BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ★ HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

4 (226)
1996
NĂM THỨ 33

TẠP CHÍ RA NGÀY 15 HÀNG THÁNG

★ SUY NGHĨ VỀ HAI HẰNG ĐẲNG THỨC

★ ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI THỪA THIÊN - HUẾ

★ ĐỀ THI TUYỂN SINH 1995 - 1996 ĐẠI HỌC XÂY DỰNG

★ SUY NGHĨ VỀ MỞ RỘNG MỘT BÀI TOÁN

★ VỀ MỘT BÀI TOÁN NHỎ

★ CẮT HÌNH CHỮ NHẬT

★ ĐIỂM CỦA MỖI NGƯỜI

Thày, trò Chuyên toán ĐHSP Hà Nội 1 trước mùa thi 1996.

TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ
MATHEMATICS AND YOUTH

MỤC LỤC

Tổng biên tập :
NGUYỄN CẢNH TOÀN
Phó tổng biên tập :
NGÔ ĐẠT TỨ
HOÀNG CHÚNG

Trụ sở tòa soạn :
45B Hàng Chuối, Hà Nội ĐT: 8213786
231 Nguyễn Văn Cừ, TP Hồ Chí Minh ĐT: 8356111

Biên tập và trị sự : VŨ KIM THỦY
Trình bày : TRỌNG THIỆP

Dành cho các bạn Trung học cơ sở

SUY NGHĨ VỀ HAI HẰNG ĐẲNG THỨC

HOÀNG NGỌC CẢNH
Hà Tĩnh

Có hai hằng đẳng thức rất quen thuộc với các bạn học sinh giỏi toán, chúng được đưa vào trong chương trình phổ thông như là một bài tập, đó là :

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc) \quad (1)$$

$$(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3=3(a+b)(b+c)(c+a) \quad (2)$$

Việc chứng minh chúng các bạn có thể xem trong các sách bồi dưỡng toán. Hai hằng đẳng thức này hầu như bị nhiều người bỏ rơi. Thật là bất công khi mà nó lại đem đến cho ta nhiều điều thú vị. Trước hết ta chú ý rằng từ (1) suy ra

$$a^3+b^3+c^3=3abc \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a+b+c=0 \\ a=b=c \end{array}\right. \quad (a)$$

Từ (2) suy ra :

$$(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-b \\ b=-c \\ c=-a \end{array}\right. \quad (b)$$

Việc vận dụng hai hằng đẳng thức này thật là hiệu quả và bất ngờ. Sau đây chúng ta cùng xét một số bài toán minh họa.

Bài 1. Cho a, b, c là các số thực khác 0 sao cho :

$$a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3=3a^2b^2c^2 \quad (3)$$

Hãy tính giá trị của biểu thức $M=(1+a/b)(1+b/c)(1+c/a)$

Lời giải : Đặt $x=bc,\ y=ac,\ z=ab \Rightarrow xyz \neq 0$

Từ giả thiết (3) suy ra $x^3+y^3+z^3=3xyz$,

$M=(1+y/x)(1+x/z)(1+z/y)$. Từ chú ý (a) ta xét hai trường hợp : 1) $x+y+z=0$. Từ (1), (2) và (a) ta dễ dàng suy ra :

$3(x+y)(y+z)(x+z)=-3xyz$, suy ra $M=-1$.

2) Nếu $x=y=z$ (hay $a=b=c$) suy ra $M=8$.

Bài 2. (Câu 3, đề 125, Bộ đề tuyển sinh)

Giả sử hệ : $\left\{\begin{array}{l} ax+bx=c \\ bx+cy=a \\ cx+ay=b \end{array}\right.$ có nghiệm

Chứng minh rằng : $a^3+b^3+c^3=3abc$

Lời giải : Do (a) nên ta cần chứng minh : $\left[\begin{array}{l} a+b+c=0 \\ a=b=c \end{array}\right.$

Thật vậy, giả sử cặp $(x\,;y)$ là nghiệm của hệ, cộng cả ba phương trình của hệ theo vế sau đó biến đổi thành :

$$(a+b+c)(x+y-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a+b+c=0 \\ x+y-1=0 \quad (*) \end{array}\right.$$

Từ (*) thế $y=1-x$ vào hệ ta dễ dàng chứng minh được $a=b=c$. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

Bài 3. Trong mặt phẳng tọa độ vuông góc Oxy, hãy tìm tập hợp những điểm $M(x, y)$ sao cho : $x^3-y^3=3xy+1 \quad (4)$

Lời giải : + Nếu không có cách nhìn nhận sáng suốt, không chú ý đến hằng đẳng thức (1) bạn có thể nhầm tưởng tập hợp M là một đường cong phức tạp.

+ Kì thực (4) $\rightleftharpoons$ với $x^3-y^3-1=3xy \rightleftharpoons$

$$\rightleftharpoons \left[\begin{array}{l} x-y-1=0 \\ x=-y=-1 \end{array}\right.$$

Vậy tập hợp M là đường thẳng : $x-y-1=0$ và điểm $M_o(-1,-1)$.

Bài 4. Giải phương trình : $54x^3-9x+\sqrt{2}=0$ (5)

Lời giải : Ta có (5) $\Rightarrow\ x^3-x/6+\sqrt{2}/54=0$.

Bây giờ ta tìm cách viết vế trái của phương trình dưới dạng :

$$x^3+a^3+b^3-3abx,$$

như vậy a, b thỏa mãn hệ : $\left\{\begin{array}{l} a^3+b^3=\sqrt{2}/54 \\ a^3b^3=1/18^3 \end{array}\right.$

Suy ra a^3, b^3 là nghiệm của phương trình : $t^2-\sqrt{2}t/54+1/18^3=0$

Giải phương trình này ta có $t_1=t_2=1/54\sqrt{2}$, suy ra $a=b=1/3\sqrt{2}$.

Khi đó (5) $\Leftrightarrow (x+a+b)(x^2+a^2+b^2-ax-bx-ab)=0$.

Vậy phương trình (5) có hai nghiệm là : $x_1=-2/3\sqrt{2},\ x_2=1/3\sqrt{2}$

(Xem tiếp trang 9)

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH THỪA THIÊN - HUẾ NĂM HỌC 1995 - 1996

MÔN THI : TOÁN 12

VÒNG 1

(180 phút, không kể thời gian giao đề)

Bài 1 : (4 điểm)

Giải phương trình : $\log_{1995}(\mathrm{tg}x) = \cos 2x$.

Bài 2 : (4 điểm)

Tìm tất cả giá trị m để hệ bất phương trình :

$$\begin{cases} x + y + \sqrt{2xy + m} \geqslant 1 \\ x + y \leqslant 1 \end{cases}$$

có duy nhất nghiệm đối với (x, y).

Bài 3 : (6 điểm)

Giả sử hệ phương trình :

$$\begin{cases} x = ay^2 + by + c \\ y = y + dx^2 + ex + f \end{cases} \quad (ad \neq 0)$$

có 4 nghiệm : $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4)$.

a) Chứng minh rằng, trên mặt phẳng Oxy, 4 điểm $M_i(x_i, y_i)$, $i = 1, 2, 3, 4$ nằm trên một đường tròn.

b) Gọi p, q, r là các lượng không âm xác định bởi :

$$p^2 = [(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2.[(x_3-x_4)^2 + (y_3-y_4)^2]$$

$$q^2 = [(x_2-x_3)^2 + (y_2-y_3)^2].[(x_1-x_4)^2 + (y_1-y_4)^2]$$

$$r^2 = [(x_1-x_3)^2 + (y_1-y_3)^2].[(x_2-x_4)^2 + (y_2-y_4)^2]$$

Chứng minh rằng, trong 3 lượng : p, q, r, có một lượng bằng tổng của hai lượng còn lại.

Bài 4 : (6 điểm)

Xét hàm f có tập xác định là $\mathbf{R} \setminus \{0 ; 1\}$, thỏa mãn phương trình : $f(1-x) + f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{2}{1-x}$ với mọi x khác 0 và 1.

a) Tính giá trị của $f(1996)$.

b) Hỏi phương trình : $f(x) = \dfrac{1999}{1995}$ có bao nhiêu nghiệm ? Giải thích.

c) Chứng minh rằng, tồn tại hàm số g có tập xác định là $\mathbf{R}$ và sao cho : $f(g(x)) = x$ với mọi $x \in \mathbf{R}$

VÒNG 2

(180 phút, không kể thời gian giao đề)

Bài 5 : (6 điểm)

Gọi A, B, C là số đo các góc của tam giá ABC. Chứng minh rằng :

a) $$\frac{1}{1 + \sin^2 A} + \frac{1}{1 + \sin^2 B} \leqslant \frac{2}{1 + \sin A . \sin B}$$

b) $$\frac{1}{1 + \sin^3 A.\sin B} + \frac{1}{1 + \sin^3 B.\sin C} + \frac{1}{1 + \sin^3 C.\sin A} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{1 + \sin^4 A} + \frac{1}{1 + \sin^4 B} + \frac{1}{1 + \sin^4 C}$$

Bài 6 : (6 điểm)

Cho tứ diện $ABCD$ có trọng tâm G.

a) Tìm điểm M trong không gian sao cho tổng : $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$ nhỏ nhất.

b) Xét điểm P nằm trong tứ diện $ABCD$ và không nằm trên các đường thẳng : AG, BG, CG, DG. Từ P kẻ các đường thẳng lần lượt song song với AG, BG, CG, DG, cắt các mặt phẳng : $(BCD), (CDA), (DAB), (ABC)$ theo thứ tự tại các điểm : A_1, B_1, C_1, D_1.

Hỏi điểm P có thể là trọng tâm của tứ diện $A_1B_1C_1D_1$ không ? Tại sao ?

Bài 7 : (4 điểm)

Tìm tất cả các bộ (a, b, c, d) gồm các số nguyên a, b, c, d thỏa mãn các điều kiện sau :

$$ab - cd = 1 \text{ và } ad + 1995bc = 2.$$

Bài 8 : (4 điểm)

Những chiếc thùng hình lập phương có kích thước giống nhau, đều không có nắp, và từng đôi một có thể chồng khít vào nhau.

Người ta chọn một số màu trong số các màu : **đỏ, xanh, vàng, lục, trắng**, để sơn các mặt còn lại của những chiếc thùng đó, sao cho thỏa mãn các điều kiện sau :

1) Mỗi mặt đều được sơn đúng một màu.

2) Hai mặt kề nhau (có chung cạnh) có màu khác nhau.

3) Khi hai thùng đặt chồng khít vào nhau, đáy chồng lên đáy, thì bao giờ cũng có ít nhất một cặp mặt, đang chồng khít vào nhau, có màu khác nhau.

Hỏi có thể sơn được tối đa là bao nhiêu chiếc thùng nói trên.

NGUYỄN DƯ BA

GIẢI BÀI kì trước

Bài T1/222.

Chứng minh rằng $9n^3 + 9n^2 + 3n - 16$ *không chia hết cho 343 với mọi* $n \in Z$

Lời giải : (của bạn *Đỗ Thị Hoa* 7T Bỉm sơn, Thanh Hóa)

Giả sử $A = 9n^3 + 9n^2 + 3n - 16 \,\vdots\, 343 = 7^3$

$\leftrightarrow 3A = 27n^3 + 27n^2 - 48 = (3n+1)^3 - 49$ chia hết $7^3 \to (3n+1)^3 \,\vdots\, 7^3$. Từ (1) suy ra

$$47 \,\vdots\, 7^3. \text{ Vô lí.}$$

Vậy $A \not\vdots\, 7^3$

Nhận xét : Bài này được nhiều bạn gửi lời giải đến và hầu hết có lời giải tốt, trong đó có các bạn *Đinh Cao Cường* 9 – Quảng Trạch, Quảng Bình, *Nguyễn Minh Quân* 8T chuyên Quảng Ngãi, *Phạm Ngọc Hưng* 8 – Trần Đăng Ninh, Nam Định, *Trần Thành Sơn* 8T thị xã Ninh Bình, *Phạm Hoàng Anh* 9 Thường Tín, Hà Tây, *Cao Thị Ly* 9T Vũ Thư, Thái Bình.

ĐẶNG HÙNG THẮNG.

Bài T2/222. *Cho a, b, c là 3 số hữu tỉ thỏa mãn :*

$$\begin{cases} abc = 1 \\ \dfrac{a}{b^2} + \dfrac{b}{c^2} + \dfrac{c}{a^2} = \dfrac{b^2}{a} + \dfrac{c^2}{b} + \dfrac{a^2}{c} \end{cases}$$

Chứng minh rằng một trong 3 số a, b, c là bình phương của một số hữu tỉ.

Lời giải *Cách 1.* (của Lê Lâm, 9T, chuyên Phú Thọ, Vĩnh Phú)

Đặt $x = \dfrac{a}{b^2}, y = \dfrac{b}{c^2}, z = \dfrac{c}{a^2}$ ta được :

$$\begin{cases} xyz = 1 & (1) \\ x + y + z = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} & (2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xyz = 1 & (3) \\ x + y + z = xy + yz + xz & (4) \end{cases}$$

Xét tích : $(x-1)(y-1)(z-1) = xyz - xy - yz - xz + x + y + z - 1 = 0$ (theo (3) và (4)).

Từ đó suy ra một trong 3 số x, y, z phải bằng 1.

Chẳng hạn $x = 1$ hay $\dfrac{a}{b^2} = 1 \Rightarrow a = b^2$ đpcm.

Cách 2. (của Nguyễn Hoàng Chương, 8T, NK Thái Nguyên, Bắc Thái)

$$\frac{a}{b^2} + \frac{b}{c^2} + \frac{c}{a^2} = \frac{b^2}{a} + \frac{c^2}{b} + \frac{a^2}{c}$$

$\Leftrightarrow a^3c^2 + b^3a^2 - c^3b^2 = b^3c + c^3a + a^3b$ (vì $a^2b^2c^2 = abc = 1$)

$$\Leftrightarrow (a^2b^2c^2 - a^3c^2) - (b^3a^2 - a^3b) - (c^3b^2 - c^3a) + (b^3c - abc) = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2c^2(b^2 - a) - ba^2(b^2 - a) - c^3(b^2 - a) + bc(b^2 - a) = 0$$

$$\Leftrightarrow (b^2 - a)[(a^2c^2 - ba^2) - (c^3 - bc)] = 0$$

$$\Leftrightarrow (b^2 - a)(c^2 - b)(a^2 - c) = 0$$

Từ đó suy ra một trong 3 số a, b, c phải là bình phương của một số hữu tỉ.

Nhận xét. Có rất nhiều bạn giải đúng bài này. Các bạn sau đây có lời giải tốt : *Nguyễn Văn Mạnh*, 9T, NK Bắc Thái, *Đặng Thu Hương*. 8T, Chuyên Phú Thọ ; *Đinh Quốc Vĩnh*, 9, NK Chuyên Văn – Toán, Vĩnh Yên, Vĩnh Phú. *Trần Thùy Duyên*, 8b, Chuyên Văn – Toán, Ứng Hòa, *Phạm Hoàng Anh, 9, Chuyên Văn – Toán, Thường Tín, Hà Tây*. Nguyễn Như Chuẩn, *8, NK* Thuận Thành, *Phạm Hải Trung*, 9T, NK Tiên Sơn, Hà Bắc. *Nguyễn Hoàng Lam, Trần Tấn Đạt*, 8A$_1$, Chu Văn An, Tây Hồ ; *Hà Thành Trung*, 9A, Bế Văn Đàn ; *Đinh Quốc Vĩnh*, 9A, Đông Đô, Từ Liêm ; *Nguyễn Tuấn Anh*, 8C, Ngọc Lâm, Gia Lâm, Hà Nội. *Phạm T.P.Thúy*, 8A$_1$; *Nguyễn Thanh Vân*, 9A$_1$, Hồng Bàng ; *Tạ Thành Định*, 9T, NK Trần Phú, Hải Phòng. *Trần Đại Nghĩa*, 9, NK Phù Tiên, Hải Hưng. *Phạm Thu Giang, Phạm Ngọc Hưng*, 8T, *Mai Ngọc Kha*, 9T, Trần Đăng Ninh, Nam Hà. *Trịnh Huy Minh*, 9T, NK Đông Sơn ; *Lê Ngọc Tính*, 9C, NK Hoằng Hóa ; *Lê Hoàng Dương*, 9T, NK Bỉm Sơn, Thanh Hóa. *Phan Thành Trung*, 8T, PTCS Quán Hành, *Võ Minh Giáp*, 9T, NK Nghi Lộc, Nghệ An. *Trần Hằng An*, 9A, NK Nghi Xuân ; *Nguyễn Thị Nhung*, 9A, NK Hương Sơn, *Trần Nguyên Thọ*, 8T, NK Thị xã, *Nguyễn Hồng Trung*, 9T, PTTH Năng Khiếu, Hà Tĩnh. *Lê Trung Kiên*, 8$_1$. *Trần Như Quang*, 9CT, Nguyễn Trí Phương, Thừa Thiên – Huế. *Nguyễn Hoàng Thành*, 9$_1$, Nguyễn Huệ, Đà Nẵng, Quảng Nam – Đà Nẵng. *Nguyễn Minh Quân*, 8T, Chuyên Nghĩa Hành, *Tiêu Minh Dũng*, 7T$_1$, *Trần Thị Bích Liên*, 8T ; *Phan Lan Anh*, 9A$_2$, Chuyên Lê Khiết, Quảng Ngãi. *Trần Tuấn Anh*, 8T, Lê Quý Đôn, Nha Trang, Khánh Hòa ; *Nguyễn Long Khánh, Huỳnh Tuấn Dũng, Nguyễn Ngọc Minh*, 9A, Lương Văn Chánh, Tuy Hòa, Phú Yên.

TÔ NGUYÊN.

Bài T3/222. *Tìm một hệ thức giữa a và b là điều kiện cần và đủ để hệ bất phương trình sau đây có nghiệm :*

$$\begin{cases} 3x^2 - 4xy + y^2 \leq a^2 & (1) \\ x^2 - xy + 4y^2 \geq b & (2) \end{cases}$$

Lời giải. *Điều kiện cần.* Nhân hai vế của (2) với -2 rồi cộng với (1) vế với vế, được :

$$x^2 - 6xy + 9y^2 \leq a^2 - 2b$$

hay $0 \leq (x - 3y)^2 \leq a^2 - 2b$. Vậy : $a^2 \geq 2b$. (3)

Điều kiện đủ. Ta sẽ chỉ ra hệ có nghiệm khi (3) đã được thỏa mãn. Thật vậy, dễ dàng kiểm tra với $a^2 \geq b$ thì cặp số $x = 3a : 4$; $y = a : 4$ là nghiệm.

Vậy, điều kiện cần tìm là (3).

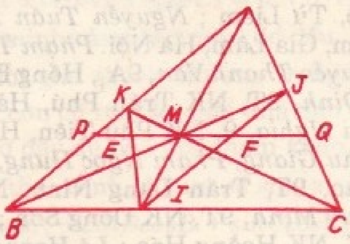
Nhận xét. Các bạn đều giải đúng. Các bạn sau đây có lời giải tốt : *Vũ Trụ* (9 Năng khiếu, Phù Tiên Hải Hưng) ; *Trần Thị Bích Liên* (8T Chuyên Lê Khiết, Quảng Ngãi) ; *Nguyễn Như Chuẩn* (8 Năng khiếu, Thuận Thành, Hà Bắc) ; *Phan Đức Phong* ($11A_3$ PTTH Cam lộ, Quảng Trị) ; *Phạm Hoàng Anh* (9 Chuyên V – T – TT – Hà Tây).

ĐẶNG VIỄN

Bài T4/222 : *Cho tam giác ABC với điểm M ở bên trong. Gọi I, J, K theo thứ tự là giao điểm của các tia AM, BM, CM với các cạnh AB, BC, CA. Đường thẳng qua M và song song với BC cắt IK, IJ tại các điểm tương ứng E, F. Chứng minh rằng ME = MF.*

Lời giải : Theo định lí Ta lét ta có :

$$\frac{MP}{MQ} = \frac{IB}{IC};\ \frac{ME}{MP} = \frac{CI}{CB};\ \frac{MQ}{MF} = \frac{BC}{BI}$$



Suy ra :

$$\frac{MP}{MQ}\cdot\frac{ME}{MP}\cdot\frac{MQ}{MF} = \frac{IB}{IC}\cdot\frac{CI}{CB}\cdot\frac{BC}{BI}$$

Do đó $\dfrac{ME}{MF} = 1$ hay $ME = MF$ (đpcm).

Nhận xét : Giải tốt bài này có các bạn :

Bùi Triệu Giang, PTTH Lí Tự Trọng, Cần Thơ ; *Phạm Minh Hùng*, 9T Nguyễn Du, Gò Vấp, *Chung Nhân Phú* 8T1 Nguyễn An Khương, Hóc Môn, *Trịnh Lê Tuấn*, 9T Nguyễn Du, Quận 1, Thành phố Hồ Chí Minh, *Trần Anh Tùng*, 8CT Nguyễn An Ninh, Bà Rịa – Vũng Tàu, *Lương Trung Tuấn*, 9T Bồi dưỡng giáo dục, Biên Hòa, Đồng Nai, *Hồ Việt Đức*, $8A_2$ cấp II Lê Lợi, Di Linh, *Nguyễn Tuấn Anh*, 9T Chuyên Phan Chu Trinh, *Buôn Mê Thuột*, Đắc Lắc ; *Trần Tuấn Anh*, 8T, Lê Quý Đôn, Nha Trang, Khánh Hòa ; *Nguyễn Ngọc Minh*, 9A Lương Văn Chánh, Phú Yên, *Lê Bích Thảo*, 8 Võ Xán, Tây Sơn, Bình Định *Lê Quang Lợi*, 8T Nguyễn Nghiêm, Đức Phổ, *Đặng Trần Việt Sơn*, *Hồ Từ Vũ*, *Võ Trần Nguyên Lộc*, 9T Lê Khiết, Quảng Ngãi, *Võ Trung Thành*, 8T Nguyễn Khuyến, Đà Nẵng, *Lê Trung Kiên*, 8^1 Nguyễn Tri Phương, *Lê Chí Thành*, *Trần Như Quang* 9 Nguyễn Tri Phương, Thừa Thiên – Huế, *Lê Phương Hà*, 91 Đồng Mĩ, Đồng Hới, Quảng Bình, *Phạm Thị Ngọc Hoa*, 27 tổ 5, Đồng Vinh, Phường Tân Giang, *Nguyễn Mai Hương*, 9T, *Nguyễn Thị Thúy Hạnh*, *Đinh Thị Phương*, *Trần Nguyên Thọ*, 8T Năng khiếu Hà Tĩnh ; *Nguyễn Huy Cường* CT ĐHSP Vinh, *Lê Thị Tâm* 9A PTTH Hưng Dũng, *Phan Thanh Trung*, 8T Quán Hành, Nghi Lộc, Nghệ An, *Lê Hoàng Dương*, *Nguyễn Thị Nhung*, 9T NK Bỉm Sơn, *Đỗ Thị An*, 9A NK Đông Sơn, Thanh Hóa, *Phạm Đình Quốc Hưng*, *Trần Đức Thịnh*, 7T, *Trần Minh Toàn*, *Nguyễn Trọng Kiên*, *Vũ Trần Cương*, *Phạm Thu Giang*, *Trần Đình Hùng* 8T, *Trần Ngọc Anh*, *Mai Ngọc Kha*, *Vũ Thùy Như*, 9T Trần Đăng Ninh, Nam Định, *Phạm Anh Tuấn* 9B, *Trương Công Lương*, 9A Thanh Lưu, Thanh Liêm, *Bùi Thị Vân Anh*, *Phạm Thị Mai Thảo*, *Bùi Thị Khánh Thuận*, 9 NK Ý Yên, Nam Hà, *Trần Văn Hà*, 7T NK Kiến Xương, *Trần Cường* 8T Phạm Huy Quang, *Cao Thị Ly* T9 NK Vũ Thư, Thái Bình, *Đặng Trần Dũng* $8A^1$ Nguyễn Trãi, *Nguyễn Thu Hà*, 9K Lê Lợi, Hà Đông, *Phạm Hoàng Anh*, 9 Chuyên Thường Tín, *Nguyễn Hà Duy*, 9T Chuyên Phú Xuyên, Hà Tây, *Vũ Thị Thuận* 9T PTNK Thị xã Hải Dương, Hải Hưng *Đoàn Hương Giang*, 9A THCS Núi Đối, Kiến Thụy, *Nguyễn Minh Khôi*, *Trần Huy Hoàng*, 8T Chu Văn An, *Nguyễn Thanh Vân*, 9A1, *Trần Quang* $8A_1$, Hồng Bàng, *Tạ Thành Định*, 9T Trần Phú, Hải Phòng, *Nguyễn Minh Hiếu*, T8 NK Bắc Ninh, *Phùng Đức Dũng*, 9T NK Bắc Giang, *Đặng Đình Hạnh*, *9CT NK Thuận Thành, Hà Bắc*, *Nguyễn Hoàng Lam*, 8A1 Chu Văn An, *Phạm Quang Vinh*, 9A, *Trần Thanh Vinh* 8A Bế Văn Đàn, *Phạm Tuấn Anh*, 8A Lương Thế Vinh, *Khuất Minh Đức*, 7H Trưng Vương, *Nguyễn Hồng Quang*, 7D Nguyễn Du II, *Nguyễn Việt Hùng*, 9CT Chuyên Từ Liêm, *Nguyễn Tuấn Anh*, 8C Ngọc Lâm, Gia Lâm, Hà Nội, *Nguyễn Xuân Kiện*, 7B Chuyên cấp II Phú Thọ, *Nguyễn Xuân Trung*, 9A1 Gia Cẩm, Việt Trì, Vĩnh Phú, *Nguyễn Văn Mạnh*, *9T cấp II NK Bắc Thái.*

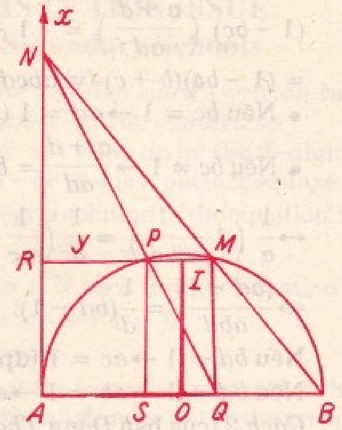
VŨ KIM THỦY

Bài T5/222. *Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB và điểm M di động trên nửa đường tròn đó. Gọi N là giao điểm của tia BM với tiếp tuyến Ax của nửa đường tròn ; P là giao điểm thứ hai của nửa đường tròn với đường vuông góc hạ từ M xuống Ax, Q là chân đường vuông góc hạ từ M xuống AB. Xác định vị trí của M sao cho N, P, Q thẳng hàng.*

Lời giải. Gọi R, S lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ P xuống Ax, AB, ta có M, P, R thẳng hàng. Mặt khác, $MR \parallel AB$ (do cùng vuông góc với Ax), nên gọi I là trung điểm của MP ta có hình thang cân $APMB$ nhận IO làm trục đối xứng. Hơn nữa, do cùng vuông góc với AB nên $MQ \parallel IO \parallel PS$, và do đó MQ, PS cũng đối xứng với nhau qua IO. Đặt $y = QB$ và $r = OB$, ta có $0 < y < r$. Do tính đối xứng đã nêu, ta có $MP = QS = 2OQ = 2(r-y)$; $AQ = 2r - y$; $PR = SA = QB = y$. Giả sử N, P, Q thẳng hàng, áp dụng định lí Ta–lét với $MR \parallel AB$, ta có :

$\dfrac{PM}{QB} = \dfrac{PR}{QA}$ (1) vì cùng bằng $\dfrac{NP}{NQ}$. Thay vào (1) bằng các biểu thức đã biết rồi tính, được :

$y_{1,2} = 3r \pm r\sqrt{5}$.
Do $0 < y < r$ nên $y = 3r - r\sqrt{5}$. Do tính chất duy nhất của điểm Q ứng với điểm M nên phần đảo cũng được suy ra. Kết luận : M nằm trên giao tuyến của cung $\overset{\frown}{AB}$ với đường vuông góc với AB tại điểm Q thuộc đoạn AB sao cho $QB = OB(3 - \sqrt{5})$ hay $AQ = OA(\sqrt{5} - 1)$.



Nhận xét. Nhiều bạn tính sai. Các bạn sau đây có lời giải tốt : *Mai Ngọc Kha* (9T Trần Đăng Ninh, TP Nam Định) ; *Trịnh Huy Minh* (9T Năng khiếu, Đông Sơn, Thanh Hóa) ; *Trịnh Bảo Trung* (9A THCS Bế Văn Đàn Hà Nội).

ĐẶNG VIỄN

Bài T6/222. *Cho hàm số $f(x) = \cos 2x + a\cos x + b\sin x$. Tìm a, b sao cho $f(x) \geq -1$ với mọi x.*

Lời giải (của hầu hết các bạn) ;

Với $a = 0, b = 0$ thì $f(x) = \cos 2x$ và $f(x) \geq -1\ \forall x$.

Xét trường hợp $a^2 + b^2 > 0$.

– Nếu $b < 0$ thì $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 + b < -1$

– Nếu $b > 0$ thì $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1 - b < -1$

– Nếu $b = 0$ thì $a \neq 0$ và $f(x) = \cos 2x + a\cos x$. Chọn m sao cho $m > 2$; $\frac{|a|}{m} < 1$. Khi đó tồn tại x_o để $\cos x_o = -\frac{a}{m}$ và

$$f(x_o) = \cos 2x_o + a\cos x_o = -1 + 2\cos^2 x_o + a\cos x_o$$

$$= -1 + 2.\frac{a^2}{m^2} - \frac{a^2}{m} = -1 + \frac{a^2}{m^2}(2 - m) < -1.$$

Vậy $(a, b) = (0, 0)$.

Nhận xét. 1. Đa số các bạn giải theo cách trên. Một số bạn còn có một số cách khác dựa trên tính liên tục của hàm $f(x)$.

2. Các bạn sau có lời giải tốt :

Nam Hà : Phạm Thanh Hải(11A), *Phạm Minh Sáng* (12B), *Trần Trọng Nghĩa, Trần Đức Quyền, Phạm Hồng Nam, Phạm Văn Quốc.*

Vĩnh Long : Nguyễn Hồng Phương (10T), *Lê Thái Nhân* (12T)

Hà Nội : Ngô Thanh Tùng (Chu Văn An), *Nguyễn Hữu Cường, Phạm Minh Hoàng* (Kim Liên), *Lê Phương Anh, Trần Nguyên Ngọc, Lê Việt Anh, Lê Ngọc Tú, Nguyễn Sỹ Phong, Đặng Thanh Hà, Nguyễn Duy Tùng, Nguyễn Quốc Thắng, Hoàng Sĩ Hùng, Nguyễn Hoàng Dương, Nguyễn Công Minh, Nguyễn Vũ Hưng, Dương Việt Hùng, Nguyễn Chí Dũng, Đinh Trung Hằng, Đỗ Thanh Hải, Nguyễn Việt Dũng, Đặng Tùng Sơn.*

Quảng Ngãi : Võ Quốc Hùng, Phạm Công Thiện, Nguyễn Hoàng Công.

Quảng Ninh : Vũ Trường Giang, Phạm Đình Đường, Nguyễn Mạnh Hùng.

Đồng Tháp : Nguyễn Đăng Triển, Hồ Tộc Thuận, Đậu Hồng Quân.

Hà Tĩnh : Mai Tùng Long, Phạm Văn Hùng

Bình Định : Đặng Hữu Thọ, Hồ Quang Trung

Hòa Bình : Lê Văn Mạnh, Vũ Đình Chu.

Thái Bình : Nguyễn Mạnh Hà, Đoàn Nhật Dương, Nguyễn Thành Phương.

TP HCM : Hồ Văn Hưng, Võ Tâm Vân, Trần Thiên Ánh, Nguyễn Lê Lực, Nguyễn Viết Cường.

Vĩnh Phú : Đỗ Ngọc Minh, Nguyễn Kim Tuyết, Nguyễn Xuân Kiên, Nguyễn Ngọc Hà.

Quảng Bình : Đào Nhật Tân, Trần Công Chính, Đinh Hoàng Gia, Nguyễn Hữu Cẩn, Nguyễn Thanh Tú, Trần Quế Lâm, Phan Duy Hùng, Cao Ngọc Tuấn, Đỗ Đức Dũng.

Phú Yên : Trương Phú Thiện, Võ Hoàng Phú, Trịnh Ái Quốc, Võ Thị Ly, Trương Trung Tuyến, Đàm Khánh Hòa.

Hải Hưng : Đỗ Hùng Mạnh, Đinh Phú Minh, Nguyễn Trung Kiên, Nguyễn Phúc Khánh, Trịnh Thị Thu Thủy, Trần Quốc Hoài.

Hà Bắc : Nguyễn Quang Minh, Phạm Việt Ngọc, Đặng Hoàng Việt Hà, Vũ Duy Tuấn.

Huế : Lê Anh Vũ, Đào Xuân Vinh, Nguyễn Thị Phương Chi.

Hà Tây : Lưu Tiến Dũng, Nguyễn Vinh Quang, Nguyễn Xuân Việt.

Hải Phòng : Đoàn Minh Hà, Nguyễn Hữu Tuấn, Hà Duy Hưng, Hoàng Lê Quang, Tạ Thiện Toàn.

Đà Nẵng : Lê Triệu Phong, Lê Anh Khôi, Nguyễn Duy Hiệu, Lê Tự Nhiên, Đinh Bảo Khoa.

Thanh Hóa : Nguyễn Thành Trung, Nguyễn Hữu Hậu, Nguyễn Khánh Tùng, Đoàn Thanh Hải, Nguyễn Hữu Chữ, Nguyễn Văn Biện, Tạ Hữu Hưng, Nguyễn Văn Thắng, Lê Hoàng Dương, Hào Văn Thắng, Phạm Anh Tuấn, Trần Hữu Chi, Nguyễn Biên Thùy, Lê Trung Hiếu.

Nghệ An : Đặng Đức Hạnh, Nguyễn Huy Cường, Trần Nam Dũng, Nguyễn Khánh Quỳnh, Trương Xuân Thung, Nguyễn Thái Thọ, Nguyễn Cảnh Dương, Nguyên Ngọc Tuấn, Hoàng Xuân Bách, Nguyễn Việt Dũng, Lê Hồng Hà, Phan Quốc Khánh, Nguyễn Hồng Chung, Nguyễn Thái Bảo.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T7/222 : *Giải hệ phương trình :*

$$\begin{cases} x - 3z^2x - 3z + z^3 = 0 \\ y - 3x^2y - 3x + x^3 = 0 \\ z - 3y^2z - 3y + y^3 = 0 \end{cases}$$

Lời giải : Viết lại hệ đã cho dưới dạng :

$$\begin{cases} x(1 - 3z^2) = 3z - z^3 \\ y(1 - 3x^2) = 3x - x^3 \\ z(1 - 3y^2) = 3y - y^3 \end{cases} \quad (I)$$

Từ đó, dễ thấy, nếu (x, y, z) là nghiệm của hệ đã cho thì phải có $x,y,z \neq \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$. Bởi thế :

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3z - z^3}{1 - 3z^2} & (1) \\ y = \dfrac{3x - x^3}{1 - 3x^2} & (2) \quad (II) \\ z = \dfrac{3y - y^3}{1 - 3y^2} & (3) \end{cases}$$

Đặt $x = \text{tg}\alpha$, với $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ (4) và sao cho $\text{tg}\alpha, \text{tg}3\alpha, \text{tg}9\alpha \neq \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ (5). Khi đó, từ (2), (3), (1) sẽ có $y = \text{tg}3\alpha$, $z = \text{tg}9\alpha$ và $x = \text{tg}27$. Từ đây dễ dàng suy ra (x,y,z) là nghiệm của (II) khi và chỉ khi $x = \text{tg}\alpha$, $y = \text{tg}3\alpha$, $z = \text{tg}9\alpha$, với α được xác định bởi (4), (5) và $\text{tg}\alpha = \text{tg}27\alpha$ (6).

Có : (6) $\Leftrightarrow 26\alpha = k\pi, k \in Z \Leftrightarrow \alpha = \frac{k\pi}{26}\}$, $k \in Z$.

Vì thế α thỏa đồng thời (4) và (6) khi và chỉ khi $\alpha = \frac{k\pi}{26}$ với k nguyên thỏa : $-12 \leq k \leq 12$. Dễ dàng kiểm tra được rằng, tất cả các giá trị α được xác định như vừa nêu đều thỏa (5).

Vậy, tóm lại, hệ phương trình đã cho có tất cả 25 nghiệm, đó là :

$\left(x = tg\frac{k\pi}{26}, y = tg\frac{3k\pi}{26}, z = tg\frac{9k\pi}{26}\right)$, $k = 0, \pm 1, ..., \pm 12$.

Nhận xét : 1. Tất cả các bạn giải đúng bài toán đều giải theo phương pháp của Lời giải nêu trên.

2. Có 54 bạn (trong tổng số 107 bạn gửi lời giải) cho lời giải sai, do đã hiểu sai các kiến thức cơ bản. Chẳng hạn, rất nhiều bạn đã khẳng định, rằng "nếu hàm số $f(t)$ không xác định tại $t = a$, và đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty, a)$, $(a, +\infty)$ thì $\forall t_1, t_2 \in \mathbf{R} \setminus \{a\}$ mà $t_1 < t_2$ ta luôn có $f(t_1) < f(t_2)$" ; hay một số bạn cho rằng "vì mỗi phương trình của hệ có bậc cao nhất là 3 nên hệ chỉ có tối đa 3 nghiệm", ...

3. Không ít bạn, do không để ý tới các điều kiện của α (khi đặt $x = \text{tg}\alpha$) nên đã không loại trừ được các nghiệm ngoại lai.

NGUYỄN KHẮC MINH

Bài T8/222 *Cho bốn số a, b, c, d có tích bằng 1 và thỏa mãn đẳng thức*

$$a + b + c + d = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}.$$

Chứng minh rằng bốn số a, b, c, d được phân làm hai cặp giả sử là cặp (a,b) và (c, d) sao cho

$$ab = cd = 1$$

Lời giải : Cách 1 (của các bạn *Nguyễn Hoàng Lam* 8A$_1$ Chu Văn An, Hà Nội)

Ta có :

$a + b + c + d = bcd + cda + dab + abc$

$\leftrightarrow a(1 - bc) + d(1 - bc) = b(ad - 1) + c(ad - 1)$

$\leftrightarrow (1 - bc)(a + d) = (ad - 1)(b + c) \to$

$(1 - bc)\left(\frac{a + d}{ad}\right) = \left(1 - \frac{1}{ad}\right)(b + c) =$

$= (1 - bc)(b + c)$ (vì $abcd = 1$).

• Nếu $bc = 1 \to ad = 1$ (đpcm).

• Nếu $bc \neq 1 \to \frac{a + d}{ad} = b + c = \frac{1}{acd} + \frac{1}{abd}$

$\leftrightarrow \frac{1}{a}\left(1 - \frac{1}{bd}\right) = \frac{1}{d}\left(\frac{1}{ac} - 1\right) = \frac{1}{d}(bd - 1)$

$\leftrightarrow \frac{(bd - 1)}{abd} = \frac{1}{d}(bd - 1)$.

Nếu $bd = 1 \to ac = 1$ (đpcm).

Nếu $bd \neq 1 \to ab = 1 \to cd = 1$ (đpcm).

Cách 2 (của bạn *Đặng Thanh Hà* 12A ĐHSP, Hà Nội và *Vũ Đức Sơn* 12T Lương Văn Tụy, Ninh Bình)

Đặt $S_1 = a + b + c + d$

$S_2 = ab + ac + ad + bc + bd + cd$

$S_3 = abc + bcd + cda + dab$

$S_4 = abcd = 1$

Theo định lí Viét a, b, c, d là 4 nghiệm của phương trình

$$x^4 - S_1x^3 + S_2x^2 - S_3x + 1 = 0 \quad (1)$$

Vì $abcd = 1$ và $a + b + c + d = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$ nên sẽ thấy $S_1 = S_3$.

Từ đó nếu x_o là nghiệm của (1) thì $\frac{1}{x_o}$ cũng là nghiệm của (1). Vậy tập nghiệm của (1) được phân thành hai cặp tích hai số trong mỗi cặp bằng 1.

Nhận xét : Bài toán này thu hút khá đông các bạn tham gia giải. Đa số các bạn giải theo cách 1, đó là cách chân phương, sơ cấp nhất. Cách thứ hai cho thấy bản chất của bài toán và từ đó có thể mở rộng cho nhiều số. Chẳng hạn ta có bài toán sau đây với cách giải tương tự :

Cho 6 số $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ sao cho $x_1x_2x_3x_4x_5x_6 = 1$

$$\sum_{i=1}^{6} = \sum_{i=1}^{6} \frac{1}{x_i} \quad \sum_{1 \leq i < j \leq 6} x_ix_j = \sum_{1 \leq i < j \leq 6} \frac{1}{x_ix_j}$$

Chứng minh rằng khi đó các số $(x_i)_{i=1}^{6}$ được chia thành 3 cặp, tích hai số trong mỗi cặp bằng 1.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

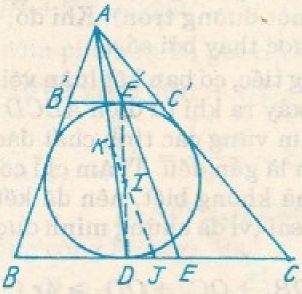
Bài T9/222. *Đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với cạnh BC ở điểm D. Gọi J và K lần lượt là trung điểm của BC và AD. Chứng minh rằng đường thẳng JK đi qua I.*

Lời giải 1. (Dựa theo lời giải của *Nguyễn Trọng Kiên*, 8T Trần Đăng Ninh, Nam Hà, *Nguyễn Kim Tuyến*, 11A, PTTH chuyên Hùng Vương, Việt Trì, *Nguyễn Nguyên Ngọc*, 11B, ĐHKHTN, Hà Nội, *Nguyễn Viết Cường*, 10 CT chuyên Lê Hồng Phong, thành phố Hồ Chí Minh và một số bạn khác).

Đặt : $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ thế thì :

$BD = p - b$, trong đó $2p = a + b + c$.

Gọi E là điểm đối xứng của D qua trung điểm J của BC ; $CE = p - b$ (cũng vậy, $BE = p - c$) thế thì E là tiếp điểm trên cạnh BC của đường tròn (I_a, r_a) bàng tiếp góc A của tam giác ABC.



Kẻ tiếp tuyến $B'C' // BC$ của đường tròn (I), tiếp xúc với (I) ở E' là điểm xuyên tâm – đối của D trên (I). Thế thì đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC trở thành đường tròn bàng tiếp góc $B'AC'$ của tam giác $AB'C'$. Phép vị tự tâm A, tỉ số $k = \dfrac{AB}{AB'} \left(= \dfrac{AC}{AC'} = \dfrac{BC}{B'C'} \right)$ biến đường tròn (I) thành đường tròn (I_a) bàng tiếp góc $\widehat{BAC}$ của tam giác ABC, do đó biến E' thành E ; tức là A, E và E' thẳng hàng.

Từ đó suy ra : Đường trung bình JK của tam giác ADE (song song với AE) đi qua trung điểm I của đoạn DE' nối đỉnh D với một điểm E' trên cạnh AE.

Lời giải 2. (Sử dụng véctơ, dựa theo *Lưu Trung Kiên, Nguyễn Việt Dũng* 10D, Chu Văn An, Hà Nội ; *Đặng Thành Trung* 10 chuyên Toán PTNK, Hải Hưng ; *Đoàn Mạnh Hà*, PTTH năng khiếu, Trần Phú, Hải Phòng ; *Đặng Hữu Thọ*, 10A PTTH Phù Cát 1, Bình Định ; *Đặng Thanh Hải*, 12A chuyên Toán ĐHSP, Hà Nội ; *Nguyễn Vũ Hưng* 12D chuyên ngữ ĐHNN, Hà Nội và một số bạn khác).

Dễ thấy rằng : $BD = p - b$, $DC = p - c$; từ đó ta được $(p - c)\,\overrightarrow{DB} + (p - b)\,\overrightarrow{DC} = \vec{0}$. Suy ra :

$$a\,\overrightarrow{ID} = (p - c)\,\overrightarrow{IB} + (p - b)\,\overrightarrow{IC} \; ; \quad (1)$$

Vì K là trung điểm AD, J là trung điểm BC, nên ta có :

$$2a\,\overrightarrow{IK} = a\,\overrightarrow{IA} + (p - c)\,\overrightarrow{IB} + (p - b)\,\overrightarrow{IC} \; ; \quad (2)$$

$$2(p - a)\,\overrightarrow{IJ} = (p - a)\,\overrightarrow{IB} + (p - a)\,\overrightarrow{IC} \; ; \quad (3)$$

Từ (2) và (3), ta được :

$$2a\,\overrightarrow{IK} + 2(p - a)\,\overrightarrow{IJ} = a\,\overrightarrow{IA} + b\,\overrightarrow{IB} + c\,\overrightarrow{IC} \; ; \quad (4)$$

Mặt khác, vì I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC nên ta có hệ thức (Hãy chứng minh !)

$$a\,\overrightarrow{IA} + b\,\overrightarrow{IB} + c\,\overrightarrow{IC} = \vec{0} \; ; \quad (5)$$

Từ (4) và (5), suy ra :

$$a\,\overrightarrow{IK} + (p - a)\,\overrightarrow{IJ} = \vec{0} \quad (6)$$

Hệ thức (6) chứng tỏ $\overrightarrow{IJ}$ cộng tuyến với $\overrightarrow{IK}$; nói khác đi ba điểm I, J, K thẳng hàng, cũng tức là $(JK) \ni I$.

Nhận xét. 1°) Rất đông các bạn tham gia giải bài toán trên, trong đó có nhiều bạn lớp 8 và lớp 9 PTCS (vì chỉ sử dụng định lí Talét, tam giác đồng dạng và định lí về đường trung bình).

2°) Số bạn sử dụng phương pháp véctơ không nhiều, thường chưa gọn, còn dài dòng.

3°) Tất cả đều giải đúng, trừ hai bạn, tuy nhiên các bạn cần tìm cách trình bày lời giải thật rành mạch, khúc chiết, chặt chẽ và ngắn gọn hơn nữa.

NGUYỄN ĐĂNG PHẤT

Bài T10/222. *O là một điểm bất kì ở bên trong của một tứ diện ABCD. Gọi A_1, B_1, C_1 và D_1 là hình chiếu của O lần lượt trên các mặt phẳng (BCD), (CDA), (DAB) và (ABC) sao cho :*

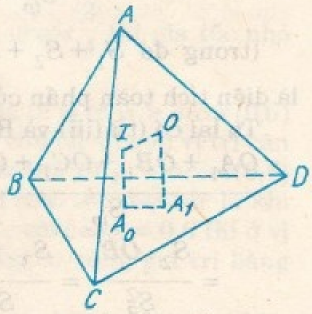
$$\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{OD_1} = \vec{0} \; ; \quad (*)$$

Chứng minh rằng :

$$OA_1 + OB_1 + OC_1 + OD_1 \leq 4r, \; (**)$$

trong đó r là bán kính mặt cầu nội tiếp tứ diện.

Lời giải 1. (của *Nguyễn Sỹ Phong*, 10A, chuyên toán, ĐHSP, Hà Nội).



Giả sử mặt cầu (I, r) nội tiếp tứ diện $ABCD$ tiếp xúc với các mặt (BCD), (CDA), (DAB) và (ABC) lần lượt ở A_o, B_o, C_o và D_o. (H.).

Vì O nằm trong tứ diện nên $\overrightarrow{OA_1} \uparrow\uparrow \overrightarrow{IA_o}$ và do đó $\overrightarrow{OA_1} \cdot \overrightarrow{IA_o} = OA_1 \cdot r > 0$, ta được :

$$\overrightarrow{OA_1} \cdot \overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OA_1} \cdot (\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1A_o} + \overrightarrow{A_oI}) =$$
$$= OA_1^2 + \overrightarrow{OA_1} \cdot \overrightarrow{A_oI} = OA_1^2 - rOA_1 .$$

Cộng các kết quả tương tự và chú ý đến (*), ta thu được :

$$OA_1^2 + OB_1^2 + OC_1^2 + OD_1^2 -$$
$$- (OA_1 + OB_1 + OC_1 + OD_1)r =$$
$$= (\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1} + \overrightarrow{OD_1}) \cdot \overrightarrow{OI} = 0$$

$$\text{hay : } r = \frac{OA_1^2 + OB_1^2 + OC_1^2 + OD_1^2}{OA_1 + OB_1 + OC_1 + OD_1}, \quad (1)$$

Mặt khác, lại có (bất đẳng thức Bunhiacốpski) :

$$4(OA_1^2 + OB_1^2 + OC_1^2 + OD_1^2) \geq$$
$$\geq (OA_1 + OB_1 + OC_1 + OD_1)^2 \; ; \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta được BĐT (**) cần tìm.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $OA_1 = OB_1 = OC_1 = OD_1$ tức là $O \equiv I \Leftrightarrow$ $\overrightarrow{IA_o} + \overrightarrow{IB_o} + \overrightarrow{IC_o} + \overrightarrow{ID_o} = \vec{0}$ (3)

Nhưng, nếu gọi S_1, S_2, S_3 và S_4 là diện tích các mặt của tứ diện, lần lượt đối diện với các đỉnh A, B, C và D, theo định lí "con nhím", ta có (vì $IA_o = IB_o = IC_o = ID_o = r$)

$S_1 . \overrightarrow{IA_o} + S_2 . \overrightarrow{IB_o} + S_3 . \overrightarrow{IC_o} + S_4 . \overrightarrow{ID_o} = \vec{0}$; (4)

Suy ra : (3) $\Leftrightarrow S_1 = S_2 = S_3 = S_4 \Leftrightarrow ABCD$ là một *tứ diện gần đều*.

Lời giải 2. (của đa số các bạn).

Gọi n_1, n_2, n_3 và n_4 lần lượt là véctơ đơn vị pháp tuyến ngoài (pháp véctơ đơn vị ngoài) của các mặt có diện tích tương ứng S_1, S_2, S_3 và S_4 đối diện với các đỉnh A, B, C và D của tứ diện ABCD. Thế thì điều kiện (*) được viết lại như sau :

$OA_1 \vec{e_1} + OB_1 \vec{e_2} + OC_1 \vec{e_3} + OD_1 \vec{e_4} = \vec{0}$; (i)

Mặt khác, theo định lí "con nhím", ta có hệ thức :

$S_1 \vec{e_1} + S_2 \vec{e_2} + S_3 \vec{e_3} + S_4 \vec{e_4} = \vec{0}$; (ii)

Từ đó suy ra :

$$\text{(i)} \Leftrightarrow \frac{OA_1}{S_1} = \frac{OB_1}{S_2} = \frac{OC_1}{S_3} = \frac{OD_1}{S_4} = \frac{OA_1 + OB_1 + OC_1 + OD_1}{S_{tp}}, \quad \text{(iii)}$$

(trong đó $S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = S_{tp} \left(= \frac{3V}{r}\right)$ là diện tích toàn phần của tứ diện).

Ta lại có (từ (iii) và BĐT Bunhiacốpski) :

$$\frac{OA_1 + OB_1 + OC_1 + OD_1}{S_{tp}} = \frac{S_1 . OA_1}{S_1^2} = \frac{S_2 \cdot OB_1}{S_2^2} = \frac{S_3 \cdot OC_1}{S_3^2} = \frac{S_4 \cdot OD_1}{S_4^2} = \frac{3V}{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + S_4^2} \leqslant \frac{4 \times 3V}{(S_1 + S_2 + S_3 + S_4)^2} = \frac{4S_{tp}\, r}{S_{tp}^2} ; \text{(iv)}$$

Từ (iv) ta được BĐT (**) cần tìm ; đồng thời dấu đẳng thức $(OA_1 + OB_1 + OC_1 + OD_1 = 4r)$ đạt được khi và chỉ khi $S_1 = S_2 = S_3 = S_4$ tức là ABCD là một tứ diện gần đều.

Nhận xét. 1°) Về thực chất, lời giải 1 không cần đến định lí "con nhím" vì ta có thể chứng minh trực tiếp (bằng phương pháp thông thường) nếu các tâm các mặt cầu nội và ngoại tiếp một tứ diện mà trùng nhau thì tứ diện là gần đều. Còn lời giải 2 sử dụng định lí "con nhím" và phương pháp thể tích.

2°) Một số bạn không biết đến và do đó không sử dụng định lí "con nhím" ; tuy nhiên, bằng những phương pháp chứng minh khác nhau cũng đã đi đến kết luận : (*) $\Leftrightarrow$ (iii)

Đặc biệt, bạn *Nguyễn Nhật Nam*, lớp $12A_1$, trường Vũng Tàu đã chứng minh được (iii) một cách tương đối nhanh chóng và cũng chặt chẽ bằng cách sử dụng phép chiếu vuông góc : Chiếu các véctơ thỏa mãn (*) lên một trong các cạnh của tứ diện ABCD, chẳng hạn, chiếu lên đường thẳng CD.

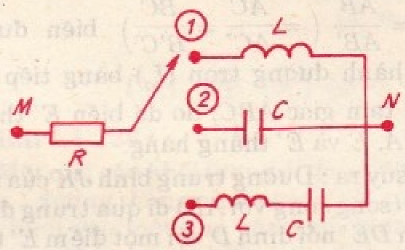
3°) Bạn *Nguyễn Khánh Quỳnh*, lớp $11A_o$, trường PTTH Phan Đăng Lưu, Yên Thành, Nghệ An có nhận xét đúng, rằng kết quả của bài toán có thể tổng quát hóa cho một khối n-diện lồi ngoại tiếp được một mặt cầu (cũng vậy, trong mặt phẳng cho một n-giác lồi ngoại tiếp được một đường tròn). Khi đó, trong BĐT (**) số 4 được thay bởi số n.

4°) Đáng tiếc, có bạn kết luận vội vàng : Dấu đẳng thức xảy ra khi tứ diện ABCD là đều (! !) do chưa nắm vững các tính chất đặc trưng của một tứ diện là gần đều. Thậm chí có bạn chứng minh sai mà không biết, nên đã kết luận rằng bài toán là sai (vì đã chứng minh được dấu BĐT ngược lại :

$OA_1 + OB_1 + OC_1 + OD_1 \geqslant 4r$ (! ! !)

NGUYỄN ĐĂNG PHẤT

Bài L1/222. *Cho đoạn mạch xoay chiều như hình vẽ, trong đó $R = 60\Omega$, hai cuộn dây cùng độ tự cảm L (điện trở thuần không đáng kể) và*



hai trụ cùng điện dung C. Hai đầu đoạn mạch M, N mắc vào nguồn xoay chiều ổn định. Khi khóa K lần lượt ở vị trí (1) và (2) thì biểu thức dòng điện qua K lần lượt là :

$i_1 = \sqrt{2} \sin(100\pi t - \pi/12)$ (A)

$i_2 = \sqrt{2} \sin\left(100\pi t + \frac{7\pi}{12}\right)$ (A).

Viết biểu thức dòng điện i_3 qua R khi K ở vị trí (3). Biết rằng điện trở của dây nối và khóa K không đáng kể.

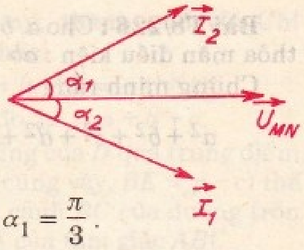
Hướng dẫn giải. Khi K ở (1) :

$$i'_1 \begin{cases} I_1 = \dfrac{U}{\sqrt{R^2 + Z_L^2}} = 1A \quad (1) \\ \text{Trễ pha hơn } U_{MN} \text{ góc } \alpha_1 \text{ mà } tg\alpha_1 = \dfrac{Z_L}{R} \end{cases}$$

Khi K ở (2) :

$$\begin{cases} i_2\, I_2 = \dfrac{U}{\sqrt{R^2 + Z_C^2}} = 1A \quad (2) \\ \text{Sớm pha hơn } U_{MN} \text{ góc } \alpha \text{ mà } tg\alpha_2 = \dfrac{Z_C}{R} \end{cases}$$

Do $I_1 = I_2 \rightarrow Z_L =$
$= Z_C \rightarrow \alpha_1 = \alpha_2$.



Theo giản đồ véctơ và theo đề bài thì độ lệch pha giữa i_1 và i_2 là

$$\Delta\varphi = \alpha\alpha_1 = \frac{2\pi}{3} \rightarrow \alpha_1 = \frac{\pi}{3}.$$

(2) $\rightarrow$ $Z_L = Rtg\alpha_1 = 60\sqrt{3}\ \Omega$. (1) $\rightarrow$ $U_{MN} = I_1\sqrt{R^2 + Z_L^2} = 120V$

Do U_{MN} sớm pha hơn U_1 góc $\alpha_1 = \pi/3$ nên $U_{MN} = 120\sqrt{2}\sin(100\pi t + \pi/4)$ (V). Khi K

ở (3) : vì $Z_L = Z_C \rightarrow \begin{cases} I_3 = \dfrac{U_{MN}}{R} = 2A \\ i_3 \text{ với } U_{MN} \text{ cùng pha} \end{cases}$

(hiện tượng cộng hưởng). Vậy

$$i_3 = 2\sqrt{2}\sin\left(100\pi t + \frac{\pi}{4}\right) (A).$$

Nhận xét. Các em có lời giải tốt : *Phùng Duy Hưng* B 11B CL, ĐHTH ; *Nguyễn Duy Kiệt*, $12C_1$, PTTH Lí Tự Trọng, Nha Trang, Khánh Hòa ; *Nguyễn Vũ Hưng* 12D chuyên NN, ĐHSPNN, ĐHQGHN ; *Lê Trí*, 12B, PTTH 1 Mộ Đức, Quảng Ngãi ; *Thới Thanh Tuấn* 12T, chuyên Lí Khiết, Quảng Ngãi ; Can Ngọc Tuấn, 12T, PTTH Đào Duy Từ, Quảng Bình ; *Lê Đình Bảo Khoa*, $11A_1$, PTTH chuyên Lê Quý Đôn, Đà Nẵng ; *Phan Anh Chuyên*, 12A, PTTH Phổ Yên, Bắc Thái ; *Vũ Công Phương*, 12T2, TH chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, Vĩnh Long, *Vũ Phương Minh*, $12A_1$, Vũng Tàu, Bà Rịa – Vũng Tàu, *Nguyễn Văn Thuấn*, 11B, PTTH Năng khiếu Ngô Sĩ Liên, Hà Bắc ; *Phạm Minh Hoàng* $12A_1$, PTTH Kim Liên, Hà Nội ; *Trương Phú Thiện*, 12C3, PTTH Nguyễn Huệ, Phú Yên.

MAI ANH

Bài L2/222.

Một con lắc đơn được kéo ra tới vị trí A mà dây hợp với phương thẳng đứng một góc $\varphi \leq \frac{\pi}{2}$ rồi buông ra ($v_o = 0$). Hãy xác định các vị trí của con lắc mà tại đó gia tốc của vật nặng có giá trị nhỏ nhất, lớn nhất.

Hướng dẫn giải. Gọi α là góc giữa dây và phương thẳng đứng. Chọn hệ trục tọa độ có gốc tại vật nặng, Oy hướng dọc theo dây treo và Ox hướng theo tiếp tuyến tại O về phía phương thẳng đứng qua điểm treo. Áp dụng phương trình định luật Niutơn, rút ra $a_x = g\sin\alpha$; $a_y = \frac{v^2}{l}$ (l là chiều dài dây treo). Áp dụng định luật bảo toàn cơ năng, suy ra $a_y = 2g(\cos\alpha - \cos\varphi)$ và $a = g\sqrt{3\cos^2\alpha - 8\cos\varphi\cos\alpha + 4\cos^2\varphi + 1}$

Để xét cực trị của a ta xét $u = f(\cos\alpha) = 3\cos^2\alpha - 8\cos\varphi\cos\alpha$ và tìm được :

– Nếu con lắc được thả từ vị trí $\varphi \geq arcos\frac{3}{4}$ ($\approx 0{,}723\ \pi rad$) thì gia tốc nhỏ nhất như góc lệch của dây là $\alpha_1 = arcos(4/3\cos\varphi)$; còn nếu con lắc được thả từ vị trí $\varphi < arcos\frac{3}{4}$ thì gia tốc nhỏ nhất tại vị trí cân bằng.

– Nếu con lắc được thả từ vị trí $\varphi > arcos(0{,}6)$ thì gia tốc lớn nhất khi con lắc đi qua vị trí cân bằng ; nếu con lắc được thả từ $\varphi < arcos(0{,}6)$ thì gia tốc lớn nhất khi $\cos\alpha = \cos\varphi$ tức là khi con lắc tới các vị trí bờ ; với $\cos\varphi = 0{,}6$ thì ở vị trí bờ và vị trí cân bằng có cùng giá trị bằng nhau và lớn nhất.

Nhận xét. Em *Phạm Minh Hoàng* $12A_1$, PTTH Kim Liên, Hà Nội có lời giải khá tốt.

MAI ANH

SUY NGHĨ VỀ HAI HẰNG ĐẲNG THỨC

(tiếp theo trang 1)

Bài 5. Trục căn thức ở mẫu số của biểu thức :

$$A = \frac{1}{4\sqrt[3]{4} + 2\sqrt[3]{2} - 16}$$

Lời giải : Áp dụng (1) coi mẫu số của A có dạng $a + b + c$. Khi đó nhân cả tử số và mẫu số của A với $(a^2 + b^2 - ab - ac - bc)$ ta có :

$$A = \frac{16\sqrt[3]{16} + 4\sqrt[3]{4} + 256 + 16 - 64\sqrt[3]{4} - 32\sqrt[3]{2}}{(4\sqrt[3]{4})^3 + (2\sqrt[3]{2})^3 - 16^3 - 3.4\sqrt[3]{4}.2\sqrt[3]{2}.16} = \frac{272 - 60\sqrt[3]{4}}{-3056} = \frac{15\sqrt[3]{4} - 68}{764}$$

Sau đây là một số bài tập đề nghị :

Bài 6 : Giải các phương trình sau : a) $6x^3 + 3x - 5 = 0$ b) $a^3 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$

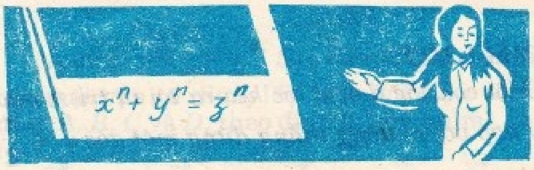
Bài 7 : Trục căn thức ở mẫu số của các biểu thức :

$$A = \frac{1}{1 + 3\sqrt[3]{2} - 2\sqrt[3]{4}}; \quad B = \frac{1}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}}$$

Bài 8 : Giải các phương trình lượng giác :

a) $(\sin x + \sin 2x + \sin 3x)^3 = \sin^3 x + \sin^3 2x + \sin^3 3x$.

b) $\sin 3x = 6\sin x - 1$.



ĐỀ RA KÌ NÀY

CÁC LỚP THCS

Bài T1/226. Tìm số $\overline{abcd}$ trong hệ đếm thập phân thỏa mãn :

1) Số $\overline{bc} \times 4$ tận cùng bằng $\overline{cd}$

2) $\overline{abcd} - \overline{bc} \times 4$ là số chính phương.

ĐỖ THANH HÂN
(Minh Hải)

Bài T2/226 : Giải phương trình nghiệm nguyên :

$$4y^2 = 2 + \sqrt{199 - x^2 - 2x}$$

BÙI QUANG TRƯỜNG
(Hà Nội)

Bài T3/226 : Tìm tất cả $a \in N$ để phương trình $x^2 - a^2x + a + 1 = 0$ có nghiệm nguyên.

ĐẶNG HÙNG THẮNG
(Hà Nội)

Bài T4/226 : Trong các hình thang cân có chu vi 2p, góc kề đáy lớn bằng α ($\alpha < 90^o$), dựng hình thang có diện tích lớn nhất.

VŨ HỮU BÌNH
(Hà Nội)

Bài T5/226 : Cho hình vuông $ABCD$. M, N là hai điểm lần lượt nằm trên BC và CD sao cho $\widehat{MAN} = 45^o$. Hãy tìm vị trí của M, N để diện tích tam giác CMN đạt giá trị lớn nhất.

NGUYỄN XUÂN HÙNG
(Thanh Hóa)

CÁC LỚP THCB

Bài T6/226 : Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n \geqslant 2$ ta có :

$$\sum_{k=0}^{n-1} C_{2n+1}^{2(n-k)} \cdot C_{n-k}^{1} \text{ chia hết cho } 4^{n-1}$$

HỒ QUANG VINH
(Nghệ An)

Bài T7/226 : Cho phương trình :

$$x^{13} - x^6 + 3x^4 - 3x^2 + 1 = 0$$

a) Chứng minh rằng phương trình đó có đúng một nghiệm số thực.

b) Đặt $x_1 = 1$ và $x_{n+1} = (x_n^{-7/3} + 1)^{-3/13}$

Với mọi số nguyên dương n. Chứng minh rằng dãy số $\{x_n\}$ có giới hạn và khi đặt

$$x_o = -\lim_{n \to \infty} x_n$$

thì x_o là nghiệm số thực nói trên.

c) Nhờ máy tính bỏ túi, hãy tính gần đúng nghiệm số thực đó đến hai chữ số thập phân.

TRẦN VĂN VUÔNG
(Hà Nội)

Bài T8/226 : Cho a, b, c, d, e, f là sáu số thực thỏa mãn điều kiện : $ab + bc + cd + de + ef = 1$

Chứng minh rằng :

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 \geqslant \frac{1}{\cos\frac{\pi}{7}}$$

LÊ VĂN QUANG
(Thừa Thiên – Huế)

Bài T9/226 : Gọi G là trọng tâm mặt ABC của tứ diện $ABCD$ và M là một điểm bất kì thuộc miền tam giác ABC. Đường thẳng qua M song song với DG cắt các mặt phẳng DBC, DCA và DAB ở A', B' và C'. Chứng minh rằng :

$$DA' + DB' + DC' \geqslant 3GM$$

ĐÀM VĂN NHỈ
(Thái Bình)

Bài T10/226 : Gọi h_a, h_b, h_c và l_a, l_b, l_c tương ứng là độ dài các đường cao và các đường phân giác được kẻ tới các cạnh a, b, c của tam giác. r, R là bán kính vòng tròn nội tiếp và ngoại tiếp tam giác đó.

Chứng minh rằng :

$$\frac{h_a}{l_a} + \frac{h_b}{l_b} + \frac{h_c}{l_c} \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{2r}{R}}$$

PHẠM HIẾN BẰNG
(Bắc Thái)

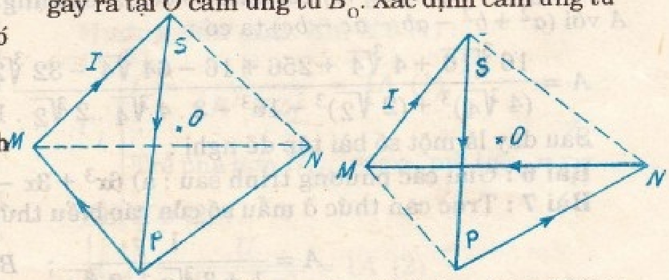
CÁC ĐỀ VẬT LÍ

Bài L1/226 :

Một quả cầu khối lượng m đang chuyển động trên 1 đường thẳng nằm ngang với vận tốc v thì va chạm vào một quả cầu khối lượng M đang chuyển động cùng chiều trên đường thẳng đó với vận tốc $v/3$. Sau va chạm quả cầu m chuyển động với vận tốc $v/2$. Coi va chạm là xuyên tâm. Bỏ qua ma sát giữa hai quả cầu với đường nằm ngang. Chứng tỏ rằng sau va chạm hai quả cầu tiếp tục chuyển động theo hướng cũ. Tìm điều kiện để va chạm xảy ra.

NGUYỄN DUY TRUY
(Thái Bình)

Bài L2/226 : S, M, N, P là các đỉnh của một tứ diện đều có tâm hình cầu ngoại tiếp là O. Dòng điện cường độ I chạy theo đường $MSPM$ (hình 1) gây ra tại O cảm ứng từ B_o. Xác định cảm ứng từ



B do một dòng điện cường độ I chạy theo đường gấp khúc $MSPNM$ gây ra tại O (hình 2).

LƯƠNG TẤT ĐẠT
(Hà Nội)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

For Lower Secondary Schools.

T1/226. Find the number $\overline{abcd}$ (written in decimal system) satisfying the conditions :

1) the number $\overline{bc} \times 4$ ends up by the 2-digit number $\overline{cd}$, 2) $\overline{abcd} - \overline{bc} \times 4$ is a perfect square.

T2/226. Find integral solution of the equation :

$$4y^2 = 2 + \sqrt{199 - x^2 - 2x}$$

T3/226. Find all $a \in \mathbf{N}$ such that the equation

$$x^2 - a^2x + a + 1 = 0$$

has an integral root.

T4/226. Construct the isosceles trapezoid with given perimeter $2p$, the angle adjacent to the great base is α ($\alpha < 90^o$), which has greatest area.

T5/226. Let be given a square $ABCD$; Mand N are two points respectively on BC and CD so that $\widehat{MAN} = 45^o$. Determine the position of M and N so that the area of triangle CMN has greatest value.

For Upper Secondary Schools.

T6/226. Prove that for every integer $n \geq 2$, the number

$$\sum_{k=0}^{n-1} C_{2n+1}^{2(n-k)} \cdot C_{n-k}^{1} \text{ is divisible by } 4^{n-1}.$$

T7.226. Consider the equation

$$x^{13} - x^6 + 3x^4 - 3x^2 + 1 = 0.$$

a) Prove that this equation has a unique real root.

b) Put $x_1 = 1$ and $x_{n+1} = (x_n^{-7/3} + 1)^{-3/13}$ for every positive integer n. Prove that the sequence $\{x_n\}$ has a limit and $x_o = -\lim_{n\to\infty} x_n$ is the above mentioned real root.

c) Use calculator to find approximate value for this root to two decimal places.

T8/226. Lest a, b, c, d, e, f be six real numbers satisfying $ab + bc + cd + de + ef = 1$. Prove that $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 \geq \dfrac{1}{\cos\frac{\pi}{7}}$.

T9/226. Let G be the center of gravity of the face ABC of a tetrahedron $ABCD$ and M be an arbitrary point inside the triangle ABC. The line passing through M, parallel to DG, cuts the planes DBC, DCA and DAB respectively at A', B', C'. Prove that $DA' + DB' + DC' \geq 3GM$

T10/226. Let h_a, h_b, h_c and l_a, l_b, l_c be the lengths of the altitudes and the angled-bisectors corresponding to the sides a, b, c of a triangle, and let r, R are respectively the radius of its incircle and circumcircle. Prove that :

$$\frac{h_a}{l_a} + \frac{h_b}{l_b} + \frac{h_c}{l_c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{2r}{R}}.$$

Ống kính cải cách dạy và học Toán

$\sqrt{X} - 3 = \dfrac{1}{5}$?

Thầy : Em lên bảng giải bài toán số 11 trang 36 Đại số 9. Cho $A = \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}$

Tìm mọi giá trị nguyên của x để A nhận giá trị nguyên.

Trò : Thưa thầy, bài này em thấy kì cục...

Thầy : Em viết $\sqrt{x} + 1 = \sqrt{x} - 3 + 4$

Trò (viết) : $A = \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} = \dfrac{\sqrt{x}-3+4}{\sqrt{x}-3} \Rightarrow$

$A = 1 + \dfrac{4}{\sqrt{x}-3}$

Thầy : 1 là số nguyên, vậy muốn cho A là số nguyên thì $\dfrac{4}{\sqrt{x}-3}$ phải là số nguyên.

Khi nào thì $\dfrac{4}{\sqrt{x}-3}$ là số nguyên ?

Trò : Thưa thầy, khi 4 chia cho $\sqrt{x} - 3$ là số nguyên ạ (!)

Thầy : $\dfrac{4}{\sqrt{x}-3}$ là số nguyên khi $\sqrt{x} - 3$ là ước của 4.

4 có những ước số nào ?

Trò : Thưa thầy, các ước số của 4 là $\pm1, \pm2, \pm4$

Thầy : Vậy $\sqrt{x} - 3$ có thể bằng bao nhiêu ?

Trò (viết) : $\sqrt{x} - 3 = \pm1, \pm2, \pm4$.

Thưa thầy nếu $\sqrt{x} - 3 = \dfrac{1}{5}$ thì $\dfrac{4}{\sqrt{x}-3} = \dfrac{4}{1/5}$ $= 20$ cũng là số nguyên ạ.

Thầy (lúng túng) : Không thể được...

Những trò khác : Nếu $\sqrt{x} - 3$ bằng $\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{7}, \dfrac{2}{3}$... thì $\dfrac{4}{\sqrt{x}-3}$ cũng là số nguyên ạ.

Thầy (lẩm bẩm) : Nếu x là số nguyên thì $\sqrt{x} - 3$ có thể bằng $\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{5}$ ... không ? Các em về nghiên cứu bài này, hôm sau thầy giải tiếp...

Lời bàn của Mao Tôn Quang : *Thầy lúng túng là chỉ phải, vì chưa có định lí : Nếu $x \in Z^+$ thì $\sqrt{x}$ chỉ có thể là số nguyên hoặc là số vô tỉ, không thể là một phân số thực sự được".*

Chứng minh định lí này cũng dễ, nhưng nếu không chứng minh (hay ít nhất là nêu lên), mà cứ xem như có sẵn một cách hiển nhiên để áp dụng, thì có được không ? Xin các nhà sư phạm cho ý kiến.

PHAN THANH QUANG
NGUYỄN ĐỨC TẤN

ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC NĂM HỌC 1995 - 1996 TRƯỜNG ĐẠI HỌC XÂY DỰNG HÀ NỘI

Môn thi : TOÁN

(Thời gian làm bài : 180 phút)

Câu I : Cho hàm số $y = \dfrac{mx^2 + x + m}{x + m}$, m là tham số.

1) Khi $m = 1$:

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số y.

b) Viết phương trình các đường thẳng đi qua điểm $(-1\ ;\ 0)$ và tiếp xúc với đồ thị của hàm số y.

2) Tìm giá trị của m để hàm số đã cho không có cực trị.

Câu II :

1) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2^{\sin\pi(x+y)} = 1 \\ 2(x^2 + y^2) = 1 \end{cases}$

2) Cho bất phương trình : $a\sqrt{2x^2 + 7} < x + a$, a là tham số.

a) Giải bất phương trình khi $a = \dfrac{1}{2}$.

b) Tìm a để bất phương trình nghiệm đúng với mọi x.

Câu III :

1) Giải phương trình :

$$\frac{\cos^3 x - \sin^3 x}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} = 2\cos 2x.$$

2) Các góc B, C của tam giác ABC thỏa mãn điều kiện :

$$2\left(\frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} - \sqrt{3}\right) \leq \cot g B + \cot g C.$$

Chứng minh ABC là tam giác đều.

Câu IV : Thí sinh chỉ phải làm phần A hoặc B sau đây :

Phần A :

1) Tính diện tích của hình phẳng được giới hạn bởi các đường :

$y^2 - 2y + x = 0$ và $x + y = 0$.

2) Cho mặt cầu $(C) : (x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 11$ và hai đường thẳng

$(d_1) : \dfrac{x}{1} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-1}{2}$; $(d_2) = \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{1}$

a) Viết phương trình các mặt phẳng tiếp xúc với (C) đồng thời song song với (d_1) và (d_2).

b) Viết phương trình chính tắc của đường thẳng qua tâm của (C) đồng thời cắt (d_1) và (d_2).

Phần B : Trong mặt phẳng (P) cho hình vuông $ABCD$ với $AB = 2a$. Trên mặt phẳng chứa BC và vuông góc với (P) lấy điểm E sao cho ΔEBC là tam giác đều ; điểm I nằm trên đoạn BC, đặt $BI = x$. K là hình chiếu vuông góc của điểm E trên đường thẳng AI ; O là trung điểm của AE.

1) Tìm quỹ tích của điểm K khi I chạy trên đoạn BC.

2) Tính độ dài OI theo a và x.

3) Tìm x để độ dài OI lớn nhất, bé nhất.

ĐÁP ÁN

Câu I (2,0)

1). (1,5đ). Khi $m = 1$

$$y = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1} = x + \frac{1}{x+1}$$

a) (1,0 đ)

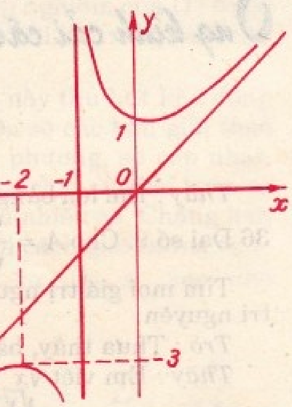
(0,25 đ) Miền xác định $x \neq -1$; tiệm cận đứng $x = -1$; tiệm cận xiên $y = x$

(0,5 đ) $\quad y' = \dfrac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} = 0$ khi $x = 0, x = -2$.

Lập bảng biến thiên.

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
y'		+	0	−	‖	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	-3	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	1	↗	$+\infty$

(0,25 đ). Vẽ đồ thị.



b) (0,5 đ)

(0,25đ). Đường thẳng qua $(-1\ ;\ 0)$ với hệ số góc k là $y = k(x+1)$. Để tiếp xúc với đường cong thì phương trình

$\dfrac{x^2 + x + 1}{x + 1} = k(x+1)$. (1)

phải có nghiệm kép

(0,25 đ) $\quad$ (1) $\Leftrightarrow$

$(k-1)x^2 + (2k-1)x + k - 1 = 0$

có nghiệm kép khác $-1 \Leftrightarrow$

$k - 1 \neq 0$

$\Delta = 4k - 3 = 0$

$-\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{2k-1}{2(k-1)} \neq -1 \Leftrightarrow k = 3/4$. Tiếp tuyến duy nhất $y = 3/4\ (x+1)$

Nếu thí sinh giải ra và lấy giá trị $k = 1$, $k = 3/4$ thì không cho điểm.

2) (0,5 đ)

$y = \dfrac{mx^2 + x + m}{x + m}$ xác định với $x \neq -m$ (0,25đ)

$y' = \dfrac{mx^2 + 2m^2 x}{x + m}$

$m = 0$ thì $y' = 0$ với $\forall x \neq 0 \Rightarrow y =$ hằng số $\Rightarrow$ hàm không đạt cực trị.

(0,25đ) $m \neq 0, y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $x = 0, x = -2m$ và đổi dấu nên hàm có cực trị.

Kết luận : Hàm không có cực trị chỉ khi $m = 0$.

Câu II : (3 đ)

1) (1 đ)

(0,25 đ) $\begin{cases} 2^{\sin\pi(x+y)} = 1 \\ 2(x^2+y^2) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = k \\ xy = \dfrac{2k^2-1}{4} \end{cases}$ với $k \in Z$.

(0,25 đ) Hệ có nghiệm khi $\Delta = k^2 - 4\left(\dfrac{2k^2-1}{4}\right) = 1 - k^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow -1 \leqslant k \leqslant 1$ do $k \in Z$ nên $k = 0$ và $k = \pm 1$

(0,25 đ) với $k = 0$ ta được hệ $\begin{cases} x + y = 0 \\ xy = -1/4 \end{cases}$. được 2 nghiệm $(1/2 ; -1/2)$ và $(-1/2 ; 1/2)$.

(0,25đ) với $k = \pm 1$ ta được hệ $\begin{cases} x + y = \pm 1 \\ xy = 1/4 \end{cases}$, ta được nghiệm tương ứng $(\pm 1/2 ; \pm 1/2)$.

* Nếu thí sinh xem $k \in R$ thì cả câu cho 0,25 đ

* Thí sinh có thể dùng bất đẳng thức Côsy Bunhia copxky ra ngay $k = 0, k = \pm 1$

2) (2đ) $a\sqrt{2x^2+7} < x + a$ (1)

a) (1 đ) Khi $a = 1/2$: $(1/2)\sqrt{2x^2+7} < x + 1/2$.

(0,5) bất phương trình tương đương với $\begin{cases} 2x + 1 > 0 \\ 2x^2 + 4x - 6 > 0 \end{cases}$

(0,5 đ) Giải ra $\begin{cases} x > -1/2 \\ x > 1 \text{ hoặc } x < -3 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1$

b) (1 đ)

Cách 1: (0,25 đ) đưa (1) về $\dfrac{x}{\sqrt{2x^2+7} - 1} > a$.

(0,25 đ) $y' = \dfrac{7 - \sqrt{2x^2+7}}{(\sqrt{2x^2+7} - 1)^2} = 0$ khi $x = \pm\sqrt{21}$; $y' > 0$ khi $-\sqrt{21} < x < \sqrt{21}$

(0,25 đ) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = \pm 1/\sqrt{2}$

(0,25 đ) Lập bảng biến thiên kết luận : $a < -\sqrt{21}/6$

x	$-\infty$		$-\sqrt{21}$		$\sqrt{21}$		$+\infty$
y'		−	0	+	0	−	
y	$-1/\sqrt{2}$	↘	$-\sqrt{21}/6$	↗	$\sqrt{21}/6$	↘	$1/\sqrt{2}$

Cách 2 :

(0,25 đ) * $a \geqslant 0$ do $\sqrt{2x^2+7} \geqslant \sqrt{7}$ nên vế trái không âm, còn vế phải âm khi $x < -a$. do đó (1) không nghiệm với mọi $x \Rightarrow$ loại $a \geqslant 0$

* $a < 0$:

(0,25đ) với $x \geqslant -a$ vế trái âm, vế phải không âm nên luôn nghiệm đúng.

(0,5 đ) Chỉ cần tìm $a < 0$ sao cho (1) đúng với $x < -a$. Với $x < -a$ thì :

(1) $\Leftrightarrow f(x) = (2a^2 - 1)x^2 - 2ax + 6a^2 > 0$ (2)

(2) đúng với mọi $x < -a$ khi :

hoặc $\begin{cases} 2a^2 - 1 > 0 \\ \Delta = a^2(7 - 12a^2) < 0 \end{cases}$

Vì $a < 0$ nên $\begin{cases} a < -1/\sqrt{2} \\ a < -\sqrt{7/12} \end{cases}$

$\Rightarrow a < -\sqrt{7/12} = -\sqrt{21}/6$

hoặc $2a^2 - 1 > 0$

$\begin{cases} \Delta \geqslant 0 \\ f(-a) = (2a^2 - 1)a^2 + 2a^2 + 6a^2 \geqslant 0 \\ S/2 = a/2a^2 - 1 \geqslant -a \end{cases}$

Vì $a < 0$ nên hệ vô nghiệm.

Câu III : (2 đ)

1) (1 đ) $\dfrac{\cos^3 x - \sin^3 x}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} = 2\cos 2x$

(0,25) Đặt được điều kiện $\sin x \geqslant 0$, $\cos x \geqslant 0$ và đưa về phương trình $\cos^3 x - \sin^3 x = 2(\cos^2 x - \sin^2 x)(\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x})$

(0,25) Giải : $\cos x - \sin x = 0$ cho nghiệm thỏa mãn điều kiện : $x = \pi/4 + 2n\pi$

$n \in Z$. Nếu không loại nghiệm thì phần này không cho điểm.

(0,5) Giải

$1 + \sin x\cos x = 2(\sin x + \cos x)(\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x})$

do $\begin{cases} 0 \leqslant \sin x \leqslant 1 \\ 0 \leqslant \cos x \leqslant 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin x \geqslant \sin^2 x \\ \cos x \geqslant \cos^2 x \end{cases}$

và $\begin{cases} \sqrt{\sin x} \geqslant \sin^2 x \\ \sqrt{\cos x} \geqslant \cos^2 x \end{cases} \Rightarrow$ vế phải $\geqslant 2$.

còn $1 + \sin x \cos x = 1 + (1/2)\sin 2x \leqslant 3/2$ Vậy vô nghiệm

2) (1 đ)

(0,75 đ) Vì $\sin B > 0$, $\sin C > 0$ nên :

$2\left(\dfrac{1}{\sin B} + \dfrac{1}{\sin C} - \sqrt{3}\right) \leqslant \cot gB + \cot gC \Leftrightarrow$

$2(\sin B + \sin C - \sqrt{3}\sin B\sin C) \leqslant$

$\leqslant \sin C\cos B + \cos C\sin B \Leftrightarrow$

$\sin B[2 - (\sqrt{3}\sin C + \cos C)] +$

$+ \sin C[2 - (\sqrt{3}\sin B + \cos B)] \leqslant 0 \Leftrightarrow$

$2\sin B[1 - \sin(C + \pi/6)] + 2\sin C[1 - \sin(B + \pi/6)] \leqslant 0$

(0,25 đ) $\Leftrightarrow 1 - \sin(C + \pi/6) = 0$

$1 - \sin(B + \pi/6) = 0$ do B, C là góc của tam giác nên $B = C = \dfrac{\pi}{3}$

Vậy tam giác ABC là tam giác đều.

Câu IV : (3 đ)

Phần A :

1) (1đ) Tính diện tích giới hạn bởi $y^2 - 2y + x = 0$ và $x + y = 0$

(0,25 đ) Giao của hai đường là $(0; 0)$ và $(-3; 3)$.

(0,5 đ) Lập được $S = \int_0^3 (3y - y^2)dy$

(0,25 đ) Tính đúng $S = 9/2$

Nếu tính theo x thì mỗi phần (0,5 đ)

(Xem tiếp trang bìa 3)

Dành cho các bạn chuẩn bị thi vào Đại học

VỀ MỘT BÀI TOÁN NHỎ

DOÀN QUANG MẠNH
(Hải Phòng)

Trong bộ "Đề thi tuyển sinh vào các trường Đại học, Cao đẳng và Trung học chuyên nghiệp", có bài toán khá hay sau :

Bài toán 1. (Đề 27.II.2).

Giả sử ABC là tam giác thỏa mãn điều kiện sau

$2(a\cos A + b\cos B + c\cos C) = a + b + c$ (1)

Chứng minh rằng tam giác đó đều.

Ngoài lời giải thông thường trong đáp án, bài toán 1 còn có một lời giải khá đặc sắc. Xin giới thiệu ở đây để bạn đọc tham khảo.

Từ (1), theo định lý hàm số sin ta có :

$2(\sin A\cos A + \sin B\cos B + \sin C\cos C) =$

$= \sin A + \sin B + \sin C$

$\Rightarrow \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C =$

$= \sin A + \sin B + \sin C. \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{2}(\sin 2A + \sin 2B) + \frac{1}{2}(\sin 2B + \sin 2C) +$

$+ \frac{1}{2}(\sin 2C + \sin 2A) = \sin A + \sin B + \sin C.$

$\Rightarrow$

$\sin(B+C)\,.\,\cos(B-C) + \sin(C+A)\,.\,\cos(C-A) +$
$+ \sin(A+B)\,.\,\cos(A-B) = \sin A + \sin B + \sin C.$

$\Rightarrow \sin A\,.\,\cos(B-C) + \sin B\,.\,\cos(C-A) +$
$+ \sin C\,.\,\cos(A-B) = \sin A + \sin B + \sin C$

$\Rightarrow$

$\sin A[1 - \cos(B-C)] + \sin B[1-\cos(C-A)] +$
$+ \sin C\,[1 - \cos(A-B)] = 0$

Ta chú ý rằng :

$$\begin{cases} \sin A[1-\cos(B-C)] \geqslant 0 \\ \sin B[1-\cos(C-A)] \geqslant 0 \ \forall\ \Delta ABC. \\ \sin C[1-\cos(A-B)] \geqslant 0 \end{cases}$$

Từ đó dễ dàng suy ra tam giác ABC đều. Thực ra bài toán 1 còn có thể được phát biểu dưới dạng khác, gọn gàng hơn và bản chất hơn.

Bài toán 1'.

Chứng minh rằng tam giác ABC đều khi và chỉ khi :

$\sin A + \sin B + \sin C = \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C$

chính bài toán 1' cho phép ta nghĩ đến bài toán sau :

Bài toán 2.

Chứng minh rằng tam giác ABC đều khi và chỉ khi :

$\cos A+\cos B+\cos C+\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C = 0$ (2)

Giải.

Ta chỉ cần chứng minh điều kiện đủ. Biến đổi (2) tương tự như khi giải bài toán 1 ta có :

$\cos A[1 - \cos(B-C)] + \cos B[1 - \cos(C-A)] +$
$+ \cos C[1 - \cos(A-B)] = 0^*$

Ngoài ra, với mọi ΔABC ta luôn có :

$$\begin{cases} \cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \\ \cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = -1 - 4\cos A\cos B\cos C \end{cases}$$

Kết hợp với (2) ta có :

$\cos A\,.\,\cos B\,.\,\cos C = \sin\frac{A}{2}\,.\,\sin\frac{B}{2}\,.\,\sin\frac{C}{2}$

$\Rightarrow \cos A\,.\,\cos B\,.\,\cos C > 0 \Rightarrow \Delta ABC$ nhọn.

Suy ra :

$$\begin{cases} \cos A[1-\cos(B-C)] \geqslant 0 \\ \cos B[1-\cos(C-A)] \geqslant 0 \ (^{**}) \\ \cos C[1-\cos(A-B)] \geqslant 0 \end{cases}$$

Từ (*) và (**) ta suy ngay được ΔABC đều.

Cũng nên chú ý rằng lời giải thông thường trong đáp án của bộ đề của bài toán 1 không giúp ta giải bài toán 2.

Những kết quả trên nhắc ta đoán nhận một kết quả sau :

Bài toán 3.

Chứng minh rằng ΔABC đều khi và chỉ khi :

$\mathrm{tg}A + \mathrm{tg}B + \mathrm{tg}C + \mathrm{tg}2A + \mathrm{tg}2B + \mathrm{tg}2C = 0$(3)

Giải.

Ta cũng chỉ cần chứng minh điều kiện đủ. Không mất tính tổng quát giả sử $C \leqslant B \leqslant A$. Xét các trường hợp sau :

1) $C \leqslant B < \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{4} \leqslant A$. Khi đó dễ thấy :

$$\begin{cases} \mathrm{tg}A\,.\,\mathrm{tg}B\,.\,\mathrm{tg}C < 0 \\ \mathrm{tg}2A\,.\,\mathrm{tg}2B\,.\,\mathrm{tg}2C < 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow tgA\,.\,tgB\,.\,tgC + tg2A\,.\,tg2B\,.\,tg2C < 0$

$\Rightarrow tgA + tgB + tgC + tg2A + tg2B + tg2C < 0$

Mâu thuẫn với (3) vậy trường hợp này không xảy ra.

2) $C < \frac{\pi}{4} < B < \frac{\pi}{2} < A < \frac{3\pi}{4}$. Khi đó :

$$\begin{cases} tgA\,.\,tgB\,.\,tgC < 0 \\ tg2A\,.\,tg2B\,.\,tg2C < 0 \end{cases}$$

Tương tự trường hợp 1, trường hợp này không xảy ra.

3) $C \leqslant B < \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} < A < \frac{3\pi}{4}$. Khi đó.

$$0 < 2A - \pi,\ 2B,\ 2C < \frac{\pi}{2}$$

Suy ra :

$tg2A + tg2B + tg2C = tg(2A - \pi) + tg2B + tg2C$

$\geqslant tg\,\frac{2A - \pi + 2B}{2} + tg\,\frac{2B + 2C}{2} + tg\,\frac{2C + 2A - \pi}{2}$

$= tg\left(\frac{\pi}{2} - C\right) + tg(B + C) + tg\left(\frac{\pi}{2} - B\right) >$

$> -tgC - tgA - tgB$

$\Rightarrow tgA + tgB + tgC + tg2A + tg2B + tg2C > 0$

mâu thuẫn với (3). Trường hợp này không xảy ra.

4) $C < \frac{\pi}{4} < B \leqslant A < \frac{\pi}{2}$. Khi đó :

$$\begin{cases} tgA\,.\,tgB\,.\,tgC > 0 \\ tg2A\,.\,tg2B\,.\,tg2C > 0 \end{cases}$$

Tương tự như 1) ta thấy trường hợp này không xảy ra

5) $\frac{\pi}{4} < C \leqslant B \leqslant A < \frac{\pi}{2}$. Khi đó :

$$0 < \pi - 2A,\ \pi - 2B,\ \pi - 2C < \frac{\pi}{2}$$

Suy ra

$-tg2A - tg2B - tg2C = tg(\pi - 2A) + tg(\pi - 2B) + tg(\pi - 2C) \geqslant$

$\leqslant tg\frac{(\pi-2A)+(\pi-2B)}{2} + tg\frac{(\pi-2B)+(\pi-2C)}{2} + tg\frac{(\pi-2C)+(\pi-2A)}{2} =$

$= tgA + tgB + tgC$

$\Rightarrow tgA + tgB + tgC + tg2A + tg2B + tg2C \leqslant 0$ (***)

Kết hợp với (3) chứng tỏ đẳng thức xảy ra ở (***)

Suy ra : $\pi - 2A = \pi - 2B = \pi - 2C \Rightarrow A = B = C$

Vậy ΔABC đều.

Một cách tự nhiên ta đi đến bài toán sau :

Bài toán 4

Chứng minh rằng tam giác ABC đều khi và chỉ khi :

$cotgA + cotgB + cotgC + cotg2A + cotg2B + cotg2C = 0$ (4)

Giải

Ta cũng chỉ chứng minh điều kiện đủ. Từ (4) ta suy ra :

$$\frac{1}{tgA} + \frac{1}{tgB} + \frac{1}{tgC} + \frac{1 - tg^2A}{2tgA} + \frac{1 - tg^2B}{2tgB} + \frac{1 - tg^2C}{2tgC} = 0$$

$\Rightarrow 3\left(\frac{1}{tgA} + \frac{1}{tgB} + \frac{1}{tgC}\right) = tgA + tgB + tgC$

$\Rightarrow \frac{3(tgA\,.\,tgB + tgB\,.\,tgC + tgC\,.\,tgA)}{tgA\,.\,tgB\,.\,tgC} = tgA + tgB + tgC$

$\Rightarrow \frac{3(tgA\,.\,tgB + tgB\,.\,tgC + tgC\,.\,tgA)}{tgA + tgB + tgC} = tgA + tgB + tgC$

$\Rightarrow 3\,(tgA.tgB + tgB.tgC + tgC.tgA) = (tgA + tgB + tgC)^2$

$\Rightarrow (tgA - tgB)^2 + (tgB - tgC)^2 + (tgC - tgA)^2 = 0$

$\Rightarrow tgA = tgB = tgC \Rightarrow A = B = C$

Vậy ΔABC đều.

Các bài toán 1', 2, 3, 4 cho phép ta phát biểu bài toán 1 dưới dạng "mạnh" sau đây :

Bài toán 5

Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng các điều kiện sau là tương đương :

a) ΔABC đều.

b) $\sin A + \sin B + \sin C = \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C$

c) $\cos A + \cos B + \cos C + \cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = 0$

d) $tgA + tgB + tgC + tg2A + tg2B + tg2C = 0$

e) $cotgA + cotgB + cotgC + cotg2A + cotg2B + cotg2C = 0$

Từ bài toán 1 đi đến bài toán 5, người viết bài này muốn nhắc các bạn đang ôn thi vào đại học :

Hãy học tập chủ động và sáng tạo, dừng ý lại vào lời giải của đáp án. Luôn cố gắng tìm một lời giải riêng cho mình. Với cách học đó, bạn sẽ đạt kết quả cao trong kì thi vào đại học.

Tìm hiểu sâu thêm toán học phổ thông

SUY NGHĨ VỀ MỞ RỘNG MỘT BÀI TOÁN

LÊ QUỐC HÁN
(Nghệ An)

Cách đây ba mươi năm, báo "Toán học và Tuổi trẻ" có đăng đề toán sau.

Bài toán 1 : *Cho tam giác đều ABC cạnh bằng a và một điểm M bất kì trên đường tròn ngoại tiếp tam giác đó. Đặt $MA = x$, $MB = y$, $MC = z$. Chứng minh $x^2 + y^2 + z^2 = 2a^2$.*

Lời giải bài toán không khó. Để xác định, ta giả sử M nằm trên cung nhỏ BC. Áp dụng địnhlí Ptôlêmê cho tứ giác nội tiếp $ABMC$, ta có $x = y + z$. Sau đó, áp dụng định lí hàm số côsin cho các tam giác ABM và ACM, ta có điều phải chứng minh.

Mở rộng bài toán 1, tôi đã đề xuất hai bài toán sau :

Bài toán 2 : *Cho đa giác đều $A_1, A_2 \dots A_n$ và một điểm M chuyển động trên đường tròn ngoại tiếp đa giác đó. Chứng minh rằng biểu thức : $\sum_{i=1}^{n} MA_i^2$ nhận một giá trị không đổi.*

Bài toán 3 : *Cho tứ diện đều ABCD cạnh bằng a và một điểm M chuyển động trên mặt cầu ngoại tiếp tứ diện đó. Chứng minh $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 3a^2$, trong đó $x = MA$, $y + MB$, $z = MC$ và $t = MD$.*

Cả hai bài toán đó, trong một thời gian dài tôi không sao giải được, vì lời giải trên của bài toán 1 rất khó áp dụng ở đây. Chẳng hạn, đối với bài toán 3, không thể sử dụng định lí Plôtêmê vì trong không gian bất đẳng thức Plôtêmê (áp dụng cho tứ diện) không thể trở thành đẳng thức.

Mười lăm năm sau (trong bài "Trở về quá khứ có gì lợi" (Báo TH và TT, số 4, năm 1981), tôi đã trở lại vấn đề này và đưa thêm một bài toán bỏ ngỏ nữa :

Bài toán 4 : *Nếu M là một điểm tùy ý trên đường tròn ngoại tiếp đa giác đều 2m cạnh $A_1A_2 \dots A_{2m}$, thì $MA_1^2 + MA_3^2 + \dots + MA_{2m-1}^1 = MA_2^2 + MA_4^2 + \dots + MA_{2m}^2$.*

Nhân ngày kỉ niệm 30 năm tạp chí Toán học và Tuổi trẻ ra số đầu tiên, các bài toán đó lại trở về vẫy gọi tôi. Tôi bèn đọc kĩ lại bài toán 1 nhiều lần suy nghĩ trên từng từ, từng ý của nó. Thế rồi, "ý chói lọi" (nói theo ngôn ngữ của Pôlia) xuất hiện : Ở bài toán 1, tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác (đều) chính là trọng tâm của tam giác đó. Điều này gợi cho tôi nhớ đến Công thức Lagrăng (xem, chẳng hạn "*Khoảng cách giữa các trọng tâm của hai hệ điểm*", TH và TT, số 3 + 4, 1991).

Cho O là trọng tâm của hệ điểm $A_1, A_2, \dots, A_m$ và M là một điểm tùy ý trong không gian. Khi đó

$$MO^2 = (1/m)\sum_{i=1}^{m} MA_i^2 - (1/m^2)\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}} A_iA_j^2$$

Và như vậy, các bài toán trên chỉ là hệ quả của công thức Lagrăng mà thôi (mời các bạn kiểm tra lại !)

Quá trình giải các bài toán trên đã trao cho tôi một bài học quí báu : Nhiều bài toán, thoạt nhìn có vẻ rất phức tạp, nhưng nếu chịu khó suy nghĩ, tìm tòi bản chất của chúng, thì lời giải lại rất đơn giản. Và khi đã tìm ra chìa khóa cho một bài toán nào rồi, thì có thể giải quyết cùng một lúc các bài toán thuộc cùng nhóm với nó.

Sau giây phút bàng hoàng trước phát hiện quá bất ngờ và đơn giản ấy, tôi bình tâm đọc lại bài toán 1 nhiều lần và phát hiện ra rằng : mình vẫn chưa khai thác hết tiềm năng mở rộng bài toán ấy. Giả thiết M chuyển động trên đường tròn tâm O, bán kính bằng $a/\sqrt{3}$ còn gợi cho ta nghĩ về các bài toán tìm tập hợp điểm quen thuộc. Một trong các bài toán đó đã đến kịp thời :

Bài toán 5 : *Cho hệ điểm $A_1, A_2, \dots, A_n$ cố định và các số thực $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sao cho $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \neq 0$. Tìm tập hợp các điểm M thỏa mãn $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i MA_i^2 = k^2$, trong đó k là độ dài cho trước.*

Lời giải bài táon này không khó, nếu bạn nghiên cứu kĩ cách chứng minh công thức Lagrăng (bằng công cụ tích vô hướng). Đặc biệt, với $n = 2$, ta có bài toán sau :

Bài toán 6 : *Cho hai điểm A, B cố định và hai số thực α và β thỏa mãn điều kiện $\alpha + \beta \neq 0$. Khi đó tập hợp các điểm M thỏa mãn điều kiện $\alpha MA^2 + \beta MB^2 = k^2$ (với k là độ dài cho trước) là đường tròn (hay mặt cầu, tùy ta xét bài toán trong mặt phẳng hay không gian).*

Ở đây, ta giải bài toán trong mặt phẳng. Lấy I sao cho $\alpha\overrightarrow{IA} + \beta\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{O}$ thì I cố định và

$k^2 = \alpha MA^2 + \beta MB^2 =$
$= \alpha(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AI})^2 + \beta(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BI})^2 =$
$= (\alpha + \beta)MI^2 + \alpha IA^2 + \beta IB^2.$

Vì $\alpha + \beta \neq 0$ nên

$$MI^2 = [k^2 - (\alpha IA^2 + \beta IB^2)] / (\alpha + \beta)$$

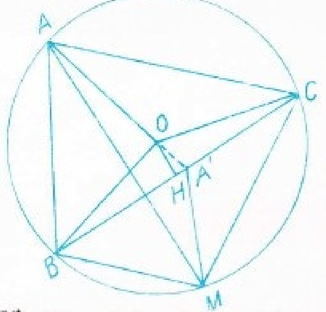
suy ra điều phải chứng minh (chú ý : đường tròn này có thể thu về một điểm hay là "đường tròn ảo").

Trên cơ sở bài toán 5', tôi đã đề xuất.

Bài toán 7 : *Cho tam giác ABC và một điểm M chuyển động trên đường tròn ngoại tiếp tam giác đó. Xác định x, y, z để giá trị biểu thức* $xMA^2 + yMB^2 + zMC^2$ *không phụ thuộc vào vị trí M.*

Sau đây là một trong các lời giải của bài toán. Ta lấy $x = \sin 2A$, $y = \sin 2B$ và $z = \sin 2c$. Khi đó

$$xMA^2 + yMB^2 + zMC^2 = 4S_{\Delta ABC}.$$



Để bài báo khỏi phức tạp và quá dài, tôi xin nêu cách giải khi ΔABC có ba góc đều nhọn. Không mất tổng quát, giả sử M nằm trên cung nhỏ BC. Gọi A' là giao của AO và BC. Kẻ $OH \perp BC$.

Vì $OB = OC = R$ (bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC) và $\sin \widehat{OA'B} = \sin \widehat{OA'C}$ nên bán kính các đường tròn ngoại tiếp các tam giác BOA' và COA' bằng nhau, suy ra : $\dfrac{BA'}{\sin \widehat{BOA}} = \dfrac{A'C}{\sin \widehat{COA'}} =$

$$= \frac{M}{A'C} = \frac{...}{\sin \widehat{COA'}} = \frac{\sin 2C}{\sin 2B} = \frac{z}{y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y \, . \, \overrightarrow{A'B} + z \, . \, \overrightarrow{A'C} = \overrightarrow{O}.$$

Theo bài toán 5', ta có :

$$yMB^2 + zMC^2 = (y+z)MA'^2 + yA'B^2 + zA'C^2 \quad (1)$$

Ta lại có $OH = OA' . \cos \widehat{HOA'} =$
$= OA' . \cos(B - C)$

$\Rightarrow OA' = OH / \cos(B - C) =$
$= R . \cos A / \cos(B - C) = OA . \cos A / \cos(B - C)$.

Mặt khác :
$\sin 2A / (\sin 2B + \sin 2C) =$
$= 2\sin A \cos A / 2\sin(B + C)\cos(B - C) =$
$= \cos A / \cos(B - C)$

Từ đó : $OA' / OA = \cos A / \cos(B - C) =$
$= \sin A / (\sin 2B + \sin 2C)$

c) $(y + z) \Rightarrow (y + z)\overrightarrow{OA} + x . \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{0}$

Lại áp dụng kết quả khi giải bài toán 5' ta có $(y + z)MA^2 + xMA^2 =$
$= (x + y + z)MO^2 + (y + z)OA'^2 + x.OA^2 \quad (2)$

Cộng từng vế (1) và (2), ta có :
$x . MA^2 + y . MB^2 + z . MC^2 =$
$= (x + y + z) MO^2 + y . A'B^2 + z . A'C^2 +$
$+ (y + z)OA'^2 + x . OA^2$.

Do đó $x . MA^2 + y . MB + z . MC^2$ nhận một giá trị không đổi, không phụ thuộc vào vị trí M. Cho $M \equiv A$, chẳng hạn, ta được giá trị đó là $8R^2 \sin A \sin B \sin C = 4S_{\Delta ABC}$.

Để kết thúc, tôi xin đề nghị các bạn giúp tôi ba việc :

1. Tìm cách giải đẹp hơn cho lời giải bài toán 6 ở trên của tôi.
2. Tìm các giá trị x, y, z của bài toán 6, tổng quát càng tốt.
3. Mở rộng bài toán 6 cho hình học không gian.

Chúc các bạn thành công

ĐỀ THI TUYỂN SINH . . .

(Tiếp theo trang 13)

2) (2 đ)

a) (1 đ)

(0,5 đ) * (d_1) qua $M_1\,(0 ; -1 ; 1)$, có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{S_1} = \{1 ; 1 ; 2\}$

(d_2) qua $M_2\,(-1 ; 0 ; 0)$, có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{S_2} = \{1 ; 2 ; 1\}$

Mặt phẳng song song với (d_1) *và* (d_2) phải có vectơ pháp $\vec{n} = \overrightarrow{S_1} \wedge \overrightarrow{S_2} = \{-3 ; 1 ; 1\}$ và mặt phẳng có dạng : $-3x + y + z + D = 0$. (P)

(0,5 đ) * Để mặt phẳng (P) tiếp xúc với mặt cầu $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 + z^2 = 11$ thì khoảng cách từ tâm $I(1 ; -1 ; 0)$ đến (P) phải bằng $\sqrt{11}$ $\dfrac{-3 - 1 + D}{\sqrt{11}} = \sqrt{11} \Leftrightarrow D = 15$ hoặc $D = -7$.

Dược 2 mặt phẳng tiếp xúc với mặt cầu và song song với (d_1), (d_2) : $-3x + y + z + 15 = 0$ và $-3x + y + z - 7 = 0$.

b) (1 đ)

(0,25 đ) Mặt phẳng (Q) chứa (d_1) và I là mặt phẳng qua $I(1, -1, 0)$ và vuông góc với vectơ $\overrightarrow{n_1} = \overrightarrow{S_1} \wedge \overrightarrow{M_1 I} = \{-1 ; 3 ; -1\} \Rightarrow$ Phương trình mặt phẳng (Q) : $-x + 3y - z + 4 = 0$

(0,25 đ) Giao của mặt phẳng (Q) và (d_2) là $M_0\,(-9/4 ; -10/4 ; -5/4)$

(0,5 đ) Phương trình đường thẳng đi qua I và M_0 là đường cắt (d_1) *và* (d_2) :

$$\frac{x - 1}{13} = \frac{y + 1}{6} = \frac{z}{5}$$

Phần B

1) (1 đ)

(0,25 đ) Tam giác EBC đều nên trung tuyến $EF \perp BC$; mà góc nhị diện giữa (P) và (EBC) là vuông nên $EF \perp (P)$.

(0,25 đ) FK là hình chiếu vuông góc của EK trên (P). Theo định lý 3 đường vuông góc thì $FK \perp AI$

(0,25 đ) Góc AKF luôn vuông, AF cố định nên quĩ tích K khi I dịch chuyển là phần cung tròn đường kính AF.

(0,25 đ) Do I chạy trên BC và góc $BAC = \pi/4$ nên quĩ tích là 1/4 đường tròn đi từ B qua F đến giao điểm với AC. Phần đảo hiển nhiên.

2) (1 đ)

(0,25 đ) Trung tuyến $OI^2 = \dfrac{2AI^2 + 2EI^2 - AE^2}{4}$

(0,25 đ) $AF^2 = 5a^2$; $EF^2 = 3a^2$

(0,25 đ) $AE^2 = AF^2 + EF^2 = 8a^2$, $AI^2 = 4a^2 + x^2$

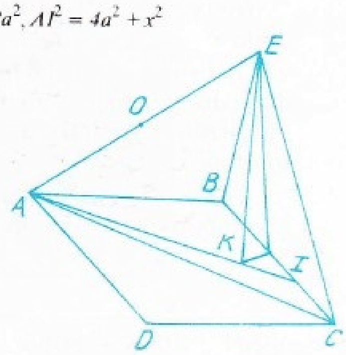
(0,25 đ)
$OI = \sqrt{x^2 - ax + 2a^2}$

3) (1 đ)

$OI = \sqrt{(x - a/2)^2 + 7a^2/4}$
với $0 \leqslant x \leqslant 2a$

(0,5 đ) OI bé nhất bằng $\dfrac{a\sqrt{7}}{2}$ tại $x = \dfrac{a}{2}$

(0,5 đ) OI đạt giá trị lớn nhất bằng $2a$ tại $x = 2a$.



ĐẶNG ĐÌNH BÍCH

Giải đáp bài

CẮT HÌNH CHỮ NHẬT

Ta thấy diện tích của hình chữ nhật là $9 \times 16 = 144$. Từ đó thấy cạnh của hình vuông mới tạo thành là 12 ($12 \times 12 = 144$). Vì vậy ta đưa ra cách cắt như hình vẽ

(Theo Phạm Thành Vinh, 5T, NK Yên Khánh, Ninh Bình).

Nhận xét : Một số bạn gửi giải đáp đến đều đúng.

BÌNH PHƯƠNG

ĐIỂM CỦA MỖI NGƯỜI

Bốn bạn Xuân, Hạ, Thu, Đông nhận được điểm của bài kiểm tra toán cuối học kì. Bạn Lan cùng lớp muốn biết điểm của mỗi người . Khi hỏi thì được các bạn đó trả lời úp mở như sau :

Xuân nói : Bạn Đông được 7, bạn Hạ được 8, bạn Thu được 9.

Hạ nói : Bạn Thu được 8, bạn Xuân được 9, bạn Đông được 10.

Thu nói : Cả ba bạn Xuân, Hạ, Đông đều được 7.

Đông nói : Cả ba bạn Xuân, Hạ, Thu đều được 8.

Biết rằng không có bạn nào được hai bạn nói cùng đúng với số điểm của mình và mỗi câu trả lời ở trên chỉ nói đúng số điểm của một người mà thôi.

Các bạn hãy giúp bạn Lan, tìm xem số điểm của mỗi người là bao nhiêu

NGÂN HỒ

NGƯỜI GỬI BÀI GIẢI CẦN CHÚ Ý

– Lời giải của một bài toán viết riêng trên một tờ giấy. Nếu bài dài nhiều trang thì đính chúng vào nhau.

– Trên mỗi bài giải đều ghi họ tên, lớp, trường, huyện, tỉnh (thành phố) và ghi số của đề ra (không cần chép lại đề).

– Ngoài phong bì cần đề rõ *bài giải của số báo nào* (không gửi bài của nhiều số báo vào cùng một phong bì).

– Chỉ gửi về địa chỉ : 45B, Hàng Chuối, Hà Nội.

TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

ISSN : 8066 – 8035
Chỉ số : 12884
Mã số : 8BT28M6

Sắp chữ tại TTVT Nhà XBGD
In tại Nhà in Diên Hồng
In xong và nộp lưu chiểu tháng 4/1996

Giá : 2000đ
Hai nghìn đồng