BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ★ HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

2 (224)
1996
NĂM THỨ 33

TẠP CHÍ RA NGÀY 15 HÀNG THÁNG

- ĐỊNH LÍ ROLLE VÀ NHỮNG ÁP DỤNG
- ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI TOÁN 9 HẢI PHÒNG
- MỞ RỘNG CÁC BẤT ĐẲNG THỨC
- TIẾP TỤC CÁC TÍNH CHẤT ĐẸP CỦA ĐA GIÁC ĐỀU
- LỜI GIẢI CÁC BÀI TOÁN THI OLYMPIC TOÁN QUỐC TẾ

Học sinh Chuyên ĐHTH Hà Nội cắm trại mừng kỉ niệm 30 năm thành lập khối Chuyên toán

TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ
MATHEMATICS AND YOUTH

MỤC LỤC

Trụ sở tòa soạn :
45B Hàng Chuối, Hà Nội ĐT: 213786
231 Nguyễn Văn Cừ, TP Hồ Chí Minh ĐT: 356111

Biên tập và trị sự : VŨ KIM THỦY
Trình bày : TRỌNG THIỆP

Tìm hiểu sâu thêm toán học phổ thông

ĐỊNH LÍ ROLLE VÀ NHỮNG ÁP DỤNG

ĐÀM VĂN NHỈ
Thái Bình

Trong sách "Giải tích 12" chúng ta đã được học định lí Lagrange :

Cho hàm số $y = f(x)$ - xác định và liên tục trên $[a, b]$ có $f'(x) < +\infty$ trong (a, b). Khi đó có $c \in (a, b)$ để
$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$, (1).

Trong bộ đề thi vào ĐH và CĐ cũng đã có một số bài tập mà khi giải nó ta chỉ cần vận dụng định lí trên cùng với việc đánh giá $f'(c)$. Ở đây tôi muốn cùng các bạn khai thác thêm định lí đó.

Nếu trong (1) các bạn cho $f(a) = f(b)$ thì $f'(c) = 0$. Đây chính là nội dung định lí Rolle, được phát biểu như sau :

Nếu $y = f(x)$ - xác định và liên tục trên $[a, b]$, có $f'(x) < +\infty$ trong (a, b), $f(a) = f(b)$ thì có $c \in (a, b)$ để $f'(c) = 0$.

Như vậy định lí Rolle là trường hợp đặc biệt của định lí Lagrange.

Định lí Rolle được vận dụng rất nhiều trong các bài toán có liên quan đến nghiệm của phương trình. Sau đây chúng ta cùng xét một số thí dụ.

Thí dụ 1. Cho $c_o, c_1, ..., c_n \in R$ và $c_o + \frac{c_1}{2} + \frac{c_3}{3} + ... + \frac{c_n}{n+1} = c_o + c_1 + \frac{c_2 . 2}{3} + ... + \frac{c_n . 2^n}{n+1} = c$. Chứng minh rằng phương trình $c_1 + 2c_2x + ... + nc_nx^{n-1} = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(0, 2)$.

Chứng minh : Xét $P(x) = c_ox + \frac{1}{2}c_1x^2 + \frac{1}{3}c_2x^3 + ... + \frac{1}{n+1}c_nx^{n+1}$ có $P(0) = P(1) = P(2) = 0$, nên theo định lí Rolle,

$P'(x) = c_o + c_1x + c_2x^2 + ... + c_nx^n$ có ít nhất hai nghiệm x_1, x_2 với $0 < x_1 < 1 < x_2 < 2$. Từ $P'(x_1) = P'(x_2) = 0$ suy ra

$P''(x) = c_1 + 2c_2x + ... + nc_nx^{n-1} = 0$ có nghiệm $x = \alpha \in (x_1, x_2) \subset (0, 2)$.

Thí dụ 2. Cho $P(x)$ là đa thức bậc n có n nghiệm thực phân biệt $x_1, x_2, ..., x_n$. Chứng minh rằng $\sum_{k=1}^{n} \frac{P''(x_k)}{P'(x_k)} = 0$.

Chứng minh : $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n)$ có

$$P'(x) = P(x)\left(\frac{1}{x - x_1} + \frac{1}{x - x_2} + ... + \frac{1}{x - x_n}\right).$$

Từ $P(x_1) = P(x_2) = ... = P(x_n) = 0$, nên theo định lí Rolle, $P'(x) = 0$ có $n - 1$ nghiệm phân biệt $y_1, y_2, ..., y_{n-1}$ với $x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < x_3 < ... < x_{n-1} < y_{n-1} < x_n$.

$$P''(x) = P'(x)\left(\frac{1}{x - y_1} + \frac{1}{x - y_2} + ... + \frac{1}{x - y_{n-1}}\right)$$

Từ $0 = P'(y_k) = P(y_k)\left(\frac{1}{y_k - x_1} + \frac{1}{y_k - x_2} + ... + \frac{1}{y_k - x_n}\right)$ và $P(y_k) \neq 0$,

nên $\frac{1}{y_k - x_1} + \frac{1}{y_k - x_2} + ... + \frac{1}{y_k - x_n} = 0$, $\forall k$. Do đó :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{P''(x_k)}{P'(x_k)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{x_k-y_1}+\frac{1}{x_k-y_2}+\dots+\frac{1}{x_k-y_{k-1}}\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k-y_k}\right)=0.$$

Thí dụ 3. Cho $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$ và đặt

$s_1=\sum_{i=1}^{n}x_i$, $s_2=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j$,

$s_3=\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}x_ix_jx_k, \dots, s_n=x_1x_2\dots x_n$ – các hàm cơ bản của $x_1, x_2, \dots$. Chứng minh rằng

$$\frac{s_1}{c_n^1}\geqslant\sqrt{\frac{s_2}{c_n^2}}\geqslant\sqrt[3]{\frac{s_3}{c_n^3}}\geqslant\dots\geqslant\sqrt[n]{\frac{s_n}{c_n^x}}.$$

Chứng minh :

Ta chứng minh bằng phương pháp quy nạp theo n.

$n=1$ – bđt đúng.

Giả sử bđt đúng cho $n-1$. Ta giả thiết $0<x_1<x_2<\dots<x_n$.

Ta xét $P(x)=(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)=$
$=x^n-s_1x^{n-1}+s_2x^{n-2}-\dots+(-1)^ns_n$ – có n nghiệm $x_1, x_2, \dots, x_n$. Theo định lí Rolle,
$P'(x)=nx^{n-1}-(n-1)s_1x^{n-2}+(n-2)\times$
$\times s_2x^{n-2}-(n-3)s_3x^{n-3}+\dots+(-1)^{n-1}s_{n-1}$
có $n-1$ nghiệm $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$ với
$x_1<y_1<x_2<y_2<\dots<x_{n-1}<y_{n-1}<x_n$.

Khi đó $\frac{n-1}{n}s_1, \frac{n-2}{n}s_2, \dots, \frac{s_{n-1}}{n}$ là các hàm cơ bản của $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$. Theo giả thiết quy nạp, có :

$$\frac{(n-1)s_1}{nc_{n-1}^1}\geqslant\sqrt{\frac{(n-2)s_2}{nc_{n-1}^2}}\geqslant\dots\geqslant\sqrt[n-1]{\frac{s_{n-1}}{nc_{n-1}^{n-1}}}$$

hay $\frac{s_1}{c_n^1}\geqslant\sqrt{\frac{s_2}{c_n^2}}\geqslant\dots\geqslant\sqrt[n-1]{\frac{s_{n-1}}{c_n^{n-1}}}$.

Từ $\frac{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\dots+\frac{1}{x_n}}{n}\geqslant\frac{1}{\sqrt[n]{x_1x_2\dots x_n}}\Rightarrow$

$$\frac{(x_1x_2\dots x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\dots+\frac{1}{x_n}\right)}{n}\geqslant\sqrt[n]{(x_1x_2\dots x_n)^{n-1}}$$

$$\Rightarrow\sqrt[n-1]{\frac{s_{n-1}}{c_n^{n-1}}}\geqslant\sqrt[n]{\frac{s_n}{c_n^n}}.\Rightarrow \text{đpcm}.$$

Thí dụ 4. Cho $f(x)=(r_1-x)(r_2-x)(r_3-x)$.

Chứng minh rằng với mọi $0<a<b$ có $c\in(a,b)$ để $\begin{vmatrix} r_1 & a & a\\ b & r_2 & a\\ b & b & r_3\end{vmatrix}=f(c)-cf'(c)$. *Chứng minh :* Xét

$$D(x)=\begin{vmatrix} r_1+x & a+x & a+x\\ b+x & r_2+x & a+x\\ b+x & b+x & r_3+x\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} r_1+x & a-r_1 & a-r_1\\ b+x & r_2-b & a-b\\ b+x & 0 & r_3-b\end{vmatrix}$$

– hàm bậc nhất của x, nên $D(x)=D(0)+xA$.

Khi $x=-a$, $x=-b$ thì

$$\begin{cases} D(0)-aA=D(-a)=(r_1-a)(r_2-a)(r_3-a)=f(a)\\ D(0)-bA=D(-b)=(r_1-b)(r_2-b)(r_3-b)=f(b).\end{cases}$$

$$\Rightarrow D(0)=\frac{bf(a)-af(b)}{b-a}.$$

Xét $F(x)=\frac{f(x)}{x}-\frac{f(a)}{a}-\frac{\frac{f(b)}{b}-\frac{f(a)}{a}}{1-\frac{1}{a}}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{a}\right)$.

Khi đó $F(a)=F(b)=0$.

Theo định lí Rolle, có $c\in(a,b)$ để $F'(c)=0$

hay : $\frac{cf'(c)-f(c)}{c^2}-\frac{af(b)-bf(a)}{a-b}\left(-\frac{1}{c^2}\right)=0\Rightarrow$

$$\frac{bf(a)-af(b)}{b-a}=f(c)-cf'(c)\Rightarrow \text{đpcm}.$$

Sau đây là một bài tập để các bạn tự luyện :

Cho $P(x)$ là đa thức bậc n có n nghiệm thực phân biệt. c là số dương và tập tất cả các số x để $\frac{P'(x)}{P(x)}>c$, là hợp của một số hữu hạn khoảng không giao nhau. Chứng minh rằng tổng độ dài l các khoảng ấy bằng $\frac{n}{c}$.

GIẢI BÀI kì trước

Bài T1/220

Các số nguyên dương a, b, c, d thỏa mãn hệ thức $ab = cd$. Chứng minh rằng số $a^{1994} + b^{1994} + c^{1994} + d^{1994}$ là hợp số.

Lời giải. Giả sử $q = (a, c)$. Ta có :

$a = qa_1$, $c = qc_1$ với $(a_1, c_1) = 1$.

Vì $ab = cd \rightarrow qa_1 b = qc_1 d \rightarrow a_1 b = c_1 d$

Vì $(a_1, c_1) = 1 \rightarrow b \vdots c_1$ tức là $b = c_1 k$ ($k \in N^o$), do đó $d = a_1 k$. Ta có

$A = a^m + b^m + c^m + d^m =$

$= q^m a_1^m + c_1^m k^m + q^m c_1^m$

$+ a_1^m k^m = (a_1^m + c_1^m)(k^m + q^m)$

Vì $a_1, c_1, k, q \in N^o$ nên dễ thấy A là hợp số với mọi $m \in N^o$. Đặc biệt coi $m = 1994$.

Nhận xét : a) Bài này được rất đông các bạn tham gia giải. Trong số các lời giải tốt có : *Bùi Duy Hùng* 8T Bỉm Sơn Thanh Hóa, *Nguyễn Thu Trang* 9T Bắc Giang Hà Bắc, *Nguyễn Bá Vương* 9A Tam Đảo Vĩnh Phú, *Hà Mạnh Hùng* 9T Ý Yên Nam Hà, *Trần Tuấn Cường* 9T Trần Đăng Ninh Nam Định, *Vũ Phong Hải* 8T Bỉm Sơn Thanh Hóa, *Phạm Trung Kiên*, 9CT Tam Điệp Ninh Bình, *Lê Phú Thành*, chuyên Lê Khiết Quảng Ngãi, *Nguyễn Tuấn Anh* 9T Phú Xuyên Hà Tây, *Hà Xuân Giáp* 6T, Bỉm Sơn Thanh Hóa, *Đào Phương Bắc* 8A Bế Văn Đàn, Hà Nội.

b) Đáng tiếc có một số bạn mắc phải những sai lầm cơ bản. Chẳng hạn : Từ $n \not\vdots c$, $n \vdots a$, $n \vdots c$ suy ra $n \vdots ac$

Hoặc có bạn đặt $\frac{a}{c} = \frac{d}{b} = k \in Q$ và viết

$A = a^{1994} + b^{1994} + c^{1994} + d^{1994} =$

$= (k^{1994} + 1)(c^{1994} + d^{1994})$, từ đó kết luận số A là hợp số !

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T2/220.

Có tồn tại hay không 3 số khác nhau a, b, c thỏa mãn đẳng thức

$$(a-b)^5 + (b-c)^5 + (c-a)^5 = 0$$

Lời giải. của *Đoàn Minh Khoa*, 8T, NK Vũ Thư, Thái Bình

Đặt $x = a-b$, $y = b-c$, $z = c-a \Rightarrow x + y = -z$

$$P = (a-b)^5 + (b-c)^5 + (c-a)^5$$
$$= x^5 + y^5 - (x+y)^5$$
$$= -5xy(x^3 + 2x^2y + 2xy^2 + y^3)$$
$$= -5xy(x+y)(x^2 + xy + y^2)$$
$$= 5xyz(x^2 + xy + y^2)$$
$$= 5xyz\left[\left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4}\right] \quad (1)$$

Với giả thiết a, b, c là ba số khác nhau thì $x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0$ nên từ (1) ta thấy $P \neq 0$

Vậy không tồn tại ba số a, b, c khác nhau để cho

$$(a-b)^5 + (b-c)^5 + (c-a)^5 = 0$$

Nhận xét. Rất nhiều bạn giải được bài này. Các bạn sau đây có lời giải tốt : *Nguyễn Thu Hằng*, 9T, NK Bắc Ninh ; *Phùng Đức Dũng*, 9T, NK Bắc Giang, Hà Bắc. *Bùi Đăng Quang*, Chuyên Tam Đảo ; *Đinh Phương Loan*, 9A$_2$, Chuyên Việt Trì, Vĩnh Phú. *Nguyễn Tuấn Anh* ; 9T, Chuyên V–T Phú Xuyên ; *Đỗ Anh Tuấn*, 9, Chuyên V–T Thường Tín ; *Lê Thành Nam* ; 9B, Chuyên Quốc Oai, Hà Tây. *Đào Thế Vũ*, 8A$_1$, Giảng Võ, *Ngô Duy Quang*, 8A$_1$, Giảng Võ II ; *Lê Hoàng Anh*, 9A$_1$, Giảng Võ ; *Phạm Quang Vinh* ; 9A, Bế Văn Đàn, *Phạm Thế Hùng*, 7CT, Từ Liêm ; *Đỗ Minh Châu*, 9T, Chuyên Đông Anh, Hà Nội. *Tạ Thành Định*, 9T, NK Trần Phú, Hải Phòng. *Đoàn Minh Khoa*, 8T, NK Vũ Thư ; *Nguyễn Thị Khánh Hòa* ; *Phan Tiểu Hương*, 9T, NK Kiến Xương, Thái Bình. *Nguyễn Văn Trung*, 8T, Trần Đăng Ninh, Nam Định, *Hà Mạnh Hùng*, 9T, NK Ý Yên, Nam Hà. *Nguyễn Tuấn Anh*, 7T ; *Phạm Thị Thuận*, 8T, NK Bỉm Sơn ; *Lê Ngọc Hưng*, 9D, NK Thành phố Thanh Hóa. *Nguyễn Thái Bảo*, 8A, Diễn Xuân, Diễn Châu ; *Hồ Sỹ Ngọc*, 9T, NK Vinh, Nghệ An. *Phan Thị Thu Hà*, 9A, NK Hương Sơn ; *Dương Chí Vinh*, 8T, NK Hà Tĩnh. *Đoàn Thị Xuân Vinh*, 9L, Trưng Vương, Đà Nẵng, *Trương Văn Viên*, 9T, Lê Quý Đôn, Long Khánh, Đồng Nai.

TÔ NGUYÊN

Bài T3/220. *Tìm bộ ba số nguyên không âm x, y, z sao cho $3x^2 + 54 = 2y^2 + 4z^2$ (1) $5x^2 + 74 = 3y^2 + 7z^2$ (2) và tổng $x + y + z$ bé nhất.*

Lời giải Nhân hai vế của (1) với 5, của (2) với 3 rồi trừ chúng vế với vế, được : $48 = y^2 - z^2 = (y+3)(y-3)$ (3). Do hiệu $(y+z) - (y-z) = 2z$ là số chẵn theo (3) tích của chúng chẵn nên cả hai đều chẵn. Do đó, từ (3), ta có cặp số $(y+z \,;\, y-z)$ chỉ có thể là $(24 ; 2)$; $(12 ; 4)$; $(8 ; 6)$. Suy ra các giá trị tương ứng của x là 16 ; $\sqrt{16}$; 4 và bộ ba số thỏa mãn điều kiện của bài toán là $(4 ; 7 ; 1)$.

Nhận xét. Có 157 bài giải trong số đó có 146 bài giải đúng. Lời giải tốt gồm có : *Bùi Đăng Quang* (9ᵃ chuyên Tam Đảo – Vĩnh Phú) ; *Hoàng Thị Hà* (8 toán NK Bỉm Sơn – Thanh hóa) ; *Phạm Trung Kiên* (9CT Đông Giao – Tam Điệp – Ninh Bình) ; *Đinh Cao Cường* (8 chuyên Quảng Trạch – Quảng Bình) ; *Lương Tiến Thành* (9 PTNK Marie Curie Hà Nội) ; *Đỗ Thị Hòa Nhã* (PTNK Thái Nguyên – Bắc Thái) ; *Nguyễn Khánh Hà* (không nêu tên trường) ; *Trần Tất Đạt* (8A Chu Văn An – Ba Đình – Hà Nội) ; *Nguyễn Thị Thanh* (9T PTCS chuyên – thị xã Thái Bình) ; *Đỗ Minh Châu* (9T Chuyên Đông Anh – Hà Nội)

ĐẶNG VIÊN

Bài T4/220. *Cho đường tròn (O) với hai đường kính AB, CD vuông góc với nhau. P là một điểm bất kì trên cung nhỏ AD. Nối CP, BP cắt OA, OD tương ứng tại các điểm M, N. Chứng minh rằng tích $\frac{OM}{MA} \cdot \frac{ON}{ND}$ là một hằng số.*

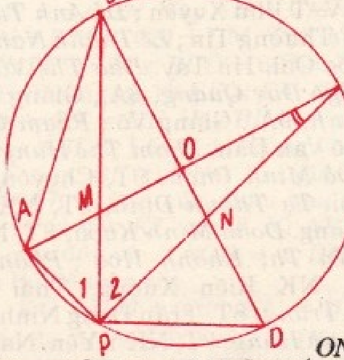
Lời giải : Gọi r là bán kính đường tròn (O). Từ các cặp tam giác đồng dạng (g.g.) :

$\Delta CAM \backsim \Delta CPA$ và

$\Delta COM \backsim \Delta CPD$, ta có :

$$AM = \frac{CA \, . \, PA}{CP} \text{ và } OM = \frac{PD \, . \, CO}{CP},$$

do đó $\dfrac{OM}{MA} = \dfrac{PD \, . \, CD}{CA \, . \, PA} = \dfrac{r \, . \, PD}{CA \, . \, PA}$



Chứng minh tương tự, ta cũng có $\dfrac{ON}{ND} = \dfrac{r.PA}{BD.PD}$

Từ đó ta có $\dfrac{OM}{AM} \cdot \dfrac{ON}{ND} = \dfrac{r \, . \, PD}{CA \, . \, PA} \cdot \dfrac{r \, . \, PA}{BD.PD} =$

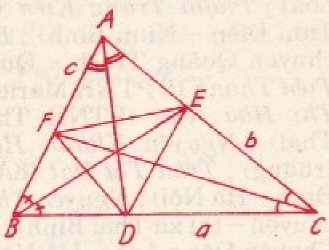
$$= \frac{r^2}{BD \, . \, CA} = \frac{r^2}{BD^2}$$

$$= \frac{r^2}{2r^2} = \frac{1}{2}.$$ Suy ra đpcm.

Nhận xét. Có 108 bài giải, tất cả đều giải đúng. Các bạn sau đây có lời giải tốt : *Ngô Hồng Hải* (9D Năng Khiếu TP Thanh Hóa) ; *Nguyễn Khánh Hòa* (9 Toán NK Kiến Xương Thái Bình) ; *Võ Trần Nguyên Lộc* (9 Toán Chuyên Lê Khiết – Quảng Ngãi) ; *Võ Trần Cương* (8 Toán – Trấn Đăng Ninh – Nam Định – Nam Hà) ; *Mai Tùng Sơn* (9 TNK Hà Tĩnh) ; *Hà Thanh Tùng* (9 Toán chuyên CII Phú Thọ) ; *Lê Huy Bình* (9T – Lam Sơn – Thanh Hóa). *Nguyễn Long Khánh* (9A – Lương Văn Chánh – thị xã Tuy Hòa – Phú Yên) ; *Trần Minh Hùng* (9 toán chuyên Lê Khiết – Quảng Ngãi)

ĐẶNG VIÊN

Bài T5/220 : *Cho tam giác ABC, ba đường phân giác trong của các góc A, B, C cắt các cạnh BC, CA, AB của tam giác lần lượt ở D, E, F. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để tam giác ABC đều là* $S_{DEF} = \dfrac{1}{4} S_{ABC}$.



Lời giải :

Ta có $\dfrac{S_{AEF}}{S_{AEB}} = \dfrac{AF}{AB}$; $\dfrac{S_{AEB}}{S_{ABC}} = \dfrac{AE}{AC}$

Suy ra $\dfrac{S_{AEF}}{S_{ABC}} = \dfrac{AE \, . \, AF}{AB \, . \, AC} = \dfrac{AE \, . \, AF}{b \, . \, c}$

Mặt khác BE là phân giác nên $\dfrac{AE}{EC} = \dfrac{AB}{BC}$ hay

$$\frac{AE}{AE + EC} = \frac{AB}{AB + BC}$$

$$\Rightarrow \frac{AE}{AC} = \frac{AB}{AB + AC} \Rightarrow AE = \frac{b \, . \, c}{a + c}$$

Do đó $\dfrac{S_{AEF}}{S_{ABC}} = \dfrac{AE \, . \, AF}{b \, . \, c} =$

$$= \frac{b^2c^2}{(c+a)(a+b)bc} = \frac{bc}{(a+c)(a+b)}$$

Tương tự có :

$$\frac{S_{DEC}}{S_{ABC}} = \frac{ab}{(b+c)(c+a)} ; \frac{S_{BDF}}{S_{ABC}} = \frac{ac}{(a+b)(b+c)}$$

Do đó $\dfrac{S_{AEF} + S_{BDF} + S_{DEC}}{S_{ABC}} =$

$$= \frac{ab(a+b) + bc(b+c) + ac(a+c)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

Như vậy $S_{DEF} = \dfrac{1}{4} S_{ABC}$ khi và chỉ khi

$$\frac{ab(a+b) + bc(b+c) + ac(a+c)}{(a+b)(b+c)(c+a)} = \frac{3}{4}$$

$\Leftrightarrow 4ab\,(a+b) + bc\,(b+c) + ac\,(a+c) =$

$= 3\,(a+b)\,(a+c)\,(b+c)$

$\Leftrightarrow b\,(a-c)^2 + a\,(b-c)^2 + c\,(a-b)^2 = 0 \Leftrightarrow$

$a = b = c$ (đpcm)

Nhận xét : Giải tốt bài này có các bạn :

Bùi Văn Huấn, 9T Chuyên Lạc Sơn, Hòa Bình, *Đỗ Thị Hòa Nhã*, PTNK Thái Nguyên, Bắc Thái, *Đào Mạnh Thắng* 9B Chuyên Việt Trì, *Bùi Đăng Quang* 9A Chuyên Tam Đảo, Vĩnh Phú, *Nguyễn Lê Dung* 9, NK Bắc Ninh, Hà Bắc, *Khúc Tuấn Việt* 8A$_1$, *Phạm Thu Hương* 9A$_1$ Hồng Bàng, *Đoàn Thái Sơn*, 9CT Chu Văn An, Hải Phòng. *Trần Đại Nghĩa*, 9 NK Phù Tiên, *Hoàng Xuân Quý*, 9NK Thanh Hà, *Trần Đình Ngọc*, 9T, NK Hải Dương, Hải Hưng, *Đỗ Hoàng Điệp*, 9 Bê tông Xuân Mai, Chương Mĩ, Hà Tây, *Nguyễn Kim Cương* 9T NK Kiến Xương, Thái Bình, *Nguyễn Minh Hoài*, 8A$_1$ Chu Văn An, *Trần Kỳ An*, *Hà Thành Trung*, *Bùi Viết Lộc*, *Đỗ Đức Nhật Quang*, *Đào Phương Bắc*, *Đào Phương Nam*, 8A Bế Văn Đàn, *Đỗ Minh Châu*, 9T Chuyên Đông Anh, Hà Nội, *Vũ Trần Cương*, *Hà Thanh Tuấn*, *Đoàn Phương*, *Trần Minh Toàn*, *Nguyễn Văn Trung*, 8T, *Trần Tuấn Cường*, *Bùi Anh Tuấn*, 9T Trấn Đăng Ninh, Nam Hà, *Đàm Mạnh Tuấn*, 8 ANK Hà Trung, *Phạm Thị Thêu*, 6T NK Nga Sơn, Thanh Hóa, *Lê Đình Thọ*, ĐHSP Vinh, *Nguyễn Thái Bảo* TH cấp II Diễn Xuân, Diễn Châu, Nghệ An, *Phạm Thị Thu Hà*, 9A, NK Hương Sơn, *Lê Thành Nhân*, 9A NK Đức Thọ, Hà Tĩnh, *Hồ Văn Thản*, TH Đào Duy Từ, Quảng

Bình, *Nguyễn Hứa Khánh Minh* ; 9/1 Nguyễn Tri Phương, Thừa Thiên, Huế, *Võ Trần Nguyên Lộc*, 9T Lê Khiết, Quảng Ngãi, *Trần Tuấn Anh*, 8T Lê Quý Đôn, Nha Trang, Khánh Hòa, *Lê Hải Lãng*, 6A Biển Hồ Pleiku, Gia Lai, *Nguyễn Hoàng Lộc*, THPT Lê Hồng Phong, *Nguyễn Quốc Minh*, THPT Hùng Vương, TP Hồ Chí Minh.

VŨ KIM THỦY

Bài T6/220 : *Cho trước số nguyên tố p và số nguyên dương a với $a \leqslant p-1$. Giả sử $A = \sum_{k=0}^{p-1} a^k$*

Chứng minh rằng với mọi ước nguyên tố q của A ta đều có $q-1 \vdots\ p$.

Lời giải : Hầu hết các bạn đều nhận thấy nếu $a = 1$ thì $A = p$ do đó kết luận trên không đúng. Vậy cần giả thiết $a > 1$.

Cách 1 (của bạn Cao Thế Anh 11CT Quốc học Huế)

Ta có $A = \dfrac{a^p - 1}{a - 1}$.

Giả sử q là ước nguyên tố của A. Khi đó

$$a^p \equiv 1 \pmod{q} \qquad (1)$$

$a^{q-1} \equiv 1 \pmod{q}$ (định lý Fecma) (2)

Gọi h là số nguyên dương bé nhất để

$$a^h \equiv 1 \pmod{q}$$

Nếu $m \in N^o$ mà $a^m \equiv 1 \pmod{q}$ thì $m \vdots\ h$. Thật vậy nếu $m = ht + s$, $0 < s < h$ thì $a^s \equiv a^m \equiv 1 \pmod{q}$. Trái với cách chọn h. Từ điều này và (1), (2) ta suy ra $\left[\begin{array}{l} p \vdots\ h \\ q-1 \vdots\ h \end{array}\right.$

Bài toán được chứng minh nếu ta chỉ ra $p = h$. Thật vậy vì $p \vdots\ h$ nên $p = h$ nên $p = h$ hoặc $h = 1$.

Nếu $h = 1$ suy ra $a \equiv 1 \pmod{q} \rightarrow A \equiv p \pmod{q}$. Mà $A \equiv 0 \pmod{q}$ nên $p \vdots\ q \rightarrow a - 1 \vdots\ p$ Điều này không xảy ra vì $a - 1 < p$.

Cách 2 (của bạn Đoàn Xuân Vinh 11CT Quốc học Huế)

Trước hết ta chứng minh rằng với $a > 1$ thì

$$(a^m - 1, a^n - 1) = a^{(m,n)} - 1.$$

Áp dụng điều này ta có

$$(a^p - 1, a^{q-1} - 1) = a^{(p,q-1)} - 1.$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$a^{(p,q-1)} \equiv 1 \pmod{q}$$

Nếu $(q-1, p) = 1$ thì $a \equiv 1 \pmod{q}$. Lý luận như ở cách 1 ta thấy điều này không xảy ra.

Vậy $(q-1, p) = p$ hay $q - 1 \vdots\ p$.

Nhận xét : Các bạn sau đây có lời giải tốt : *Lê Huy Tuệ* 10H Vĩnh Phú, *Phan Đức Linh* 11T, Phan Bội Châu Nghệ An, Hà Duy Hưng 11 Trần Phú Hải Phòng (giải hai cách như trên) *Viên Ngọc Quang* 10T Lam Sơn Thanh Hóa, *Võ Thị Ly* 11T Phú Yên, *Phan Linh* 10T Amstecđam, *Phạm Văn Quốc* 10T Lê Hồng Phong, Nam Hà, *Nguyễn Chí Dũng* 10A ĐHTH, *Vũ Duy Tuấn*, 10A Hà Bắc

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T7/220 : *Cho $\{a_o, a_2, a_4, a_6, a_8\} = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ và $\{a_1, a_3, a_5, a_7, a_9\} = \{-2, -4, -6, -8, -10\}$. Chứng minh rằng phương trình $a_o x^9 + a_1 x^8 + a_2 x^7 + a_3 x^6 + a_4 x^5 + a_5 x^4 + a_6 x^3 + a_7 x^2 + a_8 x + a_9 = 0$ không thể có 9 nghiệm thực thuộc đoạn $[-1, 1]$.*

Lời giải (của *Lưu Đức Cảnh*, 9A THCSNK Hà Trung – Thanh Hóa ; *Phạm Minh Đức*, 10T Lam Sơn – Thanh Hóa ; *Kiều Văn Ty*, 12A CT ĐHSP Vinh và *Nguyễn Anh Hoa*, 10A THPT Lê Hồng Phong – Nam Hà) : Giả sử phương trình $P(x) = \sum_{i=o}^{9} a_i x^{9-i} = 0$ có 9 nghiệm thực $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9$. Khi đó $P(x)$ có thể được viết dưới dạng : $P(x) = a_o \prod_{i=1}^{9} (x - x_i)$ (1)

Vì $a_o > 0$ (suy ra từ gt) nên : nếu giả sử $x_i \in [-1, 1]\ \forall i = \overline{1, 9}$ thì từ (1) ta sẽ có

$$P(1) = a_o \prod_{i=1}^{9} (1 - x_i) \geqslant 0 \ (2)$$

Mặt khác, lại có $P(1) = \sum_{i=o}^{9} a_i = (1+3+5+7+9) - (2+4+6+8+10) = -5 < 0$ (3).

Mâu thuẫn giữa (2) và (3) cho ta Đpcm.

Nhận xét : 1. Có rất nhiều bạn gửi lời giải cho bài toán. Không ít bạn cho lời giải sai do đã mắc phải một trong các sai lầm sau :

- Hiểu không đúng khái niệm "hai tập hợp bằng nhau". Nhiều bạn cho rằng từ giả thiết của bài ra ta phải có $a_{2i} = 2i + 1$ và $a_{2i+1} = -2(i+1)$ $\forall i = \overline{0, 4}$ (? !)
- Nêu ra và giải quyết một bài toán khái quát mà bài đã ra không phải là một trường hợp riêng !
- Quan niệm không đúng về cách tính số nghiệm của một đa thức. Không ít bạn cho rằng nếu nói đa thức $P(x)$ có n nghiệm thì n nghiệm đó phải đôi một khác nhau !
- Nắm không vững các tính chất cơ bản của bất đẳng thức. Chẳng hạn, có bạn cho rằng : Với $a > b > 0$ thì $ac > bd \Longleftrightarrow c > d$ (! ?)

2. Đa phần trong số các bạn cho lời giải đúng đã giải bài toán theo một trong hai cách sau :

- Sử dụng bất đẳng thức Cauchy và định lí Viet cho phương trình bậc n.
- Sử dụng định lí cơ bản về số nghiệm của đa thức và định lí Roll.

3. Ngoài các bạn đã nêu tên trong phần Lời giải, các bạn sau đây cũng có lời giải tốt : *Ngô Đức Duy* (12CT Trần Phú – Hải Phòng) ; *Ngô Quang Thuật* (12A PTTH Tứ Kỳ – Hải Hưng) ; *Phan Linh* (10T Amsterđam – Hà Nội) ; *Nguyễn Vũ Hưng* (12D Chuyên ngữ – ĐHQG Hà Nội) ; *Lê Tuấn Anh* (11B CT ĐHTH Hà Nội) ; *Phạm Văn Quốc* (10CT Lê Hồng Phong – Nam Hà) ; *Phùng Thanh Tùng* (10CT Thị xã Thái Bình) ; *Lưu Trường Huy* (12A PTTH Ba Đình, Nga Sơn, Thanh Hóa) ; *Lê Hoài Nam, Trương Cao Dũng, Trương Công Bằng* (10C_1

PTTH Bỉm Sơn – Thanh Hóa) ; *Phạm Anh Tuấn, Đỗ Hồng Sơn, Nguyễn Ngọc Hưng* (10T, 11T Lam Sơn – Thanh Hóa) ; *Trần Nam Dũng, Nguyễn Hải Dương, Lê Văn An, Nguyễn Xuân Sơn* (10CT, 11CT Phan Bội Châu – Nghệ An) ; *Nguyễn Xuân Tương* (11A CT ĐHSP Vinh) ; *Trần Hữu Lực, Trần Thanh Tú, Phan Duy Hùng* (10CT, 11CT, 12CT Đào Duy Từ Quảng Bình) ; *Nguyễn Đức Thành, Kiều Phương Chi* (12A Hồng Lĩnh – Hà Tĩnh) ; *Nguyễn Hoàng Giang* (12T Trường Chuyên Lê Khiết – Quảng Ngãi) ; *Cao Thế Anh* (11CT Quốc học Huế) ; *Lê Triệu Phong, Phan Phú Đông, Phan Anh Huy, Lê Anh Khôi* ($10A_1$, $11A_1$ Lê Quý Đôn – Đà Nẵng) ; *Đàm Khánh Hòa, Trịnh Ái Quốc* (11T, 12T Lương Văn Chánh – Phú Yên) ; *Lê Quang Nẫm* (10CT ĐHTH TP Hồ Chí Minh) ; *Nguyễn Nhật Nam* ($12A_1$ Vũng Tàu) và *Thái Minh Hoàng* ($12T_1$ Nguyễn Bỉnh Khiêm – Vĩnh Long).

4. Bằng phương pháp của Lời giải đã trình bày ở trên dễ dàng chứng minh được *khẳng định khái quát* sau :

"Cho $N \in N^*$ và $n + 1$ số thực a_i, $i = \overline{0, n}$, thỏa mãn điều kiện $a_o \sum_{i=o}^{n} a_i < 0$. Khi đó phương trình $\sum_{i=o}^{n} a_i x^{n-i} = 0$ không thể có n nghiệm thực $\in (-\infty, 1]$".

(Bạn Phùng Thanh Tùng đã đặt ra Bài toán trên và giải nó bằng phương pháp sử dụng định lí Roll và định lí cơ bản về số nghiệm của đa thức).

5. Có một bạn đã đặt ra và giải quyết sai Bài toán khái quát sau : "Cho $n \in N^*$ và $2n$ số thực a_i, $i = \overline{1, 2n}$, thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau :

i) $\sum_{i=1}^{2n} a_i \neq 0$; $a_{2i-1} > 0$ và $a_{2i} < 0$ $\forall i = \overline{1, n}$.

ii) $a_1 \geqslant 1, a_{2n-1} \leqslant 2n$ và $a_{2n} \leqslant -1$.

Chứng minh rằng p.t. $\sum_{i=1}^{2n} a_i x_{2n-i} = 0$ không thể có $2n - 1$ nghiệm thực".

Dễ thấy, Bài toán đặt ra là sai ; chẳng hạn với $n = 1, a_1 = 1, a_2 = 5$.

Tuy nhiên, theo tôi, *Bài toán vừa nêu trên sẽ trở thành Bài toán đúng nếu ta thay các điều kiện "$n \in N^*$", "$a_{2n-1} \leqslant 2n$" tương ứng bởi các điều kiện "$n \in N^* \setminus \{1\}$", "$a_{2n-1} \leqslant 2n - 1$".* Một số bạn đã giải quyết đúng một số trường hợp riêng của *Bài toán đúng* vừa nêu.

NGUYỄN KHẮC MINH

Bài T8/220. *Cho số nguyên dương n. Xét các số dương x, y, z thỏa mãn điều kiện : $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức*

$$\frac{x}{1 - x^{2n}} + \frac{y}{1 - y^{2n}} + \frac{z}{1 - z^{2n}} \quad (1)$$

Lời giải (của đa số các bạn)

Xét hàm số $f(t) = t(1 - t^{2n})$; $t \in (0, 1)$. Khi đó $f'(t) = -(2n+1)t^{2n} + 1$; $f'(t) = 0 \leftrightarrow t = \frac{1}{\sqrt[2n]{2n+1}}$

$f'(t)$ đổi dấu từ (+) sang (–) qua nghiệm này vậy, với $0 < x, y, z < 1$, thì :

$$\frac{1}{x(1 - x^{2n})} \geqslant \frac{(2n + 1)\sqrt[2n]{2n + 1}}{2n}$$

$$\frac{1}{y(1 - y^{2n})} \geqslant \frac{(2n + 1)\sqrt[2n]{2n + 1}}{2n}$$

$$\frac{1}{z(1 - z^{n2})} \geqslant \frac{(2n + 1)\sqrt[2n]{2n + 1}}{2n}$$

Do đó : $\frac{x}{1 - x^{2n}} + \frac{y}{1 - y^{2n}} + \frac{z}{1 - z^{2n}} =$

$$= \frac{x^2}{x(1 - x^{2n})} + \frac{y^2}{z(1 - y^{2n})} + \frac{z^2}{z(1 - z^{2n})} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{(x^2 + y^2 + z^2) . (2n + 1)\sqrt[2n]{2n + 1}}{2n} =$$

$$= \frac{(2n + 1)\sqrt[2n]{2n + 1}}{2n}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $n = 1, x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Nhận xét : Như vậy, tất cả các lời giải gửi về tòa soạn đều mới chỉ giải quyết được một phần của bài ra : Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức (1) ứng với $n = 1$. Tòa soạn mong nhận được các lời giải hoàn chỉnh của các bạn cho các trường hợp $n > 1$. Đó là một vấn đề khó, đòi hỏi biết vận dụng thành thạo các kĩ thuật so sánh đối với hàm lồi và hàm lõm trong một khoảng cho trước. Trình tự giải đó có thể mô tả ngắn gọn theo các bước sau đây :

1. Tuyến tính hóa : Phát biểu lại bài toán : Cho số nguyên $n > 1$. Xét các số dương x, y, z thỏa mãn điều kiện : $x + y + z = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$T = \frac{\sqrt{x}}{1 - x^n} + \frac{\sqrt{y}}{1 - y^n} + \frac{\sqrt{z}}{1 - z^n} \quad (2)$$

2. Xét hàm số $f(t) = \frac{\sqrt{t}}{1 - t^n}$, $t \in (0, 1)$. Khi đó :

$$f'(t) = (1 - t^n)^{-2}\left(\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}} + \left(n - \frac{1}{2}\right)t^{n - \frac{1}{2}}\right)$$

$$f''(t) = (1 - t^n)^{-3}t^{-\frac{3}{2}}(t^n + 1)\left(\left(n^2 - \frac{1}{4}\right)t^n - \frac{1}{4}\right)$$

3. Tính đối xứng : không mất tính tổng quát, có thể coi $1 > x \geqslant y \geqslant z > 0$. Vậy $x \geqslant \frac{1}{3} \geqslant z$.

4. Với $f''\left(\frac{1}{3}\right) < 0$ thì giá trị nhỏ nhất của T chỉ có thể đạt ở vị trí cực biên (có ít nhất 1 giá trị bằng 0 ($z = 0$)). Khi đó, bài toán đã cho sẽ không có giá trị nhỏ nhất.

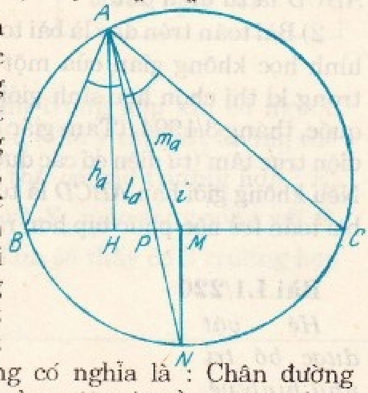
Hi vọng các bạn sẽ cho được lời giải chính xác của bài toán trên ứng với $n > 1$. Chúc các bạn thành công.

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T9/220. *Kí hiệu l_a, l_b, l_c ; m_a, m_b, m_c và h_a, h_b, h_c tương ứng là độ dài các đường phân* *giác trong, các đường trung tuyến và các đường cao được kẻ tới các cạnh a, b, c của một tam giác. Chứng minh rằng*

$$\frac{m_a}{h_b + l_b} + \frac{m_b}{h_c + l_c} + \frac{m_c}{h_a + l_a} \geq \frac{3}{2}$$

Lời giải (của đa số các bạn). Trước hết, ta chứng minh nhận xét sau đây : Trong mọi tam giác, đường phân giác của mỗi góc nằm trong góc tạo bởi đường cao và đường trung tuyến phát xuất từ cùng một đỉnh. Điều đó cũng có nghĩa là : Chân đường phân giác (trong) của một góc nằm trong đoạn nối chân đường cao và chân đường trung tuyến phát xuất từ cùng một đỉnh.



Có nhiều cách chứng minh mệnh đề này. Sau đây là một cách chứng minh. Dựng đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, kéo đường phân giác AP gặp đường tròn ở N, thế thì N là trung điểm của cung BC và do đó $MN \perp BC$ ở trung điểm M của cạnh BC, hay là : $AH \parallel MN$. Suy ra P nằm trong đoạn HM và do đó : $AH \leq AP \leq AM$, nghĩa là : $h_a \leq l_a \leq m_a$

Từ đó ta được : $h_a + l_a \leq 2m_a$

Chứng minh tương tự : $h_b + l_b \leq 2m_b$

$h_c + l_c \leq 2m_c$

Để ý rằng : $h_i + l_i = 2m_i \Leftrightarrow h_i = l_i = m_i \Leftrightarrow$ Tam giác $A_1A_2A_3$ cân ở đỉnh A_i.

Suy ra : $\dfrac{m_a}{h_b + l_b} \geq \dfrac{m_a}{2m_b}$ và hai bất đẳng thức nữa tương tự. Cộng vế đối vế các BĐT đó, ta được

$$\frac{m_a}{h_b + l_b} + \frac{m_b}{h_c + l_c} + \frac{m_c}{h_a + l_a} \geq$$

$$\geq \frac{1}{2}\left(\frac{m_a}{m_b} + \frac{m_b}{m_c} + \frac{m_c}{m_a}\right)$$

$$\geq \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt[3]{\frac{m_a}{m_b} \cdot \frac{m_b}{m_c} \cdot \frac{m_c}{m_a}} = \frac{3}{2}$$

(Áp dụng BĐT Côsi cho ba số dương)

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác là đều.

(Suy từ các đẳng thức $h_i + l_i = 2m_i$ $(i = 1, 2, 3)$

và $\dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{m_2}{m_3} = \dfrac{m_3}{m_1} = \dfrac{m_1 + m_2 + m_3}{m_2 + m_3 + m_1} = 1$

Nhận xét : 1) Cũng có nhiều bạn sử dụng công thức tính đường trung tuyến và đường phân giác theo các cạnh của tam giác

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2} \geq$$

$$\geq \sqrt{p(p-a)} \quad (a + b + c = 2p)$$

$$l_a = \frac{2}{b + c}\sqrt{p(p-a)bc} \leq \sqrt{p(p-a)}$$

2) Cách giải nào cũng đều phải sử dụng bất đẳng thức Côsi cho ba số dương, tuy nhiên cách giải nêu trên chỉ sử dụng tính chất (định tính) của các đường cao, phân giác và trung tuyến mà thôi ($h_i \leq l_i \leq m_i$)

3) Các bạn sau đây có lời giải tốt : *Đào Mạnh Thắng*, 9B chuyên Việt Trì, Vĩnh Phú, *Bùi Thị Vân Anh*, 9 chuyên toán, Ý Yên, Nam Hà, *Vũ Mạnh Hùng*, 10 chuyên toán, *Nguyễn Quang Hải* 12 chuyên toán PTTH Hùng Vương Vĩnh Phú, *Nguyễn Thu Thủy*, 10 chuyên toán, Lê Hồng Phong Nam Hà, *Lê Quang Tuấn* 10A$_1$, PTTH Hàm Rồng, *Nguyễn Anh Tuấn* 7T, Bỉm Sơn, Thanh Hóa, *Đỗ Hồng Sơn* 10T Lam Sơn, *Lê Huy Bình* 9T Lam Sơn, *Nguyễn Hoài Nam* 10A Nghi Lộc 1, *Đoàn Xuân Vinh* 11 toán Quốc học Huế, *Tạ Huy Cường*, 12M Mari Quyri Hà Nội, *Lê Tuấn Anh*, *Trần Hải Sơn*, 11 chuyên toán ĐHTH Hà Nội, *Đàm Khánh Hòa*, 11T, PTTH Lương Văn Chính, Phú Yên, *Nguyễn Ngọc Tùng* 11 Chuyên lí Đào Duy Từ, Quảng Bình

NGUYỄN ĐĂNG PHẤT

Bài T10/220. *Tìm điều kiện mà tứ diện trực tâm ABCD phải thỏa mãn để A'B'C'D' là một tứ diện đều, trong đó A', B', C' và D' lần lượt là các điểm đối xứng của A, B, C và D qua các mặt BCD, CDA, DAB và ABC.*

Lời giải

Điều kiện cần. Gọi H là trực tâm của tứ diện $ABCD \to DC \perp (HAB) \to DC \perp A'B'$ (do $A'B'C \subset (HAB)$, mà $A'B' \perp C'D'$ nên nếu $DC \cap C'D' \neq \phi$ thì $A'B' \perp (DC, C'D) \to A'B' \perp (HDC)$ mà $AB \perp (HDC) \to A'B' \parallel AB$.

Vậy ta có $DC \parallel D'C'$ hoặc $AB \parallel A'B'$ (1)

tương tự : $DA \parallel D'A'$ hoặc $BC \parallel B'C'$ (2)

$DB \parallel D'B'$ hoặc $CA \parallel C'A'$ (3)

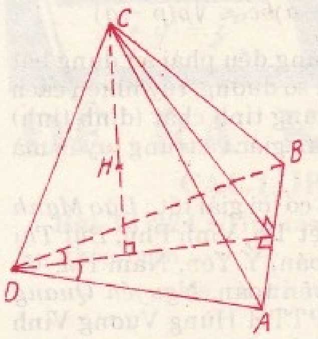
Kết hợp (1), (2) và (3) ta được : $DC \parallel D'C'$; $DA \parallel D'A'$; $DB \parallel D'B'$ (*) hoặc $AB \parallel A'B'$; $BC \parallel B'C'$; $CA \parallel C'A'$ (*)

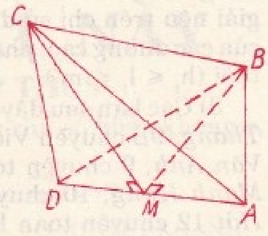
(6 khả năng nữa thực chất cũng tương tự với (*) hoặc (*)') (*) $\to (\widehat{ADB}, \widehat{BDC}, \widehat{CDA}) \in \{60^o, 60^o, 60^o)$; $(60^o, 120^o, 120^o)$; $(120^o, 60^o, 120^o)$; $(120^o, 120^o, 60^o)\}$

TH1. $(\widehat{ADB}, \widehat{BDC}, \widehat{CDA}) = (60^o, 60^o, 60^o)$ (xem h.1)

Gọi K là hình chiếu (vuông góc) của C xuống mp DAB.

Vì $\widehat{ADC} = \widehat{BDC}$ nên DK là phân giác góc $\widehat{ADB}$. (điều này chứng minh rất đơn giản) mà $DK \perp AB \to \Delta\, DAB$ cân tại D mà $\widehat{ADB} = 60^o$ $\to \Delta DAB$ đều, tương tự như vậy với các ΔDBC, ΔDCA ta có kết luận $DABC$ là tứ diện đều *TH2*. $\widehat{ADB} = 60^o$, $\widehat{BDC} = \widehat{CDA} = 120^o$. (xem h.2), tương tự như TH1 ta cũng suy được ΔDAB đều $\to$ trung tuyến BM của ΔDBA cũng là đường cao của tam giác ấy $\to BM \perp DA$ mà $DA \perp BC \to AD \perp BCM \to CM \perp DA$ điều này mâu thuẫn với sự kiện $\widehat{CDA} = 120^o > 90^o$.



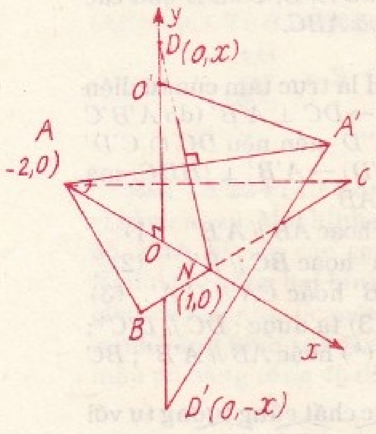


2 trường hợp còn lại cũng dẫn đến mâu thuẫn.

(*)' → ΔABC đều, mà hình chiếu của D xuống mp ABC chính là trực tâm của ΔABC (và cũng là tâm vòng ngoại tiếp) nên D.ABC là hình chóp tam giác đều → ΔABC và $\Delta A'B'C'$ có cùng trục là DD'. (xem h.3). Gọi O là tâm của ΔABC, dựng hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ. Gọi N là trung điểm của BC. Đặt $ON = 1$, $OA = 2$, $OD = x > 0 \to A(-2, 0)$

$D(0, x)$; $D'(0, -x)$; $N(1, 0) \Rightarrow$

$$A'\left(\frac{4x^2-2}{1+x^2}, \frac{6x}{1+x^2}\right)$$



Vì $D'A'B'C'$ là tứ diện đều có trục là Oy nên ta có : $D'O' = \sqrt{2}A'O'$ (trong đó O là tâm của ΔABC) mà $D'O'$ =

$$x + \frac{6x}{1+x^2} = \frac{x(x^2+7)}{1+x^2}.$$

$$A'O' = \left|\frac{4x^2-2}{1+x^2}\right|.$$

$$\Rightarrow \frac{x(x^2+7)}{x^2+1} = \sqrt{2}\left|\frac{4x^2-2}{x^2+1}\right|$$

$\Leftrightarrow x^2(x^4+14x^2+49) = 2(16x^4-16x^2+4)$.

Đặt $t = x^2 > 0$. Ta có

$t^3 - 18t^2 + 81t - 8 = 0$

Giải ra $t_1 = 8$, $t_2 = 5+\sqrt{54}$; $t_3 = 5-\sqrt{24}$

$\Rightarrow x_1 = 2\sqrt{2}$, $x_2 = \sqrt{5+\sqrt{24}}$, $x_3 = \sqrt{5-\sqrt{24}}$

Vậy tứ diện $DABC$ phải là một trong 3 loại tứ diện sau đây :

– Tứ diện đều

– Chóp tam giác đều mà tỉ số giữa đường cao h và bán kính R của đường tròn ngoại tiếp đáy bằng :

$$\frac{h}{R} = k = \frac{1}{2}\sqrt{5 \pm 2\sqrt{6}}$$

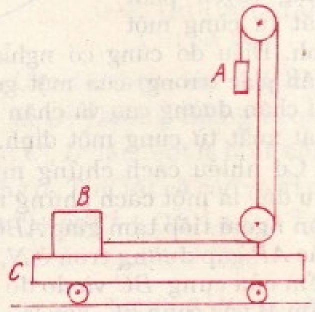
2) Điều kiện đủ : Thử trực tiếp dễ thấy điều kiện vừa nói trên đây (điều kiện cần) cũng là điều kiện đủ (cũng có thể dễ dàng nhận thấy trong quá trình diễn tả điều kiện cần).

Nhận xét : 1) Chưa có bạn nào giải được trọn vẹn. Hầu hết chỉ tìm được một điều kiện đủ : $ABCD$ là tứ diện đều !

2) Bài toán trên đây là bài toán tương tự trong hình học không gian của một trong 6 bài toán trong kì thi chọn học sinh giỏi toán lớp 12 toàn quốc, tháng 3/1994. (Tam giác được thay bằng tứ diện trực tâm (tứ diện có các đường cao đồng quy). Nếu không giới hạn $ABCD$ là tứ diện trực tâm thì bài toán trở nên phức tạp hơn rất nhiều.

Bài L1/220

Hệ vật được bố trí như hình vẽ. Các vật A, B, C lần lượt có khối lượng là $m_1 = 0{,}4kg$; $m_2 = 1kg$; $m_3 = 1kg$. Hệ số ma sát giữa B và C : $k = 0{,}3$. Ma sát giữa C và sàn, ma sát ở các ròng rọc được bỏ qua. Dây nối không giãn. Thả tay khỏi A cho hệ vật chuyển động. Tìm gia tốc mỗi vật.



Hướng dẫn giải. Khi hệ vật chuyển động, vật A vừa bị tụt xuống, vừa bị C kéo theo phương nằm ngang, vì thế dây treo vật A bị lệch về phía sau một góc α. Viết phương trình của định luật Niutơn II cho từng vật, và chiếu lên phương nằm ngang và phương thẳng đứng, ta có :

Với vật A : $T\sin\alpha = m_1a_{1x}$ (1)

$T\cos\alpha - m_1g = -m_1a_1y$ (2)

(T là lực căng của dây)

Với vật B : $T - km_2g = m_2a_2$ (3)

Với vật C : $km_2g = m_3a_3 \to a_3 = 3m/s^2$.

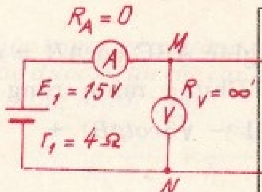
Ngoài ra $\vec{a_1} = \vec{a_2} + \vec{a_3}$ (4). Chiếu (4) lên hai phương, chú ý đến (1), (2) và (3) và thay số, rút ra $\tg\alpha = 0{,}3 \to \alpha = 16^o32'$. Từ đó suy ra

$$a_1 = \sqrt{a_{1x}^2 + a_{1y}^2} = 2{,}87m/s^2 = a_2$$

Nhận xét. Bài giải của các em gửi đến đều không có đầy đủ đáp số đúng, nguyên nhân là không phân tích đủ lực tác dụng lên mỗi vật và nó nhầm lẫn trong phép tính số

MAI ANH

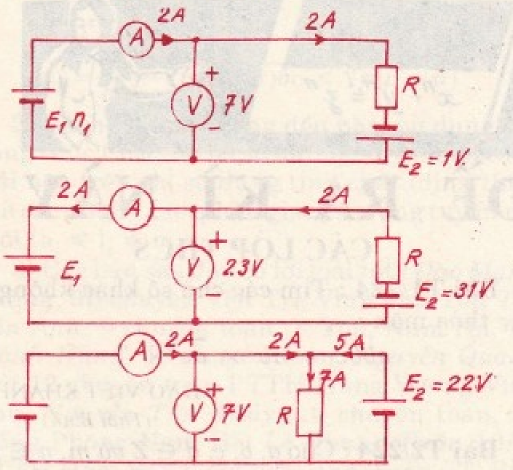
Bài L2/220. *Ampe kế chỉ 2A. Tính E_2 và số chỉ vôn kế.*



Trong hộp kín có :
– 1 điện trở $R = 1\Omega$
– 1 nguồn điện có sđđ E_2 và điện trở trong $r_2 = 3\Omega$

Hướng dẫn giải

Vì đã khẳng định trong hộp kín có nguồn E_2 và điện trở R, nên (chú ý rằng E_2 không thể có sđđ quá lớn) có thể có các trường hợp : E_2 mắc nối tiếp với R và E_2 mắc song song với R. Áp dụng định luật Ôm sẽ thấy có 3 trường hợp sau đây



MAI ANH

ĐỀ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN HỌC SINH GIỎI
MÔN TOÁN LỚP 9 HẢI PHÒNG

NĂM HỌC 1995 - 1996

Thời gian làm bài : **150 phút** *(không kể chép đề)*

Ngày thi : 26/10/1995 (Sáng)

Bài 1 Tồn tại bao nhiêu bộ ba các số tự nhiên sao cho tích hai số bất kì trong chúng cộng với 1 là số chính phương.

Bài 2 Giải phương trình

$$\frac{|x|\sqrt{x^2+1}-x^2-3+2\sqrt{2}}{|x|\sqrt{x^2+1}+x^2+3-2\sqrt{2}} = x^2$$

Bài 3 Cho $a \leqslant b \leqslant c$ và $a+b+c=0$. Chứng minh rằng bất phương trình $ax+by+cz<0$ không có nghiệm $x \leqslant y \leqslant z$.

Bài 4 Cho ngũ giác lồi $ABCDE$ có cạnh AB vuông góc với cạnh CD, còn cạnh BC vuông góc với cạnh DE. Chứng minh rằng nếu $AB = AE = ED = 1$, thì $BC + CD < 1$

Bài 5 Phương trình $x^2+ax+b=0$ có hai nghiệm thực khác nhau. Chứng minh rằng phương trình $x^4+ax^3+(b-2)x^2-ax+1=0$ có bốn nghiệm thực khác nhau.

Ngày thi : 26/10/1995 (Chiều)

Bài 1 Không dùng bảng số và máy tính, hãy so sánh hai số sau :

$$\frac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{2}+\sqrt{3+\sqrt{5}}} + \frac{3-\sqrt{5}}{2\sqrt{2}-\sqrt{3-\sqrt{5}}} \text{ và }$$

$$\frac{4+\sqrt{7}}{3\sqrt{2}+\sqrt{4+\sqrt{7}}} + \frac{4-\sqrt{7}}{3\sqrt{2}-\sqrt{4-\sqrt{7}}}$$

Bài 2 Hãy viết phương trình bậc hai dạng $x^2+px+q=0$. Biết rằng phương trình có nghiệm nguyên, các hệ số p, q đều nguyên và $p+q+1 = 1993$.

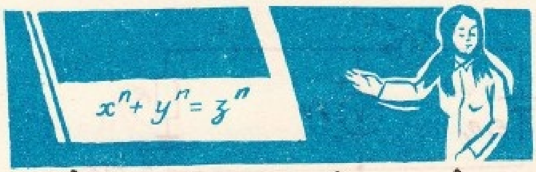
Bài 3 Đa thức $P(x)$ có các hệ số đều nguyên và số hạng tự do là a_o.

Tìm a_o, biết rằng $|a_o| < 1000$ và $P(19) = P(94) = 1994$

Bài 4 Tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo vuông góc với nhau và cắt nhau tại P. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng AD, độ dài đoạn thẳng CM bằng $\frac{5}{4}$. Khoảng cách từ điểm P đến đoạn thẳng BC bằng $\frac{1}{2}$ và $AP = 1$. Biết rằng tứ giác $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn. Tính số trị của biểu thức

$$\frac{\cos^2\alpha}{4\sin^2\alpha} + \left(\frac{1}{2\sin\alpha} + \frac{1}{2}\right)^2, \text{ ở đây } \alpha = \widehat{ACB}.$$

NGUYỄN DỄ
(Hải Phòng)



ĐỀ RA KÌ NÀY

CÁC LỚP THCS

Bài T1/224 : Tìm các chữ số khác không a, b, c thỏa mãn :

$$abbc = ab \times \overline{ac} \times 7$$

ĐÀO VIỆT KHANH
(Thái Bình)

Bài T2/224 : Cho $a, b, c, d \in Z$ và $m, n \in N^*$ mà m, n không phải là số chính phương. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để

$$a + b\sqrt{m} = c + d\sqrt{n} \text{ là } \begin{cases} a = c \\ b\sqrt{m} = d\sqrt{n} \end{cases}$$

ĐINH VĂN THỤY
(Hải Phòng)

Bài T3/224 : Giải phương trình nghiệm nguyên

$$x^6 + 8x^3 + 11x^2 + 28x + 12 + 3y^2 = 0$$

NGUYỄN ĐỨC TẤN
(TP Hồ Chí Minh)

Bài T4/224 : Cho tam giác ABC cân tại A $(AB = AC)$. Từ B kẻ $BM \perp AC$. Chứng minh rằng :

$$\frac{AM}{MC} = 2\left(\frac{AB}{BC}\right)^2 - 1$$

HỒ QUANG VINH
(Nghệ An)

Bài T5/224 : Cho hai hình chữ nhật có chu vi bằng nhau. Một hình có các cạnh được tô màu đỏ, hình kia có các cạnh được tô màu xanh. Người ta chồng hai hình lên nhau sao cho phần giao của chúng là một hình bát giác. Chứng minh rằng hình bát giác có tổng độ dài 4 cạnh màu đỏ bằng tổng độ dài 4 cạnh màu xanh.

NGUYỄN MINH HÀ
(Hải Phòng)

CÁC LỚP THCB

Bài T6/224 : Cho dãy số $\{x_n\}_{n=6}^{\infty}$ thỏa mãn :

$$\begin{cases} x_3 = 2\cos\frac{\pi}{9} \\ x_{n+1} = 3x_n - 1 \end{cases} \quad \forall n = 1, 2, 3, \ldots$$

Tìm $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n$.

NGUYỄN THANH HẢI
(Hà Nội)

Bài T7/224 : Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ với các hệ số thực, thỏa mãn :

$$P(x^3 + 1) = P^3(x) + 1 \quad \forall x \in R \text{ và } P(0) = 0$$

TRẦN XUÂN ĐÁNG
(Nam Hà)

Bài T8/224 : Tam giác ABC có $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Chứng minh rằng :

$$a^2(1 - \sqrt{3}cotgA) + b^2(1 - \sqrt{3}cotgB) + c^2(1 - \sqrt{3}cotgC) \geq 0$$

TRẦN DUY HINH
(Bình Định)

Bài T9/224 : Cho Δ ABC, a, b, c theo thứ tự là độ dài các cạnh BC, CA, AB. R, r theo thứ tự là bán kính các đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp. Chứng minh rằng :

$$\frac{r}{R} + \frac{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2}{16R^2} \leq \frac{1}{2}$$

ĐÀO TRƯỜNG GIANG
(Vĩnh Phú)

Bài T10/224 : Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh là 2 và tâm là O. Đường thẳng d quay quanh O. Gọi A', B', C', D' lần lượt là hình chiếu của A, B, C, D xuống d. Tìm tất cả các vị trí của d sao cho tổng $OA'^4 + OB'^4 + OC'^4 + OD'^4$ đạt giá trị lớn nhất.

TRỊNH BẰNG GIANG
(TP Hồ Chí Minh)

CÁC ĐỀ VẬT LÍ

Bài L1/224 : Thanh AB trượt trên hai cạnh của góc vuông (Hình vẽ). Thanh có chiều dài l. Đầu B chuyển động với vận tốc không đổi v_o. Hãy xác định phương, chiều và độ lớn của véc tơ vận tốc và véc tơ gia tốc của trung điểm C tại thời điểm thanh làm với cạnh thẳng đứng một góc α.

TÔ GIANG
(Hà Nội)

Bài L2/224 : Một khung dây siêu dẫn hình vuông, cạnh a, khối lượng m, đặt nằm ngang trong từ trường không đều theo quy luật

$$B_x = -\alpha x$$
$$B_y = 0$$
$$B_z = B_o + \alpha z.$$

Khung có độ tự cảm L, không biến dạng. Ban đầu, tâm của khung trùng với gốc tọa độ, các cạnh của khung song song với các trục Ox, Oy. Khung được thả tự do và trong khung không có dòng điện. Xét chuyển động của khung sau khi thả.

TRẦN VĂN DŨNG
(Thừa Thiên – Huế)

PROBLEMS IN THIS ISSUE

For Lower Secondary Schools.

T1/224. Find three digits a, b, c, distinct from 0, such that

$$\overline{abbc} = \overline{ab} \times \overline{ac} \times 7.$$

T2/224. Let $a, b, c, d \in \mathbf{Z}$ and $m, n \in \mathrm{N}^*$ and suppose that m and n are not perfect squares. Prove that

$$a + b\sqrt{m} = c + d\sqrt{n}$$

if and only if $\begin{cases} a = c \\ b\sqrt{m} = d\sqrt{n}. \end{cases}$

T3/224. Find integral solutions of equation :

$$x^6 + 8x^3 + 11x^2 + 28x + 12 + 3y^2 = 0.$$

T4/224. Let BM be the altitude issued from B of an isosceles triangle ABC, $AB = AC$. Prove that

$$\frac{AM}{MC} = 2\left(\frac{AB}{BC}\right)^2 - 1$$

T5/224. Two rectangles with same perimeter, the sides of one are colored red, the sides of the other are colored blue, are placed one upon the other so that the intersection is an octagon. Prove that the sum of the lengths of four red sides of the octagon is equal to that of four its blue sides.

For Upper Secondary Schools.

T6/224. The sequence $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ is defined by :

$$\begin{cases} x_3 = 2\cos\frac{\pi}{9} \\ x_{n+1} = 3x_n - 1 \end{cases} \quad \forall\, n = 1, 2, 3, ...$$

Determine $\lim\limits_{n \to \infty} x_n$.

T7/224. Find all polynomials P(x) with real coefficients satisfying

$$\begin{cases} P(x^3 + 1) = P^3(x) + 1 \quad \forall x \in \mathbf{R}, \\ P(0) = 0 \end{cases}$$

T8/224. The sides of triangle ABC are $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Prove that :

$$a^2(1 - \sqrt{3}cotgA) + b^2(1 - \sqrt{3}cotgB) + c^2(1 - \sqrt{3}\mathrm{cotg}C) \geq 0.$$

T9/224. a, b, c are the sides of triangle ABC, R and r are respectively the radii of its circumcircle and incircle. Prove that

$$\frac{r}{R} + \frac{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2}{16R^2} \leq \frac{1}{2}.$$

T10/224. Let be given a regular tetrahedron with side a and center O and a moving line d passing through O. Let A', B', C', D' be respectively the orthogonal projections of A, B, C, D on d. Find all positions of d so that the sum

$$OA'^4 + OB'^4 + OC'^4 + OD'^4$$

altains its greatest value.

Giai thoại toán học

NGUYÊN LÍ CÁI ẤM ĐUN NƯỚC

Chuyện kể rằng, vào một ngày chưa xửa, chưa xưa có một nhà toán học và một nhà vật lí.

– Thưa ngài – Nhà toán học hỏi – Ngài sẽ làm gì để đun sôi được một ấm nước, nếu trước mặt ngài là một chiếc ấm rỗng không và một chiếc bếp ga nguội lạnh ?

– Thật đơn giản ! – Nhà vật lí trả lời – Trước hết, cần đổ nước vào đầy ấm, sau đó phải châm lửa cho bếp ga, rồi đặt ấm nước lên trên bếp ga đang cháy.

– Rất đúng ! Và bây giờ, ngài hãy giải tiếp bài toán sau : "Có một chiếc ấm đựng đầy nước nằm cạnh một chiếc bếp ga đang cháy. Hỏi phải làm gì để đun sôi được ấm nước ?"

– Ồ, điều này còn đơn giản hơn ! Ta chỉ việc đặt ấm nước lên trên chiếc bếp ga, thưa ngài !

– Không phải thế ! Không phải thế ! – Nhà toán học thốt lên – Trước hết, ngài cần tắt chiếc bếp ga đang cháy, tiếp theo phải đổ hết nước ra khỏi ấm đợi cho bếp ga nguội lạnh và khi đó ngài sẽ đi đến tình huống ban đầu mà chúng ta đã biết cách giải quyết...

Nghe nói, chính từ câu chuyện trên mà, ngày nay, khi đưa một bài toán mới về các bài toán đã được giải trước đó những người làm toán thường đùa mà bảo rằng, họ đang áp dụng "nguyên lí cái ấm đun nước".

N.K.M. *(sưu tầm).*

LỜI GIẢI CÁC BÀI TOÁN THI OLYMPIC TOÁN QUỐC TẾ LẦN THỨ 36 TẠI TORONTO (CANADA)

Câu 1. *(Bulgari) Cho A, B, C và D là bốn điểm phân biệt trên một đường thẳng và được sắp theo thứ tự đó. Các đường tròn đường kính AC và BD cắt nhau tại các điểm X và Y. Đường thẳng XY cắt BC tại Z. Cho P là một điểm trên đường thẳng XY khác Z. Đường thẳng CP cắt đường tròn đường kính AC tại C và M, đường thẳng BP cắt đường tròn đường kính BD tại B và N. Chứng minh rằng các đường thẳng AM, DN và XY đồng quy.*

Giải (Nguyễn Thế Phương).

a) Xét trường hợp $P \neq X, P \neq Y$.

Do XY là trục đẳng phương của hai đường tròn đường kính AC và BD nên $\overline{PM}.\overline{PC} = \overline{PN}.\overline{PB}$ (1)

Đồng thời $XY \perp AD$ kéo theo $\angle PZD = 90^o$. Giả sử $AM \cap XY = \{K\}$. Vì M nằm trên đường tròn đường kính AC nên $\angle AMC = 90^o$ và $\angle KMC = 90^o$. Vậy $\angle KMC = \angle KZC = 90^o$. Suy ra bốn điểm K, M, C, Z cùng thuộc một đường tròn (gọi đường tròn đó là (v)).

Ta có:

$\mathcal{P}\{P/(v)\} = \overline{PM}.\overline{PC}$, $\mathcal{P}\{P/(v)\} = \overline{PK}.\overline{PZ}$

Suy ra

$$\overline{PM}.\overline{PC} = \overline{PK}.\overline{PZ} \qquad (2)$$

Tương tự, nếu $DN \cap XY = \{K'\}$ thì

$$\overline{PN}.\overline{PB} = \overline{PK'}.\overline{PZ} \qquad (3).$$

Từ (1), (2) và (3) ta có $\overline{PK}.\overline{PZ} = \overline{PK'}.\overline{PZ}$. Do $P \neq Z$ nên $K' = K$. Vậy AM, DN, XY đồng quy.

b) Trường hợp $P = X$. Khi đó $M = X$ và $N = X$. Do vậy AM, DN và XY đồng quy.

c) Trường hợp $P = Y$ được xét tương tự b).

Nhận xét. Cả 6 bạn trong đội tuyển đều có lời giải đúng và đều đạt điểm tối đa (7 điểm).

Câu 2. *(Nga) Giả sử a, b và c là các số thực dương thỏa mãn điều kiện abc = 1. Chứng minh rằng*

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$$

Giải (Phạm Quang Tuấn).

Đặt $\frac{1}{a} = x$, $\frac{1}{b} = y$, $\frac{1}{c} = z$, thì $x > 0, y > 0, z > 0, xyz = 1$. Theo bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân thì

$$x + y + z \geq 3 \text{ và } \frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y} \geq \frac{3}{2}$$

Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh có dạng

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geq \frac{3}{2} \ (1)$$

Không mất tính tổng quát có thể coi $x \geq y \geq z > 0$. Khi đó: $\frac{x}{y+z} \geq \frac{y}{z+x} \geq \frac{z}{x+y} > 0$.

Do vậy, theo bất đẳng thức Trêbusép thì

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{x^2}{y+z} \geq \left(\frac{x+y+z}{3}\right) \times$$
$$\times \left(\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y}\right) \geq \frac{3}{3}.\frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$ hay $a = b = c = 1$. *Nhận xét.* Đa số các bạn trong đội tuyển đều áp dụng bất đẳng thức Cô–si để giải bài này và đều đạt điểm tối đa. Một điều đáng ngạc nhiên là có rất nhiều học sinh của một số đội tuyển mạnh đã không giải được bài này.

Câu 3. *(Czesh). Xác định tất cả các số nguyên $n > 3$ sao cho tồn tại n điểm $A_1, A_2, \ldots, A_n$ trong mặt phẳng và các số thực $r_1, r_2, \ldots, r_n$ thỏa mãn hai điều kiện sau*

(i) không có 3 điểm nào trong số $A_1, A_2, \ldots, A_n$ thẳng hàng

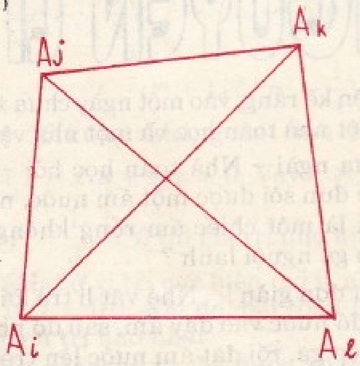
(ii) Với mỗi bộ i, j, k ($1 \leq i < j < k \leq n$) các tam giác $A_iA_jA_k$ có diện tích bằng $r_i + r_j + r_k$.

Giải (Đào Hải Long).

Ta thấy $n = 4$ thỏa mãn các tính chất (i) và (ii) của bài ra. Thật vậy, chỉ cần chọn 4 điểm A_1, A_2, A_3, A_4 là 4 đỉnh của hình vuông cạnh 1 và bộ 4 số $r_j = \frac{1}{6}$, $j = 1, 2, 3, 4$. Ta chứng minh $n \geq 5$ không thỏa mãn các điều kiện của bài toán. Ta thấy ngay, chỉ cần xét trường hợp $n = 5$ là đủ. Ta có các nhận xét sau đây.

Nx 1. Nếu 4 điểm A_i, A_j, A_k, A_l là 4 đỉnh của tứ giác lồi $A_iA_jA_kA_l$ thì $r_i + r_k = r_j + r_l$.

Thật vậy, theo giả thiết, từ hệ thức (xem hình vẽ)



$$s(A_iA_jA_k) + s(A_iA_kA_l) = s(A_iA_jA_l) + s(A_kA_jA_l)$$

ta có $r_i + r_j + r_k + r_i + r_k + r_l =$
$= r_i + r_j + r_l + r_k + r_j + r_l$

Hay $r_i + r_k = r_j + r_l$.

Nx2. Nếu A_l nằm bên trong tam giác $A_iA_jA_k$ thì $3r_l + r_i + r_j + r_k = 0$

Ta có

$s(A_iA_kA_l) + s(A_iA_jA_l) + s(A_kA_jA_l) = s(A_iA_jA_k)$

Hay $r_i + r_k + r_l + r_i + r_j + r_l + r_k + r_j + r_l = r_i + r_j + r_k$

Từ đây ta có ngay hệ thức cần chứng minh.

Trở lại bài toán

Xét bao lồi của 5 điểm $A_1, \ldots, A_5$. Có các trường hợp sau đây :

1) Bao lồi là tam giác $A_{i_3}A_{i_4}A_{i_5}$ còn A_{i1}, A_{i2} nằm trong tam giác đó. Theo Nx2, thì

$$3r_{i_1} + r_{i_3} + r_{i_4} + r_{i_5} = 0 \qquad (1)$$

$$3r_{i_2} + r_{i_3} + r_{i_4} + r_{i_5} = 0 \qquad (2)$$

(1) và (2) kéo theo

$$3r_{i_1} + 3r_{i_2} + 2r_{i_3} + 2r_{i_4} + 2r_{i_5} = 0$$

và dẫn đến điều vô lí sau

$$s(A_{i_1}A_{i_2}A_{i_3}) + s(A_{i_1}A_{i_2}A_{i_4}) + s(A_{i_1}A_{i_2}A_{i_5}) + s(A_{i_3}A_{i_4}A_{i_5}) = 0,$$

2) Bao lồi là tứ giác $A_{i_2}A_{i_3}A_{i_4}A_{i_5}$ và A_{i_1} nằm trong tứ giác đó. Không mất tính tổng quát, coi A_{i_1} thuộc $\Delta A_{i_2}A_{i_3}A_{i_4}$. Khi đó theo **Nx1**,

$$\left.\begin{aligned} r_{i_3} + r_{i_4} &= r_{i_2} + r_{i_4} \\ r_{i_1} + r_{i_5} &= r_{i_2} + r_{i_4} \end{aligned}\right] \Rightarrow r_{i_1} = r_{i_3}$$

3) Bao lồi là ngũ giác $A_1A_2A_3A_4A_5$. Do các tứ giác $A_1A_3A_4A_5$ và $A_2A_3A_4A_5$ là tứ giác lồi, nên

$$\left.\begin{aligned} r_1 + r_4 &= r_3 + r_5 \\ r_2 + r_4 &= r_3 + r_5 \end{aligned}\right] \Rightarrow r_1 = r_2$$

Tương tự, sẽ có

$$r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = r_5$$

Vậy $s(A_1A_2A_3) = s(A_1A_2a_4) = s(A_1A_2A_5)$ và A_3, A_4, A_5 thẳng hàng (vô lí). Kết luận : $n = 5$.

Nhận xét. Các bạn khác trong đội tuyển đều giải theo phương pháp tương tự. Bạn Cao Văn Hạnh đạt 5/7 (vì xét thiếu trường hợp), các bạn khác đều đạt điểm tối đa.

Câu 4. *(Ba Lan) Tìm giá trị lớn nhất của x_o để tồn tại dãy các số thực dương $x_o, x_1, \ldots, x_{1995}$ thỏa mãn 2 điều kiện :*

i) $x_o = x_{1995}$

ii) $x_{i-1} + \dfrac{2}{x_{i-1}} = 2x_i + \dfrac{1}{x_i}$ *với mọi* $i = 1, 2, \ldots, 1995$.

Giải (Cao Văn Hạnh).

Xét dãy $\{x_i\}_{i=0}^{1995}$ thỏa mãn cả hai điều kiện (i) và (ii). Từ giả thiết

$$x_{i-1} + \frac{2}{x_{i-1}} = 2x_i + \frac{1}{x_i} \ \forall i = 1, 2, \ldots, 1995$$

suy ra $\left[\begin{aligned} x_i &= \frac{1}{2}x_{i-1} \\ x_i &= \frac{1}{x_{i-1}} \end{aligned}\right. \quad \forall i = 1, 2, \ldots, 1995.$

Ta sẽ chứng minh công thức

$x_i = 2^{n_i}x_o^{m_i}$

$n_i \in \{-i, -i+1, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, i-1\}$, (*)

$m_i \in \{-1, 1\}, \quad \forall i = 1, 2, \ldots, 1995$

$$\Rightarrow \left[\begin{aligned} x_{i+1} &= \frac{1}{2}x_i \\ x_{i+1} &= \frac{1}{x_i} \end{aligned}\right.$$

$$\Rightarrow \left[\begin{aligned} x_{i+1} &= 2^{n_i - 1}x_o^{m_i} = 2^{n_{i+1}}x_o^{m_{i+1}} \\ x_{i+1} &= 2^{n_i}x_o^{-m_i} = 2^{n_{i+1}}x_o^{m_{i+1}} \end{aligned}\right.$$

Từ giả thiết quy nạp

$$\begin{cases} n_i \in -i, -i+1, \ldots, i-1 \\ m_i \in -1, 1 \end{cases}$$

suy ra

$$\begin{cases} n_{i+1} \in \{-i-1, -i, \ldots, i\} \\ m_{i+1} \in \{-1, 1\} \end{cases}$$

Vậy khẳng định đúng với $i + 1$.

Đặt $j = \max i \mid i = 1, \ldots, 1995 ; x_i = 2^{n}x_o^{-1}\}$. Để ý rằng chỉ số j luôn luôn tồn tại. Ta xét hai khả năng

1) $j = 1995$: Khi đó $x_{1995} = 2^{n_{1995}}x_o^{-1} = x_o$. Vậy $x_o^2 = 2^{n_{1995}} \leqslant 2^{1994}$ hay $x_o \leqslant 2^{997}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi $x_i = 2^{-i}x_o \ \forall i = 1, 2, \ldots, 1994$ và $x_{1995} = x_{1994}^{-1}$.

2) $j < 1995$: Khi đó $m_{1995} = 1$ và số lần đổi dấu của dãy $m_o, m_1, \ldots, m_{1995}$ là một số chẵn (tức là tồn tại một số chẵn các cặp số (x_{i-1}, x_i), $i = 1, \ldots, 1995$ sao cho $x_i = x_{i-1}^{-1}$).

Nếu $x_i = x_{i-1}^{-1}$ thì n_{i-1} và n_i cùng tính chẵn lẻ, còn nếu $x_i = \frac{1}{2}x_{i-1}$ thì n_{i-1} và n_i khác tính chẵn lẻ. Do đó n_o và n_{1995} khác tính chẵn lẻ, điều đó mâu thuẫn với giả thiết $x_{1995} = 2^{n_{1995}}x_o$ ($n_{1995} = n_o = 0$). Vậy khả năng 2) không xảy ra.

Kết luận : Giá trị lớn nhất của x_o bằng 2^{997}.

Nhận xét. Các bạn khác đều giải theo phương pháp tương tự và đều đạt điểm tối đa.

Câu 5. *(New Zealand) Cho ABCDEF là một lục giác lồi có $AB = BC = CD$, $DE = EF = FA$ và $BCD = EFA = 60^o$. Cho G và H là 2 điểm* *nằm bên trong lục giác sao cho* $\widehat{AGB} = \widehat{DHE} = 120^\circ$. *Chứng minh rằng*

$$AG + GB + GH + DH + HE \geqslant CF$$

Giải (Nguyễn Thế Trung).

Ta chứng minh Bổ đề sau : Cho tam giác đều ABC nội tiếp trong đường tròn tâm O và M là một điểm trên cung nhỏ BC thì $MA = MB + MC$. Thật vậy, lấy N trên AM sao cho $MN = MB$ thì $BN = BM$ và $\angle ABN = \angle MBC$. Suy ra $\Delta ABN = \Delta CBN$. Vậy $AN = CM$ và do đó $AM = AN + NM = CM + BM$. Trở lại bài toán :

Từ $BC = CD$ $\angle BCD = 60^\circ$ suy ra $BD = BC = AB$. Tương tự, từ $EF = FA$, $\angle EFA = 60^\circ$ suy ra $AE = EF = DE$. Vậy BE là trục đối xứng của tứ giác $ABDE$. Lấy K đối xứng với C, L đối xứng với F qua BE thì hai lục giác $ABCDEF$ và $DBKAEL$ là ảnh của nhau qua phép đối xứng trên và vì vậy $KL = CF$. Vì AKB, DEL là các tam giác đều và $\angle AGB = \angle DHE = 120^\circ$ nên theo Bổ đề trên thì

$$KG = AG + GB,\ HL = DH + HE.$$

Do đó $AG + GB + GH + DH + EH = KG + GH + HL \geqslant KL$

hay $AG + GB + GH + DH + HE \geqslant CF$

Dấu đẳng thức xảy ra khi K, G, H, L thẳng hàng.

Nhận xét. Tất cả các bạn trong đội tuyển đều giải đúng và bằng phương pháp tương tự.

Câu 6 (Ba Lan) Cho p là một số nguyên tố lẻ. Tìm số các tập con A của tập hợp $\{1, 2, ..., 2p\}$, *biết rằng :*

(i) A chứa đúng p phần tử

(ii) Tổng tất cả các phần tử của A chia hết cho p.

Giải (Ngô Đắc Tuấn).

Với mỗi $i = 1, ..., p$, đặt $A_i = \{(a_i, ..., a_p)$ không có thứ tự với $a_i \in \{1, ..., 2p\}$, $a_1 + ... + a_p$ chia hết cho p và trong bộ $(a_1, ..., a_p)$ có đúng một số xuất hiện i lần, các số còn lại xuất hiện đúng một lần$\}$.

Khi đó A_1 chính là tập con A của $\{1, ..., 2p\}$ thỏa mãn (i) A chứa p phần tử

(ii) tổng các phần tử của A chia hết cho p.

Kí hiệu

$\overline{A_i}$ là tập nhận từ A_i bằng cách trong mỗi bộ $\{(a_1, ..., a_p)\}$ loại i số giống nhau, $i = 1, ..., p$.

$\overline{\overline{A_i}}$ là tập nhận từ A_i bằng cách trong mỗi bộ $(a_1, ..., a_p)$ loại $i-1$ số i giống nhau, $i = 2, ..., p$.

Khi đó

$$\begin{cases} |A_i| + |A_{i+1}| = 2\binom{2p}{p-i} & i = 2, ..., p-1 \\ p|A_1| + |A_2| = 2\binom{2p}{p-i} & i = 1 \end{cases} \quad (1)$$

Thật vậy, xét các bộ (không thứ tự) $(b_1, ..., b_{p-i})$, $b_i \neq b_j$ với $i \neq j$. Đặt $S = b_1 + ... + b_{p-i}$. Khi đó tồn tại duy nhất $0 \leqslant r < p$ sao cho $s + ir \equiv 0 \pmod{p}$. Do vậy, nếu thêm vào bộ $(b_1, ..., b_{p-i})$ i số r hoặc i số $p + r$ thì ta sẽ được một bộ gồm p số mà

(i) mỗi số đều thuộc $\{1, 2, ..., 2p\}$

(ii) tổng của p số chia hết cho p

(iii) có đúng một số xuất hiện i lần hoặc $i + 1$ lần, phụ thuộc vào việc tồn tại hay không tồn tại $j \in \{1, ..., p-i\}$ để $b_j = r$ hay $b_j = p + r$, các số khác chỉ xuất hiện đúng một lần. Sau phép toán f như vậy thì các bộ đều sẽ thuộc $A_i \cup A_{i+1}$. Bây giờ ta tính số lập của các bộ sau phép toán f :

1) Với $i = 1$ thì mỗi bộ thuộc A_1 được lập p lần, các bộ thuộc A_2 chỉ lập 1 lần.

2) với $i \in \{2, ..., p-1\}$ thì các bộ đều lập đúng một lần.

Vì vậy số bộ sinh ra nhờ f không vượt quá tổng số phần tử của nó nhân với số lập

$$\begin{cases} 2\binom{2p}{p-i} \leqslant p|A_1| + |A_2|, \ i = 1 \\ 2\binom{2p}{p-i} \leqslant |A_i| + |A_{i+1}|, i = 2, ..., p-1 \end{cases} \quad (*)$$

Hơn nữa, các phần tử của $\overline{A_i}$ và $\overline{\overline{A_{i+1}}}$ đều gồm $p - i$ số đôi một khác nhau nên mỗi bộ số xuất hiện trong $\overline{A_i}$ và trong $\overline{\overline{A_{i+1}}}$ không quá 2 lần. Vậy

$$|\overline{A_i}| + |\overline{\overline{A_{i+1}}}| \leqslant 2\binom{2p}{p-1}$$

Vì $|\overline{A_i}| = \begin{cases} p|A_1| & i = 1 \\ |A_i| & i = 2, ..., p \end{cases}$

$|\overline{\overline{A_{i+1}}}| = |A_i| \quad i = 1, ..., p-1.$

nên $\begin{cases} 2\binom{2p}{p-i} \geqslant |A_i| + |A_{i+1}| & i = 2, ..., p-1 \\ 2\binom{2p}{p-i} \geqslant p|A_1| + |A_2| & i = 1 \end{cases} \quad (**)$

(*) và (**) cho ta (1). Vậy

$$(p|A_1| + |A_2|) - (|A_2| + |A_3|) + ...$$

$$... + (-1)^p(|A_{p-1}| + |A_p|) = \sum_{i=1}^{p-1}(-1)^{i+1} 2\binom{2p}{p-i}$$

Do p lẻ nên $p|A_1| - |A_p| = \sum_{i=1}^{p-1}(-1)^{i+1} 2\binom{2p}{p-i}$

Do $|A_p| = 2p$ nên số tập con cần tính bằng

$$|A_1| = \frac{1}{p}\left(2p + \sum_{i=1}^{p-1}(-1)^{i+1} 2\binom{2p}{p-i}\right)$$

Để ý rằng

$$2\sum_{i=1}^{p-1}(-1)^{i+1}\binom{2p}{p-i} = \binom{2p}{p} - 2$$

Do đó số tập con cần tính bằng

$$|A_1| = \frac{1}{p}\left(2p + \binom{2p}{p} - 2\right) = 2 + \frac{\binom{2p}{p} - 2}{p}$$

Nhận xét. Chỉ có hai bạn Ngô Đắc Tuấn và Đào Hải Long giải được bài 6.

NGUYỄN VĂN MẬU

Dành cho các bạn chuẩn bị thi vào Đại học

MỞ RỘNG CÁC BẤT ĐẲNG THỨC

PHẠM TẤN PHƯỚC
(Phú Khánh)

Ta đã gặp các bất tổng quát như bất đẳng thức Cauchy, Bunhiacopski, Becnuili, Jensen, Trêbưsép, hôm nay chúng tôi xin giới thiệu cách mở rộng một số bất đẳng thức từ các bài toán thi vào đại học các tỉnh miền Nam.

Bài số 1 : Cho $x, y, z \in [0, 1]$. Chứng minh bất đẳng thức

$$(2^x + 2^y + 2^z)(2^{-x} + 2^{-y} + 2^{-z}) \le \frac{81}{8}$$

(Đề thi vào ĐHBK 1990)

Lời giải

Đặt $a = 2^x$, $b = 2^y$, $c = 2^3$ bất đẳng thức phải chứng minh tương đương với :

$$(a + b + c)(1/a + 1/b + 1/c) \le \frac{81}{8} \quad \text{với}$$

$a, b, c \in [1, 2]$

Xét tam thức $f(x) = x^2 - 3x + 2$ có nghiệm số 1, 2. Vì $a, b, c \neq [1, 2]$ nên $f(a) \le 0$; $f(b) \le 0$; $f(c) \le 0$. Suy ra

$$\begin{cases} a^2 - 3a + 2 \le 0 \Rightarrow a + 2/a \le 3 \\ b^2 - 3b + 2 \le 0 \Rightarrow b + 2/b \le 3 \Rightarrow \\ c^2 - 3c + 2 \le 0 \Rightarrow c + 2/c \le 3 \end{cases}$$

$$(a + b\ c) + \left(\frac{2}{a} + \frac{2}{b} + \frac{2}{c}\right) \le 9$$

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có

$$9 \ge (a + b + c) + \left(\frac{2}{a} + \frac{2}{b} + \frac{2}{c}\right) \ge$$

$$\ge 2\sqrt{(a + b + c)\left(\frac{2}{a} + \frac{2}{b} + \frac{2}{c}\right)}$$

Vậy ta có :

$$(a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \le \frac{81}{8}$$

Ta có thể mở rộng bài toán trên như sau :

Bài số 1' : Cho n số dương x_i ; nằm trong đoạn [a, b] c là một số dương lớn hơn 1. Chứng minh bất đẳng thức tổng quát sau :

$$(c^{x_1} + c^{x_2} \ldots + c^{x_n})(c^{1-x_1} + c^{-x_2} + \ldots c^{-x_n}) \le$$

$$\le \frac{[n(c^a + c^b)]^2}{4c^{a+b}}$$

Lời giải

Đặt $t_i = c^{x_i}$ thì $t_i \in [c^a, c^b]$ (vì $x_i \in [a, b]$ và $c > 1$, bất đẳng thức phải chứng minh viết lại thành :

$$(t_1 + t_2 + \ldots + t_n)\left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \ldots + \frac{1}{t_n}\right) \le$$

$$\le \frac{[n(c^a + c^b)]^2}{4c^{a+b}}$$

Xét tam thức $f(x) = x^2 - (c^a + c^b)x + c^{a+b}$ có 2 nghiệm số là c^a, c^b, mà $t_i \in [c^a, c^b]$ nên $f(t_i) \le 0$

Vậy ta có bất đẳng thức $t_i^2 - (c^a + c^b)t_i + c^{a+b} \le 0$

Vì $t_i > 0$ nên ta suy ra $t_i + (c^{a+b})\frac{1}{t_i} \le (c^a + c^b)$

khi i thay đổi từ 1 đến n ta có được n bất đẳng thức cộng từng vế n bất đẳng thức cùng chiều đó ta sẽ có

$$(c^{x_1} + c^{x_2} + .. + c^{x_n}) + c^{a+b}(c^{-x_1} + c^{-x_2} + .. c^{-x_n}) \le nc^{a+b} \quad (1)$$

Theo bất đẳng thức Cauchy cho 2 số dương $(c^{x_1} + c^{x_2} + \ldots + c^{x_n})$ và $c^{a+b}(c^{-x_1} + c^{-x_2} + \ldots + c^{-x_n})$ ta có

$$2\sqrt{(c^{x_1} + c^{x_2} + \ldots + c^{x_n})c^{a+b}(c^{-x_1} + c^{-x_2} + \ldots + c^{-x_n})} \le (c^{x_1} + c^{x_2} + \ldots + c^{x_n}) + c^{a+b}(c^{-x_1} + c^{-x_2} + \ldots + c^{-x_n}) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta sẽ có

$$4(c^{x_1} + c^{x_2} + \ldots + c^{x_n}) \times$$

$$\times c^{a+b}(c^{-x_1} + c^{-x_2} + \ldots + c^{-x_n}) \le [n(c^{a+b})]^2$$

Vậy ta được bất đẳng thức phải chứng minh là

$$(c^{x_1} + c^{x_2} + \ldots + c^{x_n})(c^{-x_1} + c^{-x_2} + \ldots + c^{-x_n}) \le \frac{[n(c^a + c^b)]^2}{4c^{a+b}}$$

Bài số 2 : Cho 4 dương a, b, c thỏa

$$\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} + \frac{1}{1+a} \ge 3$$

Chứng minh bất đẳng thức $abcd \le \frac{1}{81}$

Lời giải

Từ giả thiết ta có $\frac{1}{1+a} \ge$

$$\ge 1 - \frac{1}{1+b} + 1 - \frac{1}{1+c} + 1 - \frac{1}{1+d}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+a} \ge \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c} + \frac{d}{1+d}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy cho ba số dương $\frac{b}{1+b}, \frac{c}{1+c}, \frac{d}{1+d}$ ta có :

$$\frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c} + \frac{d}{1+d} \ge 3\sqrt[3]{\frac{b}{1+b}\,\frac{c}{1+c}\,\frac{d}{1+d}}$$

Nên $$\frac{1}{1+a} \ge 3\sqrt[3]{\frac{bcd}{(1+b)(1+c)(1+d)}}$$

Tương tự $$\frac{1}{1+b} \ge 3\sqrt[3]{\frac{cad}{(1+c)(1+a)(1+d)}}$$

$$\frac{1}{1+c} \ge 3\sqrt[3]{\frac{abd}{(1+a)(1+b)(1+d)}}$$

$$\frac{1}{1+d} \ge 3\sqrt[3]{\frac{abc}{(1+a)(1+b)(1+c)}}$$

Nhân từng vế 4 bất đẳng thức cùng chiều và cùng dương trên ta có

$$\frac{1}{(1+a)(1+b)(1+c)(1+d)} \ge$$

$$\ge 81\frac{abcd}{(1+a)(1+b)(1+c)(1+d)}$$

Suy ra bất đẳng thức phải chứng minh là $abcd \le \frac{1}{81}$

Mở rộng đề toán và phương pháp chứng minh

Bài số 2': Cho n số dương x_i thỏa bất đẳng thức:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+x_i} \ge n-1$$

Chứng minh bất đẳng thức

$$x_1 x_2 x_3 \dots x_n \le \frac{1}{(n-1)^n}$$

Lời giải:

Từ giả thiết ta có

$$\frac{1}{1+x_1} \ge \frac{x_2}{1+x_2} + \dots + \frac{x_n}{1+x_n}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy cho $n-1$ số dương $\frac{x_2}{1+x_2}, \frac{x_3}{1+x_3}, \dots, \frac{x_n}{1+x_n}$ ta có:

$$\frac{x_2}{1+x_2}+\frac{x_3}{1+x_3}+\dots+\frac{x_n}{1+x_n} \ge (n-1)\sqrt[n-1]{\frac{x_2}{1+x_2}\cdot\frac{x_3}{1+x_3}\cdots\frac{x_n}{1+x_n}}$$

Đặt $A=(1+x_1)(1+x_2)\dots(1+x_n)$ $B = x_1.x_2\dots x_n$.

Vậy ta có $\frac{1}{1+x_1} \ge (n-1)\sqrt[n-1]{\frac{B(1+x_1)}{Ax_1}}$

Tương tự $\frac{1}{1+x_2}\ge(n-1)\sqrt[n-1]{\frac{B(1+x_2)}{Ax_2}}$

$$\frac{1}{1+x_3}\ge (n-1)\sqrt[n-1]{\frac{B(1+x_3)}{Ax_3}} \dots \frac{1}{1+x_n} \ge (n-1)\sqrt[n-1]{\frac{B(1+x_n)}{Ax_n}}$$

Nhân từng vế n bất đẳng thức cùng chiều và cùng dương trên ta sẽ có:

$$\frac{1}{A} \ge (n-1)^n \sqrt[n-1]{\frac{(1+x_1)(1+x_2)\dots(1+x_n)B^n}{x_1 x_2\dots x_n A^n}}$$

Vậy $\frac{1}{A} \ge (n-1)^n \frac{B}{A} \Rightarrow B \le \frac{1}{(n-1)^n}$

Bài số 3: Cho 3 số *a, b, c* thuộc đoạn [0, 1]. Chứng minh:

1) $\frac{a}{b+c+1}+\frac{b}{c+a+1}+\frac{c}{a+b+1}+(1-a)(1-b)(1-c)\le 1$

Lời giải

1) Không mất tính chất tổng quát ta có thể giả sử a là số lớn nhất trong 3 số *a, b, c*. Theo bất đẳng thức Côsi cho 3 số $1-b$, $1-c$, $b+c+1$ ta có

$$(1-b)(1-c)(b+c+1) \le \left(\frac{1-b+1-c+b+c+1}{3}\right)^3 = 1$$

$\Rightarrow (1-a)(1-b)(1-c) \le \frac{1-a}{b+c+1}$ Vậy

$$\frac{a}{b+c+1}+\frac{b}{c+a+1}+\frac{c}{a+b+1}+(1-a)(1-b)(1-c)\le \frac{a}{b+c+1}+\frac{b}{c+a+1}+\frac{c}{a+b+1}+\frac{1-a}{b+c+1}$$

Trong các mẫu số $c+a+1$, $a+b+1$ lần lượt thay a bằng b, c ta sẽ có các mẫu số nhỏ hơn suy ra

$$\frac{a}{b+c+1}+\frac{b}{c+a+1}+\frac{c}{a+b+1}+\frac{1-a}{b+c+1}\le$$

$$\frac{a}{b+c+1}+\frac{b}{c+b+1}+\frac{c}{c+b+1}+\frac{1-a}{b+c+1}=1$$

Mở rộng đề toán

Bài 3': Cho n số $a_1, a_2, \dots a_n \in [0, 1]$ Chứng minh:

$$\frac{a_1}{a_2+a_3+\dots+a_n+1}+\frac{a_2}{a_3+\dots+a_n+a_1+1}+\dots+\frac{a_n}{a_1+a_2+\dots+a_{n-1}+1}+(1-a_1)(1+a_2)\dots(1-a_n)\le 1$$

Lời giải

Không mất tính chất tổng quát ta có thể giả sử a_1 là số lớn nhất trong n số a_i. Tương tự như câu 1, theo bất đẳng thức Côsi cho n số $1-a_2, \dots 1-a_n, a_2+a_3+\dots+a_n+1$ ta có

$$(1-a_2)(1-a_3)\dots(1-a_n)(a_2+a_3+\dots+a_n+1)\le 1$$

$$\Rightarrow (1-a_1)(1-a_2)(1-a_3)\dots(1-a_n)\le \frac{1-a_1}{(a_2+a_3+\dots+a_n+1)}$$

Vậy ta có bất đẳng thức

$$\frac{a_1}{a_2+a_3+\dots+a_n+1}+\frac{a_2}{a_3+\dots+a_n+a_1+1}+\dots+\frac{a_n}{a_1+a_2+\dots+a_{n-1}+1}$$

$$\le \frac{a_1}{a_2+a_3+\dots+a_n+1}+\frac{a_2}{a_3+\dots+a_n+a_1+1}+\dots+\frac{a_n}{a_1+a_2+\dots+a_{n-1}+1}+\frac{1-a_1}{a_2+\dots+a_n+1}$$

Trong các mẫu số $a_3+a_4+\dots+a_n+a_1+1$; $a_4+a_5+\dots+a_n+a_1+a_2+1$; ... $a_1+a_2+\dots+a_{n-1}+1$ lần lượt thay a_1 bằng a_2; $a_3 \dots a_n$ ta sẽ có các mẫu số nhỏ hơn và cùng bằng $a_1+a_2+\dots+a_{n-1}+1$ suy ra

$$\frac{a_1}{a_2+\dots+a_n+1}+\frac{a_2}{a_3+\dots+a_n+a_1+1}+\dots+$$

$$\frac{a_n}{a_1+\dots+a_{n-1}+1}+(1-a_1)(1+a_2)\dots(1-a_n)\le$$

$$+\frac{a_n}{a_1+\dots+a_{n-1}+1}+(1-a_1)(1+a_2)\dots(1-a_n)\le$$

$$\frac{a_1}{a_2+\dots+a_n+1}+\frac{a_2}{a_3+\dots+a_n+a_2+1}+\dots+$$

$$+\frac{a_n}{a_2+\dots+a_n+1}+\frac{1-a_1}{a_2+\dots+a_n+1}=1$$

Các đề toán đề nghị

Bài 4: Cho n số $a_i \in [\alpha, \beta]$ với $\sum_{i=1}^{n} a_i = k$

Chứng minh $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \le k(\alpha+\beta)-n\alpha \,.\, \beta$

Bài số 5: Cho $a, b, c \in [\alpha, \beta]$ với $\alpha \ge 0$ và $a+b+c=k$. Chứng minh

$$a^2+b^2+c^2 \le (k-\beta)^2+\beta^2-\frac{2\alpha^3}{\beta}$$

Học sinh tìm tòi

TIẾP TỤC KHAI THÁC NHỮNG TÍNH CHẤT ĐẸP CỦA ĐA GIÁC ĐỀU

Trong bài báo "Một tính chất đẹp của đa giác đều" trên tạp chí "Toán học và tuổi trẻ" số 214, thầy Vũ Quốc Lương đã đưa ra một tính chất rất nhạy của đa giác đều. Tuy nhiên, cách chứng minh dễ dẫn đến kết quả còn hơi dài. Sau đây, tôi xin đưa ra một cách giải ngắn gọn và đơn giản hơn.

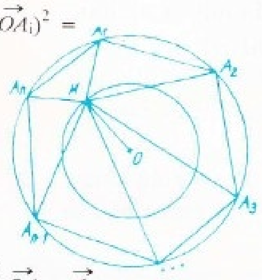
Xét đa giác đều $A_1A_2...A_n$ nội tiếp $(O ; K)$. M là điểm di động trên $(O ; R')$.

Ta có : $\sum_{i=1}^{n} MA_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (\vec{MO} + \vec{OA_i})^2 =$

$= \sum_{i=1}^{n}(MO^2 + OA^2 + 2\vec{MO}.\vec{OA_i})$

$= n((R^2 + R'^2) + 2\sum_{i=1}^{n}\vec{MO}.\vec{OA_i}$

$= n(R^2 + R'^2) + 2\vec{MO}.\sum_{i=1}^{n}\vec{OA}.$



Vì $A_1A_2...A_n$ là đa giác đều $\Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\vec{OA_1} = \vec{O}$.

Do đó $\sum_{i=1}^{n} MA_i^2 = n(R^2 + R'^2)$ (*)

Tính chất trên chỉ có ở đa giác đều hay còn những đa giác không đều mà vẫn có tính chất này ?

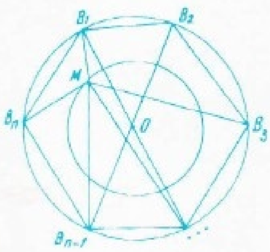
Xét đa giác $B_1B_2...B_n$ nội tiếp $(O ; R)$, M là 1 điểm di động trên $(O ; R')$. Ta có : $\sum_{i=1}^{n} MB_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (\vec{MO} + \vec{OB_i})^2$

$= n(R^2 + R'^2) + 2\vec{MO}.\sum_{i=1}^{n}\vec{OB_i}$

$\sum_{i=1}^{n} MB_i^2$ không đổi khi và chỉ khi

$\vec{MO}\sum_{i=1}^{n}\vec{OB_i}$ không đổi

$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} OB_i = \vec{O}.$



Khi đó $\sum_{i=1}^{n} MB_i^2 = n(R^2 + R'^2)$. Rõ ràng đa giác $B_1B_2...B_n$ chỉ cần thỏa mãn điều kiện nội tiếp $(O ; R)$ và $\sum_{i=1}^{n}\vec{OB_i} = \vec{O}$ thì cũng có tính chất (*) ở trên

Chắc các bạn cũng đã từng gặp bài toán sau :

Cho tam giác đều ABC nội tiếp $(O ; R)$. M là 1 điểm tùy ý thuộc $(O ; r)$. Chứng minh rằng

$MA^4 + MB^4 + MC^4 = 3(r^2 + R^2)^2 + 6R^2r^2.$

Kết quả bài toán trên làm tôi tin rằng đa giác đều $A_1A_2...A_n$ còn có 1 tính chất nữa tương tự tính chất (*).

Xét đa giác đều $A_1A_2...A_n$ nội tiếp $(O ; R)$. M là 1 điểm di động trên $(O ; R')$

Ta có : $\sum_{i=1}^{n} MA_i^4 = \sum_{i=1}^{n} [(\vec{MO} + \vec{OA_i})]^2 =$

$= \sum_{i=1}^{n} (R^2 + R'^2 + 2\vec{MO}.\vec{OA_i})^2$

$= n(R^2+R'^2)^2 + 4(R^2+R'^2)\vec{MO}\sum_{i=1}^{n}\vec{OA_i} +$

$+ 4\sum_{i=1}^{n}(\vec{MO}.\vec{OA_i})^2$

$= n(R^2 + R'^2)^2 + O + 4\sum_{i=1}^{n}(\vec{MO}.\vec{OA_i})^2$

$= n(R^2 + R'^2)^2 + 4R^2R'^2\sum_{i=1}^{n}(-\cos\widehat{MOA_i})^2$

$= n(R^2 + R'^2)^2 + 4R^2R'^2\sum_{i=1}^{n}\cos^2\widehat{MOA_i}$

Đặt $A = \sum_{i=1}^{n}\cos^2\widehat{MOA_i}$

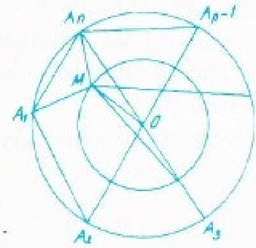
$\alpha = \widehat{MOA_1}$

$\widehat{MOA_2} = \left(\alpha + \frac{2\pi}{n}\right)$

$\widehat{MOA_3} = \left(\alpha + \frac{4\pi}{n}\right)$

....

$\widehat{MOA_n} = \left[\alpha + (n-1).\frac{2\pi}{n}\right].$



$\Rightarrow A = \sum_{i=0}^{n-1}\cos^2\left(\alpha + i.\frac{2\pi}{n}\right).$

$\Rightarrow A = \frac{n}{2} + \frac{1}{2}.\sum_{i=0}^{n-1}\cos 2\left(\alpha + i.\frac{2\pi}{n}\right).$

Đặt $B = \sum_{i=0}^{n-1}\cos 2\left(\alpha + i.\frac{2\pi}{n}\right)$

$\Leftrightarrow 2\sin\frac{2\pi}{n}.B = \sum_{i=0}^{n-1} 2\sin\frac{2\pi}{n}\cos\left(2\alpha + i.\frac{4\pi}{n}\right)$

$= \sum_{i=0}^{n-1}\sin\left[2\alpha + \frac{2\pi}{n}(2i+1)\right] + \sin\left[2\alpha + \frac{2\pi}{n}(2i-1)\right] =$

$\sin\left[2\alpha + \frac{2\pi}{n}.\left(2(n-1)+1\right)\right] - \sin\left(2\alpha - \frac{2\pi}{n}\right) =$

$\sin\left(2\alpha - 4\pi - \frac{2\pi}{n}\right) - \sin\left(2\alpha - \frac{2\pi}{n}\right)$

$= 0$

$\Leftrightarrow B = 0$

$\Rightarrow A = \frac{n}{2}$

Vậy $\sum_{i=1}^{n} MA_i^4 = n(R^2 + R'^2)^2 + 2nR^2R'^2.$

Ta có định lí sau đây :

- **Định lí** : *Cho đa giác đều $A_1A_2...A_n$ nội tiếp $(O ; R)$ M là 1 điểm tùy ý thuộc $(O ; R')$. Ta có $\sum_{i=1}^{n} MA_i^4$ là hằng số k không đổi, không phụ thuộc vị trí của M.*

$k = n(R^2 + R'^2)^2 + 2nR^2R'^2.$

Tính chất trên có phải chỉ đúng cho đa giác đều hay không hay còn những đa giác không đều mà vẫn có tính chất đó ?

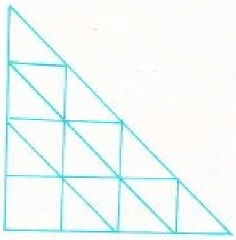
Rất mong các bạn cùng tới xem tiếp bài toán này.

Nguyễn Tiến Thắng, lớp 11A1, trường PTTH Chu Văn An, Hà Nội

Giải đáp bài

CÓ NHỮNG ĐA GIÁC NÀO

Ta có thể thấy những đa giác như vậy chỉ là tam giác và tứ giác.



H.1

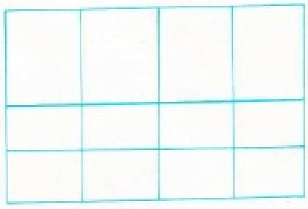
Tam giác : Chỉ có thể là các *tam giác vuông cân*. Khi đó các đường chia tam giác ra thành hai tam giác vuông cân nhỏ hơn chính là các đường cao đi qua đỉnh của góc vuông của mỗi tam giác vuông cân to (Hình 1).

Số đường chia này là vô hạn.

Tứ giác. Chỉ có thể là các *hình chữ nhật mà chiều dài bằng chiều rộng nhân với* $\sqrt{2}$ (Đây là *hình chữ nhật vàng*).

Khi đó các đường chia đôi hình chữ nhật to (theo chiều rộng) sẽ cho ta các hình chữ nhật con đồng dạng với hình chữ nhật to (Hình 2).

Số đường chia này cũng là vô hạn



H. 2

VŨ HOÀNG THÁI

CẮT HÌNH CHỮ NHẬT

Hãy cắt hình chữ nhật kích thước 9×16 thành hai mảnh đều nhau sao cho khi ghép hai mảnh này lại theo cách khác ta được một hình vuông

PHẠM HÙNG

NHỮNG ĐIỀU CẦN CHÚ Ý KHI GỬI BÀI CHO TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

- Bài viết trên một mặt giấy, sạch sẽ, không quá 2000 chữ. Hình vẽ đi kèm với bài viết. Bài chỉ gửi 1 lần.
- Nếu gửi đề ra xin gửi kèm lời giải. Mỗi đề (và lời giải) viết riêng trên 1 tờ giấy.
- Mỗi bài giải viết riêng trên một tờ giấy. Nếu bài dài nhiều trang thì đính chúng vào nhau. Trên mỗi bài đều ghi họ tên địa chỉ đầy đủ và số của bài. Ngoài phong bì để rõ bài giải của số báo nào. Không gửi bài của nhiều số báo chung 1 phong bì. Chỉ gửi về 1 địa chỉ : 45B Hàng Chuối, Hà Nội.
- Ảnh gửi in báo là ảnh màu cỡ 9×12 trở lên.

TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

ISSN : 0866 – 8035
Chỉ số : 12884
Mã số : 8BT26M6

Sắp chữ tại TTVT Nhà xuất bản Giáo dục
In tại Xưởng in Nhà xuất bản Giáo dục
In xong và nộp lưu chiểu tháng 2/1996

Giá : 2000đ
Hai nghìn đồng