x - a$ bằng giá trị của đa thức tại điểm a, tức là $P(a)$.

2. Phương pháp nội suy Newton

Để tìm đa thức $P(x)$ bậc không quá n khi biết giá trị của đa thức tại $(n + 1)$ điểm : $C_1, C_2, ..., C_{n+1}$ ta có thể biểu diễn $P(x)$ dưới dạng :

$$P(x) = b_o + b_1(x - C_1) + b_2(x - C_1)(x - C_2) + ... + b_n(x - C_1)... (x - C_n)$$

Bằng cách thế x lần lượt bằng các giá trị $C_1, C_2, ..., C_{n+1}$ vào biểu thức $P(x)$ ta lần lượt tính được các hệ số $b_o, b_1, b_2, ..., b_n$.

Dưới đây là một số bài toán vận dụng.

Bài 1 : *Tìm một đa thức bậc hai cho biết :*

$$P(0) = 19 ; P(1) = 5 ; P(2) = 1995.$$

Giải : Đặt $P(x) = c + b(x - 0) + a(x - 0)(x - 1)$

$= c + bx + ax(x - 1)$.

Cho $x = 0$, $P(0) = c$ suy ra $c = 19$.

Cho $x = 1$, $P(1) = 19 + b$ suy ra $19 + b = 5$, $b = -14$

$P(x) = 19 - 14x + ax(x - 1)$.

Cho $x = 2$, $P(2) = 19 - 28 + 2a$, suy ra $a = 1002$

vậy $P(x) = 19 - 14x + 1002x(x - 1)$

Rút gọn $P(x) = 1002x^2 - 1016x + 19$.

Bài 2 : *Tìm một đa thức bậc 3, P(x) cho biết :*

$P(0) = 10 ; P(1) = 12 ; P(2) = 4 ; P(3) = 1$.

(Đề thi học sinh giỏi C.H.D.C Đức 1979).

Giải : Đặt $P(x) = d + Cx + bx(x - 1) + ax(x - 1)(x - 2)$.

Cho $x = 0$, $P(0) = d$, suy ra $d = 10$.

$P(x) = 10 + Cx + bx(x - 1) + ax(x - 1)(x - 2)$.

Cho $x = 1$, $P(1) = 10 + c$, suy ra $c = 2$.

$P(x) = 10 + 2x + bx(x - 1) + ax(x - 1)(x - 2)$

Cho $x = 2$, $P(2) = 10 + 4 + 2b$, suy ra $b = -5$.

$P(x) = 10 + 2x - 5x(x - 1) + ax(x - 1)(x - 2)$

Cho $x = 3$, $P(3) = 10 + 6 - 30 + 6a$

suy ra $a = \dfrac{5}{2}$.

vậy $P(x) = 10 + 2x - 5x(x - 1) + \dfrac{5}{2}x(x - 1)(x - 2)$.

Rút gọn $P(x) = \dfrac{5}{2}x^3 - \dfrac{25}{2}x^2 + 12x + 10$.

Bài 3 : *Tìm một đa thức bậc 3, P(x) cho biết khi chia P(x) cho (x – 1), (x – 2), (x – 3) đều được dư là 6 và P(–1) = –18.*

(Đề thi học sinh giỏi Quận I lớp 8 – 1994 – 1995)

Giải : Theo định lí Bézout ta có :

$$P(1) = P(2) = P(3) = 6$$

Do đó đặt $P(x) = d + c(x - 1) + b(x - 1)(x - 2) + a(x - 1)(x - 2)(x - 3)$ Cho $x = 1$, $P(1) = d$, suy ra $d = 6$.

Cho $x = 2$, $P(2) = 6 + c$, suy ra $c = 0$.

Cho $x = 3$, $P(3) = 6 + 2b$, suy ra $b = 0$.

$P(x) = 6 + a(x - 1)(x - 2)(x - 3)$

Cho $x = -1$, $P(-1) = 6 - 24a$ suy ra $a = 1$.

vậy $P(x) = 6 + (x - 1)(x - 2)(x - 3)$

Rút gọn $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x$.

Bài 4 : *Cho đa thức P(x) bậc 4 thỏa mãn :*

$$P(-1) = 0 \text{ và } P(x) - P(x - 1) = x(x + 1)(2x + 1)$$

1. *Xác định P(x).*

2. *Suy ra giá trị của tổng sau đây (n là số nguyên dương)*

$S = 1.2.3 + 2.3.5 + \ldots + n(n+1)(2n+1).$

(Đề thi học sinh giỏi Tp Hồ Chí Minh lớp 9 : 1992).

Giải : Cho $x = 0$, suy ra $P(0) - P(-1) = 0$

mà $P(-1) = 0$, vậy $P(0) = 0$

Cho x lần lượt các giá trị $x = -1$; $x = 1$; $x = 2$, ta nhận được $P(-2) = 0, P(1) = 6$; $P(2) = 36$.

Đặt $P(x) = e + d(x+2) + c(x+2)(x+1) + b(x+2)(x+1)x + a(x+2)(x+1)x(x-1)$.

Cho $x = -2$, $P(-2) = e$

suy ra $e = 0$.

Cho $x = -1$ ta suy ra $d = 0$

Cho $x = 0$ ta suy ra $c = 0$.

vậy $P(x) = b(x+2)(x+1)x + a(x+2)(x+1)x(x-1)$.

Cho $x = 1$, $P(1) = 6b$, vậy $b = 1$.

Cho $x = 2$, $P(2) = 24 + 24a = 36$

vậy $a = \dfrac{1}{2}$.

vậy $P(x) = \dfrac{1}{2}x(x+1)^2(x+2)$

2. $P(x) - P(x-1) = x(x+1)(2x+1)$.

Cho $x = 1$; 2 ; 3 ; n ta có :

$P(1) - P(0) = 1.2.3$

$P(2) - P(1) = 2.3.5$

...

$P(n) - P(n-1) = n(n+1)(2n+1)$

suy ra : $P(n) - P(0) = 1.2.3 + 2.3.5 + \ldots + n(n+1)(2n+1)$

Do đó : $S = P(n) = \dfrac{1}{2}n(n+1)^2(n+2)$.

Bài 5 :

Cho biết đa thức bậc hai $P(x)$ có 3 nghiệm số phân biệt α, β, γ. Chứng minh rằng $P(x) = 0$ với mọi x.

Giải :

Ta có $P(\alpha) = P(\beta) = P(\gamma) = 0$.

Đặt $P(x) = c + b(x-\alpha) + a(x-\alpha)(x-\beta)$.

Cho $x = \alpha$, $P(\alpha) = c$, vậy $c = 0$.

Cho $x = \beta$, $P(\beta) = b(\beta - \alpha) = 0$

vì $\beta \neq \alpha$ suy ra $b = 0$

Cho $x = \gamma$, $P(\gamma) = a(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta) = 0$

vì $\gamma \neq \alpha, \gamma \neq \beta$ suy ra

$a = 0$. Vậy $P(x) = 0$ với mọi x.

Để luyện tập, các bạn hãy giải các bài toán sau đây :

1. Tính các tổng sau đây

$$A = \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} + \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}$$

$$B = \frac{(x-a)(x-b)(x-c)}{(d-a)(d-b)(d-c)} + \frac{(x-b)(x-c)(x-d)}{(a-b)(a-c)(a-d)} + \frac{(x-d)(x-a)(x-b)}{(c-d)(c-a)(c-b)}$$

Đáp số : $A = 1$; $B = 1$.

2. Tìm một đa thức bậc 3 cho biết

$P(0) = 2, P(1) = 9, P(2) = 19, P(3) = 95$.

ĐỀ THI TUYỂN SINH PHỔ THÔNG NĂNG KHIẾU TOÁN LỚP 10 VÒNG 2 NĂM HỌC 1995 - 1996 TỈNH HẢI HƯNG

Thời gian : 180 phút (không kể giao đề)

Câu 1 : Cho phương trình $x^2 - (a-1)x - a^2 + a - 2 = 0$ (1)

a) Chứng minh phương trình luôn có 2 nghiệm trái dấu.

b) Kí hiệu m, n là nghiệm của phương trình (1). Tìm giá trị của a để $m^2 + n^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 2 : Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{x(x+1)} = \frac{\sqrt{4-x}+4}{\sqrt{4-x}+5}$$

Câu 3 : P là tập hợp những số tự nhiên có tính chất : nếu 2 số thuộc tập P thì tổng của chúng cũng thuộc P. Giả sử $a - b$ là số nhỏ nhất trong các số dạng $x - y$ với $x.y$ là những số thuộc P và $x > y$. Đặt $d = a - b$.

a) Chứng minh b chia hết cho d.

b) Kí hiệu $K = \dfrac{b^2}{d^2}$. Chứng minh với số tự nhiên k bất kì mà $k \geqslant K$ thì số kd thuộc tập P.

Câu 4 : Cho a, b, c là số đo 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}\right) + \frac{3abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} < 5$$

Câu 5 : Cho tam giác ABC.

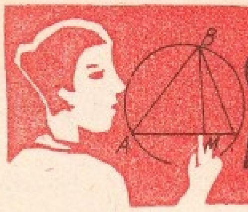
a) Lấy 2 điểm X, Y trên AB, AC. Chứng minh :

$$\frac{dtAXY}{dtABC} = \frac{AX.AY}{AB.AC}$$

b) Gọi M, N, P là chân các đường phân giác trong của tam giác. Chứng minh nếu dtABC = 4 dtMNP thì tam giác ABC đều và ngược lại.

Câu 6 : ABC là tam giác đều cạnh bằng 3. Lấy 2 điểm E, F trên AB, AC. Chứng minh EF qua tâm tam giác nếu có hệ thức $\dfrac{1}{AE} + \dfrac{1}{AF} = 1$ và ngược lại.

PHAN TUẤN CỘNG



GIẢI BÀI kì trước

Bài T1/225. *Giải phương trình :*

$$x^4 + (8\sqrt{5} - 7)x^2 + 52 - 28\sqrt{5} =$$
$$= (34 - 12\sqrt{5} - 3x^2)x^2 + 4\sqrt{5}$$

Lời giải.

Đặt $a = x^2 + 4\sqrt{5}$, ta có a > 0 và $a^2 - 7a - 28 = (34 - 3a)\sqrt{a}$

$\Leftrightarrow (a^2 - 7a - 28)^2 = (34 - 3a)^2 a$

$\Leftrightarrow (a^4 - 23a^3 + 197a^2 - 764a + 784 = 0$

$\Leftrightarrow (a^2 - 12a + 16)(a^2 - 11a + 49) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a^2 - 12a + 16 = 0 \quad (1) \\ a^2 - 11a + 49 = 0 \quad (2) \end{array}\right.$$

Do a > 0 nên (2) vô nghiệm vì vế trái bằng $(a - 5{,}5)^2 + 18{,}75$, và luôn luôn dương. Vậy phương trình đã cho tương đương với (1) và có nghiệm là : $x_1 = \sqrt{5} - 1$; $x_2 = 1 - \sqrt{5}$.

Nhận xét.

Lời giải tốt gồm có : *Trần Tất Đạt*, 8A Chu văn An – Tây Hồ – Hà Nội ; *Nguyễn Vĩnh Thuận*, 8T NK Tx Hà Tĩnh ; *Trần Tuấn Anh*, 8T Lê Quí Đôn – Nha Trang – Khánh Hòa ; *Chung Nhân Phú*, 8T$_1$ *Nguyễn An Khương* Hóc Môn – Tp Hồ Chí Minh ; *Nguyễn Anh Tuấn*, 9T Phan Chu Trinh – BMT – Đăk lăk ; *Hoàng Phương Đông*, 9A PTCS Cốc lếu – Lào cai ; *Cao Xuân Sinh*, 9T Nga Liên – Nga Sơn – Thanh Hóa.

ĐẶNG VIỄN

Bài T2/225

Giải phương trình nghiệm nguyên dương

$$x^2 + y^2 = 2011^{1995^k + 1}(10 - z)$$

Lời giải. (của bạn *Lê Thị Tâm* 9A Vinh)

Trước hết ta chứng minh bổ đề : Nếu p là số nguyên tố dạng $4k + 3$ và $x^2 + y^2 \vdots\ p$ thì $x \vdots\ p$, $y \vdots\ p$.

Thật vậy nếu $x \not\vdots\ p$ thì $y \not\vdots\ p$

Theo định lí Fecma $x^{p-1} = x^{4k+2} \equiv 1$ (modp), $y^{4k+2} \equiv 1$ (modp). Mặt khác vì $x^2 \equiv -y^2$ (modp) $\rightarrow x^{2(2k+1)} \equiv -y^{2(2k+1)}$ (modp) $\rightarrow 1 \equiv -1$ (modp) Vô lí.

Trở lại bài toán vì 2011 là số nguyên tố dạng $4k + 3$ do do theo bổ đề

$x = 2011x_1$,

$y = 2011y_1$. Đặt $2n = 1995^k + 1$

$\rightarrow x_1^2 + y_1^2 = 2011^{2n-2}(10 - z)$

Tiếp tục như vậy n lần ta có

$$x_n^2 + y_n^2 = 10 - z \qquad (1)$$

với $x = 2011^n x_n$, $y = 2011^n y_n$.

Bằng cách thử trực tiếp ta thấy nghiệm nguyên dương của (1) là x_n, y_n, $z) = (1, 1, 8)$, $(1, 2, 5)$, $(2, 1, 5)$ và $(2, 2, 2)$ Vậy nghiệm nguyên dương của phương trình đã cho là

2011^n, 2011^n, 8), $(2011^n, 2 . 2011^n, 5)$, $(2.2011^n, 2011^n, 5)$, $(2.2011^n, 2 . 2011^n, 2)$

ở đó $n = \dfrac{1995^k + 1}{2}$

Nhận xét : Nhiều bạn tham gia giải bài này và có lời giải tốt như : *Trần Tuấn Anh* (8, Nha Trang) *Bùi Mạnh Hùng* (9H Trưng Vương) *Phan Chi* (9A chuyên ngữ Hà nội) *Ngô Kiên Cường* (9, Quảng Ngãi), *Nguyễn Minh Nguyệt* (9, Hải hưng), *Nguyễn Trung Kiên* (7 Hà nội), *Nguyễn Văn Quang* (9, Thanh hóa). Một số bạn thừa nhận bổ đề mà không chứng minh. Có một vài lời giải sai.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T3/225 : *Cho a, b, x, y là các số thực thỏa mãn*

$$\begin{cases} \dfrac{x^4}{a} + \dfrac{y^4}{b} = \dfrac{1}{a + b} & (1) \\ x^2 + y^2 = 1 & (2) \end{cases}$$

Chứng minh rằng : $\dfrac{x^{1994}}{a^{997}} + \dfrac{y^{1994}}{b^{997}} = \dfrac{2}{(a+b)^{997}}$

Lời giải. của *Nguyễn Như Chuẩn*, 8, NK Thuận Thành, Hà Bắc.

Thay $1 = (x^2 + y^2)^2$ vào (1) ta có

$$\frac{x^4}{a} + \frac{y^4}{b} = \frac{(x^2 + y^2)^2}{a + b}$$

$\Leftrightarrow (bx^4 + ay^4)(a + b) = ab(x^4 + y^4 + 2x^2y^2)$

$\Leftrightarrow a^2y^4 + b^2x^4 - 2abx^2y^2 = 0$

$\Leftrightarrow (ay^2 - bx^2)^2 = 0$

$\Leftrightarrow bx^2 = ay^2$

Từ đó ta có : $\dfrac{x^2}{a} = \dfrac{y^2}{b} = \dfrac{x^2 + y^2}{a + b} = \dfrac{1}{a + b}$ (3)

Từ (3) ta có : $\dfrac{x^{1994}}{a^{997}} = \dfrac{y^{1994}}{b^{997}} = \dfrac{1}{(a + b)^{997}}$

Vậy : $\dfrac{x^{1994}}{a^{997}} + \dfrac{y^{1994}}{b^{997}} = \dfrac{2}{(a + b)^{997}}$ (đpcm)

Nhận xét 1. Có rất nhiều các bạn gửi lời giải. Tất cả đều đúng. Các bạn sau đây có lời giải tốt : *Nguyễn Danh Nam*, 8T, NK Bắc Giang, Hà Bắc ; *Nguyễn Hà Duy*, 9T, Chuyên V–T Phú Xuyên, Hà Tây ; *Bùi Viết Lộc*, 8A ; *Phạm Quang Vinh*, 9A, Bế Văn Đàn ; *Đinh Quốc Vĩnh*, 9A, PTDL Đông Đô, *Nguyễn Tùng*, 8CT, Từ Liêm, *Nguyễn Thị Minh Thoa*, 8C, Ngọc Lâm, Gia Lâm, Hà nội ; *Nguyễn Lê Thúy*, *Lê Phương Thảo, Trần Thị Việt Anh* 8A_1, Hồng Bàng, Hải Phòng ; *Nguyễn Quang Bằng*, 8T ; *Nguyễn Quỳnh Điệp, Hoàng Minh Sơn, Trần Đình Ngọc*, 9T, NK Hải Hưng ; *Lê Thành Công*, 7T, Phạm Huy Quang, Đông Hưng ; *Nguyễn Ngọc Minh*, 9T, NK Thái Thụy, Thái Bình ; *Trần Minh Toàn, Vũ Trần Cương*, 8T, *Hoàng Anh* 9T, Trần Đăng Ninh, Nam Định, Nam Hà. *Lê Hồng Linh*, 8T, *Lê Văn Cường*, 9T, NK Trương Hán Siêu, TX Ninh Bình ; *Hoàng Minh Dũng*, 9A, Ximăng Bỉm Sơn, *Nguyễn Văn Quang*, 9T, Lam Sơn ; *Nguyễn Bình Phê*, 7B, *Hồng Phương Đông*, 9C ; *Nguyễn Thiều Anh*, 9D, NK Thành phố, Thanh Hóa ; *Phùng Quang Huy*, 9T, NK Nghi Lộc ; *Đặng Thành Cương*, 9T, Phan Bội Châu, Vinh, Nghệ An. *Mai Xuân Đức, Nguyễn Vĩnh Thuận, Nguyễn Hữu Tình*, 8T, *Nguyễn Mai Phương, Mai Tùng Sơn, Nguyễn Mỹ Hạnh*, 9T, NK Hà Tĩnh ; *Nguyễn Văn Bình*, 9A, NK Lệ Thủy, Quảng Bình ; *Hồ Từ Vũ, Tiêu Minh Hùng, Ngô Kiên Cường*, 9T, Lê Khiết, Quảng Ngãi. *Phạm Ngọc Huy*, 8CT, Lý Tự Trọng, TP Biên Hòa ; *Đoàn Ngọc Tịnh Nghiêm*, 9T, Lê Quý Đôn, Long Khánh, Đồng Nai. *Phạm Quốc Hưng*, 81, Hồng Bàng, TP. Hồ Chí Minh. *Vũ Huy Bình*, 9/2, Nguyễn Văn Cừ, Quảng Nam – Đà Nẵng. *Võ Thy Dung Hòa* 8T, Lê Quý Đôn, Nhà Trang, Khánh Hòa. *Lương Thế Nhân* 7CT, Chuyên Bạc Liêu.

2. Một số bạn đã chứng minh bất đẳng thức tổng quát sau :

$$\frac{x^{2n}}{a^n} + \frac{y^{2n}}{b^n} = \frac{2}{(a+b)^n}\; n \in N^+$$

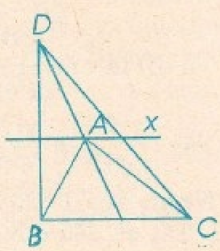
Với $n = 997$ ta có bất đẳng thức cần chứng minh.

TỐ NGUYÊN

Bài T4/225. *Chứng minh rằng mọi tam giác ABC đều có :*

$$p^2 \geq h_a^2 + h_b^2 + h_c^2$$

Lời giải. Qua A kẻ $Ax // BC$, gọi D là điểm đối xứng với B qua Ax, ta có $BD = 2h_1$, $AD = AB = c$ và tam giác BCD vuông tại B. Do đó $BD^2 + BC^2 = DC^2 \leq (AD + AC)^2$ hay



$4ha_a^2 + a^2 \leq (c+b)^2$,

suy ra $h_a^2 \leq \frac{1}{4}(c+b+a)(c+b-a)$, tức là

$p(p-a) > h_a^2$ (1), dấu '=' xẩy ra khi và chỉ khi A nằm giữa C, D hay $b = c$.

Một cách tương tự, ta cũng có :

$p(p-b) > h_a^2$ (2) (dấu '=' xẩy ra khi và chỉ khi $c = a$)

$p(p-c) > h_c^2$ (3) (dấu '=' xẩy ra khi và chỉ khi $a = b$)

Cộng (1), (2), (3) vế với vế, ta có $p^2 \geq h_a^2 + h_b^2 + h_c^2$.

Dấu '=' xẩy ra khi và chỉ khi các dấu '=' của (1), (2), (3) cùng xẩy ra hay tam giác ABC đều.

Nhận xét

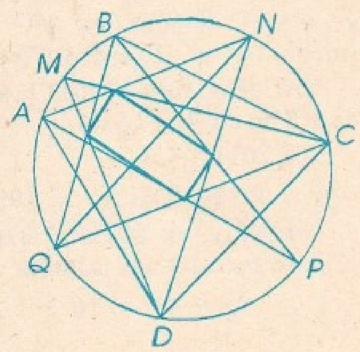
Có 152 bài giải, tất cả đều giải đúng. Một số bài dùng công thức chưa được chứng minh trong giáo trình THCS, như : công thức Hê-rông, công thức độ dài đường phân giác trong... Các bạn sau đây có lời giải tốt : *Hoàng Minh Hoàng*, 8C Chuyên Văn – Toán Ứng – Hóa – Hà-Tây ; *Nguyễn Lan Anh*, 9A Trưng Nhị – Hà Nội ; *Đoàn Tịnh Nghiêm*, 9 Toán – Lê Quý Đông – Long Khánh – Đồng Nai ; *Nguyễn Ngọc Điệp*, 9NK – Thanh Liêm – Nam Hà ; *Đặng Thu Hương* 8T Chuyên cấp II Phú Thọ – Vĩnh Phú ; *Huỳnh Nguyên Khải* 8A Quốc Học Quy Nhơn – Bình Định ; *Nguyễn Tuấn Anh* 9 Toán Phan Chu Trinh – Buôn Ma Thuột – Đăk lăk ; *Bùi Hoàng Phương* 9T NK Bỉm Sơn – Thanh Hóa ; *Phạm Thu Hương* 9A_1 THCS Hồng Bàng – Hải Phòng : *Đinh Quốc Vinh* 9A PTDL Đông Đô – Từ Liêm – Hà Nội ; *Nguyễn Thị Ngọc Anh*, 9T Lê Hồng Phong – Tx Yên Bái – Yên Bái ; *Trần Tuấn Anh*, 8 Toán Lê Quý Đôn – Nha Trang – Khánh Hòa ; *Nguyễn Văn Quang*, 9T PTTH Lam Sơn – Tp Thanh Hóa ; *Ngô Thanh Hải*, 9A_1 THCS Hùng Vương – Tx Tuy Hòa – Phú Yên ; *Lê Quang Lợi* 9 Chuyên THCS Nguyễn Nghiêm – Đức Phổ – Quảng Ngãi ; *Phan Chi*, 9A PT Chuyên ngữ ĐHSPNN Hà Nội.

ĐẶNG VIỄN

Bài T5/225 : *Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn tâm O. Gọi M, N, P, Q lần lượt là các điểm chính giữa các cung $\overset{\frown}{BA}$, $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CD}$, $\overset{\frown}{DA}$. Kí hiệu :*

$\{O_1\} = MC \cap AN$, $\{O_2\} = BP \cap DN$, $\{O_3\} = QC \cap AP$, $\{O_4\} = BQ \cap DM$. Chứng minh rằng $O_1O_2O_3O_4$ là hình chữ nhật.

Lời giải. Do $NMP + MNQ = 90^o$ nên $MP \perp NQ$ (1). Ta có $\Delta MBN = \Delta MO_1N$ (g.c.g) nên $NB = NO_1$.



Mặt khác ΔNBO_2 cân (tại N) nên $NB =$

NO_2. Do đó $NO_1 = NO_2$, tức là ΔNO_1O_2 cân (tại N) (2)

Lại có $\overparen{AQ} = \overparen{QD}$ nên $\widehat{O_1NQ} = \widehat{O_2NQ}$ (3)

Từ (2) và (3) suy ra $O_1O_2 \perp NQ$. Cùng với (1) suy ra $O_1O_2 // MP$. Tương tự ta có : $O_1O_4 // NQ$; $O_4O_3 // MP$; $O_2O_3 // NQ$. Do đó $O_1O_2O_3O_4$ là hình bình hành. Mà $MP \perp NQ$ nên $O_1O_2 \perp O_1O_4$. Vậy $O_1O_2O_3O_4$ là hình chữ nhật.

Nhận xét :

Giải tốt bài này có các bạn :

Phạm Minh Hùng, 9T, Nguyễn Du, Gò Vấp, Chung Nhân Phú, 8T$_1$ *Nguyễn An Khương*, Hóc Môn, TPHCM, *Hồ Từ Vũ, Ngô Kiên Cường*, 9T, Chuyên Lê Khiết, Quảng Ngãi, *Lê Chí Thành*, 9I, Nguyễn Tri Phương, Huế, Thừa Thiên – Huế, *Phan Thanh Dũng*, 9CT Đào Duy Từ, Quảng Bình, *Nguyễn Bằng*, 9T Phan Bội Châu, Nghệ An, *Hoàng Minh Dũng*, 9A cấp II Xi măng, Bỉm Sơn, *Mai Thị Thu Sánh*, 9A Nga Hải, Nga Sơn, *Cao Xuân Sinh*, 9T, Nga Liên, Nga Sơn, *Hồng Phương Đông*, 9C THCS Năng khiếu, TP Thanh Hóa, *Ngô Thị Hằng*, 8 TNC Ý Yên, *Hoàng Anh*, 9T, *Đỗ Quế Hương, Đào Hoàng Anh, Phạm Ngọc Hưng, Trần Minh Toàn, Vũ Trần Cương*, 8T, Trần Đăng Ninh, Nam Định, Nam Hà, *Nguyễn Hà Duy*, 9T Chuyên Phú Xuyên, Hà Tây, *Nguyễn Quỳnh Điệp*, 9T NK Hải Hưng, *Lê Phương Thảo*, 8A$_1$, *Phạm Thu Hương* 9A$_1$ Hồng Bàng, Hải Phòng, *Nguyễn Lan Anh*, 9A Trưng Nhị, *Bùi Mạnh Hùng*, 9H, *Nguyễn Quang Dũng*, 8H Trưng Vương, *Nguyễn Anh Tú*, 9T Từ Liêm, *Phan Chi*, 9A PT Chuyên ngữ, *Lê Hồng Quang, Bùi Viết Lộc*, 8A Bế Văn Đàn, Hà Nội, *Lê Xuân Hoàng*, 9A NK Hiệp Hòa, Hà Bắc, *Đặng Thu Hương*, 8T Chuyên Phú Thọ, Vĩnh Phú.

VŨ KIM THỦY

Bài T6/225 *Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương n cho trước phương trình*

$$x^{2n+1} = x + 1$$

có đúng một nghiệm số thực. Gọi nghiệm số ấy là x_n. Hãy tìm $\lim x_n$

Lời giải. Ta thấy $x \leq 1$ không là nghiệm của phương trình. Thật vậy

$$x^{2n+1} - x = x(x^{2n} - 1) = 1$$

Nếu $x \leq -1$ thì $x^{2n} \geq 1$. Vế trái âm.

Nếu $0 < x < 1$ thì vế trái âm.

Nếu $-1 \leq x \leq 0$ thì $x^{2n+1} \leq 0 < x + 1$.

Xét hàm số $f(x) = x^{2n+1} - x - 1$ ta có

$f'(x) = (2n+1)x^{2n} - 1 > 0$ với $x > 1$

mà $f(1) = -1 < 0$ nên $\exists$ và duy nhất $1 < x_n$ để $f(x_n) = 0$.

Ta có (theo đẳng thức Côsy)

$$x_n = \sqrt[2n+1]{x_n + 1} \leq \frac{2n + x_n + 1}{2n+1}$$

$$\leftrightarrow x_n \leq \frac{2n+1}{2n}.$$

Vậy $1 < x_n \leq \dfrac{2n+1}{2n}$

Vì $\lim \dfrac{2n+1}{2n} = 1$ nên ta có

$\lim x_n = 1$.

Nhận xét : – Các bạn sau đây có lời giải tốt : *Phạm Hồng Thái* (Quảng Bình), *Phạm Linh* (Hà Nội – Amstecđam), *Huỳnh Kì Anh* (Lê Quý Đôn – QNĐN), *Nguyễn Quang Nguyên* (Nguyễn Huệ, Hà Tây), *Đinh Trung Hoàng* (10 ĐHTH Huế), *Phan Duy Hùng* (12T Quảng Bình), *Nguyễn Ngọc Hưng* (11KT Thanh Hóa), *Đinh Trung Hằng* (12M MAri Quyri Hà Nội), *Nguyễn Quang Hải* (12, Vĩnh Phú), *Lê Duy Liêm* (10 Thái Bình), *Hồ Hữu Thọ* (11A, Nghệ An), *Lương Xuân Thủy* (11A, Bến Tre), *Đặng Hoàng Việt Hà* (10A, Hà Bắc).

Có bạn mắc sai lầm khi cho rằng dãy (x_n) giảm và bị chặn dưới bởi 1 nên có giới hạn là 1.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T7/225. *Cho hàm số $\varphi : R \to R$. Đặt $A_1 = \{x \in R, \varphi(x) = x\}$; $A_2 = \{x \in R, \varphi(\varphi(x)) = x\}$. Giả sử $A_2 \backslash A_1$ là một tập hợp hữu hạn và tồn tại hàm số $f : R \to R$ thỏa mãn : $f(f(x)) = \varphi(x)\ \forall x \in R$.*

Chứng minh rằng số phần tử của $A_2 \backslash A_1$ là một số nguyên chia hết cho 4.

Lời giải (của đa số các bạn). Kí hiệu : $f_0(x) = x$, $f_1(x) = f(x)$; $f_{n+1}(x) = f[f_n(x)]$

với $x \in A_1$ thì $\varphi(x) = x \Rightarrow \varphi(\varphi(x)) = x \Rightarrow x \in A_2$.

Vậy $A_1 \subset A_2$.

Với $x, y \in A_1$; $x \neq y$ thì $f(f(x)) = x \pm y = f(f(y)) \Rightarrow f(x) \neq f(y)$. Mặt khác, $x \in A_1 \Rightarrow z = f(x) \in A_1 \Rightarrow x = f(z)$. Vậy f là hàm 1 – 1 trên tập hợp A_1. Tương tự, ta cũng có f là hàm 1 – 1 trên tập A_2. Suy ra, f là hàm 1 – 1 trên tập $A = A_2 \backslash A_1$. Từ đó, nếu $x \in A$ thì x, $f(x)$, $f(f(x))$, $f(f(f(x)))$ là 4 số thực phân biệt thuộc A. Thật vậy,

$x \in A \Rightarrow f_4(x) = x$. Nếu $\exists\ 0 \leq i, j \leq 3$; $i \neq j$ để $f_i(x) = f_j(x) \Rightarrow f_2(x) = x \Rightarrow x \in A_1$, mâu thuẫn

Đặt $M(x) = \{x, f(x), f_2(x), f_3(x) ; x\} \in A$

$M(y) = \{y, f*(j), f_2(y), f_3(y) ; y\} \in A$

Nếu $f_i(y) \in M(x)$ với $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ nào đó, thì ta viết

$M(y) = \{f_i(y), f_{j+1}(y), f_{i+2}(y), f_{i+3}(y)\} = M(x)$.

Như vậy, A là hợp của một số hữu hạn $M(x)$ rời nhau, do vậy $A \vdots 4$.

Nhận xét : Các bạn sau đây có lời giải tốt : *Nguyễn Tiến Dũng, Huỳnh Kì Anh* (Lê Quý Đôn, QNĐN), *Nguyễn Anh Hoa* (Lê Hồng Phong, N.Hà), *Nguyễn Lê Lực* (ĐHQG Tp HCM), *Phan Duy Hùng* (CT, Quảng Bình), *Nguyễn Việt Dũng, Đặng Đức Hạnh, Lê Văn An, Trần Nam Dũng* (PBC, Nghệ An), *Đinh Trung Hằng* (Mary–Quyri, HN), *Nguyễn Trí Dũng* (CT, ĐHSP Vinh), *Lương Xuân Thủy* (Bến Tre), *Trần Nguyên Ngọc* (11, ĐHKHTN, HN), *Vũ Tất Thắng* (Amstecđam, HN), *Nguyễn Sĩ Phong* (ĐHSP, HN), *Nguyễn Ngọc Hưng* (LS, Thanh Hóa).

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T8/225 : *Cho dãy số* $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *được xác định bởi :* $b_1 = 0, b_2 = 14, b_3 = -18$ *và* $b_{n+1} = 7b_{n-1} - \cancel{6b_{n-1}} - 6b_{n-2}$ $\forall n \geqslant 3$.

Chứng minh rằng, với mọi số nguyên tố p ta luôn có b_p chia hết cho p.

Lời giải : Từ hệ thức xác định dãy $\{b_n\}$ ta có phương trình : $x^3 - 7x + 6 = 0$ (1) là phương trình đặc trưng của dãy số đó.

Dễ thấy (1) có 3 nghiệm là : $x = 1, x = 2$ và $x = -3$. Từ đó suy ra : $b_n = a.1^n + b.2^n + c.(-3)^n$ (2) $\forall n \geqslant 1$. Lần lượt cho n = 1,2,3, từ (2) và giả thiết của bài ra ta được :

$$\begin{cases} a + 2b - 3c = 0 \\ a + 4b + 9c = 14 \\ a + 8b - 27c = -18 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = 1 .$$

Vậy $b_n = 1 + 2^n + (-3)^n$ $\forall n \geqslant 1$ (3)

Với p là số nguyên tố, theo định lí nhỏ Phecma, ta có : $2^p \equiv 2 (\mathrm{mod}\, p)$ và $(-3)^p \equiv (-3)(\mathrm{mod}\, p)$. Vì vậy, từ (3) ta được : $b_p \equiv (1 + 2 - 3)(\mathrm{mod}\, p)$ $\forall$p nguyên tố, hay $b_p \,\vdots\, p$ $\forall p$ nguyên tố.

Nhận xét : 1. Tòa soạn đã nhận được lời giải của 59 bạn. Trong số này, chỉ có 2 bạn cho lời giải sai do đã giải sai phương trình (1). Tất cả các bạn có lời giải đúng đều giải bài toán dựa trên ý tưởng của lời giải nêu trên. Không ít bạn trình bày lời giải quá rườm rà.

2. Xuất phát từ (3), bạn *Nguyễn Phước Khoa* (10CT – PTTH Đào Duy Từ, Quảng Bình) đã phát hiện và chứng minh đúng khẳng định : "$b_n \,\vdots\, n$ $\forall$n thỏa (n, 6) = 1".

3. Dựa trên ý tưởng giải quyết bài đã ra, các bạn *Lê Văn An* (11CT, PTTH Phan Bội Châu, Nghệ An), *Trần Nam Dũng* (10CT, PTTH Phan Bội Châu, Nghệ An) và *Lưu Trường Huy* (12A PTTH Ba Đình, Nga Sơn, Thanh Hóa) đã đề xuất các hướng khái quát khác nhau cho Bài toán.

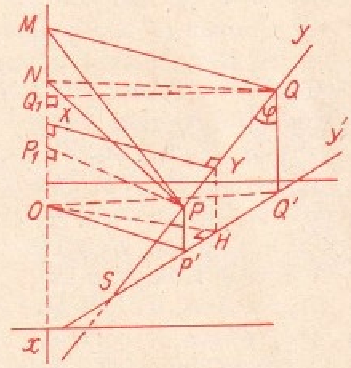
NGUYỄN KHẮC MINH

Bài T9/225. *Cho hai đường thẳng x, y chéo nhau cố định. Hai điểm M, N thay đổi trên x và hai điểm P, Q thay đổi trên y sao cho MN = a và PQ = b, trong đó a, b là các độ dài cho trước.*

Hãy xác định vị trí của M, N, P, Q sao cho bán kính hình cầu nội tiếp tứ diện MNPQ là lớn nhất.

Lời giải.

Gọi V, S và r lần lượt là thể tích, diện tích toàn phần và bán kính hình cầu nội tiếp tứ diện $MNPQ$; XY là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng x và y, X trên x và Y trên y, $XY = d$, $(x,y) = \varphi$.



Ta có : $r = \dfrac{3V}{S}$

$$V = \frac{1}{6} MN \, . \, PQ \, . \, XY \sin(x\, , y)$$

hay là : $V = \dfrac{1}{6} abd\sin\varphi$ không đổi. Từ đó suy ra :

$r = max \Leftrightarrow S = min$

Hạ $MM_1 \perp y = M_1$, $NN_1 \perp y = N_1$ và $PP_1 \perp x$, $QQ_1 \perp x = Q_1$, ta có : $2S = MN(PP_1 + QQ_1) + PQ(MM_1 + NN_1) = 2S_1 + 2S_2$, trong đó : $2S_1 = a(PP_1 + QQ_1)$ và $2S_2 = b(MM_1 + NN_1)$.

Ta chứng minh rằng : $S_1 = \min$ và $S_2 = min$ $\Leftrightarrow S = min$. Thật vậy, hãy chiếu toàn bộ hình vẽ lên một mặt phẳng (σ) nào đó vuông góc với x ở điểm O. Gọi y' là hình chiếu của y trên σ, trong đó O, H, P' và Q' lần lượt là hình chiếu trên σ của X, Y, P và Q. Dễ thấy rằng : $OH \overset{//}{=} XY = d$, $P'Q' = PQ.\sin\varphi$ nghĩa là : $P'Q' = b' = b\sin\varphi$ (không đổi) ; cũng vậy : $PP_1 \overset{//}{=} OP'$ và $QQ_1 \overset{//}{=} OQ'$.

Từ đó ra được : $2S_1 = a(OP' + OQ')$. Suy ra : $S_1 = min \Leftrightarrow OP' + OQ' = min$.

Vì $OH \perp P'Q' = H$, $OH = d$ và $P'Q' = b' = b\sin\varphi$ nên tam giác $OP'Q'$ có diện tích không đổi. Từ đó dễ thấy rằng tam giác $OP'Q'$ có chu vi nhỏ nhất, cũng tức là $OP' + OQ' = min$, khi và chỉ khi nó là tam giác cân ở O, cũng tức là khi và chỉ khi P' và Q' đối xứng với nhau qua H, và do đó P và Q đối xứng nhau qua Y.

Chứng minh tương tự, $S_2 = min \Leftrightarrow M$ và N đối xứng nhau qua X. Tóm lại, bán kính hình cầu nội tiếp tứ diện $MNPQ$ lớn nhất khi và chỉ khi đường vuông góc chung XY của hai đường thẳng chéo nhau x và y là trục đối xứng của tứ diện $MNPQ$ (có cạnh $MN = a$ trên x và cạnh $PQ = b$ trên y), nghĩa là : $XM = XN = \frac{a}{2}$ và $YP = YQ = \frac{b}{2}$.

Nhận xét. 1°) Các bạn sau đây có lời giải tốt : *Nguyễn Sỹ Phong*, 10a, PTCT Đại học sư phạm Hà Nội ; *Nguyễn Thị Minh Hường*, 11A PTCT Đại học Sư phạm Vinh ; *Nguyễn Quang Nguyên*, 11CT, Nguyễn Huệ, Hà Tây ; *Nguyễn Khánh Quỳnh*, $11A_o$, PTTH Phan Đăng Lưu, Yên Thành, Nghệ An ; *Phạm Hoài Lăng*, $11CT_2$, trường Lương Thế Vinh, Biên Hòa tỉnh Đông Nai ; *Nguyễn Hữu Chữ*, 10T, Lam Sơn, Thanh Hóa ; *Trần Nam Dũng*, 10CT, Phan Bội Châu, Nghệ An.

2°) Ý tưởng cơ bản của lời giải bài toán trên là chuyển việc xét bán kính hình cầu nội tiếp tứ diện sang diện tích toàn phần của nó (nhờ hệ thức $rs = 3V = const$) và tách $S = S_1 + S_2$, rồi tìm giá trị nhỏ nhất của từng tổng S_1 cũng như S_2 bằng cách sử dụng phép chiếu vuông góc, chuyển bài toán hình học không gian về bài toán của hình học phẳng dễ giải hơn ; cụ thể là :

$S_1 = s(\overset{\Delta}{MNP}) + s(\overset{\Delta}{MNQ}) = min \Leftrightarrow$ chu vi tam giác $OP'Q' = min$.

3°) Đáng tiếc, có bạn đã ngộ nhận : $s(\overset{\Delta}{MPQ}) + s(\overset{\Delta}{NPQ}) = 2s(\overset{\Delta}{RPQ})$, trong đó R là trung điểm của MN ; cũng thế : $s(\overset{\Delta}{PMN}) + s(\overset{\Delta}{QMN}) = s(\overset{\Delta}{SMN})$, trong đó S là trung điểm của IQ ! ! !

Hoặc có bạn đã ngộ nhận rằng tam giác PQT là vuông ở T ! !

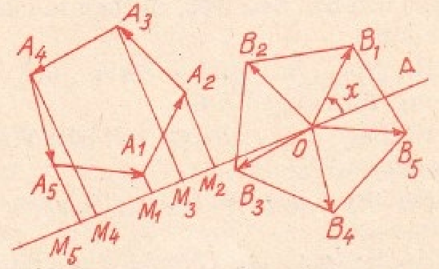
Trong đó T là đỉnh thứ tư của hình bình hành $P_{1_1}QT$, với $P_1 = PP_1 \perp x$ và $Q_1 = QQ_1 \perp$ như đã kí hiệu trong lời giải trên

NGUYỄN ĐĂNG PHẤT

Bài T10/225. *Trong mặt phẳng cho ngũ giác đều $A_1A_2A_3A_4A_5$ có cạnh bằng a và một đường thẳng Δ. Gọi M_1 , M_2 , M_3 , Msub4 , M_5 là hình chiếu vuông góc của các đỉnh A_1, A_2, A_3, A_4 và A_5 trên Δ. Chứng minh hệ thức :*

$$M_1M_2^2+M_2M_3^2+M_3M_4^2+M_4M_5^2+M_5M_1^2 = \frac{5a^2}{2}$$

Lời giải (Dựa theo *Nguyễn Sỹ Phong*, 10A, CTĐHSPHN1 ; *Trần Nguyên Ngọc* 11B, A_o ĐHKHTN, và *Phan Huy Hùng*, 12CT Đào Duy Từ, Quảng Bình), *Trần Nam Dũng*, 10CT, Phan Bội Châu, Nghệ An).



Ta xét bài toán tổng quát với $n-$ giác đều $A_1A_2 \dots A_n$ ($n \geqslant 5$). Lấy một điểm O nào đó trên đường thẳng Δ (đã được định hướng) rồi lần lượt dựng các vectơ

$\overrightarrow{OB_i} = \overrightarrow{A_iA_{i+1}}$ (i = 1, 2, ... , n, với quy ước $A_{n+1} \equiv A_1$). Gọi B'_i là hình chiếu của B_i trên Δ ; thế thì : B_1, B_2 , ..., B_n là các đỉnh của một $n-$ giác đều nội tiếp đường tròn tâm O, bán kính $R = a$, và ta được :

$$(\overrightarrow{OB}_i , \overrightarrow{OB}_{i+1}) = \beta = \frac{2\pi}{n}$$

Gọi x là góc tạo bởi Δ và A_1A_2, cũng tức là : $x = (\Delta, OB_1)$, ta được : $(\Delta, A_iA_{i+1}) = (\Delta, OB_i) = x + (i-1)\beta$ ($1 \leqslant i \leqslant n$) và :

$$\overline{M_iM_{i+1}} = \overline{OB'_i} = a\cos[x + (i-1)\beta]$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_iM_{i+1} = \sum_{i=1}^{n} OB'^2_i = a^2 \sum_{k=0}^{n-1} \cos^2(x+k\beta) = a^2 s,$$

trong đó :

$$s = \sum_{k=0}^{n-1} \cos^2 (x + k\beta) = \frac{n}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=0} \cos(2x + 3k\beta)$$

Ta chứng minh rằng : $\sum_{k=0}^{n-1} \cos(2x + 2k\beta) = 0$ $\left(\beta = \frac{2\pi}{n}\right)$.

Bằng cách sử dụng công thức biến đổi lượng giác, có thể dễ dàng thấy rằng $2\sin\beta \left(\sum_{k=0}^{n-1} \cos(2x + 2k\beta\right) = 0$. Tuy nhiên, có thể chứng minh như sau bằng cách sử dụng vectơ : Trên đường tròn đơn vị (ω, 1), dễ thấy các điểm $2k\beta = k\frac{4\pi}{n}$ ($k = 0, 1, ..., n-1$) là các đỉnh P_{k+1} của một $n-$ giác đều sao $P_1P_2 \dots P_n$ nên ta có $\sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{\omega P_k} = \overrightarrow{0}$. Chiếu tất cả các vectơ $\overrightarrow{\omega p_k}$ lên trục cosin, ta được :

$\sum_{k=0}^{n-1} \cos(2x + 2k\beta) = 0$ Suy ra : $s = \frac{n}{2}$. Từ đó ta được $\sum_{i=1}^{n} M_iM_{i+1}^2 = \frac{na^2}{2}$, Bài toán đã cho ứng với trường hợp n = 5.

Nhận xét : Nhiều bạn tham gia giải bài toán trên và cho lời giải đúng ; tuy nhiên phần đông các bạn cho lời giải không được gọn lắm. Ngoài bốn bạn nêu trên, các bạn sau đây có lời giải đúng.

Hà Nội : *Bùi Mạnh Hùng*, 9H, *Vũ Tất Thắng, Nguyễn Vĩnh Chi.*

Hà Bắc : *Đặng Hoàng Việt hà* ; Vĩnh Phú : *Đào Mạnh Thắng.*

Hà Tây : *Nguyễn Quang Nguyên, Hoàng Ngọc Lộc* ;

Hải Hưng : *Đặng Thành Trung, Phùng Đức Tuấn, Trần Hoàng Việt, Hoàng Thanh Hải*

Hòa Bình : *Trần Quang Huy, Phùng Minh Đức ; Hà Khánh Toàn*

Nam Hà : *Nguyễn Anh Hoa,*

Thanh Hóa : *Viên Ngọc Quang, Nguyễn Văn Thuấn, Lưu Trường Huy,Nguyễn Ngọc Hưng, Lê Thị Mùi, Nguyễn Anh Dương*

Nghệ An : *Lê Văn An, Nguyễn Hồng Thung, Nguyễn Khánh Quỳnh, Nguyễn Thịnh, Hồ Hữu Thọ, Nguyễn Trí Dũng, Đặng Đức Hạnh, Nguyễn Thị Minh Hường* Hà Tĩnh : *Phan Thị Nhật*

Quảng Bình : *Hoàng Mạnh Cường, Nguyễn Minh Tuấn, Nguyễn Hữu Cầu*

Quảng Trị : *Nguyễn Ngọc Tuấn,*

Quảng Nam Đà Nẵng : *Huỳnh Kì Anh, Nguyễn Tiến Dũng, Nguyễn Phương Trình* Khánh Hòa : *Trần Tuấn Anh, Nguyễn Minh Hoàng*

Buôn Ma Thuột : *Lê Hoàng Sử*

Đồng Nai : *Phạm Hoài Lăng,*

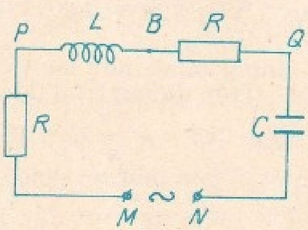
Lâm Đồng : *Phan Thanh Hải*

Thành phố Hồ Chí Minh : *Nguyễn Việt Cường*

Bến Tre : *Lương Xuân Thủy*

NGUYỄN ĐĂNG PHÁT

Bài L1/225. *Cho mạch điện như sơ đồ trên cho biết $R = 3\Omega$; $C = 3000\mu F$. Hai đầu M, N của đoạn mạch được đặt một hiệu điện thế xoay chiều. Coi điện trở hoạt động của cuộn cảm và của dây dây lớn nối rất nhỏ không đáng kể. Hãy xác định hệ số tự cảm L của cuộn cảm biết rằng các hiệu điện thế u_{MB} (giữa M và B và u_{BN} (giữa B và N) lệnh pha nhau một góc $\varphi = 90^o$.*



Hướng dẫn giải. Vẽ giản đồ vectơ (hoặc dựa vào công thức tính độ lệch pha) sẽ thấy u_{MB} nhanh pha hơn i một góc φ_1, còn u_{BN} chậm pha hơn i một góc φ_2, có độ lớn xác định bởi

$tg\varphi_1 = \dfrac{L\omega}{R}$ và $tg\varphi_2 = \dfrac{1}{RC\omega}$. Theo đề bài $\varphi_1 + \varphi_2 = 90^o$, suy ra $tg\varphi_1 = cotg\varphi_2 = \dfrac{1}{tg\varphi_2}$, rút ra $L = CR^2 = 27mH.$

Nhận xét. Các em có lời giải đúng và gọn : *Đoàn Định Trung* 11L, PTtH Hanoi – Amsterdam ; *Phạm Anh Dũng*, 11 Lí Hóa, PTNK Hải Hưng ; *Tô Quang Chỉnh*, 11A PTTH chuyên Thái Bình ; *Nguyễn Quốc Nguyên*, 11 Lí, PTTH Phan Bội Châu, Vinh (Nghệ An) ; *Nguyễn Trọng Nguyên*, $11A_2$, Lê Quý Đôn, Đà Nẵng (Quảng Nam – Đà Nẵng) ; *Trần Quang Vinh*, 11 Toán, chuyên cấp II–III Lê Khiết Quảng Ngãi ; *Vũ Quốc Khải*, $11B_1$, PTTH Bỉm Sơn, Thanh Hóa ; *Nguyễn Ngọc Tùng*, 11 Lí, PTTH Đào Duy Từ, Quảng Bình ; *Lê Quang Thành*, 11CL, chuyên lê Quý Đôn, Quảng Trị ; *Đào Mạnh Thắng*, 10A, chuyên Hùng Vương, Vĩnh Phú ; *Nguyễn Văn Phương*, 11 Toán 2, PTTH Lê Hồng Phong, Nam Định (Nam Hà).

MA

Bài L2/225. *Một quả cầu nhỏ có thể trượt không ma sát theo một máng trục bán kính R mà trục nghiêng một góc α so với phương nằm ngang ; độ dài của máng là l. Quỹ đạo của quả cầu cắt bao nhiêu lần đường sinh AB của máng nếu ban đầu từ A quả cầu chuyển động với vận tốc bi theo phương vuông góc với AB.*

Hướng dẫn giải Phân tích trọng lực $\vec{P} = m\vec{g}$ tác dụng lên quả cầu làm 2 thành phần :

– Thành phần dọc : theo trục máng mgsinα, làm cho quả cầu chuyển động dọc theo máng với gia tốc a = gsinα ;

– Thành phần vuông góc với máng, nằm trên mặt phẳng vuông góc với máng, mgcosα, vì ban đầu quả cầu chuyển động với vận tốc nhỏ theo phương vuông góc với AB nên thành phần này làm cho quả cầu thực hiện dao động với chu kì $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{R}{g}}$ với g' = gcosα.

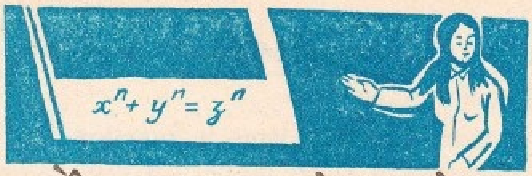
Thời gian quả cầu chuyển động trên đoạn AB : $t = \sqrt{\dfrac{2l}{a}} = \sqrt{\dfrac{2l}{gsin\alpha}}$

Số lần quỹ đạo quả cầu cắt đường sinh AB.

$$N = 2 . \frac{t}{T} = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{2l}{R}cotg\alpha}$$

Nhận xét. Các em có lời giải tốt : *nguyễn Thanh Chinh*, 11 Toán Lí, PTNK Hải Hưng ; *Nguyễn Quang Tường* 11CL, PTTH chuyên Phan Bội Châu, Vinh (Nghệ An) ; *Phan Anh Dũng*, 11 Li, PTNK Hải Hưng ;

MAI ANH



ĐỀ RA KÌ NÀY

CÁC LỚP THCS

Bài T1/229.

Cho 3 số dương $x > 0, y > 0, z > 0$:
Chứng minh :

$$(xyz+1)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+\frac{x}{z}+\frac{z}{y}+\frac{y}{x} \geqslant x+y+z+6$$

Đẳng thức xảy ra khi nào ?

NGÔ THẾ PHIỆT
(Quảng Nam – Đà Nẵng).

Bài T2/229 :

Tìm nghiệm nguyên của phương trình :

$$x^2 + x^3 + x^4 + x^5 = 271440.$$

BÙI QUANG TRƯỜNG
(Hà Nội).

Bài T3/229 :

Giải phương trình :

$$(x^2 - 3x + 2)(x^2 + 15x + 56) + 8 = 0$$

PHẠM HÙNG
(Hà Nội).

Bài T4/229 :

Cho tam giác ABC với các cạnh $a = 5$, $b = 6$, $c = 7$. Tính khoảng cách giữa tâm đường tròn nội tiếp và trọng tâm của tam giác đó.

ĐẶNG KỲ PHONG
(Hà Nội).

Bài T5/229 :

Trên mặt phẳng cho góc xOy cố định. ($\widehat{xOy} = 60^o$). Một tam giác cân MAB ($MA = MB = a$ không đổi. $\widehat{AMB} = 120^o$) thay đổi vị trí sao cho hai đỉnh A, B chạy trên các tia tương ứng Ox, Oy. Tìm quỹ tích của điểm M.

TRỊNH BẰNG GIANG
(TP Hồ Chí Minh).

CÁC LỚP THCB

Bài T6/229 :

Cho dãy số x_n thỏa mãn $1 < x_1 < 2$ và

$$x_{n+1} = 1 + x_n - \frac{1}{2}x_n^2 \ \forall n \geqslant 1$$

Chứng minh rằng dãy x_n hội tụ và tìm giới hạn của nó

TRẦN XUÂN ĐÁNG
(Nam Hà).

Bài T7/229 :

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[0, 1]$, có đạo hàm trong $(0, 1)$ và $f(0) = f(1) = 0$. Chứng minh rằng tồn tại một số $c \in (0, 1)$ sao cho $f(c) = 1996f'(c)$.

Hỏi kết luận của bài toán có thay đổi không nếu $f(o) = f(1) = m$, với m là số thực khác 0 cho trước ?

LÊ HOÀNH PHÒ
(Đà Nẵng).

Bài T8/229 :

Tìm tất cả các số thực dương $a > 2$ sao cho :

$$\int_0^1 \frac{(1-t^2)dt}{t^4 + at^2 + 1} = \frac{\pi}{8}$$

HỒ QUANG VINH
(Nghệ An)

Bài T9/229 :

Gọi AA_1, BB_1 là các đường cao trong ΔABC nhọn và trung tuyến CM của nó giao với đường tròn ngoại tiếp ΔA_1B_1C tại T, còn trung tuyến CM_1 của tam giác $A_1B_1C_1$ giao với đường tròn ngoại tiếp ΔABC tại T_1. Chứng minh rằng T_1 đối xứng với T qua đường thẳng AB.

LƯU XUÂN TÌNH
(Thanh Hóa).

Bài T10/229 :

Cho tứ diện ABCD, trọng tâm G, nội tiếp mặt cầu (O). AG, BG, CG, DG theo thứ tự cắt (O) tại A_1, B_1, C_1, D_1. Chứng minh rằng :

$$GA_1 + GB_1 + GC_1 + GD_1 \geqslant GA + GB + GC + GD$$

NGUYỄN MINH HÀ
(Hải Phòng).

CÁC ĐỀ VẬT LÍ.

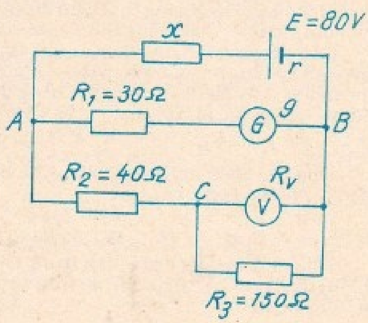
Bài L1/229 :

Một con lắc lò xo có khối lượng $m = 200g$ và dao động với chu kì $T = 2s$. Tại thời điểm $t = 1s$ con lắc có vận tốc $v = -25\sqrt{2}\pi \cdot 10^{-3} m/s$ và có thế năng $w_t \neq 125 . \pi^2 . 10^{-6}J$. Hãy viết phương trình dao động của con lắc và tính năng lượng của nó.

ĐỖ VĂN TOÀN
(Nghệ An).

Bài L2/229 :

Cho mạch điện vẽ bên, với $x + r = 48\Omega$, điện kế G chỉ 0,8A, vôn kế chỉ 24V.



1) Tính điện trở g của điện kế và R_v của vôn kế

2) Tính điện trở x trong 2 trường hợp chuyển x sang // AB thì :

a) Điện trở toàn mạch ngoài đạt công suất cực đại P_{max}

b) Điện trở x đạt công suất cực đại P_{xmax}.

TRẦN VĂN MINH
(Hà Nội)

PROBLEMS FOR THIS ISSUE.

For lower secondary schools.

T1/229. Let be given three positive numbers $x > 0, y > 0, z > 0$.
Prove that

$$(xyz+1)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+\frac{x}{z}+\frac{z}{y}+\frac{y}{x} \geqslant x+y+z+6.$$

When does equality occur ?

T2/229. Find integer–solutions of the equation

$$x^2+x^3+x^4+x^5=271440.$$

T3/229. Solve the equation :

$$(x^2-3x+2)(x^2+15x+56)+8=0.$$

T4/229. Let be given a triangle ABC, the sides of which are $a = 5, b = 6, c = 7$. Calculate the distance between the incenter and the center of gravity of ABC.

T5/229. In a plane, let be given a fixed angle xOy, $xOy = 60^o$. Find the locus of the vertex M of variable isosceles triangle MAB, where A is a moving point on the ray Ox, B is a moving point on the ray Oy so that $MA = MB = a$ is fixed and $AMB = 120^o$.

For upper secondary schools.

T6/229. Let be given a sequence of numbers $\{x_n\}$ satisfying :

$$1 < x_1 < 2,$$

$$x_{n+1} = 1 + x_n - \frac{1}{2}x_n^2, \forall n \geqslant 1.$$

Prove that the sequence $\{x_n\}$ has a finite limit and find this limit.

T7/229. Let be given a function $f(x)$, continuous on $[0, 1]$, having derivative on $(0, 1)$ and such that $f(0) = f(1) = 0$. Prove that there exists a number $c \in (0, 1)$ so that $f(c) = 1996f'(c)$. Is the conclusion still true if in the hypothesis, $f(0) = f(1) = m$, m is a given number, $m \neq 0$?

T8/229. Find all real number $a > 2$ such that

$$\int_0^1 \frac{(1-t^2)}{t^4+at^2+1}\,dt = \frac{\pi}{8}.$$

T9/229. AA_1, BB_1 are the altitudes of the acuteangled triangle ABC ; the median CM of the triangle ABC cuts the circumcircle of triangle A_1B_1C at T ; the median CM_1 of the triangle A_1B_1C cuts the circumcircle of triangle ABC at T_1.

Prove that T_1 and T are symmetric through the line AB.

T10/229. Let be given a tetrahedron $ABCD$, inscribed in a sphere (O), the center of gravity of $ABCD$ in G. AG, BG, CG, DG cut the sphere (O) respectively at A_1, B_1, C_1, D_1. Prove that

$$GA_1+GB_1+GC_1+GD_1 \geqslant GA+GB+GC+GD.$$

DÃY FIBONACCI VÀ MẠCH ĐIỆN

Đầu tháng thứ nhất có một đôi thỏ con. Đầu tháng thứ 2 ta có đôi thỏ lớn. Đầu tháng thứ 3 thỏ đẻ, ta có một đôi thỏ lớn và một đôi thỏ con. Đầu tháng thứ n ta có bao nhiêu đôi thỏ ?

Giải : Gọi số thỏ đầu tháng thứ n là u_n, đầu tháng thứ n + 1 số thỏ ấy vẫn sống nhưng có thêm những con mới đẻ. Số đôi thỏ mới ra đời đầu tháng thứ n + 1 bằng số đôi thỏ có mặt trước đó hai tháng, tức là bằng u_{n-1}. Ta có công thức cơ bản

$$u_{n+1} = u_n + u_{n-1} \quad (1)$$

Dựa vào công thức này ta lần lượt viết ra được số đôi thỏ đầu các tháng liên tiếp :

$u_1 = 1, u_2 = 1, u_3 = 2, u_1 = 3, u_5 = 5, u_6 = 8, u_7 = 13, u_8 = 21, u_9 = 34, u_{10} = 55$, ... Đó là dãy số Fibonacci.

Nhà toán học kiệt xuất thời trung cổ là Fibonacci (1170 – 1250) đã đặt ra bài toán thỏ nói trên và giải bài toán đó. Khảo sát kĩ hơn, ta thấy

$$u_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}} \qquad (2)$$

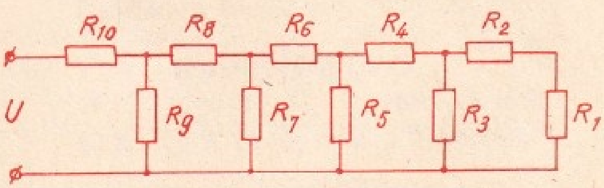
với $$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \qquad (3)$$

Cũng có thể viết kết quả này dưới một dạng khác :

$u_n = \left(\dfrac{\alpha^n}{\sqrt{5}}\right)$ làm tròn thành số nguyên gần nhất

Với $n = 39$ ta có $u_n = 63245986$.

Dãy Fibonacci có ứng dụng trong kĩ thuật hiện đại. Trong bài này chỉ nêu một ứng dụng nhỏ. Xét mạch điện vẽ trong hình. Các điện trở đều bằng R, ta hãy tính các cường độ dòng điện $I_1, I_2, ..., I_{10}$ đi qua các điện trở đó.



Giải : Hiệu điện thế của điện trở R_3 bằng tổng hiệu điện thế của R_1 và R_2, tức là

$I_3R = I_1R + I_2R$

$I_3 = I_1 + I_2$ (4)

Mặt khác I_4 rẽ thành I_2 và I_3 nên

$I_4 = I_2 + I_3$ (5)

So sánh (4), (5) với (1) và nhận xét rằng $I_1 = I_2$ cũng như $u_1 = u_2$, ta thấy $I_1, I_2, ..., I_{10}$ tỉ lệ với các số hạng của số liệt Fibonacci.

Ta có $U = I_9R + I_{10}R = (I_9 + I_{10})R = 89I_1R$ vì $u_9 + u_{10} = 89u_1$.

Vậy $$I_1 = I_2 = \frac{V}{89R}$$

$$I_3 = 2I_1, I_4 = 3I_1, \ldots I_{10} = 55I_1$$

Điện trở tương đương của toàn mạch là

$$\frac{U}{I_{10}} = \frac{89}{55}R$$

NGUYỄN DŨNG

Tìm hiểu sâu thêm toán học phổ thông

XUNG QUANH MỘT CÔNG THỨC TÍNH THỂ TÍCH CỦA TỨ DIỆN

TRỊNH VINH NGỌC
(Hà Tĩnh)

Khi giải toán hình học không gian, để tính thể tích của một tứ diện hoặc các đại lượng hình học ta hay dùng các công thức quen biết sau :

1) $V = \frac{1}{3}Bh$ (B là diện tích đáy, h là chiều cao)

2) $V = \frac{1}{6}AB.CD.MN\sin\alpha$ (AB, CD là cặp cạnh đối, MN là độ dài đường vuông góc chung của AB và CD, α là góc giữa hai cạnh AB và CD).

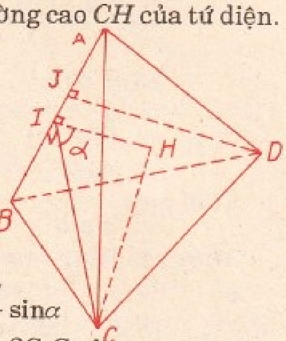
3) $V = \frac{1}{3}S_{tp}.r$ (S_{tp} là diện tích toàn phần của tứ diện, r là bán kính hình cầu nội tiếp tứ diện) v.v...

Tuy vậy, có những bài toán nếu dùng các công thức trên để tính thể tích hoặc tính các đại lượng liên quan như góc nhị diện, khoảng cách từ đỉnh tới thiết diện v.v... thì tương đối phức tạp, có khi gặp phải khó khăn. Bài viết này muốn giới thiệu một công thức tính thể tích tứ diện và ứng dụng của nó.

Mệnh đề : Cho tứ diện $ABCD$, gọi $AB = a$; S_1, S_2 là diện tích các mặt chung cạnh a, α là góc nhị diện giữa hai mặt đó, khi đó thể tích tứ diện $ABCD$

$$V = \frac{2S_1S_2\sin\alpha}{3a} \qquad (1)$$

Chứng minh : Kẻ đường cao CH của tứ diện. Gọi $S_1 = S_{ABC}$; $S_2 = S_{ABD}$ ta có :

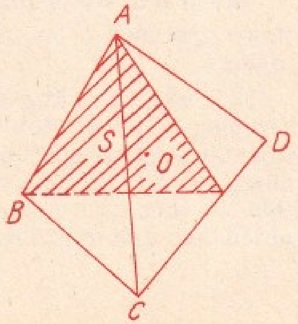


$$V = \frac{1}{3}S_{ABD}\cdot CH = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}AB.DJ\right)CH$$
$$= \frac{1}{6}AB.DJ(CI\sin\alpha)$$
$$= \frac{1}{6}AB\cdot\frac{2S_{ABD}}{AB}\cdot\frac{2S_{ABC}}{AB}\sin\alpha$$
$$= \frac{1}{6}a\cdot\frac{2S_2}{a}\cdot\frac{2S_1}{a}\sin\alpha = \frac{2S_1S_2\sin\alpha}{3a} \text{ (đpcm)}$$

Sau đây là một số bài toán áp dụng.

Bài toán 1 : *Cho tứ diện ABCD, các mặt ABC và ABD lần lượt có diện tích là p và q, và góc giữa chúng là α. Hãy tính diện tích của thiết diện qua cạnh AB và tâm hình cầu nội tiếp tứ diện.*

Bài toán cho biết diện tích của hai mặt chung cạnh a và góc giữa 2 mặt đó gợi cho ta sử dụng (1)



Giải : Gọi $AB = a$, S là diện tích thiết diện cần tìm. Theo (1) ta có :

$$V_{ABCD} = \frac{2S_{ABC}\cdot S_{ABD}\sin\alpha}{3a} = \frac{2}{3}\cdot\frac{pq\sin\alpha}{a} \;(*)$$

Do thiết diện đi qua tâm hình cầu nội tiếp nên :

$$V_{ABCD} = \frac{2S_{ABC}.S.\sin\frac{\alpha}{2}}{3a} + \frac{2S_{ABD}.S.\sin\frac{\alpha}{2}}{3a} \;(**)$$

Từ (*) và (**) ta có :

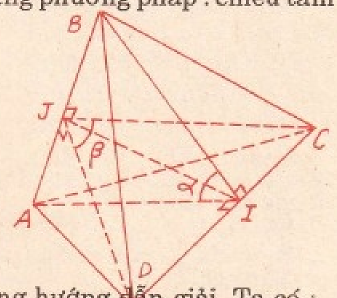
$$\frac{2}{3}\frac{pq\sin\alpha}{a} = \frac{2}{3}\frac{pS\sin\frac{\alpha}{2}}{a} + \frac{2}{3}\frac{qS\sin\frac{\alpha}{2}}{a}$$

$$\Rightarrow S = \frac{2pq\cos\frac{\alpha}{2}}{p+q}$$

Bài toán 2 : *Cho hình chóp tam giác đều SABC. Gọi α là góc giữa mặt bên và mặt đáy, β là góc giữa hai mặt bên kề nhau. Xác định quan hệ giữa α và β.*

(Câu 2 – Đề 104 – Bộ đề thi tuyển sinh đại học)

Câu này đã được giải trong hướng dẫn giải đề thi tuyển sinh bằng phương pháp : chiếu tam giác SAB lên mặt phẳng (SAI) nghĩa là $S_{SAI} = S_{SAB}.\cos\frac{\beta}{2}$ rồi bằng phép tính toán có kết quả.



Ở đây tôi muốn trình bày cách giải dùng công thức (1) với chú ý là các kí hiệu vẫn giữ nguyên trong hướng dẫn giải. Ta có :

$$\frac{2S_{ABS}\cdot S_{SAC}\sin\beta}{3SA} = \frac{2S_{SBC}\cdot S_{ABC}\sin\alpha}{3BC}$$ (đều bằng thể tích của tứ diện S_{ABC}).

$$\Leftrightarrow \frac{S_{SAB}\cdot\sin\beta}{SA} = \frac{S_{ABC}\sin\alpha}{BC}$$

$$\Leftrightarrow \frac{BJ.SA\sin\beta}{SA} = \frac{AI.BC\sin\alpha}{BC}$$

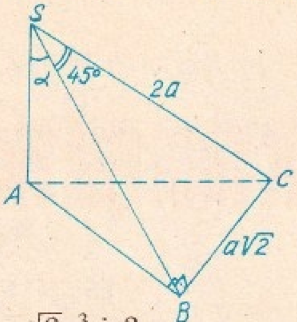
hay $BJ\sin\beta = AI\sin\alpha$ (i). Đặt $BC = x$ ta có $BJ = \frac{x}{2\sin\frac{\beta}{2}}$, $AI = \frac{x\sqrt{3}}{2}$. Thay BJ, AI vào (i) ta được:

$$\frac{x\sin\beta}{2\sin\frac{\beta}{2}} = \frac{x\sqrt{3}}{2}\sin\alpha \Leftrightarrow 2\cos\frac{\beta}{2} = \sqrt{3}\sin\alpha \text{ (ii)}$$

Vậy (ii) chính là mối quan hệ giữa α và β. Kết quả này gọn hơn kết quả trong hướng dẫn giải nhiều.

Bài toán 3 : *Cho tứ diện SABC có SA ⊥ (ABC), nhị diện cạnh SB là nhị diện vuông,* $SB = a\sqrt{2}$, $\widehat{BSC} = 45^o$, $\widehat{ASB} = \alpha$ $\left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$. *Xác định α để nhị diện cạnh SC bằng 60^o*

(Câu 3 – Đề 55 – Bộ đề thi tuyển sinh)



Bài này đã được giải bằng cách dựng mặt phẳng đi qua A và vuông góc với SC, từ đó xác định góc nhị diện cạnh SC, rồi tính $tg\alpha$, mặc dù ở câu 2 yêu cầu tính V_{ABCD}. Nếu ta sử dụng kết quả câu 2 và công thức (1) thì lời giải hiển nhiên.

Giải : Ta có :

$$V = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}SA.AB.BC = \frac{\sqrt{2}a^3\sin 2\alpha}{6} \text{ mà}$$

$SC = 2a$, $SA = a\sqrt{2}\cos\alpha$

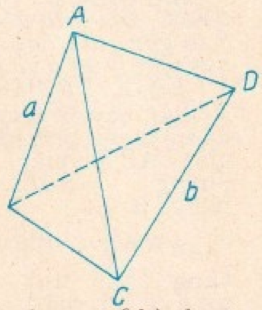
$AC = a\sqrt{2(1+\sin^2\alpha)}$

và $S_{SBC} = a^2$; $S_{SAC} = a^2\cos\alpha\sqrt{1+\sin^2\alpha}$ nên áp dụng (1) ta được :

$$\frac{\sqrt{2}a^3\sin 2\alpha}{6} = \frac{2a^2(a^2\cos\alpha\sqrt{1+\sin^2\alpha})\sin 60^o}{6a}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2}\sin\alpha = \sqrt{3(1+\sin^2\alpha)} \Leftrightarrow \sin^2\alpha = \frac{3}{5} \Rightarrow$$

$\sin\alpha = \sqrt{\frac{3}{5}}$ (do $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$). Vậy $\alpha = arcsin\frac{\sqrt{15}}{5}$.



Bài toán 4 : *Chứng minh rằng trong một tứ diện tích của các cặp cạnh đối chia cho tích các sin của các nhị diện của từng cặp đó là bằng nhau (định lí hàm số sin cho tứ diện).*

Giải : Xét tứ diện $ABCD$. Giả sử $AB = a$, $CD = b$, α và β lần lượt là góc nhị diện cạnh a, b.

Gọi $S_1 = S_{ABC}$, $S_2 = S_{ABD}$

$S_3 = S_{DAC}$; $S_4 = S_{DBC}$

Theo (1) ta có :

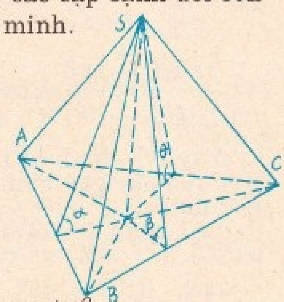
$$V_{ABCD} = \frac{2S_1S_2\sin\alpha}{3a} ; V_{ABCD} = \frac{2S_3S_4\sin\beta}{3b}$$

$$\Rightarrow \frac{2S_1S_2\sin\alpha}{3a} = \frac{2S_3S_4\sin\beta}{3b} = V$$

$$\Rightarrow \frac{S_1S_2\sin\alpha}{a} = \frac{S_3S_4\sin\beta}{b}$$

$$\Rightarrow ab = \sin\alpha\sin\beta = \frac{4S_1S_2S_3S_4}{9V^2} \ (V = V_{ABCD})$$

Áp dụng tương tự cho các cặp cạnh đối còn lại ta có điều phải chứng minh.



Bài toán 5 : *Giả sử a, b là độ dài cặp cạnh đối của 1 tứ diện ; α, β lần lượt là góc nhị diện của các cạnh này. Chứng minh rằng đại lượng sau không phụ thuộc vào cách chọn các cặp cạnh đối của tứ diện :*

$$M = a^2 + b^2 + 2ab\cot g\alpha.\cot g\beta$$

Giải : Xét tứ diện $ABCD$. Giả sử $AB = a$, $CD = b$

Gọi S_1, S_2 là diện tích các mặt chung cạnh a

S_3, S_4 là diện tích các mặt chung cạnh b.

a, m, n là độ dài các cạnh của mặt có diện tích S_1 ; α, γ, θ là các góc nhị diện tương ứng các cạnh a, m, n. Gọi H là chân đường cao tứ diện hạ xuống mặt có diện tích S_1, và h_1 là độ dài của nó.

Ta có : $S_{AHB} + S_{BHC} + S_{CHA} = S_1$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}[ah_1cotg\alpha + mh_1cotg\gamma + nh_1cotg\theta] = S_1$$

$$\Leftrightarrow ah_1\cot g\alpha + mh_1\cot g\gamma + nh_1\cot g\theta = 2S_1 \ (*)$$

Do α, γ, θ biến thiên từ 0^o đến 180^o nên (*) vẫn đúng cho trường hợp H nằm ngoài ΔABC.

Thay $h_1 = \frac{3V}{S_1}$ vào (*) ta được $a\cot g\alpha + m\cot g\gamma + n\cot g\theta = \frac{2S_1^2}{3V}$ (**)

Viết các đẳng thức tương tự (**) cho các mặt có diện tích S_2, S_3, S_4, sau đó cộng các đẳng thức của mặt có diện tích S_1 với đẳng thức của mặt có diện tích S_2 rồi trừ đi đẳng thức của các mặt có diện tích S_3, S_4 ta nhận được

$$a\cot g\alpha - b\cot g\beta = (S_1^2 + S_2^2 - S_3^2 - S_4^2) / 3V$$

$$\Rightarrow a^2\cot g^2\alpha + b^2\cot g^2\beta - 2ab\cot g\alpha\cot g\beta = (S_1^2 + S_2^2 - S_3^2 - S_4^2)^2/9V^2$$

Thay $\cot g^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} - 1$; $\cot g^2\beta = \frac{1}{\sin^2\beta} - 1$ vào đẳng thức trên ta có :

$$\frac{a^2}{\sin^2\alpha} + \frac{b^2}{\sin^2\beta} - (a^2 + b^2 + 2ab cotg\alpha cotg\beta) = \frac{(S_1^2 + S_2^2 - S_3^2 - S_4^2)^2}{9V^2}$$

Nhưng theo công thức

$$(1) : V = \frac{2S_1S_2\sin\alpha}{3a} \Rightarrow \frac{a^2}{\sin^2\alpha} = \frac{4S_1^2S_2^2}{9V^2}$$

Tương tự $\frac{b^2}{\sin^2\beta} = \frac{4S_3^2S_4^2}{9V^2}$

Thay vào đẳng thức ở trên ta thu được :

$$a^2 + b^2 + 2ab\cot g\alpha\cot g\beta = \frac{4S_1^2S_2^2}{9V^2} + \frac{4S_3^2S_4^2}{9V^2} - \frac{(S_1^2 + S_2^2 - S_3^2 - S_4^2)^2}{9V^2}$$

hay $a^2 + b^2 + 2ab\cot g\alpha\cot g\beta = \frac{4S_1^2S_2^2 + 4S_3^2S_4^2 - (S_1^2 + S_2^2 - S_3^2 - S_4^2)^2}{9V^2}$ là một đại lượng không đổi.

Vậy $M = a^2 + b^2 + 2ab\cot g\alpha\cot g\beta$ không phụ thuộc vào cách chọn các cặp cạnh đối nhau. (đpcm).

Như vậy, từ những công thức đã học, bằng các phép suy luận đơn giản, chúng ta có thể thiết lập được những công thức mới mà việc vận dụng nó vào giải toán có nhiều thuận lợi. Cứ tiếp tục theo cách này chắc các bạn sẽ tìm ra nhiều điều mới mẻ và lí thú.

Học sinh tìm tòi

MỘT PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH CÁC BẤT ĐẲNG THỨC ĐẠI SỐ

LÊ HOÀNG ANH, BÙI ĐỨC HOÀNG, TRẦN VĨNH LINH,
ĐẶNG HỮU MINH, NGUYỄN QUỐC TUẤN
Lớp 9A1, Trường PTCS Giảng Võ, Ba Đình, Hà Nội

Các bạn thân mến, chắc các bạn đã quen sử dụng bất đẳng thức Cô–si cho 2 số hoặc nhiều số để giải một số bài toán về bất đẳng thức (BĐT). Ở đây chúng tôi xin trao đổi cùng các bạn một phương pháp đơn giản để chứng minh một số bất đẳng thức đại số, là phương pháp sử dụng hằng đẳng thức và các bất đẳng thức cơ bản sau :

$a^2 \geq 0$ đẳng thức xẩy ra khi và chỉ khi $a = 0$

$ab > 0$ khi và chỉ khi a, b cùng dấu

Giả thiết rằng ba số a, b, c không âm và $a = max(a, b, c)$.

B.Đ.T 1 (Bất đẳng thức 1) $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$

Chứng minh. Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c$. Xét hiệu

$A_1 = (a^2 + b^2 + c^2) - (ab + bc + ca) =$

$= a(a - b) + b(b - c) - c(a - b + b - c)$

$= (a - b)(a - c) + (b - c)(b - c) \geq 0$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

B.Đ.T.2 $a^3 + b^3 + c^3 \geq ab^2 + bc^2 + ca^2$

Chứng minh. a) Nếu $a \geq b \geq c \geq 0$ và $a^2 \geq b^2 \geq c^2 \geq 0$. Xét hiệu

$A_2 = (a^3 + b^3 + c^3) - (ab^2 + bc^2 + ca^2)$

$= a(a^2 - b^2) + b(b^2 - c^2) - c(a^2 - b^2 + b^2 - c^2)$

$= (a^2 - b^2)(a - c) + (b^2 - c^2)(b - c) \geq 0$

b) Nếu $a \geq c \geq b \geq 0$ và $a^2 \geq b^2 \geq c^2 \geq 0$. Khi đó

$A_2 = (b - a)(b^2 - c^2) + (c - a)(c^2 - a^2) \geq 0$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

B.Đ.T.3 $a^4 + b^4 + c^4 \geq ab^3 + bc^3 + ca^3$

Chứng minh. a) Nếu $a \geq b \geq c \geq 0$ và $a^3 \geq b^3 \geq c^3 \geq 0$. Xét hiệu

$A_3 = (a^4 + b^4 + c^4) - (ab^3 + bc^3 + ca^3)$

$= a(a^3 - b^3) + b(b^3 - c^3) - c(a^3 - b^3 + b^3 - c^3)$

$= (a^3 - b^3)(a - c) + (b^3 - c^3)(b - c) \geq 0$

b) Nếu $a \geq c \geq b \geq 0$ và $a^3 \geq c^3 \geq b^3 \geq 0$. Khi đó

$A_3 = (b - a)(b^3 - c^3) + (c - a)(c^3 - a^3) \geq 0$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

B.Đ.T.4 $a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$

Chứng minh. Giả sử $a^2 \geq b^2 \geq c^2 \geq 0$. Xét hiệu

$A_4 = (a^4 + b^4 + c^4) - (a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$

$= a^2(a^2 - b^2) + b^2(b^2 - c^2) - c^2(a^2 - b^2 + b^2 - c^2)$

$= (a^2 - b^2)(a^2 - c^2) + (b^2 - c^2)(b^2 - c^2) \geq 0$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Một cách tổng quát, ta có thể chứng minh bất đẳng thức sau

B.Đ.T.5 $a^n + b^n + c^n \geq a^kb^{n-k} + b^kc^{n-k} + c^ka^{n-k}$

Chứng minh. a) Nếu $a^k \geq b^k \geq c^k$ và $a^{n-k} \geq b^{n-k} \geq c^{n-k}$. Xét hiệu

$A_5 = (a^n + b^n + c^n) - (a^kb^{n-k} + b^kc^{n-k} + c^ka^{n-k})$

$= a^k(a^{n-k} - b^{n-k}) + b^k(b^{n-k} - c^{n-k}) -$

$- c^k(a^{n-k} - b^{n-k} + b^{n-k} - c^{n-k})$

$= (a^k - b^k)(a^{n-k} - b^{n-k}) + (b^k - c^k)(b^{n-k} - c^{n-k}) \geq 0$

b) Nếu $a^k \geq c^k \geq b^k \geq 0$ và $a^{n-k} \geq c^{n-k} \geq b^{n-k} \geq 0$. Khi đó

$A_5 = (b^k - a^k)(b^{n-k} - c^{n-k}) + (c^k - a^k)(c^{n-k} - a^{n-k}) \geq 0$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

B.Đ.T.6

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^m \geq \sum_{i=1}^{n} a_i^k a_{i+1}^{m-k},$$

trong đó $a_i \geq a_{i+1} \geq 0$ $(i = 1, 2, ...n)$, $a_{n+1} = a_1$, $m, k \in \mathbf{N}$, $0 \leq k \leq m$.

Chứng minh. Theo giả thiết ta có

$a_1^k \geq a_2^k \geq ... \geq a_n^k$

$a_1^{m-k} \geq a_2^{m-k} \geq ... \geq a_n^{m-k}$

Xét hiệu

$A_6 = (a_1^m + a_2^m + ... + a_n^m) -$

$-(a_1^ka_2^{m-k} + a_2^ka_3^{m-k} + ... + a_{n-1}^ka_n^{m-k} + a_n^ka_1^{m-k})$

$= [a_1^k(a_1^{m-k} - a_2^{m-k}) + a_2^k(a_2^{m-k} - a_3^{m-k}) + ...$

$+ a_{n-1}^k(a_{n-1}^{m-k} - a_n^{m-k})$

$= [(a_1^k - a_n^k)(a_1^{m-k} - a_2^{m-k}) + (a_2^k - a_n^k)(a_2^{m-k} - a_3^{m-k}) + ...$

$- a_n^k(a_1^{m-k} - a_2^{m-k} + a_2^{m-k} - ... + a_{n-1}^{m-k} - a_n^{m-k})]$

$+ (a_{n-1}^k - a_n^k)(a_{n-1}^{m-k} - a_n^{m-k})] \geq 0$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Bằng phương pháp hoàn toàn tương tự như trên, chúng ta có thể chứng minh được các bất đẳng thức sau cho các số không âm :

BĐ.T.7 $a^2 + b^2 + c^2 \geq \sqrt{a^3b} + \sqrt{b^3c} + \sqrt{c^3a}$

BĐ.T.8 $a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2\sqrt{ab} + b^2\sqrt{bc} + c^2\sqrt{ca}$

BĐ.T.9 $a^4 + b^4 + c^4 \geq a^3\sqrt{ab} + b^3\sqrt{bc} + c^3\sqrt{ca}$

BĐ.T.10

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^k \geq \sum_{i=1}^{n} a_i^{k-1}\sqrt{a_ia_{i+1}},$$

ở đây $a_{n+1} = a_1$.

Chúng tôi được biết tất cả các bất đẳng thức trên cũng đúng cho trường hợp số mũ của a, b, c (hoặc của a_i) là các số thực bất kì. Do khái niệm "lũy thừa với số mũ bất kì" chưa được đề cập đến trong chương trình phổ thông cơ sở, nên chúng tôi đành dừng sự tìm tòi của mình ở đây. Qua mục *Học sinh tìm tòi* của tạp chí THvTT chúng tôi rất mong có nhiều dịp trao đổi với tất cả các bạn yêu thích toán học trong cả nước.

Dành cho các bạn chuẩn bị thi vào đại học

TÌM HIỂU THÊM VỀ BẤT ĐẲNG THỨC LƯỢNG GIÁC TRONG TAM GIÁC

LÊ THỐNG NHẤT
(Hà Nội)

Chủ điểm bất đẳng thức lượng giác trong tam giác vừa hay, vừa gây nhiều lo lắng cho các bạn chuẩn bị thi vào Đại học. Mùa thi vào Đại học năm 1995, nhiều bạn dự thi đã phải bó tay về bài toán này trong đề thi vào trường Đại học Ngoại thương và Đại học Quốc gia. Trong bài toán này, tôi xin cùng các bạn tìm hiểu một lớp các bất đẳng thức quan trọng trong tam giác mà nhiều bạn chưa quen.

Bài toán xuất phát 1 : (Đề 120.II) Nếu $x, y, x \in [0;\pi]$ thì :

1a, $\dfrac{\sin x + \sin y}{2} \leqslant \sin\dfrac{x+y}{2}$

và 1b, $\dfrac{\sin x + \sin y + \sin z}{3} \leqslant \sin\dfrac{x+y+z}{3}$.

(Các bạn dễ dàng chứng minh hoặc xem trong bất cứ cuốn sách bất đẳng thức nào !)

Từ 1a, các bạn sẽ có : Nếu A, B, C là góc trong tam giác thì

$\dfrac{1}{2}(\sin A + \sin B) \leqslant \sin\dfrac{A+B}{2} = \cos\dfrac{C}{2}$ và đẳng thức chỉ xảy ra $\Leftrightarrow \cos\dfrac{A-B}{2} = 1 \Leftrightarrow A = B$.

Tương tự ta có 2 bất đẳng thức nữa và cộng từng vế của 3 bất đẳng thức sẽ có :

$$\sin A + \sin B + \sin C \leqslant \cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2}. \quad (1)$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow A = B = C$.

Phối hợp với bất đẳng thức Bunhiacopski thì :

$\sqrt{\sin A} + \sqrt{\sin B} \leqslant \sqrt{2(\sin A + \sin B)} \leqslant$

$\leqslant \sqrt{4\cos\dfrac{C}{2}} = 2\sqrt{\cos\dfrac{C}{2}}$

Tương tự có 2 bất đẳng thức nữa và cộng từng vế của 3 bất đẳng thức ta suy ra :

$\sqrt{\sin A} + \sqrt{\sin B} + \sqrt{\sin C} \leqslant$

$$\leqslant \sqrt{\cos\frac{A}{2}} + \sqrt{\cos\frac{B}{2}} + \sqrt{\cos\frac{C}{2}} \quad (2)$$

Đẳng thức chỉ xảy ra $\Leftrightarrow A = B = C$, đây chính là đề Đại học Ngoại thương năm 1995.

Tương tự phép chứng minh 1a, các bạn có thể thấy :

$\sin 2A + \sin 2B = 2\sin(A+B)\cos)(A-B) \leqslant 2\sin(A+B) = 2\sin C$ và từ đó suy ra :

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C \leqslant \sin A + \sin B + \sin C \quad (3)$$

Từ đó dễ dàng suy ra :

* Tam giác ABC là tam giác đều $\Leftrightarrow \sin A\cos A + \sin B.\cos B + \sin C.\cos C = \dfrac{a+b+c}{4R}$. (Đề Đại học Tổng hợp Hà Nội Khối D năm 1994).

* Tam giác ABC là tam giác đều $\Leftrightarrow 2(a\cos A + b\cos B + c\cos C) = a + b + c$ (Đề Đại học Ngoại ngữ Hà Nội năm 1994).

Bây giờ từ 1b, các bạn suy ra ngay : trong mọi tam giác ta có

$$\sin A + \sin B + \sin C \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad (4)$$

$$\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} \leqslant \frac{3}{2} \quad (5)$$

Phối hợp với bất đẳng thức Cô–si thì có thêm các bất đẳng thức :

$$\sin A . \sin B . \sin C \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{8} \quad (6)$$

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \leqslant 1/8 \quad (7)$$

(Tất nhiên các bất đẳng thức này có thể chứng minh bằng những con đường khác !)

Bài toán xuất phát 2 : Nếu $x, y, z \in [-\pi/2; \pi/2]$ thì :

2a, $\dfrac{1}{2}(\cos x + \cos y) \leqslant \cos\dfrac{x+y}{2}$

2b, $\dfrac{\cos x + \cos y + \cos z}{3} \leqslant \cos\dfrac{x+y+z}{3}$

(Các bạn cũng tự chứng minh bài toán này !)

Ở đây các bạn cần lưu ý điều kiện của x, y, z để vận dụng cho đúng vào tam giác. Tương tự con đường đã đi từ bài toán xuất phát 1, các bạn sẽ được : Trong mọi tam giác ABC thì :

$$\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} + \cos\frac{C}{2} \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad (8)$$

$$\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{8} \quad (9)$$

Trong mọi tam giác nhọn ABC thì :

$$\cos A + \cos B + \cos C \leqslant \sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} \quad (10)$$

$\sqrt{\cos A} + \sqrt{\cos B} + \sqrt{\cos C} \leqslant$

$$\leqslant \sqrt{\sin\frac{A}{2}} + \sqrt{\sin\frac{B}{2}} + \sqrt{\sin\frac{C}{2}} \quad (11)$$

(Bất đẳng thức (10) còn đúng với mọi tam giác !)

Bài toán xuất phát 3 : Nếu $x\,y, x \in [0;\pi/2]$ thì :

3a, $\dfrac{\mathrm{tg}x + \mathrm{tg}y}{2} \geqslant \mathrm{tg}\dfrac{x+y}{2}$

3b, $\dfrac{\mathrm{tg}x + \mathrm{tg}y + \mathrm{tg}z}{3} \geqslant \mathrm{tg}\dfrac{x+y+z}{3}$

Chứng minh :

$$\frac{\mathrm{tg}x + \mathrm{tg}y}{2} = \frac{\sin(x+y)}{2\cos x\cos y} = \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)+\cos(x-y)} \geqslant \frac{\sin(x+y)}{1+\cos(x+y)} = \mathrm{tg}\frac{x+y}{2}$$

Từ 3a, chuyển sang 3b, tương tự như từ 1a, sang 1b. Từ đó ta có : trong mọi tam giác nhọn ABC thì :

$$tgA + tgB + tgC \geqslant 3\sqrt{3} \quad (12)$$

$$tgA+tgB+tgC \geqslant cotg\frac{A}{2} + cotg\frac{B}{2} + cotg\frac{C}{2} \quad (13)$$

$$\sqrt{tgA} + \sqrt{tgB} + \sqrt{tgC} \geqslant \sqrt{cotg\frac{A}{2}} + \sqrt{cotg\frac{B}{2}} + \sqrt{cotg\frac{C}{2}} \quad (14)$$

(Gợi ý chứng minh (14) : chứng minh $tgA\,.\,tgB \geqslant cotg^2\frac{C}{2} \Rightarrow tgA + tgB \geqslant 2\sqrt{tgAtgB} \geqslant 2cotg\frac{C}{2}$ suy ra $(\sqrt{tgA} + \sqrt{tgB})^2 \geqslant 4cotg\frac{C}{2} \Rightarrow \sqrt{tgA}+tgB \geqslant 2\sqrt{cotg\frac{C}{2}}$).

Từ 3b, ta có : trong mọi tam giác thì :

$$tg\frac{A}{2} + tg\frac{B}{2} + tg\frac{C}{2} \geqslant \sqrt{3} \quad (15)$$

Bây giờ các bạn hãy để ý : trong mọi tam giác thì $cosA + cosB > 0$ nên $sinC(cosA + cosB) \leqslant cosA + cosB$, sẽ có 2 bất đẳng thức tương tự và cộng từng vế của 3 bất đẳng thức ta có :

$$sin(A+B) + sin(B+C) + sin(C+A) \leqslant 2(cosA + cosB + cosC)$$

Ba bất đẳng thức không thể đồng thời trở thành đẳng thức nên :

$$sinA + sinB + sinC < 2(cosA + cosB + cosC)$$

suy ra : $\dfrac{sinA+sinB+sinC}{cosA+cosB+cosC} < 2$ (Đề 116.II) (16)

Hoàn toàn tương tự : $cos\frac{C}{2}\left(sin\frac{A}{2} + sin\frac{B}{2}\right) \leqslant sin\frac{A}{2} + sin\frac{B}{2}$ và có 2 bất đẳng thức như thế, cộng từng vế của chúng, ta có : trong mọi tam giác ABC thì

$$\frac{cos\frac{A}{2} + cos\frac{B}{2} + cos\frac{C}{2}}{sin\frac{A}{2} + sin\frac{B}{2} + sin\frac{C}{2}} < 2$$ (Đại học Tổng hợp Hà Nội 1993) (17)

Với cách suy nghĩ như ở trên thì các bạn có thể chứng minh :

* Nếu A, B, C là các góc của tam giác thì

$$cos\frac{A-B}{2} + cos\frac{B-C}{2} + cos\frac{C-A}{2} \leqslant$$
$$\leqslant cos\frac{1}{3}\left(A-\frac{\pi}{3}\right) = cos\frac{1}{3}\left(B-\frac{\pi}{3}\right) + cos\frac{1}{3}\left(C-\frac{\pi}{3}\right) \quad (18)$$

(Đề Đại học Quốc gia năm 1995)

Các bạn có thể thấy lời giải trình bày trong tạp chí số 227 (5 – 1996) lí quá phức tạp, xin giải gọn hơn như sau : Nếu để ý $-\frac{\pi}{4} < \frac{A-C}{4} < \frac{\pi}{4}$;

$0 \leqslant \frac{1}{3}\left|B-\frac{\pi}{3}\right| \leqslant \frac{3}{4}\left|B-\frac{\pi}{3}\right| < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < cos\frac{A-C}{4} \leqslant 1$;

$cos\frac{1}{3}\left|B-\frac{\pi}{3}\right| \geqslant cos\frac{3}{4}\left|B-\frac{\pi}{3}\right| > 0$ do đó ta có :

$$\frac{1}{2}\left(cos\frac{A-B}{2} + cos\frac{B-C}{2}\right) =$$
$$= cos\frac{A-C}{4}\,cos\frac{A+C-2B}{4} =$$
$$= cos\frac{A-C}{4}\,cos\frac{3}{4}\left(\frac{\pi}{3}-B\right) =$$
$$= cos\frac{A-C}{4}\;\frac{3}{4}\left|B-\frac{\pi}{3}\right|$$
$$\leqslant cos\frac{1}{3}\left|B-\frac{\pi}{3}\right| = cos\frac{1}{3}\left(B-\frac{\pi}{3}\right)$$

Tương tự cũng có 2 bất đẳng thức nữa và cộng từng vế của 3 bất đẳng thức sẽ có điều phải chứng minh. Đẳng thức chỉ xảy ra khi và chỉ $A = B = C$. Có thể thấy kết quả tổng quát hơn : Nếu A, B, C là các gốc của một tam giác và k là số thuộc $[0\,;3/4]$ thì

$$cos\frac{A-B}{2} + cos\frac{B-C}{2} + cos\frac{C-A}{2} \leqslant$$
$$\leqslant cosk\left(A-\frac{\pi}{3}\right) + cosk\left(B-\frac{\pi}{3}\right) + cosk\left(C-\frac{\pi}{3}\right) \quad (19)$$

* Nếu bằng con đường như trên, các bạn có thể sáng tạo ra nhiều bất đẳng thức nữa. Chẳng hạn xét : $cos\frac{A}{2} + cos\frac{B}{2} = 2cos\frac{A+B}{4}\,cos\frac{A-B}{4}$ và để ý $0 < \frac{A+B}{4} < \frac{\pi}{4}$ thì $cos\frac{A+B}{4} > \frac{\sqrt{2}}{2}$, đồng thời $0 \leqslant \left|\frac{A-B}{4}\right| \leqslant k\,.\,|A-B| < \frac{\pi}{2}$ với k thuộc $[1/4\,;1/2]$ do đó $cos\left|\frac{A-B}{4}\right| \geqslant cosk|A-B|$.

Từ những nhận xét trên suy ra : $cos\frac{A}{2} + cos\frac{B}{2} > \sqrt{2}cosk(A-B)$. Với 2 bất đẳng thức tương tự nữa và cộng từng vế của 3 bất đẳng thức ta có :

*Nếu A, B, C là các gốc của một tam giác và k là số thuộc $[1/4\,;1/2]$ thì

$$\sqrt{2}\left(cos\frac{A}{2} + cos\frac{B}{2} + cos\frac{C}{2}\right) >$$
$$> cosk(A-B) + cosk(B-C) + cosk(C-A) \quad (20)$$

Điều khác của (20) với các bất đẳng thức ở trên là dấu đẳng thức không thể xảy ra !

Mong các bạn có thể sáng tạo thêm nhiều bất đẳng thức nữa trong tam giác, nhưng trước mắt chúc các bạn không lúng túng trong kì thi .

Cuối cùng gửi các bạn 2 bài tập "nhẹ nhàng" thử sức.

Bài tập 1 : Chứng minh rằng : nếu A, B, C là các gốc không tù của một tam giác thì

$$sinA + sinB + sinC > cosA + cosB + cosC \quad (21)$$

Bài tập 2 : Chứng minh rằng nếu tam giác ABC nhọn thì

$$(cosA+cosB+cosC)^2 \leqslant sin^2A+sin^2B+sin^2C \quad (22)$$

Trong mọi tam giác ABC thì bất đẳng thức sau có đúng không ?

$$\left(sin\frac{A}{2} + sin\frac{B}{2} + sin\frac{C}{2}\right)^2 \leqslant$$
$$\leqslant cos^2\frac{A}{2} + cos^2\frac{B}{2} + cos^2\frac{C}{2}$$

Kỉ niệm 5 năm ngày mất GS Lê Văn Thiêm.

GIÁO SƯ LÊ VĂN THIÊM, NHÀ TOÁN HỌC CÓ CÔNG ĐẦU TRONG VIỆC XÂY DỰNG VÀ PHÁT TRIỂN NỀN TOÁN HỌC NƯỚC TA.

Giáo sư Lê Văn Thiêm sinh ngày 29 tháng 3 năm 1918 tại xã Đức Trung, huyện Đức Thọ, tỉnh Hà Tĩnh. Năm 1929, khi ông chưa tròn 11 tuổi thì cha, mẹ lần lượt qua đời ông phải theo người anh cả vào Quy Nhơn ăn học. Tại đây ông đã sớm biểu hiện là một học sinh thông minh, xuất chúng. Sau khi đỗ bằng Cao đẳng tiểu học (tương đương với tốt nghiệp Trung học Cơ sở bây giờ) ba tháng ông đã thi đậu Tú tài phần thứ nhất (người bình thường phải học trong hai năm) và một năm sau (1937) ông lại đỗ Tú tài (toán học) toàn phần. Năm đó Đại học tổng hợp ở Hà Nội chưa có ngành toán, ông phải vào học lớp Toán – Hóa – Sinh để chuẩn bị vào học ngành Y. Năm 1939 ông đỗ thứ nhì của lớp này và được cấp học bổng du học tại Pháp, theo học ngành Toán. Ở Pháp ông được chọn vào học Trường Sư phạm cao cấp, một trong vài trường đào tạo nhân tài nổi tiếng nhất của nước Pháp. Do thành tích học tập xuất sắc tháng 3 năm 1943 ông lại được nhận học bổng sang nghiên cứu toán học tại Đức. Ở đây ông đã bảo vệ bằng Tiến sĩ A, đang chuẩn bị cho bằng Tiến sĩ B thì giáo sư hướng dẫn qua đời, ông phải quay về Pháp (1945) và năm 1948 ông đã bảo vệ thành công luận án Tiến sĩ Quốc gia Pháp, và rồi ông được mời làm Giáo sư Toán của trường Đại học Zurich, Thụy Sĩ trong các năm 1948–1949.

Cuối năm 1949, trong lúc tài năng toán học đang nở rộ ông đã tự nguyện rời bỏ con đường công danh đầy triển vọng ở phương Tây, trở về nước tham gia cuộc kháng chiến giành độc lập cho Tổ quốc và xây dựng nước nhà. Khi trở về Việt Nam ông công tác tại sở Giáo dục Nam Bộ. Tháng 5 năm 1950 ông lên đường ra Việt Bắc để thành lập Trường Khoa học cơ bản và là Hiệu trưởng của hai trường Khoa học cơ bản và Sư phạm cao cấp.

Hòa bình lập lại, 1954, ông tham gia tiếp quản các trường đại học ở Hà Nội, được bổ nhiệm làm Giám đốc trường Đại học Sư phạm Khoa học Hà Nội. Năm 1957 ông giữ chức vụ Hiệu phó trường Đại học Tổng hợp Hà Nội kiêm chủ nhiệm Khoa Toán – Lí. Năm 1970 ông là Phó Viện trưởng và từ năm 1976 là Viện trưởng Viện Toán học thuộc Viện Khoa học Việt Nam. Ngoài ra ông còn giữ các chức vụ quan trọng khác như : Ủy viên Ủy ban Khoa học Nhà nước, Chủ tịch Ban chấp hành Trung ương Hội Toán học Việt Nam, Đại diện toàn quyền của Việt Nam tại Viện Liên hợp nghiên cứu nguyên tử Dupna, Chủ nhiệm và Tổng biên tập đầu tiên các tạp chí Toán học, Acta Mathematica Vietnamica v.v...

Giáo sư Lê Văn Thiêm đã có nhiều đóng góp trong việc ứng dụng toán học phục vụ đất nước. Ông đã cùng các học trò của mình ở trường Đại học Tổng hợp Hà Nội và Viện Toán học nghiên cứu bài toán nổ mìn nhằm phục vụ giao thông thời chiến, phá núi, làm kho xăng dầu, lấy đá xây dựng khu Gang thép Thái Nguyên và tham gia biên soạn tài liệu nổ mìn làm đường phục vụ quân đội. Ông đã cùng các cộng sự của mình nghiên cứu xây dựng mô hình toán học và các bộ chương trình giải các bài toán dòng chảy nước mặt, nước ngầm phục vụ cho việc thiết kế và xây dựng công trình thủy điện Hòa Bình và quy hoạch đồng bằng sông Cửu Long v.v...

Công lao lớn nhất của Giáo sư Lê Văn Thiêm là trong việc xây dựng và phát triển nền toán học của nước ta. Từ chỗ năm 1948 ông là người Việt Nam đầu tiên có học vị tiến sĩ toán học. Năm 1950 mới bắt tay vào mở lớp dựng trường dạy toán học cao cấp. Vậy mà cho đến nay chúng ta đã có cả một đội ngũ các nhà toán học trẻ, tài năng cho đất nước. Là người thầy ông đã có ảnh hưởng to lớn về nhiều mặt đối với sinh viên, lôi cuốn cả một lớp thanh niên trí thức đi vào con đường khoa học. Nhiều học trò của ông nay đã trưởng thành, trở thành những cán bộ nghiên cứu, giảng dạy chủ chốt của các viện nghiên cứu, các trường đại học.

Ông rất chú ý đến việc phát hiện, đào tạo và bồi dưỡng những năng khiếu toán học trẻ. Ngay từ năm 1964 ông đã tham gia vào việc ra đề thi chọn học sinh giỏi cấp ba (tương đương các lớp Trung học phổ thông bây giờ). Năm 1965, thực hiện quyết định của Thủ tướng Phạm Văn Đồng, mở lớp "toán đặc biệt" (sau này gọi là lớp phổ thông chuyên toán) ở trường Đại học Tổng hợp và ông cũng thường đến thăm và nói chuyện toán học với các lớp này. Ông cũng là một trong những người sáng lập ra tờ báo "Toán học và Tuổi trẻ". Đối với các năng khiếu toán học trẻ ông có một tình cảm ưu ái đặc biệt.

Giáo sư Lê Văn Thiêm mất ngày 3 tháng 7 năm 1991 đến nay tính đã 5 năm. Ấy vậy mà trong lòng những người yêu toán chúng ta vẫn cảm thấy hụt hẫng, trống vắng và vấn vương niềm thương tiếc khôn nguôi. Từ sau ngày vĩnh biệt ông người ta càng thấy rõ hơn công lao to lớn của ông đối với nền toán học Việt Nam.

NGÔ ĐẠT TỨ

THI CHỌN ĐỘI TUYỂN HỌC SINH VIỆT NAM DỰ THI TOÁN QUỐC TẾ 1996

Trong hai ngày 17 và 18-5-1996 Bộ Giáo dục và Đào tạo đã tổ chức cuộc thi chọn học sinh vào đội Toán quốc gia để tham dự kì thi Toán quốc tế lần thứ 37 tổ chức tại Bom bay – Ấn Độ từ 5-7 đến 17-7-1996.

35 học sinh đạt giải trong kì thi chọn học sinh giỏi Toán quốc gia (3-1996) từ 23 điểm trở lên ở bảng A và từ 28 điểm trở lên ở bảng B đã về dự thi tuyển. Mỗi ngày thi, thí sinh phải làm 3 bài toán trong 240 phút. (Số điểm tối đa là 40)

Kết quả là 6 học sinh đạt số điểm cao nhất dưới đây được vào đội tuyển Toán quốc gia 1996 :

1 – Ngô Đắc Tuấn, HS lớp 12 Trường ĐH Khoa học tự nhiên (ĐHQG Hà Nội) được 27 điểm

2 – Phạm Lê Hùng, HS lớp 11 Trường ĐH KHTN (ĐHQG Hà Nội) được 21 điểm

3 – Ngô Đức Duy, HS lớp 12 Trường PTTH Trần Phú – Hải Phòng, được 19,5 điểm

4 – Trịnh Thế Huynh, HS lớp 12 Trường PTTH Lê Hồng Phong – Nam Định, Nam Hà, được 18 điểm

5 – Nguyễn Thái Hà, HS lớp 12 Trường ĐH KHTN (ĐHQG Hà Nội), được 17,5 điểm

6 – Đỗ Quốc Anh, HS lớp 11 Trường ĐH KHTN (ĐHQG Hà Nội), được 16,5 điểm

Dưới đây là đề thi chọn đội tuyển Toán quốc gia 1996 :

Bài 1 : *Trong mặt phẳng cho 3n điểm ($n > 1$) mà không có 3 điểm nào thẳng hàng và khoảng cách giữa hai điểm bất kì không vượt quá 1.*

Chứng minh rằng có thể dựng được n tam giác đôi một rời nhau và thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau :

1) Mỗi điểm trong 3n điểm đã cho là đỉnh của đúng một tam giác.

2) Tổng diện tích của n tam giác nhỏ hơn $\frac{1}{2}$.

(Hai tam giác được gọi là rời nhau nếu chúng không có điểm nào chung nằm bên trong cũng như nằm trên cạnh tam giác).

Bài 2 : *Với mỗi số nguyên dương n gọi f(n) là số nguyên lớn nhất để số $\sum_{i=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} C_n^{2i+1} \cdot 3^i$ chia hết cho $2^{f(n)}$.*

Tìm tất cả các số nguyên dương n mà $f(n) = 1996$.

Bài 3 : *Xét các số thực a, b, c. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :*

$$f(a, b, c) = (a+b)^4 + (b+c)^4 + (c+a)^4 - \frac{4}{7}(a^4 + b^4 + c^4).$$

Bài 4 : *Cho ba điểm A, B, C không thẳng hàng. Với mỗi điểm M của mặt phẳng (ABC) gọi M_1 là điểm đối xứng của M qua đường thẳng AB, gọi M_2 là điểm đối xứng của M_1 qua đường thẳng BC và gọi M' là điểm đối xứng của M_2 qua đường thẳng CA. Hãy xác định tất cả các điểm M của mặt phẳng (ABC) mà khoảng cách MM' bé nhất. Gọi khoảng cách bé nhất đó là d.*

Chứng minh rằng : với mỗi điểm M của mặt phẳng (ABC) khi ta thực hiện liên tiếp ba phép đối xứng qua ba đường thẳng chứa ba cạnh của tam giác ABC theo thứ tự khác (so với thứ tự trên) để được điểm M'' thì khoảng cách bé nhất của MM'' cũng bằng d.

Bài 5 : *Người ta muốn mời một số em học sinh tới dự một buổi gặp mặt, mà trong số đó : mỗi em chưa quen với ít nhất 56 em khác, và với mỗi cặp hai em chưa quen nhau thì đều có ít nhất một em quen với cả hai em đó.*

Hỏi số học sinh được mời tham dự buổi gặp mặt nói trên có thể là 65 em hay không ?

Bài 6 : *Hãy tìm tất cả các số thực a sao cho dãy số $\{x_n\}$, $n = 0, 1, 2 \ldots$, xác định bởi :*

$$x_o = \sqrt{1996},$$

$$x_{n+1} = \frac{a}{1 + x_n^2} \text{ với } n = 0, 1, 2, \ldots$$

có giới hạn hữu hạn khi $n \to \infty$.

NGUYỄN VIỆT HẢI

Giải đáp bài

ĐIỀN SỐ VÀO HÌNH VUÔNG

Có rất nhiều cách điền các số từ 1 đến 16 vào hình vuông có 16 ô, thỏa mãn yêu cầu của bài ra. Có 13 bạn gửi lời giải đến thì có 12 bạn mỗi bạn gửi một lời giải, tất cả đều đúng và khác nhau. Riêng bạn Hoàng Nam, 10, chuyên Lí, Đào Duy Từ, Đồng Hới, Quảng Bình có gửi đến 16 cách khác nhau, trong đó có 15 cách đúng. Chúng tôi không đăng hết được các lời giải của các bạn, mà chỉ nêu ra đây 4 lời giải để các bạn tham khảo.

1	14	15	4
8	11	10	5
12	7	6	9
13	2	3	16

3	16	10	5
6	9	15	4
13	2	8	11
12	7	1	14

4	15	6	9
5	10	3	6
11	8	13	2
14	1	12	7

15	4	1	14
10	5	8	11
6	9	12	7
3	16	13	2

Ở 4 hình vuông trên tổng các số ở mỗi hàng ngang, hàng dọc và mỗi đường chéo đều bằng 34.

BÌNH PHƯƠNG

KẾT QUẢ TRẬN ĐẤU ?

Kết thúc giai đoạn 1 giải bóng đá EURO'96 (nghĩa là sau khi mỗi đội đều đã đá với mỗi đội khác cùng bảng đúng 1 trận), người ta có nhận xét về kết quả ở bảng X (có 4 đội tham gia) như sau

1) Tổng số điểm của cả 4 đội trong bảng X là 16 (Sau mỗi trận, đội thắng được 3 điểm, đội hòa được 1 điểm, đội thua không được điểm nào)

2) Đội nhất bảng là đội duy nhất được 6 điểm

Hỏi kết quả trận đấu giữa đội nhì bảng và đội cuối bảng ?

Biết rằng ngôi thứ của hai đội có số điểm bằng nhau được quyết định theo hiệu số bàn thắng trừ số bàn thua. Nếu hiệu số này cũng bằng nhau thì theo số bàn thắng và nếu vẫn không xong thì bốc thăm

NGUYỄN HUY DOAN

ISSN : 0866 – 8035
Chỉ số : 12884
Mã số : 8BT31M6

Sắp chữ tại TTVT Nhà xuất bản giáo dục
In tại nhà máy in Diên Hồng, 57 Giảng Võ
In xong và nộp lưu chiểu tháng 7/1996

Giá 2.000đ
Hai nghìn đồng