https://www.facebook.com/letrungkienmath https://sites.google.com/site/letrungkienmath

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO ★ HỘI TOÁN HỌC VIỆT NAM

TOÁN HỌC và TUỔI TRẺ

1 (223)
1996
NĂM THỨ 32

TẠP CHÍ RA NGÀY 15 HÀNG THÁNG

Lễ đón nhận Huân chương Lao động hạng Nhì ngày 27/12/1995

Cán bộ biên tập viên và các cộng tác viên hội ngộ trong ngày vui

https://tieulun.hopto.org

https://www.facebook.com/letrungkienmath https://sites.google.com/site/letrungkienmath

GS NGUYỄN CẢNH TOÀN đọc báo cáo

Ông HOÀNG ĐẠO TÙNG
Trưởng phòng Tổ chức NXB
đọc quyết định của Nhà nước

GS ĐỖ LONG VÂN
Chủ tịch Hội Toán học
Việt Nam

Giám đốc NXB Giáo dục
PHẠM VĂN AN phát biểu

PGS VŨ DƯƠNG THỤY Tổng thư kí Hội Giảng dạy Toán học Phổ thông chúc mừng tạp chí

PTS TRẦN HUY HỔ Phó chủ nhiệm Khoa Toán Cơ Tin KHTN Hà Nội chúc mừng

https://tieulun.hopto.org

https://www.facebook.com/letrungkienmath https://sites.google.com/site/letrungkienmath

Chúc mừng năm mới

Xuân Bính Tý
1996

TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ

TOÁN HỌC VÀ TUỔI TRẺ NHẬN HUÂN CHƯƠNG LAO ĐỘNG HẠNG NHÌ

Sáng 27.12.1995 tại Hội trường chính Nhà xuất bản Giáo dục đã diễn ra Lễ đón Huân chương Lao động hạng Nhì của Nhà nước trao tặng cho tạp chí *Toán học và tuổi trẻ*. Hơn một trăm đại biểu của Bộ Giáo dục và Đào tạo, Viện Toán học Việt Nam, các trường đại học và Viện nghiên cứu, các ủy viên Hội đồng biên tập, cộng tác viên, đại biểu của Nhà xuất bản Giáo dục cùng đại diện các báo, đài đã về dự. Cách đây 11 năm tạp chí cũng đã được nhận huân chương Lao động hạng Nhì của Nhà nước ghi nhận những thành tích trong 20 năm đầu tiên tồn tại và phát triển của *Toán học và tuổi trẻ*. Lần này vinh dự lại đến với cán bộ, biên tập viên và cộng tác viên của tạp chí. Đây cũng là một dấu ấn đáng nhớ trên bước đường đổi mới của tạp chí, đặc biệt là năm năm khởi sắc gần đây. *Toán học và tuổi trẻ* cũng tự biết mình còn phải phấn đấu nhiều nữa mới đáp ứng được những đòi hỏi của độc giả và theo kịp tiến trình phát triển đi lên mạnh giàu của đất nước.

Sau lễ đón Huân chương đã diễn ra lễ phát thưởng cuộc thi thường niên Giải toán trên tạp chí. Các bạn được giải ở thủ đô Hà Nội thay mặt các bạn được giải trong cả nước nhận Bằng danh dự và phần thưởng cuộc thi 1994 trong dư âm niềm vui của buổi lễ trọng thể.

VKT

https://tieulun.hopto.org

https://www.facebook.com/letrungkienmath https://sites.google.com/site/letrungkienmath

TRÍCH BÁO CÁO CỦA TỔNG BIÊN TẬP TC THVTT TRONG LỄ ĐÓN NHẬN HUÂN CHƯƠNG LAO ĐỘNG HẠNG NHÌ LẦN THỨ HAI (NGÀY 27/12/1995)

"... Làn gió đổi mới đã đưa lại một sinh khí mới cho đất nước và báo THvTT, trong luồng sinh khí chung đó, đã vươn lên mạnh mẽ. Số lượng phát hành mỗi số, trong giai đoạn khó khăn, có khi đã tụt xuống còn có mấy nghìn so với mười nghìn thuở ban đầu thì nay đã vượt lên trên 16.000. Từ 1993 trở đi, báo lại trở lại phát hành mỗi tháng một số. Từ đầu 1994, báo đổi thành tạp chí và nâng số trang từ 16 lên 20, với 4 trang bìa màu, có ảnh, giấy in và kỹ thuật in cũng tốt hơn trước.

Về nội dung, tạp chí THvTT cũng đã có nhiều cải tiến để thu hút đông đảo độc giả hơn và phục vụ tốt hơn cho dạy và học toán ở thời kỳ đổi mới của đất nước. Từ chỗ lấy đối tượng phục vụ chủ yếu là học sinh các lớp chuyên toán phổ thông trung học (Nay là trung học chuyên ban), nay đối tượng đã mở rộng đến học sinh yêu toán (trong đó có học sinh các lớp chuyên và lớp chọn) ở cấp học đó và cả ở cấp phổ thông cơ sở (nay là trung học cơ sở). Kỳ nào tạp chí cũng ra 10 đề toán trong đó có 5 đề theo chương trình phổ thông trung học và 5 đề theo chương trình phổ thông cơ sở, có những đề rất khó dành cho các học sinh có năng khiếu, đối tượng có thể sẽ tham gia đội tuyển quốc gia và quốc tế, và những đề khó vừa cho các đối tượng học sinh yêu toán, khá toán tương đối rộng. Ngoài ra còn có 2 bài toán Vật lý để luôn nhắc nhở bạn đọc đến các ứng dụng của toán học. Tạp chí cũng đã nắm bắt các yêu cầu của thời đại như đã có các bài về tin học, đã mở mục "ống kính cải cách dạy và học toán", mục "bạn đọc tìm tòi". Tuy nhiên Tạp chí tránh hết sức chạy theo những thị hiếu không đúng đắn của một số bạn đọc như quá thiên về luyện thi, dù là thi quốc gia hay quốc tế, quá thiên về tin học dù cho tin học đang là mốt của thời đại. Chúng tôi nghĩ rằng các giải thưởng quốc gia hay quốc tế là những bông hoa đẹp hái được dọc đường, rất có tác dụng khích lệ nhưng chưa phải là cái đích cuối cùng, còn tin học, dù rất quan trọng, cũng phải dựa trên một nền toán học cơ bản, vững chắc thì mới phát triển được, mới làm cho tin trở thành một trong những mũi nhọn đưa nước ta tiến lên có sức cạnh tranh với thế giới...

...Trên đây là nói đến những đổi mới trong nội dung của tạp chí những năm gần đây. Những nội dung đã có từ trước mà vẫn tiếp tục phát huy tác dụng tốt thì chúng tôi vẫn tiếp tục duy trì, cố chọn lọc được các bài tốt để đăng.

Riêng mục "Nói chuyện với các bạn trẻ yêu toán", chúng tôi thấy rằng các nhà toán học, các thầy dạy toán, nếu có điều gì muốn gửi gắm đến các bạn trẻ yêu toán thì có thể lồng vào các mục khác. Chúng tôi cũng muốn cho tạp chí có những tranh vui, những mẩu chuyện gây cười có tác dụng thư giãn... Chúng tôi cũng cố cho tạp chí ra đúng vào ngày 15 hàng tháng ở Hà Nội và một vài ngày sau thì đến các địa phương như lòng mong muốn của độc giả, nhưng đôi khi còn vi phạm vì chưa chủ động được công việc chế bản, in-ấn và phát hành.

... Nhân dịp nhận Huân chương Lao động hạng Nhì lần thứ hai, tạp chí THvTT xin tỏ lòng biết ơn đối với Nhà nước, đối với Bộ Giáo dục và Đào tạo đã ghi nhận sự đóng góp của tạp chí trên 30 năm qua và đặc biệt trên 10 năm gần đây để một lần nữa lại tặng tạp chí HUÂN CHƯƠNG cao quý. Xin được bày tỏ lòng biết ơn đối với các cơ quan, đoàn thể và các cá nhân đã hỗ trợ, giúp đỡ, cộng tác với tạp chí làm nên thành tích này.

Đặc biệt xin được bày tỏ lòng biết ơn đối với Nhà xuất bản Giáo dục đã tạo mọi điều kiện về tinh thần và vật chất để cho tạp chí THvTT không những khôi phục lại được sức sống thuở ban đầu, mà còn phát triển mạnh hơn trước.

Hy vọng rằng rồi đây Nhà nước sẽ có chính sách ở tầm vĩ mô trong việc sử dụng các nhà toán học, các thầy dạy toán, bồi dưỡng các học sinh năng khiếu toán và không chỉ dừng ở bậc học phổ thông. Được như vậy thì tạp chí THvTT sẽ tồn tại mãi mãi, luôn luôn theo kịp thời đại để góp phần khiêm tốn của mình cho sự nghiệp xây dựng đất nước".

https://tieulun.hopto.org

https://www.facebook.com/letrungkienmath https://sites.google.com/site/letrungkienmath

Dành cho các bạn Trung học Cơ sở

MỘT DẤU HIỆU VỀ TỨ GIÁC NGOẠI TIẾP

NGUYỄN KHÁNH NGUYÊN
(Hải Phòng)

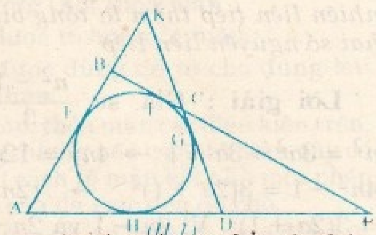
Chúng ta đã biết trong chương trình toán cấp 2 (cũ) có một dấu hiệu nhận biết tứ giác ngoại tiếp là : "Tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn khi và chỉ khi $AB + CD = AD + BC$".

Việc chứng minh và vận dụng dấu hiệu này vào bài tập đối với chúng ta rất quen thuộc. Tuy nhiên có một số bài toán mà việc sử dụng dấu hiệu trên không đưa lại kết quả, chẳng hạn như bài toán sau :

* BÀI TOÁN 1 : Cho D là điểm trong của tam giác ABC. Nối AD, BD, CD cắt các cạnh đối diện tương ứng tại X, Y, Z. Chứng minh rằng nếu hai trong ba tứ giác $DYAZ$, $DZBX$, $DXCY$ ngoại tiếp đường tròn thì tứ giác thứ ba cũng thế. (Đề dự tuyển thi Toán Quốc tế năm 1986).

– Bài toán này đã được đưa lên báo THTT (bài 10/15) và kết quả là không học sinh nào giải được ! !

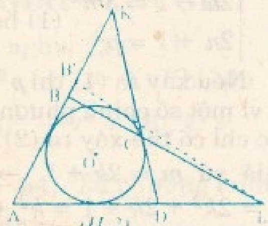
Để giải được bài toán trên chúng ta phải biết dấu hiệu sau :



I. **Định lý 1 :** Cho tứ giác $ABCD$. Kéo dài các cặp cạnh đối AB và CD cắt nhau tại K, BC và AD cắt nhau tại L, hai đoạn DK và BL cắt nhau. Khi đó tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp nếu và chỉ nếu thỏa mãn một trong 2 điều kiện sau : a) $BK + BL = DK + DL$ (1)

b) $CK + AL = AK + CD$ (2)

– Chứng minh : Ở đây ta chỉ chứng minh trường hợp a) còn trường hợp b) hoàn toàn tương tự.



• Giả sử tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp (h. 1), nếu ký hiệu như hình vẽ ta có :

$BK + BL = (EK - BE) + + (BF + FL) =$
$= (KG - BE) + (BF + HL) = KG + HD + DL =$
$= KG + GD + DL = DK + DL.$

Ngược lại, giả sử có (1), ta sẽ chứng minh tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp. Giả sử tứ giác $ABCD$ không ngoại tiếp. Vẽ đường tròn (O) tiếp xúc với các cạnh của $\Delta KAD \Rightarrow (O)$ Không tiếp xúc với BC (h.2)

• Giả sử đường tròn (O) cắt BC (trường hợp (O) không cắt BC lý luận tương tự).

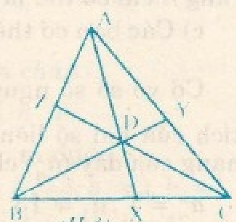
– Từ L vẽ tiếp tuyến với (O) cắt AK tại B' (B' nằm giữa B và K) Ta có :

$$\begin{cases} BK + BL = DK + DL \\ B'K + B'L = DK + DL \end{cases} \text{(1) (theo chứng minh trên)}$$

$\Rightarrow BK + BL = B'K + B'L \Rightarrow BK - B'K = B'L - BL$
$\Rightarrow BB' = B'L - BL$ (vô lí !)

Vậy (O) phải tiếp xúc với BC. Định lý được chứng minh xong.

Bây giờ ta sẽ áp dụng định lý 1 để giải bài toán 1. (xem h.3)



* Giả sử hai tứ giác $DZBX$ và $DXCY$ ngoại tiếp.

Theo định lý 1 ta có : $\begin{cases} AB + CD = BC + AD \\ BC + AD = AC + BD \end{cases}$

$\Rightarrow AB + CD = AC + BD \Rightarrow$ tứ giác $DYAZ$ ngoại tiếp.

– Bây giờ ta sẽ vận dụng định lý 1 để giải các bài toán sau :

* BÀI TOÁN 2 : Cho tứ giác $ABCD$. Kéo dài AB và DC cắt nhau tại K, kéo dài BC và AD cắt nhau tại L, các đoạn BL và DK cắt nhau. Qua K và L vẽ hai đường thẳng chia tứ giác $ABCD$ thành 4 tứ giác nhỏ. Chứng minh rằng nếu hai tứ giác nhỏ (không có cạnh chung) mà ngoại tiếp thì tứ giác $ABCD$ cũng ngoại tiếp.

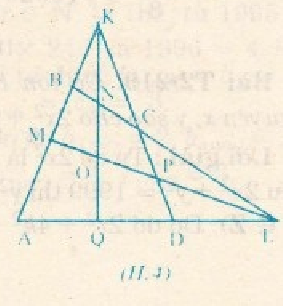
– Chứng minh : * Ký hiệu như hình 4. Ta xét hai trường hợp :

a) Hai tứ giác $AMOQ$ và $ONCP$ ngoại tiếp :

Khi đó theo định lý 1, ta có :

$$\begin{cases} AK + OL = AL + OK \\ OK + CL = OL + CK \end{cases}$$

(Xem tiếp trang bìa 4)



https://tieulun.hopto.org

https://www.facebook.com/letrungkienmath https://sites.google.com/site/letrungkienmath

Bài T1/219. *Chứng minh rằng nếu n là số tự nhiên thỏa mãn $\frac{n^2-1}{3}$ là tích của hai số tự nhiên liên tiếp thì n là tổng bình phương của hai số nguyên liên tiếp*

Lời giải : Giả sử $\frac{n^2-1}{3} = a(a+1) \rightarrow n^2 = 3a^2 + 3a + 1 \rightarrow 4n^2 = 12a^2 + 12a + 4 \rightarrow 4n^2 - 1 = 3(2a+1)^2 \rightarrow (2n-1)(2n+1) = 3(2a+1)^2$. Vì $2n-1$ và $2n+1$ là hai số lẻ liên tiếp nên chúng nguyên tố cùng nhau

Vậy ta có hai khả năng

$$\begin{cases} 2n-1 = 3m^2 \\ 2n+1 = p^2 \end{cases} (1) \text{ hoặc } \begin{cases} 2n-1 = m^2 \\ 2n+1 = 3p^2 \end{cases} (2)$$

Nếu xảy ra (1) thì $p^2 = 3m^2 + 2$ điều này vô lí vì một số chính phương chia 3 dư 0 hoặc 1. Do đó chỉ có thể xảy ra (2). Từ (2) ta có m là số lẻ. Giả sử $m = 2k+1$. $\rightarrow 2n = 4k^2 + 4k + 2 \rightarrow n = 2k^2 + 2k + 1 = k^2 + (k+1)^2$.

Nhận xét : a) Các bạn sau đây có lời giải tốt : *Vũ Trung Bảng* (Quỳnh Hoa, Quỳnh Phụ Thái Bình) *Nguyễn Thu Hà* (TP Hồ Chí Minh) *Ngô Anh Quân* 8A Bế Văn Đàn, *Vũ Thanh Hùng* 9T Đông Anh Hà Nội, *Bùi Đăng Quang* 9A Tam Đảo, *Dương Ngọc Sơn* 8 Toán Ninh Bình, *Lê Ngọc Anh* 8T Năng khiếu Thanh Hóa, *Nguyễn Anh Tú* 9T Nghĩa Tân Hà Nội, *Đinh Thế Trường* 9T Kiến Xương, Thái Bình, *Trần Anh Kiên* 8T Bỉm Sơn, Thanh Hóa.

b) Có ba bạn có lời giải sai khi chứng minh rằng n chỉ có thể là 13.

c) Các bạn có thể chứng minh được rằng :

Có vô số số nguyên dương n mà $\frac{n^2-1}{3}$ là tích của hai số liên tiếp. Cụ thể đó là các số hạng của dãy (a_n) cho bởi quy luật sau :

$a_0 = 1$, $a_1 = 13$, $a_{n+2} = 14a_{n+1} - a_n$

Chẳng hạn $a_2 = 181 = 9^2 + 10^2$

$$\frac{a^2-1}{3} = 10920 = 104 \,.\, 105$$

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T2/219. *Có tồn tại hay không các số nguyên x, y sao cho $2x^2 + y^2 = 1999$? Tại sao ?*

Lời giải : Ta có $2x^2$ là chẵn còn 1999 lẻ nên nếu $2x^2 + y^2 = 1999$ thì y^2 lẻ. Suy ra $y = 2k+1$. $(k \in \mathbf{Z})$. Do đó $2x^2 + 4k^2 + 4k = 1998$. Vì 1998 chia cho 4 dư 2 nên $2x^2$ không chia hết cho 4. Suy ra x lẻ. Đặt $x = 2l + 1$. Từ đó :

$$2(2l+1)^2 + 4k^2 + 4k = 1998$$
$$\Leftrightarrow 8l^2 + 8l + 4k^2 + 4k = 1996$$
$$\Leftrightarrow 8l(l+1) + 4k(k+1) = 1996$$

Dễ thấy vế trái chia hết cho 8 mà 1996 không chia hết cho 8. Vô lí. Vậy không tồn tại x, y nguyên sao cho $2x^2 + y^2 = 1999$

Nhận xét :

Giải tốt bài này có các bạn :

Nguyễn Việt Cường, 9CT, THCS Năng khiếu Thái Nguyên, Bắc Thái, *Nguyễn Thu Hằng*, 9NK Bắc Ninh, Hà Bắc, *Nguyễn Mạnh Thắng*, 9CT, Chuyên cấp II Phú Thọ, Vĩnh Phú, *Nguyễn Hà Duy*, 9T Chuyên VT Phú Xuyên, *Đỗ Anh Tuấn*, 9 Chuyên VT Thường Tín, Hà Tây, *Phạm Anh Tùng*, 8T PTNK Hải Dương, Hải Hưng, *Nguyễn Hà Minh*, 8A$_1$ Hồng Bàng, Hải Phòng, *Phạm Tuấn Anh*, 8A Lương Thế Vinh, *Nguyễn Việt Hải*, 8CT Ngô Sĩ Liên, *Nguyễn Anh Tú*, 9CT Nghĩa Tân, *Nguyễn Quốc Tuấn*, 9A$_1$ THCS Giảng Võ, *Ngô Anh Quân*, *Đào Phương Bắc*, *Đào Phương Nam* 8A Bế Văn Đàn, *Vũ Thanh Hùng*, 9T Chuyên Đông Anh, Hà Nội, *Mai Ngọc Khương*, 6T, *Phạm Đình Quốc Hưng*, 7T, *Hà Thanh Tuấn*, *Vũ Trần Cương*, *Trần Minh Toàn*, *Phạm Ngọc Hưng* 8T, *Trần Ngọc Anh*, *Đỗ Quốc Bảo*, 9T, Trần Đăng Ninh, Nam Định, Nam Hà, *Nguyễn Thái Sơn*, 9T, NK Nga Sơn, *Trần Hữu Công*, 8T NK Bỉm Sơn, *Trịnh Anh Minh* 9C, THCS Năng khiếu Thanh Hóa, *Nguyễn Thái Bảo*, 8A PTTH cấp 2 Diễn Xuân, Diễn Châu, Nghệ An, *Trần Thị Thủy*, *Nguyễn Mỹ Hạnh*, *Nguyễn Đức Xuân Bình*, 9T NK Hà Tĩnh, *Nguyễn Quốc Tuấn*, Trường Đào Duy Từ, Quảng Bình, *Mai Xuân Hiếu*, 9A, Đống Đa, Quy Nhơn, Bình Định, *Nguyễn Minh Quân*, 8T Chuyên Nghĩa Hành, Quảng Ngãi, *Trần Tuấn Anh*, 8T Lê Quý Đôn, Nha Trang, Khánh Hòa, *Phan Thị Thu Hằng*, 9T trường Bồi dưỡng GD Biên Hòa, Đồng Nai, *Nguyễn Tuấn Anh*, 9T Chuyên Phan Chu Trinh, Buôn Mê Thuột, Đắc Lắc, *Đoàn Ngọc Minh*, 8CT, Hiệp Thành, Thủ Dầu Một, Sông Bé, *Võ Quang Tấn Thọ*, 9A Trương Công Định, *Phạm Minh Hùng*, 9T Nguyễn Du, Gò Vấp, TP Hồ Chí Minh.

VŨ KIM THỦY

Bài T3/219. *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases} x^4 + y^2 = \dfrac{698}{81} & (1) \\ x^2 + y^2 + xy - 3x - 4y + 4 = 0 & (2) \end{cases}$$

Lời giải : Theo *Trần Đức Sơn*, 8, Chuyên Ba Đồn, Quảng Trạch, Quảng Bình, *Trần Tuấn Anh*, 8T, Lê Quý Đôn, Nha Trang, Khánh Hòa.

Giả sử hệ phương trình có nghiệm. Ta thấy (2) tương đương với :

$$x^2 + (y-3)x + (y-2)^2 = 0$$

https://tieulun.hopto.org

Để phương trình này có nghiệm đối với x ta phải có

$$\Delta = (y-3)^2 - 4(y-2)^2 \geq 0$$

hay $$(y-1)(3y-7) \leq 0$$

từ đó suy ra $1 \leq y \leq \dfrac{7}{3}$ (3)

Mặt khác phương trình (2) cũng tương đương với

$$y^2 + (x-4)y + x^2 - 3x + 4 = 0$$

Để phương trình này có nghiệm đối với y ta phải có :

$$\Delta = (x-4)^2 - 4(x^2 - 3x + 4) \geq 0.$$

hay $$x(3x-4) \leq 0$$

từ đó suy ra $0 \leq x \leq \dfrac{4}{3}$ (4)

Từ (3) và (4) ta có :

$$x^4 + y^2 \leq \frac{256}{81} + \frac{49}{9} = \frac{697}{81} < \frac{698}{81}$$

không thỏa mãn (1). Vậy hệ phương trình đã cho vô nghiệm.

Nhận xét : Tất cả các bạn gửi lời giải đều giải đúng. Các bạn sau đây có lời giải tốt : *Nguyễn Thu Thủy, Nguyễn Thu Hằng*, 9T, NK Bắc Ninh ; *Vũ Xuân Vinh*, 9, NK Yên Phong, Hà Bắc ; *Phạm Hoàng Anh*, 9, Chuyên V–T Thường Tín, Hà Tây. *Bùi Đăng Quang*, 9A, Chuyên Tam Đảo ; *Hà Thanh Hùng*, 9T, Chuyên Phú Thọ, Vĩnh Phú. *Lê Hoàng Anh*, 9A$_1$, Giảng Võ, Ba Đình, *Nguyễn Lan Anh*, 9A, Trưng Nhị, *Vũ Thanh Hùng*, 9T, Chuyên Đông Anh ; *Đặng Minh Thắng*, 9CL, Ái Mộ, Gia Lâm, *Nguyễn Anh Tú, Hồ Xuân Hùng*, 9CT, Từ Liêm ; *Phạm Quang Vinh*, 9A ; *Đào Phương Bắc, Đào Phương Nam*, 8A, Bế Văn Đàn, Hà Nội. *Đoàn Mạnh Hà*, 9A, Tiên Lãng ; *Đoàn Anh Tuấn*, Kiến Thụy ; *Cao Xuân Hòa, Đào Trần Minh, Lê Hà Phương*, 9A$_1$, Hồng Bàng, Hải Phòng. *Vũ Trung Bảng*, Quỳnh Hoa, Quỳnh Phụ ; *Nguyễn Kim Cương, Trịnh Thế Thường, Phan Thanh Nhàn*, 9T, *Trần Văn Hà* 7T, NK Kiến Xương, Thái Bình. *Nguyễn Huy Vũ*, 8CT, NK Nho Quan ; *Nguyễn Sơn Hà*, 9B, NK Yên Mô, *Đinh Phúc Công, Nguyễn Văn Thành*, 9T, NK Gia Viễn, *Phạm Tuấn Khanh, Nguyễn Thanh Sơn, Đỗ Thị Thanh Hương*, 9, NK Kim Sơn, Ninh Bình. *Nguyễn Nguyên Ngọc* 8, Chuyên Đông Sơn, *Nguyễn Văn Quang*, 9T, Lam Sơn ; *Cao Thị Loan*, 9T, NK Nga Sơn, Thanh Hóa ; *Võ Sĩ Nam* 9CT, NK Đức Thọ, *Nguyễn Mai Phương, Trần Thị Thủy, Nguyễn Mỹ Hạnh, Nguyễn Quang Trung*, 9CT, NK Hà Tĩnh.

TÔ NGUYÊN

Bài T4/219. *Cho tam giác cân ABC (AB = AC). Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC. Lấy điểm I trên MN sao cho IM : IN = 1 : 2. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác. Chứng minh IO vuông góc với BN*

Lời giải : (dựa theo Cao Xuân Sinh – 9 Toán – Nga Liên – Nga Sơn – Thanh Hóa).

Gọi G là trọng tâm ΔABC, trong ΔMNC ta có :

$\dfrac{IM}{IN} = \dfrac{1}{2}$ (gt)

$\dfrac{GM}{GC} = \dfrac{1}{2}$ (tính chất trọng tâm trong tam giác)

Vậy $\dfrac{IM}{IN} = \dfrac{GM}{GC}$, và do đó $IG \parallel NC$. Hơn nữa $OA = OC$; $NA = NC$ nên ΔOAC cân và trung tuyến ON cũng là đường cao, hay $ON \perp AC$, do đó $ON \perp IG$ (1). Mặt khác ΔABC cân đỉnh A nên O, G nằm trên đường cao qua A, nên $OG \perp BC$, mà $MN \parallel BC$ (vì MN là đường trung bình trong ΔABC) nên $OG \perp IN$ (2). Kết hợp (2) với (1), ta có O là trực tâm ΔIGN, suy ra $IO \perp BN$.

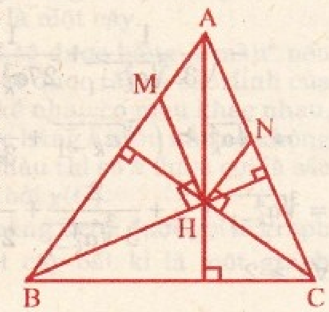
Nhận xét. Có 136 bài giải, đều giải đúng. Có bài dùng diện tích, có bài dùng vectơ để giải, thường chưa ngắn gọn. Lời giải tốt gồm có : *Cao Xuân Sinh* (9 – Toán – Nga Liên – Nga Sơn – Thanh Hóa), *Tiêu Công Thắng* (Năng Khiếu – Bỉm Sơn – Thanh Hóa), *Đoàn Mạnh Hà* (9A – Tiên Lãng – Hải Phòng), *Bùi Đăng Quang* (Chuyên Tam Đảo – Vĩnh Phú), *Đỗ Minh Châu* (9T, chuyên Đông Anh, Hà Nội), *Đỗ Huy Dũng* (9B – Thiệu Vân – Đông Sơn – Thanh Hóa), *Trần Thanh Tâm* (8^1 Đông Mỹ – Quảng Bình), *Đỗ Quốc Bảo* (9T Trần Đăng Ninh – Nam Định – Nam Hà), *Nguyễn Ngọc Mạnh* (9B – Chuyên Văn – Toán – Ứng Hòa – Hà Tây), *Nguyễn Sơn Hà* (9B Năng khiếu – Yên Mô – Ninh Bình), *Nguyễn Thanh Nhỏ* (8 Toán – Phan Chu Trinh – Buôn Mê Thuột – Đăk – Lăk), *Đào Phương Bắc* (8A – Bế Văn Đàn – Hà Nội), *Phạm Tuấn Khanh* (9 Năng khiếu – Bỉm Sơn – Thanh Hóa), *Nguyễn Thị Mi Hoàng* (9 toán – Lê Khiết – Quảng Ngãi), *Phạm Hoàng Anh* (9 chuyên Văn – Toán – Thường Tín – Hà Tây), *Phan Thị Thu Hằng* (9 Toán – BDGD Biên Hòa – Đồng Nai), *Trần Hồng Quang* (9 Toán – Chuyên Bắc Giang – Hà Bắc).

ĐẶNG VIỄN

Bài T5/219. *Cho tam giác nhọn ABC, trực tâm H. Chứng minh rằng*

$$HA + HB + HC < \frac{2}{3}(AB + BC + CA).$$

Lời giải : Do tam giác ABC nhọn nên H nằm ở bên trong tam giác đó. Từ H kẻ $HM \parallel AC$; $HN \parallel AB$ ($M \in AB$; $N \in AC$). Ta có trong ΔAMH : $HA < AM + MH$.



https://tieulun.hopto.org

Hơn nữa, $AMHN$ là hình bình hành nên $MH = AN$, do đó $HA < AM + AN$ (1). Do H là trực tâm và $HN \parallel AB$; $HM \parallel AC$ nên các tam giác BHM, CHN vuông tại H, và ta có :

$$HB < BM \;;\; HC < CN \qquad (2).$$

Kết hợp (2) với (1), ta có :

$HA + HB + HC < AB + AC$. Một cách tương tự, ta cũng có : $HA + HB + HC < BC + BA$

và $HA + HB + HC < CA + CB$

Vậy $3(HA+HB+HC) < 2(AB+BC+CA)$ hay :

$$HA + HB + HC < \frac{2}{3}(AB + BC + CA).$$

Nhận xét : Có 83 bạn giải bài này, tất cả đều giải đúng. Các bạn sau đây có lời giải tốt : *Trần Tuấn Anh* (8 Toán – Lê Quý Đôn – Nha Trang), *Ngô Anh Quân* (8A Bế Văn Đàn – Hà Nội), *Phạm Minh* (9 Toán – Nguyễn Du – Gò Vấp – TP Hồ Chí Minh), *Đoàn Ngọc Minh* (8Đ – Hiệp Thành – Thủ Dầu Một – Sông Bé), *Nguyễn Trung Hiếu* (9 Toán – PTCS Năng khiếu – Kiến Xương – Thái Bình), *Lê Lâm* (9 Toán – Chuyên CII Phú Thọ – Vĩnh Phú), *Lê Ngọc Anh* (8 Toán – Năng khiếu Bỉm Sơn – Thanh Hóa), *Mai Tùng Sơn* (9T – Trung học Năng khiếu Hà Tĩnh), *Nguyễn Hồng Anh* (10A – ĐHSP Hà Nội I).

ĐẶNG VIỄN

Bài T6/219. *Dãy số $\{a_n\}$ được xác định như sau :*

$$a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n + \frac{1}{\sqrt[3]{a_n}}\ (n \geq 1)$$

Tìm tất cả các số thực α sao cho dãy $\{u_n\}$ xác định bởi $u_n = \frac{a_n^{\alpha}}{n}$ $(n \geq 1)$ hội tụ và giới hạn của nó khác không.

Lời giải. Từ cách xác định dãy $\{a_n\}$ dễ thấy $a_n > 0$, $\forall n \geq 1$ và $a_n^4 > \left(\sqrt[3]{a_{n-1}^4} + \frac{4}{3}\right)^3$, $\forall n \geq 2$. Suy ra $\sqrt[3]{a_n^4} > \sqrt[3]{a_{n-1}^4} + \frac{4}{3}$, $\forall n \geq 2 \Rightarrow$

$$\sqrt[3]{a_n^4} > \frac{4}{3}(n-1),\ \forall n \geq 2 \qquad (1).$$

Mặt khác, từ công thức xác định dãy $\{a_n\}$ ta lại có :

$$a_k = \left(\sqrt[3]{a_{k-1}} + \frac{1}{3a_{k-1}}\right)^3 - \left(\frac{1}{3\sqrt[3]{a_{k-1}^5}} + \frac{1}{27a_{k-1}^3}\right),\ \forall k \geq 2$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{a_k^4} < \left(\sqrt[3]{a_{k-1}} + \frac{1}{3a_{k-1}}\right)^4 =$$

$$= \sqrt[3]{a_{k-1}^4} + \frac{4}{3} + \frac{2}{3\sqrt[3]{a_{k-1}^4}} + \frac{4}{27\sqrt[3]{a_{k-1}^8}} + \frac{1}{81a_{k-1}^4},$$

$\forall k \geq 2$

Do đó, với mỗi $n \geq 4$ ta đều có :

$$\sqrt[3]{a_n^4} < 1 + \frac{4}{3}(n-1) + \frac{2}{3}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{\sqrt[3]{a_{k-1}^4}} + \frac{4}{27}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{\sqrt[3]{a_{k-1}^8}} + \frac{1}{81}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{a_{k-1}^4} \qquad (2)$$

Dựa vào (1) và dựa vào bất đẳng thức Bunhiacôpxki ta sẽ được :

• $$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{\sqrt[3]{a_{k-1}^4}} = 1 + \sum_{k=3}^{n}\frac{1}{\sqrt[3]{a_{k-1}^4}} < 1 + \frac{3}{4}\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k-2} < 1 + \frac{3}{4}\sqrt{(n-2)\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{(k-2)^2}} <$$

$$< 1 + \frac{3}{4}\sqrt{(n-2)\left(1 + \sum_{k=4}^{n}\frac{1}{(k-3)(k-2)}\right)} =$$

$$= 1 + \frac{3}{4}\sqrt{(n-2)\left(2 - \frac{1}{n-2}\right)} < 1 + \frac{3}{4}\sqrt{2(n-2)} \qquad (3)$$

• $$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{\sqrt[3]{a_{k-1}^8}} = 1 + \sum_{k=3}^{n}\frac{1}{\left(\sqrt[3]{a_{k-1}^4}\right)^2} <$$

$$< 1 + \frac{9}{16}\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{(k-2)^2} < 1 + \frac{9}{8} = \frac{17}{8} \qquad (4)$$

• $$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{a_{k-1}^4} = 1 + \sum_{k=3}^{n}\frac{1}{\left(\sqrt[3]{a_{k-1}^4}\right)^3} <$$

$$< 1 + \frac{27}{64}\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{(k-2)^3} < 1 + \frac{27}{64}\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{(k-2)^2} <$$

$$< 1 + \frac{27}{32} = \frac{59}{32} \qquad (5)$$

Từ (2), (3), (4), (5) ta được :

$$\sqrt[3]{a_n^4} < \frac{4}{3}n + \frac{1}{2}\sqrt{2(n-2)} + \frac{35}{54} + \frac{1}{81}\cdot\frac{59}{32}$$

$\forall n \geq 4$ (6)

Từ (1) và (6) suy ra :

$$\frac{4}{3}\left(1 - \frac{1}{n}\right) < \frac{a_n^{4/3}}{n} < \frac{4}{3} + \frac{1}{2n}\sqrt{2(n-2)} + \frac{35}{54n} + \frac{1}{8}\cdot\frac{59}{32}\cdot\frac{1}{n},\ \forall n \geq 4 \qquad (7)$$

Vì $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4}{3}\left(1 - \frac{1}{n}\right) =$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{3} + \frac{1}{2n}\sqrt{2(n-2)} + \frac{35}{54n} + \frac{1}{81}\cdot\frac{59}{32}\cdot\frac{1}{n}\right) = \frac{4}{3}$$

nên từ (7) suy ra $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n^{4/3}}{n} = \frac{4}{3}$. Như vậy $\alpha = \frac{4}{3}$ là một giá trị cần tìm.

https://tieulun.hopto.org

Do $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ suy ra từ (1)) nên :

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{\alpha-\frac{4}{3}} = \begin{cases} +\infty & \text{nếu } \alpha > \dfrac{4}{3} \\ 0 & \text{nếu } \alpha < \dfrac{4}{3} \end{cases}$$

Kết hợp với $\dfrac{a_n^\alpha}{n} = \dfrac{a_n^{4/3}}{n} \cdot a_n^{\alpha-\frac{4}{3}}$ suy ra :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n^\alpha}{n} = \begin{cases} +\infty & \text{nếu } \alpha > \dfrac{4}{3} \\ 0 & \text{nếu } \alpha < \dfrac{4}{3} \end{cases}$$

Vậy $\alpha = \dfrac{4}{3}$ là giá trị duy nhất để dãy $\{u_n\}$ hội tụ và giới hạn của nó khác không.

Nhận xét : 1. Có 8 bạn gửi lời giải cho bài toán. Trong số đó chỉ có các bạn : *Ngô Đức Duy* (12CT THPT Trần Phú – Hải Phòng), *Nguyễn Vũ Hưng* (12D Chuyên Ngữ ĐHQG Hà Nội) và *Lê Anh Vũ* (12CT Quốc học Huế) có lời giải đúng. Bạn Vũ cho lời giải khá phức tạp ; bạn Hưng phải dùng tới các kiến thức vượt ra ngoài chương trình THPT để giải bài toán.

2. Bạn **Ngô Đức Duy** đã đề xuất và giải tốt *Bài toán khái quát* sau : "*Cho số thực dương a và số thực âm b. Cho dãy số $\{a_n\}$ được xác định bởi $a_o = a$, $a_{n+1} = a_n + a_n^b$ $\forall n \geq 0$. Tìm tất cả các số thực α sao cho dãy $\{u_n\}$ được xác định bởi $u_n = \dfrac{a_n^\alpha}{n}$, $\forall n \geq 1$ hội tụ và giới hạn của nó khác không*". (Đáp số : $\alpha = 1 - b$).

NGUYỄN KHẮC MINH

Bài T7/219. *Cho n, p là số tự nhiên và $3p = n^2 + n$. Tìm giá trị của*

$$S = \frac{7\sum\limits_{k=1}^{n} k^6 + 5(p+1)\sum\limits_{k=1}^{n} k^4 + p\sum\limits_{k=1}^{n} k^2}{7\sum\limits_{k=1}^{n} k^6 - 5(p-1)\sum\limits_{k=1}^{n} k^4 - p\sum\limits_{k=1}^{n} k^2}$$

Lời giải : (của bạn *Trần Nguyên Ngọc* 11B – ĐHTH Hà Nội và *Trần Nam Dũng* 10CT Phan Bội Châu, Nghệ An)

Kí hiệu $S_i = 1^i + 2^i + ... + n^i = \sum\limits_{k=1}^{n} k^i$

Ta có $(x+1)^{i+1} - x^{i+1} =$
$= C^1_{i+1}\, x^i + C^2_{i+1}\, x^{i-1} + ... + C^i_{i+1}\, x + 1.$

Lần lượt thay $x = 1, 2, 3, ..., n$ rồi cộng lại ta thu được

$(n+1)^{i+1} - 1 =$
$= C^1_{i+1}\, S_i + C^2_{i+1}\, S_{i-1} + ... + C^i_{i+1}\, S_1 + n$

Áp dụng công thức này lần lượt cho $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ta thu được

$$S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$S_4 = n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$$

$$S_6 = n(n+1)(2n+1)[3n^2(n+1)^2 - (3n^2+3n-1)]$$

Mặt khác $p = \dfrac{n(n+1)}{3}$ do đó

$$7S_6 = S_2(27p^2 - 9p + 1)$$

$$5(p+1)S_4 = S_2(p+1)(9p-1)$$

$$5(p-1)S_4 = S_2(p-1)(9p-1)$$

Vậy

$$S = \frac{S_2[27p^2 - 9p + 1 + 9p^2 + 8p - 1 + p]}{S_2[27p^2 - 9p + 1 - 9p^2 + 10p - 1 - p]} = \frac{36p^2}{18p^2} = 2$$

Nhận xét : Ngoài hai bạn Ngọc và Dũng ra các bạn sau cũng có lời giải tốt : *Phan Anh Huy* 11A Lê Quý Đôn, *Thái Minh Hoàng* 12T Vĩnh Long, *Lê Văn Mạnh* 12CT Hòa Bình, *Nguyễn Xuân Tương* 11A Vinh, *Nguyễn Anh Hoa* 10A Nam Hà, *Nguyễn Anh Kiệt* 11T, Phú Yên.

Nhiều bạn cho đáp số sai.

ĐẶNG HÙNG THẮNG

Bài T8/219. *Cho $x, y, z \geq 0$, $x + y + z = 1$, $n \in \mathbf{N}$. Hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức*

$$P = x^n y + y^n z + z^n x.$$

Lời giải : (của Nguyễn Hồng Minh, Nguyễn Quang Hải, Phạm Quang Hưng, 12CT, Hùng Vương, Vĩnh Phú)

1) Với $n = 0$ thì $P = x + y + z = 1$. Vậy $\max P = 1$

2) Với $n = 1$ thì $P = xy + yz + zx \leq$

$$\leq \frac{1}{3}(x+y+z)^2 = \frac{1}{3}$$

Vậy $\max P = \dfrac{1}{3}$ khi $x = y = z = \dfrac{1}{3}$.

3) Xét $n > 1$. Không giảm tổng quát, có thể coi $x = \max\{x, y, z\}$.

(+) Do $y \leq x$ nên $y^n z \leq x^{n-1} yz$.

Do $z \leq x$ nên $z^n x \leq zx^n$ và $z^n x \leq z^2 x^{n-1}$.

(+) Mặt khác, vì $n > 1$ nên $\dfrac{n-1}{n} \geq \dfrac{1}{2}$ hay $\dfrac{n-1}{n} z \geq \dfrac{z}{2}$.

Vậy $P = x^n y + y^n z + z^n x \leq$

$$\leq x^n y + x^{n-1} yz + \frac{1}{2} z^n x + \frac{1}{2} z^n x \leq$$

$$\leq x^n y + x^{n-1} yz + \frac{zx^n}{2} + \frac{z^2 x^{n-1}}{2} =$$

https://tieulun.hopto.org

$$= x^{n-1}(x+z)\left(y+\frac{z}{2}\right) \leqslant$$

$$\leqslant x^{n-1}(x+z)\left(y+\frac{n-1}{n}z\right) =$$

$$= n^n.\Big[\underbrace{\frac{x}{n}.\frac{x}{n}\dots\frac{x}{n}}_{}.\frac{x+z}{n}.\left(y+\frac{n-1}{n}z\right)\Big] \leqslant$$

n thừa số

$$n^n\left[\frac{(n-1)\frac{x}{n}+\frac{x+z}{n}+y+\frac{n-1}{n}z}{n+1}\right]^{n+1} =$$

$$= n^n.\frac{(x+y+z)^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} = \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$$

Vậy $\max P = \dfrac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$ khi

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ z=0 \\ \dfrac{x}{n}=\dfrac{x+z}{n}=y+\dfrac{n-1}{n}z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = n/n+1 \\ y = 1/n+1 \\ z = 0 \end{cases}$$

Nhận xét : Các bạn sau đây có lời giải tốt :

Nguyễn Lê Lực 10CT, ĐHTH thành phố HCM, *Trần Nguyên Ngọc* 11CT, ĐHQGHN, *Nguyễn Vũ Hưng* 12D, chuyên ngữ, ĐHQGHN, *Lê Anh Vũ*, 12CT, Quốc học Huế, *Lê Văn An*, 11CT Phan Bội Châu, Nghệ An, *Lê Thế Sơn*, *Trịnh Hữu Trung*, *Nguyễn Ngọc Hưng*, 11T Lam Sơn, Thanh Hóa

NGUYỄN VĂN MẬU

Bài T9/219. *Tìm trong tam giác ABC một điểm M sao cho* $q = \dfrac{BC}{MA'} + \dfrac{CA}{MB'} + \dfrac{AB}{MC'}$ *đạt giá trị nhỏ nhất, trong đó MA', MB' và MC' lần lượt là khoảng cách từ M đến các cạnh BC, CA và AB của tam giác.*

Lời giải. (của nhiều bạn). Đặt : $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, và : $MA' = x$, $MB' = y$, $MC' = z$. Thế thì đại lượng q có dạng :

$$q = \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z}$$

Nếu gọi S là diện tích tam giác ABC, ta có :

$$2S = ax + by + cz$$

Do đó ta được :

$$2Sq = (ax+by+cz)\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\right) = a^2+b^2+c^2+$$

$$+bc\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)+ca\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)+ab\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)$$

$\geqslant a^2+b^2+c^2+2(bc+ca+ab) = (a+b+c)$, hay là :

$2Sq \geqslant 4p^2$, trong đó : $2p = a+b+c$

Vậy :

$\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}+\dfrac{c}{z} = q \geqslant \dfrac{2p^2}{S} = \dfrac{2p}{r}$, trong đó r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác.

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$, tức là khi và chỉ khi M trùng với tâm I đường tròn nội tiếp tam giác :

$$q = \min = \frac{2p}{r} \Leftrightarrow M \equiv I.$$

Nhận xét : 1°) Rất đông, có tới 274 bạn tham gia giải bài toán trên và hầu hết cho lời giải đúng.

2°) Đáng tiếc cũng còn một số bạn giải chưa trọn vẹn, không chỉ ra được giá trị nhỏ nhất của q, thậm chí có gần mười bạn giải sai hoàn toàn do áp dụng BĐT không đúng (kết luận tam giác phải đều ! !)

3°) Có khá đông các bạn ở các trường PTCS cũng tham gia giải bài toán trên. 4°) Một số bạn đã biết đề xuất và giải bài toán tổng quát hơn (thay tam giác bằng đa giác ngoại tiếp được một đường tròn) hoặc bài toán tương tự trong không gian (thay tam giác bằng tứ diện hoặc hình chóp, hình đa diện ngoại tiếp được một hình cầu). Các bạn sau đây có lời giải tốt : *Nguyễn Quang Hải* 12CT chuyên Hùng Vương Vĩnh Phú ; *Vũ Quốc Hùng* 12T Lê Khiết, Quảng Ngãi, *Đỗ Xuân Trọng*, *Đỗ Ngọc Anh* 10A, Lê Hồng Phong, Nam Hà, *Phan Quang Hưng* 12A PTTH chuyên Hùng Vương, Vĩnh Phú.

NGUYỄN ĐĂNG PHÁT

Bài T10/219. *Gọi S là diện tích toàn phần của một tứ diện gần đều ABCD có độ dài các cạnh :* $BC = DA = a$, $CA = DB = b$ *và* $AB = DC = c$. *Chứng minh bất đẳng thức sau đây :*

$$\frac{1}{b^2c^2} + \frac{1}{c^2a^2} + \frac{1}{a^2b^2} \leqslant \frac{9}{S^2} \qquad (*)$$

Dấu bằng xảy ra khi nào ?

Lời giải. Vì tứ diện $ABCD$ là gần đều, nên các mặt là những tam giác bằng nhau : $\overset{\Delta}{BCD} = \overset{\Delta}{ADC} = \overset{\Delta}{DAB} = \overset{\Delta}{CBA}$. Gọi s là diện tích của mỗi mặt, R là bán kính đường tròn ngoại tiếp mỗi mặt và do đó, $4s = S = \dfrac{abc}{R}$; thế thì BĐT (*) cần chứng minh tương đương với BĐT sau đây :

$$a^2 + b^2 + c^2 \leqslant 9R^2 \; ; \qquad (1)$$

Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, ta có :

$$a^2+b^2+c^2 = \overrightarrow{BC}^2 + \overrightarrow{CA}^2 + \overrightarrow{AB}^2 =$$

$$= (\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})^2 + (\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC})^2 + (\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})^2 =$$

$$= 6R^2 - 2(\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}) =$$

$$= 9R^2 - (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})^2 \leqslant 9R^2$$

Dấu đẳng thức đạt được khi và chỉ khi $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$, nghĩa là O trùng với trọng tâm G của tam giác ABC, và do đó, ABC là một tam giác đều và $ABCD$ là một *tứ diện đều*.

Nhận xét : 1°) Có 114 bạn tham gia giải bài toán trên, hầu hết đều cho lời giải đúng. Đáng tiếc, có một bạn giải sai (cho rằng không tồn tại một tứ diện nào thỏa mãn BĐT (*) ! ! !), và cũng còn một vài bạn không chỉ ra được khi nào thì xảy ra đẳng thức.

2°) Số cho lời giải bài toán trên đây bằng cách sử dụng véctơ không nhiều, đa số các bạn đều sử dụng định lý hàm sin và chuyển BĐT (1) về dạng BĐT lượng giác sau đây trong tam giác :

https://tieulun.hopto.org

$$(1) \Leftrightarrow \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \leqslant \frac{9}{4}\ ;\ (2)$$

3°) Cũng có một số bạn, tuy không sử dụng véctơ, nhưng biết vận dụng công thức Lépnít :

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = GA^2 + GB^2 + GC^2 + 3MG^2,\ (\forall M) = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2) + 3MG^2\ ;\ (3)$$

Cho $M \equiv O$, thì được hệ thức :

$$9R^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 9OG^2 \geqslant a^2 + b^2 + c^2$$

4°) Các bạn sau đây có lời giải tốt : *Phạm Văn Khánh* 11T, PTNK Hải Hưng ; *Trần Mạnh Tùng*, 11, *Nguyễn Quang Hải*, 12CT PTTH chuyên Hùng Vương, Vĩnh Phú, *Nguyễn Hồng Chung* 11, *Hồ Sĩ Hiển* 12T Phan Bội Châu, Nghệ An ; *Nguyễn Ngọc Linh* 10T Đào Duy Từ, Quảng Bình, *Lê Duy Diễn* 10T Lam Sơn, Thanh Hóa, *Lê Anh Vũ* 12T, Quốc học Huế, *Nguyễn Anh Kiệt*, 11T Lương Văn Chánh, Phú Yên ; *Lê Thái Nhân* và *Thái Minh Hoàng*, 12T$_1$, chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, Vĩnh Long.

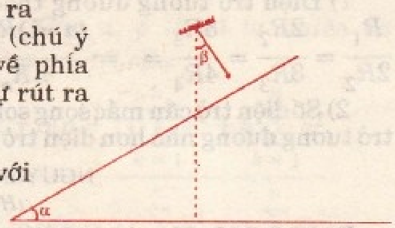
NGUYỄN DĂNG PHẤT

Bài L1/219. *Một con lắc đơn chiều dài l = 0,4m được treo vào trần ôtô đang chuyển động lên dốc (góc nghiêng $\alpha = 30°$). Hãy xác định gia tốc a của ôtô và chu kì dao động bé T của con lắc, biết rằng vị trí cân bằng của con lắc lệch với phương thẳng đứng (về phía trước xe) một góc $\beta = 10°$.*

Lấy $g = 9,8\ m/s^2$.

Hướng dẫn giải. Con lắc chịu tác dụng của 2 lực. Trọng lực $\vec{P}$ và lực căng $\vec{T}$. Áp dụng định luật II Niutơn $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T}$ với a có phương song song với mặt phẳng nghiêng. Áp dụng định lí hàm số sin $\frac{P}{\sin\gamma} = \frac{ma}{\sin\beta}$ với $\gamma = 90° + (\alpha - \beta) = 110°$.

Thay số rút ra $a = 1,81\ m/s^2$ (chú ý là : a hướng về phía dưới). Tương tự rút ra



$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g'}}$ với

$$g' = g\frac{\sin(90° - \alpha)}{\sin\gamma} \approx 9\ m/s\ ;\ \text{từ đó } T = 1,32s.$$

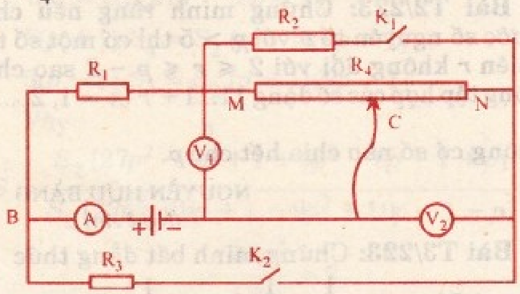
Nhận xét. Các em có lời giải đúng và gọn : *Nguyễn Hồng Minh*, 12A, PTTH chuyên Hùng Vương Vĩnh Phú ; *Nguyễn Vũ Hưng*, 12D chuyên ngoại ngữ, ĐHSPNN Hà Nội ; *Từ Minh Hải*, 12CT, PTTH Buôn Ma Thuột, Đak Lak ; *Lê Thanh Tâm*, 12CL, THCB Lê Quý Đôn, Hà Đông, Hà Tây ; *Trương Minh Đức*, 10F Lam Sơn, Thanh Hóa ; *Nguyễn Quang Trường*, 11CL PTTH chuyên Phan Bội Châu, Nghệ An ; *Phạm Thanh Thế* 11CL, Đào Duy Từ, Đồng Hới, Quảng Bình ; *Lương Văn Hải*, 12A, chuyên Bạc Liêu, Minh Hải.

M.A.

Bài L2/219. *Cho một mạch điện như hình vẽ. Nguồn điện có suất điện động E, điện trở trong $r = 8/3\Omega$, các điện trở $R_1 = 6\Omega$, $R_3 = 12\Omega$; ampe kế, dây nối và các khóa K_1, K_2 có điện trở không đáng kể ; điện trở các vôn kế rất lớn. Khi khóa K_1 ngắt, K_2 đóng và con chạy C ở đầu N thì ampe kế chỉ 0,5A.*

Khi K_1 và K_2 đều đóng, con chạy C ở trong đoạn MN sao cho hai vôn kế có số chỉ như nhau và ampe kế chỉ 0,41A (lấy 0,41 = 9/22).

Tìm suất điện động E của nguồn và điện trở R_4 của vật dẫn MN.



Hướng dẫn giải. Khi K_1 ngắt, K_2 đóng và C ở N, các điện trở mắc : (R_1 nt R_4) // R_3 ; với $I = 0,5A$ rút ra $E = \frac{22R_4 + 180}{3(R_4 + 18)}$ (1).

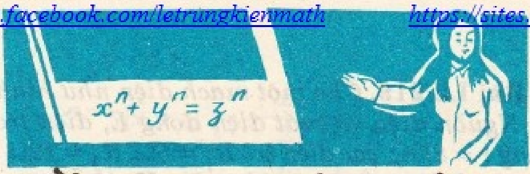
Khi K_1 và K_2 đóng, mạch điện có dạng mạch cầu : $R_{MN} = R_2$; đặt $R_{MC} = R_x$, $R_{CN} = R_y$. Vì hai vôn kế có cùng số chỉ nên $U_{MN} = 0 \rightarrow$ mạch cần cân bằng, rút ra $R_y = 2R_x$ (chú ý : $R_x + R_y = R_4$).

Từ đó $I_x = 2I_y$. Biết $I_x + I_y = I = 0,41 = 9/22$, rút ra $I_x = \frac{3}{11}$(A). Áp dụng định luật Ôm : $U_{BC} = E - rI'$ và $U_{BC} = I_x(R_1 + R_x)$, rút ra $E = \frac{R_4 + 30}{11}$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $R_4 = 36\Omega$ (loại nghiệm $R_4 = -\frac{10}{3}\ \Omega$) và $E = 6V$.

Nhận xét. Các em có lời giải đúng và gọn : *Nguyễn Trọng Nguyên* 10A$_2$ Lê Quý Đôn, Đà Nẵng ; *Nguyễn Thanh Long*, 10L, PTTH Đào Duy Từ, Đồng Hới ; *Lý Minh Hiếu*, 10A$_1$, Bắc Kiến Xương, Thái Bình ; *Nguyễn Mậu Phú Liêm*, 11T, chuyên Lê Khiết, Quảng Ngãi ; *Thái Minh Trí*, 11T$_2$,TH chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, Vĩnh Long ; *Nguyễn Đình Thịnh*, 11CL, PTTH Phan Bội Châu, Vinh, Nghệ An ; *Vũ Duy Hải*, 11CL Lê Hồng Phong, Nam Định ; *Nguyễn Tuân*, 11A, PTTH Đông Thụy Anh, Thái Bình, *Bùi Thanh Tân*, 12A$_1$, PTTH Châu Thành, Bà Rịa, Vũng Tầu, *Lê Xuân Quyền*, 11A, PTTH Hoằng Hóa 1, Thanh Hóa ; *Đinh Ngọc Nhân*, 11CL, PTTH Đào Duy Từ, Quảng Bình, *Phạm Quang Hưng*, 12A, PTTH chuyên Hùng Vương, Vĩnh Phú ; *Nguyễn Trọng Trần Hòa*, 10 Lí C, Quảng Bình.

M.A.

https://tieulun.hopto.org



ĐỀ RA KÌ NÀY

CÁC LỚP THCS

Bài T1/223: Giải phương trình nghiệm nguyên

$$x^4 - y^4 + z^4 + 2x^2z^2 + 3x^2 + 4z^2 + 1 = 0$$

NGUYỄN ĐỨC TẤN
(TP Hồ Chí Minh)

Bài T2/223: Chứng minh rằng nếu cho trước số nguyên tố p với $p > 5$ thì có một số tự nhiên r không đổi với $2 \leqslant r \leqslant p - 2$ sao cho trong tập hợp các số dạng $\underbrace{11\ldots1}_{n} + r$ $(n = 1, 2, \ldots)$ không có số nào chia hết cho p.

NGUYỄN HỮU BẰNG
(Nghệ An)

Bài T3/223: Chứng minh bất đẳng thức

$$1,71 < 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} < 1,72$$

TÔ XUÂN HẢI
(Hải Hưng)

Bài T4/223: Cho tam giác nhọn ABC. Gọi I, O theo thứ tự là tâm các đường tròn nội tiếp, ngoại tiếp tam giác ABC. Tia CI cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai K sao cho $IK = OK$. Hạ các đường cao AD, BE và gọi F là trung điểm của AB. Chứng minh tam giác DEF là đều.

PHẠM NGỌC QUANG
(Thanh Hóa)

Bài T5/223: Cho đường tròn (O), dây BC. Điểm A chuyển động trên đường tròn. Gọi M là trung điểm của AC, H là chân đường vuông góc hạ từ M xuống đường thẳng AB. Tìm quỹ tích điểm H.

VŨ HỮU BÌNH
(Hà Nội)

CÁC LỚP THCB

Bài T6/223: Cho bốn số a, b, c, d và số tự nhiên n thỏa mãn :

$$\begin{cases} a = a^n + b^n + c^n \\ b = b^n + c^n + d^n \\ c + d^n + a^n + c^n \\ d = d^n + a^n + b^n \end{cases}$$

Chứng tỏ rằng $a = c$ và $b = d$.

NGUYỄN LÊ DŨNG
(TP Hồ Chí Minh)

Bài T7/223: Cho $x, y, z > 0$. Chứng minh rằng:

$$16xyz(x + y + z) \leqslant 3\sqrt[3]{(x + y)^4(y + z)^4(z + x)^4}$$

NGUYỄN VĂN HỌC
(Nam Hà)

Bài T8/223 : x, y, z là ba góc thuộc $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Chứng minh rằng :

$$\left|\frac{\sin x - \sin y}{\sin z} + \frac{\sin y - \sin z}{\sin x} + \frac{\sin z - \sin x}{\sin y}\right| \leqslant \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$$

NGUYỄN BÁ ĐANG
(Hải Hưng)

Bài T9/223: Cho hình chóp ngũ giác đều $SA_1A_2A_3A_4A_5$. Một mặt phẳng $(\mathcal{C})$ quay quanh đường cao SO của hình chóp, cắt các mặt phẳng (SA_1A_2), (SA_2A_3), (SA_3A_4), (SA_4A_5), (SA_5A_1) theo các giao tuyến SM_i $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$. Gọi α_i là các góc tạo bởi SM_i với mặt phẳng đáy $(A_1A_2A_3A_4A_5)$, $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$. Chứng minh rằng : $\sum_{i=1}^{5} tg^2\alpha_i$ nhận một giá trị không đổi.

LÊ QUỐC HÁN
(Nghệ An)

Bài T10/223 : Cho tứ diện trực tâm là H. Các đường cao AA_o, BB_o, CC_o, DD_o kéo dài cắt mặt cầu ngoại tiếp tại các điểm tương ứng A', B', C', D'. Chứng minh rằng nếu $A_oA' = B_oB' = C_oC' = D_oD'$ thì tứ diện $ABCD$ là đều.

TRẦN DUY HINH
(Bình Định)

CÁC ĐỀ VẬT LÍ

Bài L1/223: Cho n điện trở $R_1, R_2, \ldots, R_n$ mắc song song. Tính :

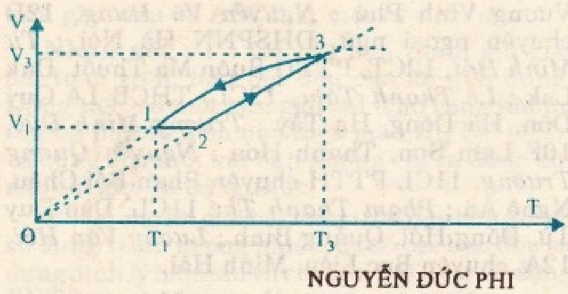
1) Điện trở tương đương theo R_1. Biết :

$$\frac{R_1}{2R_2} = \frac{2R_2}{3R_3} = \frac{3R_3}{4R_4} = \ldots = \frac{(n-1)R_{n-1}}{nR_n} = \frac{nR_n}{R_1}$$

2) Số điện trở cần mắc song song để được điện trở tương đương nhỏ hơn điện trở thứ n là 3 lần ?

NGUYỄN CKÔNG MỸ
(Hà Tĩnh)

Bài L2/223: Một mol khí lí tưởng thực hiện chu trình 1 – 2 – 3 – 1 như hình vẽ. Biết $T_1 = 300K$, $T_3 = 675K$, $V_3 = 5$ lít. Các điểm 1 và 3 cùng ở trên parabol qua gốc tọa độ. Tính công sinh ra trong cả chu trình.



NGUYỄN ĐỨC PHI
(Quảng Ngãi)

https://tieulun.hopto.org

PROBLEMS IN THIS ISSUE

For lower secondary schools

T1/223. Find integral solutions of the equation
$$x^4 - y^4 + z^4 + 2x^2z^2 + 3x^2 + 4z^2 + 1 = 0.$$

T2/223. Prove that for a given prime number $p > 5$, there exists a natural number r, $2 \leq r \leq p - 2$, such that there is no number written in the form $\underbrace{11...1}_{n \text{ times}} + r$ $(n = 1, 2, ...)$ which is divisible by p.

T3/223. Prove the inequality
$$1{,}71 < 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!} < 1{,}72.$$

T4/223. Let be given an acute triangle ABC ; let I and O be respectively its incenter and circumcenter, AD, BE be its altitudes and F be the midpoint of AB. Suppose that the semi-line CI cuts the circle (O) at a second point K such that $IK = OK$. Prove that the triangle DEF is equilateral.

T5/223. Let be given a circle and its chord BC. A point A moves on the circle. Let M be the midpoint of AC and H be the orthogonal projection of M on the line AB. Find the locus of H.

For upper secondary schools.

T6/223 n is a given natural number. Prove that if four numbers a, b, c, d satisfy
$$\begin{cases} a = a^n + b^n + c^n \\ b = b^n + c^n + d^n \\ c = c^n + d^n + a^n \\ d = d^n + a^n + b^n \end{cases}$$
then $a = c$, $b = d$.

T7/223. Prove that
$$16xyz(x+y+z) \leq 3\sqrt[3]{(x+y)^4(y+z)^4(z+x)^4}$$
for $x, y, z > 0$.

T8/223. x, y, z are three angles in $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$. Prove that
$$\left|\frac{\sin x - \sin y}{\sin z} + \frac{\sin y - \sin z}{\sin x} + \frac{\sin z - \sin x}{\sin y}\right| \leq \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2.$$

T9/223. Let be given a regular pentagonal pyramid $SA_1A_2A_3A_4A_5$. A plane rotating about the altitude SO of the pyramid cuts the planes (SA_1A_2), (SA_2A_3), (SA_3A_4), (SA_4A_5), (SA_5A_1) respectively along the lines SM_i $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$. Let α_i be the angle formed by SM_i with the base $(A_1A_2A_3A_4A_5)$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$. Prove that the value of $\sum_{i=1}^{5} tg^2\alpha_i$ is constant.

T10/223. Let H be the orthocenter of an orthocentral tetrahedron $ABCD$. The altitudes AA_o, BB_o, CC_o, DD_o cut the circumscribed sphere again at A', B', C', D'. Prove that if $A_oA' = B_oB' = C_oC' = D_oD'$ then $ABCD$ is a regular tetrahedron.

MỘT BÀI TOÁN TÔ MÀU GRAPH

NGUYỄN VĂN NGỌC
(Hà Nội)

I. MỞ ĐẦU

Tập hợp V các điểm và tập hợp E các đường liền nét nối các cặp điểm nào đó thuộc V tạo nên một graph. Mỗi điểm thuộc V được gọi là một đỉnh, còn mỗi đường liền nét thuộc E được gọi là một cạnh của graph ấy.

Hai đỉnh của graph được gọi là kề nhau nếu chúng được nối với nhau bởi một cạnh.

Dãy các đỉnh đôi một khác nhau $v_1, v_2, ..., v_n$ $(n \geq 2)$, mà v_i, v_{i+1} kề nhau $\forall i = \overline{1, n-1}$, cùng các cạnh nối các cặp đỉnh v_i, v_{i+1} $(i = \overline{1, n-1})$ được gọi là một xích đơn. v_1 và v_n được gọi là hai đầu mút của xích đơn ấy.

Dãy các đỉnh đôi một khác nhau $v_1, v_2, ..., v_n$ $(n \geq 3)$, mà v_i, v_{i+1} kề nhau $\forall i = \overline{1, n}$ (quy ước v_{n+1} là v_1), cùng các cạnh nối các cặp đỉnh v_i, v_{i+1} $(i = \overline{1, n})$ được gọi là một chu trình đơn. Số cạnh của một chu trình đơn được gọi là độ dài của chu trình đơn ấy.

Một graph, mà hai đỉnh bất kì của nó là hai đầu mút của ít nhất một xích đơn, được gọi là graph liên thông.

Một graph liên thông, mà không có chu trình đơn, được gọi là một cây.

Ta nói "graph G tô được bằng k màu" nếu dùng k màu có thể tô được tất cả các đỉnh của G sao cho hai đỉnh kề nhau có màu khác nhau. Nếu graph G tô được bằng k màu nhưng không tô được bằng $k - 1$ màu thì số k được gọi là sắc số của G và kí hiệu bởi $\chi(G)$.

Graph có sắc số bằng 2 còn được gọi là graph chẵn. Dễ thấy, một cây bất kì là một graph

https://tieulun.hopto.org

chẵn. Hơn thế, người ta còn chứng minh được : "Grapha G là graph chẵn khi và chỉ khi G không có chu trình đơn độ dài lẻ". Hay nói một cách khác : *"Tính chẵn và tính không có chu trình đơn độ dài lẻ của một graph là tương đương nhau"*. Đó là nội dung của Định lí Köning.

Như vậy, để có sắc số lớn hơn 2 thì graph phải chứa chu trình đơn độ dài lẻ. Chu trình đơn độ dài lẻ có số đỉnh ít nhất (3 đỉnh) thường được gọi là tam giác. Có thể có graph có sắc số lớn mà không có tam giác không ? Câu hỏi đó đã được nhà toán học Nga Zưkov trả lời vào năm 1949. Ông đã chứng minh được Định lí sau : *"Tồn tại graph không chứa tam giác có sắc số lớn tùy ý"*.

(Các bạn học sinh hãy thử tự tìm cách chứng minh các định lí nêu trên !).

Điểm qua đôi nét về quá trình nghiên cứu vấn đề tô màu graph để chúng ta có thể cùng nhau đi đến nhận định : *"Vai trò của chu trình đơn độ dài lẻ là rất quan trọng đối với sắc số của graph"*. Việc tìm tòi các kết quả nhằm minh chứng cho nhận định này là một trong các hướng nghiên cứu vấn đề tô màu graph. Dưới đây tôi xin nêu ra cùng các bạn một trong những vấn đề rất cơ sở trong việc xây dựng nền móng cho hướng nghiên cứu này.

Xin nói thêm rằng, các kết quả đã thu được theo hướng nghiên cứu nói trên hiện còn rất ít ỏi ; tuy vậy, chúng cũng đã góp phần giải quyết một số vấn đề được đặt ra theo một hướng nghiên cứu khác, của nhà toán học nổi tiếng Hungari P.Erdös, xung quanh vấn đề tô màu graph.

II. BÀI TOÁN

Với suy nghĩ rằng các chu trình đơn độ dài lẻ ảnh hưởng tới sắc số của graph bởi hai yếu tố – độ dài và cách sắp xếp của các chu trình đó trong graph – chúng ta có thể đặt vấn đề cố định yếu tố độ dài để nghiên cứu cách sắp xếp tối ưu của chúng trong các graph có cùng sắc số. Có nhiều tiêu chuẩn để xét tính tối ưu, bài toán sau đây đề cập tới một tiêu chuẩn đơn giản nhất.

Bài toán : Hãy tìm graph có ít đỉnh nhất trong tất cả các graph có sắc số bằng k và không có chu trình đơn với độ dài lẻ bé hơn $2l + 1$.

Với $l = 1$ và k bất kì, graph cần tìm là graph có k đỉnh và bất kì hai đỉnh nào của nó cũng kề nhau.

Với l bất kì và $k = 3$, graph cần tìm là graph có $2l + 1$ đỉnh và có đúng một chu trình đơn – chu trình đơn độ dài $2l + 1$.

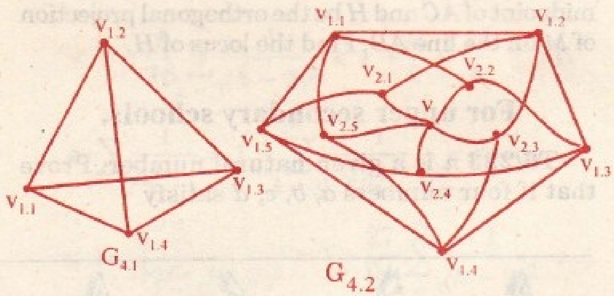
Xét l bất kì và $k = 4$. Trong trường hợp này, theo tôi, graph cần tìm là graph được xây dựng như sau :

Lấy các đỉnh $v_{1.1}, v_{1.2}, \ldots v_{1.(2l+1)}$. Nối mỗi đỉnh $v_{1.i}$, $i = \overline{1, 2l+1}$, với đỉnh $v_{1.(i+1)}$ (quy ước $v_{1.(2l+2)}$ là $v_{1.1}$).

Tiếp theo, lấy các đỉnh : $v_{2.1}, v_{2.2}, \ldots, v_{2.(2l+1)}; \ldots; v_{l.1}, v_{l.2}, \ldots, v_{l.(2l+1)}$. Nối mỗi đỉnh $v_{j.i}, j = \overline{2, l}, i = \overline{1, 2l+1}$, với hai đỉnh $v_{(j-1).i_1}$ và $v_{(j-1).i_2}$, ở đây : $1 \leq i_1, i_2 \leq 2l+1$ và $i_1 \equiv (i-1)(mod(2l+1))$, $i_2 \equiv (i+1)(mod(2l+1))$.

Cuối cùng, lấy đỉnh v và nối v với từng đỉnh $v_{l.1}, v_{l.2}, \ldots, v_{l.(2l+1)}$.

Ta được một graph có $(2l + 1)l + 1$ đỉnh và kí hiệu là $G_{4.l}$.



$G_{4.1}$ $G_{4.2}$

Để chứng minh $G_{4.l}$ thỏa mãn các yêu cầu đặt ra, trước hết hãy chứng minh $\chi(G_{4.l}) = 4$. Tiếp theo, cần chứng minh $G_{4.l}$ không chứa các chu trình đơn với độ dài lẻ bé hơn $2l + 1$. Và cuối cùng, phải chứng minh $G_{4.l}$ có ít đỉnh nhất trong số các graph có sắc số bằng 4 và không có chu trình đơn với độ dài lẻ bé hơn $2l + 1$.

Có thể chứng minh những điều vừa nêu như thế nào ? Còn hay không những lời giải khác cho trường hợp đang xét (l bất kì và $k = 4$) ? Các trường hợp chưa được xét đến ở đây của bài toán sẽ được giải quyết ra sao ? Có thể tiếp tục đặt ra những vấn đề gì xung quanh bài toán đã nêu ? Đó là những câu hỏi mà tác giả bài viết này trông đợi sự giải đáp của bạn đọc. Rất mong được các bạn hưởng ứng. Xin cảm ơn các bạn.

https://tieulun.hopto.org

CÁC BÀI TOÁN THI HỌC SINH GIỎI THPT TOÀN QUỐC NĂM 1995

(BẢNG A)

I. ĐỀ THI :

Ngày thi thứ nhất (02-3-1995)

Bài 1 : Giải phương trình

$x^3 - 3x^2 - 8x + 40 - 8\sqrt[4]{4x+4} = 0$

Bài 2 : Dãy số $\{a_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, được xác định như sau : $a_o = 1$, $a_1 = 3$ và với mọi $n = 0, 1, 2, 3, ...$ thì

$$a_{n+2} = \begin{cases} a_{n+1} + 9a_n & \text{nếu n chẵn} \\ 9a_{n+1} + 5a_n & \text{nếu n lẻ} \end{cases}$$

Chứng minh rằng :

1) $\sum_{k=1995}^{2000} a_k^2$ chia hết cho 20.

2) a_{2n+1} không là số chính phương với mọi $n \in \mathbb{N}$.

Bài 3 : Xét tam giác không đều ABC với các đường cao AD, BE, CF. Lấy các điểm A', B', C' sao cho $\overrightarrow{AA'} = k\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BB'} = k\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{CC'} = k\overrightarrow{CF}$, trong đó k là số thực khác không.

1) Với $k = \frac{2}{3}$ chứng minh rằng tam giác $A'B'C'$ đồng dạng với tam giác ABC và hãy tính tỉ số đồng dạng theo các góc của tam giác ABC.

2) Tìm tất cả các giá trị $k \neq 0$ sao cho với mọi tam giác không đều ABC ta luôn có tam giác $A'B'C'$ đồng dạng với tam giác ABC.

Ngày thi thứ hai (03-3-1995)

Bài 4 : Cho hình tứ diện $ABCD$. Gọi A', B', C', D' theo thứ tự là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD, CDA, DAB, ABC.

Chứng minh rằng : mặt phẳng đi qua A vuông góc với $C'D'$, mặt phẳng đi qua B vuông góc với $D'A'$, mặt phẳng đi qua C vuông góc với $A'B'$, mặt phẳng đi qua D vuông góc với $B'C'$ là bốn mặt phẳng cùng đi qua một điểm.

Nếu giao điểm của bốn mặt phẳng trên là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình tứ diện $ABCD$ thì hình tứ diện $ABCD$ có bắt buộc phải đều không ? Vì sao ?

Bài 5 : Hãy xác định tất cả các đa thức P(x) thỏa mãn điều kiện sau : Với mỗi số $a > 1995$ thì số nghiệm thực của phương trình $P(x) = a$ (mỗi nghiệm được tính với số bội của nó) bằng bậc của đa thức $P(x)$, và mỗi nghiệm thực của phương trình trên đều lớn hơn 1995.

Bài 6 : Cho số nguyên $n \geq 2$ và cho một đa giác đều $2n$ đỉnh. Người ta tô tất cả các đỉnh của đa giác đều đó bởi n màu sao cho các điều kiện sau được đồng thời thỏa mãn :

1) Mỗi đỉnh được tô bởi một màu.

2) Mỗi màu được dùng để tô cho đúng hai đỉnh không kề nhau.

Hai cách tô màu, thỏa mãn các điều kiện trên, được gọi là tương đương nếu cách tô màu này có thể nhận được từ cách tô màu kia nhờ một phép quay quanh tâm của đa giác đều đã cho.

Hỏi có tất cả bao nhiêu cách tô màu đôi một không tương đương ?

II. HƯỚNG DẪN GIẢI - LỜI GIẢI

Bài 1 : Điều kiện có nghĩa : $x \geq -1$.

Đặt $t = \sqrt[4]{4x+4}$ (*), $t \geq 0$. Khi đó : $x = \frac{1}{4}(t^4 - 4)$, $x^2 = \frac{1}{16}(t^8 - 8t^4 + 16)$, $x^3 = \frac{1}{64}(t^{12} - 12t^8 + 48t^4 - 64)$. Từ phương trình đã cho ta có phương trình :

$t^{12} - 24t^8 + 16t^4 - 512t + 2816 = 0$

$\Leftrightarrow (t-2)^2(t^{10} + 4t^9 + 12t^8 + 32t^7 + 56t^6 + 96t^5 + 160t^4 + 256t^3 + 400t^2 + 576t + 704) = 0$

$\Leftrightarrow t = 2$ (vì $t \geq 0$).

Từ đó ta được : $\sqrt[4]{4x+4} = 2 \Leftrightarrow x = 3$. Kết hợp với điều kiện có nghĩa suy ra phương trình đã cho có duy nhất nghiệm $x = 3$. ■

Bài 2 : 1) Với mỗi $n \in \mathbb{N}$ gọi b_n, c_n tương ứng là số dư trong phép chia a_n cho 4 và cho 5. Khi đó : $0 \leq b_n \leq 3$, $0 \leq C_n \leq 4, \forall n \in \mathbb{N}$ và $b_o = 1$, $b_1 = 3$, $b_{n+2} = (b_{n+1} + b_n)(mod 4)\ \forall n \in \mathbb{N}$

$c_o = 1$, $c_1 = 3$, c_{n+2}

$$= \begin{cases} (c_{n+1} - c_n)(mod 5)\ \text{nếu n chẵn} \\ -c_{n+1}\ (mod 5),\ \text{nếu n lẻ.} \end{cases}$$

Bằng tính toán trực tiếp ta được :

$b_o = 1, b_1 = 3, b_2 = 0, b_3 = 3, b_4 = 3, b_5 = 2, b_6 = 1, b_7 = 3$. $c_o = 1, c_1 = 3, c_2 = 2, c_3 = 3, c_4 = 1, c_5 = 4, c_6 = 3, c_7 = 2, c_8 = 4, c_9 = 1, c_{10} = 2, c_{11} = 3, ...$

Từ đó suy ra $b_k = b_{k+6t}$ $\forall k, t \in \mathbb{N}$ và $c_k = c_{k+8t}$ $\forall k \geq 2$, $\forall t \in \mathbb{N}$. Vì thế, từ $1995 = 3 + 6 \times 332 = 3 + 8 \times 249$ và $1996 = 4 + 6 \times 332 = 4 + 8 \times 249$ ta được $b_{1995} = b_3 = 3$, $b_{1996} = b_4 = 3$; $c_{1995} = c_3 = 3$, $c_{1996} = c_4 = 1$, và do đó $b_{1997} = 2$, $b_{1998} = 1$, $b_{1999} = 3$, $b_{2000} = 0$; $c_{1997} = 4$, $c_{1998} = 3$, $c_{1999} = 2$, $c_{2000} = 4$.

https://tieulun.hopto.org

Suy ra : $\sum_{k=1995}^{2000} a_k^2 \equiv \sum_{k=1955}^{2000} b_k^2 \equiv 0 \ (mod4)$ (1)

$$\sum_{k=1955}^{2000} a_k^2 \equiv \sum_{k=1995}^{2000} c_k^2 \equiv 0 \ (mod5) \quad (2)$$

Vì (4, 5) = 1 nên từ (1) và (2) ta có

$$\sum_{k=1995}^{2000} a_k^2 \equiv 0 \ (mod20) \blacksquare$$

2) Vì $\forall n \in \mathbf{N}$ thì $2n+1$ hoặc có dạng $6k+1$ hoặc có dạng $6k+3$ hoặc có dạng $6k+5$ nên, theo phần chứng minh trên, ta có : hoặc $a_{2n+1} \equiv 3 \pmod 4$ hoặc $a_{2n+1} \equiv 2 \pmod 4$.

Mặt khác, dễ thấy, a là số chính phương chỉ khi hoặc $a \equiv 0 \pmod 4$ hoặc $a \equiv 1 \pmod 4$.

Vậy a_{2n+1} không là số chính phương $\forall n \in \mathbf{N}$. ■

Chú ý : Kết quả của phần 2) còn có thể chứng minh độc lập với phần 1) bằng cách xét a_n theo mod3 và mod9. Theo cách này, bạn sẽ chứng minh được rằng a_n không là số chính phương $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

Bài 3 *(Bạn đọc tự vẽ hình)* : 1) Gọi G và H lần lượt là trọng tâm và trực tâm của ΔABC. Do ΔABC không đều nên $G \neq H$.

Từ tính chất của G và từ cách xác định A', B', C' suy ra $\overrightarrow{A'G}, \overrightarrow{B'G}, \overrightarrow{C'G}$, theo thứ tự, cùng phương với BC, CA, AB. Do đó A', B', C' cùng nhìn đoạn GH dưới một góc vuông, và vì thế A', B', C' cùng nằm trên đường tròn đường kính GH. Suy ra :

$$\left.\begin{array}{l}(A'B', A'C') = (GB', GC') = (AC, AB) \\ (B'A', B'C') = (GA', GC') = BC, BA) \\ (C'A', C'B') = (GA', GB') = (CB, CA)\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta A'B'C' \backsim \Delta ABC. \blacksquare$$

(Ở đây, $\widehat{(d, d')}$ kí hiệu góc định hướng giữa đường thẳng d và đường thẳng d').

Gọi q là tỉ số đồng dạng của hai tam giác trên. Có $q = \frac{R'}{R}$, với R, R' theo thứ tự là bán kính đường tròn ngoại tiếp $\Delta A'B'C'$, ΔABC. Dễ thấy :

$R'^2 = \left(\frac{1}{2}GH\right)^2 = \frac{1}{4}\overrightarrow{GH}^2 = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OG})^2$,

với O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Mà : $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ và

$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$

Nên : $R'^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{9}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})^2$

$= \frac{1}{9}R^2(1+1+1+2\cos(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})+2\cos(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC}) + 2\cos(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}))$

$= \frac{R}{9}[3 + 2(\cos 2C + \cos 2B + \cos 2A)]$.

Từ đó: $q = \frac{1}{3}\sqrt{3+2(\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C)}$ ■

2) Xét ΔABC vuông cân tại A. Khi đó, với $k = 1$ thì $\Delta A'B'C'$ suy biến thành đoạn thẳng DA và do đó nó không thể đồng dạng với ΔABC. Với $k \neq 1$ thì $\Delta A'B'C'$ cân tại A'. Vì thế :

- Với $k < 0$ hoặc $k > 1$ thì $\Delta A'B'C'$ là Δ nhọn (do có A' nhọn) $\Rightarrow \Delta A'B'C' \backsim \Delta ABC$.
- Với $0 < k < 1$ thì : $\Delta A'B'C' \backsim \Delta ABC \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\widehat{B'A'C'} = 90^o \\ \frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}A'B' = \frac{\sqrt{2}}{2}AA' \\ \frac{A'B'}{AB} = 1 - k\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}A'B' = \frac{k}{2}AB \\ \frac{A'B'}{AB} = 1 - k\end{cases} \Leftrightarrow k = \frac{2}{3}.$$

Như vậy, với mọi Δ không đều ABC ta luôn có $\Delta A'BC' \backsim \Delta ABC$ chỉ khi $k = \frac{2}{3}$. Kết hợp với kết quả của phần 1) suy ra có duy nhất giá trị $k = \frac{2}{3}$ thỏa mãn yêu cầu của bài ra. ■

Bài 4 *(Lời giải tóm tắt. Bạn đọc tự vẽ hình)* : 1) Gọi (P_1), (P_2), (P_3), (P_4) lần lượt là mặt phẳng đi qua A vuông góc với $C'D'$; mặt phẳng đi qua B vuông góc với $D'A'$; mặt phẳng đi qua C vuông góc với $A'B'$; mặt phẳng đi qua D vuông góc với $B'C'$.

Gọi $S_{A'}$, $S_{B'}$, $S_{C'}$, $S_{D'}$ lần lượt là mặt cầu tâm A' đi qua B, C, D ; mặt cầu tâm B' đi qua C, D, A ; mặt cầu tâm C' đi qua D, A, B ; mặt cầu tâm D' đi qua A, B, C.

Dễ dàng chứng minh được (P_1), (P_2), (P_3), (P_4) lần lượt là mặt đẳng phương của các cặp mặt cầu : $S_{C'}$ và $S_{D'}$, $S_{D'}$ và $S_{A'}$; $S_{A'}$ và $S_{B'}$; $S_{B'}$ và $S_{C'}$.

Vì A', B', C', D' là hình chiếu vuông góc của tâm O mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ xuống các mặt của tứ diện nên 4 điểm đó không thẳng hàng. Xét hai trường hợp sau :

- Trường hợp 1 : Trong 4 điểm A', B', C', D' không có 3 điểm nào thẳng hàng. Trong trường hợp này, dễ thấy có điểm E có cùng phương tích đối với 4 mặt cầu $S_{A'}$, $S_{B'}$, $S_{C'}$, $S_{D'}$ và điều này chứng tỏ 4 mặt phẳng (P_1), (P_2), (P_3), (P_4) có điểm chung E. ■
- Trường hợp 2 : Trong 4 điểm A', B', C', D' có 3 điểm thẳng hàng. (Xảy ra, chẳng hạn, khi $ABCD$ là tứ diện vuông tại A và mặt BCD là Δ đều). Trong trường hợp này 4 mặt phẳng (P_1), (P_2), (P_3), (P_4) sẽ đồng quy tại "điểm ∞". ■

2) Dễ dàng chứng minh được rằng, nếu $ABCD$ là tứ diện gần đều thì tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ấy là điểm duy nhất có cùng phương tích đối với 4 mặt cầu $S_{A'}$, $S_{B'}$, $S_{C'}$, $S_{D'}$. Từ đó suy ra, khi điểm chung của 4 mặt phẳng (P_1), (P_2), (P_3), (P_4) trùng với tâm của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $ABCD$ thì tứ diện ấy không bắt buộc phải đều. ■

Bài 5 : • *Xét các đa thức P(x) có bậc ≥ 1 và là hàm đơn điệu trên $(-\infty, +\infty)$.* Do đó thị hàm $P(x)$ chỉ có hữu hạn điểm uốn nên trong trường hợp này $\exists\, a > 1995$ sao cho phương trình $P(x) = a$ chỉ có một nghiệm (mỗi nghiệm

https://tieulun.hopto.org

được tính với số bội của nó). Suy ra $P(x)$ thỏa mãn yêu cầu của đề bài chỉ khi $\deg P(x) = 1$, nghĩa là $P(x)$ có dạng $P(x) = px + q$, $p \neq 0$. Khi đó, $\forall a > 1995$ phương trình $P(x) = a$ (3) luôn có duy nhất nghiệm $x = \dfrac{a-q}{p}$, và vì thế mọi nghiệm của (3) đều lớn hơn 1995 $\forall a > 1995$ khi và chỉ khi $\dfrac{a-1}{p} > 1995$ $\forall a > 1995 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} p > 0 \\ q \leq 1995(1-p) \end{cases}$$

● *Xét các đa thức $P(x)$ là hàm có cực trị trên $(-\infty, +\infty)$*

Khi đó $\deg P(x) \geq 2$. Giả sử $P(x)$ đạt cực đại tại m điểm ($m \in \mathbf{N}$) $u_1, u_2, \ldots, u_m$ và đạt cực tiểu tại k điểm ($k \in \mathbf{N}$) $v_1, v_2, \ldots, v_k$. Đặt $b = \max\{P(u_1), P(u_2), \ldots, P(u_m), P(v_1), \ldots, P(v_k)\}$.

Do đồ thị hàm $P(x)$ chỉ có hữu hạn điểm uốn nên $\exists\, a > \max\{b, 1995\}$ sao cho phương trình $P(x) = a$ chỉ có tối đa hai nghiệm (mỗi nghiệm được tính với số bội của nó). Suy ra $P(x)$ thỏa mãn yêu cầu đề bài chỉ khi $\deg P(x) = 2$. Tuy nhiên, dễ thấy, với $P(x)$ là tam thức bậc hai thì $\exists\, a > 1995$ sao cho phương trình $P(x) = a$ chỉ có tối đa một nghiệm lớn hơn 1995.

● *Xét các đa thức $P(x) = const$.* Dễ thấy, chỉ có các đa thức $P(x) \equiv c$, với $c \leq 1995$, là các đa thức thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Tóm lại, tất cả các đa thức cần tìm là :

$P(x) = px + q$, với $p > 0$ và $q \geq 1995(1-p)$

$P(x) \equiv c$, với $c \geq 1995$. ■

Bài 6 *(Lời giải tóm tắt)* : Xuất phát từ một đỉnh nào đó lần lượt theo chiều kim đồng hồ, kí hiệu các đỉnh của đa giác bởi $A_1, A_2, \ldots, A_{2n}$. Kí hiệu các màu dùng để tô là $m_1, m_2, \ldots, m_n$ và gọi M là tập gồm tất cả n màu ấy.

Gọi $f(n)$ là số cách tô màu thỏa mãn các điều kiện 1), 2) của bài toán. Có $f(n) = |A|$, với

$$A = \left\{ (m_{i_1}, \ldots, m_{i_{2n}}) \text{ có thứ tự} \mid \text{mỗi } m_i, i = \overline{1,n}, \text{có mặt đúng 2 lần trong bộ}; m_{i_j} \neq m_{i_{j+1}}\ \forall j = \overline{1,2} \right\}$$

(quy ước $m_{i_{2n+1}}$ là m_{i_1}).

(Ở đây, $|X|$ kí hiệu số phần tử của tập X).

Xét tập $B(n) = \{ (m_{i_1}, m_{i_2}, \ldots, m_{i_{2n}})$ có thứ tự $\mid$ mỗi m_i, $i = \overline{1,n}$, có mặt đúng 2 lần trong bộ ; $m_{i_j} \neq m_{i_{j+1}}$ $\forall j = \overline{1, 2n-1}\}$

Đặt $g(n) = |B(n)|$. Dễ thấy, có $f(n) = g(n) - ng(n-1)$ (4)

● Tính $g(n)$. Xét các tập :

$T = \{ (m_{i_1}, m_{i_2}, \ldots, m_{i_{2n}})$ có thứ tự $\mid$ mỗi m_i, $i = \overline{1,n}$, có mặt đúng 2 lần trong bộ $\}$

$T_i = \{t \in T \mid$ trong t có m_i chiếm hai vị trí liên tiếp $\}$, $i = \overline{1,n}$.

Hiển nhiên có $B(n) = T \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{n} T_i$, suy ra

$$g(n) = |B(n)| = |T| - \left|\bigcup_{i=1}^{n} T_i\right| =$$

$$= |T| - \sum_{i=1}^{n} |T_i| + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} |T_{i_1} \cap T_{i_2}| - \ldots + \ldots +$$

$$+ \ldots + (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} \left|\bigcap_{j=1}^{k} T_{i_j}\right| + \ldots + (-1)^n \left|\bigcap_{i=1}^{n} T_i\right|$$

Có $|T| = \dfrac{(2n)!}{2^n}$. Xét k bất kì $\in \{1, 2, \ldots, n\}$ và xét bộ $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ bất kì thỏa mãn $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n$. Đặt tương ứng mỗi $b \in \bigcap\limits_{j=1}^{k} T_{i_j}$ với bộ nhận được từ b bằng cách bỏ đồng thời khỏi b một phần tử m_{i_1}, một phần tử m_{i_2}, ..., một phần tử m_{i_k}. Dễ dàng chứng minh được rằng tương ứng nói trên xác lập cho ta một song ánh từ tập $\bigcap\limits_{j=1}^{k} T_{i_j}$ đến tập V gồm tất cả các bộ có thứ tự $(m_{v_1}, \ldots, m_{v_{2n-k}})$ mà trong mỗi bộ thì : mỗi m_{i_j}, $j = \overline{1,k}$, có mặt đúng một lần, còn mỗi $m_i \in M \setminus \{m_{i_1}, \ldots, m_{i_k}\}$ có mặt đúng 2 lần.

Từ đó suy ra $\left|\bigcap\limits_{j=1}^{k} T_{i_j}\right| = |V| = \dfrac{(2n-k)!}{2^{n-k}}$.

Do đó :

$$g(n) = \frac{(2n)!}{2^n} + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \cdot \frac{(2n-k)!}{2^{n-k}} \cdot C_n^k \quad (5)$$

Suy ra : $g(n-1) =$

$$= \frac{(2n-2)!}{2^{n-1}} + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \cdot \frac{(2n-2-k)!}{2^{n-1-k}} \cdot C_{n-1}^k$$

$$= -\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \cdot \frac{(2n-1-k)!}{2^{n-k}} \cdot C_{n-1}^{k-1} \quad (6)$$

● Tính $f(n)$. Thay (5), (6) vào (4) ta được :

$$f(n) = 2n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \frac{(2n-1-k)!}{2^{n-k}} \cdot C_n^k$$

● Nhận thấy : mỗi cách tô màu, mà $\exists\, k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ sao cho A_k và A_{k+n} khác màu, đều có đúng $2n$ cách tô màu tương đương với nó ; còn mỗi cách tô màu, mà A_k và A_{k+n} cùng màu $\forall k = \overline{1,n}$, đều có đúng n cách tô màu tương đương với nó. Hơn nữa, dễ thấy, có tất cả $n!$ cách tô màu mà trong mỗi cách đều có A_k và A_{k+n} cùng màu $\forall k = \overline{1,n}$.

Từ đó suy ra, nếu kí hiệu $\varphi(n)$ là số cách tô màu đôi một không tương đương thì :

$$\varphi(n) = \frac{f(n) - n!}{2n} + \frac{n!}{n} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \frac{(2n-1-k)!}{2^{n-k}} \cdot C_n^k + \frac{1}{2}(n-1)! \ ■$$

NGUYỄN KHẮC MINH

https://tieulun.hopto.org

Tìm hiểu sâu thêm Toán học phổ thông

TRUNG BÌNH CÉSARO VÀ VÀI ÁP DỤNG TRONG VIỆC TÌM GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

LÊ QUANG ÁNH
(TP Hồ Chí Minh)

Ngoài các phương pháp thông thường đã được giảng dạy trong trường phổ thông, dưới đây là một phương pháp khá hữu hiệu để tìm giới hạn của một dãy số, giúp thêm phương tiện cho các học sinh lớp chuyên, chọn cấp 3.

1) Trung bình Césaro của một dãy số

1. Định nghĩa. Cho dãy số (u_n). Đặt :

$$v_n = \frac{u_1 + u_2 + ... + u_n}{n}$$

Dãy số (v_n) gọi là dãy số trung bình Césaro của dãy số (u_n)

2. Định lí. Nếu dãy số (u_n) hội tụ đến l thì dãy số (v_n) cũng hội tụ đến l.

Chứng minh. (u_n) tiến tới l nên :

$\forall \varepsilon > 0 ; \exists n_o \in \mathbb{N} : n \geq n_o \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon$

Hiệu $v_n - l$ có thể viết :

$$v_n - l = \frac{(u_1 + u_2 + ... + u_{n_o}) + (u_{n_o+1} + ... + u_n) - nl}{n}$$

$$= \frac{u_1 + u_2 + ... + u_{n_o}}{n} + \frac{(u_{n_o+1} - l) + ... + (u_n - l)}{n} = a_n + b_n$$

Với : $a_n = \frac{A}{n}$ $(A = u_1 + ... + u_{n_o})$

$$b_n = \frac{(u_{n_o+1} - l) + ... + (u_n - l)}{n}$$

Hiển nhiên là :

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0 \text{ và } |b_n| \leq \frac{(n - n_o)\varepsilon}{n} < \varepsilon \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} b_n = 0$$

Vậy : $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n - l) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$.

2) Áp dụng để giải một số bài tập.

Bài 1 Cho dãy số (u_n) định bởi :

$$u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{2n} + ... + \frac{1}{n^2}$$

Xét tính hội tụ của (u_n).

Giải

$$u_n = \frac{\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}}{n}$$

Như vậy dãy số (u_n) là trung bình Césaro của dãy số $\left(\frac{1}{n}\right)$, mà $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ nên $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Bài 2 Xét tính hội tụ của dãy số (u_n) định bởi :

$$u_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{2}{k}\right)^{k/n}$$

Giải. Ta có : $\ln u_n = \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{2}{k}\right)^k$

Dãy số $(\ln u_n)$ là trung bình Césaro của dãy số $\left(\ln(1 + \frac{2}{n})^n\right)$.

Mà : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n = e^2 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n = 2$

Từ đó suy ra : $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln u_n = 2 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = e^2$.

Bài 3. (u_n) là một dãy số sao cho :

$$\lim_{n\to+\infty} (u_{n+1} - u_n) = l$$

Chứng minh : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} = l$.

Giải. Đặt : $v_n = u_n - u_{n-1}$ $(n \geq 1)$

Ta có : $v_1 + v_2 + ... + v_n =$

$= (u_1 - u_o) + (u_2 - u_1) + ... + (u_n - u_{n-1}) = u_n - u_o$

Do đó : $\frac{u_n}{n} = \frac{v_1 + v_2 + ... + v_n}{n} = \frac{u_o}{n}$

Theo giả thiết dãy số (v_n) hội tụ đến l và vì

$$\frac{u_o}{n} \to 0 \text{ cho nên : } \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} = l.$$

Bài 4 1) (u_n) là một dãy số dương. Giả sử $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \to l > 0$ khi $n \to +\infty$; hãy chứng minh : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$

2) Áp dụng : Tính $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{C_{2n}^n}$ $(n \geq 1)$

Giải. Đặt : $t_n = \ln u_{n+1} - \ln u_n = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$

Ta có : $s_n = \frac{t_o + t_1 + ... + t_{n-1}}{n}$

$$= \frac{(\ln u_1 - \ln u_o) + (\ln u_2 - \ln u_1) + ... + (\ln u_n - \ln u_{n-1})}{n}$$

$$= \frac{\ln u_n - \ln u_o}{n}$$

Do giả thiết $(t_n) \to \ln l$ nên $(s_n) \to \ln l$. Suy ra :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln u_n}{n} = \ln l \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \ln \sqrt[n]{u_n} = \ln l \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l.$$

2) Áp dụng :

$$u_n = \sqrt[n]{C_{2n}^n} \ (n \geq 1)$$

Đặt : $W_n = C_{2n}^n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$

Thế thì : $\frac{W_{n+1}}{W_n} = \frac{\frac{(2n+2)!}{[(n+1)!]^2}}{\frac{(2n)!}{(n!)^2}} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}$

Ta thấy $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{W_{n+1}}{W_n} = 4$, cho nên $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{W_n} = 4$.

Tóm lại : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{C_{2n}^n} = 4$.

Trên đây là một số thí dụ để bạn đọc thấy cách áp dụng định lí hội tụ của dãy số theo cách Césaro. Áp dụng rất đơn giản và đến kết quả khá nhanh. Các bạn thử áp dụng trong các trường hợp khác sau đây xem sao.

Bài tập đề nghị.

1. Nếu dãy số (u_n) sao cho :

$$\lim_{n\to+\infty} (u_{n+1} - u_n) = l$$

thì hãy chứng minh : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} = l$.

2. Nếu dãy số dương (u_n) sao cho $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ thì hãy chứng minh :

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_1 u_2 ... u_n} = l$$

3. Khảo sát sự hội tụ của dãy số (u_n) định bởi :

$$u_n = \sqrt[n]{n^3 + n^2 - 1}$$

https://tieulun.hopto.org

Em PHẠM HUY TÙNG nhận Giải xuất sắc

Biên tập viên VŨ KIM THỦY dẫn chương trình

MỘT SỐ HÌNH ẢNH BUỔI LỄ ĐÓN HUÂN CHƯƠNG

Phó tổng biên tập NGÔ ĐẠT TỨ công bố danh sách các em đoạt giải

Trao Bằng danh dự và giải thưởng cho các em đoạt giải cuộc thi năm 1994

Giải trí TOÁN HỌC

Giải đáp bài CÔ GIÁO PHẠT AI ?

Theo đề bài ta lập bảng đánh giá các câu trả lời "dối", "thật" của 3 bạn Đông, Bắc và Nam như sau :

	Câu trả lời		
Vẽ bậy	Đông	Nam	Bắc
Đông	dối	thật	dối
Bắc	thật	dối	thật
Nam	thật	thật	dối

Từ bảng đánh giá này ta suy ra 2 trường hợp thỏa mãn đề bài là :

– Bắc vẽ bậy và Nam nói dối

– Nam vẽ bậy và Bắc nói dối

Vì đề bài chỉ yêu cầu tìm hai bạn bị cô giáo phạt về tội vẽ bậy hoặc nói dối nên ta có hai bạn bị cô giáo phạt là Bắc và Nam.

(*Lê Khánh Toàn*, lớp 4E, trường cấp I Võ Xán, Tây Sơn, Bình Định)

BÌNH PHƯƠNG

Vui Năm Mới

Nhân dịp đầu năm mới, các bạn hãy vui giải trí với số 1996 bằng cách phân tích số 1996 thành tổng của 4 số sao cho : Khi cộng số thứ nhất với 1, trừ số thứ hai cho 2, nhân số thứ ba với 3, chia số thứ tư cho 4 thì được các kết quả bằng nhau.

NGÔ HÂN

MỘT DẤU HIỆU . . .

(Tiếp theo trang 3)

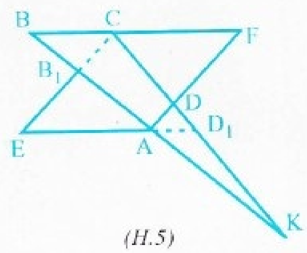
Cộng vế với vế hai đẳng thức trên ta được :

$AK + CL = AL + CK$, do đó theo định lý 1 ta có tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp.

b) Hai tứ giác $MBNO$ và $OPDQ$ ngoại tiếp :

Khi đó theo định lý 1 ta có : $\begin{cases} BK + BL = OK + OL \\ OK + OL = OK + DL \end{cases}$

$\Rightarrow BK + BL = DK + DL$, do đó lại theo định lý 1 ta có tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp.



(H.5)

* BÀI TOÁN 3 : Cho tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp. Qua C vẽ đường thẳng song song với AD cắt đường thẳng AB tại B_1, qua A vẽ đường thẳng song song với BC cắt đường thẳng CD tại D_1. Chứng minh rằng tứ giác AB_1CD_1 ngoại tiếp.

– **Chứng minh** :

* Nếu $ABCD$ là hình thang thì hiển nhiên.
* Giả sử tứ giác $ABCD$ không có hai cạnh nào song song. Ta xét hai trường hợp :

a) (h. 5). – Kéo dài các cạnh đối của hai tứ giác $ABCD$ và AB_1CD_1 cắt nhau tại E, F, K (h. 5). Vì $ABCD$ ngoại tiếp nên theo định lý 1 ta có :

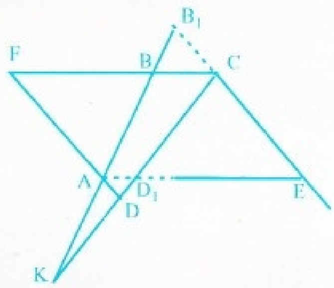
$CF + CK = AF + AK \Rightarrow AE + CK = CE + AK$ (vì tứ giác $AECF$ là hình bình hành). Do đó theo định lý 1 ta có tứ giác AB_1CD_1 ngoại tiếp.

– Kéo dài các cạnh đối của hai tứ giác $ABCD$ và AB_1CD_1 cắt nhau tại E, F, K (h.6). Vì $ABCD$ ngoại tiếp nên theo định lý 1 ta có :

$$AK + CF = AF + CK \Rightarrow AK + AE = CE + CK$$

Theo định lý 1 ta có tứ giác AB_1CD_1 ngoại tiếp.

– Trên đây chúng ta đã vận dụng định lý 1 để chứng minh các tứ giác ngoại tiếp và cách chứng minh rất đẹp (như với bài toán 1). Để khẳng định hiệu quả của định lý 1, các bạn hãy thử sử dụng dấu hiệu trong chương trình toán cấp 2 để giải các bài toán 2 và 3 xem.! Chắc chắn các bạn sẽ gặp khó khăn.



(H.6)

Trụ sở tòa soạn
45B Hàng Chuối, Hà Nội. ĐT : 213786
231 Nguyễn Văn Cừ, TP Hồ Chí Minh. ĐT : 356111

Tổng biên tập : NGUYỄN CẢNH TOÀN
Phó tổng biên tập : NGÔ ĐẠT TỨ, HOÀNG CHÚNG
Biên tập và trị sự : VŨ KIM THỦY

INSS : 8066 – 8035
Chỉ số : 12884
Mã số : 8BT25M5

Sắp chữ tại TTVT Nhà xuất bản Giáo dục
In tại Xưởng Chế bản in NXB Giáo dục
In xong và nộp lưu chiểu tháng 1.1996

Giá : 2000đ
Hai nghìn đồng

https://tieulun.hopto.org