BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ★ HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ

3 (225)
1996
NĂM THỨ 33

TẠP CHÍ RA NGÀY 15 HÀNG THÁNG

Cô giáo Lê Thị Ngan, thầy giáo Đặng Quang Hải Việt cùng đội tuyển HS giỏi lớp 9 Chuyên toán của Thị xã Hải Dương.

- ★ MỘT CÁCH TÌM NHIỀU LỜI GIẢI CỦA MỘT BÀI TOÁN
- ★ HỌ ĐƯỜNG THẲNG LUÔN TIẾP XÚC VỚI MỘT ĐƯỜNG TRÒN HAY CÔNIC
- ★ ĐỀ THI TUYỂN SINH 1995 ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI
- ★ MỘT ĐẲNG THỨC MỚI TRONG TAM GIÁC
- ★ ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI LỚP 12 QUẢNG NGÃI
- ★ TRÒ CHƠI ĐOÁN CẦU

TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ
MATHEMATICS AND YOUTH

MỤC LỤC

Trụ sở tòa soạn :
45B Hàng Chuối, Hà Nội ĐT: 213786
231 Nguyễn Văn Cừ, TP Hồ Chí Minh ĐT: 356111

Biên tập và trị sự : VŨ KIM THỦY
Trình bày : TRỌNG THIỆP

Dành cho các bạn Trung học cơ sở

MỘT CÁCH TÌM NHIỀU CÁCH GIẢI CỦA MỘT BÀI TOÁN

LÊ QUANG TRUNG
Minh Hải

Sau khi tìm được lời giải của một bài toán, trong nhiều trường hợp, ta có thể từ kết quả hoặc cách giải đó mà suy ra những cách giải khác (hoặc hiểu được vì sao có các cách giải khác). Sau đây xin nêu một vài ví dụ minh họa.

Bài toán 1. *Phân tích đa thức* $x^3 - 7x + 6$ *thành nhân tử.*

Giải : $f(x) = x^3 - x - 6x + 6 = x(x^2 - 1) - 6(x - 1)$
$= (x - 1)(x^2 + x - 6) = (x - 1)(x - 2)(x + 3).$

Từ kết quả tìm được, ta dễ dàng thấy có nhiều cách giải khác như sau :

1) Nhóm các hạng tử của $f(x)$ sao cho xuất hiện nhân tử chung là $x - 1$ hoặc $x - 2$ hoặc $x + 3$. Chẳng hạn :

$f(x) = x^3 - x^2 + x^2 - x - 6x + 6$ $\quad= x^3 - 1 - 7x + 7 =$
$= x^3 - 4x - 3x + 6$ $\quad= x^3 - 8 - 7x + 14 =$
$= x^3 + 3x^2 - 3x^2 - 9x + 2x + 6$ $\quad= x^3 + 27 - 7x - 21 =$
$= x^3 - 9x + 2x + 6$; ......

2) Chia $f(x)$ cho $x - 1$, chia thương tìm được cho $x - 2$,

Bài toán 2 – *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases} x + y + z = 1 & (1) \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 & (2) \\ x^3 + y^3 + z^3 = 1 & (3) \end{cases}$$

Giải : Từ (1) và (3), suy ra $(x + y + z)^3 - (x^3 + y^3 + z^3) = 0$
$\Leftrightarrow 3(x+y)(x+z)(y+z) = 0 \Leftrightarrow x + y = 0$ hay $x + z = 0$ hay $y + z = 0$.

– Với $x + y = 0$, hệ có nghiệm là (0, 0, 1)
– Với $x + z = 0$, hệ có nghiệm là (1, 0, 0)
– Với $y + z = 0$, hệ có nghiệm là (0, 1, 0).

Từ nghiệm tìm được, ta thấy $x - 1 = 0$ hoặc $y - 1 = 0$ hoặc $z - 1 = 0$. Do đó, có cách giải khác :

Cách giải 2 : Từ (2) và (3), ta có :

$$x^2(1 - x) + y^2(1 - y) + z^2(1 - z) = 0. \qquad (4)$$

Phải có $1 - x \geqslant 0$, vì nếu $1 - x < 0$ tức $x > 1$ thì $x^2 + y^2 + z^2 > 1$, trái với (2). Tương tự : $1 - y \geqslant 0$ và $1 - z \geqslant 0$. Do đó (4) xảy ra khi và chỉ khi $x^2(1 - x) = y^2(1 - y) = z^2(1 - z) = 0$.

Suy ra mỗi số x, y, z bằng 0 hoặc 1, từ đó có các nghiệm của hệ.

Bài toán 3. Giải phương trình :

$$\frac{x + 1}{58} + \frac{x + 2}{57} = \frac{x + 3}{56} + \frac{x + 4}{55} \qquad (1)$$

Giải : (1) $\Leftrightarrow \dfrac{x + 1}{58} + 1 + \dfrac{x + 2}{57} + 1 = \dfrac{x + 3}{56} + 1 + \dfrac{x + 4}{55} + 1$

$\Leftrightarrow (x + 59)\left(\dfrac{1}{58} + \dfrac{1}{57} - \dfrac{1}{56} - \dfrac{1}{55}\right) = 0$. Vậy $x = -59$.

Biết nghiệm của phương trình, ta có cách giải khác bằng cách làm xuất hiện +59 ở tử của mỗi phân thức.

Cách giải 2 :

(1) $\Leftrightarrow \dfrac{x + 59 - 58}{58} + \dfrac{x + 59 - 57}{57} = \dfrac{x + 59 - 56}{56} + \dfrac{x + 59 - 55}{55}$

$\Leftrightarrow \dfrac{x + 59}{58} - 1 + \dfrac{x + 59}{57} - 1 = \dfrac{x + 59}{56} - 1 + \dfrac{x + 59}{55} - 1$.

Từ đó có nghiệm là $x = -59$.

Sau đây là một vài bài toán khác để các bạn vận dụng.

Bài toán 4. Phân tích đa thức $2x + 5x + x - 2$ thành nhân tử.

Bài toán 5. Giải phương trình $\dfrac{x - 5}{1980} + \dfrac{x - 15}{1970} = \dfrac{x - 1970}{15} + \dfrac{x - 1980}{5}$

Bài toán 6. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 12. \end{cases}$$

Bài T1/221. *Tìm số tự nhiên n lớn nhất sao cho số 1995 bằng tổng của n số $a_1, a_2, ..., a_n$ trong đó các số a_i $(i = 1, 2, ..., n)$ đều là hợp số.*

Lời giải : (của bạn *Lê Minh Đức*, lớp 7A, Thuận Thành, Hà Bắc)

Ta có $a_1 + a_2 + ... + a_n = 1995$. Trong các số a_i phải có ít nhất một số lẻ giả sử là a_n. Các số a_i còn lại là hợp số, do đó $a_i \geqslant 4$ $(i = 1, 2 ..., n - 1)$ còn a_n là hợp số lẻ, do đó $a_n \geqslant 9$. Vậy

$$1995 = a_1 + ... + a_n \geqslant 4(n-1) + 9 \Rightarrow$$

$$1995 \geqslant 4n + 5 \Rightarrow n \leqslant \frac{1990}{4} < 498$$

$$\Rightarrow n \leqslant 497.$$

Với $n = 497$ ta thấy

$$1995 = \underbrace{4 + ... + 4}_{495 \text{ số}} + 6 + 9$$

Vậy n lớn nhất là 497.

Nhận xét : Các bạn sau đây có lời giải tốt : Nguyễn Minh Phương 9A Việt Trì, Hà Xuân Giáp 6 Thanh Hóa, Bùi Viết Lộc 8A Bế Văn Đàn Hà Nội, Phạm Vũ Toàn, 6 chuyên Từ Liêm Hà Nội, Đào Quang Tiến 7 Thái Bình, Nguyễn Trọng Hiến 7 Hà Tĩnh, Trần Thị Thủy 9T Hà Tĩnh, Trần Tất Đạt 8A Chu Văn An Hà Nội, Trần Tuấn Anh 8 Toán Lê Quý Đôn, Nha Trang, Khánh Hòa.

Có hai bạn có đáp số sai. Một số bạn cho đáp số đúng nhưng lập luận chưa chặt chẽ

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T2/221. *Tìm nghiệm nguyên của phương trình*

$$x(1 + x + x^2) = 4y(y + 1)$$

Lời giải : của *Cao Xuân Hòa*, 9A$_1$, Hồng Bàng, Hải Phòng.

Ta có $\quad x(1 + x + x^2) = 4y(y+1) \qquad (1)$

$(1) \Leftrightarrow \quad 1 + x + x^2 + x^3 = 4y^2 + 4y + 1$

hay $\quad (1 + x)(1 + x^2) = (2y + 1)^2 \qquad (2)$

Vì vế phải của (2) là số lẻ nên suy ra $(1 + x)$ và $(1 + x^2)$ đều là số lẻ.

Giả sử $(1 + x, 1 + x^2) = d$ suy ra d cũng là số lẻ. Mặt khác từ $(1 + x) \vdots d$ suy ra $(1 - x^2) \vdots d$. Kết hợp với $(1 + x^2) \vdots d$ suy ra $2 \vdots d$. Mà d là số lẻ vậy $d = 1$.

Vì $(1 + x)(1 + x^2)$ là số chính phương (do (2)) mà $(1 + x, 1 + x^2) = 1$ Vậy $1 + x$ và $1 + x^2$ đều phải là số chính phương. Ta thấy x^2, $x^2 + 1$ là 2 số tự nhiên liên tiếp mà đều là số chính phương. Suy ra $x = 0$.

Khi đó theo (1) thì $y = 0$ hoặc $y = -1$.

Vậy ta có 2 cặp nghiệm của phương trình là $(0, 0)$ và $(0, -1)$

Nhận xét. Một số bạn cũng giải được bài này nhưng trong lập luận còn dài dòng hoặc thiếu chính xác. Các bạn sau đây cũng có lời giải tốt : *Nguyễn Trọng Kiên*, 8T, Trần Đăng Ninh, Nam Định, Nam Hà ; *Lê Thành Công*, 7T, Phạm Huy Quang, Đông Hưng, Thái Bình

TÔ NGUYÊN

Bài T3/221. *Chứng minh bất đẳng thức :*

$$\frac{a^3}{b - bc + c} + \frac{b^3}{c - ca + a} + \frac{c^3}{a - ab + b} \geqslant$$

$$\geqslant 3\,\frac{ab + bc + ca}{a + b + c}$$

trong đó a, b, c là các số dương.

Lời giải : (dựa theo *Mai Ngọc Kha* – 9 Toán Trần Đăng Ninh TP Nam Định) Ta có các mẫu thức ở vế trái đều dương, chẳng hạn, $b^2 - bc + c^2 = \left(b - \frac{c}{2}\right)^2 + 3\frac{c^2}{4} > 0$; hơn nữa, a, b, c đều dương nên đặt A là biểu thức ở vế trái và $S = (a^2 + b^2 + c^2)^2$, ta có thể tiến hành biến đổi sau đây :

$$S = \left[\sqrt{\frac{a^3}{b^2 - bc + c^2}}\sqrt{(b^2 - bc + c^2)a} + \sqrt{\frac{b^3}{c^2 - ca + a^2}}\sqrt{(c^2 - ca + a^2)b} + \sqrt{\frac{c^3}{a^2 - ab + b^2}}\sqrt{(a^2 - ab + b^2)c}\right]^2$$

Từ biểu thức này, áp dụng bất đẳng thức Bu-nhi-a-kốp-xki, ta có :

$$S < A(ab^2 + ac^2 + bc^2 + ba^2 + ca^2 + cb^2 - 3abc) \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$A > \frac{S}{ab^2 + ac^2 + bc^2 + ba^2 + ca^2 + cb^2 - 3abc} \quad (2)$$

(Vì ta đã chia 2 vế của (1) cho một biểu thức dương). Ta sẽ chứng minh vế phải của (2) không bé hơn $a + b + c$. Thật vậy, điều đó tương đương với :

$$a^4 + b^4 + c^4 + abc(a + b + c) >$$

$$> ab^3 + ac^3 + bc^3 + ba^3 + ca^3 + cb^3 \quad (3)$$

Không làm mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b \geq c > 0$, ta có :

$$a^2(a-b)^2 + (a-b)^2(a+b)(b-c) + c^2(c-a)(c-b) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a^4 - 2a^3b + a^2b^2 + a^3b - a^3c + a^2b^2 - a^2bc - 2a^2b^2 + 2a^2bc - 2ab^3 + 2ab^2c + b^3a - b^2ac + b^4 - b^3c + c^4 - c^3b - c^3a + c^2ab \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a^4 + b^4 + c^4 + abc(a+b+c) \geq ab^3 + ac^3 + bc^3 + ba^3 + ca^3 + cb^3,$$ tức là (3) đúng.

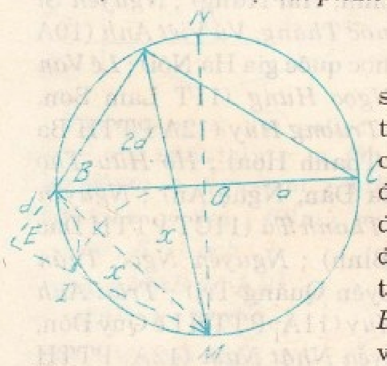
Kết hợp (2) với (3), ta có $A \geq a+b+c$, và chỉ còn phải chứng minh :

$a+b+c \geq 3\dfrac{ab+bc+ca}{a+b+c}$ (4). Thật vậy, ta đã biết $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$ nên $(a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$; mà $a+b+c>0$ nên ta có (4), suy ra đpcm.

Nhận xét. Nhiều bạn mắc sai lầm cho rằng số nào nhân với số bé hơn 1 cũng giảm, thật ra điều đó chỉ đúng với các số dương mà thôi.

ĐẶNG VIỄN

Bài T4/221. *Dựng tam giác ABC vuông ở A biết cạnh BC và độ dài phân giác AD.*



Lời giải :

Phân tích : Giả sử tam giác ABC thỏa mãn yêu cầu của đề bài đã dựng được. Gọi M là giao điểm của AD với đường tròn (O) ngoại tiếp ΔABC. Đặt $BC = 2a, AD = 2d$ và $MD = x$. Ta có $MA = x + 2d$. Kẻ đường kính MN. Do $ADON$ là tứ giác nội tiếp nên :

$$MD.MA = MO.MN$$
$$\Rightarrow x(x+2d) = a.2a$$
$$\Rightarrow x^2 + 2dx = 2a^2$$
$$\Rightarrow (x+d)^2 = 2a^2 + d^2$$

Như vậy $x+d$ là cạnh huyền của tam giác vuông có cạnh góc vuông bằng $a\sqrt{2}$ và d. Từ đó suy ra cách dựng đoạn x.

Cách dựng :

Dựng đường tròn tâm O đường kính BC (đã cho trước). Dựng ΔBOM vuông cân có $OB = OM$ $(= a)$. Dựng ΔMBE vuông ở B có $BE = d$ (d bằng nửa độ dài phân giác đã cho). Lấy I sao cho $EI = d$. MI chính là độ dài x phải dựng. Từ đó suy ra giao điểm D của phân giác với cạnh BC. Nối M với D cắt đường tròn (O) ở A. Ta được ΔABC cần dựng.

Chứng minh : Dành cho bạn đọc.

Nhận xét :

Giải tốt bài này có các bạn :

Nguyễn Như Chuẩn, 8NK Thuận Thành, Hà Bắc, Lê Lâm, 9 Toán Chuyên Phú Thọ, Nguyễn Minh Phương, 9A, Minh Phương, Việt Trì, Vĩnh Phú, Hoàng Hải An, 9A Chuyên Uông Bí, Quảng Ninh, Phạm Thu Hương 9A$_1$, Hồng Bàng, Hải Phòng, Bùi Viết Lộc, 8A Bế Văn Đàn, Nguyễn Hoàng Lam, 8A$_1$ Chu Văn An, Hà Nội, Cao Thị Ly, 9 Năng khiếu Vũ Thư, Thái Bình, Bùi Thị Khánh Thuận, 9 Chuyên NK Ý Yên, Nguyễn Trọng Kiên, 8T, Mai Ngọc Kha 9T Trần Đăng Ninh, Nam Hà, Mai Thị Thu Sánh, 8A Nga Hải, Nga Sơn, Thanh Hóa, Võ Sĩ Nam, 9 Chuyên NK Đức Thọ, Hà Tĩnh, Trần Chí Hòa, 9CT Đào Duy Từ, Quảng Bình, Nguyễn Hoàng Thành, 9/1 Nguyễn Huệ, Đà Nẵng, Quảng Nam Đà Nẵng, Trần Tuấn Anh, 8T, Lê Quý Đôn, Nha Trang, Khánh Hòa.

VŨ KIM THỦY

Bài T5/221. *Cho tam giác ABC ; O là tâm đường tròn nội tiếp tam giác. Một đường thẳng l thay đổi luôn đi qua O cắt tia CB, các cạnh AC, AB lần lượt tại các điểm M, N, P. Chứng minh rằng biểu thức :*

$$\frac{AB}{PA.PB} + \frac{AC}{NA.NC} - \frac{BC}{MB.MC}$$

không phụ thuộc vào vị trí của l.

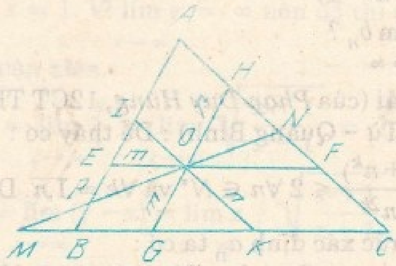
Lời giải : Qua O kẻ các đường thẳng EF, GH, IK tương ứng song song với BC, CA, AB (hình vẽ), tạo thành các hình bình hành $BEOG$, $CKOF$, $AHOI$; hơn nữa, O là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC nên đó là các hình thoi. Do đó, ta có thể đặt $m = OE = OG = BG$; $n = OK = OF$; $p = OH = OI$. Áp dụng định lí Ta-lét, ta chứng minh được :

$$\frac{m}{PB} = \frac{OG}{PB} = \frac{MG}{MB} = \frac{MB+BG}{MB} = 1 + \frac{BG}{MB}$$

hay $\dfrac{1}{PB} - \dfrac{1}{MB} = \dfrac{1}{m}$ (1)

Tương tự, ta cũng có

$$\frac{1}{PA} + \frac{1}{NA} = \frac{1}{n} \quad (2) \text{ và } \frac{1}{MC} + \frac{1}{NC} = \frac{1}{k} \quad (3)$$



Cộng (1), (2), (3) vế với vế rồi biến đổi, được :

$\left(\frac{1}{AP}+\frac{1}{BP}\right)+\left(\frac{1}{AN}+\frac{1}{CN}\right)+\left(\frac{1}{CM}-\frac{1}{BM}\right)=$

$=\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}$

$\Leftrightarrow \frac{AB}{PA.PB}+\frac{AC}{NA.NC}-\frac{BC}{MB.MC}=\frac{1}{m}-\frac{1}{n}-\frac{1}{p}$ không đổi.

Nhận xét. Các bạn sau đây có lời giải tốt : Bùi Viết Lộc (8A THCS Bế Văn Đàn – Hà Nội), Trần Thị Thủy (9 Toán Năng khiếu – Hà Tĩnh), Phạm Tuấn Anh (8A Lương Thế Vinh – Hà Nội), Mai Thái Âu (9 Toán Trần Đăng Ninh – Nam Định – Nam Hà), Trần Tuấn Anh (8 Toán Lê Quý Đôn – Nha Trang – Khánh Hòa).

ĐẶNG VIÊN

Bài T6/211. *Cho ba số x, y, z nguyên dương thỏa mãn hệ thức*

$$x^4+y^4+z^4=1984$$

Chứng minh rằng số $A=20^x+11^y-1996^z$ không thể là tích của 2 số tự nhiên liên tiếp.

Lời giải : Số A lẽ ra phải là

$$A=20^x+11^y-1993^z$$

Với số A như đề bài thì bài toán là tầm thường vì A khi đó hiển nhiên là số lẻ và do đó không thể là tích của hai số tự nhiên liên tiếp *với mọi $x, y, z \in N^*$.*

Hơn nữa một số bạn (Dương Đình Hùng 11A Nga Sơn, Thanh Hóa, Võ Thanh Tùng, 11 Quốc học Huế, Đỗ Bích Diệp 12B chuyên Hóa ĐHTH, Nguyễn Như Chuẩn 8NK Hà Bắc, Trần Hữu Lực 10CT Quảng Bình, Trần Việt Dũng 10A trường Lê Quý Đôn, Đà Nẵng, Lê Văn Mạnh, 11T Nghệ An) đã chứng minh rằng *không tồn tại ba số x, y, z nguyên dương thỏa mãn hệ thức*

$$x^4+y^4+z^4=1984$$

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T7/221. *Cho các dãy $\{a_n\}$, $n \in N^*$; $\{b_n\}$, $n \in N^*$ thỏa mãn các công thức sau :*

$$a_n=1+\frac{n(1+n)}{1+n^2}+\ldots+\frac{n^n(1+n^n)}{1+n^{2n}}\ \forall n\in N^*$$

$$b_n=\left(\frac{a_n}{n+1}\right)^{\frac{1}{n(n+1)}}\quad \forall n\in N^*$$

Tìm $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$?

Lời giải (của *Phan Duy Hùng*, 12CT THPT Đào Duy Từ – Quảng Bình) : Dễ thấy có :

$1\leqslant \frac{n^k(1+n^k)}{1+n^{2k}}\leqslant 2\ \forall n\in N^*$ và $\forall k=\overline{1,n}$. Do đó từ công thức xác định a_n ta có :

$$n+1\leqslant a_n\leqslant 2n+1<2(n+1)\ \forall n\in N^*$$

Suy ra : $1\leqslant b_n\leqslant 2^{\frac{1}{n(n+1)}}<2^{\frac{1}{n}}\ \forall n\in N^*$ (1)

Mà $2^{\frac{1}{n}}=(2.\underbrace{1.1\ldots1}_{(n-1)\text{ số}})^{\frac{1}{n}}<\frac{n-1+2}{n}=1+\frac{1}{n}$.

Nên từ (1) suy ra $1\leqslant b_n<1+\frac{1}{n}\ \forall n\in N^*$. (2)

Do $\lim\limits_{n\to\infty}1=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1$ nên từ (2) ta được :

$$\lim_{n\to\infty}b_n=1.$$

Nhận xét : 1. Giải tương tự như trên còn có các bạn : *Hà Duy Hưng* (11 chuyên Tin PTNK Trần Phú, Hải Phòng) ; *Nguyễn Quang Nguyên* (11CT Hà Tây) ; *Nguyễn Xuân Sơn, Dương Văn Yên, Nguyễn Cảnh Hào* (11CT PTTH Phan Bội Châu, Nghệ An) ; *Nguyễn Minh Tuấn* (11T PTTH Đào Duy Từ, Quảng Bình) và *Lê Anh Vũ* (12CT Quốc học Huế).

2. Ngoài các bạn đã nêu tên ở trên, các bạn sau đây cũng có lời giải tốt : *Trần Hoàng Việt* (12A PTTH Chí Linh, Hải Hưng) ; *Nguyễn Sĩ Phong, Nguyễn Quốc Thắng, Vũ Việt Anh* (10A PTCT ĐHSP Đại học quốc gia Hà Nội) ; *Lê Văn Cường, Nguyễn Ngọc Hưng* (11T Lam Sơn, Thanh Hóa), *Lưu Trường Huy* (12A PTTH Ba Đình, Nga Sơn – Thanh Hóa) ; *Hồ Hữu Thọ* (11A PTTH Nghĩa Đàn, Nghệ An) ; *Nguyễn Minh Tuấn, Trần Thanh Tú* (11CT PTTH Đào Duy Từ, Quảng Bình) ; *Nguyễn Ngọc Tuấn* (11CT trường chuyên Quảng Trị) ; *Trần Anh Luân, Phan Anh Huy* (11A_1 PTTH Lê Quý Đôn, Đà Nẵng) và *Nguyễn Nhật Nam* (12A_1 PTTH Vũng Tàu, Bà Rịa – Vũng Tàu).

3. Bạn *Nguyễn Nhật Nam* đã chứng minh đúng khẳng định sau : "Với $\{a_n\}$ là dãy được xác định trong bài đã ra, và với $k\in N^*$ cho trước ta có $\lim\limits_{n\to\infty}(n^k.a_n)^{\frac{1}{n(n+1)}}=1$

4. Để giải bài đã ra, không ít bạn đã có nhiều cố gắng trong việc đưa ra các đánh giá khá phức tạp và vì thế làm cho lời giải trở nên rườm rà, cồng kềnh.

5. Một số bạn đã phạm phải những sai lầm về kiến thức cơ bản, chẳng hạn :

- Từ $x_n<y_n\ \forall n\in N^*$ suy ra $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n$ (!?).
- Từ $\frac{a_n}{n+1}=\frac{1}{n+1}+\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{n^k(n^k+1)}{(n+1)(1+n^{2k})}$

suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{n+1} =$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \lim_{n\to\infty} \frac{n^k(1+n^k)}{(n+1)(1+n^{2k})} \ (\,!\,?).$$

NGUYỄN KHẮC MINH

Bài T8/221. *Chứng minh bất đẳng thức sau đây*

$$\frac{a^2+b^2}{a+b} + \frac{b^2+c^2}{b+c} + \frac{c^2+a^2}{c+a} \leqslant 3\,\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c} \quad (1)$$

Lời giải (của đa số các bạn) :

$$(1) \leftrightarrow (a+b+c)\left[\frac{a^2+b^2}{a+b} + \frac{b^2+c^2}{b+c} + \frac{c^2+a^2}{c+a}\right] \leqslant$$
$$\leqslant 3(a^2+b^2+c^2)$$

$$\leftrightarrow \frac{c(a^2+b^2)}{a+b} + \frac{b(c^2+a^2)}{c+a} + \frac{a(b^2+c^2)}{b+c} \leqslant$$
$$\leqslant a^2+b^2+c^2$$

$$\leftrightarrow c^2 - \frac{c(a^2+b^2)}{a+b} + b^2 - \frac{b(c^2+a^2)}{c+a} +$$
$$+ a^2 - \frac{a(b^2+c^2)}{b+c} \geqslant 0$$

$$\leftrightarrow \frac{ac(c-a)}{a+b} + \frac{bc(c-b)}{a+b} +$$
$$+ \frac{ab(b-a)}{c+a} + \frac{bc(b-c)}{c+a} +$$
$$+ \frac{ab(a-b)}{b+c} + \frac{ac(a-c)}{b+c} \geqslant 0$$

$$\leftrightarrow \frac{ac(c-a)^2}{(a+b)(b+c)} + \frac{bc(c-b)^2}{(a+b)(a+c)} +$$
$$+ \frac{ab(b-a)^2}{(a+c)(b+c)} \geqslant 0$$

Nhận xét :

1. Nhiều bạn còn có nhiều cách giải khác bằng cách sử dụng các bất đẳng thức cơ bản Bunhiacopvski

2. Một số bạn đã mở rộng và chứng minh đúng bất đẳng thức dạng tổng quát :

Cho $a_1, a_2, ..., a_n > 0$; đặt

$S_1 = a_1 + a_2 + ... + a_n$; $S_2 = a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2$

Khi đó

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{S_2 - a_i^2}{S_1 - a_i} \leqslant n \cdot \frac{S_2}{S_1}$$

3. Tòa soạn đã nhận được các lời giải đúng của các bạn

Hà Nội : Nguyễn Tuấn Ngọc, Trần Nguyên Ngọc (ĐHKHTN), Nguyễn Xuân Nguyên, Trần Tất Đạt, Lê Trọng Thuận, Nguyễn Hoàng Lam (Chu Văn An), Đinh Trung Hằng (Mari Quiri), Nguyễn Hữu Cường, Nguyễn Sĩ Phong, Vũ Việt Anh, Nguyễn Quốc Thắng (ĐHSP), Bùi Viết Lộc (Bế Văn Đàn).

TP. Hồ Chí Minh : Nguyễn Ngọc Biên

Hải Phòng : Hà Duy Hưng, Tạ Thiện Toàn, Nguyễn Phan Anh, Phạm Đức Anh, Nguyễn Hữu Tuấn.

Hải Hưng : Nguyễn Quốc Khánh, Nguyễn Văn Luật (Phúc Thành), Trần Hoàng Việt, Nguyễn Thanh Tùng (Chí Linh), Lê Đại Nguyên, Dương Mạnh Hùng (Mĩ Văn), Hoàng Văn Dũng (Nam Thanh).

Nghệ An : Nguyễn Anh Vũ, Nguyễn Việt Dũng, Lê Văn An, Nguyễn Xuân Quảng, Phan Đức Linh, Hồ Hữu Thọ (Nghĩa Đàn), Nguyễn Cảnh Hào, Nguyễn Đức Cảnh, Trương Xuân Thung, Phạm Tuấn Anh, Nguyễn Xuân Sơn, Lê Quang Hưởng, Nguyễn Thái Bình, Nguyễn Hồng Chung, Dương Văn Yên, Kiều Thu Hiền, Nguyễn Hà Thanh, Trần Nam Dũng.

Hà Tĩnh : Nguyễn Đức Xuân Bình.

Thanh Hóa : Đỗ Hồng Sơn, Hoàng Hà, Nguyễn Ngọc Hưng, Lê Văn Cường, Lưu Trường Huy, Lê Xuân Dũng.

Quảng Trị : Hoàng Việt Phương (Đông Hà), Nguyễn Ngọc Tuấn, Nguyễn Việt Tiến (Vĩnh Linh)

Quảng Bình : Nguyễn Minh Tuấn, Trần Mai Sơn Hà, Bùi Ngọc Thanh, Phan Huy Hùng, Lê Chí Thọ, Phạm Hồng Thái.

Thừa Thiên - Huế : Lê Anh Vũ, Đoàn Xuân Vinh, Võ Thành Tùng, Trần Thanh Quang.

Đà Nẵng : Phan Anh Huy.

Nam Hà : Đỗ Ngọc Anh, Vũ Mạnh Hải.

Vĩnh Phú : Nguyễn Minh Phương.

Hà Tây : Đỗ Anh Tuấn, Nguyễn Anh Nguyên.

Thái Bình : Trần Công Cường, Nguyễn Ngọc Khánh.

Phú Yên : Trịnh Ái Quốc.

Khánh Hòa : Nguyễn Lệ Hoàng Anh.

Đồng Nai : Phạm Hoài Lăng.

Tiền Giang : Lê Văn Lai.

Quảng Ninh : Nguyễn Hoàng Công.

Hòa Bình : Hà Khánh Toàn.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T9/221. *Giả sử O là một điểm nằm trong tam giác ABC. Các đường thẳng OA, OB, OC cắt các cạnh BC, CA, AB lần lượt ở A', B', C'. Tìm tập hợp những điểm O sao cho :*

$$s^2(OAC') + s^2(OBA') + s^2(OCB') =$$
$$= s^2(OBC') + s^2(OCA') + s^2(OAB')$$

Lời giải (dựa theo Nguyễn Hữu Cầu, 10CT, trường PTTH chuyên Đào Duy Từ, Quảng Bình)

Đặt : $s(OA'B) = s_1$, $s(OA'C) = s'_1$;

$s(OB'C) = s_2$, $s(OB'A) = s'_2$;

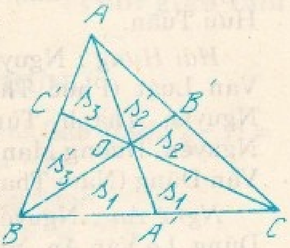
$s(OC'A) = s_3$, $s(OC'B) = s'_3$.

và : $s_1 + s'_1 = x$, $s_2 + s'_2 = y$, $s_3 + s'_3 = z$.

Thế thì ta được :

$$\frac{s_1}{s_3+s'_3} = \frac{s'_1}{s_2+s'_2} = \frac{OA'}{OA} =$$

$$= \frac{s_1+s'_1}{s_3+s'_3+s_2+s'_2} = \frac{x}{y+z}$$



Suy ra: $s_1 = \frac{zx}{y+z}$, $s'_1 = \frac{xy}{y+z}$

Tương tự :

$$s_2 = \frac{xy}{z+x}, s'_2 = \frac{yz}{z+x}; s_3 = \frac{yz}{x+y}, s'_3 = \frac{zx}{x+y}$$

Từ giả thiết : $s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = s'^2_1 + s'^2_2 = s'^2_3$ (*)

Thay các giá trị của s_i và s'_i $(i = 1, 2, 3)$ vào (*), ta được : (*) $\Leftrightarrow \left(\frac{zx}{y+z}\right)^2 + \left(\frac{xy}{z+x}\right)^2 + \left(\frac{yz}{x+y}\right)^2 =$

$$= \left(\frac{xy}{y+z}\right)^2 + \left(\frac{yz}{z+x}\right)^2 + \left(\frac{zx}{x+y}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2(y-z)}{y+z} + \frac{y^2(z-x)}{z+x} + \frac{z^2(x-y)}{x+y} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-y)(y-z)(z-x)(x+y+x)^2}{(y+z)(z+x)(x+y)} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)(y-z))(z-x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y \\ y = z \\ z = x \end{array}\right.$$

Vậy tập hợp những điểm O thỏa mãn (*) là ba đoạn trung tuyến của tam giác ABC (không kể các đầu mút của chúng).

Nhận xét : 1°) Những bạn sau đây có lời giải tốt : Nguyễn Tiến Mạnh, 10A, PTTH Ngô Sĩ Liên, Hà Bắc, Nguyễn Ngọc Hưng, 11T, Lam Sơn, Thanh Hóa, Nguyễn Minh Tuấn 11T, Phan Duy Hùng, 12CT Đào Duy Từ Quảng Bình, Lê Anh Vũ 12CT, Quốc học Huế, Trần Hoàng Việt, 12A, PTTH Chí Linh, Hải Hưng, Trịnh Kim Chi, 10T, PTTH năng khiếu Hà Tĩnh, Phan Anh Huy, $11A_1$ PTTH Lê Quý Đôn, Đà Nẵng, Lê Hồng Hà 10CT ĐHSP Vinh

2°) Nhiều bạn biết sử dụng định lí Céva từ đó, thiết lập hệ thức sau đây :

$$s_1 + s_2 + s_3 = s'_1 + s'_2 + s'_3 \qquad (1)$$

Sau đó, cũng dễ dàng thiết lập thêm hệ thức :

$$s_2s_3 + s_3s_1 + s_1s_2 = s'_2s'_3 + s'_3s'_1 + s'_1s'_2 \quad (2)$$

Từ (*), (1) và (2), suy ra :

$$\{s_1, s_2, s_3\} = \{s'_1, s'_2, s'_3\}$$

nghĩa là (s'_1, s'_2, s'_3) là một hoán vị của (s_1, s_2, s_3). (Định lí Vi-ét về tính chất các nghiệm của phương trình bậc 3).

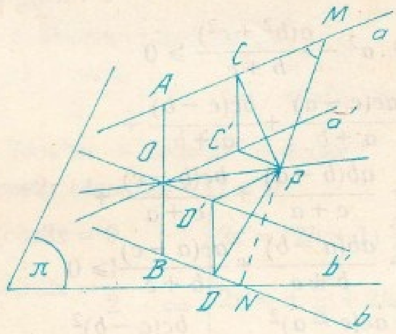
Xét các hoán vị khác nhau của hai tập hợp số trên, ta đi đến kết luận : Muốn cho điểm O nằm trong tam giác ABC thỏa mãn điều kiện (*), cần và đủ là O phải nằm trên một trong ba đường trung tuyến của tam giác đã cho (trừ các đỉnh và các trung điểm của ba cạnh).

NGUYỄN ĐĂNG PHẤT

Bài 10/221. *Trong không gian cho hai đường thẳng chéo nhau a và b. M và N là hai điểm chuyển động lần lượt trên a và b sao cho đường thẳng MN hợp với a và b những góc bằng nhau. Tìm quỹ tích trung điểm P của đoạn thẳng MN.*

Lời giải 1 :

Gọi AB là đoạn vuông góc chung của a và b, $A = AB \perp a$, $B = AB \perp b$.



Gọi π là mặt phẳng trung trực của AB, (thế thì π song song và cách đều a và b) ; a' và b' là hình chiếu vuông góc lần lượt của a và b trên π. Hạ $PC \perp a = C$ và $PD \perp b = D$, dễ thấy rằng : $(\widehat{a,MN}) = (\widehat{b,MN})$; (1) cũng tl. $\widehat{AMN} = \widehat{BNM}$ (với $MP = PN$) $\Leftrightarrow PC = PD$ (2).

Gọi C' và D' là hình chiếu của C và D trên π, thế thì : $C' = CC' \perp a'$ và $D' = DD' \perp b'$ và $CC' = DD'$. Theo định lí ba đường vuông góc, ta có : $PC' \perp a' = C'$ và $PD' \perp b' = D'$. Do đó, theo định lí về đường vuông góc và đường xiên, ta được

(2) $PC = PD \Leftrightarrow PC' = PD'$ (3)

Tóm lại : (1) $\Leftrightarrow$ (3)

Bài toán không gian quy về bài toán trong mặt phẳng π : Tìm quỹ tích những điểm P trong π cách đều hai đường thẳng a' và b' (cắt nhau ở O).

Dễ thấy rằng trong mặt phẳng (π), quỹ tích của P là hai đường thẳng vuông góc Ox và Oy, phân giác của các góc tạo bởi hai đường thẳng cắt nhau a' và b'.

Nhận xét. 1°) Trong lời giải trên đây chúng ta đã sử dụng phép chiếu vuông góc (lên mặt phẳng song song cách đều hai đường thẳng chéo nhau a và b) và đưa bài toán tìm quỹ tích trong không gian về một bài toán tìm quỹ tích trong mặt phẳng đơn giản hơn. Cũng trong lời giải trên đây, chúng ta không cần tách bạch hai phần chứng minh thuận và đảo ; hai phần này đã được trình bầy gộp trên cơ sở vận dụng điều kiện cần và đủ của điều kiện đặt ra của đề toán.

2°) Ngoài cách giải trên (phương pháp tổng hợp) bốn bạn sau đây đã giải bài toán bằng phương pháp véctơ, đó là các bạn : Đinh Trung Hàng, 12M Trường dân lập Mari – Quyri Hà Nội, Phạm Minh Hoàng, $12A_1$, PTTH Kim Liên, Hà Nội, Lưu Trường Huy 12A, PTTH Ba Đình, Nga Sơn, Thanh Hóa và Lê Chí Thọ, 12CT, Đào Duy Từ, Quảng Bình.

Lời giải 2. Gọi $\vec{a}$, $\vec{b}$ và $\vec{c}$ là các véctơ đơn vị chỉ phương của các đường thẳng a, b và (AB), rồi biểu diễn $\vec{MN}$ theo $\vec{a}$, $\vec{b}$ và $\vec{c}$. Thế thì điều kiện của bài toán đặt ra được biểu thị bởi đẳng thức :

$$|\vec{MN}\,\vec{a}| = |\vec{MN}\vec{b}|$$

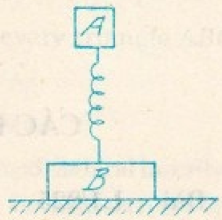
Từ đó, ta cũng thu được kết quả như đã chỉ ra trong lời giải 1.

3°) Một số bạn đã bỏ sót một đường thẳng trong tập hợp hai đường thẳng Ox và Oy, thậm chí có hai bạn đã giải sai : quỹ tích của P là một mặt phẳng ! !

4°) Ngoài 4 bạn nêu trên, các bạn sau đây có lời giải tốt : Đoàn Xuân Vinh 11CT, Lê Anh Vũ, 12CT Quốc học Huế, Nguyễn Ngọc Khánh 11A, PTTH chuyên Thái Bình, Trần Nam Dũng 10 CT, trường Phan Bội Châu, Nghệ An, Phạm Duy Hùng, 12CT Đào Duy Từ, Quảng Bình .

NGUYỄN ĐĂNG PHÁT

Bài L1/221. *Một vật A khối lượng m_1 và vật B khối lượng m_2 nối với nhau bằng một lò xo có khối lượng không đáng kể (hình vẽ). Vật A thực hiện những dao động tự do với biên độ A và tần số góc ω. Để hệ thống không tách khỏi mặt sàn biên độ dao động A là bao nhiêu ?*



Hướng dẫn. Gọi k là hệ số đàn hồi của lò xo : $k = m_1 . \omega^2$.

Ở vị trí cân bằng x_o của vật A : $kx_o = m_1 g$

Áp lực của hệ nén lên mặt sàn khi li độ dao động vật A là x : $F = m_2 g + k(x_o + x) = (m_1 + m_2)g + kx$

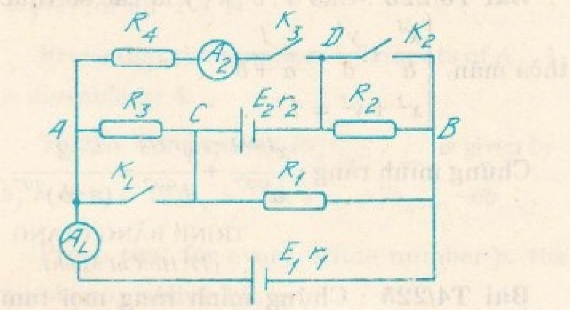
Vì $-A \leq x \leq A$ nên $F_{min} = (m_1 + m_2)g - kA = (m_1 + m_2)g = m_1\omega^2 A$. Để hệ thống không tách khỏi mặt sàn

$$F_{min} \geq 0 \rightarrow A \leq \frac{(m_1 + n_2)g}{m_1\omega^2}.$$

Nhận xét. Các bạn có lời giải tốt : Nguyễn Đình Thinh, 11L, PTTH Phan Bội Châu, Vinh (Nghệ An) ; Tạ Thiện Toàn, $12A_1$, PTTH Trần Nguyên Hãn (Hải Phòng) ; Nguyễn Văn Hiếu, $11A_2$, PTTH chuyên Lê Quý Đôn (Đà Nẵng) ; Phan Văn Bình, 11 Nguyễn Huệ, Tuy Hòa, Phú Yên ; Nguyễn Biên Thùy 11B, PTTH Bỉm Sơn, Thanh Hóa ; Lê Văn Lai 12D, PTTH Cái Bè, Tiền Giang ; Lê Quang Thành, 11CL, chuyên Quảng Trị, Lê Trần Thế Duy, 10L, Lê Khiết Quảng Ngãi, Phùng Duy Hưng, B_o11B, chuyên Lí, ĐHTH Hà Nội ; Đoàn Định Trung, 11L, PTTH Hà Nội – Amsterdam ; Vũ Mạnh Hải, 12A, PTTH Duy Tiên A, Nam Hà.

MAI ANH

Bài L2/221. *Cho mạch điện như hình vẽ cho biết $E_1 = 10V$, $r_1 = r_2$; $E_2 = 6V$, $R_1 = 2r_2$. Khi K_1 và K_2 đóng, A_2 chỉ 3,6A ; Khi K_2 đóng A_1 chỉ 9/7A. Khi K_3 đóng A_2 chỉ 2,5A, A_1 chỉ 3A. Bỏ qua điện trở của dây nối và ampe kế, hãy tính R_4 ; R_2 ; và cường độ dòng điện qua R_2 khi K_3 đóng.*

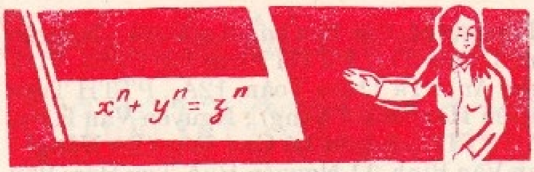


Hướng dẫn giải. Khi K_1 và K_2 đóng vẽ lại mạch điện ta thấy sơ đồ mắc mạch : E_1 // E_2 // R_1 ; áp dụng định luật Ôm cho đoạn mạch $U_{AB} = E_1 - I_{A_1}r = I_1R_1 = I_1.2r = E_2 + I_2r_2$; rút ra $r = 10/9\Omega$.

Khi K_1 đóng, vẽ lại mạch điện ta có sơ đồ : (E_2 // R_1) nt R_3 nt E_1 ; áp dụng định luật Ôm rút ra $R_3 = 10/3\Omega$. Khi K_3 đóng, ta thấy hai cực của E_1 mắc vào hai đầu A và B, còn hai cực của E_2 mắc vào hai đầu C và D. Áp dụng định luật Ôm cho các đoạn mạch và áp dụng hệ thức giữa các dòng điện tại các nút, rút ra $I_2 = 0{,}75A$, $R_2 = \frac{70}{27}\Omega$ và $R_4 = 17/9\Omega$.

Nhận xét. Các bạn có lời giải tốt : Nguyễn Đình Thịnh 11L, PTTH Phan Bội Châu, Vinh, Nghệ An ; Nguyễn Biên Thùy 11B, PTTH Bỉm Sơn, Thanh Hóa ; Phùng Duy Hưng B_o 11B, chuyên Lí, ĐHTH Hà Nội ; Lê Đức Dũng 10 CL, Đào Duy Từ, Quảng Bình ; Nguyễn Thành Hưng 10L, chuyên Lê Khiết Quảng Ngãi ; Nguyễn Hà Thanh, 11CT, ĐHSP Vinh ; Lê Quang Thành, 11CL, chuyên Quảng Trị ; Lê Trần Thế Duy, 10L, Lê Khiết Quảng Ngãi ; Nguyễn Ngọc Kiên, 11A, PTTH Thái Bình, Trần Mai Sơn Hà 10CL, Đào Duy Từ, Quảng Bình.

MA



ĐỀ RA KÌ NÀY

CÁC LỚP THCS

Bài T1/225 : Giải phương trình.

$$x^4 + (8\sqrt{5} - 7)x^2 + 52 - 28\sqrt{5} = (34 - 12\sqrt{5} - 3x^2)\sqrt{x^2 + 4\sqrt{5}}$$

TRẦN HỒNG SƠN
(Thái Bình).

Bài T2/225 : Giải phương trình nghiệm nguyên dương (ẩn x, y, z)

$$x^2 + y^2 = 2011^{1995^k + 1}(10 - z) \quad (k \in N^*)$$

NGUYỄN NGỌC KHOA
(Quảng Ngãi).

Bài T3/225 : Cho a, b, x, y là các số thực thỏa mãn. $\begin{cases} \dfrac{x^4}{a} + \dfrac{y^4}{b} = \dfrac{1}{a+b} \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$

Chứng minh rằng : $\dfrac{x^{1994}}{a^{997}} + \dfrac{y^{1994}}{b^{997}} = \dfrac{2}{(a+b)^{997}}$

TRỊNH BẰNG GIANG
(TP Hồ Chí Minh).

Bài T4/225 : Chứng minh rằng mọi tam giác ABC đều có :

$p^2 \geqslant h_a^2 + h_b^2 + h_c^2$, p là nửa chu vi

NGUYỄN ĐỨC TẤN
(TP Hồ Chí Minh).

Bài T5/225 : Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn. Gọi M, N, P, Q lần lượt là điểm chính giữa các cung BA, BC, CD, DA ký hiệu : $\{O_1\} = MC \cap AN$, $\{O_2\} = BP \cap DN$, $\{O_3\} = QC \cap AP$, $\{O_4\} = BQ \cap DM$. Chứng minh rằng $O_1O_2O_3O_4$ là hình chữ nhật.

HỒ QUANG VINH
(Nghệ An).

CÁC LỚP THCB

Bài T6/225 : Chứng minh rằng với mỗi số nguyên dương n cho trước, phương trình :

$$x^{2n+1} = x + 1$$

có đúng một nghiệm số thực. Gọi nghiệm số đó là x_n. Hãy tìm $\lim\limits_{n \to \infty} x_n$

TRẦN VĂN VƯƠNG
(Hà Nội).

Bài T7/225 : Cho hàm số $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

Đặt $A_1 = \{x \in \mathbf{R}, \varphi(x) = x\}$

$A_2 = \{x \in \mathbf{R}, \varphi(\varphi(x)) = x\}$

Giả sử $A_2 \backslash A_1$ là một tập hợp hữu hạn và tồn tại hàm số $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ thỏa mãn $f(f(x)) = \varphi(x)$ với mọi $x \in \mathbf{R}$. Chứng minh rằng số phần tử của $A_2 \backslash A_1$ là một số nguyên chia hết cho 4.

NGUYỄN MINH ĐỨC
(Hà Nội).

Bài T8/225 : Cho dãy $b_1 = 0, b_2 = 14, b_3 = -18$, $b_{n+1} = 7b_{n-1} - 6b_{n-2}$. Chứng minh rằng, với mọi số nguyên tố p có b_p chia hết cho p.

ĐÀM VĂN NHỈ
(Thái Bình).

Bài T9/225 : Cho hai đường thẳng x, y chéo nhau cố định. Các điểm M, N thay đổi trên x, các điểm P, Q thay đổi trên y sao cho $MN = a$, $PQ = b$, trong đó a, b là các độ dài cho trước. Hãy xác định vị trí của M, N, P, Q để cho bán kính của hình cầu nội tiếp tứ diện $MNPQ$ là lớn nhất.

HOÀNG NGỌC CẢNH
(Hà Tĩnh).

Bài T10/225 :

Cho ngũ giác đều $A_1A_2A_3A_4A_5$ cạnh bằng a và một đường thẳng (D) trong mặt phẳng chứa ngũ giác đó. Gọi M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 là chân các đường vuông góc hạ từ các đỉnh A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 tới (D). Chứng minh hệ thức :

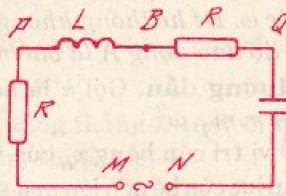
$$M_1M_2^2 + M_2M_3^2 + M_3M_4^2 + M_4M_5^2 + M_5M_1^2 = 5a^2/2$$

LÊ QUỐC HÁN
(Nghệ An).

CÁC ĐỀ VẬT LÝ

Bài L1/225

Cho một mạch điện như sơ đồ bên mỗi điện trở có giá trị $R = 3$ ôm, tụ điện có điện dung $C = 3000$ micrôfara.

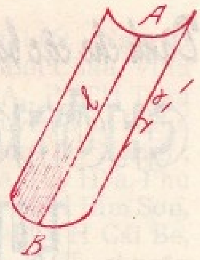


Hai đầu M và N của đoạn mạch được đặt một hiệu điện thế xoay chiều. Coi điện trở hoạt động của cuộn cảm và của các dây dẫn nối là nhỏ không đáng kể. Hãy xác định hệ số tự cảm L của cuộn cảm biết rằng các hiệu điện U_{MB} giữa

M và B và u_{BN} giữa B và N lệch pha với nhau một góc là $\varphi = 90$ độ.

NGUYỄN QUANG HẬU
(Hà Nội).

Bài L2/225 : Một quả cầu nhỏ có thể trượt không ma sát theo mặt một máng trụ bán kính R mà trục nghiêng một góc α so với phương nằm ngang, độ dài máng là l. Quỹ đạo của quả cầu cắt bao nhiêu lần đường sinh AB nếu ban đầu từ A quả cầu chuyển động với vận tốc bé theo phương vuông góc với AB.



TRƯƠNG VĨNH DIÊN
(Quảng Bình)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

For Lower Secondary Schools

T1/225. Solve the equation

$$x^4 + (8\sqrt{5} - 7)x^2 + 52 - 28\sqrt{5} = (34 - 12\sqrt{5} - 3x^2)\sqrt{x^2 + 4\sqrt{5}}.$$

T2/225. Find positive integral solutions (x, y, z) of the equation

$$x^2 + y^2 = 2011^{1995^k+1}(10 - z) \quad (k \in N^*).$$

T3/225. Let a, b, x, y be real numbers satisfying

$$\begin{cases} \dfrac{x^4}{a} + \dfrac{y^4}{b} = \dfrac{1}{a+b} \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Prove that $\dfrac{x^{1994}}{a^{997}} + \dfrac{y^{1994}}{b^{997}} = \dfrac{2}{(a+b)^{997}}$

T4/225. Prove that for every triangle ABC,

$$p^2 \geq h_a^2 + h_b^2 + h_c^2$$

where p is its semi-perimeter.

T5/225. Let $ABCD$ be a quadrilateral inscribed in a circle. Let M, N, P, Q be respectively the midpoints of the arcs BA, BC, CD, DA and $\{O_1\} = MC \cap AN$, $\{O_2\} = BP \cap DN$, $\{O_3\} = QC \cap AP$, $\{O_4\} = BQ \cap DM$.

Prove that $O_1O_2O_3O_4$ is a rectangle

For Upper Secondary Schools

T6/225. Prove that for every given positive integer n, the equation

$$x^{2n+1} = x + 1$$

has a unique real root, denoted by x_n, and find $\lim\limits_{n \to \infty} x_n$.

T7/225. Let be given a function $\varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Put

$$A_1 = \{x \in \mathbf{R},\ \varphi(x) = x\}$$
$$A_2 = \{x \in \mathbf{R},\ \varphi(\varphi(x)) = x\}.$$

suppose that $A_2 \backslash A_1$ is a finite set and there exists a function $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ satifying $f(f(x)) = \varphi(x)$ for all $x \in \mathbf{R}$.

Prove that the number of elements of $A_2 \backslash A_1$ is divisible by 4.

T8/225. The sequence $(b_n)_{n=1,2,...}$ is given by :

$$b_1 = 0, b_2 = 14, b_3 = -18, b_{n+1} = 7b_{n-1} - 6b_{n-2}.$$

Prove that for every prime number p, the number b_p is divisible by p.

T9/225. Let be given two fixed noncoplanar lines x, y. Two points M, N move along x, two points P, Q move along y so that $MN = a$, $PQ = b$ where a, b are given lengths. Determine the position of M, N, P, Q so that the radius of the inscribed sphere of the tetrahedron $MNPQ$ is greatest.

T10/225. In a plane let be given a regular pentagon $A_1A_2A_3A_4A_5$ with sides a and a line (D). Let M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 be respectively the orthogonal projections on (D) of A_1, A_2, A_3, A_4, A_5.

Prove that :

$$M_1M_2^2 + M_2M_3^2 + M_3M_4^2 + M_4M_5^2 + M_5M_1^2 = \frac{5a^2}{2}$$

Dành cho các bạn chuẩn bị thi vào đại học

CHỨNG MINH MỘT HỌ ĐƯỜNG THẲNG LUÔN LUÔN TIẾP XÚC VỚI MỘT ĐƯỜNG TRÒN HAY MỘT CÔNIC CỐ ĐỊNH

TRẦN XUÂN BANG
(Quảng Bình)

1. Các bài toán mở đầu :

1.1. Bài toán 1 : Trên mặt phẳng với hệ tọa độ Đề Các vuông góc, cho một điểm $F(1, 0)$ và một điểm thay đổi $M(-1, m)$ với $m \in \mathbf{R}$.

1) Với mỗi giá trị của m, hãy viết phương trình đường trung trực Δ của đoạn MF.

2) Tìm những điểm trên mặt phẳng mà không thuộc một đường thẳng Δ nào.

3) Chứng minh rằng đường thẳng Δ luôn luôn tiếp xúc với một Parabol cố định.

(Bộ Đề thi Tuyển sinh của Bộ Giáo dục và Đào tạo - Đề 125 - Câu IVa).

Ta bỏ qua lời giải 1) mà chỉ nêu kết quả : Phương trình của (Δ) : $4x - 2my + m^2 = 0$ (1)

2) Gọi $M(x, y)$ là điểm mà không thuộc một đường thẳng (Δ) nào. Khi đó, (1) không có nghiệm m. (1) không có nghiệm m khi và chỉ khi : $\Delta' = y^2 - 4x < 0$.

Tập hợp M là tập hợp những điểm nằm trong Parabol $y^2 = 4x$.

3) Dễ dàng chứng minh được đường thẳng (1) tiếp xúc với Parabol $y^2 = 4x$.

Bài toán 2 :

Cho họ đường thẳng phụ thuộc tham số α

$(x - 1)\cos\alpha + (y - 1)\sin\alpha - 4 = 0$

1. Tìm tập hợp các điểm của mặt phẳng không thuộc bất cứ đường thẳng nào của họ.

2. Chứng minh rằng mọi đường thẳng của họ đều tiếp xúc với một đường tròn cố định.

(Bộ Đề thi Tuyển sinh của Bộ Giáo dục và Đào tạo - Đề 141 - Câu IVa).

1. Sử dụng điều kiện cần và đủ để phương trình $a\cos x + b\sin x = c (a^2 + b^2 > 0)$ vô nghiệm, ta thấy ngay tập hợp các điểm $M(x, y)$ cần tìm thỏa mãn bất phương trình :

$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 < 16$

2. Xét đường tròn $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 16$

Việc chứng minh họ đường thẳng đã cho tiếp xúc với đường tròn này khá đơn giản.

2. Nhận xét : Từ hai bài toán đã nêu ở trên ta thấy rằng vấn đề là chỉ ra được Parabol cố định (Bài toán 1) hay đường tròn cố định (Bài toán 2)

Từ đó chúng ta suy ra một phương pháp của loại toán này : Để chỉ ra đường tròn hay cônic cố định mà một họ đường thẳng luôn luôn tiếp xúc, ta đi tìm tập hợp những điểm không thuộc bất cứ đường thẳng nào của họ. Kết quả gợi ý cho ta đường tròn hay cônic mà việc chứng minh họ đường thẳng tiếp xúc với nó là khá đơn giản.

3. Bài toán tương tự :

3.1. Bài toán 3 :

Trong không gian với hệ tọa độ trực chuẩn $Oxyz$, cho đường thẳng D xác định bởi hệ phương trình

$$\begin{cases} x - z\sin\alpha + \cos\alpha = 0 \\ y - z\cos\alpha - \sin\alpha = 0 \end{cases}$$

trong đó α tham số.

1) Xác định véctơ chỉ phương của đường thẳng D.

2) Chứng minh đường thẳng D tạo với trục Oz một góc không phụ thuộc vào α.

3) Viết phương trình hình chiếu D' của D lên mặt phẳng Oxy

4) Chứng minh rằng với mọi giá trị α, đường thẳng D' luôn luôn tiếp xúc một đường tròn cố định thuộc mặt phẳng Oxy (Bộ Đề thi Tuyển sinh của Bộ Giáo dục và Đào tạo. Đề 39 - Câu IVa)

Ta quan tâm đến 3) và 4) và chỉ nêu kết quả : Phương trình hình chiếu D' của D lên mặt phẳng Oxy là $\begin{cases} x\cos\alpha - y\sin\alpha + 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

Tập hợp những điểm M mà họ đường thẳng D' không đi qua có tọa độ (x, y) thỏa mãn bất phương trình $x^2 + y^2 < 1$ (Xét trong mặt phẳng Oxy).

Từ đó suy ra đường tròn cố định cần tìm cho chứng minh ở 4) là

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

3.2. Bài toán 4 :

Xin xem Đề 117. Câu IVa. Bộ đề thi Tuyển sinh của Bộ Giáo dục và Đào tạo.

3.3. Bài toán 5 :

Trong mặt phẳng Oxy cho họ đường thẳng $(D_m) : (4 - m^2)x - 6my + 3(4 + m^2) = 0$

Chứng minh rằng họ đường thẳng (D_m) luôn luôn tiếp xúc với một Cô nic cố định.

Giải (vắn tắt) :

Phương trình (D_m) viết lại :

$(3 - x)m^2 - 6ym + 4x + 12 = 0$ (*)

$M(x, y)$ không thuộc bất cứ đường thẳng nào của họ (D_m)) khi và chỉ khi phương trình (*) không có nghiệm m.

$\Leftrightarrow 9y^2 - (3 - x)(4x + 12) < 0$

$\Leftrightarrow 9y^2 + 4x^2 < 36$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} < 1.$

Xét Elíp $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1.$

Sử dụng điều kiện cần và đủ để đường thẳng tiếp xúc với Elíp, ta thấy họ (D_m) tiếp xúc với Elíp cố định $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1.$

3.4 Bài toán 6 : Chứng minh rằng một góc vuông có đỉnh thay đổi trên một đường thẳng cố định, một cạnh của nó đi qua một điểm cố định thì cạnh kia luôn tiếp xúc với một cô nic cố định.

Giải : Gọi điểm cố định là A, đường thẳng cố định là Δ. Góc vuông $\widehat{AMt}$ thay đổi, có M di động trên Δ. Chọn hệ trục tọa độ Oxy vuông góc có $y'Oy$ trùng với Δ, $x'Ox$ đi qua A và vuông góc với Δ, với $A\left(\dfrac{p}{2}, 0\right)$ trong đó $p > 0$. Với tham số m, giả sử $M(0, m)$. Dễ dàng viết được phương trình của tia $Mt : px - 2my + 2m^2 = 0$ (*)

Giả sử (x, y) là tọa độ những điểm không thuộc tia Mt nào. Khi đó pt (*) vô nghiệm m.

$\Leftrightarrow \Delta' = y^2 - 2px < 0$

Xét Parabol $y^2 = 2px$. Dễ dàng chứng minh được rằng : Họ đường thẳng (*) luôn luôn tiếp xúc với Parabol này.

3.5. Bài toán 7 :

Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $x^2 + y^2 = 4$ và điểm $A(1,0)$. Một điểm M thay đổi trên đường tròn. Chứng minh rằng, đường thẳng vuông góc với AM tại M luôn luôn tiếp xúc với một cô nic cố định.

Giải : $M\ (2\cos\alpha, 2\sin\alpha)$, $\alpha \in [0 ; 2\pi]$

Đường thẳng Δ vuông góc với AM tại M có phương trình : $(2\cos\alpha - 1)x + (2\sin\alpha)y + D = 0$. Vì M thuộc đường tròn $\Rightarrow D = 2\cos\alpha - 4 \Rightarrow$ Phương trình (Δ) : $(2\cos\alpha - 1)x + (2\sin\alpha)y + 2\cos\alpha - 4 = 0$ (*)

Giả sử (x, y) là tọa độ những điểm không thuộc đường thẳng Δ nào.

$\Leftrightarrow$Phương trình (*) vô nghiệm α

$\Leftrightarrow 3x^2 + 4y^2 < 12$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{3} < 1$

Xét Elíp : $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{3} < 1$. Dễ dàng chứng minh được rằng họ đường thẳng (*) luôn luôn tiếp xúc với Elíp này.

3.6. Bài toán 8 : Cho đường tròn $x^2 + y^2 = 1$ và điểm $A(2, 0)$. Một điểm M thay đổi trên đường tròn. Chứng minh rằng đường thẳng vuông góc với AM tại M luôn luôn tiếp xúc với một cô nic cố định.

Giải tương tự như Bài toán 7. Ta có cô nic cố định là Hypebol : $x^2 - \dfrac{y^2}{3} = 1$

3.7. Chú ý : Bài toán 7 và 8 có thể tổng quát hóa như sau : Cho một điểm M thay đổi trên một đường tròn cố định. Một điểm A cố định. Đường thẳng vuông góc với AM tại M luôn luôn tiếp xúc với một cô nic cố định. Cô nic này là một Elíp nếu điểm A nằm trong đường tròn và là một Hypebol nếu điểm A nằm ngoài đường tròn.

ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC 1995 MÔN TOÁN TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI

(Thời gian làm bài : 180 phút)

PHẦN CHUNG

Câu 1 : Giải phương trình $2\sin^2 x(4\sin^4 x - 1) = \cos 2x(7\cos^2 2x + 3\cos 2x - 4)$

Câu 2 : Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y + z = 7 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 21 \\ xz = y^2 \end{cases}$$

Câu 3 : Tìm tham số m để hệ bất phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} x^2 + (2 - 3m^2)x - 6m^2 < 0 \\ x^2 - (2m+5)x + m^2 + 5m + 6 \geqslant 0 \end{cases}$$

Câu 4 : Tiếp tuyến với đường cong $y = x + \frac{1}{x}$ cắt trục Ox tại $x = \alpha$, cắt trục Oy tại $y = \beta$. Viết phương trình của tiếp tuyến ấy biết $\alpha\beta = 8$.

Câu 5 : Cho hàm số $f(x) = x^4 - 2mx^2 + 4$, m là tham số dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ với $0 \leqslant x \leqslant m$.

Câu 6 : ABC là một tam giác đều. Trên cung $\overset{\frown}{AB}$ của đường tròn ngoại tiếp với tam giác ABC, lấy một điểm M. Biết $MA = 1$, $MB = 2$, tính MC.

Câu 7 : Biết hàm số $f(x) = ax^3 + bx^3 + cx + d$ $(a, b, c, d$ là hằng số, $a \neq 0)$ có cực đại và cực tiểu tại x_1 và x_2, chứng minh rằng : $\frac{f''(x)}{f(x)} < \frac{1}{2}\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)$ với $x \neq x_1$ và $x \neq x_2$.

PHẦN TỰ CHỌN A :

Câu 8a : Tìm các đường tiệm cận của đồ thị của hàm số $y = x\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$.

Câu 9a : Tính $\displaystyle\int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{2}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

Câu 10a : Trong hệ tọa độ trực chuẩn cho họ mặt phẳng P_m có phương trình $2x + y + z - 1 + m(x + y + z + 1) = 0$, m là tham số

1) Chứng minh rằng với mọi m, mặt phẳng P_m luôn đi qua một đường thẳng (d) cố định.

2) Tìm m để mặt phẳng P_m vuông góc với mặt phẳng P_0 có phương trình $2x + y + z - 1 = 0$. Tính khoảng cách từ gốc tọa độ đến đường thẳng *(d)*.

PHẦN TỰ CHỌN B :

Câu 8b : Giải bất phương trình $\log_a(a^{2x} - a^{x-1} + 2a^x - a) > 1$, a là số dương khác 1.

Câu 9b : 1) Chứng minh rằng trong một hình tứ diện, 4 đoạn thẳng nối đỉnh với trọng tâm của mặt đối diện đồng quy tại 1 điểm, điểm này chia mỗi đoạn thẳng ấy theo tỉ số 3 :1 tính từ đỉnh.

2) Chứng minh rằng trong mọi hình tứ diện, nếu R và r là bán kính của hình cầu ngoại tiếp và hình cầu nội tiếp, ta đều có $R \geqslant 3r$.

Chú thích : Thí sinh phải làm phần chung và phần tự chọn *a* hoặc làm phần chung và phần tự chọn b.

Đáp án

Câu 1. Phương trình đã cho

$$\Leftrightarrow 8\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^3 - (1 - \cos 2x) =$$

$$= 7\cos^3 2x + 3\cos^2 2x - 4\cos x$$

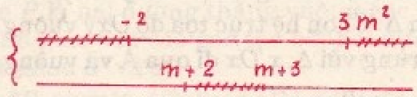
$$\Leftrightarrow 2\cos 2x\,(4\cos^2 2x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 0 \\ \cos 2x = \frac{1}{2} \\ \cos 2x = -\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = (2k+1)\frac{\pi}{2} \\ 2x = \pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ 2x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = (2k+1)\frac{\pi}{4} \\ x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi \end{array}\right.$$

Câu 2. Hai phương trình đầu $\Rightarrow x + z = 7 - y$, $x^2 + y^2 = 21 - y^2 = (7 - y)^2 - 2xz \Rightarrow xz = y^2 - 7y + 14$. So sánh với phương trình cuối $y^2 = y^2 - 7y + 14 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow x + z = xz = 4$. Vậy x, z là nghiệm của phương trình bậc hai $X^2 - 5X + 4 = 0 \Rightarrow X =$ và $X = 4$. Do đó hệ đã cho có hai nghiệm (1, 2, 4) và (4, 2, 1).

Câu 3. Nghiệm của bất phương trình đầu là $-2 < x < 3m^2$, của bất phương trình sau là $x < m + 2$ hoặc $x \geqslant m + 3$. Hệ đã cho có nghiệm



khi khoảng $(m+2, m+3)$ không lấp kín đoạn $[-2, 3m^2]$, điều này khi nào cũng xẩy ra vì khoảng $(m+2, m+3)$ có độ dài bằng 1, còn đoạn $[-2, 3m^2]$ có độ dài ≥ 2

Cách khác. Hệ đã cho có nghiệm khi $(m+2) > -2$ hoặc $m+3 < 3m^2) \Leftrightarrow (m \geq 4$ hoặc $m > \frac{1-\sqrt{37}}{2}$ *hoặc* $m > \frac{1+\sqrt{37}}{2}$), tức là $\forall m$.

Câu 4. $y = x + \frac{1}{x}$ xác định $\forall x \neq 0$. Phương trình tiếp tuyến với đồ thị tại điểm hoành độ x là

$$Y - \frac{x^2+1}{x} = \frac{x^2-1}{x^2}(X-x) \Leftrightarrow$$

$$Y = \frac{x^2-1}{x^2}X + \frac{2}{x} \Rightarrow \alpha = \frac{2x}{1-x^2}$$

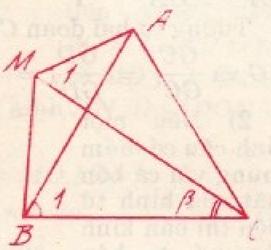
$$\Rightarrow 8 = \frac{4}{1-x^2} \Leftrightarrow 2x^2 - 1 \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$ Vậy phương trình của tiếp tuyến phải tìm là $Y = -X + 2\sqrt{2}$ *và* $Y = -X - 2\sqrt{2}$.

Câu 5. $f(x) = x^4 - 2mx^2 + 4$ xác định $\forall x$; $f'(x) = 4x^3 - 4mx = 4x(x^2 - 0)$ khi $x = 0, x = 1$

x		$-\sqrt{m}$		0		$\sqrt{m}$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↗		↘		↗

Vậy nếu $m \leq \sqrt{m} \Leftrightarrow 0 < m \leq 1$ thì $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = m$, $f(m) = m^4 - 2m^3 + 4$. Còn nếu $m > \sqrt{m} \Leftrightarrow m > n$ *thì* f(x) đạt gốc nhỏ nhất tại $x = \sqrt{m}$, $f(\sqrt{m}) = 4 - m^2$.

Câu 6. Cách 1. Trong ΔMAB có $AB^2 = MA^2 + MB^2 - 2MA.MB\cos\widehat{AMB}$, nhưng $\widehat{AMB} = 120^o \Rightarrow AB = \sqrt{7}$. ΔMAC có $\hat{M}_1 = \hat{B}_1 = 60^o \Rightarrow AC^2 = MA^2 + MC^2 - 2MA.MC \cos\hat{M}_1$.



Đặt $MC = x$, ta có $7 = 1 + 2^2 - x \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow x = 3$ và $x = -2$ (loại) $\Rightarrow MC = 3$.

Cách 2. $AB = \sqrt{7}$ như cách 1. Đặt $\widehat{MAC} = \alpha \Rightarrow \widehat{MBC} = \pi - \alpha$. Định lí hàm cosin áp dụng vào các ΔMAC, MBC cho

$$\cos\alpha = \frac{AC^2 + AM^2 - x^2}{2AC.AM} = -\cos(\pi - \alpha) = \frac{BC^2 + BM^2 - x^2}{2BC.BM}$$

$$\Leftrightarrow \frac{8 - x^2}{2\sqrt{7}} = \frac{11 - x^2}{4\sqrt{7}} \Leftrightarrow 3x^2 = 27 \Leftrightarrow x = 3$$

Cách 3. $AB = \sqrt{7}$ như cách 1. Đặt $\widehat{BCM} = 3$. Định lí hàm sin áp dụng vào ΔBCM,

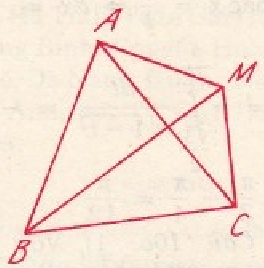
$$\Rightarrow \frac{2}{\sin\beta} = \frac{MC}{\sin(120^o - \beta)} = \frac{\sqrt{7}}{\sin 60^o} = 2\sqrt{\frac{7}{3}} \Rightarrow$$

$$\sin\beta = \sqrt{\frac{3}{7}} \Rightarrow \sin(120^o - \beta) = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{7}} \Rightarrow$$

$$MC = 2\sqrt{\frac{7}{3}}\sin(120^o - \beta) = 3$$

Cách 4. Thực hiện phép quay tâm A góc $+60^o$, điểm B có ảnh là điểm C, điểm M có ảnh là điểm I trên MC sao cho AMI là Δ đều (vì $\hat{M}_A = 60^o$. Do đó ảnh của AMB là $\Delta AIC \Rightarrow MB = IC \Rightarrow MC = MI + IC = MA + MB = 3$.

Chú thích. Hai điểm AB chia đường tròn ngoại tiếp thành hai cung : cung nhỏ AB và cung lớn AB. Nếu lấy điểm M trên cung lớn AB, chẳng hạn như ở hình vẽ bên thì do tính chất hình học đã nêu ở cách 4, ta có $MB = MA + MC \Rightarrow MC = MB - MA = 1$. Cũng có thể trong trường hợp này tính AB như ở cách 1, được $AB = \sqrt{3} \Rightarrow \Delta ABM$ vuông góc ở $A \Rightarrow M$ là điểm giữa cung nhỏ AC.



Câu 7. $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \Rightarrow f''(x) = 6ax + 26 \Rightarrow f'''(x) = 6a$. $f'(x)$ là tam thức bậc hai, theo giả thiết, có 2 nghiệm $x_1, x_2 \Rightarrow \Delta' = b^2 - 3ac > 0$ (1) Ta cần chứng minh rằng với $x \neq x_1$ và $x \neq x_2$

$$\frac{6a}{3ax^2 + 2bx + c} < \frac{1}{2}\left(\frac{6ax + 2b}{3ax^2 + 2bx + c}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$6a(3ax^2 + 2bx + c) < \frac{1}{2}(6ax + 2b)^2$$

$$\Leftrightarrow 18a^2x^2 + 12abx + 6ac < 18a^2x^2 + 12abx + 2b^2 \Leftrightarrow 2b^2 > 6ac$$

đó chính là điều kiện (1) đã được suy ra từ giả thiết

Câu 8a. $y = x\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ xác định khi $x \leq -1$ hoặc $x > 1$. Vì $\lim\limits_{x \to 1+\infty} y = \infty$ nên đồ thị có tiệm cận đứng $x = 1$. Vì $\lim\limits_{x \to \infty} y = \infty$ nên đồ thị có thể có tiệm cận xiên.

$$a = \lim_{x \to \infty}\frac{y}{x} = \lim_{x \to \infty}\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} = 1$$

$$b = \lim_{x \to \infty}(y - x) = \lim_{x \to \infty} x\left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - 1\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x\left(\dfrac{x+1}{x-1}-1\right)}{\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}+1} = 1$$

Vậy đồ thị có tiệm cận xiên là $y = x+1$

Câu 9a. Đổi biến $u = \sqrt{x^2-1} \Rightarrow u^2 = x^2-1$

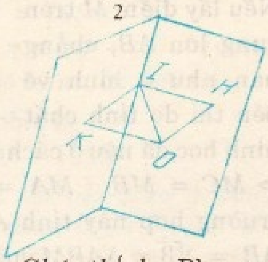
$$\Rightarrow 2udu = 2xdx \Rightarrow I = \int_{\frac{1}{\sqrt3}}^{1} \frac{du}{1+u^2} =$$

$$= \operatorname{arctg} u \Big|_{\frac{1}{\sqrt6}}^{1} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}.$$

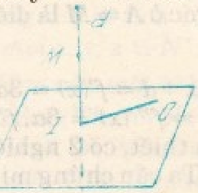
Hoặc $x = \frac{1}{t} \Rightarrow dx = -\frac{dt}{t^2} \Rightarrow$

$$I = -\int_{\frac{\sqrt3}{2}}^{\frac{1}{\sqrt2}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = -\arcsin t \Big|_{\frac{\sqrt3}{2}}^{\frac{1}{\sqrt2}} =$$

$$= \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$$



Câu 10a. 1) Với mọi m, mặt phẳng P_m luôn đi qua đường thẳng (d) có phương trình $2x+y+z-1=0$, $x+y+z+1=0$



Chú thích. Phương trình đã cho là phương trình của chùm mặt phẳng có trục *cd*.

2) Điều kiện để hai mặt phẳng P_m và P_o vuông góc với nhau là hai vectơ pháp của chúng vuông góc với nhau $\Leftrightarrow (2+m)2+m+1+m+1 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{3}{2}$.

Vậy mặt phẳng $P_{-\frac{3}{2}}$ có phương trình $x-y-z-5=0$ vuông góc với mặt phẳng P_o. Khoảng cách OH từ gốc tọa độ đến P_o bằng $\frac{1}{\sqrt6}$. Khoảng cách OK từ O đến $P_{-\frac{3}{2}}$ bằng $\frac{5}{\sqrt3}$. Vì $P_o \perp P_{-\frac{3}{2}}$ nên $OHIK$ là hình chữ nhật. Vậy khoảng cách OI từ O đến đường thẳng (d) được cho bởi $OI^2 = OH^2 + OK^2 \Rightarrow OI = \sqrt{\frac{17}{2}}$.

Chú thích. 1) Có thể tính OI như sau : lập phương trình mặt phẳng Q đi qua O vuông góc với (d), tìm giao điểm I của Q với (d), từ đó tính OI. (d) có vectơ chỉ phương $\vec{v} = \vec{n_1} \wedge \vec{m_2}$, trong đó $\vec{n_1}(2,1,1)$ là vectơ pháp của mặt phẳng $2x+y+z-1=0$, $\vec{n_2}(1,1,1)$ là vectơ pháp của mặt phẳng $x+y+z+1=0 \Rightarrow \vec{v}$ có các tọa độ $(0,-1,1)$ đó cũng là vectơ pháp của mặt phẳng Q. Vậy phương trình của Q là $y-z=0$ (2). Để tìm phương trình tham số của (d), ta tìm một điểm M trên (d), chẳng hạn $M(2,-3,0)$. Vậy phương trình tham số của (d) là $x=2$ (3), $y = -3-t$ (4), $z = t$ (5). Tọa độ của I là nghiệm của hệ (2), (3), (4), (5) $\Rightarrow I\left(2, -\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow OI = \sqrt{4+\frac{9}{4}+\frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{34}}{2}.$$

2) Cũng có thể dùng công thức để tính OI

Câu 8b. Bất phương trình đã cho có nghĩa khi $a^{2x} - (a-2)a^2 - a > 0$ (6). Giả sử $a > 1$. Bất phương trình đã cho $\Leftrightarrow a^{2x} - (a-2)a^x - a > a$ (điều này kéo theo (6)) $\Leftrightarrow a^{2x} - (a-2)a^x - 2a > 0 \Rightarrow a^x > a \Rightarrow x > 1$.

Giả sử $a < 1$. Bất phương trình đã cho $\Leftrightarrow a^{2x} - (a-2)a^x - a < a$. Kết hợp với (6), ta có $0 < a^{2x} - (a-2)a^x - a < a$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^{2x} - (a-2)a^x - 2a < 0 \\ a^{2x} - (a-2)a^x - a > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^x < a \\ a^x > \dfrac{a-2+\sqrt{a^2+4}}{2} \end{cases}$$

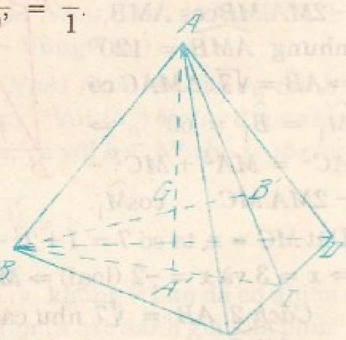
$$\Rightarrow 1 < x < \log_a \frac{a-2+\sqrt{a^2+4}}{2}$$

Câu 9b. 1) Gọi A', B', C', D' theo thứ tự là trọng tâm các mặt BCD, CDA, DAB, ABC. Hai đoạn AA', BB' cùng nằm trong mặt phẳng ABI, với I là giao điểm của CD. Chúng giao nhau ở G.

Trong ΔABI ta có $\frac{IA'}{IB} = \frac{IB'}{IA} = \frac{1}{3} \Rightarrow A'B' \,//\, AB$ và $\frac{A'B'}{AB} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{GA'}{GA} = \frac{GB'}{GB} = \frac{1}{3} \Rightarrow$

$$\frac{GA}{GA'} = \frac{GB}{GA'} = \frac{3}{1}.$$

Tương tự hai đoạn CC', DD' cũng đồng quy ở G và $\frac{GC}{GC'} = \frac{GD}{GD'} = \frac{3}{1}$.



2) Nếu một hình cầu có điểm chung với cả bốn mặt của hình tứ diện thì bán kính của nó $\geqslant$ bán kính của hình cầu nội tiếp trong hình tứ diện, dấu $=$ xẩy ra khi và chỉ khi hình cầu ấy trùng với hình cầu nội tiếp. Phép đồng dạng phối cảnh (vị tự) tâm G tỷ số $-\frac{1}{3}$ biến hình tứ diện $ABCD$ thành hình tứ diện $A'B'C'D'$ $\Rightarrow$ bán kính của hình cầu ngoại tiếp với hình tứ diện $A'B'C'D'$ bằng $\frac{R}{3}$. Hình cầu ấy có các điểm chung A', B', C', D' với cả bốn mặt của hình tứ diện $ABCD$ $\Rightarrow$ $\frac{R}{3} \geqslant r \Rightarrow R \geqslant 3r$.

TRẦN XUÂN HIẾN

Học sinh tìm tòi

MỘT BẤT ĐẲNG THỨC MỚI TRONG TAM GIÁC

Sau khi đọc bài báo "*Mở rộng kết quả của Toricelli*" ("Toán học và tuổi trẻ" tháng 9/1994), tôi nhận thấy trong tam giác có một bất đẳng thức đáng chú ý.

Định lí 1 : *Cho tam giác ABC. M là một điểm trong tam giác đó. Khi đó với mọi điểm N ta có :*

$$\sin\widehat{BMC}.NA + \sin\widehat{CMA}.NB + \sin\widehat{AMB}.NC \geqslant$$
$$\geqslant \sin\widehat{BMC}.MA + \sin\widehat{CMA}.MB + \sin\widehat{AMB}.MC.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi N trùng với M.

Để bạn đọc tiện theo dõi, trước khi chứng minh định lí 1, tôi xin nhắc lại kết quả cơ bản mà bài báo nêu trên đã đạt được, xem như là bổ đề.

Bổ đề : Cho tam giác ABC và ba số dương x, y, z.

A – Giả sử x, y, z không phải là độ dài ba cạnh của một tam giác nào đó. Khi đó, nếu

1. $y + z \leqslant x$ thì $(xMA + yMB + zMC)$ nhỏ nhất khi M trùng A.

2. $z + x \leqslant y$ thì $(xMA + yMB + zMC)$ nhỏ nhất khi M trùng B.

3. $x + y \leqslant z$ thì $(xMA + yMB + zMC)$ nhỏ nhất khi M trùng C.

B – Giả sử x, y, z là độ dài ba cạnh của một tam giác nào đó. Ta kí hiệu tam giác đó là $A'B'C'$ ($B'C' = x$, $C'A' = y$, $A'B' = z$). Khi đó, nếu :

1. $Max\{\widehat{A} + \widehat{A'}, \widehat{B} + \widehat{B'}, \widehat{C} + \widehat{C'}\} < 180^o$ thì $(xMA + yMB + zMC)$ nhỏ nhất khi :

$$\begin{cases} \widehat{BMC} = 180^o - \widehat{A}. \\ \widehat{CMA} = 180^o - \widehat{B}. \\ \widehat{AMB} = 180^o - \widehat{C}. \end{cases}$$

2. $\widehat{A} + \widehat{A'} \geqslant 180^o$ thì $(xMA + yMB + zMC)$ nhỏ nhất khi M trùng A.

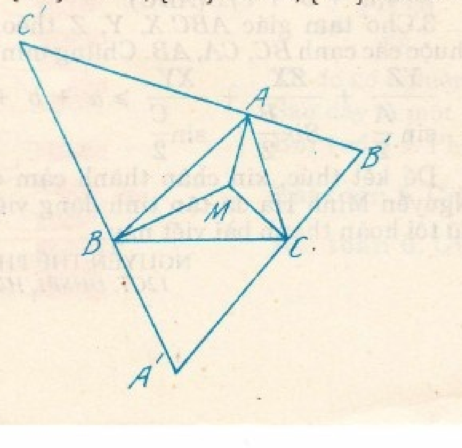
3. $\widehat{B} + \widehat{B'} \geqslant 170^o$ thì $(xMA + yMB + zMC)$ nhỏ nhất khi M trùng B.

4. $\widehat{C} + \widehat{C'} \geqslant 180^o$ thì $(xMA + yMB + zMC)$ nhỏ nhất khi M trùng C.

Nào, bây giờ chúng ta chứng minh định lí 1.

Qua A, B, C kẻ các đường thẳng a, b, c theo thứ tự vuông góc với AM, BM, CM (h.1).

Đặt : $\{A'\} = b \cap c$, $\{B'\} = c \cap a$, $\{C'\} = a \cap b$.



Ta thấy :

$$\begin{cases} \widehat{BMC} = 180^o - \widehat{B'A'C'} \\ \widehat{CMA} = 180^o - \widehat{C'B'A'} \\ \widehat{AMB} = 180^o - \widehat{A'C'B'} \end{cases}$$

Vậy theo bổ đề trên ta có :

$$B'C'.NA + C'A'.NB + A'B'.NC \geqslant$$
$$B'C'.MA + C'A'.MB + A'B'.MC \ (1).$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi N trùng M.

Áp dụng định lí hàm số sin cho tam giác $A'B'C'$ ta có :

$$\frac{B'C'}{\sin\widehat{B'A'C'}} = \frac{C'A'}{\sin\widehat{C'B'A'}} = \frac{A'B'}{\sin\widehat{A'C'B'}}$$

Suy ra :

$$\frac{B'C'}{\sin\widehat{BMC}} = \frac{C'A'}{\sin\widehat{CMA}} = \frac{A'B'}{\sin\widehat{AMB}} \ (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra :

$$\sin\widehat{BMC}.NA + \sin\widehat{CMA}.NB + \sin\widehat{AMB}.NC \geqslant$$
$$\sin\widehat{BMC}.MA + \sin\widehat{CMA}.MB + \sin\widehat{AMB}.MC.$$

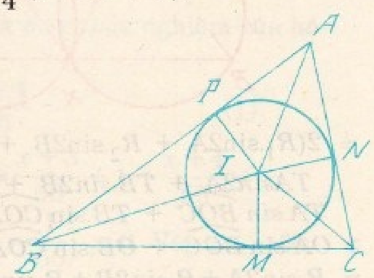
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi N trùng M.

Định lí 1 khá sâu sắc. Những ví dụ sau chứng minh điều đó.

Bài toán 1: Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng :

$$\cos\frac{A}{2}.m_a + \cos\frac{B}{2}.m_b + \cos\frac{C}{2}.m_c \geqslant$$
$$\geqslant \frac{3}{4}(a + b + c).$$

Giải : Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp, G là trọng tâm tam giác ABC.M, N, P theo thứ tự là tiếp điểm của đường tròn nội tiếp với các cạnh BC, CA, AB (h.2).



Ta có

$$\begin{cases} \sin\widehat{BIC} = \sin(90^o + \frac{A}{2}) = \cos\frac{A}{2} \\ \sin\widehat{CIA} = \sin(90^o + \frac{B}{2}) = \cos\frac{B}{2} \\ \sin\widehat{AIB} = \sin(90^o + \frac{C}{2}) = \cos\frac{C}{2}. \end{cases}$$

Vậy theo định lí :

$$\cos\frac{A}{2}.GA + \cos\frac{B}{2}.GB + \cos\frac{C}{2}.GC \geqslant$$
$$\geqslant \cos\frac{A}{2}.IA + \cos\frac{B}{2}.IB + \cos\frac{C}{2}.IC.$$
$$\Rightarrow \frac{3}{2}(\cos\frac{A}{2}.m_a + \cos\frac{B}{2}.m_b + \cos\frac{C}{2}.m_c) \geqslant$$

$\geq AN + BP + CM.$

$\Rightarrow \frac{2}{3}.(\cos\frac{A}{2}.m_a + \cos\frac{B}{2}.m_b + \cos\frac{C}{2}.m_c) \geq$
$\geq (a + b + c)/2$

$\Rightarrow \cos\frac{A}{2}.m_a + \cos\frac{B}{2}.m_b + \cos\frac{C}{2}m_c \geq$
$\geq \frac{3}{4}(a + b + c).$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow G = I \Leftrightarrow$ tam giác ABC đều.

Bài toán 1 rất khó. Nó là sự mở rộng thực sự của bất đẳng thức quen biết :

$$m_a + m_b + m_c > \frac{3}{4}(a + b + c).$$

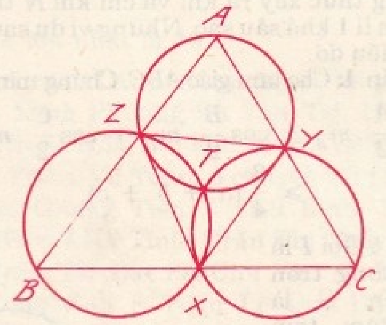
Bài toán 2 : Cho tam giác nhọn ABC, các điểm X, Y, Z theo thứ tự thuộc các cạnh BC, CA, AB. Chứng minh rằng :

$$2(YZ.\cos A + ZX.\cos B + XY.\cos C) \geq BC.\cos A + CA.\cos B + AB.\cos C.$$

Giải : Giả sử $(O_1, R_1), (O_2, R_2), (O_3, R_3)$ là đường tròn ngoại tiếp các tam giác AYZ, BZX, CXY. Dễ thấy ba đường tròn này cùng đi qua một điểm. Ta kí hiệu điểm đó là T (h.3).

Gọi (O, R) là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Nhờ định lí hàm số sin và định lí ta có :

$2(YZ.\cos A + ZX.\cos B + XY.\cos C) =$
$4(R_1.\sin A.\cos A + R_2.\sin B.\cos B + R_3.\sin C.\cos C)$



$= 2(R_1.\sin 2A + R_2.\sin 2B + R_3.\sin 2C) \geq$
$TA\sin 2A + TB.\sin 2B + TC.\sin 2C =$
$TA.\sin\widehat{BOC} + TB.\sin\widehat{COA} + TC.\sin\widehat{AOB}$
$\geq OA.\sin\widehat{BOC} + OB.\sin\widehat{COA} + OC.\sin\widehat{AOB}$
$= R.\sin 2A + R.\sin 2B + R.\sin 2C =$
$BC.\cos A + CA.\cos B + AB.\cos C$

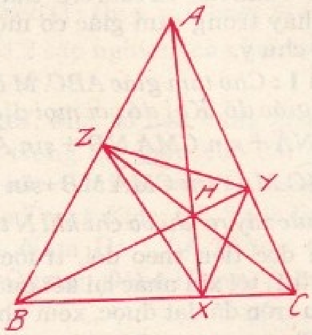
Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} TA = 2R_1 \\ TB = 2R_2 \\ TC = 2R_3 \\ T \equiv O \end{cases} \Leftrightarrow X, Y, Z$ theo thứ tự là trung điểm các cạnh BC, CA, AB.

Tôi đã tìm thấy bài toán 2 trong một tài liệu toán sơ cấp nước ngoài. Nhưng chỉ đến khi phát hiện ra định lí 1 tôi mới giải được nó.

Bài toán sau đây khá quen thuộc, tuy nhiên lời giải đưa ra ở đây khác hẳn với lời giải thông thường nhờ phép đối xứng trục.

Bài toán 3 : Cho tam giác nhọn ABC, các điểm X, Y, Z theo thứ tự thay đổi trên các cạnh BC, CA, AB. Tìm vị trí của X, Y, Z để chu vi tam giác XYZ nhỏ nhất.

Giải : Gọi $(O_1, R_1), (O_2, R_2), (O_3, R_3)$ là đường tròn ngoại tiếp các tam giác AYZ, BZX, CXY. Dễ thấy các đường tròn trên cùng đi qua một điểm. Ta kí hiệu điểm đó là T (h.3). Gọi H là trực tâm tam giác ABC (h.4). Nhờ định lí hàm số sin và định lí 1, ta có :



$XY + YZ + ZX =$
$= 2R_1.\sin A + 2R_2.\sin B + 2R_3.\sin C \geq$
$TA.\sin A + TB.\sin B + TC.\sin C =$
$TA.\sin(180^o - A) + TB.\sin(180^o - B) +$
$+ TC.\sin(180^o - C) =$
$TA.\sin\widehat{BHC} + TB.\sin\widehat{CHA} + TC.\sin\widehat{AHB} \geq$
$HA.\sin\widehat{BHC} + HB.\sin\widehat{CHA} + HC.\sin\widehat{AHB}$

Dễ dàng chứng minh rằng :

$HA.\sin\widehat{BHC} + HB.\sin\widehat{CHA} + HC.\sin\widehat{AHB}$
$= 4R.\sin A.\sin B.\sin C.$

Vậy : $XY + YZ + ZX \geq 4R\sin A.\sin B.\sin C.$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} TA = 2R_1 \\ TB = 2R_2 \\ TC = 2R_3 \\ T = H \end{cases}$

$\Leftrightarrow X, Y, Z$ theo thứ tự là chân các đường cao hạ từ A, B, C của tam giác ABC (h.4).

Bài toán 3 đã được giải quyết. Kết luận cụ thể xin dành cho bạn đọc.

Ngoài ba bài toán trên, nhờ định lí 1 ta còn có thể giải được nhiều bài toán khác. Xin nêu ra đây một vài bài xem như bài tập.

1. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng :

$$\frac{m_a}{\sin\frac{A}{2}} + \frac{m_b}{\sin\frac{B}{2}} + \frac{m_c}{\sin\frac{C}{2}} \geq \frac{a^2 + b + c}{2r}$$

2. Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng :
$(b + c).a.l_a + (c + a).b.l_b + (a + b).c.l_c \geq$
$\geq 4(a + b + c).S(ABC).$

3. Cho tam giác $ABC.X, Y, Z$ theo thứ tự thuộc các cạnh BC, CA, AB. Chứng minh rằng :

$$\frac{YZ}{\sin\frac{A}{2}} + \frac{ZX}{Sin\frac{B}{2}} + \frac{XY}{\sin\frac{C}{2}} \geq a + b + c$$

Để kết thúc, xin chân thành cảm ơn thầy Nguyễn Minh Hà đã tận tình động viên, giúp đỡ tôi hoàn thành bài viết này.

NGUYỄN THẾ PHƯƠNG
12CT, ĐHSP1, Hà Nội

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI TOÁN LỚP 12 CỦA TỈNH QUẢNG NGÃI NĂM HỌC 1995 - 1996

Ngày thi : 08.12.1995

Thời gian làm bài : 180 phút (không kể thời gian giao đề)

Bài 1 : Hàm số $f(x)$ xác định với mọi số thực x và là nghiệm nhỏ nhất của phương trình sau (ẩn y) :

$$y^3 + 2xy^2 - (x+1)^2y = 2x(x+1)^2$$

Hãy tìm hàm số $f(x)$ và vẽ đồ thị của nó. Suy ra giá trị lớn nhất của $f(x)$

Bài 2 : Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} y^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 0 \\ z^3 - 6y^2 + 12y - 8 = 0 \\ x^3 - 6z^2 + 12z - 8 = 0 \end{cases}$$

Bài 3 : Tứ giác lồi $ABCD$ có bán kính các đường tròn nội tiếp các tam giác ABC, BCD, CDA, DAB bằng nhau. Chứng minh rằng $ABCD$ là hình chữ nhật.

Bài 4 : Mạng lưới giao thông trong thành phố quy định cho ô tô buýt được cấu tạo sao cho :

a) Mỗi tuyến đường có ba chỗ dừng.

b) Hai tuyến đường bất kì hoặc không có chỗ dừng chung hoặc chỉ có một chỗ dừng chung.

Tìm số lớn nhất các tuyến đường trong thành phố, biết rằng có tất cả 9 chỗ dừng khác nhau.

Ngày thi : 09.12.1995

Thời gian làm bài : 180 phút (không kể thời gian giao đề)

Bài 1 : Tìm tất cả các hàm số $f(x)$ có tập xác định và tập giá trị là đoạn $[0, 1]$ thỏa mãn các điều kiện :

a) $f(x_1) \neq f(x_2)$ *nếu* $x_1 \neq x_2$

b) $2x - f(x) \in [0,1]$ với $\forall x \in [0,1]$

c) $f(2x - f(x)) = x$

Bài 2 : Giải thích tại sao tổng của tất cả các số có dạng $\frac{1}{p.q}$ với p, q là các số tự nhiên và $1 \leqslant p < q \leqslant 1996$ không phải là số nguyên tố.

Bài 3 : Cho hình chóp $SABC$ có đáy ABC là tam giác đều tâm O. Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên các đường thẳng OA, OB, OC.

a) Chứng minh rằng, trong 3 đoạn OA_1, OB_1, OC_1 có một đoạn có độ dài bằng tổng độ dài hai đoạn còn lại.

b) Gọi α, β, γ là góc tạo bởi tia OS lần lượt với các tia OA, OB, OC. Chứng minh rằng

$$\cos^3\alpha + \cos^3\beta + \cos^3\gamma = 3\cos\alpha.\cos\beta.\cos\gamma$$

Bài 4 : Trong tập hợp S xác định quan hệ "$\to$" với mỗi cặp phần tử của S có các tính chất sau :

a) Với $a, b \in S$, $a \neq b$ chỉ có đúng một trường hợp được thực hiện $a \to b$ hoặc $b \to a$.

b) Đối với a, b, $c \in S$ khác nhau nếu đã có $a \to$ b, b $\to$ c, thì có c $\to$ a.

Hỏi số lớn nhất các phần tử của S có thể là bao nhiêu ?

NGUYỄN VĂN MINH

Ý KIẾN BẠN ĐỌC

Trong bài : "Hình học hóa nội dung và cách giải một số bài toán Đại số". Tạp chí THTT 202 tháng 4/94, có bài tập : *Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số* $y = \sqrt{x^2 - x + 1} + \sqrt{x^2 - \sqrt{3}x + 1}$. Tác giả cho đáp số $y = 2$? Kết quả này sai !

Thật vậy : Với $x = \sqrt{3} - 1$ (miền xác định của hàm số) thì $y = \sqrt{2 - \sqrt{3}}\,.\,(\sqrt{3} + 1) < 2$ (chứng minh dễ dàng). Cho nên $y = 2$ không phải là giá trị nhỏ nhất của hàm số. Cũng theo phương pháp hình học, cách giải bài này như sau :

$$y = \sqrt{(x - \frac{1}{2})^2 + (0 - \frac{\sqrt{3}}{2})^2} + \sqrt{(x - \frac{\sqrt{3}}{2})^2 + (0 - \frac{1}{2})^2} \qquad (1)$$

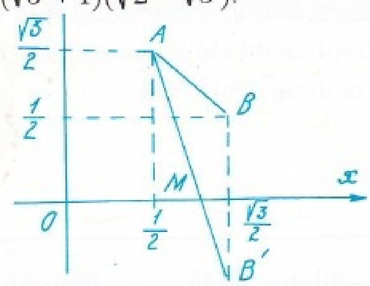
Gọi M, $(x\,;0)$ $A\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. $B\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$ thì việc tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số (1) tương đương với bài toán : Tìm khoảng cách ngắn nhất $d = MA + MB$. Ở đây A, B cố định, M chạy trên trục hoành Ox.

+ $B'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ đối xứng $B\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{1}{2}\right)$ qua trục hoành.

+ Nối AB' cắt OX ở M cần tìm. Phương trình đường thẳng AB' là :

$$y = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}}\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

AB' cắt Ox tại M, M có tung độ $y = 0$ nên $x = \sqrt{3} - 1$. Khi đó giá trị nhỏ nhất của hàm số (1) $y = (\sqrt{3}+1)(\sqrt{2-\sqrt{3}})$.



Nhóm học sinh 10A Trường PTTH Nguyễn Trãi quận Ba Đình – Hà Nội.

Giải trí TOÁN HỌC

Giải đáp bài

Vui năm mới

Gọi a, b, c, d là các số cần phân tích.

Theo đầu bài ta có

$$a + b + c + d = 1996 \quad (1)$$

$$a + 1 = b - 2 = 3.c - d : 4 \quad (2)$$

Từ (2) ta có :

$$a = 3c - 1$$
$$b = 3c + 2 \quad (3)$$
$$d = 12c$$

Theo (1) ta có :

$$(3c - 1) + (3c + 2) + c + (12c) = 1996$$

hay $19c = 1995$

Từ đó suy ra $c = 1995/19 = 105$

và từ (3) ta có : $a = 314$, $b = 317$ và $d = 1260$

Vậy $1996 = 314 + 317 + 105 + 1260$.

(Theo *Phạm Viết San*, $6A_1$, Trường Chuyên, TX. Bạc Liêu)

Nhận xét : Nhiều bạn lớp 6, lớp 7, lớp 8, lớp 9 cũng có các giải đáp tốt.

BÌNH PHƯƠNG

TRÒ CHƠI ĐOÁN CẦU

Trong một trò chơi có thưởng, người ta quy định như sau :

Có 6 quả cầu gồm 3 quả xanh và 3 quả đỏ được để trong 3 hòm kín. Mỗi hòm 2 quả. Ở ngoài mỗi hòm có ghi các chữ : XX ở hòm thứ nhất, ĐĐ ở hòm thứ hai và XĐ ở hòm thứ ba. Điều đó có nghĩa là hòm thứ nhất đựng 2 quả cầu xanh, hòm thứ hai đựng 2 quả cầu đỏ và hòm thứ ba đựng 1 quả cầu xanh, 1 quả cầu đỏ. Nhưng thực tế số quả cầu xanh và số quả đỏ đựng trong mỗi hòm đều không đúng với các chữ đã ghi ở phía ngoài mỗi hòm.

Người chơi được lấy ra một quả cầu tùy ý ở một trong 3 hòm nói trên và không được nhìn vào trong các hòm đó. Sau khi quan sát màu sắc của quả cầu lấy ra đó mà nói đúng được số quả cầu xanh và số quả cầu đỏ ở trong mỗi hòm thì được thưởng.

Nam vào chơi và sau khi đã quan sát màu sắc của quả cầu lấy ra Nam đã nói đúng số quả cầu xanh và số quả cầu đỏ trong mỗi hòm. Các bạn tìm giúp xem Nam đã làm như thế nào mà tài vậy !

NGÔ HÂN

Bạn có biết

TRILLION LÀ GÌ

Trong hệ đếm thập phân hàng ngày chúng ta quen dùng các con số như chục, trăm, nghìn, triệu. Vậy triệu là gì ? Là một nghìn nghìn. Một nghìn triệu là một tỉ. Thế nhưng, trong tính toán vẫn cần đến con số lớn hơn và do đó đã xuất hiện từ TRILLION là 1.000 tỉ. Để diễn đạt con số này chúng ta viết số 1 kèm theo 12 số không (0).

Trillion ít được dùng trong sinh hoạt. Ngoài ra, các nhà toán học của các nước khác nhau đã dùng Trillion để chỉ 2 con số khác nhau : Số 1 với 10 số không và số 1 với 18 số không. Ở Nga người ta dùng con số đầu.

TUẤN THANH

Theo báo Nga "24 giờ"

ISSN : 8066 - 8035
Chỉ số : 12884
Mã số : 8BT27M6

Sắp chữ tại TTVT Nhà xuất bản Giáo dục
In tại Xưởng in Nhà xuất bản Giáo dục
In xong và nộp lưu chiểu tháng 3/1996

Giá : 2000đ
Hai nghìn đồng