

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ★ HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

6 (228)

1996
NĂM THỨ 33

TẠP CHÍ RA NGÀY 15 HÀNG THÁNG



Thầy và trò trường THPT Quốc học Huế.

**MỘT CHÚT SÁNG
TẠO TỪ MỘT BÀI
TOÁN ①. KẾT QUẢ
KÌ THI HỌC SINH
GIỎI THPT 1995 -
1996 ⑩. HỌ
ĐƯỜNG CONG
TIẾP XÚC VỚI
MỘT ĐƯỜNG CỐ
ĐỊNH ⑫. VỀ MỘT
PHƯƠNG PHÁP
CHỨNG MINH
ĐẲNG THỨC VEC
TƠ ⑮. ĐỂ THI
TUYỂN SINH VÀO
CÁC LỚP CHUYÊN
ĐẠI HỌC TỔNG
HỢP (Bìa 3). ĐIỂM
CỦA MỖI NGƯỜI (Bìa 4).
VIẾT SỐ TRONG
BÀN CỜ (Bìa 4).**

TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ MATHEMATICS AND YOUTH

MỤC LỤC

	Trang
● <i>Dành cho các bạn Trung học Cơ sở</i> For Lower Secondary School Level Friends. <i>Nguyễn Đức Tấn</i> – Một chút sáng tạo từ một bài toán.	1
● <i>Giải bài kì trước.</i> Solution of Problems in Previous Issue các bài của số 224	2
● <i>Đề ra kì này</i> Problems for this issue T1/228, ..., T10/228, L1/228, L2/228	8
● <i>Kết quả kì thi học sinh giỏi THPT 1995 – 1996</i>	10
● <i>Dành cho các bạn chuẩn bị thi vào Đại học.</i> For College and University Entrance Exam Preparers. <i>Trần Phương</i> – Họ đường cong tiếp xúc với một đường cố định.	12
● <i>Tìm hiểu sâu thêm toán học phổ thông.</i> Helping Young Friends Gain Better Understanding in Secondary School Maths <i>Nguyễn Việt Hải</i> – Về một phương pháp chứng minh đẳng thức vectơ.	15
● <i>Đề thi tuyển sinh vào các lớp chuyên Đại học tổng hợp</i>	
● <i>Giải trí toán học</i> Fun with Mathematics. <i>Bình phương</i> – Điểm của mỗi người <i>Ngân Hồ</i> – Viết số trong bàn cờ.	Bìa 4

Tổng biên tập :
NGUYỄN CẢNH TOÀN
Phó tổng biên tập :
NGÔ ĐẠT TỬ
HOÀNG CHÚNG

HỘI ĐỒNG BIÊN TẬP :

Nguyễn Cảnh Toàn, Hoàng
Chúng, Ngô Đạt Tử, Lê Khắc
Bảo, Nguyễn Huy Doan,
Nguyễn Việt Hải, Đinh Quang
Hào, Nguyễn Xuân Huy, Phan
Huy Khải, Vũ Thanh Khiết, Lê
Hải Khôi, Nguyễn Văn Mậu,
Hoàng Lê Minh, Nguyễn Khắc
Minh, Trần Văn Nhung,
Nguyễn Đăng Phát, Phan
Thanh Quang, Tạ Hồng
Quảng, Đặng Hùng Thắng, Vũ
Dương Thụy, Trần Thành
Trai, Lê Bá Khánh Trình, Ngô
Việt Trung, Đặng Quan Viễn.

Trụ sở tòa soạn :

45B Hàng Chuối, Hà Nội
231 Nguyễn Văn Cừ, TP Hồ Chí Minh

ĐT: 8213786
ĐT: 8356111

Biên tập và trị sự : **VŨ KIM THỦY**
Trình bày : **QUỐC HỒNG**

Chúng ta bắt đầu từ bài toán rất quen thuộc sau đây :

Bài toán. Chứng minh rằng với mọi số nguyên n thì $n^2 + n + 1$ không chia hết cho 9

Chắc rằng nhiều bạn đã biết các lời giải sau :

Cách 1 :

• Xét $n = 3k$ ($k \in \mathbb{Z}$) thì $n^2 + n + 1 = 3k(k+1) + 1 \not\equiv 3$ nên $n^2 + n + 1 \not\equiv 9$.

Xét $n = 3k + 1$ ($k \in \mathbb{Z}$) thì $n^2 + n + 1 = 9k(k+1) + 3 \not\equiv 9$.

Xét $n = 3k + 2$ ($k \in \mathbb{Z}$) thì $n^2 + n + 1 = 3(3k^2 + 5k + 2) + 1 \not\equiv 3$ nên $n^2 + n + 1 \not\equiv 9$

Vậy $n^2 + n + 1 \not\equiv 9$ với mọi $n \in \mathbb{Z}$

Cách 2 :

Có $n^2 + n + 1 = (n+2)(n-1) + 3$

$(n+2) - (n-1) = 3$ nên $n+2$; $n-1$ đồng thời hoặc không đồng thời chia hết cho 3

$n+2 \equiv 3$; $n-1 \equiv 3$ suy ra $(n+2)(n-1) \equiv 9$ suy ra $(n+2)(n-1) + 3 \equiv 9$

$n+2 \not\equiv 3$; $n-1 \not\equiv 3$ suy ra $(n+2)(n-1) \not\equiv 3$ suy ra $(n+2)(n-1) + 3 \not\equiv 9$

$\Rightarrow (n+2)(n-1) + 3 \not\equiv 9$ Vậy $n^2 + n + 1 \not\equiv 9$ với mọi $n \in \mathbb{Z}$

Cách 3 : (Phản chứng)

Giả sử $n^2 + n + 1 \equiv 9$. Đặt $n^2 + n + 1 = 9m$ ($m \in \mathbb{Z}$) $n^2 + n + 1 - 9m = 0$ (*)

$\Delta = 36m - 3 = 3(12m - 1) \equiv 3$ nhưng $3(12m - 1) \not\equiv 9$

Δ là số không chính phương nên (*) không có nghiệm nguyên. Vô lí!

Vậy $n^2 + n + 1 \not\equiv 9$ với mọi $n \in \mathbb{Z}$

Cách 4 :

$4(n^2 + n + 1) = (2n+1)^2 + 3$

• $2n+1 \equiv 3 \Rightarrow (2n+1)^2 \equiv 9$ do đó $(2n+1)^2 + 3 \equiv 9$

• $2n+1 \not\equiv 3 \Rightarrow (2n+1)^2 \not\equiv 9$ do đó $(2n+1)^2 + 3 \not\equiv 9 \Rightarrow (2n+1)^2 + 3 \not\equiv 9$

Vậy $4(n^2 + n + 1) \not\equiv 9 \Rightarrow n^2 + n + 1 \not\equiv 9$ với mọi $n \in \mathbb{Z}$

Với niềm đam mê học toán chắc các bạn có thể tìm thấy nhiều bài toán "họ hàng" với bài toán trên.

Chẳng hạn :

Bài 1 Chứng minh rằng với mọi $n \in \mathbb{Z}$

a) $n^2 + 11n + 39 \not\equiv 49$

b) $n^2 + 3n + 5 \not\equiv 121$

c) $n^2 + 5n + 16 \not\equiv 169$.

Bài 2 Chứng minh rằng các phương trình sau không có nghiệm nguyên

a) $x^2 + 3x + 4 = 49y$

b) $x^2 + 25y^2 - 2x + 6 = 0$

Bài 3 Tìm $x \in \mathbb{Z}$ để $25x + 46$ là tích của hai số nguyên liên tiếp (Bài T1/201 Đề ra kì này Tạp chí THVTT 3(201) 1994)

Cả bốn cách giải trên đều có thể giúp ta giải được các bài toán này và nếu ta "mò mẫm" sẽ tìm thêm thật nhiều bài toán hay nữa.

Nhưng... với bài toán sau :

Bài 4 Chứng minh rằng $9n^3 + 9n^2 + 3n - 16$ không chia hết cho 343 với mọi $n \in \mathbb{Z}$

Với các cách giải 1 ; 2 ; 3 có lẽ ta phải bó tay, khai thác cách giải 4 (chú ý rằng $343 = 7^3$) ta đến với lời giải thật "đễ thương" sau : $3(9n^3 + 9n^2 + 3n - 16) = (3n+1)^3 - 49$

• Nếu $3n+1 \equiv 7$ thì $(3n+1)^3 \equiv 7^3$ mà $49 \not\equiv 7^3$ nên $(3n+1)^3 - 49 \not\equiv 7^3$
 $\Rightarrow 9n^3 + 9n^2 + 3n - 16 \not\equiv 343$ • Nếu $3n+1 \not\equiv 7$ thì $(3n+1)^3 - 49 \not\equiv 7$

$\Rightarrow (3n+1)^3 - 49 \not\equiv 7^3 \Rightarrow 9n^3 + 9n^2 + 3n - 16 \not\equiv 343$

Vậy $9n^3 + 9n^2 + 3n - 16 \not\equiv 343$ với mọi $n \in \mathbb{Z}$

Suy nghĩ sâu hơn một chút về cách giải 4 sẽ giúp ta đến với bài toán tổng quát

Bài toán tổng quát. Chứng minh rằng $A(n)$ không chia hết cho p^k với mọi n nguyên, p nguyên tố ; k nguyên dương.

Cách giải là tìm cho được đẳng thức

$$a.A(n) = [B(n)]^k + p^m$$

Với $B(n)$ là đa thức biến n , $a \in \mathbb{Z}$; m nguyên dương ; $k > m$ Đến đây bài toán xem như đã giải quyết xong.

Tác giả bài báo này, muốn nhấn đến các bạn rằng nhiều điều có vẻ thật bình thường, thật quen thuộc, nhưng ở đó có thể còn nhiều điều hấp dẫn đang đón chờ bạn và... sẵn sàng đưa các bạn đến nơi mà các bạn đang cần phải đến.



Bài T1/224. Tìm các chữ số khác không a, b, c , thỏa mãn $\overline{abb}c = \overline{ab} \times \overline{ac} \times 7$.

Lời giải: Cách 1: Ta có $\overline{abb}c = \overline{ab} \cdot \overline{ac} \cdot 7$ (1)

$$(1) \Leftrightarrow 100\overline{ab} + \overline{bc} = 7(\overline{ab})(\overline{ac})$$

$$\Leftrightarrow \overline{ab}(7\overline{ac} - 100) = \overline{bc}$$

$$\Leftrightarrow 7\overline{ac} - 100 = \frac{\overline{bc}}{\overline{ab}}$$

$$\text{Vì } 0 < \frac{\overline{bc}}{\overline{ab}} < 10 \Leftrightarrow 0 < 7\overline{ac} - 100 < 10$$

$$\Rightarrow 14 < \frac{100}{7} < \overline{ac} < \frac{110}{7} < 16$$

Vậy $\overline{ac} = 15$. Thay vào (1) ta được

$$\overline{1bb5} = \overline{1b} \times 15 \times 7 \Leftrightarrow 1005 + 110b = 1050 + 105b$$

$$\Leftrightarrow 5b = 45 \Leftrightarrow b = 9.$$

$$\text{Thử lại } 1995 = 19.15.7$$

$$\text{Vậy } a = 1, b = 9, c = 5.$$

Cách 2 (của Vũ Hương Giang, 6A, Phan Chu Trinh, Hà Nội).

$$\begin{aligned} (1) &\Rightarrow \overline{abb}c : \overline{ab} \\ &\Rightarrow \overline{abb}c : \overline{ab} = 10k \quad (0 < k \leq 9) \\ &\Rightarrow 10k = \overline{ac} \cdot 7 \\ &\Rightarrow 10k : 7 \Rightarrow 3k : 7 \Rightarrow k = 5 \\ &\Rightarrow \overline{ac} = 15 \end{aligned}$$

Thay vào (1) và suy ra $b = 9$ theo cách 1.

Nhận xét: Có rất nhiều bạn gửi lời giải đúng khác nhau. Chỉ có bạn Trần Thị Mỹ An, 9A, Lương Văn Chánh, TX Tuy Hòa, Phú Yên có nhận xét rằng bài T1/224 chính là bài T1/213 đã ra trên số báo 213 (3-1995) và đã đăng lời giải trên số báo 217 (7-1995) (cách 1). Chắc là nhiều bạn không biết điều này hoặc biết mà không nói ra.

TỔ NGUYỄN

Bài T2/224. Cho $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ và $m, n \in \mathbb{N}^*$ mà m và n không phải là số chính phương. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để $a + b\sqrt{m} = c + d\sqrt{n}$ là $a = c$ và $b\sqrt{m} = d\sqrt{n}$.

Lời giải: Trước hết ta chứng minh: Nếu $n \in \mathbb{N}^*$ thì $\sqrt{n}$ chỉ có thể là số nguyên hoặc số vô tỉ (1).

$$\text{Thật vậy giả sử } \sqrt{n} = \frac{r}{s}, (r, s) = 1, s > 1.$$

Gọi p là một ước nguyên tố của s . Ta có $s^2n = r^2 \rightarrow r^2 : p^2 \rightarrow r : p$. Trái giả thiết $(r, s) = 1$.

Từ giả thiết $a + b\sqrt{m} = c + d\sqrt{n}$ (2) suy ra $(a - c)^2 = d^2n + b^2m - 2bd\sqrt{mn}$ (3). Ta phân biệt hai trường hợp:

a) Nếu $bd = 0$ chẳng hạn $b = 0$. Từ (2) nếu $d \neq 0 \rightarrow \sqrt{n} = \frac{a - c}{d} \in \mathbb{Q}$ mâu thuẫn với (1). Vậy $b = d = 0 \rightarrow a = c$.

b) Nếu $bd \neq 0$. Từ (3) $\rightarrow \sqrt{mn} \in \mathbb{Q}$. Từ (2) $\rightarrow a\sqrt{n} + b\sqrt{mn} = dn + c\sqrt{n} \rightarrow (a - c)\sqrt{n} = dn - b\sqrt{mn} \in \mathbb{Q}$. Nếu $a \neq c \rightarrow \sqrt{n} \in \mathbb{Q}$ trái giả thiết. Vậy $a = c \rightarrow b\sqrt{m} = d\sqrt{n}$.

Điều kiện đủ là hiển nhiên.

Nhận xét: 1) Điểm mấu chốt của bài toán là khẳng định (1). Hầu hết các bạn đã không chứng minh (1) mà coi như một sự kiện hiển nhiên (xem thêm bài $\sqrt{x} - 3 = \frac{1}{5}$ trên THPT 4/226 ở đó các tác giả có nêu một ý kiến xung quanh khẳng định (1)).

2) Có một số bạn đã sai lầm khi cho rằng hiệu của hai số vô tỉ không thể là số nguyên.

3) Có thể chứng minh dễ dàng rằng $\sqrt[n]{n}$ chỉ có thể là số vô tỉ hoặc số nguyên và tổng quát hơn, nghiệm của phương trình

$$x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \dots + a_1x - n = 0 \quad (a_i \in \mathbb{Z})$$

chỉ có thể là số vô tỉ hoặc số nguyên.

4) Các bạn có lời giải tốt: Nguyễn Minh Hằng (9, Hải Dương, Hải Hưng), Nguyễn Thế Vinh (9, Đồng Nai), Lê Anh Thơ (9, Thanh Hóa), Phạm Quang Vinh (9, Hà Nội), Nguyễn Tuấn Anh (9, Đắk Lắk), Nguyễn Nguyệt Minh (9, Đắk Lắk), Nguyễn Trần Mạnh Quân (9, Thừa Thiên Huế), Trần Nguyễn Thọ (8, Hà Tĩnh), Nguyễn Ngọc Minh (9, Thái Bình), Nguyễn Hải Đăng (9, Quảng Trị), Cao Thị Ly (9, Thái Bình), Nguyễn Trọng Kiên (8, Nam Hà).

DẶNG HÙNG THẮNG

Bài T3/224. Giải phương trình nghiệm nguyên:

$$x^6 + 8x^3 + 11x^2 + 28x + 12 + 3y^2 = 0 \quad (*)$$

Lời giải. Với $x \geq 0$ thì vế trái của (*) luôn luôn dương nên không có nghiệm.

Vậy $x < 0$. Ta có (*) $\Leftrightarrow (x^3 + 4)^2 + 11(x + 2)^2 - 16(x + 3) + 3y^2 = 0$ (**). Như vậy, với $x \leq -3$ thì vế trái của (**) luôn luôn dương, nên $x < -3$. Suy ra x là số nguyên thuộc khoảng $(-3; 0)$, nên chỉ có thể nhận hai giá trị là -1 và -2 , và phương trình có các nghiệm nguyên $(x; y)$ sau đây: $(-1; -2), (-1; 2), (-2; 0)$.

Nhận xét. Có 132 bài giải, trừ một vài bài nêu sót nghiệm, còn tất cả đều giải đúng. Các bạn sau đây có lời giải tốt: Phạm Thị Vân Giang (8A Chuyên Bạc Liêu - Minh Hải), Mai Xuân Trường (9T Chuyên Đông Anh - Hà Nội), Trịnh Hoài Ân (PTCS Lê Lợi Tx Hà Đông - Hà Tây), Đinh Cao Cường (8 Chuyên Ba Đồn Quảng Trạch - Quảng Bình), Nguyễn Ngọc

Minh (9A Lương Văn Chánh - Phú Yên), Đào Thế Vũ (8A₁ PTCS Giảng Võ II - Hà Nội), Nguyễn Đức Xuân Bình (9T PTNK Hà Tĩnh), Mai Hàn Giang (8T Chuyên Lê Khiết - Quảng Ngãi), Nguyễn Thái Sơn (9T NK Nga Sơn - Thanh Hóa), Trần Văn Nghĩa (9A Lương Văn Chánh - Phú Yên), Nguyễn Tuấn Anh (9 Toán Phan Chu Trinh, Buôn Mê Thuật - Đắk Lắk), Nguyễn Thế Vinh (9II THCS Trung Vương - Đồng Nai), Trần Khoa Văn (8A NK Quỳnh Lưu - Nghệ An), Nguyễn Chí Thành (8T₁ Nguyễn Bình Khiêm - Vĩnh Long), Võ Chí Thành (9 Toán Chuyên Lê Khiết - Quảng Ngãi), Hoàng Phương Đông (9A PTCS Cốc Lếu - Lào Cai), Hoàng Quốc Hoa (9A Chuyên Lương Văn Chánh - Phú Yên), Trương Quang Trung (8A Trung Học Chuyên Kontum), Phạm Thu Hương (9A₁ THCS Hồng Bàng - Hải Phòng), Lê Tâm (9 Toán THCS Chuyên Phú Thọ, Vĩnh Phú), Hoàng Trung Tuyến (11A PTTH Hà Trung - Thanh Hóa).

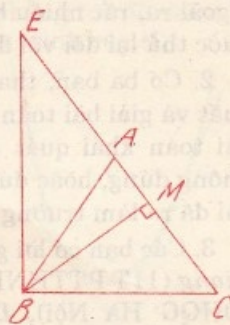
DẶNG VIỄN

Bài T4/224 :

Cho tam giác ABC cân tại A ($AB = AC$). Từ B kẻ $BM \perp AC$. Chứng minh rằng $\frac{AM}{MC} = 2 \left(\frac{AB}{BC} \right)^2 - 1$.

Lời giải

Bài toán chỉ đúng trong trường hợp góc A nhọn. Lấy E đối xứng với C qua A. Để thấy $\triangle BCE$ vuông tại B.



$$\text{Suy ra } MC = \frac{BC^2}{CE} = \frac{BC^2}{2AC} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{Mặt khác } AM &= AC - MC = \\ &= AC - \frac{BC^2}{2AC} = \frac{2AC^2 - BC^2}{2AC} \quad (2) \end{aligned}$$

Từ (1) và (2) ta có :

$$\frac{AM}{MC} = \frac{2AC^2 - BC^2}{BC^2} = 2 \left(\frac{AC}{BC} \right)^2 - 1.$$

Nhận xét :

Giải tốt bài này có các bạn : Phạm Thị Vân Giang, 8A Chuyên Bạc Liêu, Minh Hải, Đặng Minh Thanh, 9 An Lạc Tây, Kế Sách, Sóc Trăng, Lục Văn Hào, Nguyễn Mạnh Cường, 8/1 Hồng Bàng, Q5, TP HCM, Trần Anh Hùng, 8 Chuyên Nguyễn An Ninh, Vũng Tàu, Bà Rịa - Vũng Tàu, Nguyễn Thế Bảo, 8A₁ Hiệp Thành, Thủ Dầu Một, Sông Bé, Trần Đức Sinh, 8B Lương Văn Chánh, Tuy Hòa, Phú Yên, Trương Quang Trung, 8A Chuyên Kon Tum, Phan Thu Hà, 8A₁ Trần Văn Ôn, Krông Pắc, Lương Hữu

Thuận, 8T Chuyên Nghĩa Hành, Võ Trần Nguyên Lộc, 9T Chuyên Lê Khiết, Lê Hoàng Đức Khánh, 9T Chuyên Nguyễn Nghiêm, Đức Phổ, Quảng Ngãi, Trần Việt Nhật, 8/1 Chuyên Nguyễn Khuyến, Đà Nẵng, Quảng Nam - Đà Nẵng, Lê Chí Thành, 9¹ Nguyễn Tri Phương, Huế, Thừa Thiên - Huế, Nguyễn Thị Sen, 9A Trường Thi, Trần Khoa Văn, 8A NK Quỳnh Lưu, Nguyễn Tiến Trung, 9T, NK Vinh, Nghệ An, Đỗ Thành Trung 8T Nguyễn Hiền, Nam Ninh, Vũ Thị Thủy Dương, 8T NK Ý Yên, Đoàn Nam Thái, 7T, Nguyễn Trọng Kiên, Phạm Thu Giang, Nguyễn Tuấn Anh, 8T Trần Đăng Ninh, Nam Định, Nam Hà, Mai Xuân Trường, 9T Chuyên Đông Anh, Nguyễn Tùng, Vũ Mạnh Tuấn 8CT Từ Liêm, Phạm Quang Vinh 9A, Bế Văn Đàn, Hà Nội, Bùi Hải Nam, 9A Lê Hồng Phong, Ngô Quyên, Hải Phòng, Bùi Thu Nga, 9A Chuyên Phong Châu, Vĩnh Phú, Nguyễn Thị Hải Yến, 9 Năng khiếu Bắc Giang, Hà Bắc, Nguyễn Ngọc Tú, 8B Trọng điểm, Hạ Long, Quảng Ninh, Nguyễn Hoàng Tùng, 8T cấp II Năng khiếu Thái Nguyên, Lâm Mạnh Tường, 9A THCS Hợp Giang, Cao Bằng.

VŨ KIM THỦY

Bài T5/224. Cho hai hình chữ nhật có chu vi bằng nhau. Một hình có các cạnh được tô màu đỏ ; hình kia có các cạnh được tô màu xanh. Người ta chồng hai hình chữ nhật lên nhau sao cho phần giao của chúng là một hình bát giác. Chứng minh rằng : hình bát giác có tổng độ dài 4 cạnh màu đỏ bằng tổng độ dài 4 cạnh màu xanh.

Lời giải. Trong hình vẽ bên, hình chữ nhật cạnh đỏ ABCD và hình chữ nhật cạnh xanh $A_1B_1C_1D_1$ cùng có chu vi là p, cắt nhau tạo thành hình bát giác MNEFPQIK. Đặt $m = MN + EF + PQ$

+ IK và $n = NE + FP + QI + KM$. Ta có các tam giác sau đây đôi một đồng dạng vì là tam giác vuông và có một góc nhọn bằng nhau : $\triangle AJM$, $\triangle B_1NM$, $\triangle BNE$, $\triangle C_1FE$, $\triangle CFP$, $\triangle D_1QP$, $\triangle DQI$, $\triangle A_1KI$. Do đó, đặt

$$k = \frac{KA + AM}{KM}, \text{ ta có}$$

$$k = \frac{JA + AM}{KM} = \frac{NB + BE}{NE} = \frac{FC + CP}{FP} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{QD + DI}{QI} = \\
 &= \frac{JA + AM + NB + BE + FC + CP + QD + DI}{JM + NE + FP + QI} = \\
 &= \frac{p - m}{n} \quad (1). \text{ Chứng minh tương tự, ta cũng có} \\
 &k = \frac{p - n}{m} \quad (2). \text{ Từ (1) và (2), ta có } \frac{p - m}{n} = \frac{p - n}{m}, \\
 &\text{suy ra } \frac{p - m - n}{n} = \frac{p - n - m}{m}, \text{ hơn nữa, hiển} \\
 &\text{nhiên } p > m + n \text{ nên } p - m - n \neq 0, \text{ vậy :} \\
 &m = n, \text{ đpcm.}
 \end{aligned}$$

Nhận xét. Các bạn sau đây có lời giải tốt : Nguyễn Thị Thanh (9TL tx Thái Bình), Trần Ngọc Anh (9 toán Trần Đăng Ninh, Nam Hà), Nguyễn Mạnh Hà (9K PTCS Lê Lợi tx Hà Đông - Hà Tây), Nguyễn Tuấn Anh (9 Toán Phan Chu Trinh - Buôn Ma Thuột - Đắk Lắk), Nguyễn Đức Thuận (7T Năng khiếu Bim Sơn Thanh Hóa), Phạm Minh Hùng (9 Toán Nguyễn Du - Gò Vấp - Tp Hồ Chí Minh), Phạm Thu Hương (9A THCS Hồng Bàng - Hải Phòng), Hoàng Văn Tuấn (9 Toán Năng khiếu Hoa Lư - Ninh Bình).

DẶNG VIỄN

Bài T6/224. Cho dãy x_n thỏa mãn

$$\begin{aligned}
 x_3 &= \cos \frac{\pi}{9} \\
 x_{n+1} &= 3x_n - 1
 \end{aligned}$$

Tìm $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Lời giải. Ta có $x_{n+1} - \frac{1}{2} = 3 \left(x_n - \frac{1}{2} \right)$

$$\text{Từ đó } x_n = 3^{n-2} \left(x_3 - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2}$$

$$\text{Để thấy } x_3 - \frac{1}{2} = 2\cos \frac{\pi}{9} - \frac{1}{2} = 2\cos \frac{\pi}{9} -$$

$$\left(4\cos^2 \frac{\pi}{9} - 3\cos \frac{\pi}{9} \right) = \cos \frac{\pi}{9} \left(5 - 4\cos^2 \frac{\pi}{9} \right) > 0$$

$$\text{Thành thử } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$$

Nhận xét : 1) Các bạn sau đây có lời giải tốt : Nguyễn Xuân Sơn (11 Nghệ An), Lê Tuấn Anh (11 Hà Nội), Nguyễn Quang Hải (12, Vĩnh Phú), Nguyễn Thanh Chinh (11 Hải Hưng), Nguyễn Quang Nguyên (Hà Tây), Nguyễn Nhật Nam (12 Bà Rịa - Vũng Tàu), Lê Văn Cường (11 Thanh Hóa), Nguyễn Việt Dũng (10, Phan Bội Châu, Nghệ An), Trần Phương (10, Hà Nội), Nguyễn Thanh Tùng (10 Hà Nội)

2) Một số bạn còn lưu ý rằng $\lim_{n \rightarrow -\infty} x_n = \frac{1}{2}$

DẶNG HÙNG THẮNG

Bài T7/224 : Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ với các hệ số thực và thỏa mãn :
 $P(0) = 0, P(x^3 + 1) = P^3(x) + 1 \forall x \in \mathbb{R}$.

Lời giải (của nhiều bạn) : Từ các giả thiết của bài toán suy ra : $P(1) = P(0^3 + 1) = P^3(0) + 1 = 1$. Từ đây, bằng phương pháp quy nạp theo n , dễ dàng chứng minh được : $P(x_n) = x_n \forall n \in \mathbb{N}$ (ở đây x_n là các số hạng của dãy x_n được xác định bởi : $x_0 = 0, x_{n+1} = x_n^3 + 1 \forall n \in \mathbb{N}$. Vì $x_{n+1} > x_n \forall n \in \mathbb{N}$ (dễ thấy) nên từ (1) suy ra đa thức $Q(x) = P(x) - x$ có vô số nghiệm thực. Do vậy phải có

$$Q(x) \equiv 0 \forall x \in \mathbb{R}, \text{ hay } P(x) = x \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ngược lại, dễ thấy đa thức $P(x) = x$ thỏa mãn tất cả các điều kiện của bài ra.

Vậy có duy nhất đa thức cần tìm, đó là : $P(x) = x$.

Nhận xét : 1. Có nhiều bạn gửi lời giải cho bài toán. Trong số đó có 8 bạn cho lời giải sai. Ngoài ra, rất nhiều bạn khác không thực hiện bước thử lại đối với đa thức $P(x)$ đã tìm được.

2. Có ba bạn, thay vì giải bài đã ra, đã đề xuất và giải bài toán khái quát. Tuy nhiên các bài toán khái quát mà các bạn đưa ra hoặc không đúng, hoặc đúng nhưng lại không nhận bài đã ra làm trường hợp riêng.

3. Các bạn có lời giải đúng : Nguyễn Hoàng Giang (11T PTTHNK Bắc Thái) ; Lê Huy Tiến (ĐHQG Hà Nội), Đinh Trung Hằng (12M PTDL Mari Curie - Hà Nội) ; Đỗ Hồng Sơn, Trịnh Hữu Trang (Lam Sơn, Thanh Hóa), Phạm Tuấn Anh (11A PTCT ĐHSP Vinh, Nghệ An), Nguyễn Xuân Sơn (11T Trường Phan Bội Châu - Nghệ An) ; Phạm Hồng Thái (11A₁ Trường Đào Duy Từ, Quảng Bình) ; Đinh Trung Hoàng (10CT - ĐHTH Huế) ; Trần Minh Đông, Phạm Ngọc Tân (11CT Trường Lương Văn Chánh - Phú Yên) ; Nguyễn Lê Lực (10CT ĐHTH TP Hồ Chí Minh) ; Nguyễn Nhật Nam (12A₁ Trường Vũng Tàu, Bà Rịa - Vũng Tàu) ; Phạm Hoài Lăng (11CT2 Trường Lương Thế Vinh, Biên Hòa, Đồng Nai) và Phan Thanh Hải (11T Trường Thăng Long, Đà Lạt, Lâm Đồng).

NGUYỄN KHẮC MINH

Bài T8/224 : Tam giác ABC có $AB = c$; $BC = a$; $CA = b$. Chứng minh rằng :

$$a^2(1 - \sqrt{3} \cot A) + b^2(1 - \sqrt{3} \cot B) + c^2(1 - \sqrt{3} \cot C) \geq 0 \quad (1)$$

Lời giải. (đa số các bạn). Sử dụng Định lý hàm số sin trong tam giác, ta có :

$$\begin{aligned}
 (1) &\Leftrightarrow 4R^2[\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C - \\
 &- \sqrt{3}(\sin A \cos A + \sin B \cos B + \sin C \cos C)] \geq 0 \\
 &\Leftrightarrow \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \geq \\
 &\geq \frac{\sqrt{3}}{2}(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\Leftrightarrow \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \geq \\
 &\geq 2\sqrt{3} \sin A \sin B \sin C \quad (2)
 \end{aligned}$$

$$\text{Sử dụng bất đẳng thức : } \sin A \sin B \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{8},$$

$$\begin{aligned}
 \text{ta có : } &\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \geq \\
 &\geq 3 \sqrt[3]{(\sin A \sin B \sin C)^2} = \\
 &= \frac{3(\sin A \sin B \sin C)}{\sqrt[3]{\sin A \sin B \sin C}} \geq \frac{3 \sin A \sin B \sin C}{\sqrt[3]{\frac{3\sqrt{3}}{8}}} = \\
 &= 2\sqrt{3} \sin A \sin B \sin C, \text{ đpcm.}
 \end{aligned}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\triangle ABC$ đều.

Nhận xét : 1) Còn rất nhiều cách giải khác nữa, theo kiểu các phép biến đổi trên.

2) Các bạn sau có lời giải tốt :

Bắc Thái : Phan Hiền, Nguyễn Hoàng Giang, Nguyễn Ngọc Sơn, Ngô Văn Quân

Bến Tre : Nguyễn Anh Tuấn

Lâm Đồng : Phan Thanh Hải

Vĩnh Long : Tống Kim Anh

Quảng Nam - Đà Nẵng : Trịnh Huy Long, Lê Tự Thiện, Lê Triệu Phong

Hà Nội : Nguyễn Duy Tùng, Phan Linh, Nguyễn Vũ Hưng, Lê Tuấn Anh, Đinh Đức Huy, Đinh Trung Hằng, Trần Phương

Hải Phòng : Đỗ Huy Bình

Hải Dương : Đặng Thành Trung, Nguyễn Thanh Chương, Bùi Việt Quang,

Nam Hà : Vũ Mạnh Toàn, Nguyễn Duy Hà, Đỗ Trung Kiên, Vũ Trần Cương, Nguyễn Trọng Kiên, Nguyễn Thu Thủy,

Vĩnh Phú : Vũ Mạnh Hùng, Hà Xuân Thành, Nguyễn Quang Hải, Nguyễn Thanh Tùng,

Hà Tây : Hoàng Thanh Tùng, Phạm Huy Bắc, Nguyễn Quang Nguyên, Tạ Huy Khôi, Nguyễn Tuấn Định,

Thanh Hóa : Nguyễn Văn Trung, Nguyễn Anh Dương, Đỗ Hồng Sơn, Phạm Trung Hà, Hoàng Trung Tuyển, Trịnh Trọng Dương, Đoàn Thanh Hải

Nghe An : Phan Thanh Sơn, Nguyễn Quang Minh, Trương Xuân Thụy, Dương Văn Yên, Nguyễn Thịnh, Nguyễn Khánh Quỳnh, Phạm Tuấn Anh, Dương Đình Điệp, Nguyễn Văn Tín, Nguyễn Việt Dũng, Nguyễn Bá Đông, Trương Vĩnh Liên, Nguyễn Xuân Sơn, Nguyễn Đức Văn

Bà Rịa - Vũng Tàu : Phạm Minh Đức

Quảng Bình : Nguyễn Trung Kiên, Nguyễn Ngọc Tuấn, Đinh Trung Hoàng, Nguyễn Trung Kiên, Nguyễn Hữu Cầu, Trần Hữu Lực

Hà Bắc : Nguyễn Ngọc Sơn, Phạm Việt Ngọc, Đặng Hoàng Việt Hà

Phú Yên : Phạm Ngọc Tân, Trần Đình Lâm, Trần Minh Đông

Đồng Nai : Phạm Hoài Lãng, Lê Khắc Huỳnh

Thái Bình : Phùng Thanh Tùng

Đắc Lắc : Võ Chí Hòa

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T9/224. Gọi a, b, c là độ dài các cạnh BC, CA, AB của một tam giác ABC ; R và r là bán kính các đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của tam giác. Chứng minh bất đẳng thức :

$$\frac{r}{R} + \frac{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2}{16R^2} \leq \frac{1}{2} \quad (*)$$

Lời giải 1. (của Nguyễn Quang Hải, 12 CT, Trường PTTH chuyên Hùng Vương, Vĩnh Phú). Gọi H, O và I lần lượt là trực tâm, tâm các đường tròn ngoại và nội tiếp tam giác, ta có các hệ thức vectơ sau đây : $\vec{OH} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$, $a\vec{IA} + b\vec{IB} + c\vec{IC} = \vec{0}$ từ đó suy ra : $2p\vec{OI} = (2p-a)\vec{OA} + (2p-b)\vec{OB} + (2p-c)\vec{OC}$; (1) Bình phương hai vế của (1), sau khi thay $2\vec{OB}\vec{OC} = 2R^2 - a^2$, $2\vec{OC}\vec{OA} = 2R^2 - b^2$, $2\vec{OA}\vec{OB} = 2R^2 - c^2$ và sử dụng hằng đẳng thức : $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$ rồi rút gọn, ta được :

$$\begin{aligned}
 IH^2 &= 4R^2 - 8Rr - (a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \\
 &= 4R^2 - 8Rr - \frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] \geq 0
 \end{aligned}$$

Từ đó suy ra :

$$8R^2 \geq 16Rr + (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2$$

và thu được bất đẳng thức (*) cần tìm

Dấu đẳng thức đạt được khi và chỉ khi $I \equiv H \Leftrightarrow a = b = c$ nghĩa là tam giác ABC đều.

Nhận xét : 1) Một số bạn đã đưa ra lời giải sau.

Lời giải 2. Chiều O và I lên một trong các đường thẳng BC, CA hoặc AB ; chẳng hạn chiều lên CA , được O' và I' . Ta có :

$$CO' = \frac{b}{2}, CI' = p - c = \frac{a+b-c}{2}. \text{ Thế thì :}$$

$O'I \leq OI$, rồi sử dụng công thức Ole :

$$OI^2 = R^2 - 2Rr \text{ ta được : } \frac{(c-a)^2}{4} \leq R^2 - 2Rr$$

Không mất tổng quát, giả sử $a \leq b \leq c$, thế thì

$$(c-a)^2 = [(a-b) + (b-a)]^2 - (c-b)^2 + (b-a)^2 + 2(c-b)(b-a)$$

$$(c-a)^2 \geq (c-b)^2 + (b-a)^2$$

Từ đó ta được (*) cần tìm.

2) Một số bạn sử dụng định lý hàm sin và hệ thức

$$\frac{R}{r} = 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = \cos A + \cos B + \cos C - 1$$

rồi chuyển về trái của (*) về dạng lượng giác ; biến đổi và sử dụng các hệ thức và bất đẳng thức lượng giác trong tam giác, cũng đi đến kết quả cần tìm.

Các bạn sau đây có lời giải tốt.

Quảng Nam - Đà Nẵng : Lê Triệu Phong

Quảng Bình : Trần Hữu Lực,

Hà Nội : Lê Tuấn Anh, Nguyễn Vũ Hưng, Vũ Đức Nghĩa, Phan Linh, Trần Phương, Nguyễn Anh Tú,

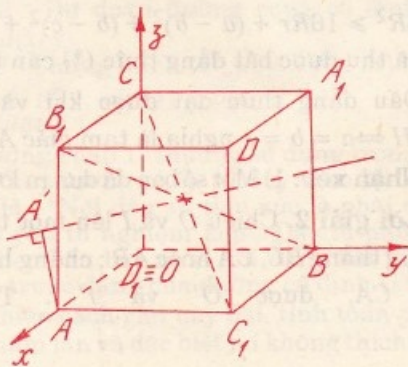
Vĩnh Phú : Trần Mạnh Tùng, Đào Mạnh Thắng

Thanh Hóa : Trịnh Hữu Trung, Nguyễn Anh Dương,

Nghệ An : Phạm Tuấn Anh, Nguyễn Thịnh, Trương Xuân Thung, Nguyễn Xuân Sơn, Dương Văn Yên.

NGUYỄN ĐĂNG PHÁT

Bài T10/224. Tứ diện đều ABCD có tâm là S và độ dài các cạnh bằng 2. Một đường thẳng Δ quay quanh S. Gọi A', B', C' và D' lần lượt là hình chiếu của các đỉnh A, B, C và D trên Δ . Tìm tất cả các vị trí của Δ sao cho tổng $SA'^4 + SB'^4 + SC'^4 + SD'^4$ đạt giá trị lớn nhất.



Lời giải. (của Lê Văn Cường, 11T, PTTH Lam Sơn, Thanh Hóa và Nguyễn Quang Nguyên, 11CT Nguyễn Huệ, Hà Tây)

Dựng hình lập phương $AB_1CD_1C_1DA_1B$ ngoại tiếp tứ diện đều ABCD, hình lập phương này có độ dài cạnh bằng $\sqrt{2}$. Chọn D_1 làm gốc O của hệ trục tọa độ Để các vuông góc Oxyz sao cho $A \in Ox$, $B \in Oy$ và $C \in Oz$. Thế thì, trong hệ tọa độ này, ta có : $A(\sqrt{2}, 0, 0)$, $B(0, \sqrt{2}, 0)$, $C(0, 0, \sqrt{2})$, $D(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2})$ và $S(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$

$$\text{Suy ra : } \begin{cases} \vec{SA}(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}), \vec{SB}(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}) \\ \vec{SC}(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}), \vec{SD}(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) \end{cases}$$

Gọi $\vec{e}(x, y, z)$ là vectơ đơn vị của đường thẳng Δ , thế thì : $SA' = |\vec{eSA}|$, $SB' = |\vec{eSB}|$, $SC' = |\vec{eSC}|$ và $SD' = |\vec{eSD}|$ Từ đó ta được (với chú ý rằng $x^2 + y^2 + z^2 = 1$) ;

$$\begin{aligned} s &= SA'^4 + SB'^4 + SC'^4 + SD'^4 = \\ &= \frac{1}{4} [(-x+y+z)^4 + (x-y+z)^4 + \\ &\quad + (x+y-z)^4 + (x+y+z)^4] \\ &= 1 + 4(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) \leq \\ &\geq 1 + \frac{4}{3}(x^2 + y^2 + z^2)^2 = \frac{7}{3} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy : } s_{\max} = \frac{7}{3} \Leftrightarrow x^2 = y^2 = z^2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow$$

$|x| = |y| = |z| = \frac{1}{\sqrt{3}}$ Suy ra có 4 vị trí của Δ thỏa mãn điều kiện tổng s đạt giá trị lớn nhất, tương ứng có vectơ đơn vị chỉ phương là :

$$(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}), (-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}),$$

$$(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}), (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$$

Đó là 4 đường thẳng SA, SB, SC và SD đi qua các đỉnh của tứ diện đều.

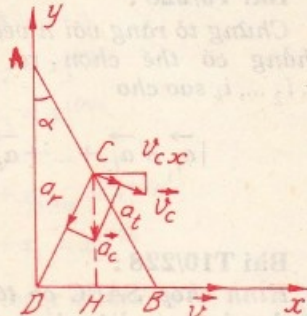
Nhận xét : 1) Ngoài hai bạn trên, còn có hai bạn cũng cho lời giải đúng : Dương Văn Yên, 11T Phan Bội Châu và Hoàng Trung Tuyền, 11A PTTH Hà Trung, Thanh Hóa.

2) Ngoài phương pháp tọa độ đã nêu ở trên, các bạn có thể giải bài toán trên bằng phương pháp vectơ.

NGUYỄN DĂNG PHÁT

Bài L1/224.

Thanh AB trượt lên hai cạnh của góc vuông (hình) Thanh có chiều dài l . Đầu B chuyển động với vận tốc không đổi v_0 . Hãy xác định phương, chiều và độ lớn của vectơ vận tốc và vectơ gia tốc của trung điểm



C tại thời điểm thanh làm với cạnh thẳng đứng một góc α .

Hướng dẫn giải

1) Điểm C chuyển động trên đường tròn tâm D bán kính bằng $l/2$. Do đó vectơ v_c vuông góc với bán kính OC (H. 1) Chiều v_c lên trục Ox ta

$$\text{được } v_{cx} = v_H = \frac{v_B}{2} = \frac{v_0}{2}. \text{ Suy ra } v_c = \frac{v_0}{2\cos\alpha}$$

2) Vì $v_{cx} = \frac{v_0}{2} = \text{const}$ nên ta có $a_{cx} = 0$ và $a_{cy} = a_c$; do đó $\vec{a}_c$ hướng thẳng đứng xuống dưới. Thành phần a_n của vectơ $\vec{a}_c$ theo phương CO là gia tốc hướng tâm nên ta có

$$a_c = \frac{a_n}{\cos\alpha} = \frac{v_c^2}{l/2 \cdot \cos\alpha} = \frac{v_0^2}{2l\cos^3\alpha}$$

Nhận xét. Các em có lời giải đúng: Nguyễn Quang Trường, 11CL, chuyên Phan Bội Châu, Vinh (Nghệ An), Đoàn Hữu Thành 12C₁, PTTH Sơn Tinh Quảng Ngãi; Nguyễn Văn Tiến, 11A2, PTTH Lê Quý Đôn, Hà Nội, Nguyễn Đức Minh Hoàng 11CL, Quốc học Huế, Nguyễn Quốc Nguyên 11L, PTTH Phan Bội Châu Nghệ An; Lê Thanh Hải, 10CL, Lê Hồng Phong, Nam Hà

MAI ANH

Bài L2/224. Một khung dây siêu dẫn hình vuông cạnh a , khối lượng m , đặt nằm ngang trong từ trường không đều theo quy luật: $B_x = -\alpha x$; $B_y = 0$; $B_z = B_0 + \alpha z$. Khung có độ tự cảm L , không biến dạng. Ban đầu tâm của khung trùng với gốc tọa độ, các cạnh của khung song song với các trục Ox, Oy. Khung được thả tự do và trong khung không có dòng điện. Xét chuyển động của khung sau khi thả.

Hướng dẫn giải. Vì dây siêu dẫn $R = 0$ nên $I \neq 0$ nhưng $E = RI = 0 \rightarrow |E| = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = 0 \rightarrow \Phi = \text{const}$. Khung dây rơi tịnh tiến nên $\Phi_x = 0$ và $\Phi = \Phi_z + \Phi_L = a^2(B_0 + \alpha z) + Li$. Ban đầu $t = 0$, $z = 0$, $i = 0 \rightarrow \Phi =$

$$a^2 B_0 \rightarrow a^2 B_0 = a^2(B_0 + \alpha z) + Li \rightarrow i = -\frac{a^2 \alpha z}{L}$$

Lực điện từ tác dụng lên các cạnh của dây: lực do B_z gây ra thì triệt tiêu; lực do B_x gây ra ở hai cạnh hai bên trục z cùng phương, cùng hướng theo O_z và có độ lớn

$$F = 2a \left[\alpha \cdot \frac{a}{2} \right] i = a^2 \alpha i = -\frac{a^4 \alpha^2 z}{L}$$

Phương trình chuyển động của khung dọc theo Oz :

$$mz' = -mg + F \rightarrow z'' + g + \frac{a^4 \alpha^2 z}{mL} = 0$$

$$\text{Đặt } \frac{mgL}{a^4 \alpha^2} + z = X \rightarrow X'' + \frac{a^4 \alpha^2}{mL} X = 0$$

$$\rightarrow X = A \sin(\omega t + \varphi). \text{ Tại vị trí cân bằng } z'' = 0$$

$$0 \rightarrow z = -\frac{mgL}{a^4 \alpha^2} \rightarrow \text{Biên độ dao động}$$

$$A = \frac{mgL}{a^4 \alpha^2}, \varphi = \frac{\pi}{2} \rightarrow z = A \cos \omega t - \frac{mgL}{a^4 \alpha^2} \text{ với}$$

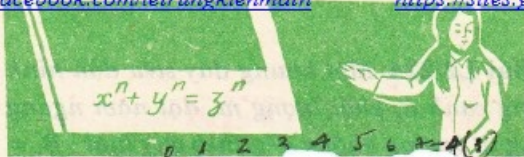
$$\omega = \frac{a^2 \alpha}{\sqrt{mL}}$$

Khung dao động điều hòa

$$z = \frac{mgL}{a^4 \alpha^2} \left[\cos\left(\frac{a^2 \alpha}{\sqrt{mL}} t\right) - 1 \right]$$

Nhận xét. Không có em nào có lời giải đúng.

MAI ANH



ĐỀ RA KÌ NÀY

CÁC LỚP THCS

Bài T1/228 : Tìm $m, n \in \mathbb{N}$ để $A = 3^{3m^2+6n-61} + 4$ là số nguyên tố.

NGUYỄN ĐỨC TẤN
(TP Hồ Chí Minh).

Bài T2/228 : Tìm nghiệm dương của hệ phương trình :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = x_3^{1996} \\ x_2 + x_3 = x_4^{1996} \\ \dots \\ x_{1995} + x_{1996} = x_1^{1996} \\ x_{1996} + x_1 = x_2^{1996} \end{cases}$$

PHẠM NGỌC BỘI
(Nghệ An).

Bài T3/228 : Tìm các nghiệm nguyên (x, u) của phương trình.

$$x + \sqrt{x + \frac{1}{2}} + \sqrt{x + \frac{1}{4}} = u$$

BÙI QUANG TRƯỜNG
(Hà Nội).

Bài T4/228 : Cho tam giác ABC ($AB < AC$) và các tam giác cân BAD, CAE ($BA = BD, CA = CE$) sao cho D nằm khác phía với C đối với AB , E nằm khác phía với B đối với AC và $ABD = ACE$. Gọi M là trung điểm của BC . Hãy so sánh MD với ME .

NGUYỄN KHÁNH NGUYỄN
(Hải Phòng).

Bài T5/228 : Trong mặt phẳng cho tam giác ABC có $AB=3, AC=4, \angle BAC=150^\circ$, trên đường trung trực của đoạn BC , ta lấy điểm D ở cùng phía với A so với BC sao cho $AD=5$. Hãy tính các góc của tam giác DBC .

TRỊNH BẰNG GIANG
(TP Hồ Chí Minh).

CÁC LỚP THPT

Bài T6/228 : Cho p là một số nguyên tố. Chứng minh rằng với số m nguyên không âm bất kỳ, tồn tại một đa thức Q có hệ số nguyên sao cho p^m là ước số chung lớn nhất của tất cả các số $a_n = (p+1)^n + Q(n)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)

TRẦN DUY HINH.
(Bình Định)

Bài T7/228 : Giải phương trình :

$$729x^4 + 8\sqrt{1-x^2} = 36$$

TRẦN VĂN HẠNH.
(Quảng Ngãi).

Bài T8/228 : Giả sử : $S_n = \sum_{k=0}^n C_{3n}^{3k}$. Trong

$$\text{đó } C_m^s = \frac{m(m-1)\dots(m-s+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots s}$$

Tìm $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{S_n}$

HỒ QUANG VINH
(Nghệ An).

Bài T9/228 :

Chứng tỏ rằng với n véc tơ đơn vị của mặt phẳng có thể chọn ra được các chỉ số $i_1, i_2, \dots, i_k$ sao cho

$$|\vec{a}_{i_1} + \vec{a}_{i_2} + \dots + \vec{a}_{i_k}| \geq \frac{n^k}{4\sqrt{2}}$$

DÀM VĂN NHÌ
(Thái Bình).

Bài T10/228 :

Hình chóp $SABC$ có tổng các mặt (góc ở đỉnh) của tam diện đỉnh S bằng 180° và các cạnh bên $SA = SB = SC = 1$.

Chứng minh rằng diện tích toàn phần chóp này không lớn hơn $\sqrt{3}$

NGUYỄN LÊ DŨNG
(TP Hồ Chí Minh).

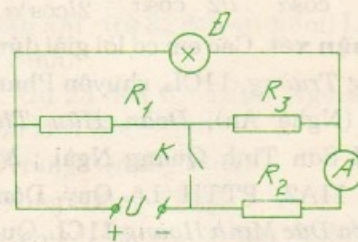
CÁC ĐỀ VẬT LÝ

Bài L1/228 : Thuốc gỗ AB , đầu A được xuyên qua một trục quay, trục này ở phía trên mặt nước. Thả thuốc xuống nước, khi thuốc đứng yên thì phần thuốc ngập trong nước $CB = \frac{3}{5} AB$. Tìm lực đẩy Acsimét tác dụng vào thuốc.

Tìm lực ép của thuốc lên trục quay (trong lượng thuốc là P . Masát ở trục quay được bỏ qua).

PHẠM HÙNG QUYẾT.
(Hà Nội)

Bài L2/228 : Cho mạch điện như hình vẽ $R_2 = R_1, R_3 = 3R_1$. U không đổi. Bỏ qua giá trị điện trở của dây nối, khóa K và Ampe kế.



Khi K mở đèn D đạt công suất tiêu thụ cực đại, (A) chỉ $1A$.

1. - Xác định số chỉ (A) khi K đóng

2. - Với $U = 150V$, hãy xác định P_d, U_d lúc K mở, K đóng.

LẠI THẾ HIỀN
(Thái Bình)

PROBLEMS FOR THIS ISSUE.

For Lower Secondary Schools.

T1/228. Find $m, n \in \mathbb{N}$ such that

$$A = 3^{3m^2 + 6n - 61} + 4$$

is a prime number.

T2/228. Find positive solutions of the system of equations :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = x_3^{1996} \\ x_2 + x_3 = x_4^{1996} \\ \dots \\ x_{1995} + x_{1996} = x_1^{1996} \\ x_{1996} + x_1 = x_2^{1996} \end{cases}$$

T3/228. Find integer solutions (x, u) of the equation

$$x + \sqrt{x + \frac{1}{2}} + \sqrt{x + \frac{1}{4}} = u.$$

T4/228. Let be given a triangle ABC , $AB < AC$, and the isoscles triangles BAD , CAE ($BA = BD$, $CA = CE$) so that D and C are on distinct half-planes bounded by AB , E and B are on distinct half-planes bounded by AC and $\widehat{ABD} = \widehat{ACE}$. Let M be the midpoint of BC . Compare MD with ME .

T5/228. In the plane let be given a triangle ABC with $AB = 3$, $AC = 4$, $\widehat{BAC} = 150^\circ$. On the perpendicular bisector of segment BC , take

the point D such that $AD = 5$ and D and A are on the same half-plane bounded by BC . Calculate the angles of triangle DBC .

For Upper Secondary Schools.

T6/228. Let p be a prime number. Prove that for every positive integer m , there exists a polynomial Q with integer coefficients such that p^m is the greatest common divisor of all numbers $a_n = (p+1)^n + Q(n)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$).

T7/228. Solve the equation

$$729x^4 + 8\sqrt{1-x^2} = 36$$

T8/228. Let $S_n = \sum_{k=0}^n C_{3n}^{3k}$, where

$$C_m^s = \frac{m(m-1)\dots(m-s+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots s}$$

Find $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{S_n}$.

T9/228. Prove that for n given unit vectors $\{\vec{a}_i\}$, ($i = 1, 2, \dots, n$), in the plane, one can choose indexes $i_1, i_2, \dots, i_R$ such that

$$|\vec{a}_{i_1} + \vec{a}_{i_2} + \dots + \vec{a}_{i_R}| \geq \frac{n^k}{4\sqrt{2}}.$$

T10/228. Consider a pyramid $SABC$, the sum of the plane angles at vertex S of which is 180° and $SA = SB = SC = 1$.

Prove that the total area of the pyramid is not greater than $\sqrt{3}$.

HỌ ĐƯỜNG CONG ...

(tiếp theo trang 14)

7. [Đề 67I] Cho $y = \frac{(3m+1)x - m^2 + m}{x + m}$ ($m \neq 0$).

CMR : Đồ thị hàm số luôn tiếp xúc với hai đường thẳng cố định

8. [Đề 141Va] : CMR Họ đường thẳng $C(\alpha) : (x-1)\cos\alpha + (y-1)\sin\alpha - 4 = 0$ luôn tiếp xúc với một đường cong cố định

9. CMR : Họ đường thẳng $D(m) : y = mx + \frac{a}{m}$ ($m \neq 0$) luôn tiếp xúc với một parabol cố định.

NGƯỜI GỬI BÀI GIẢI CẦN CHÚ Ý

- Lời giải của một bài toán viết riêng trên một tờ giấy. Nếu bài dài nhiều trang thì dính chúng vào nhau.

- Trên mỗi bài giải đều ghi họ tên, lớp, trường, huyện, tỉnh (thành phố) và ghi số của đề ra (không cần chép lại đề).

- Ngoài phong bì cần để rõ bài giải của số báo nào (không gửi bài của nhiều số báo vào cùng một phong bì).

... Chỉ gửi bài giải về địa chỉ :

45B, Hàng Chuối, Hà Nội.

TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

KẾT QUẢ KÌ THI HỌC SINH GIỎI THPT MÔN TOÁN NĂM HỌC 1995 - 1996

NGUYỄN VIỆT HẢI

Cuộc thi chọn học sinh giỏi Toán THPT năm nay đã được tiến hành trong hai ngày 15 và 16 tháng 3. Thí sinh phải làm 3 bài toán trong 180 phút mỗi ngày. 397 thí sinh của 55 đội đã dự thi, trong đó có 51 đội của các tỉnh, thành phố và 4 đội của các lớp chuyên Toán thuộc các trường Đại học. Các đội được chia thành hai bảng, mức độ đề thi của bảng A khó hơn bảng B. Bảng A gồm 31 đội với 253 thí sinh, bảng B gồm 24 đội với 144 thí sinh. Mỗi đội cử tối đa 8 thí sinh, trừ một số đội mạnh được cử nhiều thí sinh hơn. Điểm tối đa của mỗi ngày thi là 20, của cả hai ngày thi là 40. Kết quả thi như sau : Ở bảng A có 2 giải nhất, 11 giải nhì, 21 giải ba và 33 giải khuyến khích. Tổng số giải của bảng A là 67, chiếm tỉ lệ 26,5% tổng số thí sinh, trong đó số giải ba trở lên là 34, chiếm tỉ lệ 50,7% tổng số giải. Ở bảng B không có giải nhất, có 1 giải nhì, 4 giải ba và 6 giải khuyến khích. Tổng số giải của bảng B là 11, chiếm tỉ lệ 7,6% tổng số thí sinh, trong đó số giải ba trở lên là 5, chiếm tỉ lệ 45,5% tổng số giải. Tính chung cả hai bảng A và B có 2 giải nhất, 12 giải nhì, 25 giải ba và 39 giải khuyến khích. Tổng số giải là 78, chiếm tỉ lệ 19,6% tổng số thí sinh.

Danh sách các học sinh giỏi môn Toán THPT năm 1996 :

Bảng A Giải nhất (từ 35 đến 40 điểm) : Phạm Lê Hùng, Ngô Đức Tuấn (ĐHKHTN - ĐHQG Hà Nội)

Giải nhì (từ 28 đến 34 điểm) : Nguyễn Thái Hà, Nguyễn Anh Tú, Đinh Thành Trung, Nguyễn Minh Tú, Đỗ Quốc Anh, Nguyễn Bá Hùng, Trần Đăng Hòa (ĐH KHTN - ĐHQG Hà Nội), Lê Long Triều (ĐHTH tp Hồ Chí Minh), Lê Quang Minh (Bắc Thái), Trịnh Thế Huynh (Nam Hà), Phạm Lê Sơn (Thanh Hóa)

Giải ba (từ 23 đến 27 điểm) : Đặng Lan Hương (nữ), Nguyễn Thái Học, Vũ Hải Sâm (Nam Hà), Nguyễn Mạnh Cường, Vũ Quang Đông (ĐH KHTN - ĐHQG Hà Nội) Ngô Đức Duy (Hải Phòng) Lê Thành Ngón (Quảng Nam - Đà Nẵng) Lê Anh Vũ, Nguyễn Thị Hải Yến (nữ) (Thừa Thiên - Huế), Nguyễn Tiến Chinh (Thái Bình) Lê Minh Hiếu, Hoàng Anh Tùng (Thanh Hóa), Lê Đức Linh, Lê Văn An, Phan Anh Dũng (Nghệ An), Phạm Tuấn Anh,

Nguyễn Trọng Hậu (Hà Tây), Đặng Thanh Hà, Đặng Việt Dũng (ĐHSP - ĐHQG Hà Nội), Nguyễn Tri Phương (Hà Tĩnh), Nguyễn Xuân Thắng (Quảng Trị).

Giải khuyến khích (từ 20 đến 22 điểm) Ngô Đức Thành (ĐH KHTN - ĐHQG Hà Nội) - Trịnh Quang Khải, Nguyễn Trung Kiên (Hà Tây)

- Hoàng Lê Quang, Nguyễn Thị Thanh Thủy (nữ), Phạm Đình Trường, Đặng Quốc Dũng, Phạm Đức Tùng (Hải Phòng)

- Nguyễn Minh Hiền, Phạm Thùy Liên (nữ) (Nam Hà)

- Bùi Thị Ngọc Tuấn (nữ), Phạm Thái Hà, Nguyễn Quang Trung (Thái Bình) - Trần Tiến Dũng, Vũ Tất Thắng, Trần Minh Anh (Hà Nội)

- Ngô Thị Hải (nữ), Bùi Thị Thu (nữ), Phạm Ngọc Tuấn (Hải Hưng)

- Nguyễn Ngọc Vinh (Ninh Bình)

- Trần Trường Thủy, Trần Quang Nhật, Lê Thái Phong (Hà Tĩnh),

- Nguyễn Minh Hoàng (Khánh Hòa)

- Trịnh Hữu Trung, Trịnh Hoàng Nam, Nguyễn Ngọc Hưng (Thanh Hóa)

- Nguyễn Phụng Minh (Thừa Thiên - Huế)

- Nguyễn Đăng Trúc (Vĩnh Phú)

- Nguyễn Hồng Chung (Nghệ An)

- Hồ Văn Thảo (Quảng Trị)

- Đàm Khánh Hòa (Phú Yên)

- Nguyễn Hữu Quỳnh (ĐHSP - ĐHQG Hà Nội)

Bảng B Giải nhì : (từ 32 đến 40 điểm) Lê Văn Mạnh (Hòa Bình)

Giải ba : (từ 23 đến 31 điểm) Ngô Quang Biểu, Lư Anh Hòa (Bến Tre)

Mai Thế Hùng (Quảng Bình)

Lê Chí Trung (Đồng Tháp)

Giải khuyến khích : (từ 20 đến 22 điểm)

- Nguyễn Ngọc Phụng, Thái Minh Hoàng (Vĩnh Long)

- Phan Thị Minh Nguyệt (nữ), Lê Chí Thọ, Phan Duy Hùng (Quảng Bình)

- Đào Duy Chung (Gia Lai).

Sau đây là các đề thi Toán chọn học sinh giỏi THPT năm 1996

NGÀY THI 15 - 3 - 1996
(180 phút, không kể thời gian giao đề)

BẢNG A

Bài 1. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} \sqrt{3x} \left(1 + \frac{1}{x+y}\right) = 2 \\ \sqrt{7y} \left(1 - \frac{1}{x+y}\right) = 4\sqrt{2} \end{cases}$$

Bài 2. Cho góc tam diện Sxyz. Một mặt phẳng (P) không đi qua S và cắt các tia Sx, Sy, Sz lần lượt tại A, B, C. Trong mặt phẳng (P) dựng ba tam giác DAB, EBC, FCA sao cho mỗi tam giác đó không có điểm trong chung với tam giác ABC, và $\triangle DAB = \triangle SAB$, $\triangle EBC = \triangle SBC$, $\triangle FCA = \triangle SCA$. Xét mặt cầu (T) thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau :

(1) (T) tiếp xúc với các mặt phẳng (SAB), (SBC), (SCA), (ABC).

(2) (T) nằm trong góc tam diện Sxyz và nằm ngoài hình tứ diện SABC.

Chứng minh rằng tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DEF là điểm tiếp xúc của mặt cầu (T) với mặt phẳng (P).

Bài 3. Cho các số nguyên dương k và n với $k \leq n$. Hỏi có tất cả bao nhiêu chỉnh hợp chập k $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ của n số nguyên dương đầu tiên,

mà mỗi chỉnh hợp $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ thỏa mãn ít nhất một trong hai điều kiện sau :

(1) Tồn tại $s, t \in \{1, 2, \dots, k\}$ sao cho $s < t$ và $a_s > a_t$.

(2) Tồn tại $s \in \{1, 2, \dots, k\}$ sao cho $(a_s - s)$ không chia hết cho 2.

BẢNG B

Bài 1. Hãy biện luận số nghiệm thực của hệ phương trình với ẩn x, y :

$$\begin{cases} x^3y - y^4 = a^4 \\ x^2y + 2xy^2 + y^3 = b^2 \end{cases}$$
 theo các tham số thực a, b.

Bài 2. Cho hình tứ diện ABCD nội tiếp trong mặt cầu tâm O và $AB = AC = AD$. Gọi G là trọng tâm tam giác ACD, gọi E là trung điểm của BG và F là trung điểm của AE.

Chứng minh rằng OF vuông góc với BG khi và chỉ khi OD vuông góc với AC.

Bài 3. Cho n số $(n > 4)$ đôi một khác nhau $a_1, a_2, \dots, a_n$. Hỏi có tất cả bao nhiêu hoán vị của n số đó, mà trong mỗi hoán vị không có ba số nào trong bốn số a_1, a_2, a_3, a_4 nằm ở ba vị trí liên tiếp ?

NGÀY THI 16 - 3 - 1996
(180 phút, không kể thời gian giao đề)

BẢNG A

Bài 4. Hãy xác định tất cả các hàm số $f: N^* \rightarrow N^*$ thỏa mãn đẳng thức :

$$f(n) + f(n+1) = f(n+2)f(n+3) - 1996 \text{ với mọi } n \in N^*.$$

(N^* là tập hợp các số nguyên dương).

Bài 5. Xét các tam giác ABC có độ dài cạnh BC bằng 1 và số đo góc BAC bằng α cho trước $\left(\alpha > \frac{\pi}{3}\right)$. Hỏi tam giác nào có khoảng cách từ tâm đường tròn nội tiếp đến trọng tâm bé nhất ? Hãy tính khoảng cách bé nhất đó theo α .

Kí hiệu $f(\alpha)$ là khoảng cách bé nhất nói trên. Hỏi khi α thay đổi trong khoảng $\left(\frac{\pi}{3}, \pi\right)$ thì hàm số $f(\alpha)$ đạt giá trị lớn nhất tại giá trị nào của α ?

Bài 6. Cho bốn số thực không âm a, b, c, d thỏa mãn điều kiện :

$$2(ab + ac + ad + bc + bd + cd) + abc + abd + acd + bcd = 16.$$

Chứng minh rằng :

$$a + b + c + d \geq \frac{2}{3}(ab + ac + ad + bc + bd + cd).$$

Hỏi dấu bằng xảy ra khi nào ?

BẢNG B

Bài 4 : Hãy xác định tất cả các hàm số

$f: Z \rightarrow Z$ thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau :

$$(1) f(1995) = 1996$$

$$(2) \text{ với mọi } n \in Z, \text{ nếu } f(n) = m \text{ thì } f(m) = n \text{ và } f(m+3) = n-3.$$

(Z là tập hợp các số nguyên).

Bài 5. Xét các tam giác ABC có độ dài cạnh BC bằng 1 và số đo góc BAC bằng α cho trước $\left(\alpha > \frac{\pi}{3}\right)$. Hỏi tam giác nào có khoảng cách từ tâm đường tròn nội tiếp đến trọng tâm bé nhất ? Hãy tính khoảng cách bé nhất đó theo α .

Bài 6. Cho ba số thực không âm x, y, z thỏa mãn điều kiện :

$$xy + yz + xz + xyz = 4$$

Chứng minh rằng :

$$x + y + z \geq xy + yz + xz.$$

Hỏi dấu bằng xảy ra khi nào ?

Dành cho các bạn chuẩn bị thi vào đại học

HỌ ĐƯỜNG CONG TIẾP XÚC VỚI MỘT ĐƯỜNG CỐ ĐỊNH

TRẦN PHƯƠNG

Trong các kì thi tuyển sinh vào Đại học và trong Bộ đề Toán ta thường gặp dạng toán sau đây :

"Chứng minh họ đường cong (C_m) có phương trình $y = f(x, m)$ luôn tiếp xúc với một đường (D) cố định"

Có 4 phương pháp để giải dạng toán này

1. Phương pháp nghiệm kép

Giả sử họ đường cong (C_m) tiếp xúc với đường (D) có phương trình $y = g(x)$. Khi đó trong phạm vi chương trình phổ thông bài toán được thỏa mãn $\Leftrightarrow f(x, m) = g(x)$ có nghiệm kép $\forall m$. Từ điều kiện này ta sẽ tìm được $g(x)$.

2. Phương pháp tìm điểm cố định

Bước 1 : Tìm điểm cố định (nếu có)
 $M_o(x_o, y_o) \in (C_m) : y = f(x, m)$

Bước 2 : Chứng minh $f'(x_o, m) = k - \text{const}$

Bước 3 : Kết luận (C_m) luôn tiếp xúc với đường thẳng $y = k(x - x_o) + y_o$

3. Phương pháp tách bộ phận nghiệm kép

Bước 1 : Biến đổi $f(x, m) =$

$$= \frac{[\alpha(m)x + \beta(m)]^k}{\lambda(x, m)} + \gamma(x) \text{ trong đó } \alpha \leq k \in \mathbb{N}$$

và $\gamma(x)$ không chứa m

Bước 2 : Xét phương trình tương giao
 $f(x, m) = \gamma(x) \Leftrightarrow [\alpha(m)x + \beta(m)]^k = 0$ có nghiệm kép $x_o = \frac{-\beta(m)}{\alpha(m)}$

Bước 3 : Kết luận (C_m) luôn tiếp xúc với đường cố định (D) có phương trình $y = \gamma(x)$ tại tiếp điểm $M_o(x_o, \gamma(x_o))$

4. Phương pháp tìm tập hợp điểm mà họ đường cong không đi qua

Bước 1 : Tìm tập hợp điểm mà họ đường cong không đi qua chẳng hạn tọa độ của các điểm này thỏa mãn bất phương trình $\alpha(x, y) < \beta(x, y)$

Bước 2 : Dự đoán đường cong cố định là $\alpha(x, y) = \beta(x, y)$

Bước 3 : Chứng minh $(C_m) : y = f(x, m)$ luôn tiếp xúc với $(D) : \alpha(x, y) = \beta(x, y)$

Bình luận :

1. Phương pháp 1 (thường sử dụng trong Bộ đề Toán) là phương pháp tư duy theo lối kinh điển tức là : "Nối đến sự tiếp xúc là phải nghĩ ngay đến yếu tố nghiệm kép". Đây là phương pháp giải cơ bản bao quát với dạng bài toán : "Cho biết trước dạng của đường cố định (D) "

Tuy nhiên cách giải này dài, tính toán phức tạp, dễ nhầm lẫn và đặc biệt nó không thích hợp

với các bài toán chưa cho biết dạng của đường cố định (D)

2. Phương pháp 2 chỉ sử dụng được khi họ (C_m) chứa đựng yếu tố luôn tiếp xúc với 1 đường thẳng cố định tại 1 điểm cố định. Nếu sử dụng được thì việc tính toán sẽ đơn giản hơn so với phương pháp 1

3. Phương pháp 3 cho cách giải rất ngắn gọn và độc đáo. Điểm khác biệt cơ bản so với 2 phương pháp trên là phương pháp 3 giải quyết được lớp các bài toán chưa cho biết dạng của đường cố định (D)

Muốn sử dụng tốt phương pháp này ta cần chú ý các đặc điểm sau :

$$\text{Khéo léo biến đổi } f(x, m) = \frac{[\alpha(m)x + \beta(m)]^k}{\lambda(x, m)} + \gamma(x) \text{ với } 2 \leq k \in \mathbb{N} \text{ và } \gamma(x) \text{ không chứa } m$$

Ta cần phải dự đoán được $\gamma(x)$ theo 1 trong 2 cách :

3.1 Dự đoán $\gamma(x)$ bằng trực quan toán học

3.2 Đặt $g(x, m) = \frac{[\alpha(m)x + \beta(m)]^k}{\lambda(x, m)}$. Khi đó

$$\frac{df}{dm} = \frac{dg^{(d\lambda)}}{dm} = \frac{[\alpha(m)x + \beta(m)]^{k-1}}{\varphi(x, m)} = 0 \rightarrow$$

$$x_o = \frac{-\beta(m)}{\alpha(m)}. \text{ Xét 2 khả năng}$$

(a) Nếu $x_o = \frac{-\beta(m)}{\alpha(m)}$ là biểu thức có chứa m .

Khi đó ta sẽ xác định $\gamma(x)$ bằng cách

Bước 1 : Giải phương trình $\frac{df}{dm} = 0 \rightarrow m = p(x)$

Bước 2 : Vì nghiệm của $\frac{df}{dm} = 0$ cũng là nghiệm của $g(x, m) = 0$ nên thế $m = p(x)$ vào hàm số $y = f(x, m)$ ta nhận được ngay $y = \gamma(x)$

(b) Nếu $x_o = \frac{-\beta(m)}{\alpha(m)} = a - \text{const}$. Thế $x_o = a$ vào hàm số $y = f(x, m)$ nhận được $y = b - \text{const}$.

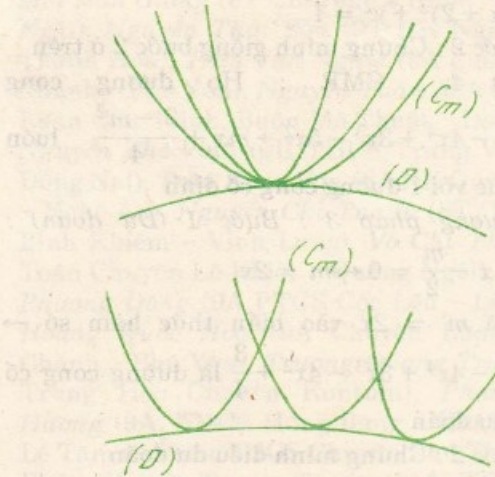
Như vậy ta không xác định được ngay $y = \gamma(x)$ mà chỉ biết 1 điểm $(a, b) \in y = \gamma(x)$ cần tìm

Việc khôi phục $\gamma(x)$ phải sử dụng các biện pháp gián tiếp khác nhau tùy theo tình huống cụ thể của các bài toán.

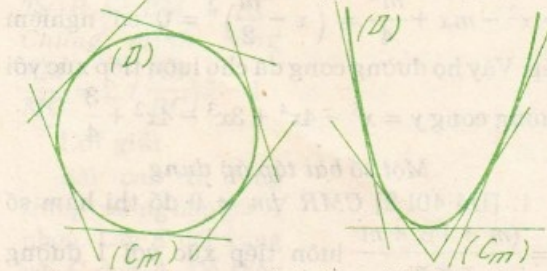
4. Về mặt hình học ta có nhận xét sau :

4.1 Nếu $x_o = \frac{-\beta(m)}{\alpha(m)}$ không phụ thuộc vào m thì (C_m) luôn tiếp xúc với (D) tại 1 điểm cố định

4.2 Nếu $x_o = \frac{-\beta(m)}{\alpha(m)}$ phụ thuộc vào m thì (C_m) luôn tiếp xúc với (D) tại các điểm di động trên (D)



4.3 Phương pháp 4 thường được sử dụng khi (C_m) là họ đường thẳng còn (D) là một đường cong có "tính chất của hình lõi" VD : (D) là đường tròn, Elip, Parabol, ... Nói chính xác hơn đường cong (D) chia mặt phẳng tọa độ thành 2 miền trái dấu theo phương trình của (D)



Sau đây là một số ví dụ minh họa cho các bình luận này

Bài 1 : CMR đồ thị hàm số $y = \frac{2x^2 + (1-m)x + 1 + m}{x - m}$

luôn tiếp xúc với 1 đường thẳng cố định tại 1 điểm cố định.

Phương pháp 1 : Họ đồ thị hàm số đã cho luôn tiếp xúc với đường thẳng $y = ax + b$

$\Leftrightarrow$ phương trình $\frac{2x^2 + (1-m)x + 1 + m}{x - m} = ax + b$ có

nghiệm kép $\forall m \Leftrightarrow (a-2)x^2 + [(1-a)m + (b-1)x - (b+1)m - 1] = 0$ có nghiệm kép $\forall m$

$\Leftrightarrow a \neq 2$ và $\Delta = (1-a)^2 m^2 + [2(1-a)(b-1) + 4(a-2)(b+1)]m + (b-1)^2 + 4(a-2) = 0 \forall m$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (1-a)^2 = 0 \\ 2(1-a)(b-1) + 4(a-2)(b+1) = 0 \\ (b-1)^2 + 4(a-2) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$ Vậy đồ thị hàm số luôn tiếp xúc với

đường thẳng $y = x - 1$ tại điểm cố định

$x_o = \frac{-B}{2A} = -1 \rightarrow y_o = x_o - 1 = -2 \rightarrow$ Tọa độ tiếp điểm là $(-1, -2)$

Phương pháp 2 : Điểm cố định $M_o(x_o, y_o) \in$

đồ thị $\Leftrightarrow y_o = \frac{2x_o^2 + (1-m)x_o + 1 + m}{x_o - m} \forall m$

$\Leftrightarrow (x_o - y_o - 1)m + x_o y_o - 2x_o^2 - x_o - 1 = 0 \forall m$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_o - y_o - 1 = 0 \\ x_o y_o - 2x_o^2 - x_o - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_o = x_o - 1 \\ -(x_o + 1)^2 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_o = -1 \\ y_o = -2 \end{cases}$

Mặt khác $y'(x_o) = \frac{2x_o^2 - 4mx_o + m^2 - 2m - 1}{(x_o - m)^2} =$

$= \frac{(m+1)^2}{-(1-m)^2} = 1$

Vậy đồ thị hàm số luôn tiếp xúc với đường thẳng cố định là tiếp tuyến với đồ thị tại tiếp điểm $(-1, -2)$ có phương trình là $y = y'(x_o)(x - x_o) + y_o \Leftrightarrow y = x - 1$

Phương pháp 3 :

$y = \frac{(x^2 + 2x + 1) + x^2 - (m+1)x + m}{x - m} =$

$= \frac{(x+1)^2}{x-m} + (x-1)$

Vì phương trình $\frac{(x+1)^2}{x-m} + x - 1 = x - 1 \Leftrightarrow$

$\frac{(x+1)^2}{x-m} = 0$ có nghiệm kép $x = -1$ nên đồ thị luôn tiếp xúc với đường thẳng $y = x - 1$ tại điểm cố định $(-1, -2)$

Bài 2 [Đề 92I.3] : CMR : Tiệm cận xiên của hàm

số $y = \frac{(m+1)x^2 - 2mx - (m^3 - m^2 - 2)}{x - m}$ luôn tiếp xúc với 1 parabol cố định

Giải : Biến đổi $y = (m+1)x + m(m-1) + \frac{2}{x-m}$

$\rightarrow$ Tiệm cận xiên $y = (m+1)x + m(m-1)$

Phương pháp 1 : Giả sử tiệm cận xiên luôn tiếp xúc với parabol $y = ax^2 + bx + c$ khi đó phương trình $ax^2 + bx + c = (m+1)x + m(m-1)$ hay $ax^2 + (b-1-m)x + c-m(m-1) = 0$ có nghiệm kép $\forall m$

$\Leftrightarrow a \neq 0$ và $\Delta = (1+4a)m^2 + 2(1-b-2a)m + (1-2b+b^2-4ac) = 0 \forall m$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 1+4a = 0 \\ 1-b-2a = 0 \\ 1-2b+b^2-4ac = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1/4 \\ b = 3/2 \\ c = -1/4 \end{cases}$

$\rightarrow$ Parabol phải tìm là $y = (-1/4)x^2 + (3/2)x - 1/4$

Phương pháp 3 : Bước 1 : Dự đoán Parabol

(Làm nháp) : $\frac{dy}{dm} = 2m + (x-1) = 0$

$\Leftrightarrow m = \frac{1-x}{2}$

Thế $m = \frac{1-x}{2}$ vào phương trình tiệm cận xiên

$\rightarrow y = \left(\frac{1-x}{2} + 1\right)x + \frac{1-x}{2} \left(\frac{1-x}{2} - 1\right) = \frac{-x^2 + 6x - 1}{4}$

Bước 2 : Chứng minh điều dự đoán

Xét phương trình

$$(m+1)x + m(m-1) = \frac{-x^2 + 6x - 1}{4}$$

$$\Leftrightarrow m^2 + (x-1)m + \frac{(x-1)^2}{4} = 0$$

$\Leftrightarrow \left[m + \frac{x-1}{2} \right]^2 = 0$ có nghiệm kép. Vậy tiệm cận xiên luôn tiếp xúc parabol $y = (-1/4)x^2 + (3/2)x$

Phương pháp 4 : Bước 1 : (Dự đoán) : Điểm $M(x, y) \notin$ Tiệm cận xiên nào $\Leftrightarrow y = (m+1)x + m(m-1)$

hay $m^2 + (x-1)m + (x-y) = 0$ vô nghiệm m

$$0 > \Delta = (x-1)^2 - 4(x-y)$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x^2 + 6x - 1}{4} > y \rightarrow \text{Dự đoán đường cố định}$$

$$\text{là } y = \frac{-x^2 + 6x - 1}{4}$$

Bước 2 : Chứng minh điều dự đoán

Xét phương trình $(m+1)x + m(m-1) =$

$$= \frac{-x^2 + 6x - 1}{4} \Leftrightarrow m^2 + (x-1)m + \frac{(x-1)^2}{4} = 0$$

$\Leftrightarrow \left[m + \frac{x-1}{2} \right]^2 = 0$ có nghiệm kép. Vậy parabol cần tìm là $y = (-1/4)x^2 + (3/2)x - 1/4$

Bài 3 [Đề 19Va]. CMR : Họ đường thẳng $D(\alpha) : x \cos \alpha + y \sin \alpha + 2 \cos \alpha + 1 = 0$ luôn tiếp xúc với 1 đường cong cố định

Phương pháp 3 : Bước 1 : (Dự đoán) : Giải

$$\text{hệ } \begin{cases} f(x, y, \alpha) = 0 \\ \frac{df}{d\alpha} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \cos \alpha + y \sin \alpha + 2 \cos \alpha + 1 = 0 \\ -x \sin \alpha + y \cos \alpha - 2 \sin \alpha = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+2) \cos \alpha + y \sin \alpha = -1 \\ y \cos \alpha - (x+2) \sin \alpha = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos \alpha = \frac{x+2}{(x+2)^2 + y^2} \\ \sin \alpha = \frac{y}{(x+2)^2 + y^2} \end{cases}$$

$$\rightarrow \left[\frac{x+2}{(x+2)^2 + y^2} \right]^2 + \left[\frac{y}{(x+2)^2 + y^2} \right]^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow (x+2)^2 + y^2 = 1 \rightarrow \text{Dự đoán đường cố định}$$

$$\text{là đường tròn } (x+2)^2 + y^2 = 1$$

Bước 2 : Chứng minh điều dự đoán

Gọi $I(-2, 0)$ là tâm đường tròn $(x+2)^2 + y^2 = 1$ ta có

$$d(I, D(\alpha)) = \frac{|-2 \cos \alpha + 0 \cdot \sin \alpha + 2 \cos \alpha + 1|}{\sqrt{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}} = 1$$

Vậy họ $D(\alpha)$ luôn tiếp xúc với đường tròn $(x+2)^2 + y^2 = 1$

Phương pháp 4 : Bước 1 (Dự đoán) : Điểm $M(x, y) \notin$ họ $D(\alpha) \Leftrightarrow$

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha + 2 \cos \alpha + 1 = 0 \quad \text{hay} \\ (x+2) \cos \alpha + y \sin \alpha = -1 \quad \text{vô nghiệm } \alpha \Leftrightarrow \\ (x+2)^2 + y^2 < (-1)^2 = 1 \rightarrow \text{Dự đoán là đường} \\ \text{tròn } (x+2)^2 + y^2 = 1$$

Bước 2 : Chứng minh giống bước 2 ở trên

Bài 4 : CMR : Họ đường cong

$$y = x^5 - 4x^4 + 3x^3 - 5x^2 + mx + \frac{3-m^2}{4} \quad \text{luôn} \\ \text{tiếp xúc với 1 đường cong cố định}$$

Phương pháp 3 : Bước 1 (Dự đoán) :

$$\frac{dy}{dm} = x - \frac{m}{2} = 0 \Leftrightarrow m = 2x.$$

Thế $m = 2x$ vào biểu thức hàm số $\rightarrow$

$$y = x^5 - 4x^4 + 3x^3 - 4x^2 + \frac{3}{4} \quad \text{là đường cong cố} \\ \text{định dự đoán}$$

Bước 2 : Chứng minh điều dự đoán.

Xét phương trình

$$x^5 - 4x^4 + 3x^3 - 5x^2 + mx + \frac{3-m^2}{4} =$$

$$= x^5 - 4x^4 + 3x^3 - 4x^2 + \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - mx + \frac{m^2}{4} = \left(x - \frac{m}{2}\right)^2 = 0 \quad \text{có nghiệm} \\ \text{kép. Vậy họ đường cong đã cho luôn tiếp xúc với} \\ \text{đường cong } y = x^5 - 4x^4 + 3x^3 - 4x^2 + \frac{3}{4}$$

Một số bài tập áp dụng

1. [Đề 40I.2] CMR $\forall m \neq 0$ đồ thị hàm số $y = \frac{(m+1)x+m}{x+m}$ luôn tiếp xúc với 1 đường thẳng cố định

2. [Đề 102I.2] CMR Đồ thị hàm số $y = x^2 + (2m+1)x + m^2 - 1$ luôn tiếp xúc với 1 đường thẳng cố định

3. [Đề 41IVa] CMR : Họ đường thẳng $D(p) : y = (2p+1)x - p^2$ luôn tiếp xúc với 1 parabol cố định

4. [Đề 143I.2] CMR : Đồ thị hàm số $y = \frac{-m(x+1)+x+2}{m(x+1)-1} (m \neq 0)$ luôn tiếp xúc với 1 đường thẳng cố định

5. [Đề 64I] Cho $y = \frac{x^2 \cos \alpha + x + \sin^2 \alpha \cos \alpha + \sin \alpha}{x + \cos \alpha} (\alpha \neq k\pi, k$

$\in \mathbb{Z})$ CMR : Tiệm cận xiên luôn tiếp xúc với parabol cố định. Tìm quỹ tích tiếp điểm

6. [Đề 57I] Cho $y = \frac{(m-2)x - (m^2 - 2m + 4)}{x - m}$ CMR : Đồ thị

hàm số luôn tiếp xúc với hai đường thẳng cố định. (Xem tiếp trang 9)

Tìm hiểu sâu thêm toán học phổ thông

VỀ MỘT PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC VEC-TƠ

NGUYỄN VIỆT HẢI
(Hải Phòng)

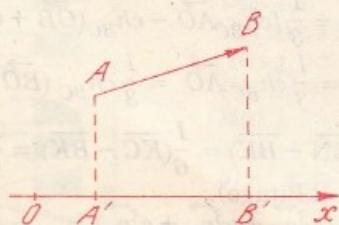
Để chứng minh một đẳng thức vectơ ta thường dùng các biến đổi vectơ và sử dụng các đẳng thức vectơ cơ bản. Ở đây đưa ra 1 phương pháp chứng minh đẳng thức vectơ khá thuận lợi trong nhiều trường hợp; phương pháp sử dụng hình chiếu vectơ trên 1 trục.

1. Hình chiếu của một vectơ trên một trục:

Trên mặt phẳng cho $\vec{a} = \vec{AB}$ và một trục x .

Gọi A', B' lần lượt là hình chiếu vuông góc của A và B trên x (Hình 1). Ta gọi độ dài đại số $A'B'$ là hình chiếu của $\vec{a} = \vec{AB}$ trên trục x ; kí hiệu:

$$A'B' = ch_x(\vec{a}) = ch_x(\vec{AB})$$



Hình 1

Với định nghĩa trên ta đưa ra 4 tính chất sau:

1.1 $ch_x(\vec{a}) = |\vec{a}| \cdot \cos \varphi$, trong đó φ là góc tạo bởi $\vec{a}$ và chiều dương của trục x .

1.2 $ch_x(\vec{a} + \vec{b}) = ch_x(\vec{a}) + ch_x(\vec{b})$

1.3 $\forall k \in \mathbb{R}, ch_x(k\vec{a}) = kch_x(\vec{a})$.

1.4 $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow ch_x(\vec{a}) = ch_x(\vec{b})$ và $ch_y(\vec{a}) = ch_y(\vec{b})$

trong đó x và y là 2 trục không song song. Chứng minh các tính chất 1.1, 1.2, 1.3 không có gì khó khăn. Ta chỉ nêu phép chứng minh 1.4

Điều kiện cần: hiển nhiên do áp dụng 1.1

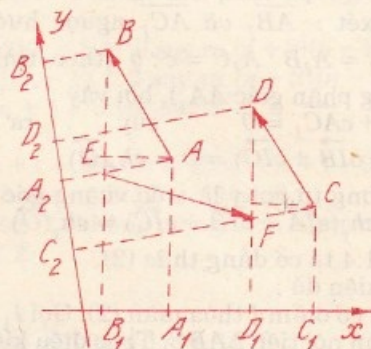
Điều kiện đủ: Đặt $\vec{a} = \vec{AB}$; $\vec{b} = \vec{CD}$, giả sử: $ch_x \vec{AB} = A_1B_1$; $ch_x \vec{CD} = C_1D_1$;

$ch_y \vec{AB} = A_2B_2$; $ch_y \vec{CD} = C_2D_2$ theo giả thiết $A_1B_1 = C_1D_1$; $A_2B_2 = C_2D_2$.

Gọi E là giao của AA_2 và BB_1 , F là giao của CC_2 , DD_1 (Hình 2), bằng cách xét 2 tam giác vuông bằng nhau ta suy ra $EA \parallel FC$, $EA = FC$, vậy $EACF$ là hình bình hành $\Rightarrow AC = EF$.

Tương tự $EBDF$ là hình bình hành $\Rightarrow BD = EF$

Đẳng thức $\vec{AC} = \vec{BD}$ chứng tỏ $\vec{AB} = \vec{CD}$, hay $\vec{a} = \vec{b}$.



Hình 2

2. Áp dụng:

Các bài toán sau đây đều có thể giải được không cần dùng chiếu vectơ. Bạn đọc có thể so sánh cách giải ở đây và các cách giải đã biết, đặc biệt 2 ví dụ 3 và 4 nếu không dùng chiếu vectơ, cách giải sẽ khó khăn.

Ví dụ 1.

Cho H và O là trực tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC . Chứng minh rằng: $\vec{OH} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$ (1)

Giải.

• Chọn đường thẳng BC là trục, chiếu của trục BC là chiếu của $\vec{BC}$ (hình 3)

$$\begin{aligned} ch_{BC}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}) &= \\ &= ch_{BC}(\vec{OA}) + ch_{BC}(\vec{OB} + \vec{OC}) = ch_{BC}(\vec{OA}) + \\ &+ ch_{BC}(2\vec{OM}) = ch_{BC}(\vec{OA}) + 0 = ch_{BC}(\vec{OH}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Tương tự với } \vec{AB} \text{ là trục thì} \\ ch_{AB}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}) &= ch_{AB}(\vec{OH}) \end{aligned}$$

Theo 1.4 ta có đẳng thức (1).

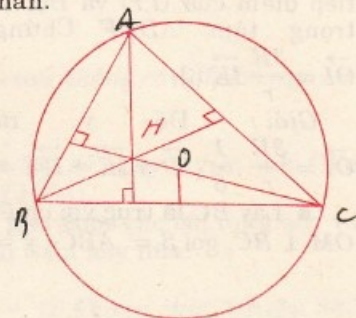
Ví dụ 2 (xem bài tập 3, 4 ôn tập cuối năm, HH10). Cần và đủ để điểm I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC là $a\vec{IA} + b\vec{IB} + c\vec{IC} = \vec{0}$ (2)

Giải:

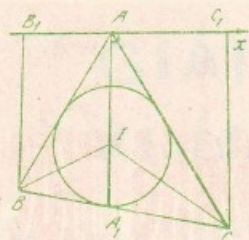
Điều kiện cần:

Giả sử I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC (Hình 4).

• Lấy trục x là đường thẳng vuông góc với IA tại A , có chiếu như hình vẽ, Hạ BB_1 , CC_1 vuông góc với x .



Hình 3



Hình 4

$ch_x(a\vec{IA} + b\vec{IB} + c\vec{IC}) = 0 + ch_x(b\vec{IB} + c\vec{IC}) =$
 $= b\vec{AB}_1 + c\vec{AC}_1$ Gọi A_1 là giao của AI và BC , ta
 có nhận xét: $\vec{AB}_1$ và $\vec{AC}_1$ ngược hướng và
 $AB_1 : AC_1 = A_1B : A_1C = c : b$ (theo tính chất
 của đường phân giác AA_1), bởi vậy:
 $b\vec{AB}_1 + c\vec{AC}_1 = \vec{0}$ suy ra
 $ch_x(a\vec{IA} + b\vec{IB} + c\vec{IC}) = 0 = ch_x(\vec{O})$.

• Tương tự, gọi y là trục vuông góc với IB
 tại B thì $ch_y(a\vec{IA} + b\vec{IB} + c\vec{IC}) = ch_y(\vec{O})$.

Theo 1.4 ta có đẳng thức (2).

Điều kiện đủ:

Giả sử có điểm I thỏa mãn (2). Gọi I_1 là tâm
 đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$. Theo điều kiện cần,
 I_1 phải thỏa mãn: $a\vec{I_1A} + b\vec{I_1B} + c\vec{I_1C} = \vec{0}$ (2')

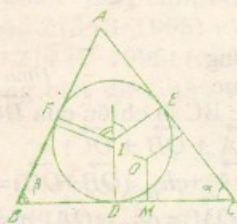
Từ (2) và (2') có:
 $\vec{0} = a(\vec{AI} - \vec{AI_1}) + b(\vec{BI} - \vec{BI_1}) + c(\vec{CI} - \vec{CI_1}) \Leftrightarrow$
 $(a+b+c)\vec{II_1} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{II_1} = \vec{0}$, tức là I trùng với I_1 .

Ví dụ 3: Gọi (O, R) và (I, r) là các đường tròn
 ngoại tiếp và nội tiếp $\triangle ABC$. D, E, F lần lượt là
 tiếp điểm của (I, r) và BC, CA, AB . Gọi K là
 trọng tâm $\triangle DEF$. Chứng minh rằng:

$$\vec{OI} = \frac{3R}{r} \vec{IK} \quad (3)$$

Giải: Để ý rằng (3) $\Leftrightarrow$
 $\vec{OI} = \frac{3R}{r} \cdot \frac{1}{3} (\vec{ID} + \vec{IE} + \vec{IF}) = \frac{R}{r} (\vec{ID} + \vec{IE} + \vec{IF})$

• Lấy BC là trục với chiều là chiều của $\vec{BC}$
 $OM \perp BC$, gọi $\beta = \angle ABC$; $\gamma = \angle ACB$ (Hình 5)



Hình 5

• $ch_{BC}(\vec{OI}) = ch_{BC}(\vec{BI} - \vec{BC}) = \vec{BD} - \vec{BM}$
 $= \frac{a+c-b}{2} - \frac{a}{2} = \frac{c-b}{2}$
 $ch_{BC}(\vec{ID} + \vec{IE} + \vec{IF}) = 0 + ch_{BC}(\vec{IE}) + ch_{BC}(\vec{IF}) =$

$= r \cos(90^\circ - \gamma) \pm r \cos(90^\circ + \beta)$
 (đó là vì $\vec{IE}, \vec{IF}$ là 2 vectơ có độ dài r , tạo với
 chiều dương của trục BC các góc $90^\circ - \gamma$; $90^\circ + \beta$).
 Sau đó áp dụng định lý sin vào $\triangle ABC$ ta có:

$$ch_{BC}(\vec{IE}) + ch_{BC}(\vec{IF}) = r(\sin \gamma - \sin \beta) = \frac{r}{2R}(c-b)$$

Như vậy:

$$ch_{BC}(\vec{OI}) = \frac{c-b}{2} = ch_{BC}\left(\frac{R}{2}(\vec{ID} + \vec{IE} + \vec{IF})\right)$$

• Cũng tương tự như vậy khi chọn AC là
 trục và ta suy ra (3).

Ví dụ 4: a, b, c là 3 cạnh $\triangle ABC$, M và O là
 trọng tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$,
 còn $S = S_{\triangle ABC}$. Gọi $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3$ là các vectơ đơn
 vị lần lượt vuông góc với BC, CA, AB , cùng
 chiều với các vectơ $\vec{ID}, \vec{IE}, \vec{IF}$ trong ví dụ 3.

Chứng minh rằng:

$$a^3 \vec{n}_1 + b^3 \vec{n}_2 + c^3 \vec{n}_3 = 12S \vec{MO} \quad (4)$$



Hình 6

Giải: • Tương tự ví dụ 3: hạ $AK \perp BC$, vì
 $\vec{OM} = \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})$

$$ch_{BC}(\vec{MO}) = \frac{1}{3}[ch_{BC}\vec{AO} - ch_{BC}(\vec{OB} + \vec{OC})]$$

$$= \frac{1}{3}ch_{BC}\vec{AO} = \frac{1}{3}ch_{BC}(\vec{BO} - \vec{BA})$$

$$= \frac{1}{3}(\vec{BN} - \vec{BK}) = \frac{1}{6}(\vec{KC} - \vec{BK}) = \frac{1}{6} \frac{b^2 - c^2}{a}$$

(theo định lý Pitago).

$$\bullet ch_{BC}(a^3 \vec{n}_1 + b^3 \vec{n}_2 + c^3 \vec{n}_3) =$$

$$= ch_{BC}(b^3 \vec{n}_2 + c^3 \vec{n}_3) = b^3 \sin \gamma - c^3 \sin \beta =$$

$$= \frac{b^3 c - c^3 b}{2R} \quad (\text{xem ví dụ 3}).$$

Do $S_{\triangle ABC} = \frac{abc}{4R}$ nên ta có:

$$\frac{b^3 c - c^3 b}{2R} = \frac{abc}{R} \frac{b^2 - c^2}{2a} = 4S \frac{b^2 - c^2}{2a}$$

Như vậy $ch_{BC}(a^3 \vec{n}_1 + b^3 \vec{n}_2 + c^3 \vec{n}_3) =$

$$= ch_{BC}(12S \vec{MO}) = \frac{2S(b^2 - c^2)}{a}$$

• Hoàn toàn tương tự khi lấy AB làm trục
 và ta suy ra điều phải chứng minh.

Để áp dụng được phương pháp trên bạn đọc
 hãy tự chứng minh đẳng thức sau:
 $(\sin 2A)OA + (\sin 2B)OB + (\sin 2C)OC = \vec{0}$ (5)
 trong đó O là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$.

Đến đây bạn đọc cũng tự thấy: từ một đẳng
 thức vectơ đã biết, bằng phép chiếu trên trục
 thích hợp ta sẽ được các đẳng thức tương ứng.
 Nói cách khác ta có thể sáng tạo ra những bài
 toán mới. Chẳng hạn khi ta chứng minh được
 (5) bằng các phương pháp khác, ta sẽ có các
 đẳng thức sau:

$$(b^2 - c^2) \sin 2A = a^2 (\sin 2C - \sin 2B) \quad (5.1)$$

$$(c^2 - a^2) \sin 2B = b^2 (\sin 2A - \sin 2C) \quad (5.2)$$

$$(a^2 - b^2) \sin 2C = c^2 (\sin 2B - \sin 2A) \quad (5.3)$$

ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO CÁC LỚP CHUYÊN ĐẠI HỌC TỔNG HỢP (ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI) NĂM HỌC 1995 - 1996

VÒNG I (Thời gian làm bài : 180 phút)

Câu I : Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x^2 - y^2 = 1 \\ xy + x^2 = 2 \end{cases}$$

Câu II : Giải phương trình

$$\sqrt{1-x} + \sqrt{4+x} = 3.$$

Câu III : Giả sử a, b là các số nguyên dương sao cho $\frac{a+1}{b} + \frac{b+1}{a}$ là một số nguyên. Gọi d là ước số của a và b . Chứng minh rằng $d \leq \sqrt{a+b}$.

Câu IV : Cho hai hình chữ nhật có cùng diện tích. Hình chữ nhật thứ nhất có các kích thước a và b ($a > b$). Hình chữ nhật thứ hai có các kích thước c và d ($c > d$). Chứng minh rằng nếu $a > c$ thì chu vi của hình chữ nhật thứ nhất lớn hơn chu vi của hình chữ nhật thứ hai.

Câu V : Cho ba điểm cố định A, B, C , thẳng hàng, theo thứ tự ấy. Gọi (Ω) là một vòng tròn qua B và C . Kẻ từ A các tiếp tuyến AE và AF đến vòng tròn (Ω) . (E và F là các tiếp điểm). Gọi O là tâm của vòng tròn (Ω) , I là trung điểm của BC , N là trung điểm của EF .

1. Chứng minh rằng E và F nằm trên một vòng tròn cố định khi vòng tròn (Ω) thay đổi.

2. Đường thẳng FI cắt vòng tròn (Ω) tại E' . Chứng minh rằng EE' song song với AB .

3. Chứng minh rằng tâm vòng tròn ngoại tiếp tam giác ONF nằm trên một đường thẳng cố định khi vòng tròn (Ω) thay đổi.

ĐÁP ÁN

Câu I (2 điểm) : Từ hệ $\begin{cases} 2x^2 - y^2 = 1 \\ xy + x^2 = 2 \end{cases}$ suy ra :

$$\begin{aligned} xy + x^2 &= 4x^2 - 2y^2 \Leftrightarrow 3x^2 - xy - 2y^2 = 0 \quad (1) \\ &\Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \text{ Hệ vô nghiệm} \\ &\Leftrightarrow x^2 = 2 \end{aligned}$$

- Nếu $y = 0$ thu được

$$(1) \Leftrightarrow 3\left(\frac{x}{y}\right)^2 - \left(\frac{x}{y}\right) - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{y} = 1 \\ \frac{x}{y} = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

Vậy hệ đã cho tương đương với :

$$\begin{cases} x = y \\ 2x^2 - y^2 = 1 \\ x = \frac{2}{3}y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ x = -1 \\ y = -1 \end{cases} \quad (\text{hệ vô nghiệm})$$

Câu II (2 điểm) :

Cách 1 : Điều kiện $-4 \leq x \leq 1$

$$\Leftrightarrow 5 + 2\sqrt{4-3x-x^2} = 9$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{4-3x-x^2} = 2$$

$$\Leftrightarrow 4 - 3x - x^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -3 \end{cases}$$

Cách 2 : Đặt $u = \sqrt{1-x}, v = \sqrt{4+x}$ ta thu được hệ

$$\begin{cases} u + v = 3 \\ u^2 + v^2 = 5 \end{cases} \text{ suy ra } v = 3 - u, u^2 + (3-u)^2 = 5$$

$$\Leftrightarrow 2u^2 - 6u + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ u = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{1-x} = 1 \\ \sqrt{1-x} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -3 \end{cases}$$

Câu III (1,5 điểm) : Vì $\frac{a^2 + b^2 + a + b}{ab}$ là một số nguyên

suy ra $a^2 + b^2 + a + b : ab$

Vì d là ước số chung của a và b

suy ra $a^2 + b^2 + a + b : d^2 \quad (1)$

Mặt khác $a^2 + b^2 : d^2 \quad (2)$

Từ (1) và (2) ta suy ra

$$a + b : d^2, \text{ suy ra } a + b \geq d^2 \Leftrightarrow \sqrt{a+b} \geq d.$$

Câu IV (1,5 điểm) : Kí hiệu diện tích của hai hình chữ nhật là S .

Ta có $S = a \cdot b = c \cdot d$. Ta phải chứng minh

$$a + b > c + d \Leftrightarrow a + \frac{S}{a} > c + \frac{S}{c} \Leftrightarrow (a - c) \left(1 - \frac{S}{ac}\right) > 0.$$

$$\text{Từ } \begin{cases} a > b \\ c > d \end{cases} \text{ suy ra } S < ac \text{ hay } \left(1 - \frac{S}{ac}\right) > 0.$$

Ta có $a - c > 0$ (theo giả thiết). Vậy

$$(a - c) \left(1 - \frac{S}{ac}\right) > 0 \quad (\text{đpcm})$$

Câu V (3 điểm) : 1. (1 điểm) $AE = AF$, ta có

$AE^2 = AB \cdot AC$ suy ra

$AE = \sqrt{AB \cdot AC}$ không đổi $\Rightarrow E, F$ thuộc vòng tròn tâm A bán kính $\sqrt{AB \cdot AC}$

2. (1 điểm) Năm điểm A, E, I, O, F nằm trên đường tròn đường

kính AO ($\angle AEO = \angle AIO = \angle AFO$

$= 90^\circ$). Suy ra $\angle AOF = \angle AIF$

(cùng chắn cung AF) (1) góc

$$\angle AOF = \frac{1}{2} \angle EOF = \angle EE'I \quad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra $\angle AIF =$

$$= \angle EE'I \Rightarrow E'E \parallel BC.$$

3. (1 điểm) Gọi K là giao điểm của BC với EF . Ta có tứ

giác $ONKI$ là tứ giác nội tiếp. Suy ra vòng tròn ngoại tiếp tam

giác ONI là vòng tròn ngoại tiếp tứ giác $ONKI$. Ta có

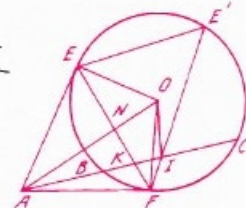
$$\triangle ANK \sim \triangle AIO \text{ suy ra } AK \cdot AI = AN \cdot AO$$

Ta có $AN \cdot AO = AB \cdot AC = AE^2$ không đổi. AI không đổi.

Suy ra AK không đổi, vậy điểm K cố định. Vậy tâm của vòng

tròn ngoại tiếp tam giác $\triangle ONI$ nằm trên đường trung trực của

đoạn KI .



VÒNG II

(Thời gian làm bài : 180 phút)

Câu I : Cho $(x + \sqrt{x^2 + 3})(y + \sqrt{y^2 + 3}) = 3$

Hãy tính giá trị của biểu thức $E = x + y$

$$\text{Câu II : Giải hệ phương trình } \begin{cases} x + xy + y = 1 \\ x + yz + z = 3 \\ z + zx + x = 7 \end{cases}$$

Giải đáp bài

ĐIỂM CỦA MỖI NGƯỜI

Ta ghi số điểm về từng người trong các câu trả lời vào bảng như sau :

	Xuân	Hạ	Thu	Đông
Xuân trả lời		8	9	7
Hạ trả lời	9		8	10
Thu trả lời	7	7		7
Đông trả lời	8	8	8	

- Căn cứ vào điều kiện : Không có bạn nào được 2 bạn nói cùng đúng với số điểm của mình ta suy ra :
Hạ không được điểm 8
Thu không được điểm 8
Đông không được điểm 7.

- Căn cứ vào điều kiện : Mỗi câu trả lời chỉ nói đúng số điểm của một người ta suy ra

Xuân được 8 và Thu được 9

Từ đó suy ra Hạ được 7 và Đông được 10.

Tóm lại ta có : Hạ 7, Xuân 8, Thu 9 và Đông 10.

(Dựa theo Đoàn Phú An, 6A, Chuyên Gia Lai).

Nhận xét : Tất cả các bạn gửi giải đáp đều có giải đáp tốt.

BÌNH PHƯƠNG



VIẾT SỐ TRONG BÀN CỜ

Bàn cờ vua có 64 ô, trong đó số các ô trắng bằng số các ô đen và xen kẽ nhau.

Các bạn hãy viết vào mỗi ô của bàn cờ một số từ 1 đến 16 sao cho thỏa mãn các tính chất :

1) Số các ô được viết từ 1 đến 16 là bằng nhau.

2) Tổng các số viết trong các ô trắng của mỗi hàng ngang hoặc mỗi hàng dọc đều bằng nhau và cũng bằng tổng các số viết trong các ô đen của mỗi hàng ngang hoặc mỗi hàng dọc.

3) Tổng các số viết trong các ô nằm trên mỗi đường chéo của bàn cờ cũng bằng nhau.

NGÂN HỒ

Câu III : Cho $x, y \geq 0$ và $x^2 + y^2 = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x^3 + y^3 \leq 1$$

Câu IV : Tìm số nguyên có chín chữ số $A = a_1a_2a_3b_1b_2b_3a_1a_2a_3$ trong đó $a_1 \neq 0$ và $b_1b_2b_3 = 2 \cdot a_1a_2a_3$, đồng thời A có thể viết được dưới dạng $A = p_1^2 \cdot p_2^2 \cdot p_3^2 \cdot p_4^2$ với p_1, p_2, p_3, p_4 là bốn số nguyên tố khác nhau.

Câu V : Cho vòng tròn (Ω), vẽ hai dây cung AB và CD cắt nhau ở I (I nằm trong vòng tròn). Gọi M là trung điểm của BD , MI kéo dài cắt AC ở N . Chứng minh rằng :

$$\frac{AN}{NC} = \frac{AI^2}{CI^2}$$

ĐÁP ÁN

Câu I (3 điểm) : Nhân cả hai vế của đẳng thức đã cho với $(x - \sqrt{x^2 + 3})$ ta được :

$$-3(y + \sqrt{y^2 + 3}) = 3(x - \sqrt{x^2 + 3}) \quad (1)$$

Nhân cả hai vế của đẳng thức đã cho với $(y - \sqrt{y^2 + 3})$ ta được :

$$-3(x + \sqrt{x^2 + 3}) = 3(y - \sqrt{y^2 + 3}) \quad (2)$$

Cộng (1) và (2) về theo vế ta nhận được : $6(x + y) = 0 \Rightarrow x + y = 0$

Câu II (3 điểm) : Hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} (x+1)(y+1) = 2 \\ (y+1)(z+1) = 4 \quad (*) \\ (z+1)(x+1) = 8 \end{cases}$$

Nhân ba phương trình lại ta được :

$$[(x+1)(y+1)(z+1)]^2 = 64$$

$$1) (x+1)(y+1)(x+1) = 8$$

$$\text{Kết hợp với } (*) \text{ suy ra nghiệm } \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 3 \end{cases}$$

$$2) (x+1)(y+1)(x+1) = -8$$

$$\text{Kết hợp với } (*) \text{ suy ra nghiệm } \begin{cases} x = -3 \\ y = -2 \\ z = -5 \end{cases}$$

Câu III (3 điểm) : 1) Từ giả thiết suy ra $\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^3 \leq x^2 \\ y^3 \leq y^2 \end{cases} \Rightarrow x^3 + y^3 \leq x^2 + y^2 = 1$$

2) Trước hết ta có : $(x+y)^2 \leq 2(x^2 + y^2) = 2 \Rightarrow x+y \leq \sqrt{2}$.

$$1 = (x^2 + y^2)^2 = (\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} + \sqrt{y} \cdot \sqrt{y})^2 \leq \leq (x+y)(x^3 + y^3) \leq \sqrt{2}(x^3 + y^3)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \leq x^3 + y^3$$

Câu IV (3 điểm) : $A = a_1a_2a_3b_1b_2b_3a_1a_2a_3$

$$= \frac{a_1a_2a_3}{10^6} \cdot 10^6 + \frac{b_1b_2b_3}{10^3} \cdot 10^3 + \frac{a_1a_2a_3}{10^6} \cdot 10^6$$

$$= \frac{a_1a_2a_3}{10^6} \cdot 10^6 + 2 \cdot \frac{a_1a_2a_3}{10^3} \cdot 10^3 + \frac{a_1a_2a_3}{10^6} \cdot 10^6 = a_1a_2a_3(10^6 +$$

$$2 \cdot 10^3 + 1) = \frac{a_1a_2a_3}{10^6} (1002001)$$

$$= \frac{a_1a_2a_3}{10^6} \cdot 7^2 \cdot 11^2 \cdot 13^2$$

Vậy $a_1a_2a_3$ phải bằng bình phương của một số nguyên tố p khác với 7, 11, 13.

$$\text{Do } b_1b_2b_3 < 1000 \Rightarrow a_1a_2a_3 < 500 \Rightarrow 10 < p < 23$$

Như vậy p chỉ có thể là 17 hoặc 19

$$\Rightarrow a_1a_2a_3 = 289$$

$$\text{hoặc } a_1a_2a_3 = 361$$

Như vậy bài toán có hai đáp số : $\begin{cases} A = 289578289 \\ A = 361722361 \end{cases}$

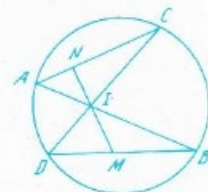
Câu V (3 điểm) : Ta có : $\frac{AN}{NC} = \frac{S_{AIN}}{S_{CIN}} = \frac{S_{AIN}}{S_{CIN}} \cdot \frac{S_{IDM}}{S_{IDM}} = \frac{S_{AIN}}{S_{CIN}} \cdot \frac{S_{IDM}}{S_{IDM}}$

$$\text{mà } \frac{S_{AIN}}{S_{IMB}} = \frac{IA \cdot IN}{IB \cdot IM} \text{ tương tự } \frac{S_{IDM}}{S_{CIN}} = \frac{ID \cdot IM}{IC \cdot IN} \text{ nên } \frac{AN}{NC} =$$

$$\frac{IA}{IB} \cdot \frac{ID}{IC} = \frac{IA}{IC} \cdot \frac{ID}{IB}$$

$$\text{Ta lại có } \frac{IA}{IB} = \frac{AI^2}{BI^2}$$

$$\text{Từ đó } \frac{AN}{NC} = \frac{AI^2}{CI^2}$$



NGUYỄN VĂN MẬU

ISSN : 0866 - 8035

Chỉ số : 12884

Mã số : 8BT30M6

Sắp chữ tại TTVT Nhà xuất bản giáo dục

In tại nhà máy in Diên Hồng, 59 Giảng Võ

In xong và nộp lưu chiểu tháng 6/1996

Giá 2.000đ
Hai nghìn đồng