BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ★ HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

5 (227)
1996
NĂM THỨ 33

TẠP CHÍ RA NGÀY 15 HÀNG THÁNG

★ TÌM THÊM NHỮNG HỆ THỨC VÉCTƠ TRONG TAM GIÁC

★ ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC QUỐC GIA 1995

★ ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI

★ SỐ Ả RẬP

★ KẾT QUẢ THI HỌC SINH GIỎI TOÁN TOÀN QUỐC LỚP 9

★ TRÒ CHƠI ĐOÁN CẦU

★ ĐIỀN SỐ VÀO HÌNH VUÔNG

Giám đốc Sở Giáo dục - Đào tạo Hà Nội Nguyễn Kim Hoãn cùng học sinh giỏi trường Hà Nội - Amsterdam

TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ
MATHEMATICS AND YOUTH

MỤC LỤC

Trang

- ***Tìm hiểu sâu thêm toán học phổ thông***
  To help young friends gain better understanding in school Maths
  My Duy Thọ – Tìm thêm những hệ thức véctơ trong tam giác 1
- ***Giải bài kì trước***
  Solutions of problems in previous issue
  Các bài của số 223 2
- Kết quả kì thi chọn học sinh giỏi quốc gia lớp 9 8
- ***Đề ra kì này***
  Problems in this issue
  T1/227,..., T10/227, L1/227, L2/227 10
- *Đề thi tuyển sinh 1995 Đại học Quốc gia Hà Nội.* 12
- *Đề thi tuyển sinh lớp 10 Đại học Sư phạm* 15
- ***Bạn có biết***
  Do you know ?
  Nguyễn Cao Thắng – Số Ả Rập. Bìa 3
- ***Giải trí toán học.***
  Fun with Mathematics.
- *Ống kính cải cách dạy và học toán.* Bìa 4
  Kaleidoscope : reform of Maths teaching and learning
  Đặng Kỳ Phong – Một đề toán sai
  Bình Phương – Giải đáp bài
  Trò chơi đoán cầu.
  Ngô Hân – Điền số vào hình vuông.

Trụ sở tòa soạn :
45B Hàng Chuối, Hà Nội ĐT: 8213786
231 Nguyễn Văn Cừ, TP Hồ Chí Minh ĐT: 8356111

Biên tập và trị sự : VŨ KIM THỦY
Trình bày : TRỌNG THIỆP

Tìm hiểu sâu thêm toán học phổ thông

TÌM THÊM NHỮNG HỆ THỨC VÉCTƠ TRONG TAM GIÁC

MỴ DUY THỌ
Thanh Hóa

Trong sách giáo khoa và trong một số đề ra trên báo THTT đã cung cấp cho chúng ta một số hệ thức véctơ trong tam giác sau đây :

Cho ΔABC gọi G, H, O, I lần lượt là trọng tâm, trực tâm, tâm vòng tròn ngoại tiếp, nội tiếp của ΔABC

(1) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 0$

(2) $\text{tg}A\,\overrightarrow{HA} + \text{tg}B\,\overrightarrow{HB} + \text{tg}C\,\overrightarrow{HC} = \overrightarrow{0}$

(3) $\sin A\,.\,\overrightarrow{IA} + \sin B\,.\,\overrightarrow{IB} + \sin C\,.\,\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{0}$

(4) $\sin 2A\,.\,\overrightarrow{OA} + \sin 2B\,.\,\overrightarrow{OB} + \sin 2C\,.\,\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{0}$

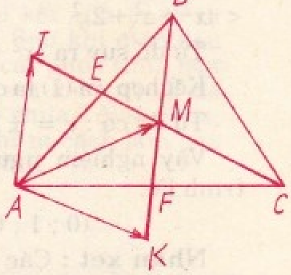
(5) $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$

Và các bài toán trên đã được giải mỗi bài 1 kiểu khác nhau.

Trước hết ta đưa ra một cách chứng minh chung cho tất cả các hệ thức 1, 2, 3, 4

Bài toán : Cho tam giác ABC. Trên các đường thẳng AB và AC lấy 2 điểm E, F Đặt $\dfrac{\overline{AE}}{\overline{EB}} = p$, $\dfrac{\overline{AF}}{\overline{FC}} = q$. Hai đường thẳng BF và CE cắt nhau ở M. Chứng minh

$$\overrightarrow{AM} = p\,\overrightarrow{MB} + q\,\overrightarrow{MC}$$



Giải : Kẻ $AI \,//\, BF$ cắt đường thẳng CE ở I

Kẻ $AK \,//\, CE$ cắt đường thẳng BF ở K

Ta có $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AK}$

Theo Talét : $\dfrac{\overline{AI}}{\overline{MB}} = \dfrac{\overline{AE}}{\overline{EB}} = p \Rightarrow \overrightarrow{AI} = p\,\overrightarrow{MB}$

$\dfrac{\overline{AK}}{\overline{MC}} = \dfrac{\overline{AF}}{\overline{FC}} = q \Rightarrow \overrightarrow{AK} = q\,\overrightarrow{MC}$.

Từ đó có điều phải chứng minh.

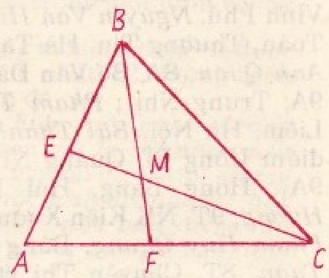
Chú ý : Khi $p + q + 1 = 0$ thì $BF \,//\, CE$ ta không có điểm M.

Các hệ thức véctơ đã biết là hệ quả trực tiếp của bài toán này. Thật vậy !

– Khi $M \equiv G$ là trọng tâm ΔABC thì E, F là 2 trung điểm $\Rightarrow$ $p = q = 1$ nên

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \Rightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}.$$

– Khi $M \equiv H$ là trực tâm ΔABC thì CE, BF là 2 đường cao :



$$\frac{\overline{AE}}{\overline{EB}} = \frac{\dfrac{\overline{CE}}{\overline{EB}}}{\dfrac{\overline{CE}}{\overline{AE}}} = \frac{\text{tg}B}{\text{tg}A} = p$$

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{FC}} = \frac{\text{tg}C}{\text{tg}A} = q$$

Chú ý : đúng cả khi Δ có góc tù.

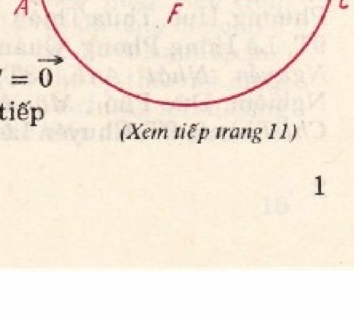
Vậy $\overrightarrow{AM} = \dfrac{\text{tg}B}{\text{tg}A}\overrightarrow{MB} + \dfrac{\text{tg}C}{\text{tg}A}\overrightarrow{MC} \Rightarrow$

$$\text{tg}A\overrightarrow{MA} + \text{tg}B\overrightarrow{MB} + \text{tg}C\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}$$

– Khi $M \equiv I$ là tâm vòng tròn nội tiếp thì BF và CE là 2 phân giác trong. Do đó

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{EB}} = \frac{AE}{EB} = \frac{CA}{CB} = \frac{b}{a} = \frac{\sin B}{\sin A} = p$$

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{FC}} = \frac{\sin C}{\sin A} = q$$



Vậy $\overrightarrow{AM} = \dfrac{\sin B}{\sin A}\overrightarrow{MB} +$

$+ \dfrac{\sin C}{\sin A}\overrightarrow{MC}$

$$\Rightarrow \sin A\,\overrightarrow{MA} + \sin B\,\overrightarrow{MB} + \sin C\,\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}$$

– Khi $M \equiv O$ là tâm vòng tròn ngoại tiếp

(Xem tiếp trang 11)

GIẢI BÀI kì trước

Bài T1/223. *Giải phương trình nghiệm nguyên*
$$x^4 - y^4 + z^4 + 2x^2z^2 + 3x^2 + 4z^2 + 1 = 0.$$

Lời giải : (*Trần Tất Đạt*, $8A_1$, Chu Văn An, Hà Nội)

Viết lại phương trình dưới dạng :
$$y^4 = x^4 + z^4 + 2x^2z^2 + 3x^2 + 4z^2 + 1$$
$$\Leftrightarrow y^4 = (x^2 + z^2 + 1)^2 + x^2 + 2z^2 \qquad (1)$$
$$\Leftrightarrow y^4 = (x^2 + z^2 + 2)^2 - (x^2 + 3) \qquad (2)$$

Nhưng ta có $x^2 + 2z^2 \geq 0$ và $x^2 + 3 > 0$ $\forall x, z \in Z$.

Từ (1) và (2) ta có : $(x^2 + z^2 + 1)^2 \leq y^4 < (x^2 + z^2 + 2)^2$.

Từ đó suy ra $(x^2 + z^2 + 1)^2 = y^4$

Kết hợp với (1) ta có $x^2 + 2z^2 = 0$ hay $x = z = 0$

Từ đó có : $y = \pm 1$

Vậy nghiệm nguyên (x, y, z) của phương trình là :

$$(0 ; 1 ; 0), (0 ; -1 ; 0).$$

Nhận xét : Các lời giải gửi đến đều đúng. Các bạn sau đây có lời giải tốt : *Hoàng Phương Đông*, 9A, THCS Cốc Lếu, Lào Cai ; *Vũ Tuấn Anh*, 9CT, NK Thái Nguyên, Bắc Thái. *Nguyễn Thị Hoan*, 8a ; *Phạm Hải Trung*, 9CT, NK Tiên Sơn, *Nguyễn Việt Dũng*, 9, NK Lạng Giang ; *Phạm Trung Dũng, Dương Quang Kiên, Phùng Đức Dũng*, 9T, NK Bắc Giang, Hà Bắc. *Trần Trung Dũng*, 9A, chuyên Phong Châu, Vĩnh Phú. *Nguyễn Văn Hiên*, 9, chuyên Văn – Toán, Thường Tín, Hà Tây. *Trần Kỳ An, Ngô Anh Quân*, 8A, Bế Văn Đàn ; *Nguyễn Lê Vân*, 9A, Trưng Nhị ; *Phạm Thế Hùng*, 7CT, Từ Liêm, Hà Nội. *Bùi Thanh Giang*, 9A, Trọng điểm Uông Bí, Quảng Ninh. *Cao Xuân Hòa*, $9A_1$, Hồng Bàng, Hải Phòng. *Phan Tiểu Hương*, 9T, NK Kiến Xương ; *Trần Cường*, 8T, *Phạm Huy Quang*, Đông Hưng ; *Đặng Ngọc Tuấn*, 8T, Chuyên Thị xã, Thái Bình. *Đoàn Phương*, 8T ; *Mai Ngọc Kha, Nguyễn Hồng Dung*, 9T, Trần Đăng Ninh, Nam Định, Nam Hà. *Hoàng Thế Hùng ; Mai Hồng Chương*, 8T, NK thị xã, Ninh Bình. *Cao Xuân Sinh*, 9T, Nga Liên, Nga Sơn ; *Nguyễn Thanh Hải, Nguyễn Chu Chinh*, 8T, Quán Hành, Nghi Lộc ; *Lê Thị Tâm*, 9A, Hưng Dũng, Vinh, Nghệ An. *Võ Sĩ Nam*, 9CT, NK Đức Thọ, Hà Tĩnh. *Phùng Ngọc Chương*, 9C, Võ Ninh, Quảng Ninh, Quảng Bình. *Trương Thành Công*, 9TL, Chuyên Quảng Trị. *Trần Như Quang*, 9^1, Nguyễn Tri Phương, Huế, Thừa Thiên – Huế. *Thành Dung*, 9T, Lê Hồng Phong, Quảng Nam – Đà Nẵng. *Nguyễn Nhật Anh*, 8T, Chuyên Nguyễn Nghiêm, Đức Phổ ; *Mai Hàn Giang*, 8T ; *Võ Chí Thành*, 9T, Chuyên Lê Khiết, Quảng Ngãi. *Mai Xuân Hiếu*, 9A, Đống Đa, Quy Nhơn, Bình Định. *Trần Thành Phú*, 7A ; *Trần Thị Mỹ An, Phạm Vũ Việt Hoàng*, 9A, Lương Văn Chánh, TX Tuy Hòa, Phú Yên. *Phạm Minh Hùng*, 9T, Nguyễn Du, Gò Vấp, Tp Hồ Chí Minh. *Lương Thế Nhân*, 7CT, Chuyên, Bạc Liêu.

TỐ NGUYÊN

Bài T2/223. *Chứng minh rằng nếu cho trước số nguyên tố p với $p > 5$ thì có một số tự nhiên r không đổi với $2 \leq r \leq p - 2$ sao cho trong tập hợp các số dạng $\underbrace{11 \ldots 1}_{n} + r$ $(n = 1, 2, \ldots)$ không có số nào chia hết cho p.*

Lời giải. Ta có $\underbrace{1 \ldots 1}_{n} + r =$
$$= \frac{10^n - 1}{9} + r = \frac{10^n + 9r - 1}{9}$$

Thành thử chỉ cần chứng minh $10^n + 9r - 1 \not\vdots\, p$ $\forall n$.

Ta hãy chứng minh rằng tồn tại r với $2 \leq r \leq p - 2$ sao cho $9r - 1 \vdots\, p$ thay $9r \equiv 1 \pmod p$.

Thật vậy xét p số $\{9e\}_{e=1}^{p}$. Dễ thấy rằng khi chia cho p chúng cho những số dư khác nhau vì $(9, p) = 1$. Thành thử $\exists r$ $(1 \leq r \leq p)$ sao cho $9r \equiv 1 \pmod p$. Rõ ràng $r \neq 1, p - 1$. Vậy $2 \leq r \leq p - 2$. Với số r đó $10^n + 9r - 1$ không chia hết cho p vì $10^n \not\vdots\, p$.

Nhận xét. Hai bạn cho lời giải đúng là : *Lê Thị Tâm* 9A Hưng Dũng, Vinh, Nghệ An và *Đoàn Phương* 8T Trần Đăng Ninh, Nam Hà.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T3/223. *Chứng minh bất đẳng thức :*
$$1,71 < 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} < 1,72$$

Lời giải. Trước hết với $n = 4$ thì biểu thức đó bằng $41 : 24$, bé hơn 1,71, nên dấu bất đẳng thức thứ nhất chỉ có thể xảy ra khi $n \geq 5$. Với $n = 5$ thì biểu thức đó bằng $202 : 120$, lớn hơn 1,71. Vậy cần nêu thêm giả thiết $n \geq 5$, và bất đẳng thức thứ nhất đã được chứng minh. Bây giờ ta chứng minh bất đẳng thức còn lại. Hiển nhiên ta có :
$$\frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} + \ldots + \frac{1}{n!} < \frac{6}{7!} + \frac{7}{8!} + \ldots + \frac{n-1}{n!} =$$
$$= \frac{7}{7!} - \frac{1}{7!} + \frac{8}{8!} - \frac{1}{8!} + \ldots +$$
$$\frac{n}{n!} - \frac{1}{n!} = \frac{1}{6!} - \frac{1}{7!} + \frac{1}{7!} - \frac{1}{8!} + \frac{1}{8!} - \ldots +$$
$$+ \frac{1}{(n-1)} - \frac{1}{n!} = \frac{1}{6!} - \frac{1}{n!} < \frac{1}{6!}$$

Vậy $1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} <$
$$< 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{6!} =$$
$$= \frac{202}{120} + \frac{2}{6!} = \frac{204}{120} < 1,72.$$

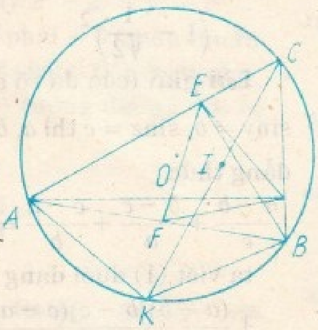
Và bài toán đã được chứng minh.

Nhận xét. Có 55 bài giải, tất cả đều có bổ xung điều kiện $n \geqslant 5$ và đều giải đúng. Lời giải tốt gồm có : *Trần Thanh Phú* (7A Lương Văn Chánh, Tx Tuy Hòa – Phú Yên), *Nguyễn Lan Anh* (9A Trưng Nhị – Hà Nội), *Nguyễn Văn Quang* (9 CT PTTH Lam Sơn – Tx Thanh Hóa), *Cao Xuân Sinh* (9 Toán, Nga Liên, Nga Sơn – Thanh Hóa), *Vũ Anh Tuấn* (9 Toán, THCS Năng Khiếu Thái Nguyên – Bắc Thái), *Nguyễn Anh Tài* (9A PTTH Tư Nghĩa I – Quảng Ngãi), *Trần Thị Mỹ An* (9A Lương Văn Chánh, Tx Tuy Hòa – Phú Yên), *Phạm Cao Huệ Linh* (9A PT Chuyên Ngữ, ĐHSPNN – Hà Nội), *Đặng Thế Hùng* (8 Toán NK – Tx Ninh Bình), *Nguyễn Văn Trung* (8 Toán THCS Trần Đăng Ninh – Nam Định), *Nguyễn Viết Hoàng* (9A THCS Bắc Hà – Hà Tĩnh).

ĐẶNG VIỄN

Bài T4/223. *Cho tam giác ABC nhọn. Gọi I, O theo thứ tự là tâm các đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp tam giác ABC. Tia CI cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai K sao cho IK = OK. Hạ các đường cao AD, BE và gọi F là trung điểm của AB. Chứng minh tam giác DEF đều.*

Lời giải. Do CK là phân giác góc ACB nên K là điểm chính giữa cung AKB, suy ra $KA = KB$. Do I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC và $\widehat{KCB} = \widehat{KAB}$ (nội tiếp cùng chắn cung KB), nên từ tam giác IAC, ta có : $\widehat{AIK} = \widehat{IAC} + \widehat{ICA} = \widehat{LAB} + \widehat{KCB} = \widehat{IAB} + \widehat{KAB} = \widehat{IAK}$. Suy ra tam giác KAI cân đỉnh K, hay $AK = IK = OK$, và ta có tam giác đều OAK (vì $OA = OK = AK$), và $\widehat{AOK} = 60^\circ$. Vậy $\widehat{ACB} = \dfrac{1}{2} sd\,\widehat{AB} = sd\,\widehat{AK} = \widehat{AOK} = 60^\circ$. Mặt khác, do F là trung điểm của AB nên từ các tam giác vuông ADB, AEB ta có : $FD = FA = FB = FE$, suy ra các tam giác FDB, FEA cân đỉnh F và : $\widehat{DFE} = 180^\circ - \widehat{DFB} - \widehat{EFA} = 180^\circ - (180^\circ - 2\,\widehat{ABC}) - (180^\circ - 2\,\widehat{BAC}) = 2(\widehat{ABC} + \widehat{BAC}) - 180^\circ = 2(180^\circ - 60^\circ) - 180^\circ = 60^\circ$. Hơn nữa, $FD = FE$, nên tam giác DEF đều, đpcm.

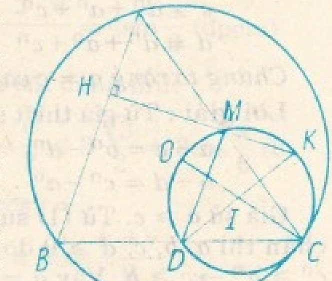


Nhận xét. Các bạn sau đây có lời giải tốt : *Hoàng Anh Thư* (9A THCS Đống Đa, Quy Nhơn – Bình Định), *Phạm Thu Hương* (9A THCS Hồng Bàng – Hải Phòng), *Phạm Minh Hùng* (9 Toán Nguyễn Du, Gò Vấp – Tp Hồ Chí Minh), *Phạm Hải Trung* (9 Chuyên Toán, Năng Khiếu Tiên Sơn – Hà Bắc), *Nguyễn Minh Hoài* (8A Chu Văn An – Hà Nội), *Nguyễn Phước Hoan* (9A THCS Đống Đa – Tp Qui Nhơn), *Hoàng Thế Hùng* (8 Toán Năng Khiếu Thị xã Ninh Bình), *Phạm Cao Huệ Linh* (9A PT Chuyên Ngữ ĐHSPNN Hà Nội), *Ngô Kiên Cường* (9T Lê Khiết – Quảng Ngãi), *Nguyễn Văn Quang* (9T PTTH Lam Sơn – Thanh Hóa), *Nguyễn Hoàng Chương* (8 Toán THCS Năng Khiếu Thái Nguyên – Bắc Thái).

ĐẶNG VIỄN

Bài T5/223 : *Cho đường tròn (O), dây BC. Điểm A chuyển động trên đường tròn. Gọi M là trung điểm của AC, H là chân đường vuông góc hạ từ M xuống đường thẳng AB. Tìm quỹ tích điểm H.*

Lời giải (tóm tắt). Do $OM \perp AC$, O và C cố định nên quỹ tích của M là đường tròn, đường kính OC. Gọi I là tâm của đường tròn này, D là giao điểm khác C của đường tròn (I) với BC, DK là đường kính của đường tròn (I). Do (I) cố định và D cố định nên K cố định. Vì $\widehat{DMK} = \widehat{DMH} = 1v$ (Bạn đọc tự CM) nên H, M, K thẳng hàng.



Do B và K cố định, $\widehat{BHK} = 1v$ nên quỹ tích của H là đường tròn có đường kính là BK.

Nhận xét. Các bạn giải tốt bài này.

Phạm Minh Hùng, 9T Nguyễn Du, Gò Vấp, TPHCM, *Hà Minh Ngọc*, 9/15 Trần Hưng Đạo, Biên Hòa, Đồng Nai, *Mai Xuân Hiếu*, 9A Đống Đa, Quy Nhơn, Bình Định, *Võ Chí Thành*, *Ngô Kiên Cường*, *Nguyễn Trung Kiệt*, 9T, Lê Khiết, Quảng Ngãi, *Thành Dung*, 9T Lê Hồng Phong, Quảng Nam – Đà Nẵng, *Nguyễn Nhật Quang*, 9A NK Hồng Lĩnh, Hà Tĩnh, *Phạm Trung Thành*, 9T NK Vinh, *Nguyễn Thái Bảo* 8A, Diễn Xuân, Diễn Châu, Nghệ An, *Hoàng Minh Dũng*, 9A THCS Xi măng Bỉm Sơn, *Lê Đức Ninh*, 9F Lam Sơn, *Hồng Phương Đông*, 9C, *Lê Thảo* 9D THCS Năng khiếu Thanh Hóa, *Nguyễn Thế Vinh*, 8T NK Ý Yên, *Nguyễn Văn Trung*, *Hà Thanh Tuấn*, *Trần Minh Toàn*, *Trần Đình Hùng*, *Đoàn Phương*, 8T, *Trần Ngọc Anh*, *Nguyễn Hồng Dung*, *Mai Ngọc Kha*, 9T Trần Đăng Ninh, Nam Định, *Vũ Đức Lương*, 9 Hóa Chuyên Xuân Thủy, Nam Hà, *Vũ Ngọc Hải*, 8T Chuyên Thị xã Thái Bình, *Trần Thị Việt Anh*, $8A_1$, *Đào Trần Minh*, $9A_1$, Hồng Bàng, Hải Phòng, *Nguyễn Đình Sơn*, 9A, Kim Anh, Kim Môn, Hải Hưng, *Nguyễn Văn Hiếu*, 9T Chuyên Đông Anh, *Nguyễn Anh Tú*, 9T, Từ Liêm, *Nguyễn Hoàng Dũng*, 7C, Hà Nội – Amsterdam, *Nguyễn Minh Hoài*, $8A_1$ Chu Văn An, *Nguyễn Đức Thắng*, 9A Cát Linh, *Nguyễn Lan Anh*, *Nguyễn Lê Vân*, 9A Trưng Nhị, *Trần Thanh Vinh*, 8A, *Nguyễn Hoàng Minh*, 9A Bế

Văn Đàn, Hà Nội, *Nguyễn Ngọc Thanh*, *Thanh Sơn*, *Nguyễn Xuân Trung* 9A$_1$, Gia Cẩm, Việt Trì, Vĩnh Phú, *Nguyễn Như Chuẩn*, 8NK Thuận Thành, *Nguyễn Hải Yến*, *Phạm Trung Dũng*, 9T Năng khiếu, Bắc Giang, *Phạm Hải Trung*, 9T Tiên Sơn, Hà Bắc.

VŨ KIM THỦY

Bài 6/223. *Cho bốn số a, b, c, d và số tự nhiên n thỏa mãn các đẳng thức sau*

$$a = a^n + b^n + c^n$$
$$b = b^n + c^n + d^n$$
$$c = d^n + a^n + c^n$$
$$d = d^n + a^n + c^n$$

Chứng tỏ rằng $a = c$ và $b = d$.

Lời giải : Từ giả thiết suy ra

$$a - c = b^n - d^n \quad (1)$$
$$b - d = c^n - a^n \quad (2)$$

Giả sử $a \geqslant c$. Từ (1) suy ra $b^n \geqslant d^n$. Nếu n chẵn thì $a, b, c, d \geqslant 0$ do đó $b \geqslant d$ suy ra $c^n \geqslant a^n \to c \geqslant a$. Vậy $a = c$

Nếu n lẻ từ (1) suy ra $b \geqslant d \to c^n \geqslant a^n \to c \geqslant a$. Vậy $a = c$.

Tương tự nếu $c \leqslant a$ cũng suy ra $a = c$. Từ đó $b = d$.

Nhận xét : Bài toán này thuộc loại dễ. Tòa soạn nhận được nhiều lời giải đúng trong đó có các bạn : *Trần Nam Dũng* 10CT Nghệ An, *Cao Quốc Hiệp* 10^A ĐHTH Hà Nội, *Trần Như Quang* 9^I Thừa Thiên - Huế, *Nguyễn Huy Bình* 10^A CT Chuyên Lạng Sơn, *Nguyễn Tuấn Dương* 10 Phan Bội Châu, Nghệ An, *Lê Minh Trường* 11A$_5$ Quốc học Huế, *Trần Hữu Lực* 10CT Đào Duy Từ, Quảng Bình, *Nguyễn Hoài Đức* 10A Hồng Quang, Hải Hưng, *Vũ Linh Huyền Trang* 9 Năng khiếu Thị xã Ninh Bình, *Trần Quốc Cường* 9 Toán, Trần Đăng Ninh, *Đỗ Ngọc Anh*, Lê Hồng Phong, Nam Định, *Phạm Ngọc Tân*, 11CT Phú Yên.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T7/223 : *Cho các số thực x, y, z > 0. Chứng minh bất đẳng thức :*

$$16xyz(x + y + z) \leqslant 3\sqrt[3]{(x + y)^4(y + z)^4(z + x)^4}$$

Lời giải (của *Vũ Đức Lương*, lớp 9 Trường Chuyên Xuân Thủy - Nam Hà) : Ta có :

$(x + y)(y + z)(z + x) = (x + y + z)xy + yz(x + y + z) + xz^2 + zx^2$ (1) Vì $x, y, z > 0$ nên áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 8 số dương : 3 số, mỗi số bằng $\frac{1}{3}xy(x + y + z)$; 3 số, mỗi số bằng $\frac{1}{3}yz(x + y + z)$; xz^2 và zx^2, từ (1) có :

$$(x + y)(y + z)(z + x) \geqslant 8\sqrt[8]{\frac{(xyz)^6(x + y + z)^6}{3^6}} = 8\sqrt[4]{\frac{(xyz)^3(x + y + z)^3}{27}}$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt[3]{(x + y)^4(y + z)^4(z + x)^4} \geqslant 16xyz(x + y + z) \text{ (Đpcm)}$$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{1}{3}xy(x + y + z) = \frac{1}{3}yz(x + y + z) = xz^2 = zx^2 \Leftrightarrow x = y = z$.

Nhận xét : 1. Tòa soạn nhận được lời giải của 100 bạn gửi tới. Trong số đó có 6 bạn cho lời giải sai, vì đã mắc phải những sai lầm về kiến thức cơ bản, chẳng hạn như :

- Từ $A \geqslant C$ và $B \geqslant C \Rightarrow A \geqslant B$ (? !)
- Từ $A \geqslant B$ và $C \geqslant D \Rightarrow A.C \geqslant B.D$ (? !).

Thậm chí có bạn còn khẳng định đề bài đã ra là sai ! ?

2. Đa số các bạn có lời giải đúng đã giải bài toán bằng phương pháp lượng giác hóa.

NGUYỄN KHẮC MINH

Bài T8/223. *Cho $x, y, z \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$. Chứng minh :*

$$\left|\frac{\sin x - \sin y}{\sin z} + \frac{\sin y - \sin z}{\sin x} + \frac{\sin z - \sin x}{\sin y}\right| \leqslant \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \quad (1)$$

Lời giải (của đa số các bạn). Đặt $\sin x = a$, $\sin y = b$, $\sin z = c$ thì $a, b, c \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Sử dụng đẳng thức

$$\frac{a - b}{c} + \frac{b - c}{a} + \frac{c - a}{b} = \frac{(a - b)(b - c)(c - a)}{abc},$$

ta viết (1) dưới dạng :

$$\left|\frac{(a - b)(b - c)(c - a)}{abc}\right| \leqslant \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \quad (2)$$

Coi $\frac{1}{2} \leqslant a \leqslant b \leqslant c \leqslant 1$ và đặt $\frac{a}{c} = u$; $\frac{b}{c} = v$ thì $\frac{1}{2} \leqslant u \leqslant v \leqslant 1$ và (2) có dạng :

$$\frac{(v - u)(1 - u)(1 - v)}{uv} \leqslant \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2. \quad (3)$$

Ta có :

$$\frac{(v-u)(1-u)(1-v)}{uv} \leqslant \frac{\left(v - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{2}\right)(1 - v)}{\frac{1}{2}v} =$$

$$= 1 + \frac{1}{2} - v - \frac{1}{2v} \leqslant$$

$$\leqslant 1 + \frac{1}{2} - 2\sqrt{v \cdot \frac{1}{2v}} = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$$

Vậy (3) được chứng minh. Dấu đẳng thức xảy ra khi $u = \frac{1}{2}$, $v = \frac{1}{\sqrt{2}}$ hay $x = \frac{\pi}{6}$, $y = \frac{\pi}{4}$; $z = \frac{\pi}{2}$.

Nhận xét. 1) Còn nhiều cách giải khác (sử dụng đạo hàm, đồng nhất thức, biến đổi lượng giác, dùng bất đẳng thức Trêbưsev, ...) đều có thể vận dụng để chứng minh bất đẳng thức (1).

2) Các bạn sau đây có lời giải tốt.

TPHCM : *Lê Quang Nẫm, Phạm Hữu Duyên, Phạm Trung Kiên, Đào Duy Chung, Thái Minh Hoàng, Nguyễn Quang Nguyên*

Hòa Bình : *Lê Văn Mạnh*

Quảng Bình : *Trần Hữu Lực*

Hải Hưng : *Phạm Anh Đức*

Hải Phòng : *Hoàng Lê Quang, Đặng Anh Tuấn, Ngô Đức Duy, Phạm Đình Trường* Phú Yên : *Trần Minh Đông, Phạm Ngọc Tân*

Hà Nội : *Lê Anh Tú* (Đông Anh), *Nguyễn Vũ Hùng, Nguyễn Sĩ Phong, Cao Quốc Hiệp, Lê Tuấn Anh*

Thừa Thiên–Huế : *Cao Thế Anh, Đoàn Xuân Vinh,*

Nam Hà : *Phạm Văn Quốc, Phan Tuấn Giang*

Nghệ An : *Lê Văn An, Nguyễn Hồng Chung, Dương Văn Yên, Nguyễn Viết Dũng, Nguyễn Thịnh, Trần Nam Dũng, Nguyễn Thái Bảo, Đặng Đức Hạnh*

Thanh Hóa : *Lê Hoài Nam, Nguyễn Ngọc Hưng, Đỗ Quang Thỏ, Phạm Anh Tuấn, Nguyễn Khánh Tùng.*

NGUYỄN VĂN MẬU

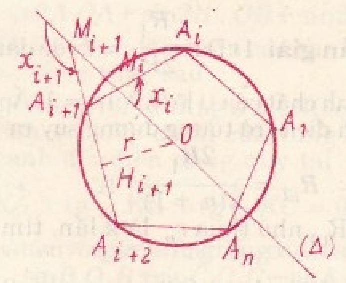
Bài T9/223. *Mặt phẳng (P) quay xung quanh đường cao SO của một hình chóp ngũ giác đều $SA_1A_2A_3A_4A_5$, cắt các mặt phẳng SA_1A_2, SA_2A_3, SA_3A_4, SA_4A_5 và SA_5A_1 lần lượt theo các giao tuyến SM_i (i = 1, 2, 3, 4, 5). Gọi α_i là góc tạo bởi SM_i với mặt phẳng đáy $A_1A_2A_3A_4A_5$ (i = 1, 2, 3, 4, 5). Chứng minh rằng đại lượng :*

$$T = \sum_{i=1}^{5} tg^2\alpha_i$$

nhận một giá trị không đổi.

Tổng quát hóa bài toán trên.

Lời giải. Ta giải bài toán tổng quát với chóp n – giác đều bất kì $SA_1A_2\ldots A_n$ và sử dụng góc có hướng giữa hai đường thẳng trong mặt phẳng. Gọi Δ là giao tuyến của *(P)* và mặt phẳng đáy hình chóp, thế thì :



$M_i = \Delta \cap (A_iA_{i+1})$ (với $i = 1, 2, \ldots, n$; quy ước $A_{n+1} = A_1$)

Giả sử đa giác $A_1A_2\ldots A_n$ có hướng dương, thế thì $(\widehat{A_iA_{i+1}}, \widehat{A_{i+1}A_{i+2}}) = \dfrac{2\pi}{n}$ (là góc ngoài của đa giác đáy, ở đỉnh A_{i+1}) và nếu đặt :

$x_i = (\Delta, A_iA_{i+1}) \pmod{\pi}$ thì ta có hệ thức (xét tam giác $A_{i+1}M_iM_{i+1}$) :

$$x_{i+1} = x_i + \frac{2\pi}{n} \pmod{\pi}$$

hay là

$$x_{i+1} - x_i = \frac{2\pi}{n} (= \alpha) \pmod{\pi}$$

Từ đó suy ra :

$$x_i = x_1 + (i-1)\frac{2\pi}{n} = x_1 + (i-1)\alpha \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

Gọi H_i là trung điểm cạnh A_iA_{i+1}, thì $H_i = OH_i \perp (A_iA_{i+1})$ và $OH_i = r$ (bán kính đường tròn nội tiếp đa giác đáy).

Từ đó ta được : $OM_i = \dfrac{r}{\sin x_i}$ và $tg\alpha_i = \dfrac{h}{OM_i}$ $(h = SO)$

Suy ra : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} tg^2\alpha_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{h}{r}\right)^2\sin^2 x_i = \left(\frac{h}{r}\right)^2\left(\sum_{i=1}^{n}\sin^2 x_i\right)$

Bài toán quy về chứng minh $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sin^2 x_i$ không đổi

Thay $\sin^2 x_i = \dfrac{1-\cos 2x_i}{2} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\cos 2x_i$, ta được :

$$\sum_{i=1}^{n}\sin^2 x_i = \frac{n}{2} - \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\cos 2x_i\right) = \frac{n}{2}$$

Để chứng minh $M = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\cos 2x_i = 0$, $\left(\text{với } x_i = x_1 + (i-1)\dfrac{2\pi}{n}\right)$

ta chứng minh $2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cdot M = 0$ $\left(\alpha = \dfrac{2\pi}{n}\right)$

Thật vậy :

$$2\sin\frac{\alpha}{n}\cdot M = \sum_{i=0}^{n-1} 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos(2x_1 + i\alpha) =$$

$$= \sin\left(2x_1 + \frac{2n-1}{2}\alpha\right) - \sin\left(2x - \frac{\alpha}{2}\right) =$$

$$= 2\cos\left(2x_1 + \frac{n-1}{2}\alpha\right)\sin\frac{n\alpha}{2} = 0$$

Kết quả là : $\sum_{i=1}^{n} tg^2\alpha_i = \frac{n}{2}\left(\frac{h}{r}\right)^2$ không đổi

Nhận xét : 1) Tất cả các bạn tham gia giải bài toán này đều cho kết quả đúng ; tuy nhiên các bạn chưa biết sử dụng góc có hướng giữa hai đường thẳng trong mặt phẳng (với chú ý rằng độ lớn của góc này sai khác một bội của π).

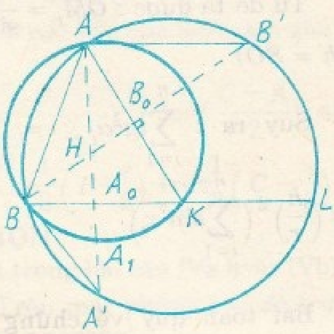
2) Chúng ta cũng đã gặp bài toán tính tổng tương tự $\sum_{k=0}^{n-1}\cos^2\left(x + k\frac{2\pi}{3}\right)$ trong số 221 (tháng 11/1995) của tạp chí T.H. và T.T. (trang 12).

NGUYỄN ĐĂNG PHÁT

Bài T10/223 *Cho tứ diện trực tâm ABCD có trực tâm là H.*

Các đường cao AA_o, BB_o, CC_o và DD_o kéo dài cắt mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ở các điểm tương ứng A', B', C' và D'. Chứng minh rằng nếu $A_oA' = B_oB' = C_oC' = D_oD'$ thì ABCD là một tứ diện đều.

Lời giải 1 (dựa theo *Nguyễn Ngọc Hưng*, 11T, Lam Sơn, Thanh Hóa)



Hai đường cao AA_o và BB_o nằm trong mặt cao (ABH) đi qua cạnh AB của tứ diện ; $(ABH) \perp CD = K$ gọi là chân mặt cao trên cạnh CD. Mặt phẳng chứa mặt cao ABK cắt mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ theo đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABA'B'$ (xem h.vẽ), do đó ta có :

$$HA.\,HA' = HB.\,HB' \, ; \quad (1)$$

Lại vì ABA_oB_o cũng là một tứ giác nội tiếp, nên ta có :

$$HA.\,HA_o = HB.\,HB_o \, ; \quad (2)$$

Trừ vế đối vế (1) và (2), ta được :

$$HA\,.\,A_oA' = HB\,.\,B_oB' \quad (3)$$

Suy ra :

$$A_oA' = B_oB' \Leftrightarrow HA = HB$$

Chứng minh tương tự, ta đi đến kết luận : $A_oA' = B_oB' = C_oC' = D_oD' \Leftrightarrow HA = HB = HC = HD$

$\Leftrightarrow H \equiv O$ (tâm mặt cầu $ABCD$)

Từ đó suy ra : A_o là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔBCD)

Như vậy, A_o vừa là trực tâm, vừa là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD, nên BCD là một tam giác đều. Chứng minh tưng tự, tất cả các mặt của tứ diện $ABCD$ là những tam giác đều, do đó $ABCD$ là một tứ diện đều.

Nhận xét : 1) Các bạn sau đây có lời giải tốt, cũng ngắn gọn như lời giải nêu trên : *Đặng Anh Tuấn*, lớp 10T PTTHNK Trần Phú, Hải Phòng ; *Phạm Anh Tuấn*, lớp 10T Lam Sơn, Thanh Hóa ; *Nguyễn Việt Dũng*, 10T, Phan Bội Châu, Nghệ An ; *Phạm Anh Đức*, 11 Toán PTTHNK Hải Hưng, *Dương Văn Yên*, 11T Phan Bội Châu, Nghệ An.

2) Trên đây là lời giải dựa vào hệ thức lượng trong đường tròn. Sau đây là hai lời giải khác.

Lời giải 2. Xét tứ giác nội tiếp $ABA'B'$ ta được : $\widehat{AA'B} = \widehat{AB'B}$ và $\widehat{A'AB'} = \widehat{A'BB'}$, cũng tức là : $\widehat{A_oA'B} = \widehat{B_oB'A}$ và $\widehat{HAB'} = \widehat{HBA'}$. Vậy nếu $A_oA' = B_oB'$ thì suy ra : $\overset{\Delta}{A_oA'B} = \overset{\Delta}{B_oB'A}$ (gcg) và do đó : $BA' = AB'$. Từ đó ta được : $\overset{\Delta}{HAB'} = \overset{\Delta}{HBA'}$, và do đó : $HA = HB$. Chứng minh tương tự : $HA = HB = HC = HD$, nghĩa là H trùng với tâm O mặt cầu $ABCD$, và do đó $ABCD$ là một tứ diện đều.

Lời giải 3. Sử dụng kết quả của bài toán T9/145 nêu lên một tính chất của tứ diện trực tâm : Nếu H là trực tâm của tứ diện trực tâm $ABCD$ thì ta có :

$$\frac{HA'}{HA_o} = \frac{HB'}{HB_o} = \frac{HC'}{HC_o} = \frac{HD'}{HD_o} = \frac{1}{3}$$

Vì vậy : $A_oA' = B_oB' = C_oC' = D_oD' \Leftrightarrow HA_o = HB_o = HC_o = HD_o$

$\Leftrightarrow H \equiv I$ (Tâm mặt cầu nội tiếp tứ diện trực tâm $ABCD$)

Từ đó suy ra được $ABCD$ là một tứ diện đều

3) Rất đáng tiếc, có hai bạn đã ngộ nhận rằng $A_oH = A_oA'$, $B_oH = B_oB'$! do mắc sai lầm mặt cao ABK cắt mặt cầu $ABCD$ theo đường tròn ngoại tiếp tam giác ABK ! ! !

NGUYỄN ĐĂNG PHÁT

Bài L1/223. *Cho n điện trở $R_1, R_2 \ldots R_n$ mắc song song. Tính :*

1) Điện trở tương đương theo R_1. Biết

$$\frac{R_1}{2R_2} = \frac{2R_2}{3R_3} = \frac{3R_3}{4R_4} = \ldots \frac{(n-1)R_{n-1}}{nR_n} = \frac{nR_n}{R_1}$$

2) Số điện trở cần mắc song song để được điện trở tương đương nhỏ thua điện trở thứ n là 3 lần.

Hướng dẫn giải. 1) Đặt $\frac{R_1}{2R_2} = k$, dễ dàng rút ra (áp dụng tính chất của tỉ lệ thức) $k = 1$. Áp dụng công thức tính điện trở tương đương suy ra

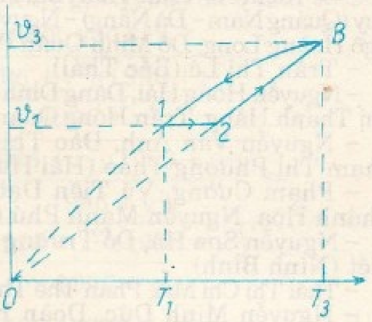
$$R_{td} = \frac{2R_1}{n(n+1)} \quad (1)$$

2) Giả sử R_{td} nhỏ thua r_n là k lần, tìm được $R_{td} = \frac{R_1}{kn}$ (2) và từ (1) và 92) rút ra $n = 2k - 1$. Với $k = 3$ suy ra $n = 5$: cần mắc song song các điện trở R_1, R_2, R_3, R_4, R_5.

Nhận xét Các em có lời giải tốt : *Bùi Mạnh Hùng*, 9A Quốc học Quy Nhơn ; *Đinh Phương Loan*, 9A$_2$, chuyên Việt Trì, Vĩnh Phú ; *Hoàng Trung Hiếu*, 9L, PTNK Hải Hưng ; *Trần Thị Tư*, 10A, PTNK Ngô Sĩ Liên Hà Bắc ; *Nguyễn Văn Trọng*, 9L, Năng khiếu Ý Yên Nam Hà ; *Võ Chí Thành*, 9T, chuyên Lê Khiết, Quảng Ngãi ; *Võ Sĩ Nam*, 9A trường Năng Khiếu, Đức Thọ Hà Tĩnh ; *Trần Ngọc Anh*, 9T, Trần Đăng Ninh, Nam Định, Nam Hà ; *Hoàng Tùng* 9CT, cấp II NK Vĩnh Yên, Vĩnh Phú ; *Lê Long Trung*, 9T, PTCS chuyên Phú Thọ, Vĩnh Phú ; *Lê Anh Tuấn*, 9T, NK Thanh Hà, Hà Tĩnh ; *Lê Hoàng Anh* 9T NK Đông Sơn, Thanh Hóa ; *Hoàng Phương Dung* 9A THCS Cốc Lếu, Lào Cai ; *Nguyễn Đăng Khoa*, 9L, NK Kim Sơn, Ninh Bình.

MAI ANH

Bài L2/223. *Một mol khí lí tưởng thực hiện chu trình 1-2-3-1 như hình vẽ, biết $T_1 = 300k$, $T_3 = 675K$, $V_3 = 5lit$. Các điểm 1 và 3 cùng ở trên parabol qua gốc tọa độ. Tính công sinh ra trong cả chu trình.*



Hướng dẫn giải. Quá trình biến đổi 3–1 là quá trình nén khí $T = \alpha V^2$ (1) với α là hằng số.

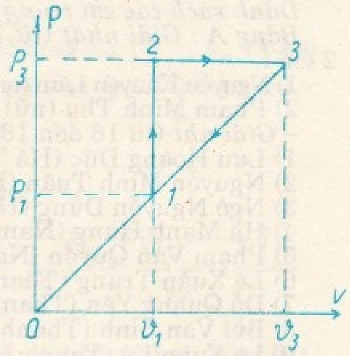
Tại trạng thái 3 : $P_3 = \frac{RT_3}{V_3} \to P_3 = 11,22 . 10^5 N/m$,

$\frac{V_1}{V_3} = \sqrt{\frac{T_1}{T_3}} = \frac{2}{3} \to V_1 = 3,33$ lít và $P_1 = \frac{RT_1}{V_1} = 7,48 . 10^5 N/m^2$. Từ $pV = RT$ rút ra $P = R\alpha V$ với $R\alpha$ = hằng số. Suy ra trong hệ tọa độ PV, quá trình đó có dạng công sinh ra :

$$A = \frac{1}{2}(V_3 - V_1)(P_3 - P_1)$$

$$A \approx 311 \text{J}$$

Nhận xét Các em có lời giải đúng : *Trần An Hải, 102 Lê khiết, Quảng Ngãi ; Hoàng Minh Đạo*, 10L, PTTH Đào Duy Từ, Đồng Hới, Quảng Bình ; *Phạm thanh Giang*, 11L, PTNK Hải Hưng ; *Phạm Anh Dũng*, 10T, PTNK, Hải Hưng ; *Nguyễn Quốc Văn*, 10L, cấp II-III Lương Văn Chánh ; Tuy Hòa, Phú Yên ; *Nguyễn Quang Huy* 10A$_1$ PTTH chuyên Thái Bình ; *Nguyễn Đình Thịnh* 11CL, PTTH Phan Bội Châu, Vinh, Nghệ An.



M.A.

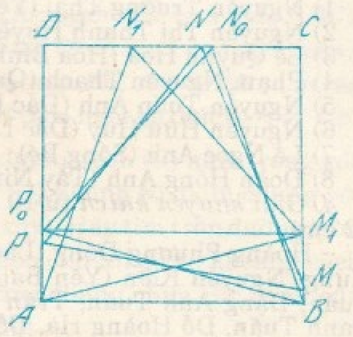
ĐỀ THI TUYỂN SINH . . .

(Tiếp theo trang 16)

2) Diện tích tam giác MNP nhỏ nhất khi và chỉ khi các cạnh của nó có độ dài nhỏ nhất. Dễ thấy điều đó xảy ra khi $MP \parallel AB$. Lúc này N là trung điểm của đoạn CD, còn M và P là các điểm thỏa mãn $CM = DP = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

3) Dễ thấy $P \neq D$ nên từ hệ thức $CN^2 - AP^2 = 2DP . BM$ ta suy ra : $CN = AP \Leftrightarrow BM = 0 \Leftrightarrow M \equiv M_o \equiv B$

Lúc này giả sử $N \equiv N_o$ và $P \equiv P_o$ sao cho tam giác BN_oP_o đều và có cạnh bằng b. Tương tự : $DN = BM \Leftrightarrow AP = 0 \Leftrightarrow P \equiv P_1 \equiv A$. Các vị trí tương ứng của M, N, P lúc này là M_1, N_1 và $P_1 \equiv A$. Do tính đối xứng, tam giác AM_1N_1 cũng có cạnh bằng b. Hơn nữa tứ giác AP_oM_1B là hình chữ nhật.



Hình 2

Bây giờ giả sử tồn tại một tam giác đều MNP có diện tích lớn hơn diện tích của hai tam giác BN_oP_o và AM_1N_1, nghĩa là cạnh của nó lớn hơn b. Khi đó ta có : $MN > b = BN_o$ và $CM \leq CB$ $\Rightarrow CN^2 = MN^2 - CM^2 > BN_o^2 - CB^2 = CN_o^2 \Rightarrow CN > CN_o$ nghĩa là N_o nằm giữa N và C, suy ra $DN < DN_o$, từ đó :

$$DP^2 = PN^2 - DN^2 > P_oN_o^2 - DN_o^2 = DP^2$$

$\Rightarrow DP > DP_o$ nghĩa là P nằm giữa A và P_o.

Chứng minh tương tự, ta có M nằm giữa B và M_1. Nhưng khi đó, trong hình chữ nhật AP_oM_1B, hiển nhiên là $PM < BP_o = b$, trái với giả thiết ban đầu. Vậy tam giác MNP có diện tích lớn nhất khi P trùng với A hoặc khi M trùng với B.

Câu 10. Chia hình vuông thành 10 dải hình chữ nhật có cùng chiều rộng bằng 1/10 bởi 9 đường thẳng song song với một cạnh của hình vuông. Nhận xét rằng $\frac{1}{3\sqrt{11}} = \frac{1}{\sqrt{99}} > \frac{1}{\sqrt{100}} = \frac{1}{10}$ nghĩa là chiều rộng của mỗi dải bé hơn đường kính của các đường tròn đã cho. Do đó mỗi đường tròn đều bị cắt bởi ít nhất một trong 9 đường thẳng nói trên.

Nếu mỗi đường thẳng ấy chỉ cắt không quá 11 đường tròn thì có không quá $9 \times 11 = 99$ đường tròn bị cắt, còn lại 1 đường tròn không bị cắt, trái với nhận xét nêu trên. Vậy phải có một đường thẳng cắt ít nhất 12 đường tròn (đpcm).

NGUYỄN HUY DOAN

KẾT QUẢ KÌ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI QUỐC GIA MÔN TOÁN LỚP 9 - NĂM HỌC 1995 - 1996

Kì thi chọn học sinh giỏi quốc gia năm học 1995 – 1996 Môn toán lớp 9 được tổ chức vào ngày 16/3/1996. Thí sinh dự thi được chia thành hai bảng : bảng A bảng B. Năm học này, dự thi ở bảng A có 27 tỉnh thành phố, với số thí sinh dự là 257 em, dự thi ở bảng B có 26 tỉnh, với số thí sinh dự thi là 204 em. Các em được phép làm bài trong 180 phút, không kể thời gian giao đề.

Hội đồng chấm thi chọn học sinh giỏi quốc gia cấp trung học phổ thông đã tổ chức chấm thi từ ngày 29/3/1996.

Căn cứ vào kết quả chấm thi ở từng bảng, Hội đồng chấm thi đã quyết định như sau :

Kết quả : Bảng A : có 110 giải, trong đó có *2 giải nhất, 20 giải nhì, 37 giải ba* và 51 giải khuyến khích.

Bảng B : có 33 giải, trong đó có *1 giải nhất, 2 giải nhì, 8 giải ba* và 22 giải khuyến khích.

Danh sách các em trúng giải :

Bảng A : Giải nhất (từ 19 đến 20 điểm) có 2 em :

1) Nguyễn Khuyến Lâm (nam) tỉnh Thanh Hóa.
2) Phạm Minh Thu (nữ) tỉnh Hải Hưng.

– *Giải nhì* (từ 16 đến 18,5 điểm) có 20 em.

1) Lưu Hoàng Đức (Hà Tây)
2) Nguyễn Minh Tuấn (Hà Tây)
3) Ngô Nguyễn Dũng (Hải Phòng)
4) Hà Mạnh Hùng (Nam Hà)
5) Phạm Văn Quyến (Nam Hà)
6) Lê Xuân Trung (Thanh Hóa)
7) Đỗ Quang Yên (Thanh Hóa)
8) Bùi Văn Bình (Thanh Hóa)
9) Lê Xuân Lý (Thanh Hóa)
10) Phạm Ngọc Mai (Thanh Hóa)
11) Nguyễn Văn Minh (Vĩnh Phú)
12) Lê Anh Tuấn (Vĩnh Phú)
13) Nguyễn Quỳnh Diệp (Hải Hưng)
14) Nguyễn Huy Khương (Hải Hưng)
15) Nguyễn Minh Nguyệt (Hải Hưng)
16) Hoàng Minh Sơn (Hải Hưng)
17) Lã Thế Vinh (Hải Hưng)
18) Đặng Thị Hương Thơm (Thái Bình)
19) Đặng Hồng Toan (Thái Bình)
20) Phan Việt Hùng (Hà Tĩnh).

– *Giải ba* (từ 13 đến 15,5 điểm) có 37 em :

– Mai Thanh Bình, Nguyễn Quang Huy, Phạm Trần Quân, Bùi Mạnh Hùng, Nguyễn Trung Tú (Hà Nội).

– Nguyễn Hà Duy, Lê Thị Thu Huyền, Nguyễn Văn Thắng (Hà Tây)

– Trịnh Việt Anh, Phạm Thu Hương, Lê Mạnh Toàn, Đặng Anh Tuấn (Hải Phòng)

– Đoàn Đại An, Phạm Văn Dũng, Hoàng Mạnh Quang, Nguyễn Thị Thuận (Nam Hà).

– Lê Huy Bình, Đầu Khắc Cường, Nguyễn Văn Quang (Thanh Hóa)

– Hồ Hữu Khoa (Thừa Thiên – Huế)

– Phạm Khánh Sơn (Quảng Nam – Đà Nẵng).

– Trần Ngọc Hà, Bùi Minh Mẫn, Nguyễn Xuân Sơn (Vĩnh Phú)

– Phạm Hải Trung (Hà Bắc)

– Trần Quốc Chính (Hải Hưng)

– Nguyễn Trường Thanh, Vũ Thanh Tùng (Thái Bình)

– Phạm Trung Kiên, Nguyễn Thanh Sơn, Nguyễn Văn Thành, Vũ Linh Huyền Trung (Ninh Bình).

– Võ Trần Mạnh, Ngô Anh Tuấn (Nghệ An)

– Nguyễn Cảnh Tùng, Nguyễn Phan Linh, Trịnh Minh Ngọc (Hà Tĩnh).

+ *Giải khuyến khích* (từ 11 đến 12,5 điểm) có 51 em.

– Trịnh Lê Tuấn, Đỗ Hồng Sơn, Nguyễn Hữu Nguyên, Lê Minh Tuấn, Trần Yến Ly, Lý Minh Tuấn (thành phố Hồ Chí Minh).

– Đỗ Hoàng Điệp, Nguyễn Mạnh Hà, Đỗ Việt Văn (Hà Tây)

– Cao Xuân Hòa, Đoàn Thái Sơn (Hải Phòng).

– Vũ Minh Hải (Nam Hà)

– Nguyễn Hữu Tuân (Thanh Hóa)

– Trần Như Quang (Thừa Thiên – Huế)

– Lê Kiêm Ái, Trần Thái Anh Âu, Nguyễn Thế Duy (Quảng Nam – Đà Nẵng) – Nguyễn Ngọc Doanh, Ngô Hoàng Long, Đỗ Minh Quân (Vĩnh Phú)

– Trần Thị Lê (Bắc Thái)

– Nguyễn Hồng Hải, Đặng Đình Hanh, Nguyễn Thị Thanh Hằng, Trần Hồng Quang (Hà Bắc).

– Nguyễn Văn Anh, Đào Thị Phương Lan, Phạm Thị Phương Thảo (Hải Hưng).

– Phạm Cường, Vũ Tiến Đạt, Nguyễn Thị Khánh Hòa, Nguyễn Mạnh Phú (Thái Bình).

– Nguyễn Sơn Hà, Đỗ Trường Thọ, Vũ Hồng Việt (Ninh Bình)

– Thái Thị Chi Mai, Phan Thế Thắng (Nghệ An)

– Nguyễn Minh Đức, Đoàn Khánh Hoàng, Võ Sĩ Nam, Mai Tùng Sơn, Nguyễn Danh Tịnh (Hà Tĩnh).

– Nguyễn Đức Lịnh (Quảng Trị)

– Nguyễn Trung Kiệt (Quảng Ngãi)

– Phạm Văn Sĩ, Nguyễn Minh Trung (Bình Định)

– Dương Nguyễn Y Linh (Khánh Hòa)

– Phan Hữu Trọng Hiền (Bình Thuận)

– Đoàn Ngọc Tịnh Nghiêm, Nguyễn Văn Thanh Sang, Đào Duy Nam (Đồng Nai).

+ *Bảng B :*

1) Giải nhất từ 18 đến 20 điểm (có 1 em).

1) Trần Quang Vinh (tỉnh Minh Hải).

2) Giải nhì từ 15 đến 17,5 điểm (có 2 em).

1) Nguyễn Thị Ngọc Anh (Tỉnh Yên Bái)
2) Nguyễn Việt Linh (Tỉnh Quảng Bình)

3) Giải ba từ 12,5 đến 14,5 điểm (có 8 em).

1) Nguyễn Trường Thái (Yên Bái).
2) Nguyễn Thị Thanh Huyền (Hòa Bình)
3) Lê Quỳnh Hoa (Hòa Bình)
4) Phạm Nguyên Thạch (Quảng Bình)
5) Nguyễn Tuấn Anh (Đắc Lắc)
6) Nguyễn Hữu Huy (Đắc Lắc)
7) Lê Ngọc Anh (Sông Bé)
8) Đoàn Hồng Anh (Tây Ninh).

4) Giải khuyến khích từ 10 đến 12 điểm (có 22 em).

– Hoàng Phương Đông (Lào Cai), Tạ Xuân Hưng, Nguyễn Kiên (Yên Bái), Nguyễn Ngọc Xuân, Đặng Anh Tuấn, Trần Thu Trang, Đỗ Danh Tuấn, Đỗ Hoàng Hà, Đỗ Quang Dương, Vũ Thị Vân Anh, Nguyễn Hồng Thịnh (Hòa Bình), Nguyễn Viết Thanh (Quảng Bình).

– Trương Nguyễn Vũ (Gia Lai), Nguyễn Thành Khiêm, Trương Xuân Nghiêu, Trần Thị Hoàng Quyên, Nguyễn Hiếu Thảo, Nguyễn Thanh Tùng (Đắc Lắc), Võ Đăng Khoa (Lâm Đồng), Lê Ngọc Thúy, Hoàng Nghĩa Quang Hưng (Sông Bé) Nguyễn Thanh Sơn (Minh Hải).

Sau đây là đề thi.

BẢNG A

Bài 1. a. Tìm tất cả các số có hai chữ số $\overline{ab}$ sao cho $\frac{a.b}{|a-b|}$ là số nguyên tố.

b. Với 100 số tự nhiên bất kì, hỏi có thể chọn ra được không 10 số để sao cho hiệu hai số tùy ý trong 10 số này chia hết cho 11 ?

Bài 2. a. Cho a, b là các số dương thỏa mãn điều kiện $a^2 = b + 3992$ và x, y, z là nghiệm dương của hệ phương trình :

$$\begin{cases} x+y+z=a \\ x^2+y^2+z^2=b \end{cases}$$

Chứng minh rằng giá trị của biểu thức P sau đây không phụ thuộc vào x, y, z :

$$P = x\sqrt{\frac{(1996+y^2)(1996+z^2)}{1996+x^2}} + y\sqrt{\frac{(1996+z^2)(1996+x^2)}{1996+y^2}} + z\sqrt{\frac{(1996+x^2)(1996+y^2)}{1996+z^2}}$$

b. Cho n số thực dương $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}$ $(n > 1)$.

Chứng minh rằng :

$$\sqrt{\frac{x_1^2}{x_{i_1}} + \frac{x_2^2}{x_{i_2}} + \dots + \frac{x_n^2}{x_{i_n}}} \geqslant \frac{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \dots + \sqrt{x_n}}{\sqrt{n}}$$

Bài 3. Cho tam giác nhọn ABC và AD, BE, CF là các phân giác trong của nó. Gọi S_0 và S lần lượt là diện tích của các tam giác DEF và ABC.

a. Chứng minh rằng $4S_0 \leqslant S$.

b. Với mỗi điểm M nằm trong tam giác ABC (M không thuộc các cạnh của tam giác ABC), gọi a', b', c' lần lượt là độ dài của các khoảng cách từ M đến các cạnh BC, AC và AB ; tìm tập hợp những điểm M thỏa mãn hệ thức $a' < b' < c'$.

Bài 4. a. Cho đường tròn (C) nằm trong góc $\widehat{xoy}$ (đường tròn (C) không có điểm chung với các cạnh của góc $\widehat{xoy}$). Hãy tìm trên đường tròn (C) một điểm M sao cho tổng các khoảng cách từ M đến hai đường thẳng chứa các cạnh của góc $\widehat{xoy}$ là nhỏ nhất.

b. Trong mặt phẳng tọa độ xoy (o là gốc tọa độ), người ta vẽ một đường tròn có tâm là điểm $C(3 ; 4)$, bán kính bằng 2 đơn vị.

Hãy tính giá trị nhỏ nhất của tổng các khoảng cách từ điểm M trên đường tròn tâm C nói trên đến hai trục tọa độ ox và oy.

BẢNG B

Bài 1. a. Tìm tất cả các số có hai chữ số $\overline{ab}$ sao cho $\frac{a.b}{|a-b|}$ là số nguyên tố.

b. Với 100 số tự nhiên bất kì, hỏi có thể chọn ra được không 10 số để sao cho hiệu hai số tùy ý trong 10 số này chia hết cho 11 ?

Bài 2. a. Cho 9 số dương $a_1, a_2, a_3, \dots, a_9$ nhỏ hơn 1. Chứng minh rằng trong 9 tích số :

$a_1(1-a_2), a_2(1-a_3), a_3(1-a_4), \dots, a_8(1-a_9), a_9(1-a_1)$:

tồn tại ít nhất một tích số không lớn hơn $\frac{1}{4}$.

b. Cho n số thực dương $x_1, x_2, \dots, x_n$ và khi thay đổi thứ tự vị trí của n số đó, ta được $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}$; $(n > 1)$.

Chứng minh rằng :

$$\sqrt{\frac{x_1^2}{x_{i_1}} + \frac{x_2^2}{x_{i_2}} + \dots + \frac{x_n^2}{x_{i_n}}} \geqslant \frac{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \dots + \sqrt{x_n}}{\sqrt{n}}$$

Bài 3. Cho điểm A cố định và hai điểm B, C di động sao cho $AB = a$, $AC = b$ (a, b là hai số dương cho trước). Người ta vẽ tam giác đều BCD sao cho A và D thuộc hai nửa mặt phẳng đối nhau mà bờ là đường thẳng BC.

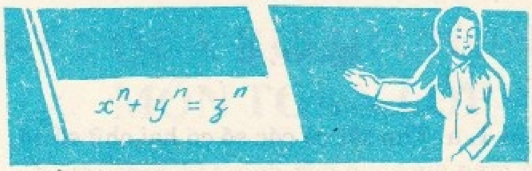
Hãy xác định độ lớn của góc $\widehat{BAC}$ khi AD có độ dài lớn nhất.

Bài 4. a. Cho đường tròn (C) nằm trong góc $\widehat{xoy}$ (đường tròn (C) không có điểm chung với các cạnh của góc $\widehat{xoy}$). Hãy tìm trên đường tròn (C) một điểm M sao cho tổng các khoảng cách từ M đến hai đường thẳng chứa các cạnh của góc $\widehat{xoy}$ là nhỏ nhất.

b. Trong mặt phẳng tọa độ xoy (o là gốc tọa độ), người ta vẽ một đường tròn có tâm là điểm C (3 ; 4), bán kính bằng 2 đơn vị.

Hãy tính giá trị nhỏ nhất của tổng các khoảng cách từ điểm M trên đường tròn tâm C nói trên đến hai trục tọa độ ox và oy.

NGUYỄN HỮU THẢO



ĐỀ RA KÌ NÀY

CÁC LỚP THCS

Bài T1/227 : *Giải phương trình nghiệm nguyên ;*

$$x^3 - x^2y + 3x - 2y - 5 = 0$$

NGUYỄN ĐỨC TẤN
(TP Hồ Chí Minh)

Bài T2/227 : *Giải phương trình :*

$$4x^4 + 2x^3 - 8x^2 + 3x + 9 = 0 \qquad (1)$$

NGUYỄN VĂN MINH
(Quảng Ngãi)

Bài T3/227 : *Cho 2 tập hợp bằng nhau :*

$$\{x, y, z, t\} = \{1930, 1945, 1975, 1995\}$$

Hãy tìm các giá trị của x, y, z, t để biểu thức

$$A = (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-t)^2 + (t-x)^2$$

đạt giá trị nhỏ nhất.

ĐẶNG ĐỨC TRÌNH
(Hải Phòng)

Bài T4/227 : *Gọi I, G lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp và trọng tâm của một tam giác có độ dài các cạnh lần lượt là 2, 3, 4. Hãy tính độ dài đoạn IG.*

TRỊNH BẰNG GIANG
(TP Hồ Chí Minh)

Bài T5/227 : *Cho hai đường tròn (O, R) và (O', R') với R' > R cắt nhau tại hai điểm A, B. Tia OA cắt đường tròn (O') tại điểm thứ hai C, tia O'A cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai D. Tia BD cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ADC tại điểm thứ hai E. Hãy so sánh BC với BE.*

ĐẶNG KÌ PHONG
(Hà Nội)

CÁC LỚP THCB

Bài T6/227 : *Giải phương trình.*

$$\frac{x^4 + 4}{x^2 - 2} - 5x = 0$$

TRẦN NAM DŨNG
(TP Hồ Chí Minh)

Bài T7/227 : *Cho dãy $\{a_n\}$ xác định như sau :*

$$a_0 = \frac{2 - \sqrt{3}}{2}, \; a_{n+1} = a_n(4a_n^2 - 10a_n + 5)^2$$

$\forall n \geq 0$

Tìm số hạng tổng quát a_n

LƯƠNG NGỌC VŨ
(Hà Tây)

Bài T8/227 : *Tìm các số dương a (a > 2) thỏa mãn*

$$\int_0^1 \frac{(1 - t^2)dt}{t^4 + at^2 + 1} = \pi/8$$

HỒ QUANG VINH
(Nghệ An)

Bài T9/227 : *Cho tứ diện OABC vuông ở O, có chiều cao OH = h và độ dài các cạnh của tam diện vuông : OA = a, OB = b, OC = c. Chứng minh rằng : $a\cot gA + b\cot gB + c\cot gC \geq 3h$ (Trong đó A, B, C là các góc của ΔABC)*

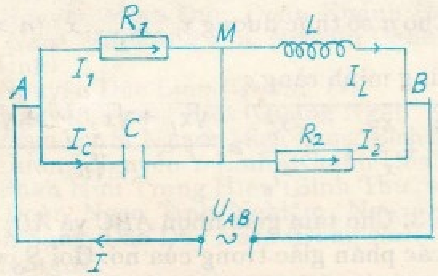
NGÔ VĂN HIỆP
(Hà Nội)

Bài T10/227 : *Sử dụng vectơ hãy chứng minh rằng đường tròn Ole của một tam giác (đường tròn 9 điểm) thì tiếp xúc trong với đường tròn nội tiếp tam giác đó.*

ĐÀO TRƯỜNG GIANG
(Vĩnh Phú)

CÁC ĐỀ VẬT LÍ

Bài L1/227 : *Cho mạch điện mắc theo sơ đồ vẽ trên hình 1 với $U_{AB} = U\sqrt{2}\sin\omega t$*



Hình 1

1. Để cho hệ số công suất của toàn mạch bằng 1 thì R_1, R_2, L, C và ω phải thỏa mãn hệ thức như thế nào ?

2. Cho $R_1 = 100\Omega$, $C = \frac{100}{\pi}\mu F$ và tần số $f = 50 Hz$. Hãy tính các giá trị của R_2 và L để hệ số công suất của toàn mạch bằng 1 đồng thời hiệu điện thế U_{AM} và U_{MB} có cùng một giá trị hiệu dụng.

PHAN TUẤN KHANH
(Hà Nội)

Bài L2/227 : *Người phụ trách thang máy của một tòa nhà cao tầng là một người làm việc đúng giờ. Ông ta đã treo trên tường thang máy một đồng hồ quả lắc chạy đúng để biết khi nào thì hết giờ làm việc trong ngày. Hỏi ông ta có kết thúc công việc đúng giờ hay không ?*

Cho biết thời gian chuyển động (theo đồng hồ đứng yên) với vectơ gia tốc hướng lên trên và hướng xuống là như nhau, môđun của các gia tốc cũng như nhau.

TÔ GIANG
(Hà Nội)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

For Lower Secondary Schools

T1/227 Find integer solutions of equation

$$x^3 - x^2y + 3x - 2y - 5 = 0.$$

T2/227 Solve the equation

$$4x^4 + 2x^3 - 8x^2 + 3x + 9 = 0$$

T3/227 Let be given two equal sets :

$\{x, y, z, t\} = \{1930, 1945, 1975, 1995\}$.

Determine x, y, z, t so that

$$A = (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-t)^2 + (t-x)^2$$

attains its least value.

T4/227 Let I, G be respectively the incenter and the center of gravity of a triangle, the lengths of the sides of which are 2, 3, 4. Find the length of the segment IG.

T5/227 Let be given two circles (O, R) and (O', R'), $R' > R$, which cut each other at two points A, B. The semi-line OA cuts the circle (O') again at C, the semi-line $O'A$ cuts the circle (O) again at D. The semi-line BD cuts the circumcircle of triangle ADC again at E. Compare BC with BE.

For Upper secondary schools

T6/227 Solve the equation

$$\frac{x^4+4}{x^2-2} - 5x = 0$$

T7/227 The sequence $\{a_n\}$ is defined by :

$$a_0 = \frac{2-\sqrt{3}}{2},\ a_{n+1} = a_n(4a_n^2 - 10a_n + 5)^2, \forall n \geqslant 0.$$

Find the general term a_n.

T8/227 Find the numbers $a > 2$ satisfying

$$\int_0^1 \frac{(1-t^2)}{t^4 + at^2 + 1}\, dt = \frac{\pi}{8}.$$

T9/227 Let be given a tetrahedron $OABC$, right at O the altitude of which $OH = h$ and the lengths of the edges $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$. Prove that, $a\cot gA + b\cot gB + c\cot gC \geqslant 3h$, where A, B, C are the angles of the triangle ABC.

T10/227. Use vector calculus to prove that the Euler circle of a triangle (the 9-points circle) is tangent to the incircle of the triangle.

TÌM THÊM NHỮNG...

(tiếp theo trang 1)

Nhờ định lí hàm số sin trong các tam giác AOE, BOE ta có :

$$\frac{AE}{\sin O_1} = \frac{R}{\sin E_1},\ \frac{EB}{\sin O_2} = \frac{R}{\sin(\pi - E_1)}$$

$$\Rightarrow \frac{AE}{EB} = \frac{\sin O_1}{\sin O_2}$$

Nhưng $\sin O_1 = \sin \widehat{AOC} = \sin 2B$ (góc ở tâm) và $\sin O_2 = \sin(\widehat{BOC}) = \sin 2A$

$$\Rightarrow \frac{\overline{AE}}{\overline{EB}} = \frac{\sin 2B}{\sin 2A},\ \text{tương tự}\ \frac{\overline{AF}}{\overline{FC}} = \frac{\sin 2C}{\sin 2A}$$

Chú ý : đúng cả khi ΔABC có góc tù tức O nằm ngoài tam giác.

Vậy $\overrightarrow{AO} = \frac{\sin 2B}{\sin 2A}\overrightarrow{OB} + \frac{\sin 2C}{\sin 2A}.\overrightarrow{OC}$

$$\Rightarrow \sin 2A.\overrightarrow{OA} + \sin 2B.\overrightarrow{OB} + \sin 2C.\overrightarrow{OC} = \vec{0}.$$

Tiếp tục cách làm trên các bạn có thể tự tìm đến các đẳng thức sau.

(6) Chứng minh rằng ở ΔABC các đường nối mỗi đỉnh với tiếp điểm của vòng tròn nội tiếp trên cạnh đối diện đồng quy tại 1 điểm K và

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\overrightarrow{KA} + \operatorname{tg}\frac{B}{2}\overrightarrow{KB} + \operatorname{tg}\frac{C}{2}\overrightarrow{KC} = \vec{0}. \quad (7)$$

Gọi O_1 là tâm vòng tròn bàng tiếp góc A của ΔABC. Chứng minh $\sin B.\overrightarrow{O_1B} + \sin C.\overrightarrow{O_1C} - \sin A.\overrightarrow{O_1A} = 0$ (8)

Chứng minh rằng ở ΔABC các đường nối mỗi đỉnh với tiếp điểm của vòng tròn bàng tiếp góc A trên cạnh đối diện hoặc phần kéo dài, đồng quy tại 1 điểm L và

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2}\overrightarrow{LB} + \operatorname{tg}\frac{C}{2}\overrightarrow{LC} + \operatorname{tg}\frac{A}{2}\overrightarrow{LA} = \vec{0}.$$

Thêm nữa xin mời các bạn hãy chứng minh các đẳng thức sau (O, H, G, I kí hiệu như trước) :

(9) $$\frac{\cos A}{\sin B\sin C}.\overrightarrow{OA} + \frac{\cos B}{\sin A\sin C}.\overrightarrow{OB} + \frac{\cos C}{\sin A\sin B}.\overrightarrow{OC} = \vec{0}$$

(10) $\overrightarrow{OH} = \operatorname{ctg}B.\operatorname{ctg}C.\overrightarrow{OA} + \operatorname{ctg}C.\operatorname{ctg}A.\overrightarrow{OB} + \operatorname{ctg}A.\operatorname{ctg}B.\overrightarrow{OC}$.

(11) $$3\overrightarrow{GH} = \frac{\cos(B-C)}{\sin B\sin C}\overrightarrow{OA} + \frac{\cos(C-A)}{\sin A\sin C}\overrightarrow{OB} + \frac{\cos(A-B)}{\sin A\sin B}.\overrightarrow{OC}$$

(12) $$2\overrightarrow{OI} = \frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}\overrightarrow{OA} + \frac{\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}}\overrightarrow{OB} + \frac{\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}\overrightarrow{OC}$$

Ở đây tôi chỉ mới xoay quanh một hướng để tìm đến các hệ thức. Có rất nhiều hướng khác nữa. Mong các bạn tìm thêm nhiều nữa các hệ thức véctơ trong tam giác.

ĐỀ THI TUYỂN SINH 1995 MÔN TOÁN
ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

(Thời gian làm bài 180 phút)

PHẦN BẮT BUỘC

Câu I : Cho hàm số $y = \dfrac{(x-1)^2}{x-2}$ (1)

1) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số đã cho.

2) Hãy xác định hàm số $y = f(x)$ sao cho đồ thị của nó đối xứng với đồ thị của hàm số (1) qua điểm $M(1, 1)$.

Câu II : 1) Giải phương trình

$$\sqrt[3]{\frac{2x}{x+1}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{1}{2x}} = 2$$

2) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2^x - 2^y = (y-x)(xy+2), \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$$

Câu III : 1) Giải phương trình

$4\sin 2x - 3\cos 2x = 3(4\sin x - 1)$.

2) Cho A, B, C là các góc của một tam giác. Chứng minh rằng

$$\cos\left(\frac{A-B}{2}\right) + \cos\left(\frac{B-C}{2}\right) + \cos\left(\frac{C-A}{2}\right) \leqslant$$
$$\leqslant \cos\frac{1}{3}\left(A - \frac{\pi}{3}\right) + \cos\frac{1}{3}\left(B - \frac{\pi}{3}\right) + \cos\frac{1}{3}\left(C - \frac{\pi}{3}\right).$$

PHẦN TỰ CHỌN

(Thí sinh chọn một trong hai câu IVa hoặc IVb)

Câu IVa : 1) Trên mặt phẳng tọa độ trực chuẩn cho hai đường parabol

$$y = 8 - 3x - 2x^2,$$
$$y = 2 + 9x - 2x^2.$$

a) Hãy xác định các giá trị a và b sao cho đường thẳng $y = ax + b$ đồng thời là tiếp tuyến của hai parabol và xác định tọa độ của các tiếp điểm.

b) Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường parabol đã cho và tiếp tuyến đã được xác định ở trên.

2) Trên mặt phẳng tọa độ trực chuẩn cho các điểm $P(2, 3)$, $Q(4, -1)$ và $R(-3, 5)$ là các trung điểm của các cạnh của một tam giác. Hãy lập phương trình của các đường thẳng chứa các cạnh của tam giác đó.

Câu IVb : 1) Tính giới hạn

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 2x - \sin x \sin 4x}{x^4}.$$

2) Cho hình tứ diện $ABCD$ có cạnh $AB = x$. Hai mặt ACD và BCD là những tam giác đều cạnh a. Gọi M là trung điểm của cạnh AB.

a) Xác định x khi DM là đường cao của hình tứ diện $ABCD$.

b) Giả sử DM vuông góc với mặt phẳng (ABC). Tính bán kính mặt cầu nội tiếp hình tứ diện $ABCD$.

ĐÁP ÁN

Câu I (2,5)

1. $y = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x-2} = x + \dfrac{1}{x-2}$. Hàm số xác định với mọi $x \neq 2$.

Chiều biến thiên : $y' = 1 - \dfrac{1}{(x-2)^2} = 0 \Leftrightarrow$

$(x-2)^2 = 1$; $x = 3 \to y = 4$

$x = 1 \to y = 0$.

Tiệm cận đứng : $x = 2$. Tiệm cận xiên : $y = x$.

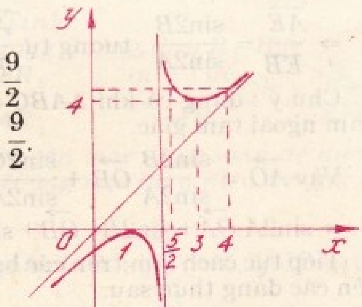
Bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
y'		+	0	−	‖	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	4	↗	$+\infty$

Đồ thị

Với $x = 4 \to y = \dfrac{9}{2}$

$x = \dfrac{5}{2} \to y = \dfrac{9}{2}$.



2. Giả sử $A(x_1, y_1)$ là điểm tùy ý của đồ thị $y = \dfrac{(x-1)^2}{x-2} \Rightarrow y_1 = \dfrac{(x_1-1)^2}{x_1-2}$; $x_1 \neq 2$.

$B(x, y)$ đối xứng với A qua điểm $M(1, 1) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x + x_1 = 2 \\ y + y_1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - x \\ y = 2 - y_1 \end{cases}$$

Suy ra $y = 2 - \dfrac{(x_1-1)^2}{x_1-2} = 2 + \dfrac{x^2-2x+1}{x}$

$\Rightarrow \boxed{y = \dfrac{x^2+1}{x}}$

Câu II (2)

1. Giải phương trình $\sqrt[3]{\dfrac{2x}{x+1}} + \sqrt[3]{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2x}} = 2$;

Điều kiện : $x \neq 0, x \neq -1$

Đặt $t = \sqrt[3]{\dfrac{2x}{x+1}}$, ta có $\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2x}} = \sqrt[3]{\dfrac{x+1}{2x}} = \dfrac{1}{t}$. Thu được phương trình :

$t + \dfrac{1}{t} = 2 \Leftrightarrow t^2 - 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1$ hay $\sqrt[3]{\dfrac{2x}{x+1}} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{2x}{x+1} = 1 \Leftrightarrow \boxed{x = 1.}$

2. Giải hệ $\begin{cases} 2^x - 2^y = (y-x)(xy+2) & (1) \\ x^2 + y^2 = 2 & (2) \end{cases}$

Từ (1), (2) suy ra : $2^x - 2^y =$
$= (y-x)(xy + x^2 + y^2)$ hay $2^x - 2^y = y^3 - x^3$.

Nếu $x > y$ vế trái > vế phải < 0 ; mâu thuẫn.

Nếu $x < y$ vế trái < 0 ; vế phải > 0 ; mâu thuẫn.

Vậy $x = y$. Hệ đã cho tương đương với hệ

$\begin{cases} x = y \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{cases} x = y \\ x^2 = 1 \end{cases}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases} \end{array}\right.$

Câu III 2,5

1. Phương trình tương đương với $8sinxcosx - 3(1 - 2sin^2x) = 12sinx - 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4sinxcosx + 3sin^2x = 6sinx \Leftrightarrow$
$sinx(4cosx + 3sinx - 6) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (sinx(4cosx + 3sinx - 6) = 0 \Leftrightarrow$

$\left[\begin{array}{ll} sinx = 0 & (a) \\ 4cosx + 3sinx = 6 & (b) \end{array}\right.$

Giải (a) ta có : $x = k\pi$, $k \in \mathbf{N}$

Giải (b) : vì $4cosx + 3sinx \leq 5$. Vậy phương trình (b) vô nghiệm.

Đáp số $x = k\pi$; $k \in \mathbf{N}$

2. i) Ta chứng minh bất đẳng thức bổ trợ sau đây :

$3(ab + bc + ca) \leq (a + b + c)^2$ (1)

(1) $\Leftrightarrow (a^2 + b^2 + c^2) \geq cb + bc + ca \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0$; đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$.

ii) Ta có $sinx + siny = 2sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2} \Rightarrow$
$\dfrac{sinx + siny}{2} \leq \sin\dfrac{x+y}{2}$

(với $0 \leq x, y \leq \pi$). Dấu bằng xảy ra khi $x = y$.

Ta chứng minh bất đẳng thức sau :

$\sin\dfrac{A}{2} + \sin\dfrac{B}{2} + \sin\dfrac{C}{2} \leq \dfrac{3}{2} = 3sin\dfrac{\pi}{6}$ (2)

(2) $\Leftrightarrow M = \sin\dfrac{A}{2} + \sin\dfrac{B}{2} + \sin\dfrac{C}{2} + \sin\dfrac{\pi}{6} \leq 4\sin\dfrac{\pi}{6}$.

Ta có $M \leq 2\sin\dfrac{\dfrac{A}{2}+\dfrac{B}{2}}{2} + 2\sin\dfrac{\dfrac{C}{2}+\dfrac{\pi}{6}}{2} \Leftrightarrow$

$M \leq 4\sin\dfrac{\dfrac{A}{2}+\dfrac{B}{2}+\dfrac{C}{2}+\dfrac{\pi}{6}}{4} = 4\sin\dfrac{\pi}{6}$ (đpcm)

iii) Ta chứng minh bất đẳng thức

$\cos\dfrac{A}{2} + \cos\dfrac{B}{2} + \cos\dfrac{C}{2} \leq 3\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 3\cos\dfrac{\pi}{6}$ (3)

chú ý rằng $cosx + cosy =$
$= 2\cos\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2} \leq 2\cos\dfrac{x+y}{2}$

(với $0 < x, y < \dfrac{\pi}{2}$). Dấu bằng xảy ra khi $x = y$.

ta có $\cos\dfrac{A}{2} + \cos\dfrac{B}{2} + \cos\dfrac{C}{2} + \cos\dfrac{\pi}{6} \leq$

$\leq 2\cos\dfrac{\dfrac{A}{2}+\dfrac{B}{2}}{2} + 2\cos\dfrac{\dfrac{C}{2}+\dfrac{\pi}{6}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos\dfrac{A}{2} + \cos\dfrac{B}{2} + \cos\dfrac{C}{2} + \cos\dfrac{\pi}{6} \leq$

$\leq 4\cos\dfrac{\dfrac{A+B+C}{2}+\dfrac{\pi}{6}}{4} = 4\cos\dfrac{\pi}{6} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos\dfrac{A}{2} + \cos\dfrac{B}{2} + \cos\dfrac{C}{2} \leq 3\cos\dfrac{\pi}{6} = 3\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (đpcm).

Dấu bằng xảy ra khi $A = B = C$

Áp dụng các bất đẳng thức (1), (2), (3) ta có

* $3\left(\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2} + \sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2} + \sin\dfrac{C}{2}\sin\dfrac{A}{2}\right) \leq$
$\left(\sin\dfrac{A}{2} + \sin\dfrac{B}{2} + \sin\dfrac{C}{2}\right)^2 \leq$

$\leq \dfrac{3}{2}\left(\sin\dfrac{A}{2} + \sin\dfrac{B}{2} + \sin\dfrac{C}{2}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2} + \sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2} + \sin\dfrac{C}{2}\sin\dfrac{A}{2} \leq$
$\sin\dfrac{\pi}{6}\sin\dfrac{A}{2} + \sin\dfrac{\pi}{6}\sin\dfrac{B}{2} + \sin\dfrac{\pi}{6}\sin\dfrac{C}{2}$ (4)

* $3\left(\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2} + \cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2} + \cos\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{A}{2}\right)$
$\leq \left(\cos\dfrac{A}{2} + \cos\dfrac{B}{2} + \cos\dfrac{C}{2}\right)^2 \leq$ (2)
$\leq \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\left(\cos\dfrac{A}{2} + \cos\dfrac{B}{2} + \cos\dfrac{C}{2}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} + \cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} + \cos\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2} \leqslant$

$\cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{B}{2} + \cos\frac{\pi}{6}\cos\frac{C}{2}$ (5)

Cộng (4) với (5) ta có :

$\cos\left(\frac{A-B}{2}\right) + \cos\frac{B-C}{2} + \cos\frac{C-A}{2} \leqslant$

$\cos\frac{1}{2}\left(A-\frac{\pi}{3}\right) + \cos\frac{1}{2}\left(B-\frac{\pi}{3}\right) + \cos\frac{1}{2}\left(C-\frac{\pi}{3}\right)$ (6)

Ta có $-\frac{\pi}{6} < \frac{1}{2}\left(A-\frac{\pi}{3}\right) < \frac{\pi}{3}$ suy ra $0 \leqslant \frac{1}{2}\left|A-\frac{\pi}{3}\right| < \frac{\pi}{3}$. Ta có $\frac{1}{2}\left|A-\frac{\pi}{3}\right| \geqslant \frac{1}{3}\left|A-\frac{\pi}{3}\right|$, suy ra $\cos\frac{1}{2}\left|A-\frac{\pi}{3}\right| \leqslant \cos\frac{1}{3}\left|A-\frac{\pi}{3}\right|$

$\Leftrightarrow \cos\frac{1}{2}\left(A-\frac{\pi}{3}\right) \leqslant \cos\frac{1}{3}\left(A-\frac{\pi}{3}\right)$

Tương tự $\cos\frac{1}{2}\left(B-\frac{\pi}{3}\right) \leqslant \cos\frac{1}{3}\left(B-\frac{\pi}{3}\right)$ (7)

$\cos\frac{1}{2}\left(C-\frac{\pi}{3}\right) \leqslant \cos\frac{1}{3}\left(C-\frac{\pi}{3}\right)$

Từ (6), (7) suy ra (đpcm). Dấu bằng xảy ra khi $A = B = C$.

Câu IVa (3đ)

1. Gọi các tiếp điểm là $A(x_1, y_1) \in (P_1) : y = 8 - 3x - 2x^2$

$B(x_2, y_2) \in (P_2) : y = 2 + 9x - 2x^2$

a. *Cách 1 :* Theo ý nghĩa hình học của đạo hàm ta thu được hai phương trình của cùng một đường thẳng :

$y = (-4x_1 - 3)(x - x_1) + 8 - 3x_1 - 2x_1^2$

$y = (9 - 4x_2)(x - x_2) + 2 + 9x_2 - 2x_1^2$

Từ đó thu được hệ :

$$\begin{cases} -3 - 4x_1 = 9 - 4x_2 \\ 2x_1^2 + 8 = 2x_2^2 + 2 \end{cases}$$

Từ đó $x_1 = -1$, $x_2 = 2$ và ta có $A(-1, 9), B(2, 12)$.

Thay $x = -1$ vào phương trình tiếp tuyến ta có :

$y = x + 10 = ax + b \Rightarrow a = 1, b = 10$

Cách 2 : Đường thẳng $y = ax + b$ tiếp xúc với đường cong $y = 8 - 3x - 2x^2$ khi và chỉ khi $ax + b = 8 - 3x - 2x^2$ có nghiệm kép $\Leftrightarrow$ $\Delta = (a+3)^2 - 8b + 64 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow b = \frac{a^2 + 6a + 73}{8} \Rightarrow y = ax + \frac{a^2 + 6a + 73}{8}$

Đường thẳng trên tiếp xúc với $y = 2 + 9x - 2x^2 \Leftrightarrow ax + \frac{a^2 + 6a + 73}{8} =$

$= 2 + 9x - 2x^2$ có nghiệm kép $\Leftrightarrow$ $16x^2 + 8(a-9)x + a^2 + 6a + 57 = 0$ có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta' = 16(a-9)^2 - 16a^2 - 96a - 16 \,.\, 57 = 0$ $\Leftrightarrow a = 1 \Rightarrow b = 10$.

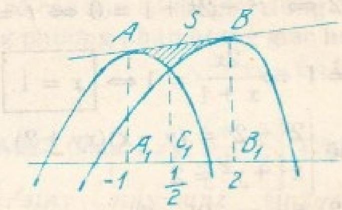
Vậy đường thẳng phải tìm có phương trình là $y = x + 10$

Gọi hai tiếp điểm là $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ ta có

$x = -\frac{a+3}{4} = -1 \Rightarrow y_1 = 9$

$x_2 = \frac{8(9-a)}{32} = 2 \Rightarrow y_2 = 12$.

b. Gọi giao điểm của hai parabol là $C(x_3, y_3)$. Khi đó x_3 là nghiệm của $8 - 3x - 2x^2 = 2 + 9x - 2x^2 \Leftrightarrow 12x = 6 \Leftrightarrow$ $x_3 = \frac{1}{2}$, $y_3 = 6$

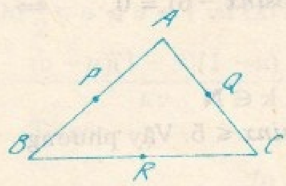


Ta có $S = S_{\substack{h.thang \\ ABB_1A}} - S_{\substack{h.thang\,cong \\ ACC_1A_1}} - S_{\substack{h.thang\,cong \\ CBB_1C_1}} \Rightarrow$

$\Rightarrow S = \frac{(12+9)3}{2} - \int_{-1}^{1}(8 - 3x - 2x^2)dx -$

$- \int_{\frac{1}{2}}^{2}(2 + 9x - 2x^2)dx = \frac{63}{2} - \frac{99}{8} - \frac{117}{8} = \frac{9}{2}$

2. Phương trình đường thẳng đi qua (x_o, y_o) và $// \overrightarrow{p}(m, n)$ có dạng $\frac{x - x_o}{m} = \frac{y - y_o}{n}$



Vì $BC // PQ$ và $\overrightarrow{PQ} = (2, -4)$ nên đường thẳng chứa BC chính là đường thẳng đi qua $R(-3, 5)$ và song song với $\overrightarrow{PQ}$. Vậy phương trình đường thẳng chứa BC là : $\frac{x+3}{2} = \frac{y-5}{-4} \Leftrightarrow$ $2x + y + 1 = 0$

Tương tự phương trình đường thẳng đi qua AB :

$\frac{x-2}{-7} = \frac{y-3}{6} \Leftrightarrow 6x + 7y - 33 = 0$

phương trình đường thẳng qua AC :

$\frac{x-4}{-5} = \frac{y+1}{2} \Leftrightarrow 2x + 5y - 3 = 0$

Câu 4b (3) 1. Ta sẽ áp dụng giới hạn đặc biệt

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$; $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin^2 2x - \sin x \sin 4x}{x^4} =$

(Xem tiếp bìa 3)

ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10 CHUYÊN TOÁN - TIN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM (ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI)

Năm học 1995 - 1996

NGÀY THI THỨ NHẤT : 17-7-1995

Thời gian làm bài : 180 phút

Câu 1. Cho biết :

$$a = xy + \sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}$$

và $$b = x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2}.$$

Giả thiết rằng tích xy dương. Hãy tính b theo a.

Câu 2. Cho phương trình :

$$x^3 - (4a+3)x^2 + 4a(a+2)x - 4(a^2-1) = 0,$$

trong đó, a là tham số.

1) Giải phương trình với $a = -1/2$.

2) Giải phương trình theo a.

Câu 3. 1) Chứng minh rằng tích của 8 số nguyên liên tiếp luôn chia hết cho 128.

2) Với số tự nhiên n tùy ý cho trước, chứng minh rằng số $m = n(n+1)(n+1) \dots (n+7) + 7!$ không thể biểu diễn được dưới dạng tổng của hai số chính phương. (với k nguyên dương, kí hiệu k ! chỉ tích 1.2.3...k).

Câu 4. Cho tam giác cân ABC ($AB = AC$), góc $BAC = \alpha$. Gọi D và E theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AB và AC. Trên tia đối của tia DE lấy một điểm M tùy ý không trùng với D ; Trên tia đối của tia ED lấy một điểm N sao cho $MAN = 90^o + \dfrac{\alpha}{2}$. Hai đường thẳng MB và NC cắt nhau tại P. Tính góc BPC

Câu 5. Bạn An muốn điền vào trước mỗi số trong dãy 1, 2, 3, ... n một dấu "+" hoặc một dấu "–" để được một dãy tính có kết quả là số tự nhiên nhỏ nhất có thể được. Sau khi điền dấu xong và thực hiện chính xác các phép tính, bạn An được kết quả là 3. Theo em kết quả đó đã thỏa mãn yêu cầu đặt ra hay chưa ? Nếu chưa, em hãy nêu rõ lập luận và chỉ ra cách làm cho An đạt được mục đích của mình.

NGÀY THI THỨ HAI : 18-7-1995

Thời gian làm bài : 180 phút

Câu 6. Cho 4 số nguyên dương a, b, c và d thỏa mãn đẳng thức $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$. Chứng minh rằng số $a + b + c + d$ là một hợp số.

Câu 7. Giả sử cho hai thùng đựng nước với dung tích lớn tùy ý và hai cái gáo có dung tích lần lượt là $\sqrt{2}$ lít và $2 - \sqrt{2}$ lít. Hỏi có thể dùng hai cái gáo đó để chuyển 1 lít nước từ thùng này sang thùng kia được hay không ? Tại sao ?

Câu 8. 1) Chứng minh bất đẳng thức :

$$2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}),$$

trong đó, n là số nguyên dương tùy ý.

2) Với mỗi số nguyên dương n, ta đặt $S_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{\sqrt{n}} + \dots + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. Hãy tìm tất cả các giá trị của n sao cho $[S_n] = 2$. ($[x]$ là phần nguyên của số thực x và được định nghĩa là số nguyên thỏa mãn $[x] \leq x < [x] + 1$).

Câu 9. Cho hình vuông $ABCD$. Gọi M, N và P là ba điểm lần lượt lấy trên các cạnh BC, CD và DA sao cho MNP là một tam giác đều.

1) Chứng minh hệ thức :

$CN^2 - AP^2 = 2DP \cdot BM$.

2) Hãy xác định vị trí của các điểm M, N và P sao cho tam giác MNP có diện tích nhỏ nhất.

3) Chứng minh rằng tam giác MNP có diện tích lớn nhất khi M trùng với B hoặc khi P trùng với A.

Câu 10. Cho 100 đường tròn có cùng đường kính bằng $\dfrac{1}{3\sqrt{11}}$ và nằm trong một hình vuông cạnh 1. Chứng minh rằng ta luôn có thể vẽ được một đường thẳng cắt ít nhất 12 đường tròn trong số các đường tròn đã cho.

(Trong bài này, ta hiểu một phần đường thẳng và một đường tròn gọi là cắt nhau nếu chúng có hai điểm chung phân biệt : Một đường tròn gọi là nằm trong một hình đa giác lồi (hay đa giác chứa đường tròn) nếu mọi điểm của đường tròn đều thuộc miền trong hoặc nằm trên cạnh của đa giác đó).

ĐÁP ÁN

Câu 1. Ta có :

$$a^2 = 1 + x^2 + y^2 + 2x^2y^2 + 2xy\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}$$

$$b^2 = x^2 + y^2 + 2x^2y^2 + 2xy\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}$$

So sánh hai kết quả, ta suy ra $b^2 = a^2 - 1$. Do $xy > 0$, chỉ có hai trường hợp sau :

Nếu $x > 0$ và $y > 0$ thì $b > 0$, ta có $b = \sqrt{a^2 - 1}$

Nếu $x < 0$ và $y < 0$ thì $b < 0$, ta có $b = -\sqrt{a^2 - 1}$.

Câu 2. 1) Khi $a = -1/2$, phương trình có các nghiệm là $x_1 = 1$, $x_{2,3} = \pm\sqrt{3}$.

2) Phương trình đã cho tương đương với phương trình tích :

$$(x - 2a - 2)[x^2 - (2a+1)x + 2a - 2] = 0.$$

Suy ra phương trình có ba nghiệm là $x_1 = 2a + 2$, $x_{2,3} = (2a + 1 \pm \sqrt{4a^2 - 4a + 9})/2$

Câu 3. 1) Nhận xét rằng trong 4 số nguyên liên tiếp luôn có một số chia hết cho 4 và một số khác chia hết cho 2, suy ra tích của chúng luôn chia hết cho 8. Trong 8 số nguyên liên tiếp, luôn có 4 số chẵn liên tiếp. Ta xét riêng tích của 4 số chẵn này : $Q = 2k(2k+2)(2k+4)(2k+6) = 16k(k+1)(k+2)(k+3)$. Theo nhận xét trên, riêng tích $k(k+1)(k+2)(k+3)$ đã chia hết cho 8. Do đó Q chia hết cho $16 \times 8 = 128$. Từ đó suy ra đpcm.

2) Theo phần 1), số đã cho có thể viết dạng $m = 128k + 7!$ với $k \in \mathbf{N}$. Ta chứng minh bằng phản chứng : Nếu m có thể biểu diễn được thành

tổng của hai số chính phương thì có các số tự nhiên a và b sao cho $128k + 7! = a^2 + b^2$. (1)

Vế trái của (1) chia hết cho 4 cho nên a và b phải là hai số chẵn. Đặt $a = 2c$ và $b = 2d$ rồi chia cả hai vế cho 4 ta có :

$32k + 180 \times 7 = c^2 + d^2$ $(c, d \in \mathbf{N})$. (2)

Lập lại lí luận trên đối với (2), đặt $c = 2p$ và $d = 2q$ rồi chia hai vế cho 4 :

$8k + 45 \times 7 = p^2 + q^2$ $(p, q \in \mathbf{N})$.(3)

Vế trái trong (3) là số lẻ nên trong hai số p và q, át có một số lẻ, một số chẵn, nghĩa là xảy ra $p^2 + q^2 \equiv 1 \pmod 4$, trong khi $8k + 45 \times 7 \equiv 3 \pmod 4$, vô lí.

Câu 4. Từ giả thiết suy ra :

$\widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 = \left(90^o + \frac{\alpha}{2}\right) - \alpha = 90^o - \frac{\alpha}{2}$ (1)

Mặt khác trong tam giác AMD có :

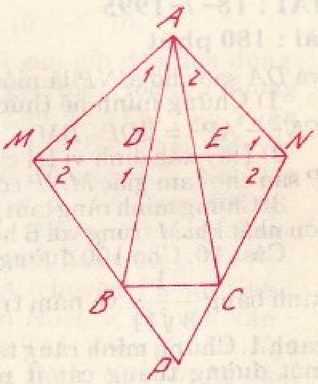
$\widehat{A}_1 + \widehat{M}_1 = \widehat{D}_1 = (180^o - \alpha)/2 = 90^o - \frac{\alpha}{2}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{M}_1 = \widehat{A}_2$(3)

Vì tam giác ABC cân và DE là đường trung bình nên $\widehat{MDA} = \widehat{AEN}$. Điều đó cùng với (3) cho ta :

$$\Delta MDA \backsim \Delta AEN,$$

suy ra $\frac{MD}{DA} = \frac{AE}{EN} \Rightarrow \frac{MD}{DB} = \frac{EC}{EN} \Rightarrow \Delta MDB \backsim$ ΔCEN (có hai góc D và E bằng nhau xen giữa hai cặp cạnh tương ứng tỉ lệ). Từ đó :



$\widehat{N_2} = \widehat{MBD} \Rightarrow$

$\widehat{M_2} + \widehat{N_2} =$

$= \widehat{BMD} + \widehat{MBD} =$

$= 180^o - \widehat{D}_1$

Trong tam giác MNP có

$\widehat{M}_2 + \widehat{N}_2 =$

$= 180^o - \widehat{MPN}$

Hai kết quả trên kéo theo

$\widehat{MPN} = \widehat{D}_1 = 90^o - \frac{\alpha}{2}$

Câu 5. Kí hiệu s là tổng của các số trong dãy. Sau khi điền dấu, ta gọi $s(+)$ là tổng của các số trong dãy được điền dấu "+", và $s(-)$ là tổng của các số trong dãy được điền dấu "–". Rõ ràng ta luôn có $s = s(+) + s(-)$ và kết quả của dãy tính bằng $s(+) - s(-)$. Theo cách điền dấu của Ân thì $s(+) - s(-) = 3$. Điều này chứng tỏ s là lẻ và với mọi cách điền dấu, hiệu $s(+) - s(-)$ cũng là lẻ. Do đó ta hi vọng có cách điền dấu sao cho kết quả của dãy tính bằng 1 ; Nếu được thì đó là cách làm thỏa mãn yêu cầu của đầu bài. Muốn vậy ta chú ý rằng $s = 1 + 2 + ... + n = n(n + 1)/2$ là lẻ nên n chỉ có thể có một trong hai dạng : $n = 4k + 1$ hoặc $n = 4k + 2$.

Nếu $n = 4k+1$ thì ta có cách điền dấu như sau :

$1 = +1 + (2-3-4+5) + (6-7-8+9) +...+ + [(n - 3) - (n - 2) - (n - 1) + n]$.

(ở đây, mỗi nhóm trong dấu ngoặc đều có tổng đại số bằng 0)

Nếu $n = 4k+2$ thì ta có cách điền dấu như sau :

$1 = +1-2+3-4 +...+ (2k-1)-2k-(2k+1) + + (2k+2) - ... - (4k + 1) + (4k + 2)$

(ở đây, tổng đại số của $2k$ số đầu tiên bằng $-k$ còn tổng đại số của các số còn lại bằng $k + 1$).

Câu 6. Với mỗi số nguyên n, số $n^2 - n = n(n - 1)$ luôn chẵn. Do đó số $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - (a + b + c + d)$ là chẵn. Từ giả thiết $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ suy ra $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 2(a^2 + b^2)$ là chẵn. Vậy $a + b + c + d$ chẵn. Mặt khác, vì a, b, c, d là các số nguyên dương nên $a + b + c + d > 2$. Do vậy nó luôn là hợp số (đpcm).

Câu 7. Trả lời : không thể.

Chứng minh : (phản chứng) Giả sử có thể dùng gáo I (dung tích $\sqrt{2}$) và gáo II (dung tích $2 - \sqrt{2}$) để chuyển được 1 lít nước từ bình A sang bình B bằng cách đong m gáo I và n gáo II, trong đó $m, n \in \mathbf{Z}$ (Ta quy ước $m > 0$ nếu đong từ A sang B và $m < 0$ nếu đong từ B sang A, tương tự đối với n). Khi đó xảy ra đẳng thức :

$m\sqrt{2} + n(2 - \sqrt{2}) = 1$

$(m - n)\sqrt{2} + 2n - 1 = 0$ (1)

Nếu $m \neq n$ thì từ (1) suy ra : $\sqrt{2} = (2n - 1)/(n - m) \in \mathbf{Q}$, vô lí vì $\sqrt{2}$ là số vô tỉ. Vậy phải có : $m = n = 1/2$ (vô lí).

Câu 8. 1) Với mỗi n nguyên dương ta có :

$$2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{2}{\sqrt{n} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) = \frac{2}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} > \frac{2}{\sqrt{n} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Từ đó suy ra bất đẳng thức kép cần cm.

2) Kí hiệu $S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}}$. Sử dụng bất đẳng thức kép vừa chứng minh với n lần lượt bằng 2, 3, ..., n rồi cộng các bất đẳng thu được lại, ta có :

$2(\sqrt{n+1} - \sqrt{2}) < S_n - 1 < 2(\sqrt{n} - 1)$

$2(\sqrt{n+1} - \sqrt{2}) + 1 < S_n < 2\sqrt{n} - 1$ (1)

Nếu $[S_n] = 2$ thì theo (1) :

$2 = [S_n] \leq S_n < 2\sqrt{n} - 1 \Rightarrow \sqrt{n} > 3/2 \Rightarrow n \geq 3$

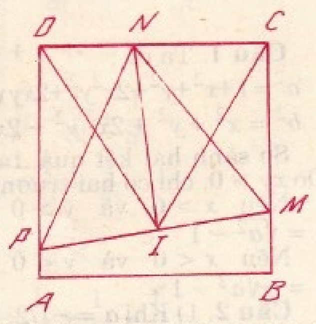
$2(\sqrt{n+1} - \sqrt{2}) + 1 < S_n < [S_n] + 1 = 3 \Rightarrow$ $\sqrt{n+1} < \sqrt{2} + 1 \Rightarrow n \leq 4$.

Các kết quả trên cho ta $3 \leq n \leq 4 \Rightarrow n = 3$ hoặc $n = 4$.

Ngược lại, nếu $n = 3$ hoặc $n = 4$ thì cũng vẫn áp dụng (1), ta tính được $2(\sqrt{4} - \sqrt{2}) + 1 < S_3 < 2\sqrt{3} - 1 \Rightarrow 2 < S_3 < 3 \Rightarrow [S_3] = 2$ (đúng) $2(\sqrt{5} - \sqrt{4}) + 1 < S_4 < 2\sqrt{4} - 1 \Rightarrow 2 < S_4 < 3 \Rightarrow$ $[S_4] = 2$ (đúng)

Vậy các giá trị cần tìm của n là $n = 3$ và $n = 4$.

Câu 9. 1) Đặt $AB = BC = CD = DA = a$. Áp dụng định lí Pi-ta-go ta có :



$MN^2 = MC^2 + CN^2 =$

$= (a - BM)^2 + CN^2$

$MP^2 = AB^2 +$

$+ (AP - BM)^2$

hay là :

$MN^2 = a^2 + BM^2 +$

$+ CN^2 - 2a \, . \, BM$

$MP^2 = a^2 + BM^2 +$

$+ AP^2 - 2AP \, . \, BM$

Vì $MN = MP$ nên từ hai đẳng thức trên suy ra :

$CN^2 - AP^2 = 2a \, . \, BM - 2AP \, . \, BM =$

$= 2(a - AP) \, . \, BM,$

$CN^2 - AP^2 = 2DP \, . \, BM$ (đpcm)

(Xem tiếp trang 7)

ĐỀ THI TUYỂN SINH 1995...

(Tiếp theo trang 14)

$$= \lim_{x \to 0} \frac{4\sin^2 x\cos^2 x - 4\sin^2 x\cos x\cos 2x}{x^4} =$$

$$= 4\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x\cos x}{x^2}\left[\frac{\cos x - \cos 2x}{x^2}\right] =$$

$$= 4\lim_{x \to 0} \frac{2\sin\frac{3x}{2}\sin\frac{x}{2}}{x^2} = 2.4\lim_{x \to 0} \frac{\sin\frac{3x}{2}}{\frac{3x}{2}} \cdot \frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \cdot \frac{3}{4} = 6$$

2. a. Vì $DM \perp (ABC)$ và $DA = DB = DC = a$ nên hình chiếu của chúng trên mặt phẳng (ABC) bằng nhau. Do đó $MA = MB = MC$.

Vì $\Delta\ ABC$ cân nên nó là tam vuông cân. (trung tuyến $CM = \frac{1}{2}AB$)

Vậy $x = AB = a\sqrt{2}$

b. Từ $\Delta\ DAB$ có $AD = BD = a$

và $AB = a\sqrt{2}$ nên $DM = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $MA = MB = MC = MD = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Tiếp theo ta có

$$S_{DAB} = S_{CAB} = \frac{a^2}{2},$$

$$S_{DCA} = S_{DBC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

$$\Rightarrow S_{tp} = S_{DAB} + S_{CAB} + S_{DCA} + S_{DBC} = \frac{a^2(2+\sqrt{3})}{2}$$

Áp dụng công thức $V = \frac{S_{tp} \cdot r}{3}$ (r – bán kính mặt cầu nội tiếp), ta có : $r = \frac{3V}{S_{tp}} = \frac{a(2-\sqrt{3})}{2}$.

Bạn có biết

SỐ Ả RẬP

Hệ thống số và chữ số thông dụng được gọi là hệ thống số Ả Rập. Người ta phân biệt hai loại hệ thống số. Sự phân loại này căn cứ vào cách tính giá trị của số. Loại thứ nhất có cách tính giá trị theo dạng chữ số và vị trí của chữ số đó trong dạng biểu diễn, được gọi là hệ thống số theo vị trí. Điển hình của loại này là hệ thống số Ả Rập mà ta đang dùng. Loại thứ hai có cách tính giá trị bằng cách cộng dồn các chữ số có mặt trong dạng biểu diễn. Quen thuộc với chúng ta là hệ thống số La Mã mà ta thường dùng để đánh số thứ tự. Trong hệ thống số La Mã, quy tắc cộng dồn dùng là quy tắc chính. Chỉ có một ngoại lệ là nếu chữ số bên trái có giá trị nhỏ hơn chữ số bên phải thì giá trị của nhóm hai chữ số đó bằng giá trị của chữ số bên phải trừ đi giá trị của chữ số bên trái. XIV có chữ số đứng giữa là I có giá trị 1, chữ số cuối V có giá trị là 5, nên giá trị của cả hai IV là 5 – 1 = 4. Vậy XIV có giá trị là 14.

Hệ thống số Ả Rập rất quen thuộc với chúng ta. Nó còn được gọi là hệ cơ số 10. Cách tính giá trị của biểu diễn số theo công thức sau :

$$a_1 a_2 ... a_n = a_1 . 10^{n-1} + a_2 . 10^{n-2} + ... + a_n . 10^0$$

Ví dụ biểu diễn số

$$252 = 2.10^2 + 5.10^1 + 2.10^0.$$

Số Ả Rập có nguồn gốc từ đâu ? Thương mại của Ấn Độ phát triển mạnh và nền văn minh của Ấn Độ cũng phát triển rất sớm. Khoảng thế kỉ VII và VIII ở Ấn Độ có nhiều cách viết số, trong đó có hệ thống số Hindu. Do tính đơn giản và khoa học của hệ thống số này, nó đã truyền bá sang các vùng lân cận. Thế kỉ IX nó lan sang Ả Rập. Tại đây nhà toán học Mohammed ibn–Musa al– Khowarizmi đã viết thành sách về hệ thống số Hindu bằng ngôn ngữ Ả Rập. Các chữ số được viết theo kiểu chữ cái Ả Rập (qua thời gian hàng thế kỉ, chữ số được viết như ngày nay). Trong thời gian này, ngôn ngữ Ả Rập là một ngôn ngữ đang thịnh hành ở châu Âu cùng với ngôn ngữ Latin. Vì vậy hệ thống này du nhập sang Tây Âu vào thế kỉ XII. Thế kỉ XIII nó sang Italia. Mãi cho đến thế kỉ XVI mới được sử dụng ở các nước khác của Tây Âu. Người châu Âu mượn số Hindu qua người Ả Rập nên họ gọi là số Ả Rập. Cách gọi này sai với lịch sử nhưng đã trở thành tên chính thức. Trong cách viết số của người Hindu, số không được kí hiệu là một dấu chấm hoặc một khuyên nhỏ. Trải qua thời gian, số không được viết thành khuyên tròn to bằng các chữ số khác.

NGUYỄN CAO THẮNG

sưu tầm

Giải trí TOÁN HỌC

Giải đáp bài

TRÒ CHƠI ĐOÁN CẦU

Dựa vào điều kiện "*số quả cầu xanh và số quả cầu đỏ đựng trong mỗi hòm đều không đúng với các chữ đã ghi ở phía ngoài mỗi hòm*" Nam suy luận và làm như sau : Hòm thứ ba, ở ngoài có ghi XĐ, sẽ chứa hoặc 2 quả cầu xanh, hoặc hai quả cầu đỏ. Nam bốc một quả cầu từ trong hòm đó.

– Nếu quả cầu bốc ra là xanh thì trong hai hòm còn lại sẽ còn 1 quả cầu xanh và 3 quả cầu đỏ. Với điều kiện của trò chơi ta suy ra ngay trong hòm ghi XX là hai quả cầu đỏ ; trong hòm ghi ĐĐ là 1 quả xanh và 1 quả đỏ. – Nếu quả cầu bốc ra là đỏ thì trong hai hòm còn lại sẽ có 1 quả cầu đỏ và 3 quả cầu xanh. Với điều kiện của trò chơi ta suy ra ngay trong hòm ghi ĐĐ là hai quả cầu xanh, trong hòm ghi XX là 1 quả cầu xanh và 1 quả cầu đỏ.

Nhận xét : Giải đáp dựa theo *Nguyễn Thành Trung*, 7M, Marie Curie, Hà Nội. Các bạn *Mai Thanh Tiếp*, 6T, NK Bỉm Sơn, Thanh Hóa và *Phan Vũ Toàn*, 6, Chuyên Từ Liêm, Hà Nội cũng có giải đáp tốt.

BÌNH PHƯƠNG

ĐIỀN SỐ VÀO HÌNH VUÔNG

Hãy điền các số tự nhiên từ 1 đến 16 vào các ô của hình vuông bên sao cho tổng các số ở mỗi hàng ngang, hàng dọc và mỗi đường chéo đều bằng nhau.

NGÔ HÂN

Ống kính cải cách dạy và học toán

MỘT ĐỀ TOÁN SAI

Trong sách "Tuyển tập 70 bài toán giải tích tổ hợp" (tác giả : Võ Đại Mau. NXB Trẻ), đề 61 được trình bầy như sau :

"Chứng minh rằng các số C_n^k, C_n^{k+1}, C_n^{k+2} với $k + 3 \geqslant n$, n và k là 2 số tự nhiên, không thể là 3 số hạng liên tiếp của một cấp số cộng."

Chỉ cần xét trường hợp sau đây là đủ để thấy đề toán trên là sai. Thật vậy, với $n = 7$ và $k = 4$, ta có $k + 3 = 4 + 3 = 7 = n$, đồng thời ta cũng có : $C_7^4 = \frac{7!}{4!3!} = 35$; $C_7^5 = \frac{7!}{5!2!} = 21$; $C_7^6 = \frac{7!}{6!1!} = 7$. Như vậy, các số đang xét là 3 số hạng liên tiếp của cấp số cộng với số hạng đầu là 35 và công sai là -14 (!).

ĐẶNG KỲ PHONG

ISSN : 8066 – 8035
Chỉ số : 12884
Mã số : 8BT29M6

Sắp chữ tại TTVT Nhà xuất bản Giáo dục
In tại Nhà máy in Diên Hồng – 57 Giảng Võ
In xong và nộp lưu chiểu tháng 5/1996

Giá : 2000đ
Hai nghìn đồng